УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАСАНОВ МУЗАФФАР МАШАРИПОВИЧ

МОСЛАНГАН МАНБАЛИ ЮКЛАНГАН НОЧИЗИҚЛИ ШРЕДИНГЕР ВА МОДИФИЦИРЛАНГАН КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

УРГАНЧ – 2019

УДК: 517.957

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ, ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖА БЕРУВЧИ PhD.28.12.2017.FM.55.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ХАСАНОВ МУЗАФФАР МАШАРИПОВИЧ

МОСЛАНГАН МАНБАЛИ ЮКЛАНГАН НОЧИЗИҚЛИ ШРЕДИНГЕР ВА МОДИФИЦИРЛАНГАН КОРТЕВЕГ-ДЕ ФРИЗ ТЕНГЛАМАЛАРИНИ ДАВРИЙ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИДА ИНТЕГРАЛЛАШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

УРГАНЧ – 2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3.PhD/FM111 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Урганч Давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.ik-mat.urdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Хасанов Ақназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Мамедов Қудрат Алломович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг Математика Институти**

Диссертация ҳимояси Урганч Давлат университети, Қорақалпоқ Давлат университети ҳузуридаги PhD.28.12.2017.FM.55.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил 16 декабр соат 14^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (99862) 224-66-11; факс: (99862) 224-67-00; e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

Диссертацияси билан Урганч Давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (Д-229-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 220100, Урганч ш., Ҳ.Олимжон кўчаси, 14-уй. Тел.: (99862) 224-66-11; факс: (99862) 224-67-00).

Диссертация автореферати 2019 йил «____» ________________куни тарқатилди.
(2019 йил «____» ________________ даги ________ рақамли реестр баённомаси).

Б.И. Абдуллаев
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

А.А. Атамуратов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

А.Б. Яхшимуратов
Илмий даража берувчи Илмий
кенгаш қошидаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар натижаларининг статистик таҳлили мосланган манбали ночизиқли тенгламаларни ўрганиш долзарб эканлигини кўрсатади. Спектрал анализнинг тўғри ва тескари масалалари табиатнинг турли ҳил соҳаларида, квант механикасида энергия сатҳлари маълум бўлганида атомларнинг ички кучини аниқлашда, радиотехникада, эластиклик назариясида, эллиптик мембрананинг тебраниш жараёнини ўрганишда, қаттиқ жисмларнинг кристалл структураларини моделлаштиришда ва замонавий математик физиканинг ночизиқли эволюцион тенгламаларининг ечимларини топишда қўлланилади. Шу боисдан юкланган ночизиқли Шредингер тенгламасини ва мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш масаласи замонавий математик физиканинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда ночизиқли тўлқинлар назариясидаги изланишлар, жумладан, оптик солитонлар телекоммуникацион технологиялар соҳасида қўллланила бошлади. Ҳақиқий физик системалар классик тенгламалар модификацияларидан бири бўлган мосланган манбали тенгламалар билан характерланади. Бундан ташқари, физик системаларга таъсир этувчи кучлар фақат вақтнинг маълум бир даври мобайнида чегараланган бўлади, шунинг учун ҳақиқий моделлар фазовий ўзгарувчилар бўйича даврий ва деярли даврий функциялар синфидаги тенгламаларни ўрганишга келтирилади. Ночизиқли оптика, плазма физикаси, гидродинамика ва бошқа соҳаларда спектрал анализнинг тескари спектрал масалаларини қўллаш устувор йўналишлардан бири ҳисобланади. Шу муносабат билан даврий функциялар синфида юкланган ночизиқли Шредингер тенгламаси ва мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси, шунингдек, юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда амалий татбиққа эга бўлган фундаментал фанларга алоҳида эътибор қаратилган. Хусусан, ночизиқли тўлқинлар назарияси, дифференциал операторларнинг спектрал назарияси ва математик физика масалаларини ўрганишга эътибор кучайди. Бунинг натижасида тўғри ва тескари спектрал масалалар ёрдамида математик физиканинг ночизиқли эволюцион тенгламаларини тўла интеграллашда салмоқли натижаларга эришилди. Математик физика ва математик физиканинг замонавий усуллари соҳасида ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифа ва йўналиш этиб белгиланди[1]. Ушбу қарорлар ижросини таъминлаш мақсадида тескари спектрал масалалар назариясини, мосланган

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сон қарори.

манбали ночизиқли тенгламаларни, шунингдек, юкланган ночизиқли тенгламаларни интеграллашни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори ва 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Гарднер, Грин, Крускал ва Миура томонидан ночизиқли Кортевег-де Фриз (КдФ) тенгламаси учун қўйилган Коши масаласининг ечими топилганидан сунг, П.Лакс сочилиш назариясининг тескари масаласи усули универсал характерга эга эканлигини кўрсатган. Бу борада кейинги мухим натижа В.Е.Захаров ва А.Б.Шабат томонидан олинган ночизиқли Шредингер тенгламасининг тўла интегралланиши бўлди. В.Е.Захаров ва А.Б.Шабат ишларининг ғоясидан фойдаланиб, М.Вадати модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини ечиш усулини берган.

Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Р.Итс, В.Б.Матвеев, П.Лакс ва бошқаларнинг ишларида даврий потенциалли Штурм-Луивилл оператори учун тескари масала ёрдамида чекли зонали функциялар синфида КдФ тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлиши исботланган.

Солитонлар математик назарияси ривожланишининг замонавий босқичида комплекс қийматли ночизиқли тенгламалар катта қизикиш касб этади. А.Р.Итс, В.П.Котляров, А.О.Смирнов ва бошқаларнинг ишларида Дирак оператори учун тескари масала усули ёрдамида чекли зонали функциялар синфида ночизиқли Шредингер тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлиши кўрсатилган, А.В.Борзых, А.Б.Хасанов, А.А.Рейимберганов ва бошқаларнинг ишларида эса ночизиқли Шредингер типидаги ночизиқли тенгламалар ўрганилган.

В.К.Мельников, П.Г.Гриневич, И.А.Тайманов, А.Б.Хасанов, Г.У.Уразбоев, А.Б.Яхшимуратов, К.А.Мамедов, У.А.Хоитметов, А.А.Рейимберганов, Y.Shao, Y.B.Zeng, W.X.Ma, R.L.Lin, T.Grava, А.Минаков томонидан мосланган манбали КдФ ва мКдФ тенгламалари ҳамда мосланган манбали ночизиқли Шредингер тенгламаси турли функционал синфларда интегралланган.

Юкланган КдФ тенгламаси А.Б.Яхшимуратов ва М.М.Матяқубов томонидан тадқиқ қилинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Урганч давлат университети “Амалий математика ва математик физика” кафедрасининг илмий тадқиқот ишлари режасига мувофиқ ва Урганч давлат университетининг Ф-4-61 «Мосланган манбали ночизиқли эволюцион тенгламаларни тескари масала усулида интеграллаш» (2012-2016 йй.) илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади дифференциал операторлар учун тескари спектрал масала ёрдамида даврий функциялар синфида юкланган ночизиқли Шредингер тенгламаси ва мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг ечимларини топишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

даврий функциялар синфида мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлишини исботлаш;

даврий функциялар синфида юкланган ҳадли модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлишини исботлаш;

даврий функциялар синфида йиғинди кўринишидаги мосланган манбали юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлишини исботлаш;

даврий функциялар синфида интеграл кўринишидаги манбали юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлишини исботлаш;

даврий функциялар синфида юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлишини исботлаш.

Тадқиқот объекти. Мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси, юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси, юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер тенгламаси.

Тадқиқот предмети. Даврий потенциалли Дирак оператори учун спектрал масалани ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашга қўллаш**.**

Тадқиқот усуллари. Диссертацияда математик анализ, математик физика, дифференциал операторларнинг спектрал назарияси, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назариясидан, шунингдек, дифференциал тенгламаларни ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

даврий функциялар синфида мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

даврий функциялар синфида юкланган ҳадли модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

даврий функциялар синфида йиғинди кўринишидаги мосланган манбали юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

даврий функциялар синфида интеграл манбали юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

даврий функциялар синфида юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер тенгламаси ва мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси учун қўйилган Коши масалаларининг ечимларини топиш алгоритмлари ишлаб чиқилган;

юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер ва мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламалари ечимларининг фазовий ўзгарувчилар бўйича аналитиклиги аниқланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги даврий коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари спектрал масалаларни ечишда математик физика, спектрал анализ, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланиш ва уларни ночизиқли эволюцион тенгламаларга қўллаш, шунингдек, математик мулоҳазалар ва исботлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Диссертациянинг илмий аҳамияти олинган илмий натижалардан чизиқли операторларнинг спектрал назарияси, гидродинамика ва квант физикасида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертациянинг амалий аҳамияти олинган илмий натижалардан математик физикада ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашга татбиқ қилиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши асосида:

даврий функциялар синфида мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш масаласи MTM2013-43014-P рақамли "Nonlinear Ordinary Differential Equations" хорижий илмий лойиҳасида манбали эволюцион эллиптик тенгламалар ечишда қўлланилган (Испания давлатининг Сантиаго де Компостелла университетининг 2019 йил 21 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши мосланган манбали эволюцион эллиптик тенгламалар билан боғлиқ динамик системаларнинг фазавий ўзгаришларини баҳолаш имконини берган.

мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз ва юкланган ҳадли модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаларини даврий функциялар синфида интеграллашга оид натижалар «Qualitative properties and bifurcations of differential equations and dynamical systems» хорижий илмий лойиҳасида ночизиқли дифференциал тенгламалар ечимини таҳлил қилишда қўлланилган (Братиславадаги Комениус университетининг 2019 йил 25 октябрдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ночизиқли тенгламалар билан боғлиқ динамик системалар ҳолатлари ўзгаришини баҳолаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий мазмуни 2 та халқаро ва 7 та республика, жами 9 та илмий-амалий конференцияда муҳокама қилинган. Мазкур диссертация ЎзРФА В.И.Романовский номидаги Математика институтининг «Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг замонавий муаммолари» Республика семинарида, Ўзбекистон Миллий университетининг «Математик физиканинг замонавий муаммолари» семинарида, Самарканд давлат университети «Дифференциал тенгламалар» ва «Функционал анализ ва математик физика» кафедраларининг бирлашган семинарида, Урганч давлат университетининг «Амалий математика ва математик физика» кафедраси семинарида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестацияси комиссиясининг фалсафа доктори диссертацияларини ҳимоя қилишда тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, ҳулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 113 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Бутун ўқда берилган даврий потенциалли Дирак оператори учун тескари масала»** деб номланган биринчи бобида Дирак оператори учун тескари спектрал масала ўрганилган.

Биринчи бобнинг биринчи бўлимидан тўртинчи бўлимигача, диссертация мазмунини очиб беришда ишлатиладиган, бутун ўқдаги Дирак оператори учун қўйилган тўғри ва тескари спектрал масалага оид бўлган маълумотлар келтирилган.

Бутун ўқда қуйидаги Дирак тенгламалар системасини кўриб чиқамиз

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in R, \qquad (1)$$

бунда $p(x), q(x) \in C(R)$ - ҳақиқий π даврли функциялар.

$c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ ва $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ орқали (1) тенгламанинг $c(0,\lambda) = (1,0)^T$ ва $s(0,\lambda) = (0,1)^T$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз. $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ функцияга (1) Дирак оператори учун Ляпунов функцияси ёки Хилл дискриминанти дейилади.

Бу ҳолда ($\psi_1^{\pm}(0,\lambda) = 1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари қуйидаги кўринишга эга

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda).$$

L операторнинг спектри қуйидаги тўпламдан иборат:

$$E = \{\lambda \in R : -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\} = R \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}).$$

Ушбу $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ интервалларга лакуналар дейилади. Бу ерда λ_{4k-1}, λ_{4k} сонлар (1) тенгламага қўйилган ($y_1(0) = y_1(\pi)$, $y_2(0) = y_2(\pi)$) даврий, λ_{4k+1}, λ_{4k+2} сонлар эса ($y_1(0) = -y_1(\pi)$, $y_2(0) = -y_2(\pi)$) яримдаврий чегаравий масаланинг хос қийматлари. ξ_n, $n \in Z$ орқали (1) тенглама учун қўйилган ($y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$) Дирихле чегаравий масаласининг хос қийматларини белгилаймиз. $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ эканлигини кўриш қийин эмас.

1-таъриф. $\xi_n, \quad n \in Z$ сонлар ва $\sigma_n = sign\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}, \quad n \in Z$ ишоралар кетма-кетлигига (1) операторнинг спектрал параметрлари дейилади.

2-таъриф. Спектрнинг $\lambda_n, \ n \in Z$ чегаралари ва $\xi_n, \sigma_n, \ n \in Z$ спектрал параметрларга (1) операторнинг спектрал берилганлари дейилади.

3-таъриф. (1) операторнинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади, спектрал берилганлар бўйича $p(x)$ ва $q(x)$ потенциалларни тиклаш масаласига эса тескари спектрал масала дейилади.

$p(x)$ ва $q(x)$ – потенциаллар ўзининг $\{\lambda_{n-1}, \xi_n, \sigma_n = \pm 1, n \in Z\}$ спектрал берилганлари орқали ягона аниқланади.

Агар (1) тенгламада $p(x)$ ва $q(x)$ ларнинг ўрнида $p(x+\tau)$ ва $q(x+\tau)$ ларни қарасак, у ҳолда ҳосил бўлган операторнинг спектри τ параметрга боғлиқ бўлмайди: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n, \ n \in Z$, спектрал параметрлар эса τ параметрга боғлиқ бўлади: $\xi_n = \xi_n(\tau), \quad \sigma_n = \sigma_n(\tau), \quad n \in Z$. Бу спектрал параметрлар Дубровин дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi) \times [2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)], \ n \in Z .$$

Бу ерда

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} .$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ ишора $\xi_n(\tau)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Дубровин дифференциал тенгламалар системаси ҳамда қуйидаги излар формулалари

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau)), \quad q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau)), \qquad (2)$$

биргаликда тескари спектрал масалани ечиш усулини беради.

Диссертациянинг **«Даврий функциялар синфида мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллаш»** деб номланган иккинчи бобида Дирак оператори ёрдамида даврий функциялар синфида мКдФ тенгламаси, катор манбали мКдФ тенгламаси, интеграл манбали мКдФ тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Иккинчи бобнинг биринчи бўлимида мКдФ тенгламаси даврий функциялар синфида интегралланган.

Ушбу

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx}, \quad t > 0 , \ x \in R , \ t > 0 , \qquad (3)$$

мКдФ тенгламасига қўйилган

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x) \qquad (4)$$

Коши масаласини кўриб чиқамиз. Бу ерда $q_0(x)$ функция олдиндан берилган π даврли бўлиб, $q_0(x) \in C^3(R)$. (3) тенгламанинг (4) бошланғич шартни ва ушбу

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0) \tag{5}$$

силлиқлик шартини қаноатлантирувчи, x ўзгарувчи бўйича π даврли

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t), \quad x \in R, \ t>0 \tag{6}$$

$q = q(x,t)$ ҳақиқий ечимини топиш талаб қилинади.

1-теорема. Агар $q(x,t)$ функция (3)-(6) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда

$$L(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ x \in R, \tag{7}$$

оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n \in Z$ сонлар τ ва t параметрлар-га боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$ $n \in Z$ спектрал параметрлар эса қуйида-ги

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \cdot \{-2\xi_n [q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3\}, \ n \in Z \tag{8}$$

Дубровин тенгламалар системасининг анологини қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ ишоралар $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради. Бундан ташқари, қуйидаги бошланғич шартлар бажарилади:

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in Z, \tag{9}$$

бунда $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \in Z$ кетма-кетлик $p_0(x+\tau) \equiv 0$, $q_0(x+\tau)$ коэффициентли Дирак операторининг спектрал параметрларидир.

1-изоҳ. Ушбу

$$q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right) \tag{10}$$

излар формуласи ёрдамида (8) системани ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

1-натижа. Бу теорема (3)-(6) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун аввало Дирак системасининг $p_0(x+\tau) \equiv 0$, $q_0(x+\tau)$ коэффициентларга мос келувчи λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$ спектрал берилганларини топамиз. Сўнгра (8)+(9) Коши масаласини ечиб, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in Z$ лар аниқланади. Бу Коши масаласини ечимини (2) излар формуласига қўйиб $q(\tau,t)$ ни топамиз.

2-натижа. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

3-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

4-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг яримдаврий бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаврий бўлади.

Иккинчи бобнинг иккинчи бўлимида даврий функциялар синфида мосланган қатор манбали мКдФ тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t)[(\psi_1(x, \lambda_k, t))^2 - (\psi_2(x, \lambda_k, t))^2],\ t > 0\ ,\ x \in R, \tag{11}$$

мосланган қатор манбали мКдФ тенгламасининг (4)-(6) шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий $q = q(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинади. Бу ерда $\alpha_k(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция бўлиб, ушбу $\alpha_k(t) = O(k^{-2}),\ k \to \pm\infty$ текис асимптотикага эга. $\psi = (\psi_1(x,\lambda,t), \psi_2(x,\lambda,t))^T$ орқали қуйидаги

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in R, \tag{12}$$

Дирак системанинг ($\psi_1(0,\lambda,t) = 1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечими белгиланган. (12) тенгламанинг $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$ орқали белгилаймиз.

2-теорема. Айтайлик ($q(x,t)$, $\psi(x,\lambda,t)$) жуфтлик (11), (4)-(6) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда (12) тенгламанинг спектри t параметрга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(t),\ n \in Z$ спектрал параметрлар эса ушбу

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(0,t) + q_x(0,t)] - 4\xi_n^3 +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \alpha_k(t) s_1(\pi, \lambda_k, t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}\},\quad n \in Z \tag{13}$$

Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(t) = \pm 1$ ишора $\xi_n(t),\ n \in Z$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради. Бундан ташқари қуйидаги бошланғич шартлар бажарилади

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0,\ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0\ ,\ n \in Z\,, \tag{14}$$

бу ерда $\xi_n^0, \sigma_n^0,\ n \in Z$ кетма-кетликлар $p_0(x) \equiv 0$ ва $q_0(x)$ коэффициентларга эга бўлган Дирак операториниг спектрал параметрларидир.

5-натижа. Агар $q(x,t)$ нинг ўрнига $q(x+\tau,t)$ ни олсак, у ҳолда даврий ва яримдаврий масаланинг хос қийматлари τ, t параметрларга боғлиқ бўлмайди, Дирихле масаласининг ξ_n хос қийматлари ва σ_n ишоралар τ, t ларга боғлиқ бўлади: $\xi_n = \xi_n(\tau,t),\ \ \sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n \in Z$. Бу ҳолда, (13) система ушбу

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \times$$

$$\times\left\{-2\xi_n[q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)]-4\xi_n^3+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n\alpha_k(t)s_1(\pi,\lambda_k,t,\tau)}{\xi_n^2-\lambda_k^2}\right\},\ n\in Z \qquad (15)$$

кўринишни олади. Бу ерда

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},\ \ a_0=1,a_k=k\,.$$

6-натижа. Бу теорема (11), (4)-(6) масалани ечиш усулини беради.

7-натижа. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

8-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

9-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг яримдаврий бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаврий бўлади.

Иккинчи бобнинг учинчи бўлимида даврий функциялар синфида мосланган интеграл манбали мКдФ тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t=6q^2q_x-q_{xxx}+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- -\psi_2^+\psi_2^-)d\lambda,\ t>0\,,\ x\in R, \qquad (16)$$

мосланган интеграл манбали мКдФ тенгламасининг (4)-(6) шартни қаноатлантирувчи ҳақиқий $q=q(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинади. Бу ерда $\beta(\lambda,t)$ берилган ҳақиқий функция бўлиб, ушбу $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-2}),\ \lambda\to\pm\infty$ текис асимптотикага эга. $\psi^{\pm}=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ орқали (12) Дирак системанинг ($\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари белгиланган. (12) тенгламанинг $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечими $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),s_2(x,\lambda,t))^T$ орқали белгиланган.

3-теорема. Айтайлик $q(x,t)$, $\psi^+(x,\lambda,t)$, $\psi^-(x,\lambda,t)$ лар (16), (4)-(6) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда (12) тенгламанинг спектри t параметрга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(t),\ n\in Z$ спектрал параметрлар эса ушбу

$$\dot{\xi}_n(t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(0,t)+q_x(0,t)]-4\xi_n^3+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2-\lambda^2}d\lambda\},\quad n\in Z \qquad (17)$$

Дубровин тенгламалар системасининг аналогини қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t)=\pm1$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради ҳамда (14) бошланғич шартлар бажарилади.

10-натижа. Агар $q(x,t)$ нинг ўрнига $q(x+\tau,t)$ ни олсак, у ҳолда даврий ва антидаврий масаланинг хос қийматлари τ, t параметрларга боғлиқ бўлмайди, Дирихле масаласининг ξ_n хос қийматлари ва σ_n ишоралар τ, t ларга боғлиқ бўлади: $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1$, $n \in Z$. Бу ҳолда, (17) система ушбу

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \times$$

$$\times \left\{ -2\xi_n [q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda \right\}, \; n \in Z \qquad (18)$$

кўринишни олади.

11-натижа. Бу теорема (16), (4)-(6) масалани ечиш усулини беради.

12-натижа. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

13-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

14-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг яримдаврий бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаврий бўлади.

Диссертациянинг **«Даврий функциялар синфида юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз ва юкланган ночизиқли Шредингер тенгламаларини интеграллаш»** деб номланган учинчи бобида Дирак оператори учун қўйилган тескари спектрал масала ёрдамида, даврий функциялар синфида юкланган мКдФ тенгламасини интеграллаш усули берилган, даврий функциялар синфида мосланган манбали юкланган мКдФ тенгламаси, даврий функциялар синфида юкланган ночизикли Шредингер тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Учинчи бобнинг биринчи бўлимида даврий функциялар синфида юкланган мКдФ тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + \gamma(t) \cdot q(0,t) \cdot q_x, \; t > 0, \; x \in R, \qquad (19)$$

юкланган мКдФ тенгламасининг (4)-(6) шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий $q = q(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинади. Бу ерда $\gamma(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция.

4-теорема. Агар $q(x,t)$, функция (19), (4)-(6) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда (7) оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n \in Z$, сонлар τ ва t параметрларга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in Z$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системасининг қуйидаги аналогини

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \{-2\xi_n [q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 - \gamma(t)\xi_n q(0,t)\}, \; n \in Z \qquad (20)$$

қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ ишоралар $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради ҳамда (9) бошланғич шартлар бажарилади.

2-изоҳ. (10) излар формуласи ёрдамида (20) системани ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

15-натижа. Бу теорема (19), (4)-(6) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун аввало Дирак системасининг $p_0(x+\tau)\equiv 0$, $q_0(x+\tau)$ коэффициентларга мос келувчи λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ спектрал берилганларини топамиз. Сўнгра $\tau=0$ да (20)+(9) Коши масаласини ечиб, $\xi_n(0,t)$ ва $\sigma_n(0,t)$, $n\in Z$ ларни аниқлаймиз. (2) излар формуласидан $q(0,t)$ аниқланади. $q(0,t)$ нинг ифодасини (20) тенгламага қўйиб, ихтиёрий τ да яна (20)+(9) Коши масаласини ечиб, $\xi_n(\tau,t)$ ва $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in Z$ ларни топамиз. (2) излар формуласидан $q(\tau,t)$ ни аниқлаймиз.

16-натижа. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

17-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

18-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг яримдаврий бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаврий бўлади.

Учинчи бобнинг иккинчи бўлимида даврий функциялар синфида мосланган қатор манбали юкланган мКдФ тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t=6q^2q_x-q_{xxx}+\gamma(t)\cdot q(0,t)\cdot q_x+$$
$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k(t)s_1(\pi,\lambda_k,t)[(\psi_1(x,\lambda_k,t))^2-(\psi_2(x,\lambda_k,t))^2],\ t>0,\ x\in R \quad (21)$$

мосланган қатор манбали юкланган мКдФ тенгламасини (4)-(6) шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий $q=q(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинади. Бу ерда $\gamma(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция ҳамда $\alpha_k(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция бўлиб, ушбу $\alpha_k(t)=O(k^{-2})$, $k\to\pm\infty$ текис асимптотикага эга. $\psi=(\psi_1(x,\lambda,t),\psi_2(x,\lambda,t))^T$ орқали (12) Дирак системанинг ($\psi_1(0,\lambda,t)=1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечими белгиланган. (12) тенгламанинг $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),s_2(x,\lambda,t))^T$ орқали белгилаймиз.

5-теорема. Агар $q(x,t)$, $\psi(x,\lambda_k,t)$ функциялар (21), (4)-(6) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда (7) оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n\in Z$, сонлар τ ва t параметрларга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системасининг қуйидаги аналогини

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 -$$

$$-\gamma(t)\xi_n q(0,t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \alpha_k(t) s_1(\pi,\lambda_k,\tau,t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}\}, \quad n \in Z \qquad (22)$$

қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради ҳамда (9) бошланғич шартлар бажарилади

3-изоҳ. Агар (10) излар формуласидан фойдалансак, (22) система ёпиқ кўринишда ёзилади.

19-натижа. Бу теорема (21), (4)-(6) масалани ечиш усулини беради.

20-натижа. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

21-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

22-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг яримдаврий бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаврий бўлади.

Учинчи бобнинг учинчи бўлимида даврий функциялар синфида мосланган интеграл манбали юкланган мКдФ тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + \gamma(t) \cdot q(0,t) \cdot q_x +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- - \psi_2^+\psi_2^-) d\lambda, \ t > 0, \ x \in R \qquad (23)$$

мосланган интеграл манбали юкланган мКдФ тенгламасининг (4)-(6) шартларни қаноатлантирувчи ҳақиқий $q = q(x,t)$ ечимини топиш талаб қилинади. Бу ерда $\gamma(t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция ҳамда $\beta(\lambda,t)$ берилган ҳақиқий узлуксиз функция бўлиб, ушбу $\beta(\lambda,t) = O(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \pm\infty$ текис асимптотикага эга. $\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t), \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ орқали (12) Дирак системасининг ($\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t) = 1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари белгиланган. (12) тенгламанинг $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$ орқали белгилаймиз.

6-теорема. Агар $q(x,t)$, $\psi^+(x,\lambda,t)$, $\psi^-(x,\lambda,t)$ функциялар (23), (4)-(6) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда (7) оператор спектрининг чегаралари, яъни λ_n, $n \in Z$, сонлар τ ва t параметрларга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системасининг қуйидаги аналогини

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 -$$

$$-\gamma(t)\xi_n q(0,t) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda\}, \quad n \in Z \qquad (24)$$

қаноатлантиради. Бу ерда $\sigma_n(\tau,t) = \pm 1$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қаршисига ўзгаради ҳамда (9) бошланғич шартлар бажарилади

4-изоҳ. Агар (10) излар формуласидан фойдалансак, (24) система ёпиқ кўринишда ёзилади.

23-натижа. Бу теорема (23), (4)-(6) масалани ечиш усулини беради.

24-натижа. Агар бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ ечим ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

25-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

26-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $q_0(x)$ функциянинг яримдаврий бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $q(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаврий бўлади.

Учинчи бобнинг тўртинчи бўлимида даврий функциялар синфида юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер тенгламасини тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Қуйидаги юкланган Шредингер тенгламасини

$$u_t = 2iu|u|^2 - iu_{xx} + \gamma(t)|u(0,t)|^2 u_x, \quad t > 0, \quad x \in R \qquad (25)$$

ушбу

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x) \qquad (26)$$

бошланғич ва x бўйича π даврийлик ҳамда

$$u(x,t) \in C_x^2(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0) \qquad (27)$$

силлиқлик шартлари билан бирга кўриб чиқамиз. Бу ерда $\gamma(t)$ - берилган узлуксиз ҳақиқий функция.

7-теорема**.** Агар $u(x,t) = -p(x,t) + iq(x,t)$ функция (25)-(27) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда

$$L(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x+\tau,t) & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & -p(x+\tau,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \; x \in R, \qquad (28)$$

оператор спектрининг чегаралари, яни λ_n, $n \in Z$ сонлар τ ва t параметрга боғлиқ бўлмайди, $\xi_n = \xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ спектрал параметрлар эса қуйидаги Дубровин системасининг аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\{q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) + [p(\tau,t) + \xi_n]^2 + \xi_n^2 -$$

$$-\gamma(t)[p^2(0,t) + q^2(0,t)][p(\tau,t) + \xi_n]\}, \quad n \in Z \qquad (29)$$

Бунда $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1,\ n\in Z$ ишоралар $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ ўз лакунасининг четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради. Бундан ташқари ушбу

$$\xi_n(\tau,t)\Big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)\,,\ \sigma_n(\tau,t)\Big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)\,,\ \ n\in Z \qquad (30)$$

бошланғич шартлар ҳам бажарилади. Бу ерда $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ лар Дирак операторининг $p_0(x+\tau)$ ва $q_0(x+\tau)$ коэффициентларига мос келувчи спектрал параметрларидир.

5-изоҳ. (2), (10) излар формулалари ёрдамида (29) системани ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

27-натижа. Юқоридаги 7-теорема (25)-(27) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун аввало $p_0(x+\tau)$ ва $q_0(x+\tau)$ коэффициентли Дирак операторининг λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ спектрал берилганларини топамиз. Бундан сўнг (29) Дубровин тенгламалар системаси учун қўйилган (30) Коши масаласида $\tau=0$ деб олиб, унинг $\xi_n(0,t)$, $n\in Z$ ечимини аниқлаймиз. Топилган $\xi_n(0,t)$ ечимни (2) излар формулаларига қўйиб, $p(0,t)$ ва $q(0,t)$ функцияларни топамиз. Шундан кейин $p(0,t)$ ва $q(0,t)$ учун топилган ифодаларни (29) системага қўямиз ҳамда (29), (30) Коши масаласини ихтиёрий τ да ечиб $\xi_n(\tau,t)$, $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in Z$ спектрал параметрларни аниқлаймиз. (2) излар формуласидан фойдаланиб, $p(\tau,t)$ ва $q(\tau,t)$ функцияларни топамиз.

28-натижа. Агар $p_0(x)$ ва $q_0(x)$ бошланғич функциялар ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $p(x,t)$ ва $q(x,t)$ функциялар ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

29-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $u_0(x)$ функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $u(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

30-натижа. Агар $\pi/2$ сони бошланғич шартдаги $u_0(x)$ функциянинг яримдаври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $u(x,t)$ ечимнинг ҳам x бўйича яримдаври бўлади.

Муаллиф ўзининг илмий раҳбари, профессор Хасанов Ақназар Бекдурдиевичга доимий эътибори ҳамда мазкур диссертация натижаларини муҳокамасидаги қимматли маслаҳатлари учун самимий миннатдорчилигини билдиради.

ХУЛОСА

Диссертация мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини, манбали ва манбасиз юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламасини ва юкланган ночизиқли Шредингер тенгламасини интеграллашда Дирак опреатори учун спектрал назариянинг тўғри ва тескари масаласини қўллашга бағишланган.

Асосий тадқиқот натижалари қуйидагилардан иборат:

1. даврий функциялар синфида мосланган манбали модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

2. Даврий функциялар синфида юкланган ҳадли модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

3. Даврий функциялар синфида йиғинди кўринишидаги мосланган манбали юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

4. Даврий функциялар синфида интеграл манбали юкланган модифицирланган Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчи бўлиши исботланган;

5. Даврий функциялар синфида юкланган ҳадли ночизиқли Шредингер тенгламасининг тўла интегралланувчи бўлиши исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.28.12.2017.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ, КАРАКАЛПАКСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХАСАНОВ МУЗАФФАР МАШАРИПОВИЧ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НАГРУЖЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

УРГЕНЧ – 2019

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.3.PhD/FM111.

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
	Мамедов Кудрат Алломович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Институт Математики Академии Наук Республики Узбекистан**

Защита диссертации состоится 16 декабря 2019 года в 14^{00} часов на заседании Научного совета PhD.28.12.2017.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете, Каракалпакском государственном университете. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (99862)224-66-11, факс: (99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за № Д-229). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х.Алимджана, дом 14. Тел.: (99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(протокол рассылки №_______ от «____» _______________2019 года).

Б.И.Абдуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученой степени, д.ф.-м.н.

А.А.Атамуратов
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученой степени, к.ф.-м.н.

А.Б.Яхшимуратов
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению
ученой степени, д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Статистический анализ результатов многих международных научно-практических исследований, проводимых в мировом уровне, показывает актуальность изучения нелинейных уравнений с самосогласованным источником. Прямые и обратные задачи спектрального анализа возникают в различных областях природы, при определении внутренних сил атомов по известным уровням энергии в квантовой механике, радиотехнике, теории упругости, при изучении процесса вибрации эллиптической мембраны, моделировании кристаллических структур твердых тел и при определении решений нелинейных эволюционных уравнений современной математической физики. Таким образом, проблема интегрирования нелинейного нагруженного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником остаётся важной в теории спектральных задач.

В настоящее время в мире, исследования в теории нелинейных волн начали использоваться, в частности в области телекоммуникационных технологий оптических солитонов. Реальные физические системы характеризуются уравнениями с самосогласованным источником, являющимся одной из модификаций классических уравнений. Кроме того, силы, действующие на физические системы, ограничены только в течение определенного периода времени, поэтому реальные модели приводятся к изучению уравнений в классе периодических и почти периодических функций по пространственным переменным. Применение обратных спектральных задач спектрального анализа к различным вопросам нелинейной оптики, физики плазмы, гидродинамики и других областей является одним из приоритетных направлений. В этом отношении целесообразным считается исследование решения нелинейного нагруженного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, а также нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза, в классе периодических функций.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, которые имеют практическое применение. В частности, особое внимание было уделено анализу исследовании в теории нелинейных волн, спектральной теории дифференциальных операторов и задачам математической физики. Вследствие этого достигнуты значительные результаты для полной интегрируемости нелинейных эволюционных уравнений математической физики при помощи прямых и обратных спектральных задач. Основными задачами и направлениями деятельности являются научные исследования на уровне международных стандартов в области математики, физики и современных методов математической физики[2]. При обеспечении исполнения этих решений имеет большое значение развитие теории обратных спектральных задач, интегрирование нелинейных уравнений с самосогласованным источником, а также нагруженных нелинейных уравнений.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» от 20 апреля 2017 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. После нахождения Гарднером, Грином, Крускалом и Миура решения задачи Коши для нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза, П.Лакс показал универсальность метода обратной задачи рассеяния. В этом направлении следующий важный результат был получен В.Е.Захаровым и А.Б.Шабатом. Им удалось интегрировать нелинейное уравнение Шредингера. М.Вадати используя идеи работы В.Е.Захарова и А.Б.Шабата, предложил метод решения модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза (мКдФ).

С помощью обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом в работах Б.А.Дубровина, С.П.Новикова, А.Р.Итса, В.Б.Матвеева, П.Лакса и др. доказана полная интегрируемостъ уравнения КдФ в классе конечнозонных функций.

На современном этапе развития математической теории солитонов вызывает болшой интерес комплекснозначные нелинейные уравнения. В работах А.Р.Итса, В.П.Котлярова, А.О.Смирнова и др. методом обратной задачи для оператора Дирака было установлена полная интегрируемостъ НУШ в классе конечнозонных функций, а нелинейное уравнение типа НУШ изучены в работах А.В.Борзых, А.Б.Хасанова, А.А.Рейимберганова и др.

В работах В.К.Мельникова, П.Г.Гриневича, И.А.Тайманова, А.Б.Хасанова, Г.У.Уразбоева, А.Б.Яхшимуратова, К.А.Мамедова, У.А.Хоитметова, А.А.Рейимберганова, Y.Shao, Y.B.Zeng, W.X.Ma, R.L.Lin, T.Grava, А.Минакова в различных функциональных классах интегрированы уравнения КдФ, мКдФ и НУШ с самосогласованным источником.

Нагруженное уравнение КдФ исследовалась А.Б.Яхшимуратовым и М.М.Матякубовым.

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 “О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии наук Республики Узбекистан” от 18 мая 2017 года.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационнная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ кафедры «Прикладная математика и математическая физика» Ургенчского государственного университета и в рамках научно-исследовательского проекта Ургенчского государственного университета по теме Ф-4-61 «Интегрирование нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником методом обратных задач» (2012-2016 гг.).

Цель исследования нахождение решений нелинейного нагруженного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций с помощью обратных спектральных задач для дифференциальных операторов.

Задачи исследования:

доказать полную интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказать полную интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций;

доказать полную интегрируемость нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в виде суммы;

доказать полную интегрируемость нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с интегральным источником;

доказать полную интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом в классе периодических функций.

Объект исследования. Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шредингера с нагруженным членом.

Предмет исследования. Применение спектральной задачи для оператора Дирака с периодическим потенциалом к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, математической физики, спектральной теории дифференциальных операторов, функционального анализа и теории функций комплексных переменных, а также методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказана полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказана полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций;

доказана полная интегрируемость нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в виде суммы;

доказана полная интегрируемость нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с интегральным источником;

доказана полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом в классе периодических функций.

Практические результаты исследования состоят из применения алгоритмов решения задач Коши для нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником и нагруженным членом; получены результаты об аналитичности решений уравнений по пространственным переменным для численных расчетов.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математической физики, спектрального анализа, функционального анализа и теории функций комплексных переменных при решении обратных спектральных задач для дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами и их применению для решения нелинейных эволюционных уравнений, а также строгостью математических рассуждений и доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные научные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в гидродинамике и в квантовой физике.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные научные результаты могут быть использованы в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации, были внедрены на практике в следующих направлениях:

интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций применена в разработанной министерством науки и инновации Испании совместно с университетами Испании проекте MTM2013-43014-P “Nonlinear Ordinary Differential Equations” (University of Santiago de Compostela, Spain, справка от 21 октября 2019 года). Метод интегрирования модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций дала возможность оценить изменения фаз динамических систем связанных с эволюционными эллиптическими уравнениями с самосогласованными источниками.

Результаты по интегрированиям модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником и модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций применены в проекте «Qualitative properties and bifurcations of differential equations and dynamical systems» агентства проектов Словакии VEGA при анализе решений нелинейных дифференциальных уравнений (Справка от 25 октября 2019 года университета Комениюс в Братиславе). Полученные научные результаты дали возможность оценить изменения состояний динамических систем связанных с нелинейными уравнениями.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 7 республиканских.

Настоящая диссертация обсуждалась на республиканском семинаре "Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных" Института Математики имени В.И.Романовского АНРУз, на семинаре "Современные проблемы математической физики" Национального Университета Узбекистана, на объединенном семинаре кафедр "Дифференциальные уравнения" и "Функциональный анализ и математическая физика" Самаркандского государственного университета, на семинаре кафедры "Прикладная математика и математическая физика" Ургенчского государственного университета.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 6 статей входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей Аттестационной Комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 2 опубликовано в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 113 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Обратная задача для оператора Дирака с периодическим потенциалом на всей оси»** изучается обратная спектральная задача для оператора Дирака.

С первого по четвертый параграф первой главы приведены необходимые сведения, о прямой и обратной спектральной задачи для оператора Дирака на всей оси.

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ x \in R, \qquad (1)$$

где $p(x), q(x) \in C^1(R)$ - действительные π -периодические функции.

Обозначим через $c(x,\lambda) = \left(c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda)\right)^T$ и $s(x,\lambda) = \left(s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda)\right)^T$ решения уравнения (1) удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda) = (1,0)^T$ и $s(0,\lambda) = (0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (1). В этом случае, решения Флоке (нормированные условием $\psi_1^{\pm}(0,\lambda) = 1$) имеют вид

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda).$$

Спектр оператора L состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R : \ -2 \le \Delta(\lambda) \le 2 \} = R \setminus \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}),$$

при этом интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ называются лакунами, где λ_{4k-1}, λ_{4k} – собственные значения периодической задачи ($y_1(0) = y_1(\pi)$, $y_2(0) = y_2(\pi)$), а λ_{4k+1}, λ_{4k+2} – собственные значения антипериодической задачи ($y_1(0) = -y_1(\pi)$, $y_2(0) = -y_2(\pi)$) для уравнения (1).

Через ξ_n, $n \in Z$ обозначим собственные значения задачи Дирихле ($y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$) для уравнения (1). Выполняются следующие включения $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$.

Определение 1. Числа $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ и знаки $\sigma_n = sign\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in Z$ называются спектральными параметрами задачи (1).

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in Z$ и границы спектра λ_n, $n \in Z$ называются спектральными данными задачи (1).

Определение 3. Нахождение спектральных данных задачи (1) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ определяются единственным образом по спектральным данным $\{\lambda_n, \xi_n, \sigma_n = \pm 1, n \in Z\}$.

Если в уравнении (1) вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотрим $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр получающегося оператора не будет зависеть от параметра τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau)$, $n \in Z$ Эти спектральные параметры удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi) \times [2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)],\ n \in Z.$$

Здесь

$$h_n(\xi) = \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}}.$$

Знак $\sigma_n(\tau) = \pm 1$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Системы дифференциальных уравнении Дубровина и следующие формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau)\right), \quad q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)h_n(\xi(\tau)), \qquad (2)$$

дают метод решения обратной задачи.

Во второй главе диссертации названной **«Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций»,** с помощью оператора Дирака, доказана полная интегрируемость уравнения мКдФ, уравнения мКдФ с источником в виде суммы, уравнения мКдФ с интегральным источником в классе периодических функций.

В первом параграфе второй главы рассматривается следующее нелинейное уравнение мКдФ

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx},\quad t > 0,\ x \in R \qquad (3)$$

с начальным условием

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \qquad (4)$$

где $q_0(x) \in C^3(R)$ заданная действительная π-периодическая функция. Требуется найти действительную функцию $q(x,t)$, удовлетворяющую условиям гладкости

$$q(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0), \tag{5}$$

которая π-периодическая по переменной x:

$$q(x+\pi,t) \equiv q(x,t),\ \ x \in R,\ t>0. \tag{6}$$

Теорема 1. Пусть $q(x,t)$ решение задачи (3)-(6). Тогда границы спектра λ_n, $n \in Z$ оператора Дирака

$$L(\tau,t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x+\tau,t) \\ q(x+\tau,t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in R, \tag{7}$$

не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t), \sigma_n(\tau,t)$ $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \cdot \{-2\xi_n[q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3\}. \tag{8}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau),\ \ n \in Z, \tag{9}$$

при этом $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$ $n \in Z$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x+\tau) \equiv 0$, $q_0(x+\tau)$.

Замечание 1. С помощью формулы следов

$$q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right) \tag{10}$$

систему (8) можем переписать в замкнутом виде.

Следствие 1. Эта теорема и формулы следов (2) дают метод решения задачи (3)-(6). Для этого, прежде всего, найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau) \equiv 0$, $q_0(x+\tau)$, и решаем задачу Коши (8)+(9). После этого, по формулам следов (2) находим $q(\tau,t)$.

Следствие 2. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 3. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период $\pi/2$ по переменной x.

Следствие 4. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет антипериод $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь антипериод $\pi/2$ по переменной x.

В втором параграфе второй главы проинтегрировано уравнение мКдФ с самосогласованным источником в виде суммы в классе периодических функций, а именно, рассмотрено следующее уравнение

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k(t) s_1(\pi,\lambda_k,t)[(\psi_1(x,\lambda_k,t))^2 - (\psi_2(x,\lambda_k,t))^2],\ t>0\,,\ x\in R. \qquad (11)$$

Требуется найти действительное решение $q = q(x,t)$ уравнения (11), удовлетворяющее условиям (4)-(6). Здесь $\alpha_k(t)$ заданная действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\alpha_k(t) = O(k^{-2}),\ k\to\pm\infty$, $\psi = (\psi_1(x,\lambda,t),\psi_2(x,\lambda,t))^T$ решение Флоке (нормированное условием $\psi_1(0,\lambda,t)=1$) следующей системы Дирака

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q(x,t) \\ q(x,t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x\in R. \qquad (12)$$

Через $s(x,\lambda,t) = (s_1(x,\lambda,t), s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$.

Теорема 2. Пусть ($q(x,t),\ \psi(x,\lambda,t)$) является решением задачи (11), (4)-(6). Тогда спектр уравнения (12) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t),\ n\in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(0,t)+q_x(0,t)] - 4\xi_n^3 +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \alpha_k(t) s_1(\pi,\lambda_k,t)}{\xi_n^2 - \lambda_k^2}\},\quad n\in Z. \qquad (13)$$

Знак $\sigma_n(t) = \pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n^0,\ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0\ ,\quad n\in Z, \qquad (14)$$

где $\xi_n^0,\ \sigma_n^0,\ \ n\in Z$ – спектральные параметры оператора Дирака с коэффициентами $p_0(x)\equiv 0$ и $q_0(x)$.

Следствие 5. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ, t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ, t: $\xi_n = \xi_n(\tau,t),\ \ \sigma_n = \sigma_n(\tau,t) = \pm 1,\ n\in Z$. В этом случае, система (13) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi)\times$$

$$\times\left\{-2\xi_n[q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n\alpha_k(t)s_1(\pi,\lambda_k,t,\tau)}{\xi_n^2-\lambda_k^2}\right\},\ n\in Z \qquad (15)$$

Здесь

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},\quad a_0=1, a_k=k\,.$$

Следствие 6. Эта теорема дает метод решения задачи (11), (4)-(6).

Следствие 7. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 8. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период $\pi/2$ по переменной x.

Следствие 9. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет антипериод $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь антипериод $\pi/2$ по переменной x.

В третьем параграфе второй главы проинтегрировано уравнение мКдФ с интегральным источником в классе периодических функций, а именно, рассмотрено следующее уравнение

$$q_t=6q^2q_x-q_{xxx}+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^--\psi_2^+\psi_2^-)d\lambda,\ t>0\,,\ x\in R,\quad (16)$$

Требуется найти действительное решение $q=q(x,t)$ уравнения (16), удовлетворяющее условиям (4)-(6). Здесь $\beta(\lambda,t)$ заданная действительная, непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-2}),\ \lambda\to\pm\infty$, $\psi^{\pm}=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$) уравнения Дирака (12). Через $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),\,s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$.

Теорема 3. Пусть ($q(x,t)$, $\psi^+(x,\lambda,t)$, $\psi^-(x,\lambda,t)$) является решением задачи (16), (4)-(6). Тогда спектр оператора (12) не зависит от параметра t, а спектральные параметры $\xi_n(t),\ n\in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t)=2(-1)^n\sigma_n(t)h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(0,t)+q_x(0,t)]-4\xi_n^3+$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)}{\xi_n^2-\lambda^2}d\lambda\},\quad n\in Z\,.\quad (17)$$

Знак $\sigma_n(t)=\pm1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия (14).

Следствие 10. Если мы вместо $q(x,t)$ рассмотрим $q(x+\tau,t)$, то собственные значения периодической и антипериодической задачи не зависят от параметров τ,t, а собственные значения ξ_n задачи Дирихле и знаки σ_n зависят от τ,t: $\xi_n=\xi_n(\tau,t),\ \ \sigma_n=\sigma_n(\tau,t)=\pm1,\ n\in Z$. В этом случае, система (17) примет вид

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \times$$

$$\times \left\{ -2\xi_n [q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_n \beta(\lambda,t) s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n^2 - \lambda^2} d\lambda \right\}, \ n \in Z \qquad (18)$$

Следствие 11. Эта теорема дает метод решения задачи (16), (4)-(6).

Следствие 12. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 13. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период $\pi/2$ по переменной x.

Следствие 14. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет антипериод $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь антипериод $\pi/2$ по переменной x.

В третьей главе диссертации под названием **«Интегрирование нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза и нагруженного нелинейного уравнения Шредингера в классе периодических функций»** с помощью обратной задачи для оператора Дирака, доказывается полная интегрируемость нагруженного уравнения мКдФ без источника и с источником, а также проинтегрировано нелинейное нагруженное уравнение Шредингера.

В первом параграфе третьей главы доказана полная интегрируемость уравнения мКдФ с нагруженным членом в классе периодических функций, а именно, рассмотрено следующее уравнение

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x + \gamma(t) \cdot q(0,x) \cdot q_x, \quad x \in R, \ t > 0, \qquad (19)$$

где $\gamma(t)$ является заданной действительной непрерывной функцией. Требуется найти действительное решение $q = q(x,t)$ уравнения (19), удовлетворяющее условиям (4)-(6).

Теорема 4**.** Пусть $q(x,t)$ решение задачи (19), (4)-(6). Тогда границы спектра λ_n, $n \in Z$ оператора Дирака (7) не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) h_n(\xi) \{-2\xi_n [q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t)] - 4\xi_n^3 - \gamma(t)\xi_n q(0,t)\}, \ n \in Z. \qquad (20)$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. а также выполняются начальные условия (9).

Замечание 2. С помощью формулы следов (10) систему (20) можем переписать в замкнутом виде.

Следствие 15. Эта теорема даёт способ решения задачи (19), (4)-(6). Для этого прежде всего находим спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$

системы Дирака с коэффициентами $p_0(x+\tau)\equiv 0$, $q_0(x+\tau)$. Затем, при $\tau=0$ решая задачу Коши (20)+(9), определяем $\xi_n(0,t)$ и $\sigma_n(0,t)$, $n\in Z$. Из формулы следов (2) определяется $q(0,t)$. Подставляя найденное выражение $q(0,t)$ в уравнение (20) и снова решая задачу Коши (20)+(9) при произвольном τ, находим $\xi_n(\tau,t)$ и $\sigma_n(\tau,t)$, $n\in Z$. После этого из формулы следов (2) определяем $q(\tau,t)$.

Следствие 16. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 17. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период $\pi/2$ по переменной x.

Следствие 18. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет антипериод $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь антипериод $\pi/2$ по переменной x.

В втором параграфе третьей главы доказана полная интегрируемость нагруженного уравнения мКдФ с самосогласованным источником в виде суммы в классе периодических функций, а именно, рассмотрено следующее уравнение

$$q_t = 6q^2 q_x - q_{xxx} + \gamma(t)\cdot q(0,t)\cdot q_x +$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha_k(t)s_1(\pi,\lambda_k,t)[(\psi_1(x,\lambda_k,t))^2-(\psi_2(x,\lambda_k,t))^2],\ t>0,\ x\in R. \tag{21}$$

Требуется найти действительное решение $q=q(x,t)$ уравнения (21), удовлетворяющее условиям (4)-(6). Здесь $\gamma(t)$ является заданной действительной непрерывной функцией и $\alpha_k(t)$ заданная действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\alpha_k(t)=O(k^{-2}),\ k\to\pm\infty$, $\psi=(\psi_1(x,\lambda,t),\psi_2(x,\lambda,t))^T$ решение Флоке (нормированное условием $\psi_1(0,\lambda,t)=1$) системы Дирака (12). Через $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),\,s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$.

Теорема 5**.** Пусть ($q(x,t)$, $\psi(x,\lambda_k,t)$) является решением задачи (21), (4)-(6). Тогда спектр оператора Дирака (7) не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)]-4\xi_n^3-$$

$$-\gamma(t)\xi_n q(0,t)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n\alpha_k(t)s_1(\pi,\lambda_k,\tau,t)}{\xi_n^2-\lambda_k^2}\},\ n\in Z. \tag{22}$$

Знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия (9).

Замечание 3. Если воспользуемся формулой следов (10), то система (22) перепишется в замкнутом виде.

Следствие 19. Эта теорема даёт способ решения задачи (22), (4)-(6).

Следствие 20. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 21. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период $\pi/2$ по переменной x.

Следствие 22. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет антипериод $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь антипериод $\pi/2$ по переменной x.

В третьем параграфе третьей главы доказана полная интегрируемость нагруженного уравнения мКдФ с самосогласовнным интегральным источником в классе периодических функций.

Требуется найти действительное решение $q=q(x,t)$ следующего уравнения мКдФ

$$q_t=6q^2q_x-q_{xxx}+\gamma(t)\cdot q(0,t)\cdot q_x+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+\psi_1^- -\psi_2^+\psi_2^-)d\lambda,\ t>0\ ,\ x\in R, \tag{23}$$

удовлетворяющее условиям (4)-(6). Здесь $\gamma(t)$ является заданной действительной непрерывной функцией и $\beta(\lambda,t)$ заданная действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-2}),\ \lambda\to\pm\infty$, $\psi^{\pm}=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ решения Флоке (нормированные условиями $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$) системы Дирака (12). Через $s(x,\lambda,t)=(s_1(x,\lambda,t),s_2(x,\lambda,t))^T$ обозначено решение уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$.

Теорема 6. Пусть ($q(x,t)$, $\psi^+(x,\lambda,t)$, $\psi^-(x,\lambda,t)$) является решением задачи (23),(4)-(6). Тогда спектр оператора Дирака (7) с коэффициентом $q(x+\tau,t)$ не зависит от τ и t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$ удовлетворяют системе уравнений Дубровина

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\{-2\xi_n[q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)]-4\xi_n^3-$$

$$-\gamma(t)\xi_n q(0,t)+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\xi_n\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,\tau,t)}{\xi_n^2-\lambda^2}d\lambda\},\ \ n\in Z\,. \tag{24}$$

Знак $\sigma_n(\tau,t)=\pm 1$ меняется при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия (9).

Замечание 4. Если воспользуемся формулой следов (10), то система (24) перепишется в замкнутом виде.

Следствие 23. Эта теорема даёт метод решения задачи (23), (4)-(6).

Следствие 24. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической, то и функция $q(x,t)$ также будет действительной аналитической по x.

Следствие 25. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет период $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь период $\pi/2$ по переменной x.

Следствие 26. Если в начальном условии функция $q_0(x)$ имеет антипериод $\pi/2$, то решение $q(x,t)$ тоже будет иметь антипериод $\pi/2$ по переменной x.

В четвёртом параграфе третьей главы доказана полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение Шредингера с нагруженным членом

$$u_t=2iu|u|^2-iu_{xx}+\gamma(t)|u(0,t)|^2u_x,\quad t>0,\ x\in R, \tag{25}$$

с начальным условием

$$u(x,t)|_{t=0}=u_0(x), \tag{26}$$

в классе комплексно-значных π-периодических по x функций:

$$u(x,t)\in C_x^2(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \tag{27}$$

Здесь $\gamma(t)$ заданная действительная непрерывная функция.

Теорема 7. Пусть $u(x,t)$ решение задачи (25)-(27). Тогда границы спектра λ_n, $n\in Z$ оператора Дирака

$$L(\tau,t)y\equiv\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x+\tau,t)&q(x+\tau,t)\\q(x+\tau,t)&-p(x+\tau,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix},\ x\in R, \tag{28}$$

не зависят от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n=\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)h_n(\xi)\{q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)+[p(\tau,t)+\xi_n]^2+\xi_n^2-$$

$$-\gamma(t)[p(\tau,t)+\xi_n][p^2(0,t)+q^2(0,t)]\}.,\ n\in Z. \tag{29}$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, а также выполняются начальные условия

$$\xi_n(\tau,t)|_{t=0}=\xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau),\ n\in Z. \tag{30}$$

Замечание 5. Учитывая формулы следов (2), (10) систему (29) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 27. Эта теорема дает метод решения задачи (25)-(27). Для этого, сначала найдём спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, оператора Дирака с коэффициентами $q_0(x+\tau)$, $p_0(x+\tau)$. Далее, решая при $\tau = 0$ задачу Коши (29)+(30) находим $\xi_n(0,t)$ и $\sigma_n(0,t)$, $n \in Z$. Используя формулы следов найдем $q(0,t)$, $p(0,t)$. После этого, подставляем выражения для $q(0,t)$, $p(0,t)$ в уравнение (29), и, решая задачу Коши при произвольном значении τ находим $\xi_n(\tau,t)$ и $\sigma_n(\tau,t)$, $n \in Z$. По формулам следов (2) определяем $p(\tau,t)$ и $q(\tau,t)$.

Следствие 28. Если в задаче (25)-(27), начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то $p(x,t)$ и $q(x,t)$ также являются действительными аналитическими функциями по x.

Следствие 29**.** Если число $\pi/2$ является периодом для начальной функции $u_0(x)$ задачи (25)-(27), то число $\pi/2$ является также периодом и для решения $u(x,t)$ по переменной x.

Следствие 30. Если число $\pi/2$ является антипериодом для начальной функции $u_0(x)$ задачи (25)-(27), то число $\pi/2$ является также антипериодом и для решения $u(x,t)$ по переменной x.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Хасанову Акназару Бекдурдиевичу за постоянное внимание и ценные советы при обсуждении результатов этой диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена применению прямой и обратной задачи спектральной теории для оператора Дирака к интегрированию модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза без источника и с источником, а также интегрированию нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказана полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

2. Доказана полная интегрируемость модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций;

3. Доказана полная интегрируемость нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в виде суммы;

4. Доказана полная интегрируемость нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с интегральным источником;

5. Доказана полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с нагруженным членом в классе периодических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE PhD.28.12.2017.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY AND KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

URGENCH STATE UNIVERSITY

KHASANOV MUZAFFAR MASHARIPOVICH

INTEGRATION OF NONLINEAR LOADED SHRODINGER EQUATION AND MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE IN THE CLASS OF PERIODIC FUNCTIONS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATEMATICAL SCIENCES

URGENCH – 2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3.FM111.

Dissertation has been prepared at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english(resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the «Ziyonet» information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Mamedov Kudrat Allomovich Candidat of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Institute of Mathematics, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan**

Defense will take place on 16^{th} of December, 2019 at 14^{00} at the meeting of Scientific Council number PhD.28.12.2017.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862)224-66-11, fax: (99862)224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Urgench state University (is registered № Д-229) (Address: 14 Kh. Olimjan str., Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph.: (99862)224-66-11, fax: (99862)224-67-00), e-mail: ursubox@gmail.com).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year
(Mailing report № ____________on «____» _______________2019 year)

B.I.Abdullayev
Chairman of scientific council on award of scientific degree, D.F.M.S.

A.A.Atamuratov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degree, C.F.M.S.

A.B.Yakhshimuratov
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree, D.F.M.S.

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is finding the solutions of the nonlinear loaded Schrödinger equation and the modified Korteweg-de Vries equation with the self-consistent sources in the class of periodic functions via inverse spectral problems for the differential operators.

The object of the research work consists of modified Korteweg-de Vries equation with the self-consistent sources, loaded modified Korteweg-de Vries equations, and nonlinear Schrödinger equation with a loaded term.

Scientific novelty of the research work consists on the followings:

the complete integrability of the modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions is proved;

the complete integrability of the modified Korteweg-de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions is proved;

the complete integrability of the loaded modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the form of a sum is proved;

the complete integrability of the loaded modified Korteweg-de Vries equation with an integral source is proved;

the complete integrability of the nonlinear Schrödinger equation with a loaded term in the class of periodic functions is proved.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

Integration of the modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions was applied in the project MTM2013-43014-P at the University of Santiago de Compostela, Spain, and reference number 21, developed by the Ministry of Science and Innovation of Spain and the universities of Spain October 2019. The method of integrating the modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions made it possible to evaluate the phase changes of dynamical systems associated with evolutionary elliptic equations with self-consistent sources.

The results of integrating the modified Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source and the modified Korteweg-de Vries equation with a loaded term in the class of periodic functions were applied in the project "Qualitative properties and bifurcations of differential equations and dynamical systems" of the agency projects VEGA of Slovak Republic when analyzing of solutions of nonlinear differential equations (Certificate of October 25, 2019 of the Comenius University in Bratislava). The obtained scientific results made it possible to evaluate the changes in the states of dynamical systems associated with nonlinear equations.

The structure and volume of the thesis. The dissertation work consists: introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 113 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Хасанов М.М. Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций //Узбекский математический журнал, №3, (2012), С. 150-158. (01.00.00; №6)
2. Yakhshimuratov A. B. and Khasanov M. M. Integration of the Modified Korteweg–de Vries Equation with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions // ISSN 0012-2661, Differential Equations, 2014, Vol. 50, No. 4, pp. 533–540 (№3, Scopus CiteScore 0,58).
3. Хасанов М.М. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега–де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций. // Узбекский математический журнал, № 4, (2016), С. 139-147. (01.00.00; №6)
4. Хасанов М.М., Балтаева И.И., Омонов Ш. Интегрирование нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником.// Илм сарчашмалари. Ургенч, 2018 – № 7. – С. 3-9. (01.00.00, №12)
5. Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М., Янгибаева Р. Об одном аналоге обратной теоремы Борга для системы уравнений Дирака. // Илм сарчашмалари. Ургенч, 2019 – № 1. – С. 11-16. (01.00.00, №12)
6. Hasanov A. B. and Hasanov M. M. Integration of the Nonlinear Shrodinger Equation with an Additional Term in the Class of Periodic Functions// Theoretical and Mathematical Physics, v. 199, No. 1, 525–532 (2019) (№3, Scopus CiteScore 0,81).

II бўлим (Часть II; Part II)

7. Хасанов М.М., Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом в классе периодических функций./ Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», г. Ташкент, 21-23 ноября 2013 г., с. 249-250.
8. Хасанов М.М., Салаев С.Р. Интегрирование модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических функций. / Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы прикладной математики и

информационных технологий–Аль-Хорезми 2014», г. Самарканд, 15-17 сентября 2014 г., с. 45.

9. Аллаберганов О.Р., Хасанов М.М., Матякубов М.М. Модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций. / Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения», г. Ташкент, 15-17 апреля 2015 г., с. 31-33.

10. Хасанов М.М., Хасанов Б.М., Хасанов Т.Г. Интегрирование нагруженного модифицированного уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласовнным интегральным источником / Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых, «Актуальные проблемы анализа», г. Карши, 22-23 апреля 2016 г., с. 196-197.

11. Хасанов М.М., Хасанов Т.Г. Нагруженное нелинейное уравнение Шредингера с самосогласованным источником / Ёш олимлар ва талабаларнинг “XXI аср интеллектуал авлод асри” шиори остидаги V республика илмий-амалий конференцияси материаллари, Тошкент, 12-13-январь, 2017-йил, 304-307 бетлар.

12. Khasanov M.M. The mKdV equation with a self-consistent source in the class of periodic functions/ Abstracts of “The second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics”, Urgench, 8-12 august 2017, p. 62-63.

13. Хасанов М.М. Интегрирование нагруженного уравнения Шредингера с самосогласованным интегральным источником. / Сборник материалов Республиканской научно-практической конфренции, “Перспективы реформ, проводимых в системе высшего образования Республики Узбекистан“ г. Ташкент, 15-17 март 2017 г., .с 604-605

14. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Об интегрировании нелинейного уравнения Шредингера в классе периодических функций / «The Third Turkish World Scientific Symposium». г. Алматы, 28 июня-2 июля 2009 г., с. 239.

15. Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Нагруженное модифицированное уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником / Тезисы докладов республиканской научной конференции «Проблемы современной топологии и её приложение», г. Ташкент, 5-6 мая 2016 г., с. 289-291.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(27.11.2019 й.).

Босишга рухсат этилди: 28.11.2019.
Офсет қоғози. Қоғоз бичими 60х84 $^{1}/_{16}$.
«Times New Roman» гарнитурада рақамли
босма усулида босилди. Адади 100. Буюртма № 61.
Шартли босма табағи 2.
УрДУ босмахонасида чоп қилинди.
Манзил: 220110. Урганч шаҳри,
Ҳ. Олимжон кўчаси, 14-уй.
Телефон: (0-362)-224-66-01.