ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

КАРИМОВ ШАХОБИДДИН ТУЙЧИБОЕВИЧ

ЭРДЕЙИ-КОБЕР ОПЕРАТОРЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2019 йил

УДК: 517.95

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Каримов Шахобиддин Туйчибоевич
Эрдейи – Кобер операторлари ва уларнинг хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга татбиқлари 3

Каримов Шахобиддин Туйчибоевич
Операторы Эрдейи – Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных 27

Karimov Shakhobiddin Tuychiboyevich
Erdélyi-Kober operators and their application to partial differential equations …….....……... 51

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works ……....……... 55

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

КАРИМОВ ШАХОБИДДИН ТУЙЧИБОЕВИЧ

ЭРДЕЙИ-КОБЕР ОПЕРАТОРЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2019 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.1.DSc/FM8 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Фарғона давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://fti-kengash.uz/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Хасанов Ақназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Касимов Шакирбай Гаппарович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ҳасанов Анваржон физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Белгород давлат миллий тадқиқот университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___» _____ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nu.uz.)

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (_____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «____» _____куни тарқатилди.
(2019 йил «____» _____ даги _____ рақамли реестр баённомаси).

А.С.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И. Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

А.Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар бузиладиган ва сингуляр коэффициентли дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ўрганишни тақозо этмоқда. Бундай тенгламалар синфига қизиқиш ортиши уларнинг ўққа нисбатан симметрик потенциаллар назарияси, Радон алмаштиришлари ва томография, газлар динамикаси ва акустика, гидродинамиканинг суюқликлар оқими назарияси, чизиқлаштирилган Максвелл-Эйнштейн тенгламалари, эластиклик ва пластиклик назарияси масалалари ҳамда бошқа кўпгина амалий масалаларга татбиқ этилиши билан изоҳланади. Бундан ташқари, бундай тенгламаларнинг мураккаблиги ва уларни ечишнинг етарли даражадаги умумий аналитик усуллари тўла шаклланмаганлиги сабабли ушбу тенгламаларга оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда каср тартибли операторларни хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишга татбиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: каср тартибли Эрдейи-Кобер операторларининг янги хоссаларини ўрганиш ва уларни сингуляр коэффициентли хусусий ҳосилали юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун масалаларни ечишга қўллаш; кўп ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер операторини киритиш ва унинг хоссаларини тадқиқ этиш ҳамда уларни сингуляр коэффициентларга эга бўлган кўп ўлчовли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга татбиқ этиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқот йўналишларида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини белгилайди.

Мамлакатимизда ҳозирги вақтда амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишлар бўйича тадқиқотларга эътибор кучайтирилмоқда, хусусан, иккинчи ва юқори тартибли сингуляр коэффициентли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун турли чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш, уларни ечишнинг самарали усулларини топишга алоҳида эътибор қаратилмоқда. Дифференциал тенгламалар ва математик физика, функционал анализ, динамик системалар назарияси, амалий математика ва математик моделлаштириш фанлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Мазкур вазифалар ижросини таъминлаш мақсадида ўтказилган тадқиқотларимиз, сингуляр коэффициентли дифференциал тенгламалар хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда, улар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишга Эрдейи-Кобер операторларини қўллаш самарали усуллардан бири эканлигини кўрсатмоқда.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон республикаси фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги 292 - сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида”ги ПФ-4947-сон Фармони, 2017 йил 17 февралдаги “Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2789-сон, 2017 йил 20 апрелдаги “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-2909-сон ва 2018 йил 27 апрелдаги “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-3682-сон қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация иши муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[2].

Эрдейи-Кобер операторларининг хоссалари ва уларнинг татбиқларини ўрганиш, сингуляр коэффициентли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалалар ечимларининг мавжудлигини ва ягоналигини исботлаш йўналишлари бўйича хорижий мамлакатларнинг етакчи илмий марказлари ва университетлари, жумладан, Нью-Хейвен, Луизиана, Мериленд университетлари ва Калифорния технологик институти (АҚШ), Эдинбург, Стратклайд ва Кембридж университетлари (Англия), Болгария фанлар академиясининг математика ва информатика институти (Болгария), Анқара университети (Туркия), Россия фанлар академиясининг В.А. Стеклов номидаги математика институти, Россия ФА Сибирь бўлимининг С.Л. Соболев номидаги математика институти, Москва ва Новосибирск давлат университетлари, Қозон (Приволжия) федерал университети, Воронеж ва Самара давлат университетлари, Белгород давлат миллий тадқиқот университети, Россия ФА Кабардин-Балқор илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти, Стерлитамак давлат педагогика академияси (Россия) ва бошқа хорижий муассасаларда кенг қамровли илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда.

Олиб борилган илмий тадқиқотлар натижасида жаҳон миқёсида бир қанча долзарб масалалар ечилган бўлиб, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: Эрдейи-Кобер операторларининг баъзи интеграл алмаштиришлар ва Бессел оператори билан композициялари исботланган ҳамда бу операторлар нормаларининг баҳоси олинган (Эдинбург университети, Калифорния технологик институти, Белорус давлат университети); ядросида Бессел функцияси қатнашган (умумлашган)

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: www.webofknowledge.com, www.scopus.com, www.scholar.google.com, www.springer.com, www.mathnet.ru ва бошқа шунга ўхшаш манбалар асосида ишлаб чиқилган.

Эрдейи-Кобер операторлари киритилиб, бу операторларнинг нормалари баҳоланган, интеграл алмаштиришлар ва Бессел оператори билан копозициялари топилган ҳамда улардан фойдаланиб жуфт интеграл тенгламалар, Лаплас тенгламаси учун аралаш чегаравий шартли баъзи масалалар ечилган ва Гельмгольц тенгламасининг фундаментал ечими қурилган (Стратклайд университети, Болгария ФА математика ва информатика институти); ўққа нисбатан симметрик умумлашган потенциаллар назарияси тенгламалари учун бошланғич ва чегаравий масалалар ечилган ҳамда бу масалалар ечимларини Эрдейи-Кобер операторлари билан боғлиқлиги аниқланган, Бессел оператори қатнашган кўп ўлчовли гиперболик тенгламалар учун Коши масаласи ечилган ва ушбу тенгламалар учун Гюйгенс принципи исботланган (Мериленд университети, Россия ФА Сибирь бўлимининг С.Л. Соболев номидаги математика институти, Воронеж давлат университети, Россия ФА Кабардин-Балқор илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти); Бессел оператори қатнашган иккинчи тартибли параболик тенгламалар ва Эйлер-Пуассон-Дарбу тенгамаларига ажраладиган юқори тартибли кўп ўлчовли гиперболик типдаги тенгламалар учун Коши масаласи ечилган (Черновицк, Қозоғистон ва Тожикистон миллий университетлари, Мериленд, Анқара университетлари, Москва ва Воронеж давлат университетлари, Белгород давлат миллий тадқиқот университети).

Ҳозирги кунда жаҳонда коэффициентлари махсусликка эга бўлган дифференциал тенгламалар ҳамда математик физиканинг Бессел оператори қатнашган ноклассик тенгламалари учун масалаларни ечишнинг умумий усулларини топиш ва алмаштириш операторлари назариясини қўллаш каби устувор илмий-тадқиқот ишлари амалга оширилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Каср тартибли операторларни ўққа нисбатан симметрик умумлашган потенциаллар назариясининг (GASPT – Generalized Axially Symmetric Potential Theory) диффренциал тенгламаларига татбиқини биринчи бўлиб A.Weinstein ўрганган. Сўнгра бу ишлар A. Erdéliy ишларида ривожлантирилган. У A.Weinstein тадқиқотларини давом эттириб, каср тартибли операторларнинг хоссаларини, улар нормаларининг баҳоларини ва Бессел оператори билан композицияларини чуқур ўрганган. A. Erdéliyдан сўнг унинг натижаларини J.S.Lowndes умумлаштирган. У ядросида Бессел функцияси қатнашган (умумлашган) Эрдейи-Кобер операторларини киритган ва уларнинг хоссаларини ўрганган. Олинган натижаларни Лаплас тенгламаси учун аралаш чегаравий шартли масалаларни ечишга ва Гельмгольц тенгламасининг фундаментал ечимини топишга қўллаган. Бундан ташқари у олинган натижалардан фойдаланиб, ўзгармас коэффициентли кўп ўлчовли гиперболик тенглама учун Коши масаласини ечган.

Вақт ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган гиперболик тенгламалар кўп математикларда қизиқиш уйғотганлиги боис ҳозирги вақтда улар нисбатан кенг ўрганилган. Булар қаторига яна Эйлер – Пуассон – Дарбу (ЭПД) тенгламаси учун Гюйгенс принципини ўрганишга бағишланган барча

ишларни киритиш мумкин. Мазкур тадқиқотлар А.В. Бицадзе, А.М. Нахушев, М.М. Смирнов, С.А. Терсенов, И.А. Киприянов, R. Carroll, R Showalter, Н.Х. Ибрагимов, Н.Ражабов, К.Б. Сабитов, С.А. Алдашев, О.А. Маричев, А.А. Килбас, О.А.Репин, В.В. Катрахов, С.М. Ситник, М.С. Салохитдинов, А.К. Уринов, М. Мирсабуров, Б. Исламов, А.Хасанов ва бошқаларнинг ишларида келтирилган. Фазовий ўзгарувчилар бўйича Бессел оператори қатнашган кўп ўлчовли гиперболик типдаги тенгламалар учун масалалар кам ўрганилган. Бу ерда вазнли ўрта сферик усул қўлланилган Л.Н. Ляхов, И.П. Половинкин ва Э.Л. Шишкиналар ишини ҳамда С.М. Ситник ва Э.Л. Шишкиналар монографиясини айтиб ўтиш мумкин.

Политўлқин тенгламаси учун Коши масаласи A. Weinstein ва D. Krahn ишларида ўрганилган бўлиб, улар томонидан қурилган ечим формуласида катта хажмдаги каррали интеграллар қатнашади. Тўлқин тенгламаларига ажраладиган юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи С.А. Гальперин ва В.Е. Кондрашовлар томонидан ечилган. С.А. Алдашев ушбу масалани политўлқин тенгламаси учун Рисс потенциалларидан фойдаланиб ечган. ЭПД тенгламаларига ажраладиган юқори тартибли кўп ўлчовли гиперболик тенглама учун Коши масаласи С.А. Алдашев ва Л.А. Ивановлар ишларида ечилган.

Бессел оператори қатнашган иккинчи тартибли параболик тенгламалар учун Коши масаласининг классик ва умумлашган ечимлари назарияси В.В. Крехивский, М.И. Матийчук, D. Colton, O. Arena, И.А. Киприянов, В.В. Катрахов, В.М. Ляпин, С.А. Терсенов, С.Д. Ивасишен, В.П. Лавренчук, А.Б. Муравник ва бошқалар ишларида ривожлантирилган. Бессел оператори қатнашган юқори тартибли параболик тенгламалар учун Коши масаласи деярли ўрганилмаган.

Силлиқ коэффициентли бир ўлчовли чизиқли учинчи ва тўртинчи тартибли ноклассик тенгламалар учун турли масалалар ечимларининг мавжудлиги А.П. Солдатов, М.Х. Шхануков, В.И. Жегалов, А.И. Кожанов, С.П. Пулькина, Т.Д. Джураев, А. Сопуев, О.С. Зикиров, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина, A. Maher ва бошқалар томонидан исботланган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация Фарғона давлат университети илмий тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-59 «Иккинчи тартибли чизиқли сингуляр коэффициентли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалалар» мавзусидаги лойиҳа доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Эрдейи-Кобер операторларидан фойдаланиб, сингуляр коэффициентли ва спектрал параметрли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

бир ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер операторининг янги хоссаларини ўрганиш ва уларни сингуляр коэффициентли ва спектрал параметрли хусусий ҳосилали юқори тартибли дифференциал тенгламалар

учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишга татбиқ этиш;

кўп ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер операторини киритиш ва унинг хоссаларини тадқиқ этиш ҳамда бу операторни сингуляр коэффициентларга эга бўлган кўп ўлчовли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун масалаларни ечишга татбиқ этиш;

Эрдейи-Кобер операторларидан фойдаланиб, бир ва кўп ўлчовли поликалорик тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечиш;

сингуляр коэффициентли ноклассик дифференциал тенгламалар учун масалаларни ечишга Эрдейи-Кобер операторларини татбиқ этиш.

Тадқиқотнинг объекти Эрдейи-Кобер операторлари ҳамда сингуляр коэффициентли ва спектрал параметрли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети Эрдейи-Кобер операторларини тадқиқ этиш ва уларни сингуляр коэффициентли ва спектрал параметрли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишга татбиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда математик физика, каср тартибли ҳосила ва интеграллар назарияси ҳамда махсус функциялар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер операторининг янги хоссалари топилган ҳамда унинг кўп ўлчовли ҳоли киритилган ва хоссалари исботланган;

барча ўзгарувчилари бўйича Бессел операторлари қатнашган бир, икки ва уч ўлчовли Клейн-Гордон-Фок тенгламаси ва ушбу тенгламанинг вақт ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган кўп ўлчовли ҳоли учун Коши масаласи ечимининг формуласи топилган;

политўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг формуласи қурилган ва фазовий ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган итерацияланган бир ўлчовли ҳамда икки ўққа нисбатан симметрик бўлган гиперболик типдаги тенгламалар учун ушбу масала ечимининг формуласи топилган;

вақт ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган итерацияланган кўп ўлчовли Клейн-Гордон-Фок тенгламаси ва бир жинсли бўлмаган итерацияланган гиперболик тенгламалар учун Коши масаласи ечимини топиш усули ишлаб чиқилган;

барча фазовий ўзгарувчилари бўйича Бессел оператори қатнашган поликалорик тенглама учун бир чегаравий масала ечимининг формуласи топилган;

юқори жуфт тартибли бузиладиган дифференциал тенгламаларнинг бир синфи учун тенглама тартибини икки марта пасайтиришнинг зарурий ва етарли шартлари топилган ва ундан фойдаланиб, Коши масаласи ечимини топиш усули ишлаб чиқилган ҳамда иккита ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган тўртинчи тартибли дифференциал тенглама учун Гурса масаласи ечилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси Бессел оператори қатнашган дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларнинг ошкор кўринишда топилган ечимларини шу математик моделларга келтириладиган жараёнларнинг сифат хусусиятларини аниқлашда ва сонли ҳисоблашларни бажаришда қўлланилишидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг классик назарияси ва каср тартибли интеграл ва дифференциал операторлар назарияси усуллари ёрдамида аниқ математик исботларни амалга оширилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган илмий натижалардан каср тартибли интегродифференциал операторлар ҳамда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясини янада ривожлантиришда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертацияда олинган тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти уларни бузиладиган ва сингуляр коэффициентли дифференциал тенгламаларга келтириладиган амалий масалаларга татбиқ этиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Эрдейи-Кобер операторлари ва уларнинг хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга татбиқлари бўйича олинган натижалар асосида:

сингуляр коэффициентли тўрт ўлчовли гиперболик типдаги дифференциал тенглама ҳамда сингуляр Бессел оператори қатнашган бир ўлчовли политўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг формуласи 114030440003 рақамли «Эластиклик ва пластикликнинг фундаментал муаммолари» мавзусидаги хорижий грантида эластиклик ва пластикликнинг математик моделлари бўлган дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимини топишда фойдаланилган (Сибирь давлат фан ва технологиялар университетининг 2017 йил 23 ноябрдаги 73/7-5383 сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши баъзи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич шартли масалаларнинг ечимини қуриш имконини берган;

юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларнинг ошкор кўринишда топилган ечимлари 0115РК00542 рақамли “Энергия диссипациясини ҳисобга олган кўп фазали муҳитларда тўлқин динамикасини математик моделлаштириш (тўғри ва тескари масалалар)” хорижий грантда юқори тартибли дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечишда фойдаланилган (Қозоғистон Республикаси Ахборот ва ҳисоблаш технологиялари институтининг 2019 йил 7 февралдаги 01-07/73-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши кўп фазали муҳитларда тўлқин динамикасининг математик моделлари бўлган дифференциал тенгламалар учун масалалар ечимларининг интеграл кўринишини қуриш имконини берган;

каср тартибли Эрдейи-Кобер операторларининг янги хоссалари ҳамда уларни татбиқ этиб, Бессел оператори қатнашган юқори тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг ечимларини қуриш бўйича олинган натижалар «Каср ҳисоб ва уларнинг татбиқлари» мавзусидаги хорижий илмий-тадқиқот лабораториясининг ишларида каср тартибли дифференциал тенгламалар учун масалалар ечимини қуришда қўлланилган (Камчатка давлат университетининг 2019 йил 06 мартдаги 123-01-01-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши каср тартибли дифференциал тенгламалар учун масалалар ечимининг ошкор кўринишини топиш имконини берган;

Эрдейи-Кобер алмаштириш операторларининг янги хоссалари ҳамда уларни Бессел оператори қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишга татбиқ этиш усуллари 1.7311.2017/8.9 рақамли «Дифференциал ва псевдодифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этиш усулларини ривожлантириш» мавзусидаги хорижий давлат бюртмасидаги лойиҳада хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун баъзи чегаравий масалалар ечимининг мавжудлигини исботлашда қўлланилган (Белгород давлат миллий тадқиқот университетининг 2019 йил 18 мартдаги 7-97-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши чегаравий масалалар ечимининг интеграл кўринишини топиш ва уларни амалий масалаларга тадбиқ этиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 28 та илмий ва илмий-амалий анжуманларда, жумладан, 20 та халқаро ва 8 та республика илмий ва илмий - амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 48 та илмий иш чоп этилган, жумладан, 20 та илмий мақола, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этишга тавсия этилган илмий нашрларда 16 та мақола, булардан 6 таси хорижий ва 10 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 198 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи ва муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб

берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Эрдейи-Кобер операторлари ва уларнинг хоссалари»** номли биринчи бобида бир ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер операторининг янги хоссалари исботланган ҳамда кўп ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер оператори киритилиб, унинг хоссалари тадқиқ этилган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида каср тартибли интеграл ва ҳосилалар назариясига ҳамда алмаштириш операторларига оид бўлган баъзи маълумотлар келтирилган.

Биринчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги кўринишдаги

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)t^{2\eta+1}f(t))dt \qquad (1)$$

бир ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер оператори ҳамда бу операторга тескари бўлган қуйидаги операторнинг

$$J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2\eta}}{\Gamma(p-\alpha)}\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^p\int_0^x \frac{\bar{I}_{p-\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-s^2}\right)}{(x^2-s^2)^{\alpha-p+1}}s^{2(\eta+\alpha)+1}f(s)ds \qquad (2)$$

янги хоссалари исботланган, бу ерда $p=[\alpha]+1$, $\bar{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$, $\bar{I}_\nu(z)=\bar{J}_\nu(iz)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}I_\nu(z)$, $J_\nu(z)$ ва $I_\nu(z)$- мос равишда ҳақиқий ва мавҳум аргументли Бессел функциялари, $\Gamma(\alpha)$-Эйлернинг гамма-функцияси.

Иккинчи параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

1-теорема. Фараз қилайлик, $\alpha>0, \eta\geq-(1/2)$, $f(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$ бўлиб, $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f$, $k=\overline{0,m-1}$ функциялар нол нуқта атрофида интегралланучи ва $\lim\limits_{x\to0}x^{2\eta+1}(d/dx)[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$ бўлсин. У ҳолда $[B_{\eta+\alpha}^x+\lambda^2]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x]^m f(x)$ ёки $[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=$ $=J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x-\lambda^2]^m f(x)$ тенгликлар, хусусан, агар $\lambda=0$ бўлса, $[B_{\eta+\alpha}^x]^m I_{\eta,\alpha}f(x)=I_{\eta,\alpha}[B_\eta^x]^m f(x)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $I_{\eta,\alpha}=J_0(\eta,\alpha)$, $m=0,1,2,...$, $[B_\eta^x]^0=E$, E- бирлик оператор, $[B_\eta^x]^m=[B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x]$ эса ушбу $B_\eta^x\equiv(d^2/dx^2)+[(2\eta+1)/x](d/dx)$ Бессел операторининг m-чи даражаси.

Айтайлик, $m=1,2,...$, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ ва $\Omega\subset R^n$, $L^{(x)}$- $x\in R^n$ ўзгарувчининг (y ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган) l - тартибли чизиқли дифференциал оператори бўлсин. M орқали $\Omega\times\{y\geq0\}$ соҳада y бўйича $2m-1$ марта ва x бўйича $lm-1$ марта, $\Omega\times\{y>0\}$ соҳада эса y бўйича $2m$ марта ва x бўйича lm марта узлуксиз дифференциалланувчи $u(x,y)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ функциялар синфини белгилайлик.

2-теорема. Фараз қилайлик, $\alpha>0, \eta\geq-(1/2)$ ва $u(x,y)\in M$ бўлиб, $y^{2\eta+1}[B_\eta^y]^{k+1}u(x,y)$, $k=\overline{0,m-1}$ функциялар координата боши атрофида

интегралланувчи ва $\lim\limits_{y\to 0} y^{2\eta+1}(\partial/\partial y)[B_\eta^y]^k u(x,y)=0$, $k=\overline{0,m-1}$ бўлсин. У ҳолда $(B_{\eta+\alpha}^y+\lambda^2\pm L^{(x)})^m J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)u(x,y)=J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)(B_\eta^y\pm L^{(x)})^m u(x,y)$ тенглик, хусусан, агар $\lambda=0$ бўлса, $(B_{\eta+\alpha}^y\pm L^{(x)})^m I_{\eta,\alpha}^{(y)}u(x,y)=I_{\eta,\alpha}^{(y)}(B_\eta^y\pm L^{(x)})^m u(x,y)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда операторлардаги юқори индекслар бу операторлар таъсир этаётган ўзгарувчиларни билдиради.

3-теорема. Агар $p\in N$, $p-1\le\alpha<p$, $\eta\ge -1/2$, $g(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$ бўлиб, $x^{2(\eta+\alpha)+1}[B_{\eta+\alpha}^x]^{k+1}g(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ функциялар нол нуқта атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x\to 0} x^{2(\eta+\alpha)+1}(d/dx)[B_{\eta+\alpha}^x]^k g(x)=0,\quad k=\overline{0,m-1}$ бўлса, у ҳолда $\left[B_\eta^x\right]^m J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^x+\lambda^2\right]^m g(x)$, $\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]^m J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=$ $=J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^x\right]^m g(x)$ тенгликлар, хусусан, агар $\lambda=0$ бўлганда қуйидаги тенглик ўринли бўлади: $\left[B_\eta^x\right]^m I_{\eta,\alpha}^{-1}g(x)=I_{\eta,\alpha}^{-1}\left[B_{\eta+\alpha}^x\right]^m g(x)$.

4-теорема. Айтайлик, $\alpha>0,\ \eta\ge -(1/2)$, $f(x)\in C^m(0,b),\ b>0$ бўлиб, $x^{2\eta+1}D_\eta^{k+1}f(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ функциялар нол нуқта атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta}D_\eta^k f(x)=0,\ k=\overline{0,m-1}$ бўлсин. У ҳолда $D_{\eta+\alpha}^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=$ $=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta^m f(x)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $D_\eta^0=E$, $D_\eta^m=D_\eta^{m-1}D_\eta$ эса $D_\eta=x^{-2\eta}\left(d/xdx\right)x^{2\eta}$ операторнинг ушбу $D_\eta^m=x^{-2\eta}\left(d/xdx\right)^m x^{2\eta}$ кўринишдаги m-чи даражаси.

5-теорема. Фараз қилайлик, $\alpha>0,\eta\ge -1/2$, $f(x)\in C^{2m}(0,b),\ b>0$ бўлиб, $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ функциялар нол нуқта атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}(d/dx)[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$ бўлсин. У ҳолда

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^{m}a_{mj}x^{2j}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{m+j}f(x),$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^{m}b_{mj}x^{2j+1}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{m+j+1}f(x)$$

тенгликлар ўринли бўлади, бу ерда a_{mj} ва b_{mj} ўзгармаслар ушбу $a_{00}=1,\ b_{00}=1/2$, $b_{mj}=(1/2)a_{mj}+\quad+2(j+1)a_{m(j+1)}$, $0\le j\le m$, $a_{mj}=0,\ j>m$, $a_{(m+1)j}=(1/2)b_{m(j-1)}+(2j+1)b_{mj}$, $1\le j\le m$, $b_{mj}=0,\ j>m$, $a_{(m+1)0}=b_{m0}=$ $=2^{-(m+1)}(2m+1)!!$ рекуррент муносабатлардан аниқланади.

6-теорема. Агар $\alpha>0,\eta\ge -1/2$, $f(x)\in C^{2m-1}[0,b]\cap C^{2m}(0,b)$, $b>0$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to 0}[B_\eta^x]^k f(x)=c_k$, $c_k=const$ ва $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$[B^{x}_{\eta+\alpha}]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\Big|_{x=0} = \frac{(\alpha+\eta+1)_m}{(1/2)_m}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\Bigg|_{x=0},$$

$$\frac{d}{dx}[B^{x}_{\eta+\alpha}]^m J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\Big|_{x=0} = 0,\ \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}} J_\lambda(\eta,\alpha) f(x)\Bigg|_{x=0} = 0,$$

хусусан, агар $\lambda = 0$ бўлса, $I_{\eta,\alpha}$ учун шунга ўхшаш формула ўринли бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида ушбу кўринишдаги

$$J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\\ \eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n\end{pmatrix} f(x) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+\eta_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}\left[t_k^{2\eta_k+1}\left(x_k^2-t_k^2\right)^{\alpha_k-1}\right]\overline{J}_{\alpha_k-1}\left(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t_k^2}\right) f(t)dt_1dt_2\dots dt_n \quad (3)$$

кўп ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер оператори ҳамда унга тескари бўлган ушбу

$$J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_{i\lambda}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \eta+\alpha\end{pmatrix} f(x) = J_{i\lambda_1,i\lambda_2,\dots,i\lambda_n}\begin{pmatrix}-\alpha_1, & -\alpha_2, & \dots, & -\alpha_n\\ \eta_1+\alpha_1, & \eta_2+\alpha_2, & \dots, & \eta_n+\alpha_n\end{pmatrix} f(x) =$$

$$= 2^{n-|m|}\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{x_k^{-2\eta_k}}{\Gamma(m_k-\alpha_k)}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{m_k}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^{n}[t_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\times$$

$$\times\left(x_k^2-t_k^2\right)^{m_k-\alpha_k-1}]\overline{I}_{m_k-\alpha_k-1}\left(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t_k^2}\right) f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\dots dt_n, \quad (4)$$

оператор киритилган ва уларнинг хоссалари ўрганилган, бу ерда $\alpha_k > 0$, $m_k = [\alpha_k]+1$, $\eta_k \ge -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$.

Учинчи параграфда қуйидаги теоремалар исботланган.

7-теорема. Фараз қилайлик, $\alpha_k > 0,\ \eta_k \ge -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $f(x)\in C^2(\Omega^n)$ бўлиб, $x_k^{2\eta_k+1}B^{x_k}_{\eta_k} f(x)$, $k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1} f_{x_k}(x) = 0$, $k=\overline{1,n}$ бўлсин. У ҳолда $(B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} B^{x_k}_{\eta_k} f(x)$ тенгликлар, хусусан, агар $\lambda_k = 0$ бўлса, $B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k} J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} B^{x_k}_{\eta_k} f(x)$, $k=\overline{1,n}$ тенгликлар ўринли бўлади, бу ерда $\Omega^n = (0,b_1)\times(0,b_2)\times\dots\times(0,b_n)$, $b_k\in R,\ b_k>0,\ k=\overline{0,n}$.

7 - теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

1-натижа. Айтайлик, 7 теореманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда

$$\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k+\alpha_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\left[B^{x_k}_{\eta_k}\right] f(x),$$

тенглик, хусусан, агар $\eta_k = -1/2, k=\overline{1,n}$ бўлса,

$$\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\alpha_k-1/2}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\-1/2\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\-1/2\end{pmatrix}\Delta f(x)$$

тенглик ўринли бўлади, бу ерда Δ - кўп ўлчовли Лаплас оператори.

8-теорема. Агар $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $f(x)\in C^{2n}(\Omega^n)$ бўлиб, $x_k^{2\eta_k+1}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$, $k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}f_{x_k}(x)=0$, $k=\overline{1,n}$ бўлса, у ҳолда ушбу $\prod\limits_{k=1}^{n}(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}\prod\limits_{k=1}^{n}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$ тенглик, хусусан, агар $\eta_k=-1/2$, $k=\overline{1,n}$ бўлса, $\prod\limits_{k=1}^{n}\left[B_{\alpha_k-(1/2)}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}\dfrac{\partial^{2n}f(x)}{\partial x_1^2\partial x^2\ldots\partial x_n^2}$ тенглик ўринли бўлади.

Айтайлик, $m_k\in N\cup\{0\}$, $\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^0=E$, $\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{m_k}=\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{m_k-1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]$, $k=\overline{0,n}$ бўлсин.

9-теорема. Агар $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $f(x)\in C^{2m_0}(\Omega^n)$, $m_0=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}$ бўлиб, $x_k^{2\eta_k+1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{p_k+1}f(x)$, $p_k=\overline{0,m_k-1}$, $k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{p_k}f(x)=0$, $p_k=\overline{0,m_k-1}$, $k=\overline{1,n}$ бўлса, у ҳолда $\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right]^{m_k}J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{m_k}f(x),\ k=\overline{1,n}$ тенгликлар ўринлидир.

10-теорема. Айтайлик, $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $f(x)\in C^{2q}(\Omega^n)$, $q\in N$ бўлиб, $x_k^{2\eta_k+1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{l+1}f(x)$, $l=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{l}f(x)=0$, $l=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{1,n}$ бўлсин. У ҳолда $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)\right]^q J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\\eta\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}B_{\eta_k}^{x_k}\right]^q f(x)$ тенглик ўринли бўлади.

Айтайлик, $L^{(y)}$ - $y=(y_1,y_2,\ldots,y_s)\in R^s$ ўзгарувчининг ($x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган) $l\in N$ тартибли чизиқли дифференциал оператори бўлсин.

11-теорема. Фараз қилайлик, $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $q\in N$, $f(x,y)\in C_{x,y}^{2q,lq}(\Omega^n\times\Omega^s)$ бўлиб, $x_k^{2\eta_k+1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{j+1}f(x,y)$, $j=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва

$\lim\limits_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^j f(x,y)=0$, $j=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{1,n}$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)\pm L^{(y)}\right]^q J_\lambda^{(x)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x,y)=J_\lambda^{(x)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[\sum_{k=1}^{n}B_{\eta_k}^{x_k}\pm L^{(y)}\right]^q f(x,y).$$

12-теорема. Агар $\alpha_k>0,\ \eta_k\ge -(1/2),\ k=\overline{1,n}$, $m_0=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}$, $f(x)\in C^{m_0}(\Omega^n)$ бўлиб, $x_{x_k}^{2\eta_k+1}[D_{\eta_k}^{x_k}]^{l_k+1}f(x)$, $l_k=\overline{0,m_k-1},\ k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x_k\to 0} x_k^{2\eta_k}[D_{\eta_k}^{x_k}]^{l_k} f(x)=0$, $l_k=\overline{0,m_k-1},\ k=\overline{1,n}$ бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$[D_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}]^{m_k} J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}[D_{\eta_k}^{x_k}]^{m_k} f(x),\ k=\overline{1,n}.$$

13-теорема. Айтайлик, $q=(q_1,q_2...q_n)$, $q_k\in N$, $q_k-1<\alpha_k<q_k$, $\eta_k\ge -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $p\in N$, $g(x)\in C^{2p}(\Omega^n)$ бўлиб, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^l g(x)$, $l=\overline{0,p-1}$, $k=\overline{1,n}$ функциялар координата боши атрофида интегралланувчи ва $\lim\limits_{x_k\to 0} x_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}\right]^l g(x)=0$, $l=\overline{0,p-1}$, $k=\overline{1,n}$ бўлсин. У ҳолда $\left[B_{\eta_k}^{x_k}-\lambda_k^2\right]^p J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}g(x)=J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}\right]^p g(x)$ ёки $\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^p J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}g(x)=$ $=J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right]^p g(x),\ k=\overline{1,n}$, хусусан, агар $\lambda_k=0$ бўлса, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^p J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}g(x)=J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}\right]^p g(x),\ k=\overline{1,n}.$$

2-натижа. Агар 13 - тереманинг шартлари бажарилса, у ҳолда $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}B_{\eta_k}^{x_k}\right]^p J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}g(x)=J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)\right]^p g(x)$ тенглик, хусусан, агар $\lambda_k=0$, $\eta_k=-(1/2)$, $k=\overline{0,m-1}$ бўлса, қуйидаги тенглик $\Delta^p J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}g(x)=J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}\Delta_B^p g(x)$ ўринли бўлади, бу ерда Δ^p- Лаплас операторининг p-чи даражаси, $\Delta_B^p=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\alpha_k-(1/2)}^{x_k}\right)\right]^p$.

Диссертациянинг «**Бессел оператори қатнашган Клейн – Гордон – Фок тенгламаси учун Коши масаласи**» деб номланган иккинчи бобида барча ўзгарувчилари бўйича Бессел оператори қатнашган қуйидаги умумий

Клейн-Гордон-Фок тенгламаси

$$L^{\lambda}_{\beta,\alpha}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \lambda^2 u = 0 \qquad (5)$$

қаралган бўлиб, бу ерда $u = u(x,t)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $t \in R, t > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, $\beta, \alpha_k, \lambda \in R$, бунда $0 < \beta < 1/2$, $0 < \alpha_k < 1$, $k = \overline{1,n}$.

Агар (5) тенгламада $\beta = 0, \alpha_k = 0, k = \overline{1,n}$ бўлса, у квант механикасининг элементар заррачалар назариясидаги Клейн-Гордон-Фок тенгламаси деб аталувчи гиперболик типдаги тенгламага келади. Бу бобда $\Omega_n = \{\ (x,t):\ x \in R^n, t \in R,\ x_k > t > 0,\ k = \overline{1,n}\ \}$ соҳада (5) тенглама учун $n = 1,2,3$ ҳамда $n > 1,\ \alpha_k = 0, k = \overline{1,n}$ бўлганда Коши масаласи тадқиқ этилади.

Коши масаласи. Ω_n соҳада (5) тенгламанинг қуйидаги бошланғич

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \bar{R}^n_+;\quad \lim_{t\to 0} t^{2\beta} u_t(x,t) = \nu(x),\ x \in R^n_+ \qquad (6)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб этилади, бунда $R^n_+ = \{x \in R^n : x_k > 0,\ k = \overline{1,n}\}$, $\bar{R}^n_+ = \{x \in R^n : x_k \geq 0,\ k = \overline{1,n}\}$, $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ - берилган функциялар.

Ушбу бобда {(5), (6)} масалани ечиш учун биринчи бобнинг учинчи параграфида киритлган ва ўрганилган кўп ўлчовли Эрдейи-Кобер операторидан фойдаланишга асосланган усул қўлланилган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида кўп ўлчовли (3) оператордан ҳамда 7 - теоремадан фойдаланиб, (5) тенглама учун $n = 1$ бўлганда қуйилган Коши масаласининг ечими қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x,t) = \bar{\gamma}_1 t^{1-2\beta} \int_{x-t}^{x+t} \tau(s)\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha} [t^2 - (s-x)^2]^{\beta-1} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha; \beta; \omega, \sigma) ds +$$

$$+\bar{\gamma}_2 \int_{x-t}^{x+t} \nu(s)\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha} [t^2 - (s-x)^2]^{-\beta} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; \omega, \sigma) ds, \qquad (7)$$

бу ерда $\Xi_2(a,b,c;\omega,\sigma)$ - Гумбертнинг бузилган гипергеометрик функцияси, $\bar{\gamma}_1 = \Gamma(\beta + (1/2)) / [\sqrt{\pi}\Gamma(\beta)]$, $\bar{\gamma}_2 = \Gamma((3/2) - \beta) / [\sqrt{\pi}(1-2\beta)\Gamma(1-\beta)]$.

Бунда қуйидаги теорема исботланган.

14-теорема. Агар $\tau(x) \in C(\bar{R}^1_+) \cap C^2(R^1_+)$, $\nu(x) \in C^2(R^1_+)$ бўлса, у ҳолда (7) формула билан аниқланган $u(x,t)$ функция, Ω_1 соҳада {(5), (6)} масаланинг ечими бўлади.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида (5) тенглама учун $n = 2$ бўлганда қўйилган Коши масаласи тадқиқ этилган. Бу параграфнинг биринчи булимида дастлаб $n = 2,\ \beta = 0$ ва $\lambda = 0$ бўлган ҳол қаралган. Кўп ўлчовли (3) оператордан ва 7 - теоремадан фойдаланиб, бу масаланинг ечими қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_t} \tau(\xi_1, \xi_2) \frac{R(\xi, x, t; \alpha_1, \alpha_2)}{\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_t}\nu(\xi_1,\xi_2)\frac{R(\xi,x,t;\alpha_1,\alpha_2)}{\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}d\xi_1 d\xi_2\,, \qquad (8)$$

бу ерда $K_t=\{(\xi_1,\xi_2):|\xi-x|<t\}$, $|\xi-x|^2=(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2$, $R(\xi,x,t;\alpha_1,\alpha_2)=$ $=(\xi_1/x_1)^{\alpha_1}(\xi_2/x_2)^{\alpha_2}F_3(\alpha_1,\alpha_2,1-\alpha_1,1-\alpha_2,1/2;\sigma_1,\sigma_2)$ $\sigma_k=[t^2-|\xi-x|^2]/(4\xi_k x_k)$, $0\le\sigma_k<1/2$, $k=1,2$, а $F_3(a,b,a',b',c;\sigma_1,\sigma_2)$ - Аппел функцияси.

Қуйидаги теорема ўринли эканлиги исботланган.

15-теорема. Айтайлик, $\tau(x_1,x_2)\in C(\bar{R}_+^2)\cap C^3(R_+^2)$ ва $\nu(x_1,x_2)\in C^2(R_+^2)$ бўлсин. У ҳолда (8) формула билан аниқланган $u(x_1,x_2,t)$ функция Ω_2 соҳада {(5), (6)} масаланинг $n=2,\beta=0$ ва $\lambda=0$ бўлгандаги ечимини аниқлайди.

Бу параграфнинг иккинчи бўлимида $n=2,\beta\ne0$ ва $\lambda\ne0$ бўлган ҳол қаралган. Олдинги бўлимда олинган натижаларга асосланиб, (1) умумлашган Эрдейи-Кобер операторини қўллаб, {(5), (6)} масала ечимининг формуласи қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{t^{1-2\gamma}}{2\pi}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iint\limits_{K_t}\tau(\xi_1,\xi_2)R_\lambda(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2,t;\alpha_1,\alpha_2,\beta)d\xi_1 d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_t}\nu(\xi_1,\xi_2)R_\lambda(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2,t;\alpha_1,\alpha_2,-\beta)d\xi_1 d\xi_2\,. \qquad (9)$$

бу ерда $R_\lambda(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2,t;\alpha_1,\alpha_2,\beta)$ = $(\xi_1/x_1)^{\alpha_1}(\xi_2/x_2)^{\alpha_2}[t^2-\rho^2]^{\beta-1/2}\times$ $\times{}_3\Phi_B^{(5)}(\alpha_1,\alpha_2,1-\alpha_1,1-\alpha_2,\beta+(1/2);\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $\omega_k=[t^2-\rho^2]/(4\xi_k x_k)$, $k=1,2$, $\omega_3=-(\lambda^2/4)[t^2-\rho^2]$, $\rho^2=(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2$, ${}_3\Phi_B^{(5)}(a,a',b,b',c;x,y,z)$ - уч ўзгарувчили бузилган гипергеометрик функция. Қуйидаги теорема ўринли:

16-теорема. Агар $\tau(x_1,x_2)\in C(\bar{R}_+^2)\cap C^3(R_+^2)$ ва $\nu(x_1,x_2)\in C^2(R_+^2)$ бўлса, у ҳолда (9) формула билан аниқланган $u(x_1,x_2,t)$ функция Ω_2 соҳада {(5), (6)} масаланинг ечими бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида (5) тенглама учун $n=3$ бўлганда {(5), (6)} масала тадқиқ этилган. Олдинги параграфдагига ўхшаб, бу параграф ҳам икки бўлимга ажратилган. Биринчи бўлимда $n=3,\beta=0$ ва $\lambda=0$ бўлган ҳол қаралган. Кўп ўлчовли (3) операторни ҳамда 7 - теорема ва 1 - натижани $n=3$ бўлганда қўллаб, бу масала ечимининг интеграл кўриниши топилган. Иккинчи бўлимда бу ечимдан фойдаланиб, умумлашган Эрдейи-Кобер операторини ва 1 - теоремани $m=1$ бўлганда қўллаб, қуйилган масала ечимининг формуласи қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x,t)=\gamma_1 t^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}\tau(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)d\xi+$$

$$+\gamma_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}\nu(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,1-\beta)d\xi\,, \qquad (10)$$

бу ерда $\gamma_1 = 2^{2-2\beta}\Gamma(2\beta)/4\pi\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = 2^{2\beta}\Gamma(2-2\beta)/4\pi\Gamma^2(1-\beta)$, $R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta) = \prod_{k=1}^{3}\left(\xi_k / x_k\right)^{\alpha_k}\left(t^2 - |\xi - x|^2\right)^{\beta-1}\Xi_2^{(4)}(\alpha;1-\alpha;\beta;\sigma)$, $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $1-\alpha = (1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-\alpha_3)$, $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$, $\sigma_k = [t^2 - |\xi - x|^2]/(4\xi_k, x_k)$, $0 \le \sigma_k < 1/2$, $k = \overline{1,3}$, $\sigma_4 = -(\lambda^2/4)[t^2 - |\xi - x|^2]$, $\Xi_2^{(4)}(\alpha;1-\alpha;\beta;\sigma)$ - қуйидаги қатор ёрдамида аниқланган тўрт ўлчовли гипергеометрик функция:

$$\Xi_2^{(4)}(a_1,\ldots,a_3;b_1,\ldots,b_3;c;z_1,z_2,\ldots,z_4) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_4^k}{(c)_k k!}F_B^{(3)}(a_1,\ldots,a_3;b_1,\ldots,b_3;c+k;z_1,\ldots,z_3),$$

$F_B^{(3)}(a_1,\ldots,a_3;b_1,\ldots,b_3;c;z_1,\ldots,z_3)$ - уч ўзгарувчили Лауричелли функцияси.

Қуйидаги теорема ўринли:

17-теорема. Айтайлик, $\tau(x) \in C(\overline{R}_+^3) \cap C^3(R_+^3)$ ва $\nu(x) \in C^3(R_+^3)$ бўлсин. У ҳолда (10) формула билан аниқланган $u(x,t)$ функция Ω_3 соҳада {(5), (6)} масаланинг ечими бўлади.

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида {(5), (6)} масала $n > 1, \alpha_k = 0, k = \overline{1,n}$ бўлган ҳолда 1 - теоремани $m = 1$ бўлганда қўллаб тадқиқ этилган. Бу масала β параметрнинг турли хил қийматларида, шу жумладан, махсус қийматларида ҳам тадқиқ этилиб, масала ечимининг формуласи қурилган. Хусусан, $\beta > (n-1)/2$ ва $\nu(x) = 0$ бўлганда, ечим қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x,t) = \frac{\Gamma(\beta + 1/2)t^{1-2\beta}}{\pi^{n/2}\Gamma(\beta - (n-1)/2)}\int_{|\xi - x| < t}\tau(\xi)\frac{\overline{J}_{\beta-(n+1)/2}\left(\lambda\sqrt{t^2 - |\xi - x|^2}\right)}{[t^2 - |\xi - x|^2]^{((n+1)/2)-\beta}}d\xi. \qquad (11)$$

$\beta < (n-1)/2$ бўлганда ҳам (11) функция {(5), (6)} масаланинг ечими бўлиши (1) операторнинг $\alpha < 0$ бўлгандаги формуласидан фойдаланиб кўрсатилган. Худди шу каби, $n > 1, \alpha_k = 0, k = \overline{1,n}$ бўлган ҳолда {(5), (6)} масала ечимининг интеграл формуласи $0 < \beta < (1/2)$ ва n жуфт ёки тоқ бўлган ҳолларда қурилган. Бундан ташқари бу масала β параметрнинг $\beta = (1/2),(3/2),\ldots$ махсус қийматларида ҳам алоҳида тадқиқ этилиб, масала ечимининг формуласи топилган.

Диссертациянинг «**Юқори тартибли гиперболик типдаги тенгламалар учун Коши масаласи**» деб номланган учинчи бобида каср тартибли бир ўлчамли Эрдейи-Кобер операторининг биринчи бобнинг иккинчи параграфида исботланган янги хоссаларини қўллаб, Бессел оператори қатнашган итерацияланган гиперболик типдаги юқори тартибли тенгламалар учун Коши масаласи тадқиқ этилган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида юқори ярим текисликда ушбу бир ўлчовли политўлқин тенгламаси учун

$$\Box^m u(x,t) = 0, \quad x \in R, \ t > 0 \qquad (12)$$

қуйидаги

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\ \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0}=\psi_k(x),\quad x\in R,\ k=\overline{0,m-1} \tag{13}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи тадқиқ этилган, бу ерда $m\in N$, $\varphi_k(x)$ ва $\psi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$- берилган функциялар.

Масаланинг изланиётган ечими қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2^{-2k-1}}{(k!)^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\left[t^2-(x-s)^2\right]^k f_k(s)ds+\int_{x-t}^{x+t}\left[t^2-(x-s)^2\right]^k g_k(s)ds\right\}, \tag{14}$$

бу ерда $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\varphi_{k-j}^{(2j)}(x)$, $g_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\psi_{k-j}^{(2j)}(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Бундан ташқари, қуйидаги теорема исботланган.

18-теорема. Агар $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R)$, $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R)$, $j=\overline{0,m-1}$, бўлса, у ҳолда (14) формула билан аниқланган $u(x,t)$ функция {(12), (13)} масаланинг ягона ечими бўлади.

(14) формула асосида сферик ўрта қиймат усулидан фойдаланиб, кўп ўлчовли политўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг формуласи қурилган. Бу ечим формуласи n тоқ бўлганда ушбу кўринишга эга:

$$u(x,t)=\gamma_n\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=t}f_0(\xi)d\sigma_\xi\right)+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=t}g_0(\xi)d\sigma_\xi\right)\right]+$$

$$+\gamma_n\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k+1}}{(k-1)!k!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int_{|\xi-x|\le t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{k-1}f_k(\xi)d\xi+$$

$$+\gamma_n\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k+1}}{(k-1)!k!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int_{|\xi-x|\le t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{k-1}g_k(\xi)d\xi,$$

бунда $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\Delta_x^{k-j}\varphi_j(x)$, $g_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\Delta_x^{k-j}\psi_j(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, $\gamma_n=[1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-2)\omega_n]^{-1}$, $\omega_n=2\pi^{(n/2)}/\Gamma(n/2)$.

n жуфт бўлганда эса масала ечимнинг формуласи Адамарнинг тушиш усулидан фойдаланиб топилган.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида $\Omega=\{(x,y):0<y<x\}$ соҳада

$$L_a^m(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(x,y)=0 \tag{15}$$

тенгламанинг (13) бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи ўрганилган, бунда $a\in(0,+\infty)$, $m\in N$, $L_a^m=L_a^1(L_a^{m-1})$.

Бир ўлчовли Эрдейи-Кобер операторининг хоссалари ва (14) формуладан фойдаланиб, {(15), (13)} масала ечимининг формуласи топилган ва $\alpha=a/2$, $\gamma=(a-1)/2$ бўлганда қуйидаги теорема исботланган.

19-теорема. Агар $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R^+)$, $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j=\overline{0,m-1}$ ва уларнинг мос ҳолда барча $2(m-j)$ *и* $2(m-j)-1$, $j=\overline{0,m-1}$ тартибли ҳосилалари $x=0$ да нолга тенг бўлса, у ҳолда ушбу

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{-\alpha}}{2^{2k+1}(k!)^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_{x-y}^{x+y}f_k(s)s^{\alpha}[y^2-(s-x)^2]^kF(\alpha,1-\alpha;k+1;\sigma)ds+\right.$$

$$\left.+\int_{x-y}^{x+y}g_k(s)s^{\alpha}[y^2-(s-x)^2]^kF(\alpha,1-\alpha;k+1;\sigma)ds\right\} \qquad (16)$$

формула билан аниқланган $u(x,y)$ функция {(15), (13)} масаланинг ягона ечими бўлади, бу ерда $R^+=\{x\in R:x>0\}$, $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\varphi_{k-j}(x)$, $g_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\psi_{k-j}(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида $\Omega=\{(x,y):0<y<x\}$ соҳада икки ўққа нисбатан симметрик бўлган итерацияланган ушбу

$$[h_{\beta,\alpha}^{\lambda}]^m(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\lambda^2\right)^m u(x,y)=0 \qquad (17)$$

тенгламанинг қуйидаги

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=\varphi_k(x),\ x\ge 0;\qquad \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0}=0,\ x\ge 0,\ k=\overline{0,m-1}, \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=0,\ x\ge 0;\quad y^{2\beta}\left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0}=\psi_k(x),\ x>0,\ k=\overline{0,m-1} \qquad (19)$$

бошланғич шартлардан бир гуруҳини қаноатлантирувчи $u(x,y)$ ечимини топиш масаласи қаралган, бу ерда $\alpha,\beta,\lambda\in R$, $m\in N$ бўлиб, $0<\alpha<1$, $0<\beta<1/2$; $\varphi_k(x)$ ва $\psi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$- берилган функциялар.

2 - теоремадан фойдаланиб, {(17), (18)} масала {(15), (13)} масаланинг $\psi_k(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$ бўлган ҳолига келтирилган. Сўнгра бу масала ечимининг (16) формуласидан фойдаланиб, {(17), (18)} масала ечимининг қўйидаги интеграл кўриниши топилган:

$$u_1(x,y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2^{-2k}x^{-\alpha}y^{1-2\beta}}{k!\Gamma(\beta+k)}\int_{x-y}^{x+y}f_k(s)s^{\alpha}[y^2-(s-x)^2]^{\beta+k-1}\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta+k;\omega,\sigma)ds, \qquad (20)$$

бу ерда $\omega=[y^2-(s-x)^2]/(4xs)$, $0<\omega<(1/2)$, $\sigma=-(\lambda^2/4)[y^2-(s-x)^2]$.

(17) тенгламанинг хоссаларидан ва (20) формуладан фойдаланиб, {(17), (19)} масаланинг $u_2(x,y)$ ечими формуласи ҳам топилган.

20-теорема. Агар $0<\alpha<1$, $0<\beta<1/2$, $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R^+)$, $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j=\overline{0,m-1}$ ва уларнинг мос ҳолда барча $2(m-j)$ ва

$2(m-j)-1$, $j=\overline{0,m-1}$ тартибли ҳосилалари $x=0$ да нолга тенг бўлса, у ҳолда $u_1(x,y)$ ва $u_2(x,y)$ функциялар мос равишда {(17), (18)} ва {(17), (19)} масалаларнинг ечими бўлади.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида $R_+^{n+1}=\{(x,t):x\in R^n, t\in R, t>0\}$ юқори ярим фазода кўп ўлчовли итерацияланган ушбу

$$L_{\gamma,\lambda}^m(u)\equiv\left(B_\gamma^t-\Delta+\lambda^2\right)^m u=0 \tag{21}$$

Бессел оператори қатнашган Клейн-Гордон-Фок тенгламасининг

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\qquad \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0}=0,\ x\in R^n,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=0,\quad t^{2\gamma+1}\left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0}=\psi_k(x),\ x\in R^n,\ k=\overline{0,m-1} \tag{23}$$

бошланғич шартлардан бир гуруҳини қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи ўрганилган, бу ерда $\gamma,\lambda\in R$, $\gamma>-1/2$, $m\in N$, B_γ^t- Бессел оператори, Δ- Лаплас оператори, $\varphi_k(x)$ ва $\psi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ - берилган функциялар.

Бу бобнинг биринчи параграфида олинган натижалар ҳамда 2- ва 6-теоремалардан фойдаланиб, n тоқ бўлганда {(21), (22)} масаланинг ечими қуйидаги кўринишда топилган:

$$u(x,t)=\overline{\chi}_n t^{1-2\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)f_0(\xi)d\xi+$$

$$+\overline{\chi}_n t^{1-2a}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k}}{k!(\alpha)_k}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{|\xi-x|<t}\frac{\overline{J}_{\alpha+k-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)}{\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{1-\alpha-k}}f_k(\xi)d\xi, \tag{24}$$

бу ерда $\overline{\chi}_n=[1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-2)\omega_n\Gamma(\alpha)]^{-1}$, $\omega_n=2\pi^{(n/2)}/\Gamma(n/2)$, $\alpha=\gamma+1/2$.

n жуфт бўлганда {(21), (22)} масала ечимининг формуласи Адамарнинг тушиш усули ва (24) формуладан фойдаланиб топилган. Шунга ўхшаб, {(21), (23)} масаланинг ечими ҳам n жуфт ва тоқ бўлганда қурилган.

Учинчи бобнинг бешинчи параграфида Бессел оператори қатнашган бир жинсли бўлмаган гиперболик типдаги итерацияланган ушбу

$$G_\beta^m(u)\equiv\left(\partial^2/\partial t^2+(2\beta/t)(\partial/\partial t)-L\right)^m u(x,t)=f(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega$$

тенгламанинг бир жинсли $\left.(\partial^k u/\partial t^k)\right|_{t=0}=0,\ k=\overline{0,2m-1}$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи тадқиқ этилган. Бу ерда $m\in N$, $\beta\in R,\ \beta\geq0$, $G_\beta^m=G_\beta^1(G_\beta^{m-1})$, $f(x,t)$ - берилган функция, L - x ўзгарувчининг (t ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган) чекли тартибдаги чизиқли дифференциал оператори, Ω эса қуйилган масаланинг L оператор кўринишига боғлиқ бўлган аниқланиш соҳаси. Қуйидаги теорема ўринли.

21-теорема. Агар τ параметрга боғлиқ бўлган $U(x,t,\tau)$ функция $G_0^m(U)\equiv\left(\partial^2/\partial t^2-L\right)^m U(x,t)=0,\ \ t>\tau$ тенгламанинг $(\partial^k U/\partial t^k)\big|_{t=\tau}=0$, $k=\overline{0,2m-2}$, $(\partial^{2m-1}U/\partial t^{2m-1})\big|_{t=\tau}=f(x,\tau),\ t>\tau$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлса, у ҳолда $u(x,t)=\int\limits_0^t U(x,t,\tau)d\tau$ функция $G_0^m(u)=f(x,t)$ тенгламанинг $(\partial^k u/\partial t^k)\big|_{t=0}=0,\ k=\overline{0,2m-1}$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини бўлади.

21 - теоремадан фойдаланиб, $n=1,\ \beta=0,\ L=\partial^2/\partial x^2$; $n=1,\ \beta=0,$ $L=\partial^2/\partial x^2+(2\alpha/x)(\partial/\partial x),\ \alpha\in R,\ \alpha>0$ ҳамда $n=3$, $\beta=0,$ $L=\Delta_3$-уч ўлчовли Лаплас оператори бўлган ҳолларда $G_0^m(u)=f(x,t)$ тенгламанинг $(\partial^k u/\partial t^k)\big|_{t=0}=0,\ k=\overline{0,2m-1}$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимининг формулалари топилган.

$\beta\neq 0$ бўлганда 21 - теоремадан фойдаланиб бўлмайди. Бу ҳолда 2 - теоремадан ($\lambda=0$ бўлганда) фойдаланиб, $n=1$, $L=\partial^2/\partial x^2$, $0<\beta<1/2$ бўлган ҳолда $G_\beta^m(u)=f(x,t)$ тенгламанинг $(\partial^k u/\partial t^k)\big|_{t=0}=0$, $k=\overline{0,2m-1}$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими учун формула топилган.

Диссертациянинг **«Бессел оператори қатнашган поликалорик ва ноклассик тенгламалар учун масалалар»** деб номланган тўртинчи бобида сингуляр коэффициентли поликалорик тенглама учун бир чегаравий масала, юқори жуфт тартибли бузиладиган дифференциал тенгламаларнинг бир синфи учун Коши масаласи ҳамда иккита сингуляр коэффициентга эга бўлган тўртинчи тартибли тенглама учун Гурса масаласи тадқиқ этилган.

Тўртинчи боб биринчи параграфининг биринчи бўлимида бир ўлчовли биржинсли бўлмаган поликалорик тенглама, яъни Бессел оператори қатнашган юқори тартибли қуйидаги

$$L_\gamma^m(u)\equiv\left(\partial/\partial t-B_\gamma^x\right)^m u(x,t)=f(x,t),\ x>0,\ t>0 \tag{25}$$

тенгламанинг ушбу

$$\left(\partial^k u/\partial t^k\right)\Big|_{t=0}=\varphi_k(x),\ x>0,\ k=\overline{0,m-1} \tag{26}$$

бошланғич ва

$$\left(\partial^{2k+1}u/\partial x^{2k+1}\right)_{x=0}=0,\ \ t>0,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{27}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги масала тадқиқ этилган, бу ерда B_γ^x - Бессел оператори, $\gamma\in R,\gamma>-1/2$, $m\in N$, $f(x,t)$, $\varphi_k(x),\ k=\overline{0,m-1}$ - берилган функциялар бўлиб, $\varphi_{k-j}^{(2j+1)}(0)=0$, $j=\overline{0,k}$, $k=\overline{0,m-1}$ келишув шартларини қаноатлантиради.

Ушбу параграфда итерацияланган юқори тартибли тенгламалар учун Дюамелнинг иккинчи принципи исботланган. Бу принципдан ва 2

теоремадан фойдаланиб, {(25)-(27)} масала ечимининг формуласи ушбу кўринишда топилган:

$$u(x,t)=\frac{x^{-\gamma}}{2t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\int_0^{+\infty}f_k(s)s^{\gamma+1}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right)I_\gamma\left(\frac{xs}{2t}\right)ds+$$

$$+\frac{x^{-\gamma}}{2(m-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{m-2}d\tau\int_0^{+\infty}f(s,\tau)s^{\gamma+1}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4(t-\tau)}\right)I_\gamma\left(\frac{xs}{2(t-\tau)}\right)ds, \qquad (28)$$

бу ерда $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\varphi_{k-j}(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Қуйидаги теорема исботланган.

22-теорема. Агар $|\gamma|<1/2$, $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j=\overline{0,m-1}$ функциялар чегараланган ва уларнинг $2(m-j)-1$, $j=\overline{0,m-1}$ тартибгача бўлган барча ҳосилалари $x=0$ да нолга тенг, $f(x,t)$ функция эса $R^+\times R^+$ соҳада узлуксиз ва чегараланган бўлса, у ҳолда (28) тенглик билан аниқланган $u(x,t)$ функция {(25)-(27)} масаланинг ягона ечими бўлади.

Биринчи параграфнинг иккинчи бўлимида барча фазовий ўзгарувчилари буйича Бессел оператори қатнашган кўп ўлчовли поликалорик тенглама учун биринчи бўлимда ўрганилган чегаравий масаланинг аналоги тадқиқ этилиб, унинг ечими формуласи топилган.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида $\Omega=\{(x,t):x\in R^n,\ t\in R,\ t>0\}$ соҳада бузиладиган ушбу

$$u_{tt}+t^pL^{2m}(u)+\lambda^2t^pu=f(x,t),\ (x,t)\in\Omega \qquad (29)$$

тенглама қаралган, бу ерда L- $x\in R^n$ ўзгарувчининг (t ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган) чекли тартибли чизиқли дифференциал оператори; $m\in N$, $L^{2m}=L^1\left(L^{2m-1}\right)$; $f(x,t)$ – берилган функция; $\lambda,p\in R$, бунда $p\geq 0$.

Айтайлик, k натурал сон L операторнинг тартиби бўлсин. M орқали $\bar{\Omega}=\{(x,t):x\in R^n,\ t\in R,\ t\geq 0\}$ да t бўйича бир марта, x бўйича эса mk марта узлуксиз дифференциалланувчи ва Ω соҳада t бўйича икки марта, x бўйича эса $2mk$ марта узлуксиз дифференциалланувчи функциялар синфини белгилайлик.

Коши масаласи. (29) тенгламанинг ушбу бошланғич

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in R^n, \qquad (30)$$

шартларни қаноатлантирувчи $u(x,t)\in M$ ечими топилсин, бу ерда $\varphi(x)$, $\psi(x)$ - берилган функциялар.

{(29), (30)} масала $\psi(x)=0$ бўлган ҳолда $y=[2/(p+2)]t^{(p+2)/2}$ тенглик орқали алмаштириш бажарилиб, сўнгра ҳосил бўлган масаланинг ечимини $u(x,y)=J_\lambda^{(y)}(-(1/2),\beta)\,V(x,y)$ кўринишда излаб, ушбу

$$\partial^2V/\partial y^2+L^{2m}(V)=F_0(x,y) \qquad (31)$$

тенгламанинг қуйидаги бошланғич

$$V(x,0)=k_0\varphi(x),\ V_y(x,0)=0,\ x\in R^n,\quad k_0=\Gamma(\beta+1/2)/\sqrt{\pi} \tag{32}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласига келтирилган, бу ерда $2\beta=p/(p+2)$, $0<2\beta<1$,

$$F_0(x,y)=\frac{(1-2\beta)^{4\beta}}{y^{4\beta}\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y(y^2-s^2)^{-\beta}\overline{I}_{-\beta}(\lambda\sqrt{y^2-s^2})s^{2\beta}f[x,(1-2\beta)^{2\beta-1}s^{1-2\beta}]ds.$$

Қуйидаги теорема ўринли.

23-теорема. $V(x,y)\in M$ функция {(31), (32)} масаланинг ечими бўлиши учун ушбу $U(x,y)=V(x,y)+i\int_0^y L^m(V(x,\tau))d\tau$ функция

$$U_y-iL^m(U)=F(x,y),\ (x,y)\in\Omega \tag{33}$$

тенгламанинг

$$U(x,0)=k_0\varphi(x),\quad x\in R^n \tag{34}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими бўлиши зарур ва етарли, бу ерда $F(x,y)=\int_0^y F_0(x,\tau)d\tau$, i -мавҳум бирлик.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

3-натижа. Айтайлик, $U(x,y)\in M$ функция {(33), (34)} масаланинг $\varphi(x)$ ва $F(x,y)$ ҳақиқий қийматли функциялар бўлгандаги ечими бўлсин. У ҳолда $V(x,y)=\mathrm{Re}U(x,y)$ функция {(31), (32)} масаланинг ечими бўлади.

23 - теорема ва 3 - натижа (29) тенгламани тартибини икки марта пасайтиришнинг зарурий ва етарли шартини ифодалайди. Қўйилган масалани ечишнинг бу усулини намойиш қилиш учун иккита тўртинчи тартибли тенгламалар қаралган ва улар учун {(29), (30)} масала ечимининг формуласи топилган.

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфида $\Omega=\{(x,y):0<x<l,\ 0<y<h\}$ соҳада қуйидаги тенглама учун

$$L^c_{a,b}(u)\equiv\frac{\partial^4u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{a}{x}\frac{\partial^3u}{\partial x\partial y^2}+\frac{b}{y}\frac{\partial^3u}{\partial y\partial x^2}+\frac{ab}{xy}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+cu=0 \tag{35}$$

Гурса масаласи ўрганилган, яъни (35) тенгламанинг

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad \lim_{x\to0}x^au_x(x,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h;$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\quad \lim_{y\to0}y^bu_y(x,y)=\psi_2(x),\ 0\le x\le l$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш масаласи тадқиқ этилган, бу ерда $\varphi_k(y)$, $\psi_k(x)$, $k=\overline{1,2}$ - берилган функциялар бўлиб, $\varphi_1(0)=\psi_1(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(0)=0$ шартлар бажарилади. 8 - теоремани қўллаб ва (35) тенгламанинг хоссаларидан фойдаланиб, қуйилган масала ечимининг интеграл кўриниши ${}_0F_3$ умумлашган гипергеометрик функция ва $F^{1;0;1}_{1;3;0}$ Кампе де Ферье функцияси орқали топилган.

ХУЛОСА

Диссертация иши Эрдейи-Кобер операторларидан фойдаланиб, сингуляр коэффициентли ва спектрал параметрли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалаларни ечишга бағишланган. Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Умумлашган Эрдейи-Кобер операторининг янги хоссалари исботланган. Бу операторнинг юқори тартибли дифференциал операторлар, хусусан, Бессел операторининг даражалари билан композицияси топилган.
2. Кўп ўлчовли умумлашган Эрдейи-Кобер оператори киритилган ва унинг хоссалари ўрганилган. Бу операторнинг турли ўзгарувчилар бўйича қатнашаётган Бессел операторлари йиғиндиси ва кўпайтмасининг даражалари билан композицияси топилган.
3. Барча ўзгарувчилари бўйича Бессел операторлари қатнашган бир, икки ва уч ўлчовли Клейн-Гордон-Фок тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг формуласи топилган.
4. Вақт ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган кўп ўлчовли Клейн-Гордон-Фок тенгламаси учун Коши масаласи ечилган. Бессел оператори параметрининг махсус қийматларида ҳам масала ечимининг формуласи қурилган.
5. Бир ўлчовли политўлқин тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг формуласи топилган. Топилган формула асосида кўп ўлчовли политўлқин тенгламаси учун бу масала ечимининг формуласи қурилган.
6. Фазовий ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган итерацияланган бир ўлчовли гиперболик типдаги тенглама учун Коши масаласи ечимининг формуласи топилган.
7. Итерацияланган икки ўққа нисбатан симметрик бўлган гиперболик тенглама учун Коши масаласи ечимининг формуласи топилган.
8. Вақт ўзгарувчиси бўйича Бессел оператори қатнашган кўп ўлчовли итерацияланган Клейн-Гордон-Фок тенгламаси учун Коши масаласи ечимининг интеграл формуласи қурилган.
9. Бессел оператори қатнашган бир жинсли бўлмаган итерацияланган гиперболик тенглама учун Коши масаласини ечиш усули ишлаб чиқилган.
10. Барча фазовий ўзгарувчилари бўйича Бессел оператори қатнашган бир ва кўп ўлчовли поликалорик тенгламалар учун бир чегаравий масала тадқиқ этилган ва масала ечимининг формуласи топилган.
11. Юқори жуфт тартибли бузиладиган тенгламаларнинг бир синфи учун тенглама тартибини икки марта пасайтиришнинг зарурий ва етарли шартлари топилган ва ундан фойдаланиб Коши масаласи ечимини топиш усули ишлаб чиқилган.
12. Иккита ўзгарувчи бўйича Бессел оператори қатнашган тўртинчи тартибли тенглама учун Гурса масаласи ечилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАРИМОВ ШАХОБИДДИН ТУЙЧИБАЕВИЧ

ОПЕРАТОРЫ ЭРДЕЙИ – КОБЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Ташкент – 2019 год

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.1.DSc/FM8

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу http://fti-kengash.uz/ и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Касимов Шакирбай Гаппарович доктор физико-математических наук, профессор
	Хасанов Анваржон доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Белгородский государствнный национальный исследователский университет**

Защита диссертации состоится «___» _____ 2019 г. в _____ часов на заседании научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (регистрационный номер _____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2019 г.
(протокол рассылки № ___ от «___» _____ 2019 г.).

А.С.Садуллаев
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

А.Азамов
Заместитель председателя научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проводимое в мировом масштабе множество научно-практических исследований показывает актуальность исследования начальных и краевых задач для вырождающихся и сингулярных дифференциальных уравнений в частных производных. Важность исследования таких уравнений объясняется их использованием в приложениях к задачам теории осесимметрического потенциала, преобразованию Радона и томографии, газодинамики и акустики, теории струй в гидродинамике, линеаризованным уравнениям Максвелла–Эйнштейна, механике, теории упругости и пластичности и многим другим. Кроме того, в силу сложности таких уравнений и отсутствие разработанных в достаточной мере аналитических методов, развитие исследований, связанных с такими уравнениями, является одним из приоритетных направлений.

В настоящее время в мировом масштабе применение операторов дробного порядка к исследованию начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных играют важную роль. В связи с этим осуществление целевых научных исследований является одной из важных задач, в том числе, научные исследования по следующим направлениям: исследование новых свойств операторов дробного порядка Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных высокого порядка с сингулярными коэффициентами; введение многомерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера и исследование его свойств, а также их приложения к многомерным дифференциальным уравнениям в частных производных с сингулярными коэффициентами. Проводимые научные исследования по вышеуказанным направлениям обосновывают актуальность темы данной диссертации.

В нашей стране в настоящее время усилилось внимание к актуальным научным направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, учеными нашей страны особое внимание уделяется исследованию и поиску эффективных методов решения краевых задач для уравнений в частных производных второго и высокого порядков. Научные исследования на уровне международных стандартов по дифференциальным уравнениям и математической физике, функциональному анализу, теорию динамических систем, а также по прикладной математике и математическому моделированию являются основными задачами и направлениями деятельности исследователей[1]. В целях обеспечения выполнения этих задач, проводимые нами исследования в этом направлении показали, что, учитывая специфику уравнений с сингулярными коэффициентами, применение для них операторов Эрдейи-Кобера является одним из эффективных методов решения начальных и краевых задач.

[1] Постановление Кабинета Минстров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Данная диссертационная работа, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных указом Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года № УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» и постановлениями Президента Республики Узбекистан от 17 февраля 2017 года № ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», от 20 апреля 2017 года № ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и от 27 апреля 2018 года № ПП-3682 «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых актах в данном направлении.

Связь темы исследования с основными приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

В направлении исследования свойств операторов Эрдейи-Кобера и их приложения, а также доказательства существования и единственности решения начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами и разработке методов их нахождения осуществляются широкие научные исследования в ведущих научных центрах и университетах зарубежных стран, в том числе, в университетах Нью-Хейвен, Луизианы, Мериленд в Калифорнийском технологическом институте (США), в университетах Эдинбурга, Стратклайда и Кембриджа (Англия), в институте математики и информатики Болгарской Академии Наук (Болгария), в университете Анкары (Турция), в математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, в институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, в Московском и Новосибирском государственных университетах, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Воронежском и Самарском государственных университетах, в Белгородском государственном национальном исследовательском университете, в институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, в Стерлитамакской государственной педагогической академии (Россия) и другие.

В результате научных исследований в мировом масштабе решен целый ряд актуальных задач, в том числе, были получены следующие научные результаты: исследовано действие некоторых интегральных преобразований на операторы Эрдейи–Кобера и их композиций с оператором Бесселя, получены оценки норм этих операторов (Эдинбургский университет, Калифорнийский технологический институт, Белорусский государственный

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе источников: www.webofknowledge.com, www.scopus.com, www.scholar.google.com, www.mathnet.ru, www.springer.com, а также были использованы и другие источники.

университет); введены обобщенные операторы Эрдейи-Кобера с функцией Бесселя в ядре и получены оценки их норм, доказаны их композиции с интегральными преобразованиями и с операторм Бесселя, а также используя эти свойства решены парные интегральные уравнения и некоторые краевые задачи для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями, построено фундаментальное решение уравнения Гельмгольца (университет Стратклайд, институт математики и информатики Болгарской Академии Наук); решены начальные и краевые задачи для уравнения обобщенной осесимметрической теории потенциала и найдена связь их решений с операторами Эрдейи-Кобера, решена задача Коши и исследован принцип Гюйгенса для многомерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя (университет Мериленд, институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, институт прикладной математики и автоматизации Кабардино - Балкарского научного центра РАН, Воронежский государственный университет); решена задача Коши для сингулярных параболических уравнений второго порядка с оператором Бесселя и для многомерного гиперболического уравнения высокого порядка, распадающегося на уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (университеты Мериленд и Анкары, Черновицкий, Казахский и Таджикские национальные университеты, Московский и Воронежский государственные университеты, Белгородский государственный национальный исследовательский университет).

На сегодняшний день осуществляются приоритетные научно-исследовательские работы по применению теории операторов преобразования к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах и по разработке общих методов исследования задач для неклассических дифференциальных уравнений математической физики с оператором Бесселя.

Степень изученности проблемы. Приложение операторов дробного порядка к дифференциальным уравнениям обобщенной осесимметрической теории потенциала (GASPT – Generalized Axially Symmetric Potential Theory) впервые рассматривал A.Weinstein. Затем оно развито в работах A. Erdéliy. Он, продолжив исследования A. Weinstein, более глубоко изучил свойства и оценки норм самих операторов дробного порядка и их композиций с оператором Бесселя. После A. Erdéliy его результаты были обобщены J.S. Lowndes. Он ввел обобщенные операторы Эрдейи-Кобера с функцией Бесселя в ядре и исследовал их свойства. Полученные результаты J.S.Lowndes применил к решению некоторых краевых задач для уравнения Лапласа со смешанными краевыми условиями, а также из фундаментального решения уравнения Лапласа получил фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. Кроме того, используя свойства обобщенного оператора Эрдейи-Кобера, решил задачу Коши для многомерного гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.

Многомерные уравнения гиперболического типа в случае, когда оператор Бесселя действует по временной переменной, был предметом интереса многих математиков и поэтому исследованы к настоящему моменту

сравнительно полно. Сюда также следует отнести все работы, связанные с изучением принципа Гюйгенса для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД). Исследование этих задач можно найти в работах А.В. Бицадзе, А.М. Нахушева, М.М. Смирнова, С.А. Терсенова, И.А. Киприянова, R. Carroll, R Showalter, Н.Х. Ибрагимова, Н. Раджабова, К.Б. Сабитова, С.А.Алдашева, О.А. Маричева, А.А. Килбаса, О.А. Репина, В.В. Катрахова, С.М. Ситника, М.С. Салахитдинова, А.К. Уринова, М. Мирсабурова, Б. Исломова, А.Хасанова и др. Задачи для уравнений гиперболического типа в случае, когда оператор Бесселя действует по одной или нескольким пространственным переменным, исследованы мало. Здесь следует отметить работы Л.Н. Ляхова, И.П. Половинкина и Э.Л. Шишкиной, а также монографию С.М. Ситника и Э.Л. Шишкиной, в которых применяется метод весовых сферических средних.

Задача Коши для поливолнового уравнения изучалась в работах A. Weinstein и D. Krahn, однако построенные им формулы содержат весьма громоздкие кратные интегралы. Задача Коши для дифференциального уравнения высокого порядка, распадающегося на волновые уравнения, исследован в работах С.А. Гальперина и В.Е. Кондрашова. В работе С.А. Алдашева эта задача для поливолнового уравнения решена с использованием потенциалов Рисса. Аналог задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения высокого порядка, распадающегося на уравнения ЭПД, исследован в работах С.А. Алдашева и Л.А. Иванова.

Теория классических и обобщенных решений задачи Коши для сингулярных параболических уравнений второго порядка с оператором Бесселя развита в работах В.В. Крехивского, М.И. Матийчука, D. Colton, O. Arena, И.А. Киприянова, В.В. Катрахова, В.М. Ляпина, И.И. Веренича, С.А. Терсенова, С.Д. Ивасишена, В.П. Лавренчука, А.Б. Муравника и других.

Доказательством существования решения различных задач для одномерного общего линейного неклассического уравнения третьего и четвертого порядка с гладкими коэффициентами занимались А.П. Солдатов, М.Х. Шхануков, В.И. Жегалов, А.И. Кожанов, С.П. Пулькина, Т.Д. Джураев, А. Сопуев, О.С. Зикиров, А.Н. Миронов, Е.А. Уткина, A. Maher и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования проекта Ф-4-59 «Начальные и граничные задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами» Ферганского государственного университета.

Целью исследования является решение начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром с применением операторов Эрдейи-Кобера.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

исследование новых свойств одномерного обобщенного оператора

Эрдейи-Кобера и их приложения к решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка с сингулярным коэффициентом и со спектральным параметром;

введение многомерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера и исследование его свойств, а также их приложения к многомерным дифференциальным уравнениям в частных производных с многими сингулярными коэффициентами;

решение начальных и граничных задач для одномерного и многомерного поликалорического уравнения с использованием операторов Эрдейи-Кобера;

приложения операторов Эрдейи-Кобера к решению задач для неклассических дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярным коэффициентом.

Объект исследования. Операторы Эрдейи-Кобера и дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром.

Предмет исследования. Исследование свойств операторов Эрдейи-Кобера и их приложения к решению начальных и граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории математической физики, дробного интегрирования и дифференцирования, а также методы теории специальных функций.

Научная новизна исследования. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

найдены новые свойства одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера, а также введен многомерный случай этого оператора и доказаны его свойства;

найдены формулы решения задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя, действующим по всем переменным, в одномерном, двумерном и трехмерном случае и в многомерном случае, когда оператор Бесселя действует по времени;

построена формула решения задачи Коши для поливолнового уравнения и найдена формула решения этой задачи для итерированного одномерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по пространственной переменной, а также для итерированного двуосесимметрического уравнения гиперболического типа;

разработан метод нахождения решения задачи Коши для итерированного многомерного уравнения Клейна-Гордона-Фока и для неоднородного итерированного уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя, действующим по времени;

найдена формула решения одной краевой задачи для поликалорического уравнения, по всем пространственным переменным которого действует оператор Бесселя;

для одного класса вырождающихся дифференциальных уравнений высокого четного порядка найдены необходимые и достаточные условия понижения порядка этого уравнения вдвое и на его основе разработан метод решения задачи Коши, а также решена задача Гурса для дифференциального уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по двум переменным.

Практические результаты исследования состоят из возможности применения полученных явных формул решений начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя при исследовании качественных особенностей процессов, приводимых к таким математическим моделям и при численных вычислениях.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений с использованием классических методов теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории интегралов и производных дробного порядка, а также строгими математическими доказательствами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории интегродифференциальных операторов дробного порядка, а также теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическое значение диссертационной работы определяется их приложением к практическим задачам, описываемых при помощи вырождающихся уравнений и уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по исследованию операторов Эрдейи-Кобера и их приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных были внедрены в следующих научно-исследовательских проектах:

формулы решения задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами, а также для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя, использованы при решении задачи Коши для дифференциального уравнения, являющееся математическим моделем проблемы упругости и пластичности, в рамках научного зарубежного гранта № 114030440003 на тему «Фундаментальные проблемы упругости и пластичности» (Сибирский государственный университет науки и технологий, справка от 23 ноября 2017 года, № 73/7-5381). Применение этих результатов дало возможность построения решения начальных задач для некоторых дифференциальных уравнений в частных производных;

результаты по построению явных решений краевых задач для уравнений в частных производных высокого порядка были использованы при решении прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений высокого порядка в зарубежном гранте № 0115РК00542 на тему «Математическое моделирование волновой динамики многофазных сред с учетом диссипации

энергии (прямые и обратные задачи)» (Институт информационных и вычислительных технологий Республики Казахстан, справка № 01-07/73 от 07 февраля 2019 года). Применение этих результатов дало возможность построения интегральных представлений решения начальных задач для дифференциальных уравнений, являющихся моделями волновой динамики многофазных сред;

новые свойства операторов дробного порядка Эрдейи-Кобера и их приложения к построению явных решений краевых задач для уравнений в частных производных высокого порядка с оператором Бесселя были использованы при построении решения задач для дифференциальных уравнений дробного порядка в работах научно-исследовательской лаборатории «Дробные исчисления и их применение» (Камчатский государственный университет, справка № 123-01-01 от 06.03.2019 г). Применение этих результатов позволило найти в явном виде решения задач для дифференциальных уравнений дробного порядка;

новые свойства операторов преобразования Эрдейи-Кобера и методы их приложения к построению явных решений начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с оператором Бесселя были использованы при доказательстве существования решения некоторых граничных задач для дифференциальных уравнений в частных производных выполненых по проекту № 1.7311.2017/8.9 «Развитие методов исследования краевых задач для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений» (Белгородский государственный национальный исследовательский университет, справка от 18 марта 2019 года, № 7-97). Использование результатов позволило построить интегральное представление решений дифференциальных уравнений и их применение в прикладных задачах.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 28 научных и научно-практических конференциях, в том числе, на 20 международных и 8 республиканских научных и научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 48 научных работ, из них 20 научных статей, в том числе, опубликовано 6 в зарубежных и 10 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Объем диссертации 198 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цель и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Операторы Эрдейи-Кобера и их свойства**», доказаны новые свойства одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера, а также введен многомерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера и исследованы его свойства.

В первом параграфе первой главы, для полноты изложения, приводятся сведения из общей теории интегралов и производных дробного порядка.

Во втором параграфе первой главы доказаны новые свойства одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x^2-t^2)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)t^{2\eta+1}f(t))dt, \qquad (1)$$

где $\overline{J}_\nu(z)-$функция Бесселя –Клиффорда, которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\overline{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$, а также оператора, обратного оператору (1), который имеет вид

$$J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2\eta}}{\Gamma(p-\alpha)}\left(\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\right)^p\int_0^x\frac{\overline{I}_{p-\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-s^2}\right)}{(x^2-s^2)^{\alpha-p+1}}s^{2(\eta+\alpha)+1}f(s)ds, \quad (2)$$

где $p=[\alpha]+1$, $\overline{I}_\nu(z)=\overline{J}_\nu(iz)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}I_\nu(z)$, $I_\nu(z)$- функция Бесселя мнимого аргумента, $\Gamma(\alpha)$- гамма - функция Эйлера.

Основные результаты второго параграфа первой главы сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $\alpha>0, \eta\geq-(1/2)$, $f(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ интегрируемы в окрестности нуля и $\lim\limits_{x\to0}x^{2\eta+1}(d/dx)[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. Тогда имеет место равенство $[B_{\eta+\alpha}^x+\lambda^2]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x]^m f(x)$ или $[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=$ $=J_\lambda(\eta,\alpha)[B_\eta^x-\lambda^2]^m f(x)$, в частности, если $\lambda=0$, тогда $[B_{\eta+\alpha}^x]^m I_{\eta,\alpha}f(x)=I_{\eta,\alpha}[B_\eta^x]^m f(x)$, где $m=0,1,2,...$, $[B_\eta^x]^0=E$, E- единичный оператор, $[B_\eta^x]^m=[B_\eta^x]^{m-1}[B_\eta^x]$- $m-$ая степень оператора Бесселя $B_\eta^x\equiv(d^2/dx^2)+[(2\eta+1)/x](d/dx)$, $I_{\eta,\alpha}=J_0(\eta,\alpha)$.

Пусть $m=1,2,...,$ $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ и $\Omega\subset R^n$, $L^{(x)}$ - не зависящий от y линейный дифференциальный оператор порядка k по переменной $x\in R^n$. Через M обозначим класс функций $u(x,y)=u(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$, непрерывно дифференцируемых включительно до порядка $2m-1$ по переменной y и $km-1$ -ого порядка по переменной x в области $\Omega\times\{y\geq 0\}$, а также порядка $2m$ по y и порядка km по x в области $\Omega\times\{y>0\}$.

Теорема 2. Пусть $\alpha>0, \eta\geq-(1/2)$, $u(x,y)\in M$, функции $y^{2\eta+1}[B_\eta^y]^{k+1}u$, $k=\overline{0,m-1}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{y\to 0} y^{2\eta+1}(\partial/\partial y)[B_\eta^y]^k u(x,y)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. Тогда и меет место равенство $(B_{\eta+\alpha}^y+\lambda^2\pm L^{(x)})^m J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)u(x,y)=J_\lambda^{(y)}(\eta,\alpha)(B_\eta^y\pm L^{(x)})^m u(x,y)$, в частности, если $\lambda=0$, тогда $(B_{\eta+\alpha}^y\pm L^{(x)})^m I_{\eta,\alpha}^{(y)}u(x,y)=I_{\eta,\alpha}^{(y)}(B_\eta^y\pm L^{(x)})^m u(x,y)$.

Здесь верхние индексы в операторах означают переменные, по которым действуют эти операторы.

Теорема 3. Пусть $p\in N$, $p-1\leq\alpha<p$, $\eta\geq-1/2$, $g(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2(\eta+\alpha)+1}[B_{\eta+\alpha}^x]^{k+1}g(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ интегрируемы в окрестности нуля и $\lim\limits_{x\to 0} x^{2(\eta+\alpha)+1}(d/dx)[B_{\eta+\alpha}^x]^k g(x)=0,$ $k=\overline{0,m-1}$. Тогда $\left[B_\eta^x\right]^m J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=$ $J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^x+\lambda^2\right]^m g(x)$, $\left[B_\eta^x-\lambda^2\right]^m J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)g(x)=J_\lambda^{-1}(\eta,\alpha)\left[B_{\eta+\alpha}^x\right]^m g(x)$, в частности, если $\lambda=0$, то $\left[B_\eta^x\right]^m I_{\eta,\alpha}^{-1}g(x)=I_{\eta,\alpha}^{-1}\left[B_{\eta+\alpha}^x\right]^m g(x)$.

Теорема 4. Если $\alpha>0, \eta\geq-(1/2)$, $f(x)\in C^m(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2\eta+1}D_\eta^{k+1}f(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ интегрируемы в окрестности нуля и $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta}D_\eta^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$, то $D_{\eta+\alpha}^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta^m f(x)$.

Здесь $D_\eta^0=E$, $D_\eta^m=D_\eta^{m-1}D_\eta$ - m-ая степень оператора $D_\eta=x^{-2\eta}\left(d/xdx\right)x^{2\eta}$, которая представима в виде $D_\eta^m=x^{-2\eta}\left(d/xdx\right)^m x^{2\eta}$.

Теорема 5. Пусть $\alpha>0, \eta\geq-1/2$, $f(x)\in C^{2m}(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2\eta+1}[B_\eta^x]^{k+1}f(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ интегрируемы в окрестности нуля и $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. Тогда имеют место равенства

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^m a_{mj}x^{2j}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{m+j}f(x),$$

$$\frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\sum_{j=0}^m b_{mj}x^{2j+1}J_\lambda(\eta,\alpha+m+j+1)\left(B_\eta^x-\lambda^2\right)^{m+j+1}f(x),$$

где a_{mj} и b_{mj} постоянные, определяемые из следующих рекуррентных

соотношений $a_{00}=1,\ b_{00}=1/2$, $b_{mj}=(1/2)a_{mj}+2(j+1)a_{m(j+1)},\ 0\le j\le m$, $a_{mj}=0,\ j>m$, $a_{(m+1)j}=(1/2)b_{m(j-1)}+(2j+1)b_{mj}$, $1\le j\le m$, $b_{mj}=0,\ j>m$, $a_{(m+1)0}=b_{m0}=\ 2^{-(m+1)}(2m+1)!!$.

Теорема 6. Пусть $\alpha>0,\ \eta\ge -1/2$, $f(x)\in C^{2m-1}[0,b]\cap C^{2m}(0,b),\ b>0$, $\lim\limits_{x\to 0}[B_\eta^x]^k f(x)=c_k,\ c_k=const$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}\dfrac{d}{dx}[B_\eta^x]^k f(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. Тогда

$$[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Big|_{x=0}=\frac{(\alpha+\eta+1)_m}{(1/2)_m}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Bigg|_{x=0},$$

$$\frac{d}{dx}[B_{\eta+\alpha}^x]^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Big|_{x=0}=0,\ \frac{d^{2m+1}}{dx^{2m+1}}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)\Bigg|_{x=0}=0,$$

в частности, если $\lambda=0$, то получим формулу для $I_{\eta,\alpha}=J_0(\eta,\alpha)$.

В третьем параграфе первой главы введены и исследованы свойства многомерного оператора Эрдейи-Кобера вида

$$J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n}\begin{pmatrix}\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\\ \eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n\end{pmatrix}f(x)=$$

$$=\prod_{k=1}^n\left[\frac{2x_k^{-2(\alpha_k+\eta_k)}}{\Gamma(\alpha_k)}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^n\left[t_k^{2\eta_k+1}\left(x_k^2-t_k^2\right)^{\alpha_k-1}\right]\overline{J}_{\alpha_k-1}\left(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t_k^2}\right)f(t)dt_1dt_2\dots dt_n,\quad (3)$$

а также оператора, обратного оператору (3), который имеет вид

$$J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_{i\lambda}\begin{pmatrix}-\alpha\\ \eta+\alpha\end{pmatrix}f(x)=J_{i\lambda_1,i\lambda_2,\dots,i\lambda_n}\begin{pmatrix}-\alpha_1,\ -\alpha_2,\ \dots\ ,\ -\alpha_n\\ \eta_1+\alpha_1,\eta_2+\alpha_2,\dots,\eta_n+\alpha_n\end{pmatrix}f(x)=$$

$$=2^{n-|m|}\prod_{k=1}^n\left[\frac{x_k^{-2\eta_k}}{\Gamma(m_k-\alpha_k)}\left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{m_k}\right]\int_0^{x_1}\int_0^{x_2}\dots\int_0^{x_n}\prod_{k=1}^n[t_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\times$$

$$\times\left(x_k^2-t_k^2\right)^{m_k-\alpha_k-1}]\overline{I}_{m_k-\alpha_k-1}\left(\lambda_k\sqrt{x_k^2-t_k^2}\right)f(t_1,t_2,\dots,t_n)dt_1dt_2\dots dt_n,\qquad (4)$$

где $\alpha_k>0,\ m_k=[\alpha_k]+1,\ \eta_k\ge -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in R^n$.

Основные результаты третьего параграфа первой главы сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 7. Пусть $\alpha_k>0,\ \eta_k\ge -1/2,\ k=\overline{1,n}$; $f(x)\in C^2(\Omega^n)$, функции $x_k^{2\eta_k+1}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$, $k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}f_{x_k}(x)=0$, $k=\overline{1,n}$. Тогда $(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$, в частности, если $\lambda_k=0$, тогда $B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_0\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$, $k=\overline{1,n}$, здесь $\Omega^n=(0,b_1)\times(0,b_2)\times\dots\times(0,b_n),\ b_k\in R,\ b_k>0,\ k=\overline{0,n}$.

Из теоремы 7 вытекает следующее

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]f(x),$$

в частности, если $\eta_k=-1/2, k=\overline{1,n}$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left[B_{\alpha_k-1/2}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}\Delta f(x),$$

где Δ - многомерный оператор Лапласа.

Теорема 8. Пусть $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n};\ f(x)\in C^{2n}(\Omega^n)$, функции $x_k^{2\eta_k+1}B_{\eta_k}^{x_k}f(x),\ k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}f_{x_k}(x)=0,\quad k=\overline{1,n}$. Тогда имеет место равенство $\prod\limits_{k=1}^{n}(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2)J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\prod\limits_{k=1}^{n}B_{\eta_k}^{x_k}f(x)$, в частности, если $\eta_k=-1/2$, $k=\overline{1,n}$, то $\prod\limits_{k=1}^{n}\left[B_{\alpha_k-(1/2)}^{x_k}+\lambda_k^2\right]J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\dfrac{\partial^{2n}f(x)}{\partial x_1^2\partial x^2\ldots\partial x_n^2}$.

Пусть $m_k\in N\cup\{0\}$, $\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^0=E,\ \left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{m_k}=\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{m_k-1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right],\ k=\overline{0,n}$.

Теорема 9. Пусть $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n},\quad f(x)\in C^{2m_0}(\Omega^n)$, $m_0=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}$, функции $x_k^{2\eta_k+1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{p_k+1}f(x),\ p_k=\overline{0,m_k-1},\ k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{p_k}f(x)=0,\quad p_k=\overline{0,m_k-1},\quad k=\overline{1,n}$. Тогда имеют место равенства $\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right]^{m_k}J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{m_k}f(x),\ k=\overline{1,n}$.

Теорема 10. Пусть $\alpha_k>0,\ \eta_k\geq -1/2,\ k=\overline{1,n},\quad f(x)\in C^{2q}(\Omega^n),\quad q\in N$, функции $x_k^{2\eta_k+1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{l+1}f(x),\ l=\overline{0,q-1},\ k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k\to 0}x_k^{2\eta_k+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{l}f(x)=0,\ l=\overline{0,q-1},\ k=\overline{1,n}$. Тогда имеет место равенство $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)\right]^q J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}f(x)=J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}B_{\eta_k}^{x_k}\right]^q f(x)$.

Пусть $L^{(y)}$- не зависящий от $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ линейный дифференциальный оператор порядка $l\in N$ по переменной $y=(y_1,y_2,\ldots,y_s)\in R^s$.

Теорема 11. Пусть $\alpha_k > 0,\ \eta_k \geq -1/2,\ k=\overline{1,n}$, $f(x,y) \in C_{x,y}^{2q,lq}(\Omega^n \times \Omega^s)$, $q \in N$, функции $x_k^{2\eta_k+1}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^{j+1} f(x,y)$, $j=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k \to 0} x_k^{2\eta_k+1}(\partial/\partial x_k)\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^j f(x,y)=0$, $j=\overline{0,q-1}$, $k=\overline{1,n}$. Тогда имеет место равенство $\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)\pm L^{(y)}\right]^q J_\lambda^{(x)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x,y) = J_\lambda^{(x)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} B_{\eta_k}^{x_k} \pm L^{(y)}\right]^q f(x,y)$.

Теорема 12. Если $\alpha_k > 0$, $\eta_k \geq -(1/2)$, $k=\overline{1,n}$, $m_0=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_n\}$, $f(x) \in C^{m_0}(\Omega^n)$, функции $x_{x_k}^{2\eta_k+1}[D_{\eta_k}^{x_k}]^{l_k+1} f(x)$, $l_k=\overline{0,m_k-1}$, $k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k \to 0} x_k^{2\eta_k}[D_{\eta_k}^{x_k}]^{l_k} f(x)=0$, $l_k=\overline{0,m_k-1},\ k=\overline{1,n}$, то $[D_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}]^{m_k} J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} f(x) = J_\lambda\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}[D_{\eta_k}^{x_k}]^{m_k} f(x),\ k=\overline{1,n}$.

Теорема 13. Пусть $q=(q_1,q_2 \ldots q_n)$, $q_k \in N$, $q_k-1<\alpha_k<q_k$, $\eta_k \geq -1/2$, $k=\overline{1,n}$, $g(x) \in C^{2p}(\Omega^n)$, $p \in N$, функции $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^l g(x)$, $l=\overline{0,p-1},\ k=\overline{1,n}$ интегрируемы в окрестности начала координат и $\lim\limits_{x_k \to 0} x_k^{2(\eta_k+\alpha_k)+1}\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}\right]^l g(x)=0$, $l=\overline{0,p-1},\ k=\overline{1,n}$. Тогда имеют место равенства $\left[B_{\eta_k}^{x_k}-\lambda_k^2\right]^p J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} g(x) = J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}\right]^p g(x),\ k=\overline{1,n}$ или $\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^p J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} g(x) = J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right]^p g(x),\ k=\overline{1,n}$, в частности, если $\lambda_k=0$, тогда $\left[B_{\eta_k}^{x_k}\right]^p J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} g(x) = J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}\right]^p g(x),\ k=\overline{1,n}$.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 13. Тогда $\left[\sum\limits_{k=1}^{n} B_{\eta_k}^{x_k}\right]^p J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix} g(x) = J_\lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \eta\end{pmatrix}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\eta_k+\alpha_k}^{x_k}+\lambda_k^2\right)\right]^p g(x)$, в частности, если $\lambda_k=0,\ \eta_k=-(1/2)$, $k=\overline{1,n}$, тогда $\Delta^p J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix} g(x) = J_0^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ -1/2\end{pmatrix}\Delta_B^p g(x)$, где Δ^p - p-ая степень многомерного оператора Лапласа, а $\Delta_B^p=\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(B_{\alpha_k-(1/2)}^{x_k}\right)\right]^p$.

Во второй главе диссертации, названной **«Задача Коши для уравнения Клейна – Гордона – Фока с оператором Бесселя»,** рассмотрено

обобщение уравнения Клейна-Гордона-Фока на случай, когда по всем переменным действует оператор Бесселя:

$$L^{\lambda}_{\beta,\alpha}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \lambda^2 u = 0, \qquad (5)$$

где $u = u(x,t)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $t \in R, t > 0$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R^n$, $\beta, \alpha_k, \lambda \in R$, причем $0 < \beta < 1/2$, $0 < \alpha_k < 1$, $k = \overline{1,n}$.

Уравнение (5) при $\beta = 0, \alpha_k = 0, k = \overline{1,n}$ переходит в уравнение Клейна-Гордона-Фока – гиперболического уравнения теории элементарных частиц квантовой механики. В области $\Omega_n = \{ (x,t) : x \in R^n, t \in R, x_k > t > 0, k = \overline{1,n} \}$ для уравнения (5) исследована видоизмененная задача Коши при $n = 1,2,3$, а также при $n > 1, \alpha_k = 0, k = \overline{1,n}$.

Задача Коши. В области Ω_n требуется найти решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \overline{R}^n_+; \qquad \lim_{t\to 0} t^{2\beta} u_t(x,t) = \nu(x),\ x \in R^n_+, \qquad (6)$$

где $R^n_+ = \{x \in R^n : x_k > 0, k = \overline{1,n}\}$, $\overline{R}^n_+ = \{x \in R^n : x_k \geq 0,\ k = \overline{1,n}\}$, $\tau(x)$ и $\nu(x)$ - заданные функции.

Для решения задачи {(5), (6)} применен метод, основанный на использовании многомерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера, введенного и изученного в третьем параграфе первой главы.

В первом параграфе второй главы, применяя многомерный оператор Эрдейи-Кобера (3), а также теорему 7 и следствие 1, построена формула решения задачи {(5), (6)} при $n = 1$:

$$u(x,t) = \overline{\gamma}_1 t^{1-2\beta} \int_{x-t}^{x+t} \tau(s)\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha} [t^2 - (s-x)^2]^{\beta-1} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha; \beta; \omega, \sigma) ds +$$

$$+ \overline{\gamma}_2 \int_{x-t}^{x+t} \nu(s)\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha} [t^2 - (s-x)^2]^{-\beta} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha; 1-\beta; \omega, \sigma) ds, \qquad (7)$$

где $\overline{\gamma}_1 = \Gamma(\beta + (1/2)) / [\sqrt{\pi}\Gamma(\beta)]$, $\overline{\gamma}_2 = \Gamma((3/2) - \beta) / [\sqrt{\pi}(1-2\beta)\Gamma(1-\beta)]$, $\Xi_2(a,b,c;\omega,\sigma)$ - вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта.

Доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 14. Пусть $\tau(x) \in C(\overline{R}^1_+) \cap C^2(R^1_+)$ и $\nu(x) \in C^2(R^1_+)$. Тогда функция $u(x,t)$, определяемая формулой (7), в области Ω_1 является решением задачи {(5), (6)}.

Во втором параграфе второй главы задача {(5), (6)} исследована при $n = 2$. В первом пункте этого параграфа сначала рассмотрен случай $n = 2, \beta = 0$ и $\lambda = 0$. Применяя многомерный оператор (3), а также теорему 7, найдена формула решения этой задачи:

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{K_t}\tau(\xi_1,\xi_2)\frac{R(\xi,x,t;\alpha_1,\alpha_2)}{\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}d\xi_1 d\xi_2+$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_t}\nu(\xi_1,\xi_2)\frac{R(\xi,x,t;\alpha_1,\alpha_2)}{\sqrt{t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2}}d\xi_1 d\xi_2, \qquad (8)$$

где $K_t=\{(\xi_1,\xi_2):|\xi-x|<t\}$, $|\xi-x|^2=(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2$, $R(\xi,x,t;\alpha_1,\alpha_2)=$ $=(\xi_1/x_1)^{\alpha_1}(\xi_2/x_2)^{\alpha_2}F_3(\alpha_1,\alpha_2,1-\alpha_1,1-\alpha_2,1/2;\sigma_1,\sigma_2)$ $\sigma_k=[t^2-|\xi-x|^2]/(4\xi_k x_k)$, причем $0\le\sigma_k<1/2$, $k=1,2$, а $F_3(a,b,a',b',c;\sigma_1,\sigma_2)$ - гипергеометрическая функция Аппеля. Доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 15. Пусть $\tau(x_1,x_2)\in C(\bar{R}_+^2)\cap C^3(R_+^2)$ и $\nu(x_1,x_2)\in C^2(R_+^2)$. Тогда функция $u(x_1,x_2,t)$, определяемая формулой (8), в области Ω_2 является решением задачи {(5), (6)} при $n=2,\ \beta=0$ и $\lambda=0$.

Во втором пункте этого параграфа рассмотрена задача при $n=2,\ \beta\ne 0$ и $\lambda\ne 0$. На основе результатов предыдущего пункта, применяя одномерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера (1), найдена формула решения задачи {(5), (6)}:

$$u(x_1,x_2,t)=\frac{t^{1-2\gamma}}{2\pi}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iint\limits_{K_t}\tau(\xi_1,\xi_2)R_\lambda(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2,t;\alpha_1,\alpha_2,\beta)d\xi_1 d\xi_2+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{K_t}\nu(\xi_1,\xi_2)R_\lambda(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2,t;\alpha_1,\alpha_2,-\beta)d\xi_1 d\xi_2. \qquad (9)$$

где $R_\lambda(\xi_1,\xi_2;x_1,x_2,t;\alpha_1,\alpha_2,\beta)=(\xi_1/x_1)^{\alpha_1}(\xi_2/x_2)^{\alpha_2}[t^2-(\xi_1-x_1)^2-(\xi_2-x_2)^2]^{\beta-1/2}\times$ $\times{}_3\Phi_B^{(5)}(\alpha_1,\alpha_2,1-\alpha_1,1-\alpha_2,\beta+(1/2);\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $\omega_k=[t^2-\rho^2]/(4\xi_k x_k)$, $k=1,2$, $\omega_3=-(\lambda^2/4)[t^2-\rho^2]$, $\rho^2=(\xi_1-x_1)^2+(\xi_2-x_2)^2$, ${}_3\Phi_B^{(5)}(a,a',b,b',c;x,y,z)$ - вырожденная гипергеометрическая функция трех переменных. Имеет место

Теорема 16. Если $\tau(x_1,x_2)\in C(\bar{R}_+^2)\cap C^3(R_+^2)$ и $\nu(x_1,x_2)\in C^2(R_+^2)$, то функция $u(x_1,x_2,t)$, определяемая равенством (9), в области Ω_2 является решением задачи {(5), (6)}.

В третьем параграфе второй главы исследована задача Коши для трехмерного уравнения (5). Как и в предыдущем параграфе, данный параграф также разделен на два пункта. В первом пункте для случая $n=3,\ \beta=0$ и $\lambda=0$, применяя многомерный оператор (3), теорему 7 и следствие 1, получено интегральное представление решения этой задачи. Затем, во втором пункте, используя одномерный оператор (1), теорему 1 (при $m=1$) и результаты предыдущего пункта, найдена формула решения задачи {(5), (6)} при $n=3$:

$$u(x,t)=\gamma_1 t^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}\tau(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)d\xi+$$

$$+\gamma_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}\nu(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,1-\beta)d\xi\,, \qquad (10)$$

где, $\gamma_1=2^{2-2\beta}\Gamma(2\beta)/4\pi\Gamma^2(\beta)$ $\gamma_2=2^{2\beta}\Gamma(2-2\beta)/4\pi\Gamma^2(1-\beta)$, $R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)=$ $=\prod\limits_{k=1}^{3}\left(\xi_k/x_k\right)^{\alpha_k}\left(t^2-|\xi-x|^2\right)^{\beta-1}\Xi_2^{(4)}(\alpha;1-\alpha;\beta;\sigma)$, $1-\alpha=(1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-\alpha_3)$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)$, $\sigma_k=[t^2-|\xi-x|^2]/(4\xi_k,x_k)$, $0\le\sigma_k<1/2$, $k=\overline{1,3}$, $\sigma_4=-(\lambda^2/4)[t^2-|\xi-x|^2]$, $\Xi_2^{(4)}(\alpha;1-\alpha;\beta;\sigma)$ - гипергеометрическая функция четырех переменных, определяемая рядом

$$\Xi_2^{(4)}(a_1,\ldots,a_3;b_1,\ldots,b_3;c;z_1,z_2,\ldots,z_4)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z_4^k}{(c)_k k!}F_B^{(3)}(a_1,\ldots,a_3;b_1,\ldots,b_3;c+k;z_1,\ldots,z_3)\,,$$

$F_B^{(3)}(a_1,\ldots,a_3;b_1,\ldots,b_3;c;z_1,\ldots,z_3)$ - гипергеометрическая функция Лауричеллы трех переменных. Справедлива следующая

Теорема 17. Пусть $\tau(x)\in C(\bar{R}_+^3)\cap C^3(R_+^3)$ и $\nu(x)\in C^3(R_+^3)$. Тогда функция $u(x,t)$, определяемая равенством (10), в области Ω_3 является решением задачи {(5), (6)}.

В четвертом параграфе второй главы, применяя теорему 1 (при $m=1$), исследована задача {(5), (6)} в случае $n>1,\ \alpha_k=0, k=\overline{1,n}$. Найдена формула решения этой задачи при различных значениях параметра β, а также и при исключительных значениях этого параметра.

В частности, при $\beta>(n-1)/2$ и $\nu(x)=0$ решение найдено в виде

$$u(x,t)=\frac{\Gamma(\beta+1/2)t^{1-2\beta}}{\pi^{n/2}\Gamma(\beta-(n-1)/2)}\int\limits_{|\xi-x|<t}\tau(\xi)\frac{\bar{J}_{\beta-(n+1)/2}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)}{[t^2-|\xi-x|^2]^{((n+1)/2)-\beta}}d\xi\,. \qquad (11)$$

Используя определение оператора (1) на значение $\alpha<0$, показано, что формула (11) остаётся решением задачи {(5), (6)} и при $\beta<(n-1)/2$.

Аналогично, в случае $n>1,\ \alpha_k=0,\ k=\overline{1,n}$, когда $0<\beta<(1/2)$ при четном и нечетном n построено интегральное представление решения задачи {(5), (6)}. Кроме того, эта задача отдельно исследована при исключительных значениях параметра $\beta=(1/2),(3/2),\ldots$ и найдена формула его решения.

В третьей главе диссертации, названной **«Задача Коши для уравнений гиперболического типа высокого порядка»,** применяя новые свойства одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера, которые доказаны во втором параграфе первой главы, исследована задача Коши для итерированного гиперболического уравнения с оператором Бесселя.

В первом параграфе третьей главы в верхней полуплоскости исследована задача нахождения решения $u(x,t)$ одномерного поливолнового уравнения

$$\Box^m u(x,t)=0,\quad x\in R,\ t>0 \qquad (12)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\ \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0}=\psi_k(x),\quad x\in R,\ k=\overline{0,m-1},\tag{13}$$

где $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, $(k=\overline{0,m-1})$ - заданные гладкие функции, а $m\in N$, $m\geq 2$.

Построена явная формула решения этой задачи:

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2^{-2k-1}}{(k!)^2}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-t}^{x+t}\left[t^2-(x-s)^2\right]^k f_k(s)ds+\int_{x-t}^{x+t}\left[t^2-(x-s)^2\right]^k g_k(s)ds\right\},\tag{14}$$

где $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\varphi_{k-j}^{(2j)}(x)$, $g_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\psi_{k-j}^{(2j)}(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Кроме того, доказана следующая

Теорема 18. Если $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R)$, $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R)$, $j=\overline{0,m-1}$, то функция $u(x,t)$, определяемая формулой (14), является единственным решением задачи {(12), (13)}.

На основе формулы (14) построена явная формула решения задачи Коши для итерированного многомерного поливолнового уравнения методом сферических средних. При нечетном n это решение имеет вид

$$u(x,t)=\gamma_n\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=t}f_0(\xi)d\sigma_\xi\right)+\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{1}{t}\int_{|\xi-x|=t}g_0(\xi)d\sigma_\xi\right)\right]+$$

$$+\gamma_n\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k+1}}{(k-1)!k!}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int_{|\xi-x|\leq t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{k-1}f_k(\xi)d\xi+$$

$$+\gamma_n\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k+1}}{(k-1)!k!}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\int_{|\xi-x|\leq t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{k-1}g_k(\xi)d\xi,$$

где $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\Delta_x^{k-j}\varphi_j(x)$, $g_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^j C_k^j\Delta_x^{k-j}\psi_j(x)$, $k=\overline{0,m-1}$, $\gamma_n=[1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(n-2)\omega_n]^{-1}$, $\omega_n=2\pi^{(n/2)}/\Gamma\left(n/2\right)$.

Отсюда, применяя метод спуска Адамара, получена формула решения поставленной задачи при четном n.

Во втором параграфе третьей главы в области $\Omega=\{(x,y):0<y<x\}$ исследована задача Коши для уравнения

$$L_a^m(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{a}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m u(x,y)=0\tag{15}$$

с начальными условиями (13), где $a\in R$, причем $a>0$, $m\in N$, $L_a^m=L_a^1(L_a^{m-1})$.

Используя свойства одномерного оператора Эрдейи-Кобера и формулу (14), найдена явная формула решения задачи {(15), (13)} и доказана справедливость следующей теоремы, в которой $\alpha=a/2$, $\gamma=(a-1)/2$:

Теорема 19. Пусть $0<\alpha<1$ и $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R^+)$, $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j=\overline{0,m-1}$ и все производные функций $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ соответственно до порядка $2(m-j)$ и $2(m-j)-1$, $j=\overline{0,m-1}$ включительно обращаются в нуль при $x=0$. Тогда функция $u(x,y)$, определяемая равенством

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^{-\alpha}}{2^{2k+1}(k!)^2}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\int_{x-y}^{x+y}f_k(s)s^{\alpha}[y^2-(s-x)^2]^kF(\alpha,1-\alpha;k+1;\sigma)ds+\right.$$

$$\left.+\int_{x-y}^{x+y}g_k(s)s^{\alpha}[y^2-(s-x)^2]^kF(\alpha,1-\alpha;k+1;\sigma)ds\right\} \qquad (16)$$

является единственным решением задачи Коши {(15), (13)}, где $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\varphi_{k-j}(x)$, $g_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\psi_{k-j}(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

В третьем параграфе третьей главы в области $\Omega=\{(x,y):0<y<x\}$ исследована задача Коши о нахождении решения $u(x,y)\in C^{2m-1}(\bar{\Omega})$ итерированного двуосесимметрического уравнения вида

$$[h_{\beta,\alpha}^{\lambda}]^m(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2\beta}{y}\frac{\partial}{\partial y}-\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\lambda^2\right)^m u(x,y)=0, \qquad (17)$$

удовлетворяющего одной из следующих групп начальных условий:

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=\varphi_k(x),\ x\ge 0;\quad \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0}=0,\ x\ge 0,\ k=\overline{0,m-1}, \qquad (18)$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0}=0,\ x\ge 0;\quad \left.y^{2\beta}\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0}=\psi_k(x),\ x>0,\ k=\overline{0,m-1}, \qquad (19)$$

где $\alpha,\beta,\lambda\in R$, $m\in N$, причем $0<\alpha<1$, $0<\beta<1/2$, $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ - заданные гладкие функции.

Используя теорему 2, задача {(17), (18)} сведена к задаче {(15), (13)} при $\psi_k(x)=0$, $k=\overline{0,m-1}$. Затем, опираясь на формулы решение этой задачи, найдено интегральное представление решения задачи {(17), (18)}:

$$u_1(x,y)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2^{-2k}x^{-\alpha}y^{1-2\beta}}{k!\Gamma(\beta+k)}\int_{x-y}^{x+y}f_k(s)s^{\alpha}[y^2-(s-x)^2]^{\beta+k-1}\Xi_2(\alpha,1-\alpha;\beta+k;\omega,\sigma)ds, \qquad (20)$$

где $\omega=[y^2-(s-x)^2]/(4xs)$, $\sigma=-(\lambda^2/4)[y^2-(s-x)^2]$, причем $0<\omega<(1/2)$.

Аналогично, используя свойства решения уравнения (17) и формулу (20), найдена формула решения $u_2(x,y)$ задачи {(17), (19)}.

Теорема 20. Если $0<\alpha<1$, $0<\beta<(1/2)$ и $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)}(R^+)$, $\psi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j=\overline{0,m-1}$ и все производные функций $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ соответственно до порядка $2(m-j)$ и $2(m-j)-1$, $j=\overline{0,m-1}$ включительно

обращаются в нуль при $x=0$, то функции $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ соответственно являются решением задач {(17), (18)} и {(17), (19)}.

В четвертом параграфе третьей главы в полупространстве $R_+^{n+1}=\{(x,t): x\in R^n, t\in R, t>0\}$ исследована задача Коши для итерированного многомерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя по времени вида

$$L_{\gamma,\lambda}^m(u)\equiv\left(B_\gamma^t-\Delta+\lambda^2\right)^m u=0 \tag{21}$$

с полуоднородными начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=\varphi_k(x),\qquad \left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0}=0,\ x\in R^n,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k}u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0}=0,\ \ t^{2\gamma+1}\left.\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial t^{2k+1}}\right|_{t=0}=\psi_k(x),\ x\in R^n,\ k=\overline{0,m-1}, \tag{23}$$

где $\gamma,\lambda\in R,\ \gamma>-1/2$, $m\in N$, B_γ^t- оператор Бесселя, Δ- многомерный оператор Лапласа, $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$, $k=\overline{0,m-1}$ - заданные функции.

Используя теоремы 2 и 6, а также результаты первого параграфа этой главы, найдена формула решения задачи {(21), (22)} при нечетном n:

$$u(x,t)=\overline{\chi}_n t^{1-2\alpha}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{|\xi-x|<t}\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)f_0(\xi)d\xi+$$

$$+\overline{\chi}_n t^{1-2a}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{2^{-2k}}{k!(\alpha)_k}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int\limits_{|\xi-x|<t}\frac{\overline{J}_{\alpha+k-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)}{\left[t^2-|\xi-x|^2\right]^{1-\alpha-k}}f_k(\xi)d\xi, \tag{24}$$

где $\overline{\chi}_n=[1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-2)\omega_n\Gamma(\alpha)]^{-1}$, $\alpha=\gamma+1/2$.

Применяя метод спуска Адамара, из формулы (24) получена формула решения задачи {(21), (22)} и при четном n.

Аналогично, как и в предыдущем параграфе, построено решение задачи {(21), (23)} при нечетном и четном n.

В пятом параграфе третьей главы для неоднородного итерированного гиперболического уравнения вида

$$G_\beta^m(u)\equiv\left(\partial^2/\partial t^2+(2\beta/t)(\partial/\partial t)-L\right)^m u(x,t)=f(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega$$

исследована задача Коши о нахождении решения этого уравнения, удовлетворяющего однородным начальным условиям $\left.(\partial^k u/\partial t^k)\right|_{t=0}=0$, $k=\overline{0,2m-1}$, здесь $m\in N$, $\beta\in R,\ \beta\geq0$, $G_\beta^m=G_\beta^1(G_\beta^{m-1})$, $f(x,t)$ - заданная функция, L - линейный дифференциальный оператор конечного порядка переменной x, не зависящая от t, а Ω - область определения решения исследуемой задачи, зависящей от вида оператора L. Справедлива следующая

Теорема 21. Пусть функция $U(x,t,\tau)$, зависящая от параметра τ, является решением уравнения $G_0^m(U) \equiv \left(\partial^2 / \partial t^2 - L\right)^m U(x,t) = 0,\ \ t > \tau$, удовлетворяющее начальным условиям $(\partial^k U / \partial t^k)\big|_{t=\tau} = 0,\ \ k = \overline{0, 2m-2}$, $(\partial^{2m-1} U / \partial t^{2m-1})\big|_{t=\tau} = f(x,\tau),\ t > \tau$. Тогда функция $u(x,t) = \int\limits_0^t U(x,t,\tau)d\tau$ будет решением уравнения $G_0^m(u) = f(x,t)$, удовлетворяющим однородным начальным условиям $(\partial^k u / \partial t^k)\big|_{t=0} = 0,\ k = \overline{0, 2m-1}$.

Применяя теорему 21 при $n = 1,\ \beta = 0,\ L \equiv \partial^2 / \partial x^2$; $n = 1,\ \beta = 0$, $L \equiv (\partial^2 / \partial x^2) + (2\alpha / x)(\partial / \partial x)$, $\alpha \in R,\ \alpha > 0$ и $n = 3$, $\beta = 0$, $L = \Delta_3$- трехмерный оператор Лапласа, найдены формулы решения уравнения $G_0^m(u) = f(x,t)$, удовлетворяющее начальным условиям $(\partial^k u / \partial t^k)\big|_{t=0} = 0$, $k = \overline{0, 2m-1}$.

При $\beta \neq 0$ невозможно применить теорему 21. Поэтому, в этом случае, применяя метод предыдущих параграфов и теорему 2 (при $\lambda = 0$), в случае $n = 1,\ L = \partial^2 / \partial x^2$, $0 < \beta < 1/2$, найдена формула решения неоднородного уравнения $G_\beta^m(u) = f(x,t)$, удовлетворяющее однородным начальным условиям $(\partial^k u / \partial t^k)\big|_{t=0} = 0,\ k = \overline{0, 2m-1}$.

В четвертой главе диссертации, названной **«Задачи для поликалорического и неклассического уравнений с оператором Бесселя»,** применяя свойства операторов Эрдейи-Кобера, исследуется одна краевая задача для сингулярного поликалорического уравнения, задача Коши для одного класса вырождающихся уравнений высокого четного порядка с оператором Бесселя и задача Гурса для уравнения четвертого порядка с двумя сингулярными коэффициентами.

В первом пункте первого параграфа четвертой главы для одномерного неоднородного сингулярного поликалорического уравнения, т. е. для уравнения с оператором Бесселя высокого порядка вида

$$L_\gamma^m(u) \equiv \left(\partial / \partial t - B_\gamma^x\right)^m u(x,t) = f(x,t),\ x > 0,\ t > 0 \tag{25}$$

где B_γ^x - оператор Бесселя, $\gamma \in R,\ \gamma > -1/2$, $m \in N$, исследована следующая задача нахождения решения $u(x,t)$ уравнения (25), удовлетворяющего начальным

$$\left(\partial^k u / \partial t^k\right)\Big|_{t=0} = \varphi_k(x),\ x > 0,\ k = \overline{0, m-1} \tag{26}$$

и граничным

$$\left(\partial^{2k+1} u / \partial x^{2k+1}\right)_{x=0} = 0,\ \ t > 0,\ k = \overline{0, m-1} \tag{27}$$

условиям. Здесь $f(x,t)$, $\varphi_k(x),\ k = \overline{0, m-1}$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования $\varphi_{k-j}^{(2j+1)}(0) = 0$, $j = \overline{0, k}$, $k = \overline{0, m-1}$.

Применяя теорему 2, а также аналог второго принципа Дюамеля для итерированного уравнения высокого порядка, доказанного в этом параграфе, найдена формула решения задачи {(25)- (27)}:

$$u(x,t)=\frac{x^{-\gamma}}{2t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}\int_0^{+\infty}f_k(s)s^{\gamma+1}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4t}\right)I_\gamma\left(\frac{xs}{2t}\right)ds+$$

$$+\frac{x^{-\gamma}}{2(m-1)!}\int_0^t(t-\tau)^{m-2}d\tau\int_0^{+\infty}f(s,\tau)s^{\gamma+1}\exp\left(-\frac{x^2+s^2}{4(t-\tau)}\right)I_\gamma\left(\frac{xs}{2(t-\tau)}\right)ds, \qquad (28)$$

где $f_k(x)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^jC_k^j[B_\gamma^x]^j\varphi_{k-j}(x)$, $k=\overline{0,m-1}$.

Доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 22. Пусть $|\gamma|<1/2$, функции $\varphi_j(x)\in C^{2(m-j)-1}(R^+)$, $j=\overline{0,m-1}$ ограничены и все производные этих функций, до порядка $2(m-j)-1$, $j=\overline{0,m-1}$ включительно, обращаются в нуль при $x=0$, а функция $f(x,t)$ непрерывна и ограничена в области $R^+\times R^+$. Тогда функция определяемая формулой (28), является единственным решением задачи {(25)-(27)}.

Во втором пункте первого параграфа аналог краевой задачи, изученный в первом пункте, исследована для многомерного поликалорического уравнения, по всем пространственным переменным которого действует оператор Бесселя и найдена формула его решения.

Во втором параграфе четвертой главы в области $\Omega=\{(x,t):x\in R^n,\ t\in R,\ t>0\}$ рассмотрено вырождающееся уравнение

$$u_{tt}+t^pL^{2m}(u)+\lambda^2t^pu=f(x,t),\ (x,t)\in\Omega, \qquad (29)$$

где L-линейный дифференциальный оператор конечного порядка по переменной $x\in R^n$, не зависящий от t; $m\in N$, $L^{2m}=L\left(L^{2m-1}\right)$; $f(x,t)$ – заданная функция; $\lambda, p\in R$, причем $p\geq 0$.

Пусть натуральное число k-порядок оператора L. Через M обозначим класс функций, которые непрерывно дифференцируемы один раз по t и mk раз по x в замкнутой области $\overline{\Omega}=\{(x,t):x\in R^n,\ t\in R,\ t\geq 0\}$ и непрерывно дифференцируемы два раза по t и $2mk$ раз по x в области Ω.

Задача Коши. Найти решение $u(x,t)\in M$ уравнения (29), удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in R^n, \qquad (30)$$

где $\varphi(x),\ \psi(x)$ - заданные функции.

Решение задачи {(29), (30)} при $\psi(x)=0$, после замены переменных $y=[2/(p+2)]t^{(p+2)/2}$, ищем в виде $u(x,y)=J_\lambda^{(y)}(-(1/2),\beta)\,V(x,y)$, где $V(x,y)$ - неизвестная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, $J_\lambda^{(y)}(-(1/2),\beta)$ - обобщенный оператор Эрдейи-Кобера (1). В результате получена следующая задача нахождения решения $V(x,y)$ уравнения

$$\partial^2 V / \partial y^2 + L^{2m}(V) = F_0(x,y), \tag{31}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$V(x,0) = k_0\varphi(x),\ V_y(x,0) = 0,\ x \in R^n,\quad k_0 = \Gamma(\beta + 1/2)/\sqrt{\pi}, \tag{32}$$

где $2\beta = p/(p+2)$, причем $0 < 2\beta < 1$ при $p > 0$.

$$F_0(x,y) = \frac{(1-2\beta)^{4\beta}}{y^{4\beta}\Gamma(1-\beta)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y^2 - s^2)^{-\beta} \overline{I}_{-\beta}(\lambda\sqrt{y^2 - s^2}) s^{2\beta} f[x, (1-2\beta)^{2\beta-1} s^{1-2\beta}] ds.$$

В этом случае справедлива следующая

Теорема 23. Для того, чтобы функция $V(x,y) \in M$ была решением задачи {(31), (32)} необходимо и достаточно, чтобы функция $U(x,y) = V(x,y) + i\int_0^y L^m(V(x,\tau))d\tau$ была решением уравнения

$$U_y - iL^m(U) = F(x,y),\ (x,y) \in \Omega, \tag{33}$$

удовлетворяющим начальному условию

$$U(x,0) = k_0\varphi(x),\quad x \in R^n, \tag{34}$$

где $F(x,y) = \int_0^y F_0(x,\tau)d\tau$, i -мнимая единица.

Справедливо следующее

Следствие 3. Пусть функция $U(x,y) \in M$ является решением задачи {(33), (34)}, где $\varphi(x), F(x,y)$ - действительные функции. Тогда функция $V(x,y) = \mathrm{Re}U(x,y)$ является решением задачи {(31), (32)}.

Теорема 23 и следствие 3 дают необходимое и достаточное условие понижения порядка уравнения вдвое. Далее, для демонстрации метода, в качестве примера, приведены задачи для уравнений четвертого порядка с оператором Бесселя и найдены формулы их решения.

В третьем параграфе четвертой главы в области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < l,\ 0 < y < h\}$ для уравнения

$$L^c_{a,b}(u) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{b}{y}\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{ab}{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + cu = 0 \tag{35}$$

исследована задача Гурса о нахождении решения $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$ уравнения (35), удовлетворяющего краевым условиям

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ \lim_{x\to 0} x^a u_x(x,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h;$$

$$u(x,0) = \psi_1(x),\ \lim_{y\to 0} y^b u_y(x,y) = \psi_2(x),\ 0 \le x \le l,$$

где $\varphi_k(y), \psi_k(x), k = 1,2$ -заданные функции, причем $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$, $\varphi_2(0) = \psi_2(0) = 0$.

Применяя теорему 8, найдено интегральное представление решения поставленной задачи, которое выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_0F_3$ и функции Кампе де Ферье $F^{1;0;1}_{1;3;0}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром с применением операторов Эрдейи-Кобера. Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказаны новые свойства одномерного обобщенного оператора Эрдейи-Кобера. Найдены композиции этого оператора с дифференциальными операторами высокого порядка, в частности, со степенями оператора Бесселя.
2. Введен многомерный обобщенный оператор Эрдейи-Кобера и исследованы его свойства. Найдены композиции этого оператора со степенями суммы и произведения операторов Бесселя, действующих по различным переменным.
3. Получена формула решения задачи Коши для уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя, действующим по всем переменным, в одномерном, двумерном и трехмерном случае.
4. Решена задача Коши для многомерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя, действующим по временной переменной. Найдена формула решения задачи и при исключительных значениях параметра оператора Бесселя.
5. Найдена формула решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения. На основе этой формулы, построена формула решения задачи Коши для многомерного поливолнового уравнения.
6. Построена формула решения задачи Коши для одномерного итерированного гиперболического уравнения, по пространственной переменной которого действует оператор Бесселя.
7. Построено интегральное представление решения задачи Коши для итерированного двуосесимметрического гиперболического уравнения.
8. Найдена формула решения задачи Коши для итерированного многомерного уравнения Клейна-Гордона-Фока с оператором Бесселя.
9. Разработан способ нахождения решения задачи Коши для неоднородного итерированного уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя.
10. Найдена формула решения одной краевой задачи для одномерного и многомерного поликалорического уравнения, по всем пространственным переменным которого действует оператор Бесселя.
11. Для одного класса вырождающихся уравнений высокого четного порядка найдены необходимые и достаточные условия понижения порядка этого уравнения вдвое и на его основе разработан метод решения задачи Коши.
12. Найдено интегральное представление решения задачи Гурса для уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по двум переменным.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

FERGANA STATE UNIVERSITY

KARIMOV SHAKHOBIDDIN TUYCHIBOYEVICH

ERDÉLYI-KOBER OPERATORS AND THEIR APPLICATION TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2019

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.1.DSc/FM8

Dissertation has been prepared at Fergana state university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Urinov Akhmadjon Kushakovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Kasimov Shakirbay Gapparovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Hasanov Anvarjon doctor of physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Belgorod National Research University**

Defense will take place «____» _____ 2019 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str.,4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _____ 2019.
(mailing report № __ on « ___ » _____ 2019).

A.S.Sadullaev
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., academician

G.I. Botirov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S.

A.Azamov
Vise Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. The study of the properties of Erdélyi-Kober operators and their applications for the investigation of initial and boundary value problems for partial differential equations with the Bessel operator has important practical applications. Therefore, the development of methods for the investigation of such equations and their application is one of the important problems.

The aim of the research work is the development of methods for solving initial and boundary value problems for partial differential equations with singular coefficients and with a spectral parameter using Erdélyi-Kober operators.

The tasks of research work:

investigation of the properties of the one-dimensional generalized Erdélyi-Kober operator and their application to solving initial and boundary-value problems for high-order partial differential equations with singular coefficients and with a spectral parameter;

introduction of the multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator and the study of its properties, as well as their application to multidimensional partial differential equations with many singular coefficients;

solving initial and boundary value problems for a one-dimensional and multidimensional polycaloric equation using Erdélyi-Kober operators;

the application of Erdélyi-Kober operators to solving problems for non-classical partial differential equations with a singular coefficient.

The object of the research work is the Erdélyi-Kober operators and partial differential equations with singular coefficients and with a spectral parameter.

Scientific novelty of the research work:

new properties of the one-dimensional generalized Erdélyi-Kober operator were found, and the multidimensional case of this operator was introduced and its properties were proved;

formulas are found for solving the Cauchy problem for the Klein-Gordon-Fock equation with the Bessel operator acting on all variables in the one-dimensional, two-dimensional and three-dimensional case and in the multidimensional case when the Bessel operator acts in time;

a formula for solving the Cauchy problem for a polywave equation was constructed and a formula for solving this problem was found for an iterated one-dimensional hyperbolic equation with a Bessel operator acting on a spatial variable, as well as for an iterated biaxisymmetric hyperbolic equation;

a method was developed for finding a solution to the Cauchy problem for an iterated multidimensional Klein-Gordon-Fock equation and for an inhomogeneous iterated hyperbolic type equation with a Bessel operator acting in time;

a formula was found for solving a single boundary value problem for a polycaloric equation, over all spatial variables, of which the Bessel operator acts;

for one class of a degenerate differential equation of high even order, necessary and sufficient conditions for reducing the order of this equation in two are found and a method for solving the Cauchy problem is developed on its basis;

solved the Goursat problem for a fourth-order differential equation with a Bessel operator acting in two variables.

The outline of the thesis:

1. Proved new properties of the one-dimensional generalized operator Erdélyi-Kober. Compositions of this operator with differential operators of higher order, in particular, with powers of the Bessel operator, are found.

2. A multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator is introduced and its properties are investigated. The compositions of this operator are found with degrees of the sum and the product of the differential Bessel operator acting in several variables.

3. A formula is obtained for solving the Cauchy problem for the Klein-Gordon-Fock (KGF) equation with the Bessel operator acting on all variables in the one-dimensional, two-dimensional, and three-dimensional case.

4. The Cauchy problem is solved for the multidimensional KGF equation with the Bessel operator acting in a time variable. The formula for solving the problem was found for exceptional values of the parameter of the Bessel operator.

5. The formula for solving the Cauchy problem for a one-dimensional polywave equation is found. Based on this formula, a formula for solving the Cauchy problem for a multidimensional polywave equation is constructed.

6. A formula is constructed for solving the Cauchy problem for a one-dimensional iterated hyperbolic equation, the spatial variable of which has the Bessel operator.

7. An integral representation of the solution of the Cauchy problem for an iterated biaxisymmetric hyperbolic equation is constructed.

8. The formula for solving the Cauchy problem for an iterated multidimensional KGF equation with a Bessel operator acting in time was found.

9. A method has been developed for finding a solution to the Cauchy problem for an inhomogeneous iterated hyperbolic type equation with a Bessel operator;

10. A formula is found for solving a single boundary value problem for a one-dimensional and multidimensional polycaloric equation, for all spatial variables of which the Bessel operator acts.

11. For one class of a degenerate equation of high even order, necessary and sufficient conditions were found for reducing the order of this equation by half, and a method for solving the Cauchy problem was developed on its basis.

12. An integral representation of the solution of the Goursat problem for a fourth-order equation with the Bessel operator acting in two variables is found.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2013. – № 1. –С. 11-13. (01.00.00; №7)

2. Каримов Ш.Т. Многомерный оператор Эрдейи-Кобера и его приложение к решению задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2013. – № 1. –С. 70-80. (01.00.00; № 6)

3. Urinov A.K., Karimov Sh.T. Solution of the Cauchy Problem for Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation by the Method of Fractional Integrals // In: Reissig M., Ruzhansky M. (eds) Progress in Partial Differential Equations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, – Springer, Heidelberg, 2013. – Vol. 44. – P. 321-337. (№ 41. SCImago: 0,225)

4. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2013. – № 3. –С. 57-69. (01.00.00; № 6)

5. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Задача Коши для многомерного обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2013. – № 4. – С. 5-8. (01.00.00; №7)

6. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для трехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами и со спектральным параметром // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2014. – № 2. – С. 55-65. (01.00.00; № 6)

7. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи – Кобера и их приложения // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2014. – № 5. – С. 11-13. (01.00.00; №7)

8. Karimov Sh.T. Multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients // Fractionals Calculus and Applied Analysis. 2015. – Vol. 18. – No 4, – P. 845–861. (№ 2. Journal IF: 2,974)

9. Каримов Ш.Т. Приложение обобщенного оператора Эрдейи-Кобера к решению задачи Коши для вырождающегося дифференциального уравнения высокого порядка // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. – Ташкент, 2015. – № 4. – С. 8-11. (01.00.00; №7)

10. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для поливолнового уравнения методом сферических средних // Вестник НУУз. – Ташкент, 2016, – № 2/1. – С. 26-36. (01.00.00; №3)

11. Каримов Ш.Т. Приложение многомерного оператора Эрдейи-Кобера к решению аналога задачи Гурса для уравнения четвертого порядка с

сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2016. – № 4. – С. 73-83. (01.00.00; № 6)

12. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для одномерного поливолнового уравнения с сингулярным оператором Бесселя // Известия вузов. Математика. 2017, – № 8, – С. 21-47. (№ 41. SCImago: 0,377) [Karimov Sh.T. Method of Solving the Cauchy Problem for One-Dimensional Polywave Equation with Singular Bessel Operator // Russian Mathematics. 2017. – Vol. 61. – № 8. – P. 22-35. (№ 41. SCImago: 0,377)]

13. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Задача Коши для неоднородного итерированного уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2017. – № 4. – С. 73-83. (01.00.00; № 6)

14. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения аналога задачи Коши для поликалорического уравнения с сингулярным оператором Бесселя // Украинский математический журнал. – Киев, 2017, –т. 69, – № 10. – С. 1372-1384. (№ 2. Journal IF: 0,343) [Karimov Sh.T. On one method for the solution of an analog of the Cauchy problem for a polycaloric equation with singular Bessel operator // Ukrainian Mathematical Journal. –Springer. 2018. –Vol. 69. –№ 10. – P. 1593-1606. (№ 2. Journal IF: 0,343)]

15. Karimov Sh.T. On some generalizations of properties of the Lowndes operator and their applications to partial differential equations of high order // Filomat, 2018, – Vol. 32, –No 3. – P. 873-883. (№ 2. Journal IF: 0,635)

16. Karimov Sh.T. The Cauchy problem for the degenerated partial differential equation of the high even order // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2018. – Vol. 15. –P. 853-862. (№ 41. SCImago: 0,339)

II бўлим (II часть; II part)

17. Каримов Ш.Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложение // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. - № 2(18). – С. 20-40.

18. Каримов Ш.Т. Приложение оператора Эрдейи-Кобера к решению краевой задачи для полипараболического уравнения с оператором Бесселя // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2017. – Т. 11. –С. 135-145.

19. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя // Владикавказский математический журнал. – Владикавказ, 2018. –Т. 20. – Вып. 3. – С. 57-68.

20. Каримов Ш.Т. Аналог задачи Коши для неоднородного многомерного поликалорического уравнения с оператором Бесселя // Математический анализ, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН, М., 2018. –Т. 156, –С. 3-17.

21. Каримов Ш.Т. Многомерные обобщенные операторы Эрдейи-Кобера и их приложения // Материалы Второго Межд. Российско-Казахского

симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». 23-27 май 2011. – Нальчик, 2011. – С. 92-94.

22. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для трехмернго волнового уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов // Тезисы докладов конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения». 26-30 июня 2011. – Самара, 2011. – С. 118-119.

23. Каримов Ш.Т. Задача Коши для трехмерного волнового уравнения с сингулярными коэффициентами // Сборник тезисов VI Уфимской международной конференции “Комплексный анализ и дифференциальные уравнения”. 3-7 октября 2011. – Уфа, 2011. – С. 88-89.

24. Каримов Ш.Т. Задача Коши и принцип Гюйгенса для волнового уравнения с сингулярным коэффициентом // Материалы международной конференции молодых ученых «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики». 5-8 декабря 2011. – Нальчик, 2011. – С. 146-149.

25. Каримов Ш.Т. Задача Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами // Материалы Второго Межд. Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». 28 май -1 июня 2012. – Эльбрус, 2012. – С. 136-139.

26. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов // Тезисы научно-практического семинара «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа». 5-6 июля 2012. – Самарканд, 2012. – С. 44-45.

27. Каримов Ш.Т. Многомерные обобщенные операторы Эрдейи-Кобера и их приложение к решению задачи Коши // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные вопросы математика, математического моделирования и информационных технологий». 21-22 ноября 2012. – Термез, 2012. – С. 25-29.

28. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения краевых задач для многомерных параболических уравнений с операторами Бесселя // Труды Межд. науч. конф. «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы». 26-30 июня 2013. – Стерлитамак. 2013. – С. 54-59.

29. Каримов Ш.Т. Новые свойства оператора Эрдейи-Кобера и его приложение к вырождающимся уравнениям высокого порядка // Респ. Науч. конф с участием ученых из стран СНГ (тезисы док.) "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения". 21-23 ноября 2013. – Ташкент, 2013. – С. 62-64.

30. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для неоднородного обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу методом дробных интегралов // Материалы IV Международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». 4-8 декабря 2013. – Нальчик, 2013, – С. 126-129.

31. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для вырождающегося уравнения высокого четного порядка // Материалы Всероссийской научной конференции молодых ученых «Современные вопросы математической физики, математической биологии и информатики». 18-19 июня 2014. – Нальчик, 2014. – С. 62-65.

32. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для вырождающегося уравнения четвертого порядка // Труды Межд. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2014». 15 - 17 сентября 2014. – Самарканд, 2014. –С. 221-224.

33. Каримов Ш.Т. Приложение обобщенного оператора Эрдейи-Кобера к решению задачи Коши для вырождающегося уравнения четвертого порядка // Материалы четвертой Межд. конф. «Математическая физика и ее приложения». 25 августа – 1 сентября 2014. – Самара, 2014. – С. 189-190.

34. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения аналога задачи Коши для уравнения высокого порядка с особыми коэффициентами // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Материалы Международной научной конференции. 29 сентября – 1 октября 2014. – Казань, 2014. – Т. 49. – С. 193-195.

35. Каримов Ш.Т. Приложение оператора Эрдейи-Кобера к уравнениям четвертого порядка гиперболического типа с двумя сингулярными коэффициентами // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых "Неклассические уравнения математической физики и их приложения». – Ташкент, 2014. – С. 142-143.

36. Karimov Sh. T. About some generalizations of properties of a multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator // Proceedings of the International Russian – Chinese Conference on “Actual Problems of Applied Mathematics and Physics” (IRCCAPAMP) –2015. – Prielbrusie, 2015. –P. 80-82.

37. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для сингулярного полипараболического уравнения // Тезисы докладов Респ. науч. конф. «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа". – Андижан, 2016. – С. 150-152.

38. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения краевых задач для полипараболического уравнения с сингулярным оператором Бесселя // Тезисы докладов международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных». 16-18 июня 2016. – Москва, 2016. – С. 107.

39. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Аналог задачи Коши для четырехмерного гиперболического уравнения с оператором Бесселя, действующим по всем переменным // Тезисы докладов международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных». 16-18 июня 2016. – Москва, 2016. – С. 141.

40. Karimov Sh. T. Application of the multidimensional generalized Erdélyi-Kober operator to the solution of the Cauchy problem for a singular polyparabolic equation // Abstracts Book of 24 ICFIDCAA 2016, “24th

International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications”. August 22-26, 2016. – Jaipur, India. – P. 108.

41. Karimov Sh. T. Solution of a Cauchy problem for iterated generalized two-axially symmetric equations of hyperbolic type // Abstracts Book of International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2-16). September 7-10 2016. –Almaty, 2016. – P. 73.

42. Каримов Ш.Т. Приложение оператора Эрдейи-Кобера к решению краевой задачи для полипараболического уравнения с оператором Бесселя // Тезисы докладов XIII Международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование". 17-14 сентября 2016. – Владикавказ, 2016, – С. 109-110.

43. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для многомерного полипараболического уравнения с оператором Бесселя // Материалы Международной научной конференции «Нелинейный анализ и ее приложения». 19-21 сентября 2016. – Самарканд, 2016. –С. 101-103.

44. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для итерированного обобщенного оператора Эйлера-Пуассона-Дарбу // Материалы Межд. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики». 17-22 октября. –Нальчик, 2016, -С. 123-126.

45. Каримов Ш.Т. Решение задачи Коши для многомерного поли-параболического уравнения // Тезисы докладов V Межд. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми 2016». 9-10 ноября 2016. – Бухара, 2016. – С. 127-128.

46. Каримов Ш.Т. Об одном методе решения задачи Коши для итерированного многомерного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с младшим членом // Тезисы докладов V Межд. науч. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми 2016». 9-10 ноября 2016. – Бухара, 2016. – С. 128-129.

47. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Задача Коши для неоднородного итерированного уравнения гиперболического типа высокого порядка // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актульные проблемы динамических систем и их приложения». 1-3 мая 2017. – Ташкент, 2017. – С. 168-170.

48. Каримов Ш.Т. Задача Коши для неоднородного итерированного уравнения гиперболического типа с оператором Бесселя // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». 15-17 декабря 2017. – Ташкент, 2017. – С. 49-51.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (6 май 2019 йил).

Босишга рухсат этилди: 06.05.2019 йил
Бичими 60x84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,7. Адади: 100. Буюртма: № 35.
Ўзбекистон Республикаси Фанлари Академияси,
«ФАН» нашриёти давлат корхонаси босмахонасида чоп этилди.
100170, Тошкент ш, М.Улуғбек кўчаси, 81-уй.