ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ИМОМОВ АЪЗАМ АБДУРАХИМОВИЧ

ТАРМОҚЛАНУВЧИ ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ХОССАЛАРИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика (физика-математика фанлари)

Физика-математика фанлари доктори (DSc) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2019 йил

УДК: 519.218.2

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of the doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.27.06.2017.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ИМОМОВ АЪЗАМ АБДУРАХИМОВИЧ

ТАРМОҚЛАНУВЧИ ТАСОДИФИЙ ЖАРАЁНЛАРНИНГ АСИМПТОТИК ХОССАЛАРИ

01.01.05 – Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика
(физика-математика фанлари)

Физика-математика фанлари доктори (DSc) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2019 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.1.DSc/FM131 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» ахборот-таълим тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Ҳусанбоев Ёқубжон Муҳамаджонович** физика-математика фанлари доктори
Расмий оппонентлар:	**Гаджиев Асаф Гаджи ўғли** физика-математика фанлари доктори, профессор, Азарбайжон Миллий Фанлар академияси академиги
	Ходжибаев Вали Рахимджанович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Раимова Гулнора Мирвалиевна физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Тарас Шевченко номидаги** **Киев Миллий университети, Украина**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети, Математика институти ҳузуридаги DSc.27.06.2017.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «____» ____________ соат _____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин. (______ рақам бидан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел: (99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2019 йил «______» ________________ куни тарқатилди.

(2019 йил «______» ________________ даги _____ рақамли реестр баённомаси)

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Ғ.И.Ботиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Ш.К.Форманов
Илмий даражалар берувчи Илмий
Кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар амалий муаммоларни ҳал этишда тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг муҳим аҳамиятга эга эканлигини кўрсатмоқда. Тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси – замонавий математиканинг кенг қамровли тадбиқларга эга бўлган соҳаси бўлиб, у бирор тасодифий репродуктив механизм асосида ривожланиб борувчи заррачалар популяциясининг эволюцион қонунларини тадқиқ этади. Тадқиқотлар мазкур назариянинг классик ва замонавий моделлари кенг қамровли амалий тадбиқларга эга эканлигини кўрсатмоқда. Жумладан, ядро физикаси, молекуляр биология, химия, демография, тиббиёт каби фан соҳаларининг қатор амалий масалалари заррачалар эволюциясини тадқиқ этиш билан боғлиқ моделлар билан ифодаланади. Ушбу назария ўрганилаётган масалалар ва моделларнинг амалий ва реал табиати туфайли, замонавий эҳтимоллар назариясининг фаол ривожланиб бораётган тармоқларидан бири сифатида долзарб тадқиқотлар объекти бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда тармоқланувчи жараёнлар назариясининг тадбиқлари доирасининг кўлами биологик популяцияларнинг эволюцион қонунларини ёритиш, оммавий хизмат кўрсатиш назарияси масалаларини ўрганиш ҳамда заррачалар эволюцияси билан боғлик бошқа кўплаб физик ва техник ҳодисаларни ўрганиш каби муаммоларни қамраб олмоқда. Бу борада ушбу назариянинг ривожланиб бориши бир томондан классик моделларни янада чуқурроқ ўрганишга бўлган зарурат билан боғлиқ бўлса, иккинчи томондан ўрганилаётган табиий ҳодисалар моҳиятини кенгроқ акс эттирувчи янги схемаларнинг кашф этилиб бориши билан изоҳланади. Бу борада, классик моделлар доирасида олинган натижаларни ривожлантириб бориш ҳамда табиий шартларга мос келувчи янги назарий хулосалар олишга қаратилган изланишлар мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий тадбиқларга эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилмоқда. Хусусан, эҳтимоллар назарияси соҳасида олиб борилаётган фундаментал тадқиқотларни амалиётга жорий этиш масаласи муҳим вазифа сифатида қўйилган. Бу вазифани бажаришда тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси етакчи ўринлардан бирини эгаллайди. Мазкур назариянинг кўплаб соҳалардаги долзарб муаммоларни ҳал қилишга қаратилган тадбиқлари доирасида салмоқли илмий натижаларга эришилди. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика фани бўйича ҳалқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқот ишларини олиб бориш асосий вазифалар ва фаолиятлар йўналишлари этиб белгиланган[1]. Мазкур қарор ижросини таъминлаш мақсадида тармоқланувчи тасодифий жараёнлар назарияси соҳасида илмий тадқиқот ишларини давом эттириб бориш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги № ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисидаги” Фармони, 2017 йил 17 февралдаги № ПҚ-2789 “Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги, 2017 йил 20 апрелдаги № ПҚ-2909 “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ва 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга оид бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[2]. Тармоқланувчи жараёнлар турли хил моделлари траекторияларининг хоссаларини тадқиқ этишга ва жараёнлар характеристикаларининг лимит тақсимотларини топишга қаратилган кенг кўламли илмий изланишлар дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Monash University, University of Western Australia, University of Queensland (Австралия); University of Liverpool, University of Bath (Буюк Британия); University of Debrecen, University of Szeged (Венгрия); Technische Universitat Munchen, Christian-Albrechts-Universitat zu Kiel, University of Frankfurt (Германия); University of Extremadura (Испания); Central South University, Beijing Normal University (Хитой); University of Nijmegen (Нидерландия); Zayed University (БАА); Silesian University of Technology (Польша); University of Georgia, Rice University, Virginia Polytechnic Institute, Trinity University, Iowa State University, University of Chicago (АҚШ); Chalmers University of Technology (Швеция); Meijo University (Япония); Россия ФА В.А.Стеклов номидаги Математика институти; Азарбайжон ФА Математика ва механика институти; Ўзбекистон ФА Математика институтида олиб борилмоқда.

Илмий натижаларнинг қўлланилиши натижасида жаҳон миқёсида қатор долзарб масалалар ўз ечимини топган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: иммиграцияли Марков тармоқланувчи жараёнлари учун λ-инвариант ўлчовларнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган (Monash University, University of Western Australia, University of Liverpool, Central South University); мусбат траекторияли Гальтон-Ватсон жараёнида заррачалар умумий сонининг лимит тақсимоти топилган (Monash University); ҳосил қилувчи функциялари регуляр ўзгарувчи бўлган Гальтон-Ватсон ва узлуксиз вақтли Марков тармоқланувчи жараёнлари учун лимит теоремалар

---

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи ушбу www.mathnet.ru/, www.appliedprobabiliy.org/, www.hindawi.com/, www.springer.com/, www.elsevier.com/ интернет сайтлари ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

исботланган (University of Western Australia, Technische Universitat Munchen); тармоқланувчи жараёнларнинг турли функционаллари ва инвариант ўлчовлари орасидаги муносабатлар ўрнатилган (Monash University, Christian-Albrechts-Universitat zu Kiel, Chalmers University of Technology); деярли критик Гальтон-Ватсон жараёнлари учун функционал лимит теоремалар исботланган (University of Extremadura, University of Debrecen, Zayed University); узлуксиз вақтли Марков тармоқланувчи жараёнлари q-матрицасининг компоненталари топилган (University of Western Australia, University of Queensland, Central South University); тармоқланувчи суперкритик Гальтон-Ватсон жараёнлари функционаллари учун катта сонлар қонуни ва марказий лимит теорема аналоги исботланган (University of Georgia); заррачалар ёшига боғлиқ ҳолда ривожланувчи тармоқланувчи жараёнларнинг давомийлиги эҳтимоллиги топилган ва асимптотик тақсимотлар олинган (Россия ФА Математика институти, Iowa State University); тасодифий муҳитда аниқланган тармоқланувчи жараёнлар учун классик лимит теоремалар аналоглари исботланган (Россия ФА Математика институти, University of Frankfurt); тармоқланувчи жараёнлар тебранишлари учун лимит теоремалар исботланган (University of Nijmegen, Iowa State University, Ўзбекистон ФА Математика институти); нормалланган Гальтон-Ватсон жараёнлари кетма-кетлигининг яқинлашиши ҳақидаги лимит теоремалар исботланган (Азарбайжон ФА Математика ва механика институти, Zayed University, Ўзбекистон ФА Математика институти); иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёни инвариант ўлчовлари матрицаси ҳисобланган (Meijo University).

Дунёда бугунги кунда реал ҳодисаларни акс эттирувчи янги математик моделларни кашф этиш, олинган назарий натижаларни амалиётга тадбиқ этиш каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Тармоқланувчи жараёнлар давомийлиги эҳтимоллигининг асимптотасини ўрганиш бўйича дастлабки натижалар А.Колмогоров, Н.Дмитриев, Б.Севастьянов, С.Хиткот, Е.Сенета, Д.Вир-Джонс, А.Нагаев ва Р.Мухамедханова ишларида олинган. Қаралаётган жараённинг мусбат траекторияси бўйича заррачалар сони тақсимоти учун дастлабки лимит теоремалар эса А.Яглом, Т.Харрис, Дж.Ламперти ва П.Ней ҳамда Б.Севастьянов ишларида исботланган. Дж.Ламперти ва П.Ней ўз ишларида траекторияси узоқ келажаккача давом этувчи Гальтон-Ватсон жараёнини Q-жараён номи билан киритди ва унинг хоссаларини ўрганишди. В.Чистяков томонидан узлуксиз вақтли Марков тармоқланувчи жараёнлари учун дастлабки локал лимит теоремалар исботланди. Санаб ўтилган ишларда битта заррача бевосита авлодлари сони тақсимотининг учинчи ва тўртинчи тартибли чекли факториал моментларга эга бўлиш шартлари талаб этилган.

В.Золотарёв илк бор классик теоремалар натижаларини битта заррача авлодлари сони тақсимотининг иккинчи тартибли моментни чекли бўлиш шартидан воз кечган ҳолда яхшилашда Карамата маъносидаги регуляр ўзгарувчи функциялар назариясининг қўлланилиш имкониятларини кўрсатиб берди. У инфинитезимал ҳосил қилувчи функциясининг “думи” 1 нуқтада

$\gamma \in (1,2]$ кўрсаткич билан регуляр ўзгарувчи бўлган критик Марков тармоқланувчи жараёнлари учун А.Яглом ва В.Чистяков теоремаларини исботлади. В.Золотарёвнинг теоремалари олдинги натижаларни шу маънода умумлаштирадики, $\gamma \in (1,2]$ сон чекли моментнинг тартибини билдиради. Кейинчалик Р.Слэйк ўз ишларида Гальтон-Ватсон тармоқланувчи жараёни учун В.Золотарёв натижаларининг аналогларини исботлади. С.Нагаев ва В.Уочтель томонидан эълон қилинган ишда эса А.Яглом теоремаси $\gamma = 1$ бўлган ҳол учун исботланиб, Р.Слэйк натижалари яхшиланди.

Гальтон-Ватсон жараёни эволюциясида иштирок этган барча авлодлар заррачалари умумий сонининг асимптотик хоссалари Д.Кеннеди, А.Пэйкс, В.Ватутин ва С.Сагитов, А.Карпенко ва С.Нагаев ишларида тадқиқ этилди.

Тармоқланувчи жараёнларнинг яна бир муҳим бўлимини иммиграцияли жараёнлар ташкил этади. Иммиграцияли жараёнлар, узлуксиз вақтли ҳол учун, илк бор Б.Севастьянов томонидан таърифланган. Кейинчалик, С.Хиткот бу моделни дискрет вақтли ҳол учун киритди. Е.Сенета эълон қилган ишларида иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёни инвариант ўлчовларининг ҳосил қилувчи функциясини қаноатлантирувчи функционал тенгламаларни топди. А.Зубков иммиграцияли жараённинг яшаш даврини ўрганди. А.Пэйкс ўз тадқиқотларида иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёни учун локал лимит теоремалар исботлади ва муайян шартларда жараённинг ўтиш эҳтимолликлари чексизликда регуляр ўзгаришини кўрсатди. И.Бадалбаев ва И.Рахимов томонидан нотекис иммиграцияли жараёнларни ўрганиш масаласи илгари сурилди. Ш.Форманов ва Ж.Азимов ҳосил қилувчи функцияси регуляр ўзгарувчи бўлган ва ҳолатларга боғлиқ иммиграцияли Марков тармоқланувчи жараёнлари учун лимит теорема исботлашди. Дж.Ли, Ф.Чэн ва А.Пэйкс эълон қилган ишда Марков тармоқланувчи жараёнлари учун λ-инвариант ўлчовнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремалар исботланди. Я.Ҳусанбоев иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёнлари тебранишларининг детерминистик жараёнларга суст яқинлашишини тадқиқ этди ва бу тебранишлар хоссаларига оид лимит теоремалар исботлади. А.Иксанов ва З.Каблучко жуда фаол иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёнлари учун функционал лимит теоремалар исботлади.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий-тадқиқот муассасаси илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг Ф4-ФА-Ф009 рақамли «Эҳтимолликлар тақсимотлари учун аппроксимация масалалари ва уларнинг математик статистикадаги тадбиқлари» (2012–2016) мавзусидаги илмий-тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади. Минимал момент шартларда дискрет ва узлуксиз вақтли тармоқланувчи тасодифий жараёнлар траекторияларининг асимптотик тақсимотларини топиш, иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар учун инвариант ўлчовлар қуриш ва уларга яқинлашиш тезликларини баҳолаш, узоқ келажакда давом этувчи тармоқланувчи жараёнларнинг лимит тақсимот функцияларини топиш.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилар:

чексиз момент тартиби $1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, бўлган дискрет ва узлуксиз нокритик тармоқланувчи жараёнлар ҳосил қилувчи функциялари ва уларнинг дифференциали учун асимптотик ёйилмаларни топиш, жараёнлар ўтиш эҳтимолликларининг инвариантлик хоссаларини ўрганиш, инвариант ўлчовлар ҳосил қилувчи функцияларининг аниқ кўринишларини топиш;

иммиграция қонунининг биринчи тартибли моменти ва заррачалар кўпайиши қонунининг дисперсияси чексиз бўлган иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёнининг эргодиклик хоссасини ўрганиш, иммиграцияли жараёнларда инвариант ўлчовларга яқинлашиш тезликларини баҳолаш;

иккинчи тартибли моменти чексиз бўлган дискрет ва узлуксиз критик тармоқланувчи жараёнлар назариясининг асосий леммаси ва унинг дифференциал аналогини исботлаш, жараёнлар ўтиш эҳтимолликларининг инвариантлик хоссаларини тадқиқ этиш ҳамда инвариант ўлчовларга мос ҳосил қилувчи функцияларининг аниқ кўринишларини топиш;

траекторияси узоқ келажаккача давом этувчи Q-жараёнда заррачалар сони ва барча авлодлар умумий сони биргаликдаги тақсимотининг лимит қонунини топиш, марков Q-жараёнлари ҳолатларини классификациялаш, таркибий ва асимптотик хоссаларини тадқиқ этиш.

Тадқиқотнинг объекти. Тармоқланувчи Гальтон-Ватсон тасодифий жараёнлари, узлуксиз вақтли Марков тасодифий тармоқланувчи жараёнлари, иммиграцияли тармоқланувчи жараёнлар, Марков Q-жараёнлари.

Тадқиқот предмети. Ўтиш эҳтимолликлари, ҳосил қилувчи функциялар, регуляр ўзгарувчи функциялар, Колмогоров тенгламалари, инвариант ўлчовлар, Абел ва Шрёдер тенгламалари, Лаплас алмаштириши.

Тадқиқот усуллари. Тадқиқот ишида ҳосил қилувчи функциялар усули, Стейн-Тихомиров усули, Лаплас алмаштиришлари усули ва асимптотик анализ каби назарий-эҳтимолий ва аналитик усуллардан ҳамда регуляр ўзгарувчили функциялар учун Таубер теоремаларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

чексиз момент тартиби $1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, бўлган дискрет ва узлуксиз нокритик тармоқланувчи тасодифий жараёнлар ҳосил қилувчи функциялари ва уларнинг дифференциали учун асимптотик ёйилмалар топилган, бу жараёнларнинг инвариант ўлчовларига мос ҳосил қилувчи функцияларнинг аниқ кўринишлари ҳосил қилинган;

иммиграция оқими қонунининг биринчи тартибли моменти ва заррачалар кўпайиши қонунининг иккинчи тартибли моменти чексиз бўлган эргодик занжир ташкил этувчи иммиграцияли критик Гальтон-Ватсон жараёни ўтиш эҳтимолликлари учун асимптотик ёйилма топилган, иммиграцияли Марков тармоқланувчи жараёнларида инвариант ўлчовларга яқинлашиш тезликлари баҳоланган;

иккинчи тартибли моменти чексиз бўлган дискрет ва узлуксиз критик тармоқланувчи жараёнлар назариясининг асосий леммаси ва унинг дифференциал аналоги исботланган, жараёнлар ўтиш эҳтимолликларининг инвариант ўлчовларга яқинлашиши исботланган, инвариант ўлчовларга мос ҳосил қилувчи функцияларнинг аниқ кўринишлари топилган;

траекториялари узоқ келажаккача давом этувчи Q-жараёнларда заррачалар сони ва барча авлодлар умумий сонининг биргаликдаги лимит тақсимот қонуни топилган, узлуксиз вақтли марков Q-жараёнларининг таркибий ва асимптотик ҳолатлари классификацияланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Карамата маъносидаги регуляр ўзгарувчи функциялар назарияси элементларидан заррачалар авлодлари сони дисперсиясини ҳисоблаш мумкин бўлмаган ҳолларда жараёнлар эволюциясининг асимптотик хоссаларини тадқиқ этишда фойдаланилган.

Q-жараёнлар авлодлари заррачалари умумий сонининг хоссаларига оид исботланган тасдиқлар узоқ келажаккача давом этувчи популяцион жараёнларда индивидуумларнинг эволюцион қонуниятлари ва барча иштирокчилар сони ҳақида хулосалар олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги тармоқланувчи жараёнлар учун олинган тасдиқларнинг исботлари қатъий математик мулоҳазалар кетма-кетлиги, маълум назарий-эҳтимолий ва аналитик усуллар, узлуксизлик теоремаларининг қўлланилиши, регуляр ўзгарувчи функциялар назарияси, ҳамда асимптотик анализнинг тадбиқлари билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалардан заррачалар ва индивидуумлар эволюциясини моделлаштирувчи жараёнларни ўрганишда фойдаланиш мумкин. Хусусан, регуляр ўзгарувчи ҳосил қилувчи функцияларнинг асимптотик ёйилмалари чексиз дисперсияли тармоқланувчи жараёнларнинг инвариант ўлчовларини ўрганиш имконини беради.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг популяцион жараёнларда иштирок этувчи индувидуумлар эволюцияси ҳақида статистик хулосалар олиш ва олинган сонли ҳисоблаш натижалари хатоликларини баҳолашда тадбиқ этилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Тармоқланувчи тасодифий жараёнларнинг асимптотик хоссаларига оид олинган натижалар қуйидаги илмий лойиҳаларда амалиётга жорий этилган:

оддий ва иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёнлари учун исботланган теоремалар 337/07, 06-223-3-104 рақамли «Тақсимот зичлиги ва регрессия функциясини нопараметрик баҳолаш, стохастик анализ ва молиявий математикадаги тадбиқлар» хорижий илмий грантда молиявий математика масалаларига стохастик анализ усулларини тадбиқ этишда қўлланилган (Грузия Статистика Ассоциациясининг 2018 йил 26 июндаги 7/6-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши тасодифий жараёнлар учун лимит эҳтимолликларни топиш имконини берган;

тармоқланувчи марков жараёнларининг локал эҳтимолликлари учун олинган асимптотик формулалар FR/308/5-104/12 рақамли «Статистик баҳолаш ва стохастик анализнинг баъзи муаммолари» мавзусидаги хорижий грантда стохастик анализ усулларини статистик баҳолаш масалаларига тадбиқ этишда қўлланилган (Грузия Статистика Ассоциациясининг 2018 йил 26 июндаги 8/6-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши тасодифий жараёнлар учун лимит теоремалар исботлаш имконини берган;

тармоқланувчи марков жараёнлари ва иммиграцияли жараёнлар учун олинган асимптотик формулалар №1.511.2014/К рақамли «Информацион оқимлар, компьютер тармоқлари, маълумотларни узатиш ва қайта ишлаш алгоритмларининг математик моделларини тадқиқ этиш» илмий-тадқиқот лойиҳасида давлат топшириқлари қисми доирасида қўлланилган. (Тадбиқий математика ва компьютер фанлари институти (Россия) нинг 2018 йил 1 октябрдаги 253-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши симсиз алоқа тармоқларининг характеристикаларини таҳлил этишда тадбиқ этилган ҳамда тармоқлар самарадарлигини ошириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 31 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 17 та халқаро ва 14 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 53 та илмий иш чоп этилган, жумладан, 18 та илмий мақола, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссияси томонидан докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 16 та мақола, жумладан, 11 та мақола хорижий ва 5 та мақола республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 200 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Бундан кейин бутун матн давомида $\mathsf{P}_i\{*\}$ орқали бошланғич ҳолати i та заррачадан иборат бўлган жараённинг тақсимот қонунини белгилаймиз.

Диссертациянинг "**Гальтон-Ватсон тармоқланувчи тасодифий жараёнлари**" деб номланган биринчи бобида тармоқланувчи Гальтон-Ватсон (Г-В) жараёнлари қаралган. Биринчи параграфда Г-В жараёнлари таърифи келтирилган ва қисқача шарҳ баён этилган. Ушбу Z_n миқдор орқали $Z_0 = 1$ ҳолатдан бошланган Г-В жараёнида $n \in \mathbb{N}_0$ вақтдаги заррачаларнинг сонини белгилаймиз, бу ерда $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ ва $\mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$. Жараённинг $i \in \mathbb{N}$ ҳолатдан $j \in \mathbb{N}$ ҳолатга $n \in \mathbb{N}$ қадамда ўтиш эҳтимоллигини эса ушбу $P_{ij}(n) := \mathsf{P}_i\{Z_n = j\}$ орқали белгилаймиз. Г-В жараёни қуйидаги эҳтимолий ҳосил қилувчи функция (ҲФ) билан тўла аниқланади:

$$F(s) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} p_k s^k, \quad s \in [0,1),$$

бу ерда $p_k = P_{1k}(1)$ ва $\sum_{k\in\mathbb{N}_0} p_k = 1$. Агар $\sum_{k\in\mathbb{N}} kp_k$ қатор яқинлашса, ушбу $A := \sum_{k\in\mathbb{N}} kp_k = \mathsf{E}Z_1$ сон битта заррача авлодлари сонининг ўртача қийматини билдиради. Тармоқланувчи жараёнларнинг классификациясига мувофиқ қаралаётган Г-В жараёни $\{Z_n\}$ субкритик, критик ва суперкритик жараён деб аталади, агарда мос равишда $A < 1$, $A = 1$ ва $A > 1$ бўлса.

Қаралаётган $\{Z_n\}$ жараённинг емирилиш эҳтимоллиги q ва $\beta := F'(q)$ бўлсин. §1.2 да нокритик жараён учун қуйидаги лимит теорема олинган.

Теорема 1. *Агар $A > 1$ ёки $A < 1$ ва $B < \infty$ бўлса, $p_1 \neq 0$ бўлганда*

$$\beta^{-n} P_{ij}(n) = \frac{\mathcal{A}(0)}{\sum_{m\in\mathbb{N}} \mu_m q^m} i q^{i-1} \mu_j \left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

бунда $i, j \in \mathbb{N}$ ва $\mu_j = \lim_{n\to\infty} P_{1j}(n) \big/ P_{11}(n) < \infty$ ҳамда

$$\mathcal{A}(s) = \left(\frac{1}{q-s} + \frac{\delta}{2}\right)^{-1}$$

бўлиб, $\delta = \delta(s) = 2\lim_{n\to\infty}\left[R_n^{-1}(s)\beta^n - (q-s)^{-1}\right]$.

Ушбу $\widetilde{P}_{ij}(n) := \mathsf{P}_i\{Z_n = j \,|\, n < \mathcal{H} < \infty\}$ ўтиш эҳтимолликлари ёрдамида $\{\widetilde{Z}_n, n \in \mathbb{N}\}$ тасодифий жараённи аниқлайлик, бу ерда $\mathcal{H} := \min\{n : Z_n = 0\}$ тасодифий миқдор $\{Z_n\}$ жараённинг емирилиш моментидир. Мазкур параграфда ушбу $\{\widetilde{Z}_n\}$ жараён эргодик Марков занжири бўлиши кўрсатилган. Қуйидаги ҲФни киритамиз:

$$\mathcal{V}_n^{(i)}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{P}_{ij}(n) s^j.$$

Маълумки, нокритик ҳолда ушбу $\nu_j := \lim_{n\to\infty} \widetilde{P}_{ij}(n)$ лимит мавжуд ва унга мос ҲФ $\mathcal{V}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j s^j$ барча $s \in [0,1)$ қийматларда ушбу

$$1 - \mathcal{V}\left(\frac{F(qs)}{q}\right) = \beta \cdot \left[1 - \mathcal{V}(s)\right] \tag{1}$$

Шредер тенгламасини қаноатлантиради ва $\sum_{j\in\mathbb{N}} \nu_j = 1$. Маълумки, (1) тенгламани қаноатлантирувчи $\mathcal{V}(s)$ функция $\widetilde{P}_{ij}(n)$ ўтиш эҳтимолликларига нисбатан инвариант ўлчов яратади. §1.2 да $\mathcal{V}(s)$ ҲФнинг аниқ кўринишлари топилган. Хусусан, $F''(s \uparrow 1) < \infty$ шартда нокритик ҳол учун

$$\mathcal{V}(s) = 1 - \frac{\mathcal{A}(qs)}{\mathcal{A}(0)}$$

бўлиши кўрсатилган, бунда $\mathcal{A}(s)$ функция Теорема 1 да берилган. Бундан ташқари $P_{ij}(n)$ ва $\widetilde{P}_{ij}(n)$ ўтиш эҳтимолликлари қуйидаги тенгликни қаноатлантириши кўрсатилган:

$$P_{ij}(n) = \widetilde{P}_{ij}(n) \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{ik}(n) q^{k-j} .$$

§1.3 да Г-В жараёни иккинчи тартибли $F''(s \uparrow 1)$ моментнинг чекли бўлиш шартидан фойдаланмасдан, Карамата маъносидаги секин ўзгарувчи функция (С-функция) лар назарияси ёрдамида ўрганилган. Тармоқланувчи жараёнларни ўрганишда С-функциялар назарияси илк бор В.Золотарёв томонидан қўлланилган. С-функцияларнинг тадбиқлари бўйича дастлабки эълон қилинган ишлар рўйхатига Р.Слэйк ва Е.Сенетанинг XX аср 70-йилларида эълон қилган ишларини киритиш мумкин. С-функцияларнинг тадбиқлари бўйича батафсил маълумотлар С.Асмусен ва Г.Геринг, шунингдек Н.Бингҳам, К.Голди ва Дж.Тёгелсларнинг монографияларида келтирилган. Бундан кейинги матн давомида нол ва чексизликда С-хоссали функциялар синфини мос равишда $\mathcal{S}_0$ ва $\mathcal{S}_\infty$ символлар орқали белгилаймиз.

Нокритик ҳолда маълумки, қуйидаги муносабат ўринли:

$$1 - \mathcal{V}(x) = (1 - x)\boldsymbol{\ell}_\vartheta(1 - x), \tag{2}$$

бунда $\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x) \in \mathcal{S}_0$ ҳамда ушбу

$$\mathsf{E}\left[Z_1 \ln Z_1\right] = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j j \ln j < \infty \qquad [\mathcal{A}]$$

шартнинг бажарилиши $m := \mathcal{V}'(s \uparrow 1)$ чекли моментнинг мавжуд бўлиши учун зарур ва етарли бўлади.

Барча $s \in [0,1)$ қийматлар учун ушбу $F_n(s) = \mathsf{E}s^{Z_n}$ ҲФни қараймиз ва $R_n(s) := 1 - \widehat{F_n}(s)$ белгилашни киритиб олайлик, бунда $\widehat{F_n}(s) = F_n(qs)/q$. Қуйида келтириладиган леммада нокритик Г-В жараёни учун $R_n(s)$ функциянинг асимптотик ёйилмаси топилган.

Лемма 1. *Агар $A \neq 1$ бўлса, у ҳолда*

$$R_n(s) = (1 - s)L_n(1 - s) \cdot \beta^n ,$$

бунда ихтиёрий $n \in \mathbb{N}$ учун $L_n(x \downarrow 0) = 1$ ва ҳар қандай тайинланган $n_0 \in \mathbb{N}$ учун $L_{n_0}(x) =: L(x) \in \mathcal{S}_0$. Агар $[\mathcal{A}]$ шарт бажарилса, $L_n(1) \downarrow 1/m$, $n \to \infty$.

Лемма 1 нокритик Г-В жараёнининг асимптотик хоссаларини ўрганишда муҳим роль ўйнайди. Хусусан, $\mathcal{V}(0) = 0$ ва $q - F_n(qs) = qR_n(s)$ эканлигидан $s = 0$ бўлганда қуйидаги формула келиб чиқади:

$$\mathsf{P}\{n < \mathcal{H} < \infty\} = q \cdot \boldsymbol{\ell}_a(\beta^n) \cdot \beta^n ,$$

бунда $\boldsymbol{\ell}_a(s) \in \mathcal{S}_0$ ва агар $[\mathcal{A}]$ шарт бажарилса, $L_n(1) \downarrow 1/m$, $n \to \infty$

Қуйидаги локал лимит теорема исботланган.

Теорема 2. *Агар* $A \neq 1$ *ва* $p_1 \neq 0$ *бўлса, у ҳолда барча* $i, j \in \mathbb{N}$ *учун*

$$\beta^{-n} \cdot P_{ij}(n) = iq^{i-1}\mu_j \mathcal{V}'(0) \cdot \boldsymbol{\ell}_a(\beta^n) + \mathcal{O}(\beta^n), \quad n \to \infty,$$

бунда $\boldsymbol{\ell}_a(s) \in \mathcal{S}_0$. *Агар* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса,* $\boldsymbol{\ell}_a(\beta^n) \to 1/m$, $n \to \infty$.

Критик ҳолда $F(s)$ ҲФ барча $s \in [0,1)$ қийматлар учун ушбу

$$F(s) = s + (1-s)^{1+\nu} \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [\Re_\nu]$$

кўринишга эга бўлсин деб ҳисоблаймиз, бунда $0 < \nu \leq 1$ ва $\boldsymbol{\mathcal{L}}(t) \in \mathcal{S}_\infty$. Бу кўриниш $F''(s \uparrow 1) = \infty$ бўлганда Г-В жараёнининг асимптотик хоссаларини ўрганиш имконини беради. Мазкур ҳол учун критик Г-В жараёнининг қуйидаги Асосий леммаси исботланган.

Лемма 2. *Агар* $A = 1$ *ва* $[\Re_\nu]$ *шарт бажарилса, у ҳолда*

$$R_n(s) = \frac{\mathcal{N}(n + \mathcal{M}(s))}{(\nu n)^{1/\nu}} \cdot \left[1 - \frac{M_n(s)}{\nu n}\right],$$

бунда $\mathcal{N}(n) \in \mathcal{S}_\infty$ *функция қуйидаги шартни каноатлантиради:*

$$\mathcal{N}^{\nu}(x) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{(\nu x)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(x)}\right) \longrightarrow 1, \quad x \to \infty. \qquad [\mathcal{N}]$$

Бу ерда барча $s \in [0,1)$ *учун текис ҳолда* $M_n(s) \to \boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *бўлиб, бунда* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *функция* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(F(0)) = 1$ *шартда* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(F(s)) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(s) + 1$ *Абель тенгламасини қаноатлантиради. Бу функция учун қуйидаги муносабат ўринли:*

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \frac{1 + o(1)}{\nu(1-s)^{\nu} \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(1/(1-s)\right)}, \quad s \uparrow 1.$$

Ихтиёрий тайинланган $n \in \mathbb{N}$ *қийматда* $M_n(0) = 0$ *ва* $M_n(s \uparrow 1) = \nu n$.

Юқоридаги лемма критик тармоқланувчи Г-В жараёнининг асимптотик хоссаларини ўрганишда муҳим роль ўйнайди. Хусусан, бу лемма қуйидаги лимит теоремани исботлаш имконини берган.

Теорема 3. *Агар Лемма 2 нинг шартлари бажарилса, у ҳолда*

$$\nu n \cdot \mathcal{V}_n^{(i)}(s) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(s)(1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

бунда $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *функция* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \boldsymbol{m}_j s^j$ *ёйилмага эга бўлиб,* $\{\boldsymbol{m}_j\}$ *сонлар Г-В жараёни учун инвариант ўлчов ташкил этади ва* $\sum_{j \in \mathbb{N}} \boldsymbol{m}_j = \infty$.

Қўшимча шартлар $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)$ функцияга қўйилганда Лемма 2 нинг тасдиғини аниқлаштирувчи натижа олинган. Бунинг учун $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)$ функцияга қуйидаги талаблар қўйилган. Шартга кўра $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x) \in \mathcal{S}_\infty$, ва С-функция таърифига кўра, ихтиёрий $\lambda > 0$ учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$\frac{\boldsymbol{\mathcal{L}}(\lambda x)}{\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)} = 1 + \alpha(x), \qquad [\boldsymbol{\mathcal{L}}_\alpha]$$

бунда $x \to \infty$ бўлганда $\alpha(x) = \mathcal{O}\left(1/\varphi(x)\right)$ ва $\varphi(x)$ ўсувчи мусбат функция бўлиб, $\varphi(x) \to \infty$ ҳамда бирор $\gamma > 0$ ва $X > 0$ сонлар учун $x^{-\gamma}\varphi(x)$ функция $x > X$ қийматларда кенг маънода камаювчи. Юқоридаги $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\alpha}]$ шарт бажарилганда $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)$ функция $\alpha(x)$ қолдиқ ҳадли С-функция деб аталади.

Белгилаш киритамиз:

$$\Lambda(y) := y^{\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{F(1-y)-(1-y)}{y}, \quad y \in (0,1].$$

Лемма 3. *Агар* $[\Re_{\nu}]$ *шарт ва* $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\alpha}]$ *шарт* $\alpha(x) = o\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)/x^{\nu}\right)$ *қолдиқ ҳад билан бажарилса, у ҳолда қуйидаги асимптотик ёйилма ўринли бўлади:*

$$\Lambda\left(R_n(s)\right) = \frac{\Lambda(1-s)}{\Lambda(1-s)\nu n + 1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right), \quad n \to \infty.$$

Охирги тасдиқ $F'''(s \uparrow 1)$ моментнинг чекли бўлиш шарти остида исботи маълум бўлган критик тармоқланувчи Г-В жараёнлари назариясининг қолдиқ ҳади баҳоланган Асосий леммаси тасдиғининг аналогидир.

Лемма 3 ёрдамида қуйидаги локал лимит теорема исботланган.

Теорема 4. *Агар* $A = 1$ *ва* $p_1 \neq 0$ *шартлар билан бирга Лемма 3 нинг барча шартлари бажарилса, қуйидаги асимптотик ёйилма ўринли бўлади:*

$$n^{1+1/\nu} \cdot P_{11}(n) = \frac{\mathcal{N}(n)}{p_0}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

бунда $\mathcal{N}(x) \in \mathcal{S}_{\infty}$ *функция* $[\mathcal{N}]$ *шартни қаноатлантиради.*

§1.4 да тармоқланувчи жараёнлар назариясининг лимит теоремаларини исботлашда Стейн-Тихомиров усулининг қўлланилиш имкониятлари намойиш этилган. Хусусан, бу усул билан қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 5. *Агар* $A \neq 1$ *бўлса, ушбу* $\mathcal{V}(s) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}_n^{(i)}(s)$ *ҲФ барча* $s \in [0,1)$ *учун мавжуд ҳамда* $\mathcal{V}(0) = 0$ *ва* $\mathcal{V}(1) = 1$. *Бундан ташқари*

$$\frac{1 - \mathcal{V}_n^{(i)}(s)}{1-s} \longrightarrow \boldsymbol{\ell}(1-s), \quad n \to \infty,$$

бунда $\boldsymbol{\ell}(x) \in \mathcal{S}_0$. *Агар* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса,* $\boldsymbol{\ell}(x \downarrow 0) = m$ *ва* $\boldsymbol{\ell}(1) = 1$.

Биринчи бобнинг охирги икки параграфи иммиграцияли Г-В (ИГВ) жараёни ўтиш эҳтимолликларининг лимит хоссаларини ўрганишга бағишланган. ИГВ жараёни иккита эҳтимолий ҲФ билан аниқланади. Агар ҲФ $F(s)$ заррачалар эволюцияси қонунини аниқласа, иммигрант-заррачалар оқимини $G(s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} h_j s^j$ ҲФ тавсифлайди. Авлодлар сони кетма-кетлиги $\{X_n\}$ ҳолатлар фазоси $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0$ бўлган бир жинсли Марков занжирини ташкил этади. Унинг ўтиш эҳтимоллигини $p_{ij}^{(n)} := \mathsf{P}_i\{X_n = j\}$ ва мос ҲФни $\mathcal{P}_n^{(i)}(s) := \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}^{(n)} s^j$ деб белгилаймиз. ИГВ жараёни субкритик, критик ва суперкритик дейилади, агарда мос равишда $A < 1$, $A = 1$ ва $A > 1$ бўлса.

§1.5 да $\upsilon_j := \lim_{n\to\infty} p_{0j}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)}$ сонлар барча $j \in \mathcal{S}$ учун мавжуд бўлиши ва ИГВ жараёни учун инвариант ўлчов ташкил этиши кўрсатилган.

Нокритик ҳол учун қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 6. *Агар $A \neq 1$ бўлса, у ҳолда барча $i, j \in \mathcal{S}$ учун*

$$\sigma^{-n} p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \frac{q^i \upsilon_j}{\sum_{k\in\mathcal{S}} \upsilon_k q^k}, \quad n \to \infty,$$

бунда $\sigma := G(q)$.

Критик ҳолда $\left[\Re_\nu\right]$ шарт $0 < \nu < 1$ қийматларда бажарилиши билан бирга заррачалар иммиграцияси оқимини характерловчи $G(s)$ ҲФ барча $s \in [0,1)$ қийматларда ушбу

$$1 - G(s) = (1-s)^\delta \boldsymbol{\ell}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad \left[G_\delta\right]$$

кўринишга эга бўлган ҳол қаралган, бунда $0 < \delta < 1$ ва $\boldsymbol{\ell}(x) \in \mathcal{S}_\infty$.

Теорема 7. *Агар $\left[\Re_\nu\right]$ ва $\left[G_\delta\right]$ шартлар бажарилиб, $\delta > \nu$ бўлса, у ҳолда $\left\{X_n\right\}$ занжир эргодик ва қуйидаги ёйилма ўринли бўлади:*

$$\mathcal{P}_n^{(0)}(s) \sim K(s) \exp\left\{\int_s^{F_n(s)} \frac{1 - G(y)}{F(y) - y} dy\right\}, \quad n \to \infty,$$

бунда $K(s)$ – чегараланган функция.

Диссертациянинг иккинчи боби “**Дискрет вақтли узоқ келажакда давом этувчи тармоқланувчи жараёнлар**” деб номланиб, унда ушбу

$$\left[\mathcal{Q}_{ij}(n)\right] := \left[\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_i\left\{Z_n = j \middle| n + k < \mathcal{H} < \infty\right\}\right] = \left[\mathsf{P}_i\left\{Z_n = j \middle| \mathcal{H} = \infty\right\}\right]$$

эҳтимоллик ўлчови билан берилган W_n тасодифий жараённинг таркибий ва асимптотик хоссалари ўрганилган. Бу жараён бошланғич ҳолати $W_0 \stackrel{d}{=} Z_0$ ва ҳолатлар фазоси $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$ бўлган Марков занжири сифатида Q-жараён номи билан маълум. Жараённинг n-вақтдаги ҳолатини W_n миқдор ифодалайди ва барча $i, j \in \mathcal{E}$ лар учун ўтиш эҳтимолликлари

$$\mathcal{Q}_{ij}(n) = \mathsf{P}_i\left\{W_n = j\right\} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^n} P_{ij}(n),$$

бунда $\beta := F'(q)$ ва $P_{ij}(n) = \mathsf{P}_i\{Z_n = j\}$ – Г-В жараёни ўтиш эҳтимолликлари.

§2.1 да ушбу $Y_n^{(i)}(s) := \sum_{j\in\mathcal{E}} \mathcal{Q}_{ij}(n) s^j$ ҲФнинг кўриниши топилган. §2.2да $\left\{W_n\right\}$ занжирнинг ҳолатлари классификацияси β таркибий параметрнинг қийматига боғлиқ эканлиги кўрсатилган. Марков занжири $\left\{W_n\right\}$ мусбат қайтувчи бўлади, агарда $\beta < 1$ бўлса, қайтмас бўлади, агарда $\beta = 1$ бўлса.

§2.3 да Q-жараёнда n-вақтгача барча авлодлар заррачаларининг умумий йиғиндиси бўлган $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$ миқдор қаралган. Ушбу $Y(s) := Y_1^{(1)}(s)$ ва

$\alpha := Y'(s \uparrow 1) < \infty$ белгилашларни киритамиз. Дастлаб $\beta < 1$ шартда W_n и S_n миқдорларнинг ўзаро “асимптотик боғлиқсиз” эканлиги кўрсатилган.

Қуйидаги иккита теоремада §2.3 нинг асосий натижалари келтирилган.

Теорема 8. *Агар* $\beta = 1$ *ва* $\alpha < \infty$ *бўлса, ушбу*

$$\left(\frac{W_n}{\mathsf{E}\, W_n}; \frac{S_n}{\mathsf{E} S_n}\right)$$

икки ўлчовли жараён $(\mathbf{w}; \mathbf{s})$ *тасодифий миқдорга суст яқинлашади ва*

$$\mathsf{E}\left[e^{-\lambda \mathbf{w} - \theta \mathbf{s}}\right] = \left[\operatorname{ch}\sqrt{\theta} + \frac{\lambda}{2}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\right]^{-2}, \quad \lambda, \theta \in \mathbb{R}_+,$$

бунда $\operatorname{ch} x = \left(e^x + e^{-x}\right)\big/2$ *ва* $\operatorname{sh} x = \left(e^x - e^{-x}\right)\big/2$.

Юқоридаги теорема илгари маълум бўлган натижаларни шу маънода умумлаштирадики, эслатилган натижалар бир ўлчовли нормалланган ушбу $W_n\big/\mathsf{E}\, W_n$ ва $S_n\big/\mathsf{E} S_n$ миқдорлар учун алоҳида ҳолларда исботланган.

Теорема 9. *Агар* $\beta < 1$ *ва* $\alpha < \infty$ *бўлса, у ҳолда* $n \to \infty$ *бўлганда*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n - \mathsf{E} S_n}{\sqrt{2\Psi n}} < x\right\} \longrightarrow \Phi(x),$$

бунда $\Psi = \gamma(2 + \beta\gamma)\big/2(1-\beta)$, $\gamma = (\alpha - 1)\big/(1-\beta)$ *ва* $\Phi(x)$ *– стандарт нормал қонун тақсимот функцияси.*

Охирги §2.4 да $\{W_n\}$ жараён $\alpha := Y'(s \uparrow 1) = \infty$ бўлган ҳолда ўрганилган. Бунда $\beta < 1$ ҳол учун қуйидаги шарт қабул қилинган:

$$\mathsf{E}\left[\ln W_1\right] < \infty. \qquad [\mathcal{L}]$$

Теорема 10. *Агар* $\beta < 1$ *ва* $[\mathcal{L}]$ *шарт бажарилса, барча* $s \in [0,1)$ *қийматлар учун* $\pi(s) := \lim_{n\to\infty} Y_n^{(i)}(s)$ *лимит мавжуд ва унинг кўриниши*

$$\pi(s) = \frac{1}{m} s\mathcal{V}'(s),$$

бунда $\mathcal{V}(s)$ *функция (2) тенглик билан аниқланган ва* $m = \mathcal{V}'(s \uparrow 1)$. *ҲФ* $\pi(s)$ *Q-жараён учун* $\left\{\pi_j, j \in \mathcal{E}\right\}$ *инвариант тақсимот яратади.*

Q-жараён учун $\beta = 1$ бўлганда, мос Г-В жараёни критик бўлади ва $\alpha = \infty$ бўлиши учун $\left[\Re_\nu\right]$ шартнинг бажарилиши етарли бўлади.

Лемма 4. *Агар* $\beta = 1$ *ва* $\left[\Re_\nu\right]$ *шарт бажарилса, барча* $s \in [0,1)$ *учун*

$$Y_n(s) = s\left(\frac{R_n(s)}{1-s}\right)^{1+\nu} \frac{\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(1/q_n\right)}{\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(1/(1-s)\right)}, \quad n \to \infty,$$

бунда $q_n = R_n(0)$.

Лемма 3 ва Лемма 4 ёрдамида қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 11. *Агар* $\beta = 1$ *ва* $\left[\Re_\nu\right]$ *шарт бажарилса, барча* $i \in \mathcal{E}$ *учун*

$$\frac{(\nu n)^{1+1/\nu}}{\mathcal{N}(n)} Y_n^{(i)}(s) = \mu(s)\big(1+\rho_n(s)\big), \quad n \to \infty,$$

бунда $\rho_n(s) \to 0$ *ва* $\mathcal{N}(x)$ *функция* $[\mathcal{N}]$ *шарт билан берилган.* $\mu(s)$ *функция* $\sum_{j\in\mathcal{E}} \mu_j s^j$ *даражали қаторга ёйилади ва* $\{\mu_j\}$ *коэффициентлар учун ушбу* $\mu_j = \sum_{i\in\mathcal{E}} \mu_i \mathcal{Q}_{ij}(1)$ *хосса ўринли бўлади. Бундан ташқари*

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \sim \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} n^{1+\nu} \boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(n), \quad n \to \infty,$$

бунда $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(n) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}(n) \to 1$ *ва* $\Gamma(*)$ – *Эйлернинг Гамма функцияси.*

Теорема 12. *Агар* $\beta = 1$ *бўлса, у ҳолда барча* $i \in \mathcal{E}$ *учун ушбу*

$$\mathsf{P}_i\left\{\frac{\mathcal{N}(n)}{(\nu n)^{1/\nu}} W_n < x\right\}$$

тақсимот шундай $G(x)$ *тақсимот қонунига суст яқинлашадики, бунда*

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\theta x} dG(x) = \frac{1}{\left(1+\theta^\nu\right)^{1+1/\nu}}.$$

Қуйидаги теоремада С-функция $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)$ га қўшимча шартлар қўйилганда Теорема 11 тасдиғидаги $\rho_n(s)$ қолдиқ ҳаднинг тартиби баҳоланган.

Теорема 13. *Агар* $\beta = 1$ *ва* $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_\alpha]$ *шарт* $\alpha(x) = o\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)/x^\nu\right)$ *қолдиқ ҳад билан бажарилса, Теорема 11 даги асимптотик формуланинг қолдиқ ҳади барча* $s \in [0,1)$ *учун қуйидаги текис баҳога эга бўлади:*

$$\rho_n(s) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Ишнинг учинчи боби “**Узлуксиз вақтли тармоқланувчи Марков тасодифий жараёнларининг асимптотик тадқиқотлари**” деб номланган ва у Марков тармоқланувчи жараёнларини (МТЖ) асимптотик тадқиқ этишга бағишланган. МТЖда $t \in \mathcal{T} = [0,+\infty)$ вақтга келиб заррачалар сонини $Z(t)$ орқали белгилаймиз. Маълумки, қаралаётган жараённинг ўтиш эҳтимолликлари $P_{ij}(t) = \mathsf{P}_i\{Z(t) = j\}$ Колмогоров-Чэпмен тенгламасини қаноатлантиради. Бу эҳтимолликлар, тармоқланиш шартига кўра, $P_{1j}(t)$ эҳтимолликларнинг i-тартибли ўрамаси(свертка)га тенг. Шунга кўра МТЖ эволюциясини ўрганиш учун $P_{1j}(t)$ ўтиш эҳтимоллигини аниқлаш етарли бўлади. Бу эҳтимолликлар қуйидаги формула билан берилади:

$$P_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \downarrow 0, \tag{3}$$

бунда δ_{ij} – Кронекер дельтаси, $\{a_j\}$ миқдорлар эса заррачалар эволюцияси интенсивлигини ифодаловчи сонлар бўлиб, улар учун

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}_0\setminus\{1\}} a_j < \infty$$

муносабатлар ўринли. Юқоридаги (3) муносабатдан келиб чиқадики, $j \neq 1$ учун $a_j = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P_{1j}(\varepsilon)\big/\varepsilon = P'_{1j}(0)$ ҳамда ушбу

$$F(t;s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} P_{1j}(t)s^j \qquad \text{ва} \qquad f(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j s^j$$

ҲФлар учун $s \in [0,1)$ қийматларда қуйидаги формула ўринли:

$$F(\tau;s) = s + f(s)\cdot\tau + o(\tau), \quad \tau \downarrow 0 .$$

Ҳар доим $a := f'(s\uparrow 1) < \infty$ бўлсин. Тармоқланувчи жараёнларнинг классификациясига мувофиқ $Z(t)$ жараён субкритик, критик ва суперкритик дейилади, агарда мос равишда $a < 0$, $a = 0$ ва $a > 0$ бўлса. Ушбу

$$q = \inf\left\{s \in (0,1] : f(s) = 0\right\}$$

сон орқали $Z(0)=1$ ҳолатдан бошланган МТЖ емирилиш эҳтимоллигини белгилаймиз ва $\beta := \exp\left\{f'(q)\right\}$ миқдорни киритамиз. Мулоҳазалар шуни кўрсатадики, нокритик ҳолда $Z(t)$ жараённинг асимптотик хоссалари ушбу

$$\mathcal{A}(s) = (q-s)\exp\left\{\int_s^q \left[\frac{1}{u-q} - \frac{f'(q)}{f(u)}\right]du\right\} \tag{4}$$

функциянинг хоссаларига боғлиқ бўлади. МТЖнинг емирилиш моменти $\mathcal{H} := \inf\left\{t \in \mathcal{T} : Z(t) = 0\right\}$ бўлсин. §3.2да ушбу

$$\mathsf{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} \sim \mathcal{A}(0)\cdot\beta^t, \quad t\to\infty$$

асимптотик формуланинг бажарилиши учун

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j j \ln j < \infty \tag*{$[\mathcal{A}]$}$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлиги исботланган.

§3.3 да нокритик МТЖ $P_{ij}(t)$ ўтиш эҳтимолликларининг асимптотик кўриниши ва ушбу жараён инвариант ўлчовларининг ҲФлари $\mathcal{A}(s)$ функция орқали ифодаланиши кўрсатилган. Хусусан, барча $i\in\mathbb{N}$ учун

$$\mathcal{M}_i(t;s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{P_{ij}(t)}{P_{11}(t)} s^j \longrightarrow iq^{i-1}\cdot\mathcal{M}(s), \quad t\to\infty ,$$

бунда $\mathcal{M}(s)$ функция ушбу $\mathcal{M}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j s^j$ даражали қаторга ёйилади ҳамда унинг $\left\{\mu_j\right\}$ номанфий коэффициентлари $Z(t)$ жараён учун инвариант тақсимот ташкил этади. Қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 14. *Агар $a \neq 0$ ва $[\mathcal{A}]$ шарт бажарилса, у ҳолда*

$$\mathcal{M}(s) = \frac{a_0}{|\ln\beta|}\cdot\left[1 - \frac{\mathcal{A}(s)}{\mathcal{A}(0)}\right],$$

бунда $\mathcal{A}(s)$ функция (4) тенглик билан берилган.

Теорема 15. *Агар $a = 0$ ва $f''(s\uparrow 1) =: 2b < \infty$ бўлса, у ҳолда*

$$\mathcal{M}(t;s) = \frac{a_0}{b}\cdot\frac{s}{1-s} + \alpha(t;s),$$

бунда $\alpha(t;s) = \mathcal{O}\left(1/t\right)$, $t \to \infty$, *текис ҳолда барча* $0 \le s \le r < 1$ *учун.*

Қуйидаги теорема нокритик МТЖ $P_{ij}(t)$ ўтиш эҳтимолликларининг $t \to \infty$ бўлганда $\mathcal{O}\left(\beta^t\right)$ тартибда нолга яқинлашиб боришини кўрсатади ва бу эҳтимолликларнинг асимптотик ёйилмасини аниқлаб беради.

Теорема 16. *Агар* $a \neq 0$ *ва* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса, барча* $i, j \in \mathbb{N}$ *учун*

$$\beta^{-t} P_{ij}(t) = \frac{\mathcal{A}(0)}{\mathcal{M}(q)} i q^{i-1} \mu_j \left(1 + o(1)\right), \quad t \to \infty,$$

бунда $\mathcal{A}(s)$ *функция (4) тенглик билан берилган.*

Параграф давомида шунингдек, $Z(t)$ жараённинг хоссалари узлуксиз вақтли Марков занжирлари ҳолатларининг умумий классификацияси нуқтаи назаридан таҳлил килинган. Ушбу $\mathsf{S} := \left\{ j \in \mathbb{N} : P_{1j}(t) > 0,\, t \in \mathcal{T} \right\}$ тўпламни киритайлик. Маълумки, узлуксиз вақтли Марков занжирининг ўтиш эҳтимолликлари экспоненциал равишда нолга камайиб борса, ихиёрий $i \in \mathsf{S}$ ҳолатга боғлиқ бўлмаган ушбу

$$\lambda_{\mathsf{S}} = -\lim_{t \to \infty} \frac{\ln P_{ii}(t)}{t}$$

миқдор бу занжир ҳолатларининг "парчаланиш даражаси"ни тавсифлайди ва парчаланиш параметри деб аталади. Бу ҳолда қаралаётган занжирнинг инвариант ўлчови λ_{S}-инвариант ўлчов деб аталади. Занжирнинг ҳолатлари

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda_{\mathsf{S}} t} P_{ii}(t) dt$$

хосмас интегралнинг қиймати бўйича синфларга ажратилади. Агар бу интеграл қиймати ∞ бўлса, ўтиш эҳтимолликлари $P_{ij}(t)$ бўлган Марков занжири λ_{S}-қайтувчи деб аталади. Интегралнинг қиймати чекли бўлса, занжир λ_{S}-қайтмас деб аталади. Қайтувчи ҳолатлар классификациясига мувофиқ, агарда $\lim_{t \to \infty} e^{\lambda_{\mathsf{S}} t} P_{ii}(t) > 0$ бўлса, $i \in \mathsf{S}$ ҳолат λ_{S}-мусбат қайтувчи дейилади, акс ҳолда λ_{S}-ноль қайтувчи деб аталади.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 17. *Агар* $a \neq 0$ *ва* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса, у ҳолда*

$$\lambda_{\mathsf{S}} = \left|\ln \beta\right|$$

ва $Z(t)$ *жараён ҳолатлари* λ_{S}*-мусбат. ҲФ* $\mathcal{M}(s)$ *яратган сонлар* $\left\{\mu_j\right\}$ *ягона (ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида)* λ_{S}*-инвариант ўлчов ташкил этади.*

Энди ушбу

$$\widetilde{P}_{ij}(t) := \mathsf{P}_i \left\{ Z(t) = j \middle| t < \mathcal{H} < \infty \right\}$$

ўтиш эҳтимолликларини ва уларга мос ҲФ ни киритайлик:

$$\mathcal{V}_i(t;s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{P}_{ij}(t) s^j .$$

Қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 18. *Агар* $a \neq 0$ *бўлса, у ҳолда* $i \in \mathbb{N}$ *ҳолатга боғлиқсиз ушбу*

$$\lim_{t\to\infty}\widetilde{P}_{ij}(t)=\nu_j,\quad j\in\mathbb{N},$$

лимит мавжуд ва ҲФ $\mathcal{V}(s)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\nu_j s^j$ *барча* $s\in[0,1)$ *учун ушбу*

$$\mathcal{V}(s)=\frac{\mathcal{M}(qs)}{\mathcal{M}(q)}$$

кўринишга эга бўлади, бунда $\mathcal{M}(s)$ *функция Теорема 14 да аниқланган.*

Теорема 19. *Агар* $a=0$ *ва* $2b:=f''(s\uparrow 1)<\infty$ *бўлса, барча* $i\in\mathbb{N}$ *учун*

$$t\mathcal{V}_i(t;s)=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-s}+\rho(t;s),\quad t\to\infty,$$

бунда $t\to\infty$ *бўлганда барча* $s\in[0,1)$ *учун текис ҳолда* $\rho(t;s)=\mathcal{O}\left(1/t\right)$.

Юқорида келтирилган иккита теорема $\widetilde{P}_{ij}(t)$ эҳтимоллик ўлчови билан аниқланган $\widetilde{Z}(t)$ тасодифий жараён эргодик Марков занжири ташкил этишини кўрсатади.

§3.3 да узлуксиз вақтли иммиграцияли Марков тармоқланувчи жараёнлари (ИМТЖ) қаралган. Бу жараёнлар заррачаларнинг эволюцияси билан бирга тасодифий механизм билан бошқарилувчи бир хил типдаги заррачаларнинг шундай оқими ҳисобига ривожланиб борадики, қисқа $(t,t+\varepsilon)$ вақт оралиғида популяцияга $b_j\varepsilon+o(\varepsilon)$ эҳтимоллик билан $j\in\mathbb{N}$ дона заррача кириб келади. Иммиграция оқими $1+b_0\varepsilon+o(\varepsilon)$ эҳтимоллик билан содир бўлмайди. Заррачалар иммиграцияси интенсивлиги $\left\{b_j\right\}$ учун $b_j\ge 0$ ва $0<-b_0=\sum_{j\in\mathbb{N}}b_j<\infty$ шартлар ўринли. Иммигрант-заррачалар эволюцияси келажакда $\left\{a_j\right\}$ интенсивлик қонуни бўйича амалга ошади. Шундай қилиб, ИМТЖ қуйидаги иккита инфинитезимал ҲФлар билан берилади:

$$f(s)=\sum_{j\in\mathbb{N}_0}a_j s^j\qquad\text{ва}\qquad g(s)=\sum_{j\in\mathbb{N}_0}b_j s^j.$$

Ушбу $X(t)$ миқдор билан t вақтдаги заррачалар сонини ифодаласин. ИМТЖ ҳолатлари $\mathbb{N}_0$ тўпламда узлуксиз вақтли бир жинсли Марков занжирини ҳосил қилади. $\left\{X(t)\right\}$ занжир субкритик, критик ва суперкритик дейилади, агарда мос равишда $a<0$, $a=0$ ва $a>0$ бўлса. ИМТЖнинг марковча табиатига кўра унинг ўтиш эҳтимолликлари $p_{ij}(t):=\mathsf{P}_i\left\{X(t)=j\right\}$ барча $i,j\in\mathbb{N}$ ва $t\in\mathcal{T}$ учун Колмогоров-Чэпмен тенгламасини қаноатлантиради. Мос ҲФ эса қуйидаги тенглик билан ифодаланади:

$$\mathcal{P}_i(t;s):=\sum_{j\in\mathbb{N}_0}p_{ij}(t)s^j=\left[F(t;s)\right]^i\exp\left\{\int_0^t g\left(F(\tau;s)\right)d\tau\right\},$$

бунда $F(t;s)=\mathsf{E}s^{Z(t)}$ иммиграциясиз МТЖнинг ҲФидир.

Нокритик ҳолда $X(t)$ жараённинг хоссалари узлуксиз вақтли Марков занжирлари ҳолатларининг умумий классификациясига мувофиқ таҳлил қилинган. Хусусан, $a\neq 0$ ва $\sum_{j\in\mathbb{N}}b_j q^j\ln j<\infty$ бўлганда $X(t)$ жараённинг парчаланиш параметри $\lambda_X = |g(q)|$ ва унинг ҳолатлари λ_X-мусбат қайтувчи бўлиши кўрсатилган. Ушбу

$$\upsilon_j := \lim_{t\to\infty} \frac{p_{0j}(t)}{p_{00}(t)}$$

сонлар ягона (ўзгармас кўпайтувчи аниқлигида) λ_X-инвариант ўлчов ташкил этиши исботланган. Бундан ташқари, юқоридаги шартларда $s \in [0,q)$ учун

$$e^{\lambda_X t} \cdot \mathcal{P}_i(t;s) \longrightarrow q^i \cdot \mathcal{C}(s), \quad t \to \infty \tag{5}$$

яқинлашиш бажарилиб, $\mathcal{C}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j s^j$ ҲФ ушбу

$$\mathcal{C}(s) = \exp\left\{\int_s^q \frac{g(x)-g(q)}{f(x)}dx\right\}$$

кўринишга эга бўлиши исботланган.

Қуйидаги теоремада критик ҳолда А.Пэйкс томонидан $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j j^2 \ln j$ ва $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j j \ln j$ моментлар чекли бўлганда исботлаган тасдиқ кучсизроқ шартларда ҳам ўринли бўлиши исботланган.

Теорема 20. *Агар* $a = 0$, $2b := f''(s\uparrow 1) < \infty$ *ва* $\alpha := g'(s\uparrow 1) < \infty$ *бўлса, барча* $i \in \mathbb{N}$ *ва барча* $s \in [0,1)$ *қийматлар учун*

$$t^{\lambda}\mathcal{P}_i(t;s) \longrightarrow \pi(s), \quad t \to \infty,$$

бунда $\lambda = \alpha/b$ *ва* $\pi(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \pi_j s^j$ *ҲФ қуйидаги кўринишга эга:*

$$\pi(s) = \frac{1}{[b(1-s)]^{\lambda}} \exp\left\{\int_s^1 \left[\frac{g(u)}{f(u)} + \frac{\lambda}{1-u}\right]du\right\}.$$

Бу ҲФ $X(t)$ *жараён учун* $\{\pi_j\}$ *инвариант ўлчов яратади.*

§3.5 нинг асосий натижаси қуйидаги теорема бўлиб, унда (5) тасдиқдаги яқинлашиш тезлиги баҳоланган.

Теорема 21. *Агар* $a \neq 0$ *бўлганда* $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j q^j \ln j < \infty$ *ва* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса, у ҳолда барча* $i \in \mathbb{N}$ *учун*

$$e^{|g(q)|t}\mathcal{P}_i(t;s) \sim q^i\mathcal{C}(s)\cdot\left(1 + \left(\frac{g'(q)}{|\ln\beta|} - \frac{i}{q}\right)\mathcal{A}(0)\cdot\beta^t\right), \quad t \to \infty,$$

бунда $\beta := \exp\{f'(q)\}$ *ва* $\mathcal{A}(s)$ *функция (4) тенгликда аниқланган.*

§3.6 да МТЖ $Z(t)$нинг хоссаларини ўрганиш $f''(s\uparrow 1) = \infty$ бўлган шартда давом эттирилган. Боб аввалидаги мулоҳазалардан келиб чиқадики, нокритик ҳолда Теорема 18 да аниқланган $\{\nu_j\}$ инвариант тақсимотнинг

$$m := \mathcal{V}'(s\uparrow 1) = \sum_{j\in\mathbb{N}} j\nu_j = \frac{q}{\mathcal{A}(0)}$$

чекли математик кутилмага эга бўлиши учун $[\mathcal{A}]$ шартнинг бажарилиши зарур ва етарли бўлади.

Ушбу $\widehat{F}(t;s)=F(t;qs)\big/q$ ҲФни қарайлик, бу ерда q сон МТЖ емирилиш эҳтимоллиги. Бу ҲФ $q<1$ бўлганда субкритик иммиграциясиз МТЖни тавсифлайди. Қуйидаги леммада нокритик ҳолда

$$\widehat{R}(t;s)=1-\widehat{F}(t;s)$$

функциянинг асимптотик ёйилмаси топилган.

Лемма 5. *Агар* $a\neq 0$ *бўлса, у ҳолда барча* $s\in[0,1)$ *учун*

$$\widehat{R}(t;s)=(1-s)\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t;1-s)\cdot\beta^{t},$$

бунда барча $t\in\mathcal{T}$ *қийматлар учун* $\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t;x\downarrow 0)=1$ *ва, ҳар қандай тайинланган* $t_0\in\mathcal{T}$ *қийматда* $\boldsymbol{\ell}_{\beta}(x):=\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t_0;x)\in\mathcal{S}_{\mathbf{0}}$. *Агар* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса,* $t\to\infty$ *бўлганда* $\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t;1)=\boldsymbol{\ell}_{a}\left(\beta^{t}\right)\to 1\big/m$.

Жараён критик бўлган ҳолда $f(s)$ инфинитезимал ҲФ барча $s\in[0,1)$ қийматлар учун ушбу

$$f(s)=(1-s)^{1+\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [\Re_{\nu}]$$

кўринишга эга бўлсин деб ҳисоблаймиз, бунда $0<\nu<1$ ва $\boldsymbol{\mathcal{L}}(t)\in\mathcal{S}_{\infty}$. Бу кўриниш $f''(s\uparrow 1)=\infty$ бўлганда критик МТЖининг асимптотик хоссаларини ўрганиш имконини беради. Мазкур ҳол учун критик МТЖнининг қуйидаги Асосий леммаси исботланган.

Лемма 6. *Агар* $a=0$ *ва* $\left[\Re_{\nu}\right]$ *шарт бажарилса, барча* $s\in[0,1)$ *учун*

$$R(t;s)=\frac{\mathcal{N}(t)}{(\nu t)^{1/\nu}}\cdot\left(1-\frac{M(t;s)}{\nu t}\right),$$

бунда $\mathcal{N}(x)$ *функция* $[\mathcal{N}]$ *шарт билан аниқланган.* $M(t;s)$ *функция учун* $M(t;0)=0$ *ҳамда* $t\to\infty$ *бўлганда* $M(t;s)\to\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *ва* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\boldsymbol{m}_{j}s^{j}$ *ҲФ қуйидаги кўринишга эга бўлади:*

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)=\int_{0}^{s}\frac{dx}{f(x)}. \qquad (6)$$

Юқоридаги иккита лемма $Z(t)$ тасодифий жараённинг асимптотик хоссаларини ўрганишда муҳим роль ўйнайди. Хусусан, бу леммалар ёрдамида қуйидаги локал лимит теоремалар исботланган.

Теорема 22. *Агар* $a\neq 0$ *бўлса, у ҳолда*

$$\beta^{-t}\cdot P_{11}(t)=\frac{|\ln\beta|}{a_0}\cdot\boldsymbol{\ell}_{a}\left(\beta^{t}\right)\left(1+o(1)\right),\quad t\to\infty,$$

бунда $\boldsymbol{\ell}_{a}(x)\in\mathcal{S}_{\mathbf{0}}$. *Агар* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса,* $t\to\infty$ *бўлганда* $\boldsymbol{\ell}_{a}\left(\beta^{t}\right)\to 1\big/m$.

Теорема 23. *Агар* $a=0$ *ва* $\left[\Re_{\nu}\right]$ *шарт бажарилса,*

$$(\nu t)^{1+1/\nu}\cdot P_{11}(t)=\frac{1}{a_0}\mathcal{N}(t)\left(1+o(1)\right),\quad t\to\infty,$$

бунда $\mathcal{N}(t)\in\mathcal{S}_{\infty}$ *функция* $[\mathcal{N}]$ *шарт билан аниқланган.*

Қуйидаги теорема Теорема 14 нинг аналогидир.

Теорема 24. *Агар* $a \neq 0$ *ва* $\tilde{q} = a_0 \big/ |\ln\beta|$ *бўлиб,* $[\mathcal{A}]$ *шарт бажарилса, у ҳолда қуйидаги муносабат ўринли бўлади:*

$$1 - \frac{\mathcal{M}_i(t;qs)}{\tilde{q}\cdot iq^{i-1}} \longrightarrow (1-s)\boldsymbol{\ell}_\mu(1-s), \quad t\to\infty,$$

бунда $\boldsymbol{\ell}_\mu(x) \in \mathcal{S}_0$ *бўлиб,* $\boldsymbol{\ell}_\mu(1) = 1$ *ва* $\boldsymbol{\ell}_\mu(0) = m$. *Бундан ташқари*

$$\mathcal{M}(q) = \tilde{q} \qquad ва \qquad \mathcal{M}'(q) = \frac{\tilde{q}}{q}m.$$

Олдинги параграфлардан маълумки, ушбу

$$\widetilde{P}_{ij}(t) := \mathsf{P}_i\left\{Z(t) = j \middle| t < \mathcal{H} < \infty\right\}$$

эҳтимоллик ўлчови билан аниқланган $\widetilde{Z}(t)$ тасодифий жараён эргодик Марков занжири ташкил этади. Қуйидаги теоремада ҲФ

$$\mathcal{V}_i(t;s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \widetilde{P}_{ij}(t)s^j$$

яратган инвариант ўлчовнинг хоссалари келтирилган.

Теорема 25. *Агар* $a = 0$ *ва* $[\Re_\nu]$ *шарт бажарилса, барча* $i \in \mathbb{N}$ *учун*

$$\nu t\cdot\mathcal{V}_i(t;s) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{M}}(s), \quad t\to\infty,$$

бунда $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \boldsymbol{m}_j s^j$ *ҲФ (6) тенгликда берилган бўлиб, у* $\widetilde{Z}(t)$ *эргодик занжир учун* $\{\boldsymbol{m}_j, j\in\mathbb{N}\}$ *инвариант ўлчов яратади. Бундан ташқари*

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m}_j = \frac{1}{\nu^2\cdot\Gamma(\nu)} n^\nu \boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(n),$$

бунда $\Gamma(*)$ *– Эйлернинг Гамма функцияси ва* $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(n)\cdot\boldsymbol{\mathcal{L}}(n) \to 1$, $n\to\infty$.

Диссертация ишининг охирги тўртинчи боби “**Узлуксиз вақтли Марков Q-жараёнлари**” деб номланган бўлиб, унда Q-жараённинг узлуксиз вақтли аналоги ўрганилган. Биринчи параграфда ихтиёрий $t \in \mathcal{T}$ учун ушбу

$$\left[\mathcal{Q}_{ij}(t)\right] := \left[\lim_{\tau\to\infty} \mathsf{P}_i\left\{Z(t) = j \middle| t+\tau < \mathcal{H} < \infty\right\}\right]$$

эҳтимоллик ўлчови билан ҳолатлар фазоси $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$ бўлган Марков Q-жараёни деб номланувчи $W(t)$ жараён аниқланган. Q-жараён ўтиш эҳтимолликлари

$$\mathsf{P}_i\left\{W(t) = j\right\} = \mathcal{Q}_{ij}(t) = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^t} P_{ij}(t), \quad i,j\in\mathcal{E}, \tag{7}$$

кўринишга эга бўлиши исботланган, бу формулада $\beta = \exp\{f'(q)\}$ ва $P_{ij}(t) = \mathsf{P}_i\{Z(t) = j\}$ – МТЖнинг ўтиш эҳтимолликлари. Ушбу

$$\mathcal{Q}_{1j}(\varepsilon) = 1 + \lambda_j\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon\downarrow 0,$$

локал ёйилма топилган, бунда

$$\lambda_1 = a_1 - \ln\beta \quad ва \quad \lambda_j = jq^{j-1}a_j \geq 0, \quad j\in\mathcal{E}\setminus\{1\}. \tag{8}$$

Ҳосил қилинган ёйилмадан $W(t)$ жараён қуйидаги инфинитезимал ҲФ билан тўла аниқланиши келиб чиқади:

$$g(s) := \sum_{j \in \mathcal{E}} \lambda_j s^j = s\left[f'(qs) - f'(q)\right],$$

бунда $g(s \uparrow 1) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \lambda_j = 0$ ва

$$0 < -\lambda_1 = \sum_{j \in \mathcal{E} \setminus \{1\}} \lambda_j < \infty .$$

Маълумки, ўтиш эҳтимолликларининг дифференциалланувчанлик хоссаси узлуксиз Марков занжирлари назариясида муҳим роль ўйнайди. Хусусан, компоненталари $q_{ij} := \mathcal{Q}'_{ij}(\varepsilon \downarrow 0)$ бўлган ва адабиётларда q-матрица деб номланувчи матрица Марков Q-жараёнининг инфинитезимал характеристикаларини аниқлайди. Агар ушбу

$$q_{ii} = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1 - \mathcal{Q}_{ii}(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

лимит чекли бўлса, Марков Q-жараёнининг $i \in \mathcal{E}$ ҳолати турғун дейилади.

Теорема 26. *Марков Q-жараёнининг барча ҳолатлари турғундир.* $\mathcal{Q}_{ij}(t)$ *функция* $t \in \mathcal{T}$ *ўзгарувчи бўйича узлуксиз дифференциалланувчи ва* $W(t)$ *жараённинг q-матрицаси* $\left[q_{ij}, i, j \in \mathcal{E}\right]$ *қуйидаги компоненталарга эга:*

$$q_{ij} = \begin{cases} i\lambda_1 + (i-1)\ln\beta, & i = j, \\ \dfrac{j\lambda_{j-i+1}}{j-i+1}, & i \neq j, \end{cases}$$

бунда λ_i *сонлар (8) тенгликларда берилган. Бундан ташқари ушбу*

$$\mathcal{Q}'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} q_{ik} \mathcal{Q}_{kj}(t)$$

Колмогровнинг тескари тенгламалар системаси ўринли бўлади.

Ўтиш эҳтимолликлари $\mathcal{Q}_{ij}(t)$ га мос ушбу $G_i(t;s) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \mathcal{Q}_{ij}(t) s^j$ ҲФни қарайлик. Юқоридаги (7) формуладан келиб чиқадики,

$$G_i(t;s) = \left[\widehat{F}(t;s)\right]^{i-1} G(t;s),$$

бунда $\widehat{F}(t;s) = F(t;qs)\big/q$ ва

$$G(t;s) = \mathsf{E}s^{W(t)} = \frac{s}{\beta^t} \frac{\partial F(t;u)}{\partial x}\bigg|_{u=qs} .$$

§4.2 да $W(t)$ жараён траекториясининг хоссалари ўрганилган. Худди дискрет ҳолдаги каби Марков Q-жараёнининг ҳолатлари классификацияси β таркибий параметрнинг қийматига боғлиқ бўлади.

Теорема 27. *Марков Q-жараёни таркибий параметри учун*

$$\beta = \begin{cases} < 1\,, & \text{при} \quad k = 1, \\ = 1\,, & \text{при} \quad k = 2, \end{cases}$$

бўлсин. Агар $\alpha = g'(s \uparrow 1)$ *момент чекли бўлса,*

$$t^{k-\delta_{1k}} \cdot G_i(t;s) = \mathcal{U}(s)\big(1 + o(1)\big), \quad t \to \infty,$$

бунда $k = 1,2$ *ва* δ_{1k} *– Кронекер дельтаси. ҲФ* $\mathcal{U}(s)$ *Марков Q-жараёни учун* $\{u_j, j \in \mathcal{E}\}$ *инвариант ўлчов яратади. Бунда*

(i) *агар* $\beta < 1$ *бўлса,* $\{u_j\}$ *тўплам эҳтимоллик тақсимотидир ва*

$$\mathcal{U}(s) = s\frac{|\ln\beta|}{f(qs)}\mathcal{A}(qs);$$

(ii) *агар* $\beta = 1$ *бўлса,* $\sum_{j\in\mathcal{E}} u_j = +\infty$ *ва*

$$\mathcal{U}(s) = \frac{2s}{\alpha f(s)}.$$

Кейинги келтирилган теорема Марков Q-жараёнлари учун инвариант ўлчовнинг мавжудлиги $\mathcal{Q}_{ij}(t)$ эҳтимолликларга нисбатан момент чекловларсиз исботланиши мумкинлигини кўрсатади.

Теорема 28. *Барча* $i, j \in \mathcal{E}$ *учун ушбу*

$$\omega_j := \lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{Q}_{ij}(t)}{\mathcal{Q}_{11}(t)}$$

лимит мавжуд ва $\{\omega_j, j \in \mathcal{E}\}$ *сонлар тўплами Марков Q-жараёни учун инвариант ўлчов ташкил этади ҳамда бу ўлчовга мос ҲФнинг кўриниши*

$$\mathcal{W}(s) = \sum_{j\in\mathcal{E}}\omega_j s^j = s\exp\left\{\int_0^s \frac{|\,h(z)\,|}{\widehat{f}(z)}dz\right\}$$

бўлиб, у $s \in [0,1)$ *учун яқинлашувчи, бунда* $h(s) = g(s)/s$ *ва* $\widehat{f}(s) = f(qs)/q$.

Охирги §4.3 да олдинги параграфларда топилганлардан фарқ қилувчи лимит қонунларни қидириш мақсадида $\alpha := g'(s \uparrow 1) < \infty$ шартдан воз кечилган. Бунда $\beta < 1$ ҳол учун қуйидаги шарт қабул қилинган:

$$\sum_{j\in\mathcal{E}}\lambda_j \ln j < \infty. \qquad [\mathcal{L}]$$

Теорема 29. *Агар* $\beta < 1$ *бўлса, у ҳолда барча* $i \in \mathcal{E}$ *учун*

$$G_i(t;s) = s\frac{|\ln\beta|}{\widehat{f}(s)}(1-s)\boldsymbol{\ell}_\beta(t;1-s)\big(1+o(1)\big), \quad t\to\infty,$$

бунда $\widehat{f}(s) = f(qs)/q$. *Тайинланган ихтиёрий* $t_0 \in \mathcal{T}$ *учун* $\boldsymbol{\ell}_\beta(x) := \boldsymbol{\ell}_\beta(t_0;x) \in \mathcal{S}_0$ *ва барча* $t \in \mathcal{T}$ *қийматлар учун* $\boldsymbol{\ell}_\beta(t;x\downarrow 0) = 1$. *Агар* $[\mathcal{L}]$ *шарт бажарилса,* $\pi(s) := \lim_{t\to\infty} G_i(t;s)$ *лимит функция мавжуд ва барча* $s \in [0,1)$ *учун*

$$\pi(s) = s\frac{|\ln\beta|}{m}\frac{1}{\widehat{f}(s)}(1-s)\boldsymbol{\ell}(1-s),$$

бунда $\boldsymbol{\ell}(x) \in \mathcal{S}_0$ *ва бу функция учун* $\boldsymbol{\ell}(1) = 1$, $\boldsymbol{\ell}(x\downarrow 0) = m$ *бўлиб,* $m := \mathcal{V}'(s\uparrow 1)$ *ва* $\mathcal{V}(s)$ *Теорема 18 да аниқланган. ҲФ* $\pi(s) = \sum_{j\in\mathcal{E}}\pi_j s^j$ *Марков Q-жараёни учун инвариант тақсимот яратади.*

Энди $\beta = 1$ бўлган ҳол учун $[\Re_\nu]$ шартнинг бажарилиши талаб қилинган. Равшанки, бу шарт $g'(s \uparrow 1) = \infty$ бўлиши учун етарли.

Қуйидаги теоремалар исботланган.

Теорема 30. *Агар $\beta = 1$ бўлса, барча барча $i \in \mathcal{E}$ ва $s \in [0,1)$ учун*

$$\frac{(\nu n)^{1+1/\nu}}{\mathcal{N}(t)} \cdot G_i(t;s) = \mu(s)\bigl(1 + \rho(t;s)\bigr),$$

бунда барча $s \in [0,1)$ учун текис ҳолда $\rho_n(s) \to 0$, $t \to \infty$. $\mathcal{N}(t)$ функция $[\mathcal{N}]$ шарт билан аниқланган. ҲФ $\mu(s) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \mu_j s^j$ қуйидаги кўринишга эга:

$$\mu(s) = \frac{s}{(1-s)^{1+\nu}} \boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu\left(\frac{1}{1-s}\right),$$

бунда $t \to \infty$ бўлганда $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(t) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}(t) \to 1$ ва $\{\mu_j\}$ сонлар тўплам $Q_{ij}(t)$ эҳтимолликларга нисбатан инвариант ўлчов ташкил этади.

Теорема 31. *Агар $\beta = 1$ бўлса, у ҳолда барча барча $i \in \mathcal{E}$ учун*

$$\mathsf{P}_i\left\{\frac{\mathcal{N}(t)}{(\nu t)^{1/\nu}} W(t) < x\right\} \longrightarrow G(x), \quad t \to \infty,$$

бунда $\mathcal{N}(t)$ функция $[\mathcal{N}]$ шарт билан аниқланган ва

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\theta x} dG(x) = \frac{1}{(1+\theta^\nu)^{1+1/\nu}}.$$

Теорема 31 нинг тасдиғи $g'(s \uparrow 1)$ чекли ва $\nu = 1$ бўлганда Q-жараён учун исботланган Харрис теоремасини умумлаштиради. Дарҳақиқат, $\nu = 1$ бўлганда теорема тасдиғидаги Лаплас алмаштириши $(1+\theta)^{-2}$ кўринишга эга бўлади, бу эса маълумки, $1 - e^{-x} - xe^{-x}$ Эрланг қонунига мос келади.

ХУЛОСА

Диссертация иши дискрет ва узлуксиз вақтли тармоқланувчи жараёнлар траекторияларининг хоссаларини ўрганишга, иммиграцияли жараёнлар учун инвариант ўлчовларнинг хоссалари ва уларга яқинлашиш тезликларини баҳолаш масалаларига, шунингдек, узоқ келажакда давом этувчи тармоқланувчи жараёнлар лимит структурасини ўрганишга бағишланган.

Диссертация ишида олинган натижалар бўйича қуйидагиларни хулоса қилиш мумкин.

1. Дискрет ва узлуксиз нокритик тармоқланувчи тасодифий жараёнларда заррачалар кўпайиш қонунининг чексиз момент тартиби $1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, бўлганда жараёнларнинг ҳосил қилувчи функциялари ва уларнинг дифференциали учун асимптотик ёйилмалар олинган, инвариант ўлчовлар ҳосил қилувчи функцияларининг аниқ кўринишлари топилган.
2. Иммиграцияли Гальтон-Ватсон жараёнида иммиграция оқими қонунининг биринчи тартибли моменти ва заррачалар кўпайиши қонунининг иккинчи тартибли моменти чексиз бўлган ҳолда жараён ҳолатларининг эргодиклик хоссаси ўрганилган, узлуксиз вақтли иммиграцияли Марков тармоқланувчи жараёнларда инвариант ўлчовларга яқинлашиш тезликлари баҳоланган.
3. Дискрет ва узлуксиз вақтли критик тармоқланувчи жараёнлар назариясининг асосий леммаси ва унинг дифференциал аналоги жараённинг иккинчи тартибли моменти чексиз бўлган учун исботланган, бу жараёнлар инвариант ўлчовларига мос ҳосил қилувчи функцияларнинг аниқ кўринишлари топилган.
4. Траекториялари узоқ келажаккача давом этувчи Q-жараёнларда заррачалар сони ва барча авлодлар умумий сонининг биргаликдаги лимит тақсимот қонуни топилган, узлуксиз вақтли марков Q-жараёнлари ҳолатлари синфларга ажратилган, локал лимит теоремалар исботланган.

Ишнинг мазмуни назарий аҳамиятга эга. Тадқиқот натижалари ва унда қўлланилган усуллардан демография, тиббиёт, биология, химия, физика ва генетика масалаларини ўрганишда фойдаланиш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.27.06.2017.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА, ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ИМОМОВ АЪЗАМ АБДУРАХИМОВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации доктора (DSc) физико-математических наук

Ташкент – 2019 год

Тема диссертации доктора наук (Doctor of Science) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за номером B2019.1.DSc/FM131.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Хусанбаев Якубджан Мухамаджанович** доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Гаджиев Асаф Гаджи оглы** доктор физико-математических наук, профессор, академик Национальной Академии Наук Азербайджана
	Ходжибаев Вали Рахимджанович доктор физико-математических наук, профессор
	Раимова Гулнора Мирвалиевна доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Киевский Национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина**

Защита диссертации состоится «____» _____________ 2019 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, института Математики. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № ________). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел: (99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «______» ___________________ 2019 года.

(протокол рассылки № ________ от «______» ___________________ 2019 года)

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик

Г.И.Ботиров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

Ш.К.Форманов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-практические исследования, проводимые в мировом масштабе, показывают, что применение ветвящихся случайных процессов имеет важное значение при решении прикладных задач. Теория ветвящихся процессов – область математики, имеющая необычайно широкий спектр теоретических и прикладных приложений, исследует законы эволюции популяции частиц, развивающихся по некоторому случайному репродуктивному механизму. Расширение области применения классических и современных моделей ветвящихся процессов обусловлено их практическими приложениями. В частности, ряд прикладных проблем в научных областях, таких как ядерная физика, молекулярная биология, химия, демография и медицина, описываются моделями, связанными с изучением эволюции частиц. Эта теория, благодаря прикладному и наглядному характеру изучаемых ею задач и явлений, остается активно развивающейся областью современной теории вероятностей, и являются предметом различных актуальных исследований.

В настоящее время спектр применений теории ветвящихся случайных процессов охватывает, в частности, описание законов эволюции различных биологических популяций, исследование задач теории массового обслуживания и многих других проблем природных и технических явлений, связанных с эволюцией популяции частиц. В этом процессе развитие этой теории связано с одной стороны востребованностью углубленного исследования классических моделей и, с другой стороны, характеризуется открытием новых моделей, глубоко и наглядно описывающих суть изучаемых реальных явлений. В связи с этим, постепенное улучшение имевшихся результатов в рамках классических моделей и исследование, направленное на установление новых результатов, наиболее соответствующих объективным условиям, является актуальной задачей.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам фундаментальных наук, имеющих прикладное значение. Перед современной теории вероятностей ставится важная задача сближения фундаментальных исследований к практике. В решении этой задачи теория ветвящихся случайных процессов может занять одно из ведущих положений. В рамках применений этой теории, направленных на решение актуальных проблем ряда сфер человеческой деятельности, удалось достигнуть значимых результатов. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным научным направлениям, в частности, по теории вероятностей и математической статистике, являются основными задачами и направлениями ведения научных исследований[3]. Развитие дальнейшего исследования по теории ветвящихся случайных процессов играет важную роль при обеспечении исполнения данного постановления.

---

[3] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Тема и объект исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», и № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науке.

Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[4]. Широкие научные исследования, направленные на изучение свойства траекторий разновидных моделей ветвящихся процессов и, по нахождению предельных распределений характеристик процессов, ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности в Monash University, University of Western Australia, University of Queensland (Австралия); University of Liverpool, University of Bath (Великобритания); University of Debrecen, University of Szeged (Венгрия); Technische Universitat Munchen, Christian-Albrechts-Universitat zu Kiel, University of Frankfurt (Германия); University of Extremadura (Испания); Central South University, Beijing Normal University (Китай); University of Nijmegen (Нидерланды); Zayed University (ОАЭ); Silesian University of Technology (Польша); University of Georgia, Rice University, Virginia Polytechnic Institute, Trinity University, Iowa State University, University of Chicago (США); Chalmers University of Technology (Швеция); Meijo University (Япония); в институте Математики имени В.А.Стеклова АН России (Россия); в институте Математики и механики АН Азербайджана; в институте Математики АН Узбекистана.

В результате применений научных результатов исследований в мировом масштабе решен целый ряд актуальных задач, в том числе, получены следующие научные результаты: доказаны существование и единственность λ-инвариантной меры для марковских ветвящихся процессов с иммиграцией (Monash University, University of Western Australia, University of Liverpool, Central South University); найдено предельное распределение общего числа частиц в процессе Гальтона-Ватсона с положительной траекторией (Monash University); доказаны предельные теоремы для процессов Гальтона-Ватсона и марковского процесса с непрерывным временем с правильно меняющимися

[4] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе интернет сайтов www.mathnet.ru/, www.appliedprobabiliy.org/, www.hindawi.com/, www.springer.com/, www.elsevier.com/, также были использованы и другие источники.

производящими функциями (University of Western Australia, Technische Universitat Munchen); установлены функциональные связи между различными преобразованиями и инвариантными мерами ветвящихся процессов (Monash University, Christian-Albrechts-Universitat zu Kiel, Chalmers University of Technology); доказаны функциональные предельные теоремы для почти критических процессов Гальтона-Ватсона (University of Extremadura, University of Debrecen, Zayed University); вычислены компоненты q-матрицы марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем (University of Western Australia, University of Queensland, Central South University); доказаны закон больших чисел и аналог центральной предельной теоремы для функционалов от надкритических процессов Гальтона-Ватсона (University of Georgia); найдена вероятность продолжения процесса и получены предельные распределения для ветвящихся процессов с превращениями, зависящими от возраста частиц (институт Математики АН России, Iowa State University); доказаны аналоги классических предельных теорем для ветвящихся процессов в случайной среде (институт Математики АН России, University of Frankfurt); доказаны предельные теоремы для флуктуации ветвящихся процессов (University of Nijmegen, Iowa State University, институт Математики АН Узбекистана); доказаны предельные теоремы о сходимости последовательности нормированных ветвящихся случайных процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией (институт Математики и механики АН Азербайджана, Zayed University, институт Математики АН Узбекистана); вычислена матрица инвариантной меры процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией (Meijo University).

В мировой практике в настоящее время осуществляется ряд научно-исследовательских работ по приоритетным направлениям, в частности, по разработке новых математических моделей, описывающих суть изучаемых реальных явлений и по применению теоретических результатов в практике.

Степень изученности проблемы. Первые результаты по изучению асимптотики вероятности продолжения процесса были получены в работах А.Колмогорова, Н.Дмитриева, Б.Севастьянова, С.Хиткота, Е.Сенеты и Д.Вир-Джонса, А.Нагаева и Р.Мухамедхановой. Первые предельные теоремы для распределения числа частиц при условии не вырождения процесса в текущий момент времени установлены в работах А.Яглома, Т.Харриса, Дж.Ламперти, П.Нея, Б.Севастьянова. Дж.Ламперти и П.Ней изучали свойства Q-процесса, как процесса Гальтона-Ватсона с не вырождающейся в далеком будущем траекторией. Первые локальные предельные теоремы для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем были доказаны в работах В.Чистякова. В этих работах предполагались в основном, существование конечности третьего и четвертого факториальных моментов закона распределения прямых потомков одной частицы.

В.Золотарев впервые продемонстрировал возможность применения теории правильно меняющихся функций в смысле Карамата при улучшении результатов классических теорем, без предположения конечности второго момента числа прямых потомков одной частицы. Он доказал аналог теоремы

А.Яглома и теоремы В.Чистякова для критических марковских ветвящихся процессов, предполагая, что хвост инфинитезимальной производящей функции процесса правильно меняется в точке 1 с показателем $\gamma \in (1,2]$. Теоремы В.Золотарева обобщают предыдущие результаты, в том смысле, что число $\gamma \in (1,2]$ обозначает порядок конечного момента числа прямых потомков одной частицы. Позднее Р.Слэйк установил аналоги результатов В.Золотарева для процесса Гальтона-Ватсона. С.Нагаева и В.Уочтель улучшили результат Р.Слэйка, доказав теорему А.Яглома для случая $\gamma = 1$.

Асимптотические свойства общего числа частиц всех поколений участвовавших в процессе Гальтона-Ватсона исследованы в работах Д.Кеннеди, А.Пэйкса, В.Ватутина и С.Сагитова, А.Карпенко и С.Нагаева.

Еще одну важную область теории ветвящихся процессов составляют процессы с иммиграцией частиц. Процессы с иммиграцией впервые были определены Б.Севастьяновым для непрерывного времени. Позднее С.Хиткот ввел эту модель для дискретного времени. Е.Сенетой были найдены функциональные уравнения, решениями которых являются производящими функциями для инвариантных мер процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией. А.Зубков изучал периоды жизни процессов с иммиграцией. А.Пэйкс доказал локальные предельные теоремы для процесса Гальтона-Ватсона с иммиграцией и установил, что при определенных условиях переходные вероятности процесса правильно меняется на бесконечности. И.Бадалбаевым и И.Рахимовым было инициировано исследование ветвящихся процессов с неоднородной иммиграцией. Ш.Форманов и Ж.Азимов доказали предельную теорему для марковского ветвящегося процесса с иммиграцией, зависящей от состояния и с правильно меняющейся производящей функцией. Дж.Ли, Ф.Чэн и А.Пэйкс доказали теоремы о существовании и единственности λ-инвариантной меры для марковских ветвящихся процессов. Я.Хусанбаев исследовал слабую сходимость к детерминированным процессам и доказал ряд предельных теорем для флуктуации процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией. А.Иксанов и З.Каблучко доказали функциональные предельные теоремы для процессов Гальтона-Ватсона с так называемой «очень активной иммиграцией».

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательской работы Ф4-ФА-Ф009–«Аппроксимационные задачи распределения вероятностей и их приложения в математической статистике» (2012–2016) института Математики АН Узбекистана.

Цель исследования. Найти асимптотические распределения ветвящихся случайных процессов с дискретным и непрерывным временем при минимальных моментных условиях, построить инвариантные меры и оценить скорости сходимости к инвариантным мерам для процессов с иммиграцией, найти предельных распределений ветвящихся процессов, с не вырождающихся траекторий в далеком будущем.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

найти асимптотические представления для производящих функций и их дифференциала некритических ветвящихся процессов с бесконечным моментом порядка $1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с дискретным и непрерывным временем, исследовать инвариантные свойства переходных вероятностей, найти явные виды производящих функций инвариантных мер;

изучить эргодическое свойство критических процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией, имеющих бесконечный первый момент закона иммиграции и бесконечную дисперсию закона превращения частиц, оценить скорость сходимости к инвариантным мерам в процессах с иммиграцией;

доказать основную лемму и ее дифференциальный аналог теории критических ветвящихся процессов с бесконечным вторым моментом и с дискретным и непрерывным временем, исследовать инвариантные свойства переходных вероятностей критических процессов и найти явные виды производящих функций инвариантных мер;

найти предельный закон совместного распределения числа поколений и общего числа частиц всех поколений в Q-процессе, с не вырождающейся траекторией в далеком будущем, классифицировать состояния марковских Q-процессов, исследовать их структурные и асимптотические свойства.

Объект исследования. Ветвящиеся случайные процессы Гальтона-Ватсона, марковские ветвящиеся процессы с непрерывным временем, ветвящиеся процессы с иммиграцией, марковские Q-процессы.

Предмет исследования. Переходные вероятности, производящие функции, правильно меняющиеся функции, уравнения Колмогорова, инвариантные меры, уравнения Абеля и Шредера, преобразование Лапласа.

Методы исследования. В работе использованы вероятностные и аналитические методы как метод производящих функций, метод Стейна-Тихомирова, метод преобразований Лапласа, методы асимптотического анализа, а также тауберовые теоремы для правильно меняющихся функций.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдены асимптотические представления для производящих функций и их дифференциала некритических ветвящихся процессов с бесконечным моментом порядка $1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, с дискретным и непрерывным временем, найдены явные виды производящих функций инвариантных мер;

получено асимптотическое представление для переходных вероятностей критических процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией, образующих эргодическую цепь, имеющих бесконечный первый момент случайного закона притока иммиграции частиц и бесконечную дисперсию закона превращения частиц, оценена скорость сходимости к инвариантным мерам в Марковских ветвящихся процессах с иммиграцией;

доказана основная лемма и ее дифференциальный аналог теории критических ветвящихся процессов с бесконечным вторым моментом и с дискретным и непрерывным временем, доказана сходимость к инвариантным мерам переходных вероятностей процессов, найдены явные виды производящих функций инвариантных мер этих процессов;

найден предельный закон совместного распределения числа поколений и общего числа частиц всех поколений в Q-процессе, с не вырождающейся траекторией в далеком будущем, классифицированы структурные и асимптотические состояния марковских Q-процессов.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

В исследовании асимптотических свойств эволюции процессов в случае, когда дисперсия распределения числа поколений неизвестна, применены элементы теории правильно меняющихся функций в смысле Карамата.

Утверждения о свойствах общего числа частиц в Q-процессе дают возможность делать статистические выводы о законах эволюции индивидуумов и о количестве всех участников в популяционных процессах не вырождающихся в далеком будущем.

Достоверность результатов исследования по асимптотическим свойствам ветвящихся процессов обоснована последовательностью строгих математических рассуждений, использованием известных вероятностных и аналитических методов, применением теорем непрерывности, теории правильно меняющихся функций и методов асимптотического анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы при изучении процессов, описывающих эволюции биологических индивидуумов. Асимптотические формулы для регулярно меняющихся производящих функций позволяют исследовать инвариантные меры процессов с бесконечной дисперсией.

Практическое значение результатов исследования определяется возможностью их применения в получении статистических выводов о законах эволюции индивидуумов в популяционных процессах и в оценивании погрешностей результатов численных вычислений.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по асимптотическим свойствам ветвящихся случайных процессов были внедрены на практике в следующих проектах:

предельные теоремы для ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона и процессов с иммиграцией были использованы в зарубежном гранте проекта №337/07, 06-223-3-104 – “Nonparametric evaluations of distribution density and regression function, stochastic analysis and applications in financial mathematics” (справка от 26 июня 2018 года Грузинской Статистической Ассоциации) при применении методов стохастического анализа в финансовой математике. Применение этих предельных теорем позволило найти предельные вероятности для некоторых случайных процессов;

асимптотические формулы для локальных вероятностей марковских ветвящихся процессов были использованы в проекте научно-исследовательского гранта №FR/308/5-104/12–“Some problems of statistical estimations and stochastic analysis” (справка от 26 июня 2018 года Грузинской Статистической Ассоциации). Применение этих результатов позволило доказать предельные теоремы для случайных процессов;

асимптотические формулы, полученные для марковских ветвящихся процессов с непрерывным временем и с иммиграцией были использованы в научно-исследовательском проекте №1.511.2014/К – «Исследование математических моделей информационных потоков, компьютерных сетей, алгоритмов обработки и передачи данных» в рамках проектной части государственного задания Российской Федерации (справка от 1 октября 2018 года Института прикладной математики и компьютерных наук, Россия). Эти результаты были использованы при разработке метода асимптотического анализа для анализа характеристик моделей беспроводных сетей связи сетей и позволили увеличить их эффективность.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации были представлены и обсуждены на 31 научно-практических конференциях, в том числе на 17 международных и 14 республиканских конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 53 научных работ, в том числе 16 статей: 11 в зарубежных и 5 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 200 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики; приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы; сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования; изложены научная новизна и практические результаты исследования; раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Всюду обозначим через $\mathsf{P}_i\{*\}$ вероятность при условии, что начальное состояние рассматриваемого процесса состоит из i частиц.

В первой главе диссертации названной «**Ветвящиеся случайные процессы Гальтона-Ватсона**» рассматриваются ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона (Г-В) с дискретным временем. В первом параграфе приведено определение процессов Г-В и изложен краткий обзор. Обозначим через Z_n число частиц в процессе Г-В, начинающегося из состояния $Z_0 = 1$, в момент времени $n \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Пусть $P_{ij}(n) := \mathsf{P}_i\{Z_n = j\}$ обозначает переходные вероятности процесса из состояния $i \in \mathbb{N}$ в состояние $j \in \mathbb{N}$ за $n \in \mathbb{N}$ шагов. Процесс $\{Z_n\}$ определяется вероятностной производящей функцией (ПФ)

$$F(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_k s^k, \quad s \in [0,1),$$

где $p_k = P_{1k}(1)$ и $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_k = 1$. Если числовой ряд $\sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k$ сходится, то величина $A := \sum_{k \in \mathbb{N}} k p_k = F'(s \uparrow 1) = \mathsf{E} Z_1$ обозначает среднее число прямых потомков одной частицы. Согласно классификации ветвящихся процессов $\{Z_n\}$ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $A < 1$, $A = 1$ и $A > 1$, соответственно.

Обозначим через q вероятность вырождения процесса $\{Z_n\}$ и пусть $\beta := F'(q)$. В §1.2 для некритического процесса установлена следующая

Теорема 1. *Пусть* $p_1 \neq 0$. *Если* $A > 1$ *или* $A < 1$ *и* $F''(s \uparrow 1) < \infty$, *то*

$$\beta^{-n} P_{ij}(n) = \frac{\mathcal{A}(0)}{\sum_{m \in \mathbb{N}} \mu_m q^m} i q^{i-1} \mu_j \big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty$$

для всех $i, j \in \mathbb{N}$, *здесь* $\mu_j = \lim_{n \to \infty} P_{1j}(n) \big/ P_{11}(n) < \infty$ *и*

$$\mathcal{A}(s) = \left(\frac{1}{q - s} + \frac{\delta}{2}\right)^{-1},$$

где $\delta = \delta(s) = 2 \lim_{n \to \infty} \left[R_n^{-1}(s) \beta^n - (q - s)^{-1}\right]$.

Определим случайный процесс $\left\{\widetilde{Z}_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ с помощью переходных вероятностей $\widetilde{P}_{ij}(n) := \mathsf{P}_i\left\{Z_n = j \middle| n < \mathcal{H} < \infty\right\}$, здесь случайная величина $\mathcal{H} := \min\{n : Z_n = 0\}$ обозначает момент вырождения процесса $\{Z_n\}$. В этом параграфе показано, что процесс $\left\{\widetilde{Z}_n\right\}$ является эргодической цепью Маркова. Введем в рассмотрение ПФ

$$\mathcal{V}_n^{(i)}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{P}_{ij}(n) s^j.$$

Известно, что в некритическом случае предел $\nu_j := \lim_{n \to \infty} \widetilde{P}_{ij}(n)$ существует и ПФ $\mathcal{V}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu_j s^j$ удовлетворяет уравнению Шредера

$$1 - \mathcal{V}\left(\frac{F(qs)}{q}\right) = \beta \cdot [1 - \mathcal{V}(s)] \tag{1}$$

для всех $s \in [0,1)$ и $\sum_{j \in \mathbb{N}} \nu_j = 1$. Известно, что функция $\mathcal{V}(s)$, удовлетворяющая уравнению (1), порождает инвариантную меру относительно $\widetilde{P}_{ij}(n)$. В §1.2 найдены явные для ПФ $\mathcal{V}(s)$. В частности показано, что в некритическом случае при $F''(s \uparrow 1) < \infty$ ПФ $\mathcal{V}(s)$ имеет вид

$$\mathcal{V}(s) = 1 - \frac{\mathcal{A}(qs)}{\mathcal{A}(0)},$$

где функция $\mathcal{A}(s)$ определена в Теореме 1. Более того, переходные вероятности $P_{ij}(n)$ и $\widetilde{P}_{ij}(n)$ удовлетворяют равенству

$$P_{ij}(n) = \widetilde{P}_{ij}(n) \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} P_{ik}(n) q^{k-j} .$$

В §1.3 исследован процесс Г-В без предположения конечности момента $F''(s \uparrow 1)$, с помощью теории медленно меняющихся (ММ) функций в смысле Карамата. Элементы теории ММ-функций в исследовании ветвящихся случайных процессов одним из первых были применены В.Золотаревым. В список ранних работ, где эффективно использованы ММ-функции, можно внести также, работы Р.Слэйка и Е.Сенеты, опубликованные в 70-годы XX века. Подробные материалы, связанные с применениями ММ-функций в теории случайных процессов можно найти в монографиях С.Асмусена и Г.Геринга, а также Н.Бингхама, К.Голди и Дж.Тегелса. Далее всюду символами $\mathcal{S}_0$ и $\mathcal{S}_\infty$ обозначим классы ММ-функций в нуле и на бесконечности, соответственно.

Заметим, что в некритическом случае справедливо соотношение

$$1 - \mathcal{V}(x) = (1 - x)\boldsymbol{\ell}_\vartheta(1 - x), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\ell}_\vartheta(x) \in \mathcal{S}_0$ и наличие условия

$$\mathsf{E}\left[Z_1 \ln Z_1\right] = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j j \ln j < \infty , \qquad [\mathcal{A}]$$

является необходимым и достаточным для существования конечного математического ожидания $m := \mathcal{V}'(s \uparrow 1)$.

Введем в рассмотрение ПФ $F_n(s) = \mathsf{E}s^{Z_n}$ и обозначим $R_n(s) := 1 - \widehat{F}_n(s)$, где $\widehat{F}_n(s) = F_n(qs)/q$ для всех $s \in [0,1)$. В следующей лемме найдено асимптотическое представление функции $R_n(s)$ для некритического случая.

Лемма 1. *Пусть* $A \neq 1$. *Тогда*:

$$R_n(s) = (1 - s)L_n(1 - s) \cdot \beta^n ,$$

где $L_n(x \downarrow 0) = 1$ *для любого* $n \in \mathbb{N}$ *и,* $L_{n_0}(x) =: L(x) \in \mathcal{S}_0$ *при любом фиксированном* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то* $L_n(1) \downarrow 1/m$.

Лемма 1 играет важную роль в исследовании асимптотических свойств некритических ветвящихся процессов Г-В. В частности, поскольку $\mathcal{V}(0) = 0$ и $q - F_n(qs) = qR_n(s)$ то, при $s = 0$ вытекает следующая формула:

$$\mathsf{P}\{n < \mathcal{H} < \infty\} = q \cdot \boldsymbol{\ell}_a(\beta^n) \cdot \beta^n ,$$

где $\boldsymbol{\ell}_a(s) \in \mathcal{S}_0$ и если выполнено условие $[\mathcal{A}]$, то $L_n(1) \downarrow 1/m$ *при* $n \to \infty$.

Доказана следующая локальная предельная теорема.

Теорема 2. *Пусть* $A \neq 1$ *и* $p_1 \neq 0$. *Тогда для всех* $i, j \in \mathbb{N}$

$$\beta^{-n} \cdot P_{ij}(n) = iq^{i-1}\mu_j \mathcal{V}'(0) \cdot \boldsymbol{\ell}_a(\beta^n) + \mathcal{O}(\beta^n), \quad n \to \infty ,$$

где $\boldsymbol{\ell}_a(s) \in \mathcal{S}_0$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то* $\boldsymbol{\ell}_a(\beta^n) \to 1/m$ *при* $n \to \infty$.

В критическом случае основным предположением является возможность представления ПФ $F(s)$ в виде

$$F(s) = s + (1-s)^{1+\nu} \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [\Re_\nu]$$

для всех $s \in [0,1)$, где $0 < \nu \leq 1$ и $\boldsymbol{\mathcal{L}}(t) \in \mathcal{S}_\infty$. Это предположение дает возможность исследовать асимптотические свойства процесса Г-В в случае $F''(s \uparrow 1) = \infty$. В этом случае доказана следующая Основная лемма теории критических ветвящихся процессов Г-В.

Лемма 2. *Если* $A = 1$ *и выполнено условие* $[\Re_\nu]$*, то*

$$R_n(s) = \frac{\mathcal{N}\left(n + \mathcal{M}(s)\right)}{(\nu n)^{1/\nu}} \cdot \left[1 - \frac{M_n(s)}{\nu n}\right],$$

где функция $\mathcal{N}(n) \in \mathcal{S}_\infty$ *удовлетворяет следующему условию:*

$$\mathcal{N}^{\,\nu}(x) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{(\nu x)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(x)}\right) \longrightarrow 1, \quad x \to \infty. \qquad [\mathcal{N}]$$

Здесь $M_n(s) \to \boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *равномерно для всех* $s \in [0,1)$*, где функция* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *при условии* $\boldsymbol{\mathcal{M}}\left(F(0)\right) = 1$ *удовлетворяет уравнению Абеля* $\boldsymbol{\mathcal{M}}\left(F(s)\right) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(s) + 1$. *Для этой функции справедливо соотношение*

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \frac{1 + o(1)}{\nu (1-s)^\nu \boldsymbol{\mathcal{L}}\left(1/(1-s)\right)}, \quad s \uparrow 1.$$

Кроме того $M_n(0) = 0$ *и* $M_n(s \uparrow 1) = \nu n$ *при любом фиксированном* $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 2 играет важную роль в исследовании асимптотических свойств критических ветвящихся процессов Г-В. В частности, с помощью этой леммы доказана следующая предельная теорема.

Теорема 3. *В условиях Леммы 2*

$$\nu n \cdot \mathcal{V}_n^{(i)}(s) = \boldsymbol{\mathcal{M}}(s)\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

где функция $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *имеет представление* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \boldsymbol{m}_j s^j$. *Множество* $\left\{\boldsymbol{m}_j\right\}$ *образует инвариантную меру и* $\sum_{j \in \mathbb{N}} \boldsymbol{m}_j = \infty$.

При дополнительных условиях на функцию $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)$ установлен результат, в котором существенно уточнено утверждение Леммы 2. Для этого наложено следующее предположение. Поскольку $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x) \in \mathcal{S}_\infty$, то согласно определению ММ-функций, для любого $\lambda > 0$ допускается представление

$$\frac{\boldsymbol{\mathcal{L}}(\lambda x)}{\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)} = 1 + \alpha(x), \qquad [\boldsymbol{\mathcal{L}}_\alpha]$$

где $\alpha(x) = \mathcal{O}\left(1/\varphi(x)\right)$ и $\varphi(x)$ положительно возрастающая функция такая, что $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to \infty$ и, для некоторых $\gamma > 0$ и $X > 0$ функция $x^{-\gamma}\varphi(x)$ является невозрастающей при $x > X$. В случае выполнения условие $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_\alpha]$ говорят, что функция $\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)$ медленно меняется с остатком $\alpha(x)$.

Введем обозначение:

$$\Lambda(y) := y^{\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{F(1-y)-(1-y)}{y}, \quad y \in (0,1].$$

Лемма 3. *Пусть* $A = 1$. *Если выполнены условия* $[\Re_{\nu}]$, $[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\alpha}]$ *и* $\alpha(x) = o\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}(x)/x^{\nu}\right)$, *то справедливо асимптотическое представление*

$$\Lambda\left(R_n(s)\right) = \frac{\Lambda(1-s)}{\Lambda(1-s)\nu n + 1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right), \quad n \to \infty.$$

Последнее утверждение является прямым аналогом Основной леммы теории критических ветвящихся процессов Г-В с оценкой остаточного члена, установленной при условии конечности момента $F'''(s \uparrow 1)$].

Используя Лемму 3, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $A = 1$ *и* $p_1 \neq 0$. *Если выполнены условия Леммы 3, то имеет место следующее соотношение:*

$$n^{1+1/\nu} \cdot P_{11}(n) = \frac{\mathcal{N}(n)}{p_0}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right), \quad n \to \infty,$$

где функция $\mathcal{N}(x) \in \mathcal{S}_{\infty}$ *такая, что удовлетворяет условию* $[\mathcal{N}]$.

В §1.4 демонстрирована возможность применения метода Стейна-Тихомирова в доказательстве предельных теорем теории ветвящихся процессов. Этим же методом доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Если* $A \neq 1$, *то для всех* $s \in [0,1)$ *существует ПФ* $\mathcal{V}(s) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{V}_n^{(i)}(s)$, *с значениями* $\mathcal{V}(0) = 0$ *и* $\mathcal{V}(1) = 1$. *Более того*

$$\frac{1-\mathcal{V}_n^{(i)}(s)}{1-s} \longrightarrow \boldsymbol{\ell}(1-s), \quad n \to \infty,$$

где $\boldsymbol{\ell}(x) \in \mathcal{S}_0$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то* $\boldsymbol{\ell}(x \downarrow 0) = m$ *и* $\boldsymbol{\ell}(1) = 1$.

Последние два параграфа Главы I посвящены изучению предельных свойств переходных вероятностей процесса Г-В с иммиграцией (ГВИ). Процесс ГВИ определяется двумя ПФ вероятностей. В то время когда ПФ $F(s)$ характеризует закон превращения частиц, закон поступления частиц-иммигрантов порождается ПФ $G(s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} h_j s^j$. Последовательность числа поколений $\{X_n\}$ образует однородную цепь Маркова с пространством состояний $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}_0$. Обозначим $p_{ij}^{(n)} := \mathsf{P}_i\{X_n = j\}$ переходные вероятности и, пусть $\mathcal{P}_n^{(i)}(s) := \sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}^{(n)} s^j$. Процесс $\{X_n\}$ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $A < 1$, $A = 1$ и $A > 1$, соответственно.

В §1.5 показано, что существуют числа $\upsilon_j := \lim_{n\to\infty} p_{0j}^{(n)} \big/ p_{00}^{(n)}$ для всех $j \in \mathcal{S}$, и они образуют инвариантную меру для процесса ГВИ.

В некритическом случае доказана следующая теорема.

Теорема 6. *Если* $A \neq 1$, *то для всех* $i, j \in \mathcal{S}$

$$\sigma^{-n} p_{ij}^{(n)} \longrightarrow \frac{q^i \upsilon_j}{\sum_{k \in \mathcal{S}} \upsilon_k q^k}, \quad n \to \infty,$$

где $\sigma := G(q)$.

В критическом случае рассмотрен случай, когда выполняется условие $[\Re_\nu]$ с $0 < \nu < 1$ и ПФ закона поступления иммигрирующих частиц $G(s)$ допускает следующее представление:

$$1 - G(s) = (1-s)^{\delta} \boldsymbol{\ell}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [G_\delta]$$

для всех $s \in [0,1)$, где $0 < \delta < 1$ и $\boldsymbol{\ell}(x) \in \mathcal{S}_\infty$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* $[\Re_\nu]$ *и* $[G_\delta]$. *Если* $\delta > \nu$, *то цепь* $\{X_n\}$ *является эргодической и справедливо следующее соотношение:*

$$\mathcal{P}_n^{(0)}(s) \sim K(s) \exp\left\{ \int_s^{F_n(s)} \frac{1-G(y)}{F(y)-y} dy \right\}, \quad n \to \infty,$$

где $K(s)$ *– ограниченная функция.*

Во второй главе названной «**Ветвящиеся процессы с дискретным временем не вырождающиеся в далеком будущем**» изучены структурные и асимптотические свойства процесса W_n, заданного вероятностной мерой

$$\left[\mathcal{Q}_{ij}(n)\right] := \left[\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}_i \{Z_n = j | n+k < \mathcal{H} < \infty\}\right] = \left[\mathsf{P}_i\{Z_n = j | \mathcal{H} = \infty\}\right].$$

Этот процесс является однородной цепью Маркова с начальным состоянием $W_0 \overset{d}{=} Z_0$, с пространством состояний $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$ и, называется Q-процессом. Величина W_n обозначает размер состояния процесса в момент времени n и переходные вероятности для всех $i, j \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{Q}_{ij}(n) = \mathsf{P}_i\{W_n = j\} = \frac{jq^{j-i}}{i\beta^n} P_{ij}(n),$$

где $\beta := F'(q)$ и $P_{ij}(n)$ – переходные вероятности процесса Г-В $\{Z_n\}$.

В §2.1 найдено представление для ПФ $Y_n^{(i)}(s) := \sum_{j\in\mathcal{E}} \mathcal{Q}_{ij}(n) s^j$. В §2.2 показано, что классификация состояний цепи Маркова $\{W_n\}$ зависит от значения структурного параметра β. Цепь $\{W_n\}$ является положительно возвратной, если $\beta < 1$, и будет невозвратной если $\beta = 1$.

В §2.3 рассмотрена случайная величина $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$, обозначающая сумму всех состояний до момента времени n в Q-процессе. Обозначим $Y(s) := Y_1^{(1)}(s)$ и пусть $\alpha := Y'(s \uparrow 1) < \infty$. Доказано, что в случае $\beta < 1$ между величинами W_n и S_n существует «асимптотическая независимость».

Последующие две теоремы являются основными результатами §2.3.

Теорема 8. *Пусть* $\beta = 1$ *и* $\alpha < \infty$. *Тогда двумерный процесс*

$$\left(\frac{W_n}{\mathsf{E}\,W_n};\ \frac{S_n}{\mathsf{E}S_n}\right)$$

слабо сходится к двумерной величине $(\mathbf{w};\mathbf{s})$ *с преобразованием Лапласа*

$$\mathsf{E}\left[e^{-\lambda\mathbf{w}-\theta\mathbf{s}}\right]=\left[\operatorname{ch}\sqrt{\theta}+\frac{\lambda}{2}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\right]^{-2},\quad \lambda,\theta\in\mathbb{R}_+,$$

где $\operatorname{ch}x=\left(e^{x}+e^{-x}\right)\big/2$ *и* $\operatorname{sh}x=\left(e^{x}-e^{-x}\right)\big/2$.

Эта теорема объединяет ранее известные результаты, в том смысле, что последние были установлены в одномерном случае, отдельно для нормированных величин $W_n\big/\mathsf{E}\,W_n$ и $S_n\big/\mathsf{E}S_n$.

Теорема 9. *Пусть* $\beta<1$, $\alpha<\infty$ *и* $\gamma=(\alpha-1)\big/(1-\beta)$. *Тогда*

$$\mathsf{P}\left\{\frac{S_n-\mathsf{E}S_n}{\sqrt{2\Psi n}}<x\right\}\longrightarrow\Phi(x)$$

при $n\to\infty$, *где постоянная величина* $\Psi=\gamma(2+\beta\gamma)\big/2(1-\beta)$ *и* $\Phi(x)$ *– стандартный нормальный закон распределения.*

В §2.4 исследованы свойства процесса $\{W_n\}$ в случае, когда $\alpha:=Y'(s\uparrow 1)=\infty$. Для случая $\beta<1$ предусмотрено условие

$$\mathsf{E}\left[\ln W_1\right]<\infty. \qquad [\mathcal{L}]$$

Теорема 10. *Пусть* $\beta<1$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{L}]$, *то для всех* $s\in[0,1)$ *существует предел* $\pi(s):=\lim_{n\to\infty}Y_n^{(i)}(s)$ *и имеет вид*

$$\pi(s)=\frac{1}{m}s\mathcal{V}'(s),$$

где функция $\mathcal{V}(s)$ *определена в (2) и* $m=\mathcal{V}'(s\uparrow 1)$. *ПФ* $\pi(s)$ *порождает инвариантное распределение* $\left\{\pi_j,\,j\in\mathcal{E}\right\}$ *для Q-процесса* $\{W_n\}$.

В случае $\beta=1$ соответствующий процесс Г-В является критическим и для того чтобы $\alpha=\infty$, достаточно потребовать выполнение условия $\left[\Re_\nu\right]$.

Лемма 4. *Пусть* $\beta=1$. *Если выполнено условие* $\left[\Re_\nu\right]$, *то*

$$Y_n(s)=s\left(\frac{R_n(s)}{1-s}\right)^{1+\nu}\frac{\mathcal{L}\left(1/q_n\right)}{\mathcal{L}\left(1/(1-s)\right)},\quad n\to\infty$$

для всех $s\in[0,1)$, *где* $q_n=R_n(0)$.

С помощью Леммы 3 и Леммы 4 доказаны следующие теоремы.

Теорема 11. *Если* $\beta=1$ *и выполнено условие* $\left[\Re_\nu\right]$, *то для всех* $i\in\mathcal{E}$

$$\frac{(\nu n)^{1+1/\nu}}{\mathcal{N}(n)}Y_n^{(i)}(s)=\mu(s)\left(1+\rho_n(s)\right),\quad n\to\infty,$$

где $\rho_n(s) \to 0$ *равномерно для* $s \in [0,1)$ *и, функция* $\mathcal{N}(x)$ *определена условием* $[\mathcal{N}]$. *Функция* $\mu(s)$ *разлагается в степенной ряд* $\sum_{j\in\mathcal{E}} \mu_j s^j$, *в котором коэффициенты* $\{\mu_j\}$ *имеют свойство* $\mu_j = \sum_{i\in\mathcal{E}} \mu_i \mathcal{Q}_{ij}(1)$. *Более того*

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j \sim \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} n^{1+\nu} \mathcal{L}_{\mu}(n), \quad n \to \infty,$$

где $\mathcal{L}_{\mu}(n) \cdot \mathcal{L}(n) \to 1$ *при* $n \to \infty$ *и* $\Gamma(*)$ *– Гамма функция Эйлера.*

Теорема 12. *Пусть* $\beta = 1$. *Тогда для всех* $i \in \mathcal{E}$ *распределение*

$$\mathsf{P}_i\left\{\frac{\mathcal{N}(n)}{(\nu n)^{1/\nu}} W_n < x\right\}$$

слабо сходится к закону распределения $G(x)$, *для которого*

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\theta x} dG(x) = \frac{1}{\left(1+\theta^{\nu}\right)^{1+1/\nu}}.$$

В следующей теореме получена оценка остаточного члена $\rho_n(s)$ в Теореме 11 при дополнительных условиях на ММ-функцию $\mathcal{L}(x)$.

Теорема 13. *Пусть* $\beta = 1$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{L}_{\alpha}]$ *с остаточным членом* $\alpha(x) = o\left(\mathcal{L}(x)/x^{\nu}\right)$ *при* $x \to \infty$, *то для асимптотической формулы в Теореме 11 имеет место следующая равномерная для* $s \in [0,1)$ *оценка остаточного члена:*

$$\rho_n(s) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Третья глава, названная «**Асимптотические исследования марковских ветвящихся случайных процессов с непрерывным временем**», посвящена асимптотическому исследованию марковского ветвящегося процесса (МВП) с непрерывным временем. Обозначим $Z(t)$ численность популяции частиц в МВП в момент времени $t \in \mathcal{T} = [0, +\infty)$. Известно, что переходные вероятности $P_{ij}(t) = \mathsf{P}_i\{Z(t) = j\}$ удовлетворяют уравнению Колмогорова-Чепмена. Эти вероятности, согласно условию ветвления, определяются i-кратной сверткой вероятностей $P_{1j}(t)$. Поэтому для изучения МВП достаточно определить $P_{1j}(t)$. Эти вероятности задаются соотношением

$$P_{1j}(\varepsilon) = \delta_{1j} + a_j\varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \downarrow 0, \qquad (3)$$

здесь δ_{ij}– знак Кронекера, числа $\{a_j\}$ представляют собой интенсивности превращения частиц, для которых

$$0 < a_0 < -a_1 = \sum_{j\in\mathbb{N}_0\setminus\{1\}} a_j < \infty.$$

Из (3) следует, что $a_j = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} P_{1j}(\varepsilon)/\varepsilon = P'_{1j}(0)$ при $j \neq 1$ и для ПФ

$$F(t;s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} P_{1j}(t)s^j \qquad \text{и} \qquad f(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j s^j$$

справедливо для $s \in [0,1)$ представление
$$F(\tau; s) = s + f(s)\cdot\tau + o(\tau), \quad \tau \downarrow 0.$$
Пусть $a := f'(s \uparrow 1) < \infty$. Согласно классификации ветвящихся процессов, $Z(t)$ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $a < 0$, $a = 0$ и $a > 0$, соответственно. Величина
$$q = \inf\left\{s \in (0,1] : f(s) = 0\right\}$$
обозначает вероятность вырождения МВП с $Z(0) = 1$. Введем обозначение $\beta := \exp\left\{f'(q)\right\}$. Исследования показывают, что в некритическом случае асимптотические свойства процесса $Z(t)$ зависят от свойств функции
$$\mathcal{A}(s) = (q - s)\exp\left\{\int_s^q \left[\frac{1}{u-q} - \frac{f'(q)}{f(u)}\right] du\right\}. \tag{4}$$
Пусть величина $\mathcal{H} := \inf\left\{t \in \mathcal{T} : Z(t) = 0\right\}$ обозначает момент вырождения МВП. В §3.2 доказано, что для того чтобы имела место асимптота
$$\mathsf{P}\left\{t < \mathcal{H} < \infty\right\} \sim \mathcal{A}(0)\cdot\beta^t, \quad t \to \infty,$$
необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие
$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j j \ln j < \infty. \tag*{$[\mathcal{A}]$}$$

В §3.3 показано, что асимптотическое представление переходных вероятностей $P_{ij}(t)$ МВП и ПФ инвариантных мер этих процессов задаются с помощью функции $\mathcal{A}(s)$. В частности, для всех $i \in \mathbb{N}$
$$\mathcal{M}_i(t; s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{P_{ij}(t)}{P_{11}(t)} s^j \longrightarrow iq^{i-1}\cdot\mathcal{M}(s), \quad t \to \infty,$$
где функция $\mathcal{M}(s)$ разлагается в степенной ряд $\mathcal{M}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j s^j$ и неотрицательные коэффициенты $\left\{\mu_j\right\}$ образуют инвариантное распределение для процесса $Z(t)$. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 14. *Если $a \neq 0$ и выполнено условие $[\mathcal{A}]$, то*
$$\mathcal{M}(s) = \frac{a_0}{|\ln\beta|}\cdot\left[1 - \frac{\mathcal{A}(s)}{\mathcal{A}(0)}\right],$$
здесь функция $\mathcal{A}(s)$ задана в (4).

Теорема 15. *Пусть $a = 0$. Если $f''(s \uparrow 1) =: 2b < \infty$, то*
$$\mathcal{M}(t; s) = \frac{a_0}{b}\cdot\frac{s}{1-s} + \alpha(t; s),$$
где $\alpha(t; s) = \mathcal{O}\left(1/t\right)$ при $t \to \infty$ равномерно для всех $0 \le s \le r < 1$.

Следующая теорема показывает, что переходные вероятности $P_{ij}(t)$ некритических МВП убывают при $t \to \infty$ к нулю со скоростью $\mathcal{O}\left(\beta^t\right)$ и определяет асимптотическое представление этих вероятностей.

Теорема 16. *Если $a \neq 0$ и выполнено условие $[\mathcal{A}]$, то для всех $i, j \in \mathbb{N}$*

$$\beta^{-t} P_{ij}(t) = \frac{\mathcal{A}(0)}{\mathcal{M}(q)} i q^{i-1} \mu_j \big(1 + o(1)\big), \quad t \to \infty,$$

здесь функция $\mathcal{A}(s)$ задана в (4).

В этом параграфе исследованы свойства процесса $Z(t)$ с точки зрения общей классификации состояний непрерывных цепей Маркова. Введем множество $\mathsf{S} := \left\{ j \in \mathbb{N} : P_{1j}(t) > 0,\, t \in \mathcal{T} \right\}$. Известно, что если переходные вероятности непрерывной цепи Маркова экспоненциально убывает к нулю, то положительная и не зависящая от $i \in \mathsf{S}$ величина

$$\lambda_{\mathsf{S}} = -\lim_{t \to \infty} \frac{\ln P_{ii}(t)}{t}$$

характеризует «степень распада» пространства состояний этой цепи и называется параметром распада. В этом случае инвариантная мера рассматриваемой цепи называется λ_{S}-инвариантной мерой. Состояния этой цепи классифицируются в зависимости от значения интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda_{\mathsf{S}} t} P_{ii}(t) dt .$$

Если последний интеграл равен ∞, то цепь Маркова с переходными вероятностями $P_{ij}(t)$ называется λ_{S}-возвратной. Если интеграл конечен, то цепь называется λ_{S}-невозвратной. В соответствии с общей классификацией возвратных марковских процессов, состояние $i \in \mathsf{S}$ называется λ_{S}-положительным, если $\lim_{t \to \infty} e^{\lambda_{\mathsf{S}} t} P_{ii}(t) > 0$, в противном случае λ_{S}-нулевым.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть $a \neq 0$ и выполнено условие $[\mathcal{A}]$. Тогда*

$$\lambda_{\mathsf{S}} = |\ln \beta|$$

и $Z(t)$ является λ_{S}-положительным. Множество чисел $\left\{\mu_j\right\}$ является единственной (с точностью до постоянного множителя) λ_{S}-инвариантной мерой для процесса $Z(t)$.

Введем в рассмотрение условные вероятности перехода

$$\widetilde{P}_{ij}(t) := \mathsf{P}_i \left\{ Z(t) = j \middle| t < \mathcal{H} < \infty \right\}$$

и соответствующую ПФ

$$\mathcal{V}_i(t; s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{P}_{ij}(t) s^j .$$

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 18. *Если $a \neq 0$, то пределы*

$$\lim_{t \to \infty} \widetilde{P}_{ij}(t) = \nu_j, \quad j \in \mathbb{N},$$

существуют независимо от $i \in \mathbb{N}$, и ПФ $\mathcal{V}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \nu_j s^j$ имеет вид

$$\mathcal{V}(s) = \frac{\mathcal{M}(qs)}{\mathcal{M}(q)}$$

для всех $s \in [0,1)$, *где функция* $\mathcal{M}(s)$ *определена в Теореме 14.*

Теорема 19. *Пусть* $a = 0$. *Если* $2b := f''(s \uparrow 1) < \infty$, *то для всех* $i \in \mathbb{N}$

$$t\mathcal{V}_i(t;s) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1-s} + \rho(t;s),$$

где $\rho(t;s) = \mathcal{O}\left(1/t\right)$ *при* $t \to \infty$, *равномерно для всех* $s \in [0,1)$.

Последние две теоремы подтверждают, что случайный процесс $\widetilde{Z}(t)$, определенный вероятностной мерой $\widetilde{P}_{ij}(t)$ образует непрерывную эргодическую цепь Маркова.

В §3.4 рассматривается марковский ветвящийся процесс с иммиграцией (МВПИ) непрерывного времени. Помимо превращения частиц, эти процессы развиваются за счет возможного случайного притока в популяцию «посторонних» частиц того же типа извне, управляемый случайным механизмом, такой, что за малый промежуток времени $(t, t+\varepsilon)$ с вероятностью $b_j\varepsilon + o(\varepsilon)$ в популяцию иммигрируют $j \in \mathbb{N}$ частицы. С вероятностью $1 + b_0\varepsilon + o(\varepsilon)$ иммиграция отсутствует. Интенсивность притока «частиц-иммигрантов» $b_j \geq 0$ для $j \in \mathbb{N}$ и $0 < -b_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j < \infty$. Поступившие в популяцию «частицы-иммигранты» в дальнейшем претерпевают превращения по закону интенсивностей $\left\{a_j\right\}$. МВПИ полностью задается определением инфинитезимальных ПФ

$$f(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j s^j \quad \text{и} \quad g(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} b_j s^j .$$

Пусть величина $X(t)$ обозначает численность популяции частиц в момент времени t. Состояния МВПИ образуют однородную цепь Маркова непрерывного времени на множестве $\mathbb{N}_0$. Процесс $\left\{X(t)\right\}$ называется докритическим, критическим и надкритическим, если $a < 0$, $a = 0$ и $a > 0$, соответственно. Вследствие марковской природы, переходные вероятности $p_{ij}(t) := \mathsf{P}_i\left\{X(t) = j\right\}$ удовлетворяют уравнениям Колмогорова-Чепмена для любых $i, j \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathcal{T}$. Соответствующая ПФ имеет представление

$$\mathcal{P}_i(t;s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} p_{ij}(t)s^j = \left[F(t;s)\right]^i \exp\left\{\int_0^t g\left(F(\tau;s)\right)d\tau\right\},$$

где $F(t;s) = \mathsf{E}s^{Z(t)}$ ПФ МВП без иммиграции $Z(t)$.

В некритическом случае свойства процесса $X(t)$ исследованы в соответствии с общей классификации состояний непрерывных цепей Маркова. В частности показано, что при $a \neq 0$ и $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j q^j \ln j < \infty$ параметр распада рассматриваемого процесса $\lambda_X = \left|g(q)\right|$ и все его состояния являются λ_X-положительными. Доказано также, что числа

$$\upsilon_j := \lim_{t\to\infty} \frac{p_{0j}(t)}{p_{00}(t)}$$

образуют единственную (с точностью до постоянного множителя) λ_X-инвариантную меру. Кроме этого доказано, что в этих же условиях, для всех $s \in [0,q)$ выполняется сходимость

$$e^{\lambda_X t} \cdot \mathcal{P}_i(t;s) \longrightarrow q^i \cdot \mathcal{C}(s), \quad t \to \infty, \tag{5}$$

где ПФ $\mathcal{C}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \sigma_j s^j$ имеет следующий вид:

$$\mathcal{C}(s) = \exp\left\{\int_s^q \frac{g(x)-g(q)}{f(x)}dx\right\}.$$

Следующая теорема улучшает результат А.Пэйкса, доказанный при конечности моментов $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j j^2 \ln j$ и $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j j \ln j$ для критического случая.

Теорема 20. *Пусть* $a = 0$. *Если* $2b := f''(s\uparrow 1) < \infty$, $\alpha := g'(s\uparrow 1) < \infty$, *то для всех* $i \in \mathbb{N}$ *и для* $s \in [0,1)$

$$t^{\lambda}\mathcal{P}_i(t;s) \longrightarrow \pi(s), \quad t \to \infty,$$

где $\lambda = \alpha/b$ *и ПФ* $\pi(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} \pi_j s^j$ *имеет следующий вид:*

$$\pi(s) = \frac{1}{[b(1-s)]^{\lambda}}\exp\left\{\int_s^1\left[\frac{g(u)}{f(u)} + \frac{\lambda}{1-u}\right]du\right\}.$$

ПФ $\pi(s)$ *порождает инвариантную меру* $\{\pi_j\}$ *для МВПИ.*

Основным результатом §3.5 является следующая теорема, в которой оценена скорость в сходимости (5).

Теорема 21. *Пусть* $a \neq 0$. *Если* $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j q^j \ln j < \infty$ *и выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то для всех* $i \in \mathbb{N}$

$$e^{|g(q)|t}\mathcal{P}_i(t;s) \sim q^i\mathcal{C}(s)\cdot\left(1 + \left(\frac{g'(q)}{|\ln\beta|} - \frac{i}{q}\right)\mathcal{A}(0)\cdot\beta^t\right), \quad t \to \infty,$$

где $\beta := \exp\{f'(q)\}$, *функция* $\mathcal{A}(s)$ *определена равенством (4).*

В §3.6 продолжено исследование свойства МВП, при условии $f''(s\uparrow 1) = \infty$. Из первоначальных рассуждений Главы III следует, что для того чтобы инвариантное распределение $\{\nu_j\}$, определенное в Теореме 18 для некритического случая, имело конечное математическое ожидание

$$m := \mathcal{V}'(s\uparrow 1) = \sum_{j\in\mathbb{N}} j\nu_j = \frac{q}{\mathcal{A}(0)},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $[\mathcal{A}]$.

Пусть $\widehat{F}(t;s) = F(t;qs)/q$, где q есть вероятность вырождения МВП. В случае $q < 1$ ПФ $\widehat{F}(t;s)$ определяет докритический МВП без иммиграции. В следующей лемме найдено асимптотическое представление функции

$$\widehat{R}(t;s) = 1 - \widehat{F}(t;s).$$

Лемма 5. *Пусть* $a \neq 0$. *Тогда для всех* $s \in [0,1)$

$$\widehat{R}(t;s) = (1-s)\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t;1-s)\cdot\beta^{t},$$

где $\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t;x\downarrow 0)=1$ *для всех* $t\in\mathcal{T}$ *и, функция* $\boldsymbol{\ell}_{\beta}(x):=\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t_0;x)\in\mathcal{S}_0$ *для любого фиксированного* $t_0\in\mathcal{T}$. *Если дополнительно, выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то* $\boldsymbol{\ell}_{\beta}(t;1)=\boldsymbol{\ell}_{a}\left(\beta^{t}\right)\to 1/m$ *при* $t\to\infty$.

В случае, когда процесс критический, основным предположением является возможность представления инфинитезимальной ПФ $f(s)$ в виде

$$f(s) = (1-s)^{1+\nu}\boldsymbol{\mathcal{L}}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [\Re_{\nu}]$$

для $s\in[0,1)$, где $0<\nu<1$ и $\boldsymbol{\mathcal{L}}(t)\in\mathcal{S}_{\infty}$. Последнее предположение дает возможность исследовать асимптотические свойства критического процесса $Z(t)$ в случае $f''(s\uparrow 1)=\infty$. В этом случае доказана следующая Основная лемма теории критических МВП.

Лемма 6. *Если выполнено условие* $[\Re_{\nu}]$, *то для всех* $s\in[0,1)$

$$R(t;s) = \frac{\mathcal{N}(t)}{(\nu t)^{1/\nu}}\cdot\left(1-\frac{M(t;s)}{\nu t}\right),$$

где функция $\mathcal{N}(x)$ *определена условием* $[\mathcal{N}]$. *Для функции* $M(t;s)$ *справедливы свойства* $M(t;0)=0$ *и* $M(t;s)\to\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)$ *при* $t\to\infty$, *здесь ПФ* $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s)=\sum_{j\in\mathbb{N}}\boldsymbol{m}_j s^j$ *имеет вид*

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \int_0^s \frac{dx}{f(x)}. \qquad (6)$$

Последние две леммы играют важную роль в исследовании асимптотических свойств случайного процесса $Z(t)$. В частности, с помощью этих лемм доказаны следующие локальные предельные теоремы.

Теорема 22. *Если* $a\neq 0$, *то*

$$\beta^{-t}\cdot P_{11}(t) = \frac{|\ln\beta|}{a_0}\cdot\boldsymbol{\ell}_{a}\left(\beta^{t}\right)\left(1+o(1)\right), \quad t\to\infty,$$

где $\boldsymbol{\ell}_{a}(x)\in\mathcal{S}_0$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то* $\boldsymbol{\ell}_{a}\left(\beta^{t}\right)\to 1/m$ *при* $t\to\infty$.

Теорема 23. *Если* $a=0$ *и выполнено условие* $[\Re_{\nu}]$, *то*

$$(\nu t)^{1+1/\nu}\cdot P_{11}(t) = \frac{1}{a_0}\mathcal{N}(t)\left(1+o(1)\right), \quad t\to\infty,$$

где функция $\mathcal{N}(t)\in\mathcal{S}_{\infty}$ *определена условием* $[\mathcal{N}]$.

Следующая теорема является аналогом Теоремы 14.

Теорема 24. *Пусть* $a\neq 0$ *и* $\tilde{q}=a_0/|\ln\beta|$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{A}]$, *то имеет место соотношение*

$$1-\frac{\mathcal{M}_i(t;qs)}{\tilde{q}\cdot iq^{i-1}}\longrightarrow(1-s)\boldsymbol{\ell}_{\mu}(1-s), \quad t\to\infty,$$

где функция $\boldsymbol{\ell}_{\mu}(x)\in\mathcal{S}_0$ *такая, что* $\boldsymbol{\ell}_{\mu}(1)=1$ *и* $\boldsymbol{\ell}_{\mu}(0)=m$. *Более того*

$$\mathcal{M}(q) = \tilde{q} \qquad и \qquad \mathcal{M}'(q) = \frac{\tilde{q}}{q} m .$$

Из предыдущих параграфов известно, что случайный процесс $\widetilde{Z}(t)$, определенный вероятностной мерой

$$\widetilde{P}_{ij}(t) := \mathsf{P}_i \left\{ Z(t) = j \middle| t < \mathcal{H} < \infty \right\},$$

образует эргодическую цепь Маркова. В следующей теореме установлены свойства инвариантных мер, порожденных ПФ

$$\mathcal{V}_i(t;s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \widetilde{P}_{ij}(t) s^j .$$

Теорема 25. *Пусть выполнено условие* $[\Re_\nu]$. *Тогда для всех* $i \in \mathbb{N}$

$$\nu t \cdot \mathcal{V}_i(t;s) \longrightarrow \boldsymbol{\mathcal{M}}(s), \quad t \to \infty ,$$

где ПФ $\boldsymbol{\mathcal{M}}(s) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \boldsymbol{m}_j s^j$ *определена в (6) и она порождает инвариантную меру* $\{\boldsymbol{m}_j, j \in \mathbb{N}\}$ *для эргодической цепи* $\widetilde{Z}(t)$. *Более того*

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{m}_j = \frac{1}{\nu^2 \cdot \Gamma(\nu)} n^\nu \boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(n),$$

где $\Gamma(*)$ *– Гамма функция Эйлера и* $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(n) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}(n) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

Последняя четвертая глава названа «**Марковские Q-процессы с непрерывным временем**», в ней изучен непрерывный аналог Q-процесса. В первом параграфе определен процесс $W(t)$ вероятностной мерой

$$\left[\mathcal{Q}_{ij}(t)\right] := \left[\lim_{\tau \to \infty} \mathsf{P}_i \left\{ Z(t) = j \middle| t + \tau < \mathcal{H} < \infty \right\}\right]$$

для любого $t \in \mathcal{T}$. Этот процесс называется марковским Q-процессом (МQП) с пространством состояний $\mathcal{E} \subset \mathbb{N}$. Показано, что переходные вероятности МQП имеет следующий вид:

$$\mathsf{P}_i \left\{ W(t) = j \right\} = \mathcal{Q}_{ij}(t) = \frac{j q^{j-i}}{i \beta^t} P_{ij}(t), \quad i, j \in \mathcal{E}, \tag{7}$$

где $\beta = \exp\{f'(q)\}$ и $P_{ij}(t) = \mathsf{P}_i\{Z(t) = j\}$ – переходные вероятности процесса $\{Z(t)\}$. Найдено следующее локальное представление, определяющее изменение вероятностей $\mathcal{Q}_{1j}$ за малый промежуток времени:

$$\mathcal{Q}_{1j}(\varepsilon) = 1 + \lambda_j \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \downarrow 0 ,$$

здесь

$$\lambda_1 = a_1 - \ln \beta \quad и \quad \lambda_j = j q^{j-1} a_j \geq 0 \ \ для \ \ j \in \mathcal{E} \setminus \{1\}. \tag{8}$$

Из полученного представления следует, что процесс $W(t)$ полностью определяется следующей инфинитезимальной ПФ:

$$g(s) := \sum_{j \in \mathcal{E}} \lambda_j s^j = s\left[f'(qs) - f'(q)\right],$$

где $g(s \uparrow 1) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \lambda_j = 0$ и

$$0 < -\lambda_1 = \sum_{j \in \mathcal{E} \setminus \{1\}} \lambda_j < \infty .$$

Известно, что свойство дифференцируемости переходных вероятностей играет важную роль в теории непрерывных цепей Маркова. В частности, матрица с компонентами $q_{ij} := \mathcal{Q}'_{ij}(\varepsilon \downarrow 0)$, называемая q-матрицей, определяет инфинитезимальные характеристики МQП. Если предел

$$q_{ii} = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1 - \mathcal{Q}_{ii}(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

конечен, то состояние $i \in \mathcal{E}$ процесса $W(t)$ называется стабильным.

Теорема 26. *Все состояния МQП стабильны. Функция перехода* $\mathcal{Q}_{ij}(t)$ *непрерывно дифференцируемая по* $t \in \mathcal{T}$ *и, q-матрица* $\left[q_{ij}, i, j \in \mathcal{E}\right]$ *процесса* $W(t)$ *имеет следующие компоненты:*

$$q_{ij} = \begin{cases} i\lambda_1 + (i-1)\ln\beta, & i = j, \\ \dfrac{j\lambda_{j-i+1}}{j-i+1}, & i \neq j, \end{cases}$$

где λ_i *определены в (8). Более того, имеет место*

$$\mathcal{Q}'_{ij}(t) = \sum_{k \in \mathcal{E}} q_{ik} \mathcal{Q}_{kj}(t)$$

– обратная система уравнений Колмогорова.

Введем в рассмотрение ПФ $G_i(t;s) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \mathcal{Q}_{ij}(t) s^j$, соответствующую переходным вероятностям $\mathcal{Q}_{ij}(t)$. Из равенства (7) следует

$$G_i(t;s) = \left[\widehat{F}(t;s)\right]^{i-1} G(t;s),$$

где $\widehat{F}(t;s) = F(t;qs)\big/q$ и

$$G(t;s) = \mathsf{E}s^{W(t)} = \frac{s}{\beta^t} \frac{\partial F(t;u)}{\partial x}\bigg|_{u=qs}.$$

В §4.2 исследованы свойства траекторий процесса $W(t)$. Как и в дискретном случае, классификация состояний этого процесса зависит от значения структурного параметра $\beta = \exp\{f'(q)\}$.

Теорема 27. *Пусть имеется МQП со структурным параметром*

$$\beta = \begin{cases} < 1, & \text{при} \quad k = 1, \\ = 1, & \text{при} \quad k = 2. \end{cases}$$

Если конечен первый момент $\alpha = g'(s \uparrow 1)$*, то*

$$t^{k-\delta_{1k}} \cdot G_i(t;s) = \mathcal{U}(s)\big(1 + o(1)\big), \quad t \to \infty,$$

где $k = 1,2$ *и* δ_{1k} *– дельта Кронекера. ПФ* $\mathcal{U}(s)$ *порождает инвариантную меру* $\left\{u_j, j \in \mathcal{E}\right\}$ *для МQП. Причем*

(i) *если* $\beta < 1$*, то* $\left\{u_j\right\}$ *есть распределение вероятностей и*

$$\mathcal{U}(s) = s\frac{|\ln\beta|}{f(qs)}\mathcal{A}(qs);$$

(ii) *если* $\beta = 1$, *то* $\sum_{j\in\mathcal{E}} u_j = +\infty$ *и*

$$\mathcal{U}(s) = \frac{2s}{\alpha f(s)}.$$

Следующая теорема показывает, что существование инвариантной меры для процесса $W(t)$ можно доказать без предположения моментных ограничений относительно вероятностей $\mathcal{Q}_{ij}(t)$.

Теорема 28. *Для всех* $i, j \in \mathcal{E}$ *существуют пределы*

$$\omega_j := \lim_{t\to\infty}\frac{\mathcal{Q}_{ij}(t)}{\mathcal{Q}_{11}(t)}.$$

Множество чисел $\{\omega_j, j\in\mathcal{E}\}$ *представляет собой инвариантную меру для МQП и соответствующая ПФ имеет вид*

$$\mathcal{W}(s) = \sum_{j\in\mathcal{E}}\omega_j s^j = s\exp\left\{\int_0^s \frac{|\,h(z)\,|}{\widehat{f}(z)}dz\right\}$$

и, она сходится для $s\in[0,1)$, *где* $h(s) = g(s)/s$ *и* $\widehat{f}(s) = f(qs)/q$.

В §4.3 с целью отыскания других предельных законов, отличающихся от законов, полученных в предыдущих параграфах, отказано от условия $\alpha := g'(s\uparrow 1) < \infty$. Для случая $\beta < 1$ предусмотрено условие

$$\sum_{j\in\mathcal{E}}\lambda_j \ln j < \infty. \qquad [\mathcal{L}]$$

Теорема 29. *Если* $\beta < 1$, *то для всех* $i\in\mathcal{E}$

$$G_i(t;s) = s\frac{|\ln\beta|}{\widehat{f}(s)}(1-s)\boldsymbol{\ell}_\beta(t;1-s)\big(1+o(1)\big), \quad t\to\infty,$$

где $\widehat{f}(s) = f(qs)/q$. *Для любого фиксированного* $t_0\in\mathcal{T}$ *функция* $\boldsymbol{\ell}_\beta(x) := \boldsymbol{\ell}_\beta(t_0;x)\in\mathcal{S}_0$ *и* $\boldsymbol{\ell}_\beta(t;x\downarrow 0) = 1$ *для всех* $t\in\mathcal{T}$. *Если выполнено условие* $[\mathcal{L}]$, *то существует предел* $\pi(s) := \lim_{t\to\infty} G_i(t;s)$ *и имеет вид*

$$\pi(s) = s\frac{|\ln\beta|}{m}\frac{1}{\widehat{f}(s)}(1-s)\boldsymbol{\ell}(1-s)$$

для всех $s\in[0,1)$, *здесь функция* $\boldsymbol{\ell}(x)\in\mathcal{S}_0$ *с значениями* $\boldsymbol{\ell}(1) = 1$, $\boldsymbol{\ell}(x\downarrow 0) = m$, *где* $m := \mathcal{V}'(s\uparrow 1)$ *и функция* $\mathcal{V}(s)$ *определена в Теореме 18. ПФ* $\pi(s) = \sum_{j\in\mathcal{E}}\pi_j s^j$ *порождает инвариантное распределение для МQП.*

Для случая $\beta = 1$ требовано выполнение условия $[\Re_\nu]$, которое достаточно для условия $g'(s\uparrow 1) = \infty$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 30. *Если* $\beta = 1$, *то для всех* $i\in\mathcal{E}$ *и* $s\in[0,1)$

$$\frac{(\nu n)^{1+1/\nu}}{\mathcal{N}(t)} \cdot G_i(t;s) = \mu(s)\big(1+\rho(t;s)\big),$$

где $\rho_n(s) \to 0$ *при* $t \to \infty$ *равномерно для всех* $s \in [0,1)$. *Функция* $\mathcal{N}(t)$ *определена условием* $[\mathcal{N}]$. *ПФ* $\mu(s) = \sum_{j\in\mathcal{E}} \mu_j s^j$ *имеет следующий вид:*

$$\mu(s) = \frac{s}{(1-s)^{1+\nu}} \boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu\left(\frac{1}{1-s}\right),$$

где $\boldsymbol{\mathcal{L}}_\mu(t) \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}}(t) \to 1$ *при* $t \to \infty$ *и множество чисел* $\{\mu_j\}$ *образует инвариантную меру относительно вероятностей* $\mathcal{Q}_{ij}(t)$.

Теорема 31. *Пусть* $\beta = 1$. *Тогда для всех* $i \in \mathcal{E}$

$$\mathsf{P}_i\left\{\frac{\mathcal{N}(t)}{(\nu t)^{1/\nu}} W(t) < x\right\} \longrightarrow G(x), \quad t \to \infty,$$

где функция $\mathcal{N}(t)$ *определена условием* $[\mathcal{N}]$ *и преобразование Лапласа*

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-\theta x} dG(x) = \frac{1}{(1+\theta^\nu)^{1+1/\nu}}.$$

Утверждение Теоремы 31 обобщает известную теорему Харриса, установленную для $\nu = 1$ и при $g'(s \uparrow 1) < \infty$ для Q-процесса. Действительно, в случае, когда $\nu = 1$, преобразование Лапласа в теореме принимает вид $(1+\theta)^{-2}$, что соответствует закону Эрланга $1 - e^{-x} - xe^{-x}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию свойств траекторий ветвящихся процессов с дискретным и непрерывным временем, изучению свойств инвариантных мер и задачам оценки скорости сходимости к инвариантным мерам для процессов с иммиграцией, а также исследованию предельной структуры ветвящихся процессов, не вырождающихся в далеком будущем при минимальных моментных условиях.

В заключение можно сделать следующие выводы по результатам диссертационной работы.

1. Получены асимптотические представления для производящих функций и их дифференциала в некритических ветвящихся случайных процессах с дискретным и непрерывным временем, имеющих бесконечный момент порядка $1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ закона превращения частиц и найдены явные виды производящих функций инвариантных мер.
2. Для критических процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией, имеющих бесконечный первый момент случайного закона притока иммиграции частиц и бесконечную дисперсию закона превращения частиц, исследовано эргодическое свойство, оценена скорость сходимости к инвариантным мерам в ветвящихся процессах с иммиграцией.
3. Доказана основная лемма и ее дифференциальный аналог теории критических ветвящихся процессов с бесконечным вторым моментом и с дискретным и непрерывным временем, исследованы инвариантные свойства переходных вероятностей и найдены явные виды производящих функций инвариантных мер этих процессов.
4. Найден предельный закон совместного распределения числа поколений и общего числа частиц всех поколений в Q-процессе, с не вырождающейся траекторией в далеком будущем, классифицированы состояния марковских Q-процессов, исследованы их структурные и асимптотические свойства.

Работа носит теоретический характер. Результаты и методы исследования могут быть использованы в дальнейших исследованиях в задачах демографии, медицины, биологии, химии, физики и генетики.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.27.06.2017.FM.01.01 AT THE NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN, INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

IMOMOV AZAM ABDURAKHIMOVICH

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF STOCHASTIC BRANCHING PROCESSES

01.01.05 – Probability Theory and Mathematical Statistics (Physical and Mathematical sciences)

ABSTRACT

of Doctoral Dissertation (DSc) on Physical and Mathematical Sciences

Tashkent – 2019

The theme of doctoral dissertation (Doctor of Science) was registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.1.DSc/FM131.

The dissertation has been prepared at the V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website of Scientific Council (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the website of «ZiyoNet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific advisor:	**Khusanbaev Yakubdjan Mukhamadjanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Official opponents:	**Hajiyev Asaf Haji** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of Azerbaijan
	Khodjibaev Vali Rahimdjanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Raimova Gulnora Mirvalievna Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Taras Shevchenko Kyiv National University, Ukraine**

Defense will take place on «____» ______________ 2019 at _____ at the meeting of Scientific Council DSc.27.06.2017.FM.01.01 at National University of Uzbekistan, Institute of Mathematics. (Address: University street, 4, Almazar district, 100174 Tashkent, Uzbekistan. Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №_____) (Address: University street, 4, Almazar district, 100174 Tashkent, Uzbekistan. Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «______» _________________ 2019.

(mailing report № ___________on «______» _________________ 2019)

A.Sadullaev
Chairman of Scientific Council on award of
scientific degrees, D.F.-M.S., Professor, Academician

G.I.Botirov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of
scientific degrees, PhD on F.-M.S

Sh.K.Formanov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor, Academician

ABSTRACT of DSc Dissertation

Urgency and demand of the dissertation topic. The theory of stochastic branching processes is an area of modern probability theory that provides appropriate mathematical models to describe the probabilistic evolution of many natural and technical phenomena connected with population growth. Appearing as a special scientific field in the forties of the twentieth century, this theory, due to the applied and descriptive nature of the explored problems and phenomena, is a well developed and one of active scientific areas with theoretical interests and practical applications. The theory of branching processes has applied successfully in various fields and by present time, it has made important contributions to theoretical physics, molecular biology, chemistry, demography, medicine and to many other areas of applied science.

At present, the spectrum of applications of the theory of the branching processes is still expanding. It covers in particular, the description of the probabilistic evolutions of various biological populations, the study of the problems of the queuing theory and many other problems of current interest. The advancement of this theory, on the one hand is due to the demand for an in-depth study of classical models and, on the other hand, it occurs due to the creation of new particle transformation schemes that deeply and clearly describe the essence of the real phenomena under studying. In this context, the gradual improvement of the available results within of the classical models and research aimed to establish new results that most correspond to the natural conditions is urgent task.

The foregoing gives reason to assert that the research conducted on the topic of dissertation is relevant and important from the point of view of applications.

The aim of the research work is to find limit distributions for stochastic branching processes with discrete and continuous time at minimal moment conditions, to construct invariant measures and estimate the convergence rates to invariant measures for the processes with immigration, to find limit distributions for branching processes with non-degenerate trajectories in the remote future.

The objects of the research work are Galton-Watson stochastic branching processes, continuous time Markov branching processes, branching processes allowing immigration, Markov Q-processes.

The scientific novelty of the research is as follows:

asymptotic representations for generating functions and their differential of noncritical branching processes with infinite moment of order $1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$, with discrete and continuous time are obtained; explicit forms of generating functions of invariant measures of the processes are obtained;

an asymptotic representation for the transition probabilities of the critical Galton-Watson processes with immigration, forming an ergodic Markov chain is obtained, in which the immigration stream law has an infinite first moment and the per capita offspring law has an infinite second moment;

the Basic lemma and its differential analogue of the theory of critical Galton-Watson Branching Process and continuous time Markov Branching Processes with infinite second moment are proved; the speed rates of convergence to invariant measures in Galton-Watson Branching Process and in continuous time Markov Branching Processes with immigration are established; explicit forms of the generating functions of invariant measures of these processes are found;

the Laplace transform for the limit of the joint distribution law of population size and the total progeny in Q-process is found; the Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem for the total progeny in Q-process are proved; components of the q-matrix of the Markov Q-processes are found, structural and asymptotic states of Markov Q-processes are classified.

Implementations of the research results. The results obtained in the dissertation have been used in the following research projects:

limit theorems for the Galton-Watson Branching Processes and for the Galton-Watson Branching Processes allowing Immigration have been used in the research Grant № 337/07, 06-223-3-104 – "Nonparametric evaluations of distribution density and regression function, stochastic analysis and applications in financial mathematics" (Enquiry of Georgian Statistical Association dated June 26, 2018). The application of these limit theorems have contributed to find limit probabilities for some stochastic processes;

the asymptotic formulas for the local probabilities of Markov Branching Processes have been used in the research project № FR/308/5-104/12 – "Some problems of statistical estimations and stochastic analysis" (Enquiry of Georgian Statistical Association dated June 26, 2018). The application of these limit theorems have contributed to prove limit theorems for some stochastic processes;

the asymptotic formulas and methods of their proof for the Markov Branching Processes and processes allowing immigration have been used in the realization of research project №1.511.2014/K – "Investigation of mathematical models of information streams, computer networks, algorithms of processing and data transmission" within the project part of the Governmental task of Russian Federation (Enquiry of Institute of applied mathematics and computer sciences dated October 1, 2018, Tomsk, Russia). These results have been used in creation of modifications of a method of asymptotic analysis for the analysis of characteristics and parameters of models of wireless communication networks and have contributed to increase their efficiency.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 200 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Imomov A.A. On a limit structure of the Galton-Watson branching processes with regularly varying generating functions // Probability and mathematical statistics, vol. 39(1), 2019, Available online. (№ 4. Journal Citation Report, IF=0.452).
2. Imomov A.A. On conditioned limit structure of the Markov branching process without finite second moment // Malaysian Journal of Mathematical Sciences, vol. 11(3), 2017, pp. 393–422. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.14).
3. Imomov A.A. On a conditioned Limit Structure of the Markov Branching Process // International Jour. Applied Math., Electronics and Computers, vol. 5(1), 2017, pp. 25–28. (№ 5. Global Impact Factor, IF =0.665).
4. Imomov A.A. On a limit structure of continuous-time Markov Branching Process // Journal of Siberian Federal University: Mathematics and Physics, vol. 10(1), 2017, pp. 117–127. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.247).
5. Imomov A.A. The renewed limit theorems for the discrete-time branching process and its conditioned limiting law interpretation // New Trends in Mathematical Sciences, vol. 4(4), 2016, pp. 213–238. (№ 5. Global Impact Factor, IF=0.654).
6. Imomov A.A. On long-time behaviors of states of Galton-Watson branching processes allowing immigration // Journal of Siberian Federal University: Mathematics and Physics, vol. 8(4), 2015, pp. 394–405. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.247).
7. Имомов А.А. Несколько замечаний об асимптотических свойствах состояний марковских ветвящихся процессов с иммиграцией // Вестник НУУз, 2(1), 2015, сс. 24–32. (01.00.00; № 8).
8. Imomov A.A. On Long-Term Behavior of Continuous-Time Markov Branching Processes Allowing Immigration // Journal of Siberian Federal University: Mathematics and Physics, vol. 7(4), 2014, pp. 429–440. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.247).
9. Imomov A.A. Limit properties of transition functions of continuous time Markov branching processes // International Journal of Stochastic Analysis, vol. 2014, 10 pages. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.28).

10. Imomov A.A. Limit theorem for joint distribution in Q-processes // Journal of Siberian Federal University: Mathematics and Physics, vol. 7(3), 2014, pp. 289–296. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.247).
11. Imomov A.A. Some remarks on Long-surviving Discrete-time Branching Process // Вестник НУУз, № 2(1), 2014, сс. 35–42. (01.00.00; № 8).
12. Имомов А.А. Об уточнении одной предельной теоремы из теории Q-процессов // Вестник НУУз, № 4, 2013, сс. 211–214. (01.00.00; № 8).
13. Imomov A.A. On a Markov analogue of continuous-time Q-processes // Theory of Probability and Mathematical Statistics, № 84, 2012, pp. 57–64. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.21).
14. Форманов Ш.К., Имомов А.А. Об асимптотических свойствах Q-процессов // Узб. Мат. Журнал, № 3, 2011, сс. 175–183. (01.00.00; № 6).
15. Imomov A.A. A Differential Analog of the Main Lemma of the Theory of Markov Branching Processes and Its Applications // Ukrainian Math. Journal, vol. 57(2), 2005, pp. 307–315. (№ 3. Scopus, SJR, IF=0.338).
16. Имомов А.А. Об одном виде условия не вырождения ветвящихся процессов // Узб. Мат. Журнал, № 2, 2001, сс. 46–51. (01.00.00; № 6).

II бўлим (Часть II; Part II)

17. Имомов А.А. О предельной структуре марковских ветвящихся процессов с возможной бесконечной дисперсией // Материалы Республиканской Научно-практ. Конференции «Статистика и ее применения», сс. 160–166, 19–20 Октября, 2017, Ташкент.
18. Imomov A. A., Meyliyev A. Kh., Tukhtayev E. E. On some limit results for critical Galton-Watson branching processes with infinite variance // Abstracts of the Second USA-Uzbekistan Conf. on Analysis and Math. Physics, p. 84–85, August 8–12, 2017, Urgench, Uzbekistan.
19. Imomov A.A. On refinement of one limit theorem in theory of critical branching processes // Book of abstracts of XXXIVth Intern. Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, p. 40, August 25–29, 2017, Debrecen, Hungary.
20. Imomov A.A. Some Remarks on Limit Results of the Theory of Discrete Time Branching Processes // Book of Abst. of 17th Int. Conf. Applied Stochastic Models and Data Analysis with the 6th Demographics Workshop, p. 98, June 6–9, 2017, London, UK.
21. Форманов Ш.К., Имомов А.А., Мейлиев А.Х. О применении регулярно меняющихся функций в теории марковских ветвящихся процессов // Материалы Конференции «Актуальные вопросы анализа», сс. 309–311, 22–23 Апреля, 2016, Карши.

22. Imomov A.A. Some discussion on behaviors of Markov Q-Process // Journal of Statistics Applications and Probability, vol. 4(2), 2015, pp. 231–238. NS Publishing Corp., USA. (Google-based IF=0.952).
23. Imomov A.A. Asymptotic behaviors of Markov branching processes and their conditioned limiting interpretation // Journal of Islamic Countries Society of Statistical Sciences, vol. 1(1), 2015, pp. 57–82.
24. Имомов А.А. Об одном свойстве структурного параметра марковского Q-процесса // Межвузовский сборник научных трудов «Статистические методы оценивания и проверки гипотез», вып. 26, 2015, сс. 95–105. ISBN 978-5-7944-2629-8. Пермь, Россия.
25. Imomov A.A. An invariant property of transition functions of simple Branching Processes allowing Immigration // Proc. of Conf. "Statistics and its Applications", pp. 145–148, October 16–17, 2015, Tashkent.
26. Imomov A.A. Conditioned limiting interpretation of Markov Branching processes // Abst. of 16th Int. Conf. Appl. Stoch. Models and Data Analysis and 4th Demographics Workshop, p. 56, June–July, 2015, Piraeus, Greece.
27. Imomov A.A. Continuous-time Markov Branching Processes: Long-term Behaviors and Conditioned Limiting Law Interpretation // Proc. of VII Fergana conference Limit theorems Prob. theor. and Appl., pp. 140–145, May 11–12, 2015, Namangan.
28. Имомов А.А. Об инвариантных свойствах состояний процессов Гальтона-Ватсона с иммиграцией // Материалы межд. Конференции «Теория вероятностей, случайные процессы, мат. статистика и приложения», сс. 50–54, 22–24 Февраля, 2015, Минск, Беларусь.
29. Имомов А.А., Мейлиев А.Х. Несколько замечаний об асимптотических свойствах процессов Гальтона-Ватсона // Материалы международной Конференции «Теория вероят., случайные процессы, мат. статистика и приложения», сс. 55–59, 22–24 Февраля, 2015, Минск, Беларусь.
30. Имомов А.А. Об одной оценке для среднего числа поколений в Q-процессе // Межвузовский сборник научных трудов «Статистические методы оценивания и проверки гипотез», вып. 25, 2013, сс. 126–131. ISBN 978-5-7944-2286-3. Пермь, Россия.
31. Imomov A.A. On one properties of Q-processes // Proc. of Conf. "Statistics and its Applications", pp. 148–151, October 17–18, 2013, Tashkent.
32. Imomov A.A. On immortal branching processes in random environments // Proc. of Intern. Conf. "Problems of modern topology and applications", pp. 42–44, May 20–24, 2013, Tashkent.
33. Имомов А.А. Q-процессы как долгоживущие ветвящиеся случайные процессы // Межвузовский сборник научных трудов «Статистические методы оценивания и проверки гипотез», вып. 24, 2012, сс. 137–144. ISBN 978-5-7944-2014-2. Пермь, Россия.

34. Imomov A.A. The limit theorem for joint distribution in Q-process. Proc. of Conf. FAMES'2012, pp. 29–33, April 22–23, 2012, Krasnoyarsk, Russia.
35. Imomov A.A. The Markov Q-process as a special class of branching process allowing immigration // Abstracts of Intern. Conf. “Probability Theory and its Applications”, pp. 102–103, June 26–30, 2012, Moscow, Russia.
36. Имомов А.А. О предельном законе распределения флуктуации Q-процессов // Материалы научной конференции «Статистика и ее применения», 17–18 Октября, 2012, Ташкент.
37. Imomov A.A. On stationary measures of continuous time Q-processes // Conference on “Stochastic Models and their Applications”, pp. 35–36, August 22–24, 2011, Debrecen, Hungary.
38. Imomov A.A., Tukhtaev E. On asymptotic properties of Q-processes and its connection with Branching Processes allowing Immigration // Proc. Conf. “Limit theorems of Prob. theory and Appl.”, pp. 141–142, 2011, Fergana.
39. Imomov A.A. On asymptotic properties of total progeny in Q-processes // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting, between Samarkand State University and Malaysian Math. Sciences Society, pp. 132–134, June 3–5, 2011, Samarkand.
40. Imomov A.A., Tukhtaev E. On connection between the Q-processes and the Branching Processes allowing Immigration // Proceedings of Conf. “Modern Mathematics’ Problems”, pp. 11–14, April 22-23, 2011, Karshi.
41. Имомов А.А. Об асимптотических свойствах непрерывного аналога Q-процессов // Труды конференции ФАМЭБ'2011, сс. 158–162, 23–25 Апреля, 2011, Красноярск, Россия.
42. Imomov A.A. On continuous time analogues of Q-processes // Abst. of Conf. “Modern Stochastics: Theory and Applications II”, p. 38, September 7–11, 2010, Kiev, Ukraine.
43. Imomov A.A. Locally-differential analogue of the basic lemma of the Galton-Watson processes and the Q-processes // Third International Conf. PCI’2010, pp. 182–186, September 6–8, 2010, Baku, Azerbaijan.
44. Imomov A.A., Azimov Dj.B. On one criterion of convergence to exponential law // Third International Conference PCI’2010, pp. 180–182, September 6–8, 2010, Baku, Azerbaijan.
45. Имомов А.А. Асимптотическая нормальность общего числа частиц в Q-процессе // Труды научно-практ. семинара по Теории вер. и мат. статист., сс. 20–22, 10 Мая, 2010, Ташкент.
46. Имомов А.А. Q-процессы как ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона с иммиграцией // Труды конференции ФАМЭТ'2010, сс. 148–152, 23–25 Апреля, 2010, Красноярск, Россия.

47. Imomov A.A. One model of Branching Processes // Abstracts of comm. of International Conference “Stochastic analysis and Random Dynamics”, pp. 92–93, June 14–20, 2009, Lvov, Ukraine.

48. Имомов А.А. Об одном условии невырождения ветвящихся процессов в случайной среде // Матер. Конф. «Современные проблемы математики, механики и информ. технологий», 8 Мая, 2008, Ташкент.

49. Имомов А.А. Метод Стейна-Тихомирова в теории критических ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона // Матер. 5-Межд. Ферганской конф. «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения», сс. 110–114, 10–12 Мая, 2005, Фергана.

50. Имомов А.А. Дифференциальный аналог основной леммы теории марковских ветвящихся процессов и его применения // Материалы Конфер. «Сираждиновские чтения», сс. 47–54, 8 Мая, 2004, Ташкент.

51. Imomov A.A. Some asymptotical behaviors of Galton-Watson branching processes under condition of non-extinctinity of it remote future // Abst. of comm. of 8th Vilnius Conference on Probability Theory and Mathematical Statistics, p. 118, June 23–29, 2002, Vilnius, Lithuania.

52. Имомов А.А. О предельных законах распределения ветвящихся случайных процессов Гальтона-Ватсона // Тезисы доклад конференции «Актуальные проблемы теории вероятностей и дифференциальных уравнений», сс. 44–45, 2001, Ташкент.

53. Форманов Ш.К., Имомов А.А. Условные предельные теоремы для ветвящихся процессов при условии не вырождения «в далеком будущем» // Тезисы докл. конф. по теор. вероят. и мат. стат., сс. 55–56, 10–12 Мая, 2000, Ташкент.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали»
таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(18.04.2019 йил)

Автореферат редактирован в редакции
журнала «Узбекский математический журнал»
(18.04.2019 год)

The dissertation abstract redacted by the editor-in-chief
of the journal of “Uzbek Mathematical Journal”
(18.04.2019 year)

Босишга рухсат этилди: 06.05.2019 йил.
Бичими 60×84 $^1/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Ҳажми: 4 босма табоқ. Адади: 100. Буюртма: № 36.

Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси
«Фан» нашриёти давлат корхонаси босмахонасида чоп этилди.
100047, Тошкент ш., М.Улуғбек кўчаси, 81-уй.