ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc27.06.2017.FM01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЛТАЕВ НУРАЛИ ДАВЛЯТОВИЧ

КУЧЛИ ТЕБРАНУВЧИ ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ОПТИМАЛ АППРОКСИМАЦИЯСИ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2018

УДК: 519.644

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc27.06.2017.FM01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЛТАЕВ НУРАЛИ ДАВЛЯТОВИЧ

КУЧЛИ ТЕБРАНУВЧИ ИНТЕГРАЛЛАРНИНГ ОПТИМАЛ АППРОКСИМАЦИЯСИ

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2018

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3.PhD/FM134 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертацияси Ўзбекистон Республикаси фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Нормурадов Чори Бегалиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Худойберганов Мирзоали Ўразалиевич физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Бухоро давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc27.06.2017.FM01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___» _______________ 2018 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2018 йил 03 декабрдаги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

З.Ҳ. Юлдашев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижасида квант кимёси, тасвирни таҳлил қилиш, электродинамика, компьютер томографияси, суюқлик ва газлар механикаси масалаларининг ечимлари кучли тебранувчи интегралларнинг аниқ интегралларига келтирилади. Шу сабабли, интегралларни сонли ҳисоблаш учун қўлланиладиган усуллар ҳисоблаш математикаси соҳаси тадқиқотларининг объектидир. Бунда кучли тебранувчи интегралларни аниқ интегралларга келтириб ҳисоблашда квадратур ва кубатур формулалар назарияси асос сифатида хизмат қилади. Кучли тебранувчи интегралларни маълум усуллар ёрдамида ҳисоблаш катта ҳажмдаги ҳисоблашларни талаб қилса, тақрибий ҳисоблаш формулаларини оптималлаштириш зарур бўлади. Шунинг учун кучли тебранувчи интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун самарали усулларни ишлаб чиқиш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб келмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда кучли тебранувчи интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун дифференциалланувчи функцияларнинг турли фазоларида оптимал квадратур формулалар қуриш ҳисоблаш математикасининг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Бу масалаларни ечишда, сонли ҳисоблашнинг асимптотик ёйиш усули, Файлон типидаги усул, Левиннинг коллокация усули, энг тез тушиш каби самарали усуллари мавжуд бўлиб, улар оптимал квадратур ва кубатур формулаларни ҳисоблашда муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: кучли тебранувчи интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун асимптотик оптимал, тартиб бўйича оптимал ва оптимал квадратур формулалар қуриш, ҳамда уларнинг хатоликларини турли дифференциялланувчи функциялар фазоларида баҳолаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаменталь фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математик физика, электродинамика, амалий математика ва ҳисоблаш математикасининг долзарб йўналишларга эътибор кучайтирилди. Шу жумладан, интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун турли фазоларда даврий ва даврий бўлмаган функциялар учун оптимал квадратур ва кубатур формулалар қуришда муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, математик физика, динамик системалар назарияси, амалий ва ҳисоблаш математикаси» каби фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарорни ижросини таъминлашда кучли тебранувчи интеграллларни тақрибий ҳисоблаш ва дифференциалланувчи турли Гильберт фазоларида уларнинг хатоликларини баҳолаш учун оптимал квадратур формулалар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Интеграл остидаги ифоданинг хоссаларига асосланиб, кучли тебранувчи интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун самарали усуллар ишлаб чиқилган. Жумладан, асимптотик ёйиш усули, Файлон усули, Левининг коллокация усули, энг тез тушиш усуллари ва оптимал квадратур формулалар яратилган. Бу усуллар ва формулалар бўйича D.Huybrechs, Sh.Olver, A.Iserles, S.P.Norsett, Siraj-ul-Islom Sakhi Zaman, Siraj-ul-Islom Uzma Nasib, S.Olver, H.Wang, L.Zhang, A.Asheim, V.Dominguez, E.A.Flinn, J.Gao, J.M.Melenk, K.N.Melnik, R.V.N.Melnik, H.Mo, Sh.Xiang, L.F.Shampine, S.Xiang, G.He, Y.J.Cho, H.Kang, M.I.Israilov, J.R.Webster, A.S.Cvetkovic, M.P.Stanic, X. Chjou, R.Chen, X.Shao, Z.Xu, Sh.Zang ва E.Noyak каби олимлар илмий изланишлар олиб боришган.

Оптимал квадратур формулалар қуришда Соболев усули, сплайн функциялар ва ϕ - функция усуллари яратилган. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида оптимал квадратур формулалар қуриш усули дастлаб С.Л.Соболев томонидан таклиф қилинган. T.Catinas, Gh.Coman ларнинг илмий ишларида эса тугун нуқталар сони N нинг кичик ва хусусий ҳоллари учун оптимал квадратур формулалар қуришда ϕ - функция усулини қўллаш таклиф қилинган.

$L_2^{(m)}(\Omega)$ фазосида оптимал квадратур ва кубатур формула қуришда чизиқли дифференциал операторнинг дискрет аналоги тушунчаси ва унинг хоссаларини ўрганиш билан дастлаб С.Л.Соболев шуғулланган. $L_2^{(m)}(\Omega)$ ва $K_2(P_m)$ фазоларида С.Л.Соболев томонидан таклиф қилинган алгоритмни амалга ошириш билан З.Ж.Жамолов, Ф.Я.Загирова, Х.М.Шадиметов, А.Р.Хаётов, A.Ossicini ва F.Lanzaraлар шуғулланишган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган илмий тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режаси билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари» (2012-2016), ОТ-Ф4-86 «Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечиш учун оптимал методлар ишлаб чиқиш» мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади. $L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуриш ва уларнинг хатоликларини баҳолашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулаларнинг экстремал функцияларини топиш;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулаларнинг хатолик функционалларининг нормаларини ҳисоблаш;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулаларнинг хатолик функционаллари нормаларига минимум берувчи коэффициентларни топиш;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалари коэффициентларининг ошкор формулаларини топиш;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазоларида мос равишда $m=1,\ m=2$ бўлганда, Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулаларнинг хатолик функционалларининг нормаларини ҳисоблаш.

Тадқиқотнинг объекти – аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулалар, хатолик функционаллари, комплекс қийматли дифференциалланувчи функцияларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети – экстремал функция, Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар, хатолик функционали нормаларини баҳолашдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ҳисоблаш математикаси, функционал ва комплекс анализ, дифференциал тенгламалар назарияси, умумлашган функциялар, дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат**:**

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулаларнинг экстремал функциялари топилган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун квадратур формулаларнинг хатолик функционалларининг нормалари ҳисобланган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ комплекс қийматли Гильберт фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалари коэффициентларининг ошкор формулалари топилган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазоларида мос равишда $m=1$, $m=2$ бўлганда, Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулаларнинг хатолик функционалларининг нормалари ҳисобланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси. Қурилган оптимал квадратур формулалар кучли тебранувчи интеграл тенгламаларни сонли ҳисоблашда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси методларини қўлланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти дифференциялланувчи функциялар фазоларида Фурье коэффициентларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формула қуриш алгоритми ва қурилган формуланинг яқинлашиш тезлигининг юқорилиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти қурилган оптимал квадратур формулалар аниқ квант кимёси масалаларини, тасвирни аниқлаш, электродинамика, компютер томографияси, суюқлик механикаси масалаларини кучли тебранувчи интеграллар ёрдамида тақрибий ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

$W_2^{(1,0)}(0,1)$ ва $W_2^{(2,1)}(0,1)$ Гильберт фазоларида кучли тебранувчи интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун қурилган оптимал квадратур формулаларидан А-13-3 «Қайта тикланувчи энергия манбалари қурилмаларини янада такомиллаштириш ва улардаги жараёнларни моделлаштиришни тадқиқ қилилиш» амалий грант лойиҳасида муқобил энергия манбаларидан фойдаланиб ишловчи қурилмаларнинг турли вақт оралиғидаги қийматларини ҳисоблашда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2018 йил 31 октябрдаги 89-03-3696-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши қурилмаларнинг турли вақт оралиғидаги қийматларининг аниқлик даражасини баҳолашга имкон берган;

$L_2^{(1)}(0,1)$ фазосида Фурье коэффициентларини сонли ҳисоблаш учун қурилган оптимал квадратур формула 1324 рақамли «Optimal quadrature Formulas for the Space H^1» хорижий грант лойиҳасида оптимал квадратур формуланинг коэффициентларидан фойдаланиб, етарлича катта тугун нуқталарда чизиқли алгоритм, тенг тақсимланган тугун нуқтали квази Монте-Карло алгоритими билан деярли устма-уст тушишини исботлашда фойдаланилган (Фридрих Шиллер номли Йен университети, Германия 2018 йил 22 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши квази

Монте-Карло алгоритими, $s \geq 1$ бўлганда Соболевнинг $H^s(\mathbb{R})$ фазоси ва $C^s(\mathbb{R})$ фазоларида кучли тебранувчи интегралларни мураккаблигини баҳолашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари, 9 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 4 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.

Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши.

Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 104 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Кучли тебранувчи фнкциялар интегралларини тақрибий ҳисоблаш методлари»** деб аталувчи биринчи боби кириш характерига эгадир.

Бу бобнинг биринчи параграфида кучли тебранувчи интегралларини тақрибий ҳисоблаш методлари мухокама килинади.

$$I[f] = \int_{\Omega} f(x) e^{i\omega g(x)} dx, \tag{1}$$

бу ерда f, g-тебранмайдиган функциялар $,\omega-$ тебраниш частотаси ва $\Omega-$ булакли узлуксиз соха.Ушбу интегралнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмини ажратиб, қуйидаги тригонометрик ядроли интеграллар олинган.

$$\operatorname{Re} I[f] = \int_{\Omega} f(x)\cos(\omega g(x))dx \quad \text{ва} \quad \operatorname{Im} I[f] = \int_{\Omega} f(x)\sin(\omega g(x))dx.$$

f ва g функцияларнинг хоссаларига асосланиб (1) кўринишдаги кучлитебранувчи интегралларини тақрибий ҳисоблашнинг ҳар хил усуллари ишлаб чиқилган. Ушбу парагафда қуйидаги усуллар таҳлил қилинган: асимптотик ёйиш, Файлон туридаги усуллар, Левиннинг коллокация усули, энг тез тушиш усули, оптимал квадратур формулалар.

Ушбу диссертация иши $L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазоларида (1) кўринишдаги интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланган.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида B-банах фазосида оптимал вадратур формулалар қуриш масаласи қаралган. Шу муносабат билан қуйидаги вазнли квадратур формула

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{k=0}^{N} C_k\varphi(x_k) \tag{2}$$

функционал хатолиги билан қаралган .

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{[a,b]}(x) - \sum_{k=0}^{N} C_k\delta(x - x_k). \tag{3}$$

Бу ерда $C_k -$ коэффициентлар, x_k- (2) формуланинг тугун нуқталари ва $a \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le b$, $p(x)-$ вазн функция ва $\varepsilon_{[a,b]}(x)-$ $[a,b]$ кесманинг характеристик функцияси, $\delta(x)-$Дираknинг дельта-функцияси, $\varphi-$функцияси B-банах фазоси элементи.

Интеграл билан квадратур йиғинди орасидаги айирмага квадратур формуланинг хатолиги дейилади ва хатолик функционалининг φ функциялардаги қиймати қуйидагича аниқланади

$$(\ell_N, \varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)dx - \sum_{k=0}^{N} C_k\varphi(x_k)\,. \tag{4}$$

(2) квадратур формула ψ функцияга аниқ дейилади, агар (4) формулада φ нинг ўрнига ψ ни қўйганда у нолга айланса. Квадратур формула аниқ бўлган функциялар тўплами ℓ_N хатолик функционали ядросини ташкил этади.

Коши-Шварц тенгсизлигидан

$$|(\ell_N, \varphi)| \le \left\|\ell_N \mid B^*\right\| \cdot \left\|\varphi \mid B\right\|$$

(2) квадратур формуланинг (4) хатолигининг абсолют қиймати (3) хатолик функционалининг B^* қўшма фазодаги нормаси билан юқоридан баҳоланади.

$$\left\|\ell_N \mid B^*\right\| = \sup_{\|\varphi|B\|=1} |(\ell, \varphi)| \tag{5}$$

Оптимал квадратур формула қуриш масаласининг икки тури мавжуд:

1) ℓ_N-хатолик функционали нормасини C_k коэффициентлар ва x_k-тугун нуқталари бўйича минимум қилиш масаласи, яъни Никольский масаласи;

2) ℓ_N-хатолик функционали нормасини C_k коэффициентлар бўйича минимум қилиш масаласи, яъни Сард масаласи.

Биринчи турдаги масаланинг ечимига энг яхши формулалар ёки Никольский маъносидаги оптимал квадратур формулалар дейилади.

Бундан кейин биз Сард маъносидаги оптимал квадратур формулаларни қараймиз.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида диссертациянинг асосий натижаларини исботлашда қўлланиладиган таърифлар ва маълум натижалар келтирилган.

Диссертациянинг иккинчи боби $L_2^{(m)}(0,1)$ Соболев фазосида Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланади.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида $L_2^{(m)}(0,1)$ Соболев фазосида Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи қўйилган.

Қуйидаги квадратур формулани

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta) \tag{6}$$

ушбу хатолик функционали билан қараймиз

$$\ell(x) = e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta), \tag{7}$$

бу ерда $C_\beta -$(1) формуланинг коэффициентлари , $h=1/N$, $N-$натурал сон, $i^2=-1$, $\omega\in\mathbb{Z}$, $\omega\neq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)-$ [0,1] кесманинг характеристик функцияси ва $\delta(x)$-Диракнинг дельта-функцияси. φ функция $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосига тегишли, бунда $L_2^{(m)}(0,1)=\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}\ |\ \varphi^{(m-1)} -$ абсолют-узлуксиз ва $\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\}$. Соболевнинг комплекс қийматли функциялар фазоси бўлиб, элементлари m-тартибли умумлашган ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи ва бу фазода φ, ψ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги тенглик билан аниқланади

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\,\bar{\psi}^{(m)}(x)dx, \tag{8}$$

бу ерда $\bar{\psi}-$ ψ функциянинг қўшма функцияси, φ функциянинг нормаси қуйидаги формула билан аниқланади

$$\left\|\varphi\,|\,L_2^{(m)}(0,1)\right\| = \langle\varphi,\varphi\rangle^{1/2}.$$

Маълумки, C_β коэффициентлар ω, N ва m га боғлик, яъни $C_\beta = C_\beta(\omega,N,m)$.

Қуйидаги интеграл билан квадратур йиғинди орасидаги айирмага

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 e^{2\pi\omega ix}\varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta\varphi(h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx \tag{9}$$

(6) квадратур формуланинг хатолиги дейилади. (6) формуланинг хатолиги $L_2^{(m)*}(0,1)$ фазода чизиқли функционалдир, бу ерда $L_2^{(m)*}(0,1)$- ушбу $L_2^{(m)}(0,1)$ фазонинг қўшма фазоси.

У ҳолда (6) формуланинг (9) хатолигининг абсолют қиймати Коши-Шварц тенгсизлигига асосан, қуйидаги баҳони оламиз

$$|(\ell,\varphi)| \le \left\|\varphi\,|\,L_2^{(m)}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}(0,1)\right\|.$$

Бундан кўринадики, (6) квадратур формуланинг (9) хатолигининг абсолют қиймати (7) хатолик функционалининг нормаси ёрдамида баҳоланади.

$$\left\| \ell \mid L_2^{(m)*}(0,1) \right\| = \sup_{\left\|\varphi | L_2^{(m)}(0,1)\right\|=1} \left| \left(\ell, \varphi \right) \right|$$

Бу бобнинг асосий мақсади $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (6) кўринишдаги квадратур формула учун $\omega \neq 0$ ва $N+1 \geq m$ бўлган ҳолда, Сард масаласини ечиш, яъни қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_\beta$ коэффициентларни топиш

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \mid L_2^{(m)*}(0,1) \right\| = \inf_{C_\beta} \left\| \ell \mid L_2^{(m)*}(0,1) \right\|. \tag{10}$$

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Сард маъносида (6) оптимал квадратур формула қуриш учун, аввалом бор қуйидаги масалаларни ечиш зарурдир.

1-масала. $L_2^{(m)*}(0,1)$ фазосида (6) квадратур формуланинг ℓ хатолик функционали нормасини топиш.

2-масала. (10) тенгликни киноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_\beta$ коэффициентларни топиш.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида 1-масалани ечиш билан шуғулланамиз.

Бунда (7) хатолик функционалининг экстремал функциясидан фойдаланамиз. ψ_ℓ функцияси ℓ функционал учун экстремал функция дейилади, агар қуйидаги тенглик бажарилса

$$\left(\ell, \psi_\ell \right) = \left\| \ell \mid L_2^{(m)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell \mid L_2^{(m)}(0,1) \right\|. \tag{11}$$

Экстремал функция учун куйидаги теорема ўринли

Теорема 1. Хатолик функционали ℓ нинг ψ_ℓ экстремал функцияси ушбу кўринишда булади:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \overline{\ell}(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x), \tag{12}$$

бунда

$$G_m(x) = \frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!} \quad , \tag{13}$$

$P_{m-1}(x) -$ $m-1$ -даражали кўпҳад, $\overline{\ell}$ функционал ℓ функционалнинг қўшмаси.

Бундан ташқари ушбу параграфда (7) хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган, яъни 1- масала ечилган

$$\left\| \ell \right\|^2 = (-1)^m \Big[\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta \overline{C}_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) - \sum_{\beta=0}^{N} \int_0^1 \left(\overline{C}_\beta e^{2\pi i\omega x} + C_\beta e^{-2\pi i\omega x} \right) G_m(x - h\beta) dx +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-2\pi i\omega y} G_m(x-y) dx dy \Big], \tag{14}$$

бунда $\overline{C}_\beta$ коэффициентлар C_β коэффициентларнинг қўшмаси.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида квадратур формулаларининг оптимал коэффициентларини топиш учун система олинган

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha (h\beta)^\alpha = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} G_m(x-h\beta)dx,\ \beta = \overline{0,N}\,, \tag{15}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma (h\gamma)^\alpha = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} x^\alpha dx, \quad \alpha = 0,1,...,m-1, \tag{16}$$

бунда $G_m(x)$ (13)-тенглик билан аникланган.

Таъкидлаш керакки $N+1\geq m$ бўлганда (15), (16) система ягона ечимга эга ва у ечим $\|\ell\|^2$ га шартли минимум беради. Хатолик функционали (7) нинг квадрат нормаси C_β коэффициентларининг квадрат функцияси булиб, у $C_\beta = \overset{\circ}{C}_\beta$ қийматида ягона минимумга эришади. Топилган $\overset{\circ}{C}_\beta$ лар оптимал коэффициентлар дейилади ва унга мос келувчи квадратур формула Сард маъносидаги оптимал квадратур формула дейилади.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида диссертация ишининг марказий натижалари олинган.

Теорема 2. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $m\geq 2,\ N+1\geq m$ ва $\omega h \notin \mathbb{Z}$ бўлганда (6) кўринишдаги (7) хатолик функционали билан берилган оптимал квадратур формулалари коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$C_0 = h\left(\frac{Ke^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1} - \frac{1}{2\pi i\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k \frac{q_k}{q_k-1} + b_k \frac{q_k^N}{1-q_k}\right)\right),$$

$$C_\beta = h\left(e^{2\pi i\omega h\beta}K + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k q_k^\beta + b_k q_k^{N-\beta}\right)\right), \quad \beta = \overline{1,N-1},$$

$$C_N = h\left(\frac{K}{1-e^{2\pi i\omega h}} + \frac{1}{2\pi i\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k \frac{q_k^N}{1-q_k} + b_k \frac{q_k}{q_k-1}\right)\right),$$

a_k *ва* b_k *(*$k=\overline{1,m-1}$*)*-маълум катталиклар.

Теорема 3. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $m\geq 2,\ \ N+1\geq m$ ва $\omega h \in \mathbb{Z},\ \ \omega \neq 0$ бўлганда (6) кўринишдаги (7) хатолик функционали билан берилган оптимал квадратур формулалари коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$C_0 = h\left(-\frac{1}{2\pi i\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k \frac{q_k}{q_k-1} + b_k \frac{q_k^N}{1-q_k}\right)\right),$$

$$C_\beta = h\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k q_k^\beta + b_k q_k^{N-\beta}\right), \quad \beta = \overline{1,N-1},$$

$$C_N = h\left(\frac{1}{2\pi i\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k \frac{q_k^N}{1-q_k} + b_k \frac{q_k}{q_k-1}\right)\right),$$

a_k ва b_k ($k=\overline{1,m-1}$)-маълум катталиклар.

Теорема 4. $L_2^{(1)}(0,1)$ фазосида $\omega\in\mathbb{Z}$ учун ва $\omega\neq 0$ бўлганда Сард маъносида (6) кўринишдаги оптимал квадратур формулалари коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$C_0=\frac{1+2\pi i\omega h-e^{2\pi i\omega h}}{4\pi^2\omega^2 h},\quad C_N=\frac{1-2\pi i\omega h-e^{-2\pi i\omega h}}{4\pi^2\omega^2 h}.$$

$$C_\beta=\frac{2(1-\cos 2\pi\omega h)}{4\pi^2\omega^2 h}\cdot e^{2\pi i\omega h\beta},\ \beta=1,2,...,N-1,$$

Теорема 5. $L_2^{(1)}(0,1)$ фазосида (6) кўринишдаги оптимал квадратур формулаларнинг (7) кўринишдаги хатолик функционали нормаси қуйидаги формула билан ифодаланади

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|^2=\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\left(1-\frac{2(1-\cos 2\pi\omega h)}{(2\pi\omega h)^2}\right). \tag{17}$$

Иккинчи бобнинг олтинчи параграфида келтирилган сонли натижалар, ушбу бобда қурилган оптимал квадратур формулаларнинг устунлигини кўрсатади.

Диссертациянинг учинчи боби $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланади.

Ушбу бобнинг биринчи параграфида $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи қўйилган.

Қуйидаги квадратур формулани

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi(h\beta) \tag{18}$$

ушбу хатолик функционали билан қараймиз

$$\ell(x)=e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\delta(x-h\beta), \tag{19}$$

бу ерда $C_\beta-$(18) формуланинг коэффициентлари , $h=1/N$, $N-$натурал сон, $i^2=-1$, $\omega\in\mathbb{Z}$, $\omega\neq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)-$ $[0,1]$ кесманинг характеристик функцияси ва $\delta(x)$-Диракнинг дельта-функцияси. φ функция $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосига тегишли, бунда

$$W_2^{(m,m-1)}(0,1)=\left\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}\ \middle|\ \varphi^{(m-1)}\text{ - абсолют-узлуксиз ва }\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\right\}$$

$-$ комплекс қийматли Гильберт фазоси бўлиб, элементлари m- ва $m-1$ -тартибли умумлашган ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи ва бу фазода φ, ψ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси қуйидаги тенглик билан аниқланади

$$\langle\varphi,\psi\rangle_W=\int_0^1(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x))(\overline{\psi}^{(m)}(x)+\overline{\psi}^{(m-1)}(x))dx, \tag{20}$$

бу ерда $\overline{\psi}-$ ψ функциянинг қўшма функцияси, φ функциянинг нормаси қуйидаги формула билан аниқланади

$$\left\| \varphi \,|\, W_2^{(m,m-1)}(0,1) \right\| = \left\langle \varphi, \varphi \right\rangle^{1/2}.$$

Маълумки, C_β коэффициентлар ω, N ва m га боғлик, яъни $C_\beta = C_\beta(\omega, N, m)$. Бу ерда (18) квадратур формуланинг хатолиги қуйидаги кўринишга эга

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(x_\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx. \qquad (21)$$

(18) формуланинг хатолиги $W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$ фазода чизикли функционалдир, бу ерда $W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$ - ушбу $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазонинг қўшма фазоси.

У ҳолда (18) формуланинг (21) хатолигининг абсолют қиймати Коши-Шварц тенгсизлигига асосан, қуйидаги баҳони оламиз

$$\left| (\ell, \varphi) \right| \le \left\| \varphi \,|\, W_2^{(m,m-1)}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell \,|\, W_2^{(m,m-1)*}(0,1) \right\|.$$

(18) квадратур формуланинг (21) хатолигининг абсолют қиймати қўшма фазода (19) хатолик функционалининг нормаси ёрдамида баҳоланади.

$$\left\| \ell \,|\, W_2^{(m,m-1)*}(0,1) \right\| = \sup_{\left\| \varphi | W_2^{(m,m-1)}(0,1) \right\| = 1} \left| (\ell, \varphi) \right|$$

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида Сард маъносида (18) кўринишдаги оптимал квадратур формула қуриш учун қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи C_β коэффициентларни топиш талаб этилади

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \,|\, W_2^{(m,m-1)*}(0,1) \right\| = \inf_{C_\beta} \left\| \ell \,|\, W_2^{(m,m-1)*}(0,1) \right\|. \qquad (22)$$

Шундай қилиб ушбу бобда кетма-кет қуйидаги масалаларни ечиш зарурдир.

3-масала. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида (18) квадратур формуланинг хатолик функционали нормасини топиш.

4-масала. (22) тенгликни қаноатлантирувчи C_β коэффициентларни топиш.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида (19) хатолик функционали нормаси топилган.

$W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$ фазосида (19) хатолик функционали нормасининг ошкор кўринишини топиш учун, аввал айтганимиздек топилган ψ_ℓ экстремал функцияси тушунчасидан фойдаланамиз. Маълумки $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ - Гильберт фазоси, демак ушбу фазода ψ_ℓ экстремал функцияси Рисс теоремаси ёрдамида топилади.

Теорема 6. Хатолик функционали ℓ нинг ψ_ℓ экстремал функцияси ушбу кўринишда булади:

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \overline{\ell}(x) * G_m(x) + P_{m-2}(x) + d e^{-x},$$

бунда
$$G_m(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right), \tag{23}$$
қуйидаги тенгламанинг ечимидир
$$G_m^{(2m)}(x)-G_m^{(2m-2)}(x)=\delta(x), \tag{24}$$
$P_{m-2}(x)-\ m-2$ -даражали кўпҳад, d -ихтиёрий комплекс сон, $\overline{\ell}$ функционал ℓ функционалнинг қўшмаси.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида квадратур формулаларининг оптимал коэффициентларини топиш учун система олинган
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_m(h\beta-h\gamma)+\sum_{\alpha=0}^{m-2}a_\alpha(h\beta)^\alpha+de^{-h\beta}=f_m(h\beta),\qquad \beta=0,1,\ldots,N, \tag{25}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(h\gamma)^\alpha d=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}x^\alpha dx,\qquad \alpha=0,1,\ldots,m-2 \tag{26}$$
$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma e^{-h\gamma}=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}e^{-x}dx, \tag{27}$$
бу ерда $G_m(x)$ (23) тенглик билан аниқланган,
$$f_m(h\beta)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}G_m(x-h\beta)dx. \tag{28}$$
Маълумки (25)-(27) система ягона ечимга эга ва бу ечим (26) ва(27) шартларга асосан (19) хатолик функционали $\|\ell\|^2$ га шартли минимум беради. Хатолик функционали (19) нинг квадрат нормаси C_β коэффициентларининг квадрат функцияси булиб, у $C_\beta=\overset{\circ}{C}_\beta$ кийматида ягона минимумга эришади. Топилган $\overset{\circ}{C}_\beta$ $(\beta=\overline{0,N})$ лар оптимал коэффициентлар дейилади ва унга мос келувчи квадратур формула Сард маъносидаги оптимал квадратур формула дейилади.

Учинчи бобнинг туртинчи параграфида диссертация ишининг асосий натижалари олинган.

Теорема 7. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида $m\geq 2,\ N+1\geq m$ ва $\omega h\notin\mathbb{Z}$ бўлганда (18) кўринишдаги (19) хатолик функционали билан берилган оптимал квадратур формулалари коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади
$$C_0=\frac{Ke^{4\pi i\omega h}}{(e^{2\pi i\omega h}-e^h)(e^{2\pi i\omega h}-1)}+\frac{2\pi i\omega(1-e^h)-1}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\frac{a_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$
$$C_\beta=e^{2\pi i\omega h\beta}K+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(a_k\lambda_k^\beta+b_k\lambda_k^{N-\beta}\Big),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$
$$C_N=\frac{Ke^h}{(e^{2\pi i\omega h}-e^h)(e^{2\pi i\omega h}-1)}+\frac{2\pi i\omega(e^h-1)-e^h}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}+$$

$$+e^h\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\frac{a_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$

a_k *ва* b_k $(k=\overline{1,m-1})$-маълум катталиклар.

Теорема 8. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида $m\geq 2,\ N+1\geq m$ ва $\omega h\in\mathbb{Z},\ \omega\neq 0$, бўлганда (18) кўринишдаги (19) хатолик функционали билан берилган оптимал квадратур формулалари коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$C_0=\frac{2\pi i\omega(1-e^h)-1}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}+\sum_{k=1}^{m-1}\Big[\frac{a_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big],$$

$$C_\beta=\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^\beta+b_k\lambda_k^{N-\beta}\right),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$C_N=\frac{2\pi i\omega(e^h-1)-e^h}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}+e^h\sum_{k=1}^{m-1}\Big[\frac{a_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big],$$

a_k *ва* b_k $(k=\overline{1,m-1})$-маълум катталиклар.

Учинчи бобнинг бешинчи параграфида комплекс қийматли $W_2^{(1,0)}(0,1)$ фазосида оптимал квадратур формуланинг ошкор кўриниши топилган ва оптимал квадратур формуланинг нормаси ҳисобланган.

Теорема 9. $W_2^{(1,0)}(0,1)$ фазосида Сард маъносида (18) кўринишдаги оптимал квадратур формулалари коэффициентлари қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$C_0=\frac{1+e^{2h}-2e^{2\pi i\omega h+h}-2\pi i\omega(1-e^{2h})}{(e^{2h}-1)(4\pi^2\omega^2+1)},$$

$$C_\beta=\frac{2(1+e^{2h}-2e^h\cos 2\pi\omega h)}{(e^{2h}-1)(4\pi^2\omega^2+1)}e^{2\pi i\omega h\beta},\quad \beta=1,2,\ldots,N-1,$$

$$C_N=\frac{1+e^{2h}-2e^{h-2\pi i\omega h}+2\pi i\omega(1-e^{2h})}{(e^{2h}-1)(4\pi^2\omega^2+1)}.$$

Теорема 10. $W_2^{(1,0)}(0,1)$ фазосида (18) кўринишдаги оптимал квадратур формулаларнинг (19) хатолик функционали нормаси қуйидаги формула билан ифодаланади

$$\|\ell\|^2=\frac{1}{(4\pi^2\omega^2+1)^2}\left(4\pi^2\omega^2+1-\frac{2(e^{2h}+1-2e^h\cos 2\pi\omega h)}{h(e^{2h}-1)}\right).\tag{29}$$

Учинчи бобнинг олтинчи параграфида бир нечта сонли натижалар келтирилган, (18) кўринишдаги курилган оптимал квадратур формулаларнинг $m=1$ ва $m=2$ ҳолларида хатолиги олинган ва таҳлил қилинган.

ХУЛОСА

Диссертация иши $L_2^{(m)}(0,1)$ ва $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазоларида Фурье коэффициентларини ҳисоблаш учун Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $\omega h \notin Z$ бўлганда Фурье интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар коэффициентларининг аналитик формулалари олинган.
2. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $\omega h \in Z,\ \omega \neq 0$ бўлганда Фурье коэффицентлари учун оптимал квадратур формулалари коэффициентларининг ошкор формулалари топилган.
3. Соболевнинг $L_2^{(1)}(0,1)$ фазосида Фурье интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формуланинг хатолик функционали нормаси ҳисобланган ва сонли тажрибалар бажарилган.
4. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида $\omega h \notin Z$ бўлганда Фурье интегралларини тақрибий ҳисоблаш учун оптимал квадратур формулалар коэффициентларининг аналитик формулалари олинган.
5. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида $\omega h \in Z,\ \omega \neq 0$ бўлганда Фурье коэффицентлари учун оптимал квадратур формулалар қурилган.
6. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ фазосида Фурье коэффицентлари учун $m=1, m=2$ ҳолларда оптимал квадратур формуланинг хатолик функционали нормаси ҳисобланган ва сонли тажрибалар бажарилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc27.06.2017.FM01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

БОЛТАЕВ НУРАЛИ ДАВЛЯТОВИЧ

ОПТИМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИЛЬНО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИНТЕГРАЛОВ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2018

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.3.PhD/FM134.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Нормурадов Чори Бегалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Бухарского государственного университета**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc27.06.2017.FM01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению
научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению
научных степеней, д.ф.-м.н.

З.Х. Юлдашев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению научных степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проблемы квантовой химии, анализа образов, электродинамики, компьютерной томографии, механика жидкости и математической физики, возникающие в результате многих научно-прикладных исследований, проводимых на мировом уровне, приводятся к вычислению определенных интегралов от сильно осциллирующих функций. Эти интегралы приближенно вычисляются, в основном, использованием квадратурных и кубатурных формул. Стандартные методы численного интегрирования для сильно осциллирующих интегралов часто требуют больших вычислительных работ и их нельзя применить с успехом. Поэтому разработка альтернативных методов приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов является актуальной задачей вычислительной математики.

В настоящее время в мире одной из важнейших задач вычислительной математики является построение эффективных квадратурных формул в различных пространствах дифференцируемых функций для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов. Следует отметить, что имеются различные методы, посвященные эффективному вычислению сильно осциллирующих интегралов, такие как метод асимптотического разложения, методы типа Файлона, метод коллокации Левина, метод наискорейшего спуска, методы оптимальных квадратурных и кубатурных формул. В связи с этим построение эффективных, асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку и оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов, а также оценки их погрешностей в различных пространствах дифференцируемых функций считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям, имеющим фундаментальное и прикладное значение, в частности, в теории приближенного интегрирования вычислительной математики особое внимание было уделено построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул и оценке их погрешностей в различных пространствах периодических и непериодических функций. Существенные результаты были получены по построению инвариантных, решетчатых оптимальных кубатурных формул для приближенного вычисления регулярных и сингулярных интегралов в пространствах Соболева одной и многих переменных, периодических и непериодических функций. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебре и математическому анализу, теории динамических систем, прикладной и вычислительной математике[2] является одной из основных задач. Развитие теории

[2] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов и оценка их погрешностей в различных гильбертовых пространствах дифференцируемых функций играют важную роль в исполнении постановления.

Настоящая диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Основываясь на свойствах подынтегрального выражения, разрабатывались различные эффективные методы приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов. Имеются следующие методы приближенного вычисления таких интегралов: метод асимптотических разложений, методы типа Файлона, метод коллокации Левина, метод наискорейшего спуска и методы оптимальных квадратурных формул. Этими методами занимались такие ученые, как D.Huybrechs, Sh.Olver, A.Iserles, S.P.Norsett, Siraj-ul-Islam Sakhi Zaman, Siraj-ul-Islam Uzma Nasib, S.Olver, H.Wang, L.Zhang, A.Asheim, V.Dominguez, E.A.Flinn, J.Gao, J.M.Melenk, K.N.Melnik, R.V.N.Melnik, H.Mo, Sh.Xiang, L.F.Shampine, S.Xiang,G.He, Y.J.Cho, H.Kang, M.И.Исраилов, J.R.Webster, A.S.Cvetkovic, M.P.Stanic, X.Zhou, R.Chen, X.Shao, Z.Xu, Sh.Zang, E.Noyak.

Имеется несколько методов построения оптимальных квадратурных формул: такие, как методы Соболева, сплайн-функций и ϕ- функций. Основываясь на этих методах, задача построения оптимальных квадратурных формул была исследована многими авторами в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Здесь $L_2^{(m)}(0,1)$- пространство функций, m -е обобщенное производное интегрируемое с квадратом. В работе T.Catinas и Gh.Coman используется метод ϕ -функций и приведено несколько примеров оптимальных квадратурных формул для частных случаев и для малых N, где N - число узлов.

Метод Соболева построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул основывается на дискретных аналогах линейных дифференциальных операторов. Впервые этот метод предложен С.Л.Соболевым для построения оптимальных кубатурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ в. Реализацией предложенного С.Л.Соболевым алгоритма в пространстве $L_2^{(m)}(\Omega)$ и $K_2(P_m)$ занимались З.Ж.Жамалова, Ф.Я.Загирова, Х.М.Шадиметов, А.Р.Хаётов, A.Ossicini , F.Lanzara и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016), ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов для приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в гильбертовых пространствах» Института математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Целью исследования является построение оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье и оценка их погрешностей в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дифференцируемых комплекснозначных функций.

Задачи исследования:

нахождение экстремальных функций квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дифференцируемых комплекснозначных функций;

вычисление нормы функционала погрешности квадратурных формул для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

минимизация нормы функционала погрешности по коэффициентам квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

нахождение явных формул коэффициентов оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

вычисление погрешности оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $m=1$ и $m=2$.

Объект исследования – квадратурные формулы для приближенного вычисления определенных интегралов, функционалы погрешности, дифференцируемые комплекснозначные функции.

Предмет исследования - экстремальные функции, оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов Фурье, норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул.

Методы исследования. В диссертации использованы методы вычислительной математики, функционального и комплексного анализа, а также теории дифференциальных уравнений, обобщенных функций, функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдены экстремальные функции функционалов погрешностей квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье в гильбертовых пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ дифференцируемых комплекснозначных функций;

вычислена норма функционала погрешности квадратурных формул для коэффициентов Фурье на пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

получены явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул, применяемые в приближенном вычислении интегралов Фурье в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

вычислены нормы функционалов погрешностей оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления коэффициентов Фурье на пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $m=1$ и $m=2$.

Практические результаты исследования. Результаты диссертационной работы могут быть использованы при приближенном решении сильно осциллирующих интегральных уравнений, в теории специальных функций, в моделировании волновых явлений и в дальнейшем развитии теории квадратурных и кубатурных формул, а также в других теоретических и практических задачах.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием теории приближенного интегрирования, методов вычислительной математики, функционального и комплексного анализа, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что в пространствах дифференцируемых функций получены явные формулы коэффициентов оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье и исследована скорость сходимости построенных формул.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что построенные оптимальные квадратурные формулы служат инструментом численного решения конкретных задач квантовой химии, распознавания образов, электродинамики, компьютерной томографии, механики жидкости и математической физики, выражающиеся с помощью сильно осциллирующих интегралов.

Внедрение результатов исследования. Оптимальная квадратурная формула для численного вычисления коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$ и $W_2^{(2,1)}(0,1)$ использован в исследованиях гранта А-13-3 для оптимального приближения решений математических моделей, описывающих тепловые процессы в солнечных теплицах (Министерство высшего и среднего специального образования от 31.10.2018 года).

Применение этих научных результатов позволило определить оптимальные значения геометрических размеров этих теплиц.

Оптимальная квадратурная формула для численного вычисления коэффициентов Фурье в пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ использована в проекте DFG-Priority Program 1324, “Optimal quadrature Formulas for the Space H^1 ”Йенского университета имени Фридриха Шиллера (Германия). Используя коэффициенты оптимальной квадратурной формулы доказано, что линейный алгоритм с достаточно большим числом узлов является почти квази Монте-Карло алгоритмом с равноотстоящими узлами. Квази Монте-Карло алгоритм применен в изучении сложности осциллирующих интегралов, определенных на действительной оси для функций из пространства Соболева $H^s(\mathbb{R})$ и пространства $C^s(\mathbb{R})$ с любым целым $s \geq 1$.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 4 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликованы в зарубежном журнале и 3 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 104 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «Методы приближенного вычисления от сильно осциллирующих функций», носит вводный характер.

В параграфе 1 настоящей главы обсуждаются методы для численного вычисления осциллирующего интеграла

$$I[f] = \int_{\Omega} f(x) e^{i\omega g(x)} dx, \qquad (1)$$

где f и g - не осциллирующие функции, $\omega-$ частота осцилляции и $\Omega-$ некоторая кусочно-гладкая область. Отделяя действительную и мнимую части этого интеграла, получены следующие интегралы с тригонометрическими ядрами

$$\operatorname{Re} I[f] = \int_{\Omega} f(x)\cos(\omega g(x))dx \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} I[f] = \int_{\Omega} f(x)\sin(\omega g(x))dx.$$

Основываясь на свойствах функций f и g, разработаны различные методы приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов вида (1). В этом параграфе обсуждены следующие методы: асимптотическое разложение, методы типа Файлона, метод коллокации Левина, метод наискорейшего спуска, методы оптимальных квадратурных формул.

Настоящая диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов вида (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

В параграфе 2 главы 1 рассмотрена задача построения оптимальных квадратурных формул в банаховых пространствах B. В связи с этим рассмотрена следующая весовая квадратурная формула

$$\int_a^b p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{k=0}^{N} C_k\varphi(x_k) \tag{2}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{[a,b]}(x) - \sum_{k=0}^{N} C_k\delta(x - x_k). \tag{3}$$

$C_k -$ коэффициенты, x_k - узлы формулы (2) и $a \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le b$, $p(x) -$ весовая функция и $\int_a^b p(x)dx < \infty$, $\varepsilon_{[a,b]}(x) -$ характеристическая функция отрезка $[a,b]$, $\delta(x) -$дельта-функция Дирака. Функции $\varphi -$элемент некоторого банахова пространства B.

Разность между интегралом и квадратурной суммой называется погрешностью квадратурной формулы и даёт значение функционала погрешности на функциях φ банахова пространства B и определяется следующим образом

$$(\ell_N, \varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)dx - \sum_{k=0}^{N} C_k\varphi(x_k). \tag{4}$$

Квадратурная формула (2) называется точной на функции ψ, если погрешность (4) равна нулю при подстановке функции ψ вместо φ. Множество функций, на которых квадратурная формула точна образует ядро функционала погрешности ℓ_N.

По известному неравенству Коши-Шварца в банаховых пространствах

$$|(\ell_N, \varphi)| \le \left\| \ell_N \mid B^* \right\| \cdot \left\| \varphi \mid B \right\|$$

абсолютное значение погрешности (4) квадратурной формулы (2) оценивается сверху с помощью нормы

$$\left\| \ell_N \mid B^* \right\| = \sup_{\|\varphi|B\|=1} |(\ell, \varphi)| \tag{5}$$

функционала погрешности (3) в сопряженном пространстве B^*.

Для квадратурных формул мы имеем два типа задач построения оптимальных формул: 1) задача нахождения минимума нормы функционала погрешности ℓ_N по коэффициентам C_k и узлам x_k, т.е. задача Никольского; 2) задача нахождения минимума нормы функционала погрешности ℓ_N по коэффициентам C_k при фиксированных узлах x_k, т.е. задача Сарда.

Решения первого типа задач называются наилучшими формулами или оптимальными формулами в смысле Никольского.

В дальнейшем мы рассмотрим только квадратурные формулы и приведем известные результаты по оптимальным квадратурным формулам в смысле Сарда.

В параграфе 3 главы 1 приводятся некоторые определения и известные результаты, необходимые для доказательства основных результатов.

Глава 2 диссертации посвящается построению оптимальных квадратурных формул для коэффициентов Фурье в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$.

В параграфе 1 этой главы приводятся постановка задача построения оптимальных квадратурных формул для коэффициентов Фурье в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta) \tag{6}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x) = e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta), \tag{7}$$

где $C_\beta -$ коэффициенты формулы (1), $h = 1/N$, $N -$натуральное число, $i^2 = -1$, $\omega \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$, $\varepsilon_{[0,1]}(x) -$ характеристическая функция отрезка [0,1] и $\delta(x)$является дельта-функцией Дирака. Функции φ принадлежат пространству $L_2^{(m)}(0,1)$, где

$$L_2^{(m)}(0,1) \;=\; \{\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \varphi^{(m-1)} - \text{ абсолютно-непрерывная и } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\},$$

является пространством Соболева комплекснозначных функций, квадратично интегрируемых с производным порядка m и в этом пространстве скалярное произведение двух функция φ и ψ определяется равенством

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x)\, \bar{\psi}^{(m)}(x) dx, \tag{8}$$

где$\bar{\psi}$ −сопряженная функция к функции ψ, а норма функции φсоответственно определяется формулой

$$\left\| \varphi \mid L_2^{(m)}(0,1) \right\| = \langle \varphi, \varphi \rangle^{1/2}$$

Заметим, что коэффициенты C_β зависят от ω, N и m, т.е.$C_\beta = C_\beta(\omega, N, m)$.

Следующая разность, между интегралом и квадратурной суммой

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1 e^{2\pi\omega i x}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi(h\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx \tag{9}$$

называется погрешностью квадратурной формулы (6). Погрешность формулы (6) является линейным функционалом в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, где $L_2^{(m)*}(0,1)$ − сопряженное пространство к пространству $L_2^{(m)}(0,1)$.

Тогда для абсолютного значения погрешности (9) формулы (6), согласно неравенству Коши-Шварца, имеем следующую оценку

$$\left|(\ell,\varphi)\right|\le\left\|\varphi\,|\,L_2^{(m)}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}(0,1)\right\|.$$

Это означает, что абсолютное значение погрешности (9) квадратурной формулы (6) оценивается с помощью нормы

$$\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}(0,1)\right\|=\sup_{\left\|\varphi|L_2^{(m)}(0,1)\right\|=1}\left|(\ell,\varphi)\right|$$

функционала погрешности (7).

Основная цель настоящей главы решить задачу Сарда для квадратурных формул вида (6) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ при $\omega\neq 0$ и $N+1\ge m$, т.е. найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$, удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\,|\,L_2^{(m)*}(0,1)\right\|=\inf_{C_\beta}\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}(0,1)\right\|. \tag{10}$$

Следовательно, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу вида (6) в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, нам необходимо решить следующие задачи.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (6) в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Задача .2. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$ удовлетворяющие равенству (10).

В параграфе 2 главы 2 мы найдем норму функционала погрешности (7), т.е. займемся решением задачи 1. При этом используем экстремальную функцию функционала погрешности (7). Функция ψ_ℓ называется экстремальной функцией для функционала ℓ, если выполнено следующее равенство

$$\left(\ell,\psi_\ell\right)=\left\|\ell\,|\,L_2^{(m)*}(0,1)\right\|\cdot\left\|\psi_\ell\,|\,L_2^{(m)}(0,1)\right\|. \tag{11}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Экстремальная функция ψ_ℓ функционала погрешности ℓ имеет следующий вид:

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\,\overline{\ell}(x)*G_m(x)+P_{m-1}(x), \tag{12}$$

где

$$G_m(x)=\frac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!} \tag{13}$$

$P_{m-1}(x)$ − полином степени $m-1$, $\overline{\ell}$ -сопреженное к ℓ.

Вычислена норма функционала погрешности (7), т.е.решена задача 1

$$\|\ell\|^2 = (-1)^m \Big[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C_\beta \bar{C}_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) - \sum_{\beta=0}^{N}\int_0^1 \left(\bar{C}_\beta e^{2\pi i\omega x} + C_\beta e^{-2\pi i\omega x}\right) G_m(x - h\beta)dx +$$
$$+\int_0^1\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} e^{-2\pi i\omega y} G_m(x-y)dxdy\Big], \qquad (14)$$

где $\bar{C}_\beta$ -сопряженное значение коэффициента C_β.

В параграфе 3 главы 2 получена система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_m(h\beta - h\gamma) + \sum_{\alpha=0}^{m-1} p_\alpha (h\beta)^\alpha = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} G_m(x - h\beta)dx,\ \beta = \overline{0,N} \qquad (15)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma (h\gamma)^\alpha = \int_0^1 e^{2\pi i\omega x} x^\alpha dx, \quad \alpha = 0,1,...,m-1, \qquad (16)$$

где $G_m(x)$ определено равенством (13).

Следует отметить, что система (15), (16) имеет единственное решение, когда $N+1 \ge m$ и это решение дает минимум выражению $\|\ell\|^2$ при условиях (16). Квадрат нормы функционала погрешности (7), являющейся квадратичной функцией коэффициентов C_β, имеет единственный минимум в некотором конкретном значении $C_\beta = \overset{\circ}{C}_\beta$.Квадратурная формула с коэффициентами $\overset{\circ}{C}_\beta$, соответствующими этому минимуму, называется оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда и $\overset{\circ}{C}_\beta$ называются оптимальными коэффициентами.

В параграфе 4 главы 2 получены центральные результаты.

Теорема 2. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (6) с функционалом ошибки (7) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, когда $m \ge 2,\ N+1 \ge m$ и $\omega h \notin \mathbb{Z}$, выражаются формулами

$$C_0 = h\left(\frac{Ke^{2\pi i\omega h}}{e^{2\pi i\omega h}-1} - \frac{1}{2\pi i\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k \frac{q_k}{q_k-1} + b_k \frac{q_k^N}{1-q_k}\right)\right),$$

$$C_\beta = h\left(e^{2\pi i\omega h\beta}K + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k q_k^\beta + b_k q_k^{N-\beta}\right)\right), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$C_N = h\left(\frac{K}{1-e^{2\pi i\omega h}} + \frac{1}{2\pi i\omega h} + \sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k \frac{q_k^N}{1-q_k} + b_k \frac{q_k}{q_k-1}\right)\right),$$

a_k *и* b_k $(k = \overline{1, m-1})$-известные.

Теорема 3. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (6) с функционалом погрешности (7) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, когда $m \ge 2$, $N+1 \ge m$ и $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \ne 0$, выражаются формулами

$$C_0=h\left(-\frac{1}{2\pi i\omega h}+\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\frac{q_k}{q_k-1}+b_k\frac{q_k^N}{1-q_k}\right)\right),$$
$$C_\beta=h\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_kq_k^\beta+b_kq_k^{N-\beta}\right),\quad \beta=\overline{1,N-1},$$
$$C_N=h\left(\frac{1}{2\pi i\omega h}+\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\frac{q_k^N}{1-q_k}+b_k\frac{q_k}{q_k-1}\right)\right),$$

a_k и b_k ($k=\overline{1,m-1}$)-известные.

Теорема 4. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (6) в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ для $\omega\in\mathbb{Z}$ и $\omega\neq 0$ имеют вид

$$C_0=\frac{1+2\pi i\omega h-e^{2\pi i\omega h}}{4\pi^2\omega^2h},\qquad C_N=\frac{1-2\pi i\omega h-e^{-2\pi i\omega h}}{4\pi^2\omega^2h},$$
$$C_\beta=\frac{2(1-\cos 2\pi\omega h)}{4\pi^2\omega^2h}\cdot e^{2\pi i\omega h\beta},\ \beta=1,2,...,N-1.$$

Теорема 5. Норма функционала погрешности (7) оптимальной квадратурной формулы вида (6) на пространстве $L_2^{(1)}(0,1)$ имеет вид

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|^2=\frac{1}{(2\pi\omega)^2}\left(1-\frac{2(1-\cos 2\pi\omega h)}{(2\pi\omega h)^2}\right). \tag{17}$$

В шестом параграфе второй главы приведены численные результаты, показывающие преимущество оптимальных квадратурных формул, построенных в этой главе.

Глава 3 диссертации посвящается построению оптимальных квадратурных формул для коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

В параграфе 1 этой главы приводятся построения оптимальных квадратурных формул для коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi(h\beta) \tag{18}$$

с функционалом погрешности

$$\ell(x)=e^{2\pi i\omega x}\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\delta(x-h\beta), \tag{19}$$

где C_β- коэффициенты формулы (18), $h=1/N$, $N\in\mathbb{N}$, $i^2=-1$, $\omega\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ − характеристическая функция отрезка [0,1] и $\delta(x)$ является дельта-функцией Дирака.

Функции φ принадлежат пространству $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, где

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)=\left\{\varphi:[0,1]\to\mathbb{C}\ \mid \varphi^{(m-1)}\right.$ - абсолютно-непрерывная и $\left.\varphi^{(m)}\in L_2(0,1)\right\}$

− гильбертово пространство комплекснозначных функций, и в этом пространстве скалярное произведение двух функций φ и ψ определяется равенством

$$\langle\varphi,\psi\rangle_W=\int_0^1(\varphi^{(m)}(x)+\varphi^{(m-1)}(x))(\bar\psi^{(m)}(x)+\bar\psi^{(m-1)}(x))dx, \qquad (20)$$

где $\bar\psi$ −сопряженная функция функции ψ, а норма функции φ соответственно определяется формулами

$$\left\|\varphi\mid W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\|=\langle\varphi,\varphi\rangle^{1/2},$$

Заметим, что коэффициенты C_β зависят от $\omega,\ N$ и m, т.е. $C_\beta=C_\beta(\omega,N,m)$.

Здесь погрешность формулы (18) имеет вид

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi(x_\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\ell(x)\varphi(x)dx. \qquad (21)$$

Погрешность формулы (18) является линейным функционалом в пространстве $W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$, где $W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$- сопряженное пространство к пространству $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

По неравенству Коши-Шварца

$$\left|(\ell,\varphi)\right|\le\left\|\varphi\mid W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\|\cdot\left\|\ell\mid W_2^{(m,m-1)*}(0,1)\right\|.$$

погрешность (21) формулы (18) оценивается с помощью нормы

$$\left\|\ell\mid W_2^{(m,m-1)*}(0,1)\right\|=\sup_{\left\|\varphi|W_2^{(m,m-1)}(0,1)\right\|=1}\left|(\ell,\varphi)\right|$$

функционала погрешности (19) в сопряженном пространстве. Чтобы построить оптимальную квадратурную формулы вида (18) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ требуется найти коэффициенты C_β, удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\|\mathring{\ell}\mid W_2^{(m,m-1)*}(0,1)\right\|=\inf_{C_\beta}\left\|\ell\mid W_2^{(m,m-1)*}(0,1)\right\|. \qquad (22)$$

Таким образом, в этой главе последовательно решены следующие задачи.

Задача 3. Найти норму функционала погрешности (19) квадратурной формулы (18) в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Задача 4. Найти коэффициенты C_β, удовлетворяющие равенство (22).

В параграфе 2 главы 3 найдена норма функционала погрешности (19). Чтобы получить явное выражение для нормы функционала погрешности (19) в пространстве $W_2^{(m,m-1)*}(0,1)$, как и раньше, используем понятие экстремальной функции ψ_ℓ. Так как $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$- гильбертово пространство, то экстремальная функция ψ_ℓ в этом пространстве находится с помощью теоремы Рисса.

Теорема 6. Экстремальная функция ψ_ℓ функционала ошибки ℓ имеет следующий вид:

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\,\overline{\ell}(x)*G_m(x)+P_{m-2}(x)+d\,e^{-x},$$

где $\overline{\ell}$ − сопряженный функционал к функционалу ℓ.

$$G_m(x)=\frac{\mathrm{sgn}x}{2}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\right)\ , \tag{23}$$

является решением уравнения

$$G_m^{(2m)}(x)-G_m^{(2m-2)}(x)=\delta(x), \tag{24}$$

d - любое комплексное число и $P_{m-2}(x)$ является многочленом степени $m-2$ с комплексными коэффициентами.

В параграфе 3 главы 3 получена система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_m(h\beta-h\gamma)+\sum_{\alpha=0}^{m-2}a_\alpha(h\beta)^\alpha+d\,e^{-h\beta}=f_m(h\beta),\quad \beta=0,1,\ldots,N, \tag{25}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma(h\gamma)^\alpha d=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}x^\alpha dx,\qquad \alpha=0,1,\ldots,m-2 \tag{26}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma e^{-h\gamma}=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}e^{-x}dx, \tag{27}$$

где $G_m(x)$ определено равенством (23),

$$f_m(h\beta)=\int_0^1 e^{2\pi i\omega x}G_m(x-h\beta)dx. \tag{28}$$

Следует отметить, что система (25) - (27) имеет единственное решение и это решение даёт минимум квадрата нормы функционала погрешности (19) при условиях (26) и (27). Квадрат нормы функционала ошибки ℓ, являющийся квадратичной функцией коэффициентов C_β, имеет единственный минимум в некотором конкретном значении $C_\beta=\overset{\circ}{C}_\beta$. Квадратурная формула с коэффициентами $\overset{\circ}{C}_\beta\ (\beta=\overline{0,N})$, соответствующими этому минимуму называется оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда и $\overset{\circ}{C}_\beta\ \ (\beta=\overline{0,N})$ называются оптимальными коэффициентами.

В параграфе 4 главы 3 получены следующие основные результаты.

Теорема 7. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (18) с функционалом погрешности (19) и с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $m\geq 2$, $N+1\geq m$ и $\omega h\notin\mathbb{Z}$ выражаются формулами

$$C_0=\frac{Ke^{4\pi i\omega h}}{(e^{2\pi i\omega h}-e^h)(e^{2\pi i\omega h}-1)}+\frac{2\pi i\omega(1-e^h)-1}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}$$
$$+\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\frac{a_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$

$$C_\beta=e^{2\pi i\omega h\beta}K+\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^\beta+b_k\lambda_k^{N-\beta}\right),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$C_N=\frac{Ke^h}{(e^{2\pi i\omega h}-e^h)(e^{2\pi i\omega h}-1)}+\frac{2\pi i\omega(e^h-1)-e^h}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}$$
$$+e^h\sum_{k=1}^{m-1}\Big(\frac{a_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big),$$

a_k *и* b_k $(k=\overline{1,m-1})$-известные.

Теорема 8. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (18) с функционалом ошибок (19) и с равными интервалами в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $m\geq 2$, $N+1\geq m$ и $\omega h\in\mathbb{Z},\ \omega\neq 0$, выражаются формулами

$$C_0=\frac{2\pi i\omega(1-e^h)-1}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}+\sum_{k=1}^{m-1}\Big[\frac{a_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big],$$

$$C_\beta=\sum_{k=1}^{m-1}\left(a_k\lambda_k^\beta+b_k\lambda_k^{N-\beta}\right),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$C_N=\frac{2\pi i\omega(e^h-1)-e^h}{2\pi i\omega(1-2\pi i\omega)(1-e^h)}+e^h\sum_{k=1}^{m-1}\Big[\frac{a_k\lambda_k^N}{(1-\lambda_k)(e^h-\lambda_k)}+\frac{b_k\lambda_k^2}{(1-\lambda_k)(1-\lambda_k e^h)}\Big],$$

a_k *и* b_k $(k=\overline{1,m-1})$-известные.

В параграфе 5 главы 3 получены в явном виде оптимальные коэффициенты и вычислена норма оптимальных квадратурных формул в комплекснозначном пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$.

Доказаны

Теорема 9. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (18) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$ имеют вид

$$C_0=\frac{1+e^{2h}-2e^{2\pi i\omega h+h}-2\pi i\omega(1-e^{2h})}{(e^{2h}-1)(4\pi^2\omega^2+1)},$$

$$C_\beta=\frac{2(1+e^{2h}-2e^h\cos 2\pi\omega h)}{(e^{2h}-1)(4\pi^2\omega^2+1)}e^{2\pi i\omega h\beta},\quad \beta=1,2,\ldots,N-1,$$

$$C_N=\frac{1+e^{2h}-2e^{h-2\pi i\omega h}+2\pi i\omega(1-e^{2h})}{(e^{2h}-1)(4\pi^2\omega^2+1)}.$$

Теорема 10. Квадрат нормы функционала ошибки (19), оптимальной квадратурной формулы (18) на пространстве $W_2^{(1,0)}(0,1)$ имеет вид

$$\|\ell\|^2=\frac{1}{(4\pi^2\omega^2+1)^2}\left(4\pi^2\omega^2+1-\frac{2(e^{2h}+1-2e^h\cos 2\pi\omega h)}{h(e^{2h}-1)}\right).\qquad(29)$$

В шестом параграфе главы 3 приведены некоторые численные результаты верхней оценки погрешности оптимальных квадратурных формул вида (18), а также их анализ в случаях $m=1$ и $m=2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда для коэффициентов Фурье в пространствах $L_2^{(m)}(0,1)$ и $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1.Получены аналитические формулы коэффициентов оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ при $\omega h \notin Z$.

2.Найдены явные формулы коэффициентов оптимальных квадратурных формул для коэффициентов Фурье в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ при $\omega h \in Z,\ \omega \neq 0$.

3.Вычислена норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространстве Соболева $L_2^{(1)}(0,1)$ и проведены численные эксперименты.

4.Получены аналитические выражения для коэффициентов оптимальных квадратурных формул, построенных для приближенного вычисления интегралов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $\omega h \notin Z$.

5.Построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ при $\omega h \in Z,\ \omega \neq 0$.

6.Вычислена норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы для коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ в случаях $m=1,\ m=2$ и проведены численные эксперименты.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES

BOLTAEV NURALI DAVLYATOVICH

OPTIMAL APPROXIMATION OF HIGHLY OSCILLATING INTEGRALS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3.PhD/FM134.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Normuradov Chori Begalievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Xudoyberganov Mirzoali Urazalievich Candidate of Physical and Mathematical Sciences,docent
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2018 year)

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.T.S., Professor

Z.R.Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

Z.H.Yuldashev
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The urgency and relevance of the dissertation topic.

At the present time, in the world, construction of effective quadrature formulas in different spaces of differentiable functions for numerical computations of highly oscillating integrals is one of the important problems of computational mathematics. It should be noted that there are various of methods devoted to effective computation of highly oscillating integrals such as asymptotic expansion methods, Filon type methods, Levin's collocation method, steepest descent method, methods of optimal quadrature and cubature formulas. In connection with this construction of effective, asymptotic optimal, optimal in order and optimal quadrature formulas for numerical calculation of highly oscillating integrals and estimations their errors in different spaces of differentiable functions are targeted scientific researches. Investigations conducted by the above mentioned scientific research directions confirm actuality of the theme of the thesis.

The aim of the research work is construction of optimal quadrature formulas for approximate calculation of the Fourier integrals and estimation their errors in the Hilbert spaces $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ of differentiable complex valued functions.

The tasks of the research work:

- to find an extremal function of quadrature formulas for numerical calculation of the Fourier integrals in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;
- to calculate the norm of the error functional of quadrature formulas for approximate calculation of the Fourier coefficients in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;
- to minimize the norm of the error functional by coefficients of quadrature formulas for Fourier coefficients in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;
- to find explicit formulas for coefficients of optimal quadrature formulas for numerical integration of the Fourier integrals;
- to find errors of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ with $m=1$ and $m=2$.

The object of the research work is quadrature formulas for numerical integration of definite integrals, error functional, differentiable complex valued functions.

The scientific novelty of the research work is as follows:

in the spaces $L_2^{(m)}(0,1)$ and $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$

extremal functions of the error functional of quadrature formulas for Fourier integrals are found;

the norms of the error functional of quadrature formulas for the Fourier coefficients are calculated;

the explicit expressions for coefficients of optimal quadrature formulas applied for approximate calculation of the Fourier integrals are obtained;

in the cases $m=1$ and $m=2$ the norms of the error functional of quadrature formulas for the Fourier coefficients are calculated.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Болтаев Н.Д. Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье// Узбекский математический журнал. 2012, № 3, -С.48-54. (01.00.00; №6).
2. Шадиметов Х.М., Болтаев Н.Д. Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов от сильно осциллирующих функций // Узбекский математический журнал. 2014, № 3, -С.150-156. (01.00.00; №6).
3. Boltaev N.D., Hayotov A.R., Khudayberdiev M. Optimal quadrature formula for approximate calculation of Fourier coefficients in $W_2^{(1,0)}$ Space//Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2015, № 1, С.71-77. (01.00.00; №9).
4. Nurali D. Boltaev, Abdullo R. Hayotov, Kholmat M. Shadimetov. Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficiyents in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$// Springer Numerical Algorithms. 2017, №74, Pp. 307-336. DOI: 10:1007/s11075-016-150-7.(3. Scopus. IF=1.536).
5. Nurali D. Boltaev, Abdullo R. Hayotov, Gradimir V. Milovanovic and Kholmat M. Shadimetov. Optimal quadrature formulas for Fouriyer coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ space Journal of Applied Analysis and Computation. 2017, Volume7, Number 4, -Pp.1233-1266. DOI: 10:11948/2017076.(3.Scopus. IF=1.063).

II бўлим (Часть II; Part II)

6. Nurali D. Boltaev, Abdullo R. Hayotov, Kholmat M. Shadimetov. Construction of Optimal Quadrature Formula for Numerical Calculation of Fourier Coefficients in Sobolev Space $L_2^{(1)}$ // American Journal of Numerical Analysis, 2016, Vol. 4, No. 1,-Pp. 1-7 .
7. Болтаев Н.Д. Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье в пространстве $W_2^{(2,1)}$.Республиканская научная конфереция с участием зарубежных ученых//Операторные алгебры и смежные проблемы.12-14 сентября 2012- Ташкент.-С.119-120.
8. Болтаев Н.Д. Оптимальная квадратурная формула для вычисления коэффициентов Фурье //International conference.Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль Хорезми 2012.-Ташкент 19-22 декабря –С. 26-27.
9. Шадиметов Х.М., Болтаев Н.Д.Оптимальная квадратурная формула в смысле Сарда для вычисления коэффициентов Фурье. // Дифференциальние уравнения, функциональные пространства, теория приблежений.Новосибирск, Россия, 18-24 августа 2013. -С. 428.
10. Болтаев Н.Д. Оптимальная квадратурная формула в смысле Сарда для вычисления коэффициентов Фурье в $W_2^{(3,2)}$//Современные проблемы уравнений и их приложения. Республиканская научная конфереция с

участием зарубежных ученых из стран СНГ. 21-23 ноября 2013 года - Ташкент,-С. 307-309.

11. Шадиметов Х.М., Болтаев Н.Д. Оптимальные формулы приближенного интегрирования коэффициентов Фурье.// Международная конференция Прикладной и геометрический анализ Самарканд, Узбекистан.22-25Сентября 2014, - С.-97.
12. Хаётов А.Р., Болтаев Н.Д. Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов от сильно осциллирующих функций.//Abstacts of the scientific conference.Mathematical physics and related problems of the modern analysis.26-27 November,2015-Бухоро. –С. 382-384.
13. Шадиметов Х.М.,Хаётов А.Р., Болтаев Н.Д. Optimal Quadrature Formulas for Numerical Evaluation of Fourier Coefficients in $W_2^{(m,m-1)}$ Space.// Анализнинг долзарб муаммолари .22-23 апрель 2016 йил-Қарши.-С. 225-227.
14. Boltaev.N.D., Hayotov.A.R., Shadimetov.Kh.M. Construction of optimal quadrature formulas for Fourier coefficients. //Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых.Проблемы современной топологии и её приложения.5-6 май,2016-Ташкент, -С. 46-48.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг “ЎзМУ хабарлари” журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.(15.12.2018 й.)

Босишга рухсат этилди 15.12.2018.Ҳажми 2,5 босма табок.
Бичими 60x84 1/8. Адади 80 нусха. Буюртма № 218.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасидан чоп этилди.