ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЧОРИЕВА САНАМ ТОЖИЕВНА

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ ВА ИЧКИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРДА СИЛЖИШЛИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2019

УДК: 517.956

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.30.09.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТЕРМИЗ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЧОРИЕВА САНАМ ТОЖИЕВНА

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ АРАЛАШ ТУРДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ЧЕГАРАВИЙ ВА ИЧКИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРДА СИЛЖИШЛИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 - Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2019

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM224 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Термиз давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Мирсабуров Мирахмат** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Уринов Ахмаджон Қушоқович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Зикиров Обиджан Салижанович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд Давлат Университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.30.09.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2019 йил «___»___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz.

Диссертация автореферати 2019 йил «   » ______ куни тарқатилди.

(2019 йил «____» ___________даги ____ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д.

Ш.А. Алимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда хусусий ҳосилали иккинчи тартибли аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ қилишга келтирилади. Аралаш типдаги тенгламалар физик ва биологик жараёнларни тўлиқ тасвирлаб берувчи математик модел сифатида хизмат қилади. Ушбу тенгламалар синфига қизиқишнинг ортиши, бу соҳада олинган натижаларнинг катта назарий аҳамиятга эга эканлиги билан бирга уларнинг газлар динамикасида, гидродинамикада, чексиз кичик букилувчи сиртлар назариясида, механикада, акустика ва электрон сочилиш назариясида ва бошқа кўплаб соҳаларда қўлланилиши билан изоҳланади. Шунинг учун аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва уларнинг ечилиши замонавий дифференциал тенгламалар назариясининг долзарб масалаларидан бири бўлиб ҳисобланади.

Ҳозирги кунда бузилувчи гиперболик тенгламалар, шунингдек сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этиш дунё миқёсидаги долзарб муаммолардан бири саналади. Аралаш типдаги тенгламалар учун ўзига хос, махсус уланиш шартли чегаравий масалаларнинг ечилиши математик физика тенгламалари назариясида муҳим масалалардан ҳисобланади. Шундан келиб чиқиб, айтиш мумкинки, сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалалар қўйиш ва уларни тадқиқ этиш математик физика тенгламалари соҳасидаги илмий тадқиқотларнинг устувор йўналишларидан биридир.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий тадбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилмоқда. Илм-фан олдига фундаментал тадқиқотларни амалиётга яқинлаштириш масаласи муҳим вазифа сифатида қўйилган. Бу борада реал объектлардаги жараёнларни моделлаштирувчи аралаш типдаги сингуляр коэффициентли тенгламаларни тадқиқ этиш масалаларига оид салмоқли натижаларга эришилди. Шунингдек, математик фанларнинг устувор йўналишлари бўйича, айниқса, алгебра ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар назарияси, геометрия ва топология, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича ҳалқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқот ишларини олиб бориш мамлакатимиздаги математик илмий тадқиқотларнинг асосий вазифалари этиб белгиланган[1]. Қарор ижросини таъминлашда хусусий ҳосилали тенгламалар назариясини, хусусан бузилувчан гиперболик тенгламалар ва сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенгламалар назарияси бўйича тадқиқотларни ривожлантириш муҳим аҳамият касб этади.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги №ПФ-4947 "Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисидаги" Фармони, 2017 йил 17 февралдаги № ПҚ-2789 "Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида"ги, 2017 йил 20 апрелдаги № ПҚ-2909 "Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида" ги, 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 "Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида"ги ва 2019 йил 9 июлдаги №ПҚ-4387 "Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида" ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика ва фан технологиялари ривожланишининг устувор йуналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика и информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Бузилувчан гиперболик ва аралаш типдаги тенгламалар назариясининг ривожланиш тарихи Г. Дарбу, Ф. Трикоми Е. Хольмгрен ва С.Геллерстедтларнинг мос равишда 1894, 1923, 1927 ва 1935 йилларда чоп этилган фундаментал ишлари билан боғлиқ.

Аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар бўйича дастлабки фундаментал тадқиқотлар 1920 йили италян математиги Франческо Трикоми томонидан олиб борилган. Бу ишдан кейин аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назарияси асосан учта йўналиш бўйича ривожлана бошлади: биринчи йўналиш – Трикоми масаласини умумийроқ аралаш типдаги тенгламалар учун ўрганиш бўлиб, уларга С. Геллерстедт; А.В.Бицадзе; К.И.Бабенко; Л. И. Карол; С.П. Пулькин ва бошқаларнинг ишлари бағишланган; иккинчи йўналиш – Трикоми масаласининг ҳар хил модификацияларига бағишланган; учинчи йўналиш эса аралаш типдаги тенгламалар учун спектрал масалаларни тадқиқ этишдан иборат.

Аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг ривожланишида швед математиги Свен Геллерстедт томонидан ишлаб чиқилган потенциаллар назарияси муҳим ўрин эгаллайди. С. Геллерстедт яратган усул ёрдамида бузилувчан эллиптик типдаги тенглама учун Дирихле ва Холмгрен масалаларининг ечимини қулай интеграл шаклда ёзиш мумкин ва аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масалани тадқиқ этиш жуда қулай бўлади. Шунингдек аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масалалар назариясининг ривожланишига А.В.Бицадзенинг экстремум принципи катта туртки берган. Бу принцип масала ечимининг ягоналигини исботлашда жуда кенг қўлланилади. Аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясининг ривожланишида муҳим ўрин тутувчи яна бир натижалардан бири бу С.Г. Михлин томонидан ишлаб чиқилган Карлеманнинг Трикоми сингуляр интеграл тенгламасини регулярлаштириш усули ҳисобланади ва бу усул Ф.Трикоми интеграл тенгламасини ечишда қўлланилган.

Мазкур диссертация иши соҳа ичида бузилувчан гиперболик тенгламалар ва сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этишга бағишланган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таьлим муассасасининг илмий тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Термиз давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-32: «Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун Трикоми, силжишли масалалар ва Бицадзе-Самарский шартларини бир таърифда бирлаштирган масалаларнинг корректлигини ўрганиш» (2012-2016 йй.) фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади соҳа ичида бузиладиган гиперболик ва аралаш турдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар учун чегаравий ва ички характеристикаларда Бицадзе-Самарский, Франкл ва силжишли шартли масалаларнинг корректлигини исботлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

- кетма-кет яқинлашиш ва итерация усуллари ёрдамида кичик махсусликка эга бўлган силжишли интеграл ва функционал тенгламаларни ечиш;
- силжишли кичик махсусликка эга бўлган интеграл тенгламани ечими изланаётган синфнинг муҳимлигини контр мисол ёрдамида кўрсатиш;
- С.Г.Михлин ғоясида кўра Карлеман усулида ностандарт сингуляр интеграл тенгламанинг ечимини қуриш;
- сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенглама учун битта чегаравий характеристикада силжишли шартли масала корректлигини исботлаш;
- аралаш турдаги тенглама учун ички характеристикаларда берилган силжишли шартли масала корректлигини исботлаш.

Тадқиқот объекти – сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалардан, соҳа ичида бузиладиган гиперболик тенгламалардан ва иккита нокарлеман силжишли кичик махсусликка эга интеграл тенгламалардан иборат.

Тадқиқот предмети – сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий ва ички характеристикаларда силжишли шартли масалалар ва соҳа ичида бузилувчан гиперболик тенглама учун нолокал чегаравий шартли масалаларнинг қўйилиши ва уларни тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида интеграл тенгламалар назариясининг, математик физиканинг чегаравий масалалари назариясининг методларидан, шунингдек итерация ва кетма-кет яқинлашиш усулларидан, ҳамда экстремум принципидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

соҳа ичида бузиладиган гиперболик тенглама учун Бицадзе-Самарский шартли, яъни чегаравий характеристикада изланаётган ечимнинг қийматларини соҳа ичида ётувчи иккита махсус эгри чизиқ нуқталари билан боғловчи чегаравий масала ечилган;

соҳа ичида бузиладиган гиперболик тенглама учун битта характеристикада силжиш шартли масала ечилган, масала ечимини излаш жараёнида функционал тенгламага келиниб, тенглама ечими изланаётган синфнинг муҳимлиги контрмисол ёрдамида кўрсатилган;

сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун етишмайдиган Бицадзе-Самарский шартли масаланинг корректлиги исботланган;

характеристик бўлмаган қисмида нофредгольм оператор иштирок этган ва битта яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсуслиги бўлган Трикоми типидаги сингуляр интеграл тенгламасини регулярлаштириш алгоритми тузилган;

сингуляр коэффициентли аралаш типдаги ва аралаш типдаги тенгламалар учун мос равишда битта чегаравий характеристикада ва ички характеристикаларда силжишли шартли масалаларнинг корректлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари нохарактеристик қисмида нофредгольм оператор иштирок этган ва битта яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсуслиги бўлган Трикоми типидаги сингуляр интеграл тенгламасини регуляризация қилиш алгоритми ишлаб чиқилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик физика тенгламалари, аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг умумий назариясидан, функционал ва интеграл тенгламалар учун итерация ва кетма-кет яқинлашиш усуллари математикада қабул қилинган дедуктив хулосаларга асосан қўлланилганлиги ва теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти соҳа ичида бузилувчан гиперболик типдаги тенгламалар ва сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар назариясини янада ривожлантириши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти, сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар ва соҳа ичида бузиладиган гиперболик тенгламалар учун Бицадзе-Самарский типидаги чегаравий масалаларни, шунингдек бундай тенгламаларга келтириладиган амалий масалаларни ечишга тадбиқ этилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун чегаравий ва ички характеристикаларда силжишли шартли масалалар бўйича олинган натижалар қуйидаги илмий тадқиқот лойиҳаларида қўлланилган:

нoстандарт сингуляр интеграл тенгламаларни регулярлаштириш усули №0213-2014-0002 рақамли «Экстремал жараёнларнинг аралаш типдаги нолокал дифференциал тенгламалар кўринишидаги математик моделлари» номли халқаро лойиҳасида сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламалари учун нолокал чегаравий масалалар ечимларини топишда қўлланилган (Россия Фанлар Академияси Кабардино-Балкар илмий марказининг Амалий математика ва автоматлаштириш институтининг расмий маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши аралаш типдаги бузилувчан тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларини самарали тадқиқ этиш имконини берган;

соҳа ичида бузиладиган гиперболик тенгламалар ва сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг корректлигини асословчи теоремалар №17-41-020516 рақамли «Суюқлик ва газлар оқимининг математик моделлари ва уларнинг татбиқлари» мавзусидаги халқаро грант лойиҳасида аралаш типдаги тенгламалар учун қўйилган Бицадзе-Самарский типидаги масалаларини ечишда қўлланилган (Башкортостан Автоном Республикаси стратегик тадқиқотлар институти Стерлитамак илмий муассасасида тадбиқ этилганлиги ҳақида 2019 йил 12 сентябрдаги №85 рақамли маълумотнома). Натижанинг қўлланилиши ностандарт Трикоми типидаги сингуляр интеграл тенгламаларнинг ечимини ошкор кўринишда ёзиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқотнинг асосий натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, улардан 8 таси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этишга тавсия қилинган нашрларда, шундан 3 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 112 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «Соҳа ичида бузиладиган гипреболик тенгламалар учун нолокал чегаравий масала» деб номланган биринчи боби соҳа ичида бузиладиган сингуляр коэффициентли гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг қўйилиши ва ечилишига бағишланган. §1.1. параграфда соҳа ичида бузиладиган сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун Бицадзе-Самарский типидаги нолокал чегаравий масала тадқиқ қилинган.

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{m/2-1} u_x + (\beta_0 / y) u_y = 0. \qquad (1)$$

(1) тенгламада $m>0$, α_0 ва β_0 лар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: $-(m/2) \le \beta_0 < 1,\ 0 \le \alpha_0 < (m+2)/2$.

$\alpha_0 o \beta_0$ параметрик текисликда қуйидаги тўғри чизиқлар билан чегараланган $S_0B_0C_0$ учбурчакни қараймиз:

$$S_0B_0 : \beta_0 = 1, B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -(m/2), C_0S_0 : \alpha_0 = 0.$$

Ω – бир боғламли ёпиқ соҳа бўлиб, XOY текислигида (1) тенгламанинг

$$\left.\begin{matrix} AC_1 \\ BC_1 \end{matrix}\right\}: \ x \mp \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \mp 1, \quad y>0,$$

$$\left.\begin{matrix} AC_2 \\ BC_2 \end{matrix}\right\}: \ x \mp \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = \mp 1, \quad y<0$$

характеристикалари билан чегараланган бўлсин, бунда $A(-1,0)$, $B(1,0)$.

$P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta S_0B_0C_0$ бўлсин ва $\alpha \ge 0, \beta < 1, 0 \le \alpha + \beta < 1, \beta < \alpha$ бўлиб, бунда

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \frac{m + 2(\beta_0 \pm \alpha_0)}{2(m+2)}.$$

Г масаланинг қўйилиши. Ω соҳада (1) тенгламанинг $C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega \setminus AB)$ синфга тегишли

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y),\ (x,\ y) \in \Omega_1 = \Omega \cap \{ y>0 \}, \\ u_2(x,\ y), (x,\ y) \in \Omega_2 = \Omega \cap \{ y<0 \}. \end{cases}$$

ва ушбу чегаравий шартларни қаноатлантирувчи

$$u_j \left[\theta^{(j)}(x) \right] = \mu_1 u_j \left[\theta^{(j)}_{k_1}(x) \right] + \mu_2 u_j \left[\theta^{(j)}_{k_2}(x) \right] + \delta_j(x), \ \forall x \in I = AB, \ j = 1,2 \qquad (2)$$

бу ерда мос равишда $j=1$ Ω_1, соҳа $j=2$ – Ω_2 соҳа; ҳамда

$$\lim_{y \to +0} u_1(x,y) = c \lim_{y \to -0} u_2(x,y), \forall x \in [-1, 1], \qquad (3)$$

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \rho(x) \lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \lambda(x), \ \forall x \in (-1,1), \qquad (4)$$

уланиш шартларини қаноатлантирувчи регуляр ечими топилсин, бунда $\theta^{(j)}(x) (\theta^{(j)}_{k_1}(x), \theta^{(j)}_{k_2}(x))$ – $M(x_0, 0) \in I$ нуқтадан чиқувчи ва BC_j (Ω_j соҳа ичида ётувчи ва B нуқтадан чиқувчи $x + \left[2k_j / (m+2) \right] |y|^{(m+2)/2} = 1$ чизиқлар) характеристикалар кесишиш нуқтаси аффикси, $c = const \neq 0;$ $\mu_1, \mu_2 = const;$ $\delta_j(x), \rho(x), \lambda(x)$ – берилган функциялар $C^2(\bar{I}) \cap C^3(I)$ синфга тегишли, шунга асосан $\rho(x) - c \neq 0,\ k_1 > k_2 > 1,\ \delta_j^{(n)}(1) = 0,\ \lambda^{(n)}(1) = 0,\ n = 0,1,2.$

Қўйилган масала иккита силжишли нуқтада кичик махсусликка эга бўлган

$$\nu_2(x) = \int_x^1 \frac{K_1(x,s)\nu_2(s)ds}{|s - a_1 - b_1 x|^l} + \int_x^1 \frac{K_2(x,s)\nu_2(s)ds}{|s - a_2 - b_2 x|^l} + f(x), \quad \forall x \in I, \quad l = 1 - \alpha - \beta, \tag{5}$$

“Вольтерра” типидаги интеграл тенгламага келтирилади.

Бу ерда

$$K_i(x,s) = \begin{cases} \dfrac{\mu_i \beta (1-\alpha)(1-x)^\beta b_i(\rho(s)-c)}{(a_i(1-s))^\alpha(\rho(x)-c)(1-a_i^{-\beta}\mu_1 - a_i^{-\beta}\mu_2)} \times \\ \times F(\alpha, 1-\beta, 2; b_i(s-x)/a_i(1-s)), \quad x \le s \le a_i + b_i x, \\ -\dfrac{\mu_i \Gamma(1-\beta)(1-\alpha)(a_i(1-s))^{1-\beta-\alpha}(1-x)^\beta(\rho(s)-c)}{(b_i(s-x))^{1-\beta}\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)(\rho(x)-c)(1-a_i^{-\beta}\mu_1 - a_i^{-\beta}\mu_2)} \times \\ \times F(-\beta, 1-\beta, 2-\alpha-\beta; a_i(1-s)/b_i(s-x)), \\ a_i + b_i x \le s \le 1, \end{cases}$$

бунда $a_i = \dfrac{2}{k_i + 1},\ b_i = \dfrac{k_i - 1}{k_i + 1} = 1 - a_i,\ i = 1,2.$

(5) “Вольтерра” типидаги интеграл тенглама кетма-кет яқинлашиш усули ёрдамида ечилган. Бу параграфнинг асосий натижаси сифатида қуйидаги теорема келтирилади.

Теорема 1. *Агар етарли кичик* μ_1 *ва* μ_2 *ларда*

$$\left| \frac{|\mu_1| K_1(a_1^{1-\ell} + b_1^{1-\ell}) + |\mu_2| K_2(a_2^{1-\ell} + b_2^{1-\ell})}{1-\ell} \right| < 1$$

шарт бажарилса, Γ *масала бир қийматли ечимга эга, бунда* $\left|(1-x)^{\alpha-\beta} K_k(x,t)\right| \le K_k,\ |f(x)| \le M,\ k = 1,2.$

§ 1.2. да (1) тенглама учун

$$D_{-1,x}^{1-\beta} u^-[\theta^-(x)] = \mu_1(x) D_{-1,x}^{1-\beta} u^-[\theta^-(p(x))] + \rho_1(x) \tag{6}$$

$$D_{x,1}^{1-\alpha} u^+[\theta^+(x)] = \mu_2(x) D_{x,1}^{1-\alpha} u^+[\theta^+(q(x))] + \rho_2(x) \tag{7}$$

Франкл шартли ва уланиш шарти

$$\lim_{y \to +0} u^+(x,y) = \lim_{y \to -0} u^-(x,y) = \tau(x),\ \forall x \in \bar{I} = [-1,1], \tag{8}$$

$$\lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u^+}{\partial y} = \lim_{y \to -0} (-y^{\beta_0}) \frac{\partial u^-}{\partial y} = \nu(x),\ \forall x \in I = (-1,1), \tag{9}$$

бўлган масала ўрганилган, бунда $\mu_1(x), \mu_2(x), \rho_1(x), \rho_2(x) \in C^3(\bar{I})$ берилган функциялар, шу билан бирга

$$\left|\mu_1(x)a_1^{1-\alpha-\beta}\right|<1,\ \left|\mu_2(x)b_2^{1-\alpha-\beta}\right|<1, \tag{10}$$

$$\theta^+(x)=\left(\frac{1+x}{2}+i\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right);\ \theta^-(x)=\left(\frac{x-1}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(1+x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right);$$

$$\theta^+(q(x))=\left(\frac{1+q(x)}{2}+i\left(\frac{m+2}{4}(1-q(x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right);$$

$$\theta^-(p(x))=\left(\frac{p(x)-1}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(1+p(x))\right)^{\frac{2}{m+2}}\right).$$

$\bar{I}=[-1,1]$ кесмадаги нуқталар тўпламини $[-1,c_1]$ ва $[c_2,1]$ кесмалардаги нуқталар тўпламига акслантирувчи $p(x), q(x)\in C^1(\bar{I})$ функцияларни киритамиз, бунда $c_1,c_2\in(-1,1)$. Бундай хоссаларга эга бўлган функцияга мисол сифатида қуйидаги чизиқли функцияни келтирамиз: $p(x)=a_1x-b_1,\ q(x)=b_2x+a_2$, бунда $a_k=(1+c_k)/2,\quad b_k=(1-c_k)/2, k=1,2$ ва $a_k+b_k=1,\ a_k-b_k=c_k$.

Бу чегаравий масалани Γ_1 орқали белгилаймиз. I интервалда номаълум $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги Ω^- ва Ω^+ соҳаларда мос равишда I интервалга кўчирилган муносабатлар қуйидаги кўринишга эга

$$\nu(x)=-\gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)F_1(p_k(x)) \tag{11}$$

ва

$$\nu(x)=\gamma D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x)F_2(q_k(x)). \tag{12}$$

Γ_1 масала ечимининг ягоналигини интеграл айниятлар ёрдамида исботланган.

Γ_1 масала ечимининг мавжудлиги. (8) ва (9) уланиш шартлари, ҳамда (11), (12) га асосан, номаълум $\tau(x)$ функцияга нисбатан ушбу сингуляр интеграл тенгламани ҳосил қиламиз

$$\tau(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(s)ds}{s-x}=F_4(x), \tag{13}$$

бунда $F_4(x)-$маълум функция, $\lambda-$параметр.

Теорема 2. *Агар*

$$\beta_0<\frac{2-m}{4},\ \sin\alpha\pi-\sin\beta\pi\cos(\alpha+\beta)\pi>0$$

шарт бажарилса, (13) тенглама Гёльдер функциялар синфида бир қийматли ечимга эга, бунда $(1-x)^{\alpha+\beta-1}\tau(x)$ *функция* $x=-1$ *нуқтада чегараланган,* $x=1$ *нуқтада чегараланмаган бўлиши мумкин.*

Диссертациянинг «Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун бузилиш чизиғи кесмасида Франкл шартли Бицадзе-Самарский масаласи» деб номланган иккинчи боби сингуляр коэффициентли аралаш типдаги

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{14}$$

тенглама учун бузилиш чизиғи кесмасида Франкл шартли Бицадзе-Самарский масаласининг қўйилиши ва тадқиқ қилинишига бағишланган, бунда $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$ ўзгармаслар.

D соҳа $z = x + iy$ комплекс текислигининг чекли бир боғламли ёпиқ соҳаси бўлиб, $y > 0$ ярим текисликда учлари $A(-1,0)$, $B(1,0)$ нуқталарда бўлган (14) тенгламанинг $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$ нормал чизиғи билан, $y < 0$ ярим текисликда эса (14) тенгламанинг AC ва BC характеристикалари билан чегараланган бўлсин.

D^+ ва D^- белгилашлар билан D соҳанинг мос равишда $y > 0$ ва $y < 0$ ярим текисликларда ётувчи қисмини, C_0 орқали AC характеристика билан $E(c,0)$ нуқтадан чиқувчи характеристикалар кесишиш нуқтасини белгилаймиз, бунда $c \in I = (-1,1)$ – $y = 0$ ўқининг интервали. $p(x) \in C^1[-1,c]$ бўлсин. Бу функция $[-1,c]$ кесмани $[c,1]$ кесмага акслантиради, $p(-1) = 1, p(c) = c.$ Бундай функцияга мисол сифатида қуйидаги чизиқли функцияни келтирамиз: $p(x) = \delta - kx,$ где $k = (1-c)/(1+c), \delta = 2c/(1+c).$

Бу масалада AC характеристика ихтиёрий икки қисмга бўлиниб: AC_0, C_0C ва AC_0 қисмида Бицадзе-Самарский шарти берилиб, C_0C қисми чегаравий шартдан озод қилинган ва бу етишмайдиган Бицадзе-Самарский шарти AB бузилиш чизиғи кесмасида Франкл шарти билан алмаштирилган.

***A* масаланинг қўйилиши.** D соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция топилсин:

1. $u(x,y) \in C(\overline{D})$;
2. $u(x,y) \in C^2(D^+)$ ва шу соҳада (14) тенгламани қаноатлантиради;
3. $u(x,y)$ функция D^- соҳада R_1 синфга тегишли умумлашган ечим;
4. бузилиш чизиғи оралиғида ушбу уланиш шарти берилади

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{15}$$

бу лимитлар $x = \pm 1, x = c$ нуқталарда $1 - 2\beta$ дан кичик тартибдаги махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m+2)$;

5. ушбу шартлар бажарилади:

$$u(x,y)\Big|_{\sigma_0} = \phi(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{16}$$

$$D_{-1,x}^{\beta}\left(1+x\right)^{2\beta-1}u[\theta(x)]=a(x)u\left(x,0\right)+b(x),\ -1<x<c, \tag{17}$$

$$u(x,0)-\mu u(p(x),0)=f(x),\quad -1\le x\le c, \tag{18}$$

бу ерда $\mu=const,\ \ a(x), b(x), f(x),\varphi(x)-$берилган силлиқ функциялар.

(18) шарт AB бузилиш чизиғидаги Франкль шарти дейилади.

D^{-} соҳада

$$\lim_{y\to -0}u(x,y)=\tau(x),\ x\in\overline{I};\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I, \tag{19}$$

шакли ўзгарган Коши масаласининг ечимини берувчи Дарбу формуласига асосан, $y=0$ ўқнинг $(-1,c)$ интервалида номаълум $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги биринчи функционал муносабат деб аталувчи

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-2\beta}a_1(x)\tau(x)+b_1(x),\ x\in\left(-1,c\right), \tag{20}$$

тенгликни (20) чегаравий шартдан ҳосил қилиш мумкин, бунда

$$\gamma=\frac{2\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta},\ a_1(x)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}-a(x)(1+x)^{1-\beta},b_1=-\gamma D_{-1,x}^{1-2\beta}(1+x)^{1-\beta}b(x).$$

A **масала ечимининг ягоналиги.**

Теорема 3. *(А.В.Бицадзенинг экстремум принципи).*

Агар $\phi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0, b(x)\equiv 0,$

$$\mu>1,\ \left(a(x)(1+x)^{1-\beta}\right)'\le 0 \tag{21}$$

шартлар бажарилса, у ҳолда A *масала ечими ўзининг мусбат максимуми ва манфий минимумига* $\overline{D}^{+}$ *соҳанинг* $\overline{\sigma}_0$ *чизиғидаги нуқталарда эришади.*

A **масала ечимининг мавжудлиги.**

Теорема 4. *Агар (21) шарт ва*

$$\frac{\pi^2 ctg(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{\mu k^{\alpha-1/2}ch(\pi x)}<1 \tag{22}$$

тенгсизлик бажарилса, A *масала бир қийматли ечимга эга.*

D^{+} соҳадан I интервалга келтирилган номаълум $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги яхши маълум бўлган қуйидаги муносабатни келтирамиз

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{\left|x-t\right|^{2-2\beta}}-(2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}}\right\}+\Phi(x),\ x\in I, \tag{23}$$

бунда $\Phi\left(x\right)-$ маълум функция. (23) формула номаълум $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги иккинчи функционал муносабат дейилади. Эслатиб ўтамиз, (23) муносабат бутун I оралиқ учун ўринли.

(20) ва (23) муносабатлардан (15) уланиш шартига асосан, номаълум функция $\nu(x)$ га нисбатан ушбу сингуляр интеграл тенгламани ҳосил қиламиз:

$$A\left(x\right)\tau\left(x\right)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau\left(t\right)dt=\Phi_1(x),\ x\in(-1,c), \tag{24}$$

бунда $\lambda = \dfrac{\Gamma(2\beta)}{\pi\Gamma(\beta)}\cos\beta\pi$, $A(x) = \dfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}\left(1+\sin\beta\pi\right) - a(x)(1+x)^{1-\beta}$,

$\Phi_1(x) -$маълум функция.

Эслатиб ўтамиз, (24) тенглама $x\in(-1,c)$ оралиқда ўринли, у ҳолда $(-1,1)$ оралиқли интегралда махсуслик фақат $t\in(-1,c)$ да, шунинг учун бу интегралларни $(-1,c)$ ва $(c,1)$ интегралларга ажратиб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$A(x)\tau(x) - \lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)dt -$$
$$-\lambda\int_{c}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)dt = \Phi_1(x),\ x\in(-1,c). \tag{25}$$

(25) тенгламадаги $(c,1)$ оралиқли интегралда интеграл ўзгарувчисини алмаштириб $t = p(s) = \delta - ks$, $\mu\tau(p(s)) = \tau(s) - f(s)$ тенгликларга кўра ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$A(x)\tau(x) - \lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)dt =$$
$$= -\frac{\lambda}{\mu}\int_{-1}^{c}\frac{p'(s)\tau(s)}{p(s)-x}ds + R[\tau] + \Phi_2(x),\ -1\le x\le c \tag{26}$$

бунда $R[\tau]-$ регуляр оператор, $\Phi_2(x)-$ маълум функция.

(26) нинг ўнг томонидаги биринчи интеграл регуляр эмас, чунки $x=c,\, s=c$ да интеграл остидаги ифода биринчи тартибли яккаланган махсусликка эга ва шунинг учун бу интегрални алоҳида ажратиб оламиз.

(26) тенгламанинг ўнг қисмини вақтинча маълум деб, уни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз

$$A(x)\tau(x) - \lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)dt = g_0(x),\ -1<x<c, \tag{27}$$

бунда

$$g_0(x) = -\frac{\lambda}{\mu}\int_{-1}^{c}\frac{p'(s)\tau(s)}{p(s)-x}ds + R[\tau] + \Phi_2(x). \tag{28}$$

$(1+x)^{2\beta-1}\tau(x) = \rho(x),\, (1+x)^{2\beta-1}g_0(x) = g(x)$ белгилаш киритиб, (27) тенгламани қуйидаги

$$A(x)\rho(x) - \lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\rho(t)dt = g(x),\ -1\le x\le c. \tag{29}$$

кўринишга келтирамиз.

(29) сингуляр интеграл тенгламанинг ечимини $h(c)$ синфдан излаймиз, бу ечим $x=c$ нуқтада чегараланган ва $x=-1$ нуқтада $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин.

(29) тенгламага С.Г.Михлин томонидан такомиллаштирилган Карлеманнинг регулярлаштириш усулини қўллаб, ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\tau(x)=\frac{\lambda k}{\mu}A^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-x}-\frac{\lambda k}{\mu}\lambda^*(x)\int_{-1}^{c}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2}\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\frac{dt}{\delta-kx-t}+R\left[\tau\right]+\Phi_3(x). \tag{30}$$

бунда $R\left[\tau\right]-$ регуляр оператор, $\Phi_3(x)-$ маълум функция.

(30) интегралда ички интегрални ҳисоблаб, тенгламанинг характеристик қисмини ажратиб, $\delta-kc-c=0$ айниятга кўра уни ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$\tau(x)=\tilde{\lambda}(c)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\alpha}\frac{\tau(s)ds}{\left(c-s\right)\left(k+\dfrac{c-x}{c-s}\right)}+R_4[\tau]+\Phi_3(x), \tag{31}$$

бунда $R_4[\tau]$ – регуляр оператор, $\tilde{\lambda}(c)=\dfrac{k^{1-\alpha}\lambda\lambda^*(c)}{\mu}\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

(31) тенгламада ўзгарувчиларни $s=c-(1+c)e^{-t}$, $x=c-(1+c)e^{-y}$ алмаштириб ва $\rho(y)=\tau[c-(1+c)e^{-y}]e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y}$ белгилаш киритиб, Винер-Хопф интеграл тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$\rho(y)=\tilde{\lambda}(c)\int_{0}^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_4[\rho]+\Phi_4(y). \tag{32}$$

Бу тенглама Фурье алмаштириши ёрдамида Риманнинг чегаравий масаласига келади ва у квадратурада ечилади.

§2.2. параграфда (14) тенглама учун параметрнинг $\beta_0=-m/2$ қийматида A масала ўрганилган:

$$u(x,\sigma_0(x))=\phi(x),\quad x\in[-1,1], \tag{33}$$

$$u[\theta_0(x)]=au(x,0)+b(x),\ x\in[-1,c], \tag{34}$$

$$u(x,0)-\mu u(p(x),0)=f(x),\quad x\in[-1,c], \tag{35}$$

бу ерда $\mu=const,a=const,b(x),f(x),\varphi(x)-$ берилган силлиқ функциялар. Бу масала А масала каби тадқиқ қилинади.

Диссертациянинг учинчи боби сингуляр коэффициентли аралаш типдаги тенглама учун аралаш соҳада чегаравий ва ички характеристикаларда Франкль шартли силжишли масалани ўрганишга бағишланган.

Ω соҳа $z=x+iy$ комплекс текисликнинг чекли бир боғламли соҳаси бўлиб, $y>0$ ярим текисликда учлари $A(-1,0)$ ва $B(1,0)$ нуқталарда бўлган $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ нормал чизиқ билан, $y<0$ – да эса (14) тенгламанинг AC ва BC характеристикалари билан чегараланган.

Ω^+ ва Ω^- орқали Ω соҳанинг, мос равишда $y>0$ ва $y<0$ ярим текисликлардаги қисмларини белгилаймиз.

Масаланинг қўйилиши. Ω соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ функция топилсин:

1) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ ва шу соҳада (14) тенгламани қаноатлантиради;

2) Ω^- соҳада $u(x,y)$ функция (14) тенгламанинг R_1 синфга тегишли умумлашган ечими бўлсин;

3) бузилиш чизиғида қуйидаги уланиш шартлари бажарилсин:

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I, \tag{36}$$

бу лимитлар $x\to\pm 1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бунда $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2),\ I=(-1,1)-\ y=0$ ўқнинг интервали;

4) қуйидаги шартлар бажарилади

$$u(x,\sigma_0(x))=\phi(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{37}$$

$$a(x)D_{-1,x}^{1-\beta}u[\theta(x)]+b(x)D_{x,1}^{1-\beta}u[\theta(-x)]=\psi(x),\ x\in\overline{I}, \tag{38}$$

$$u(-x,0)-u(x,0)=f(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{39}$$

бунда $D_{-1,x}^{1-\beta}$ ва $D_{x,1}^{1-\beta}$ – каср тартибли дифференциал операторлар, $\theta(x_0)$ ва $\theta(-x_0)$, мос равишда, AC характеристика билан $(x_0,0)$ ва $(-x_0,0)$, $x_0\in I$ нуқтадан чиқувчи характеристикалар кесишиш нуқталари аффикслари $\phi(x), a(x), b(x), \psi(x), f(x)$ – берилган етарлича силлиқ функциялар бўлиб, улар ушбу талабларга бўйсунади: $f(-x)=-f(x)$

$$(1-x)^{\beta}a(x)-(1+x)^{\beta}b(x)\neq 0,\ x\in I. \tag{40}$$

Одатда (38) кўринишдаги силжишли шартлар чегаравий масалаларда ҳар иккала AC ва BC характеристикаларда берилади. Биз (38) шарт фақат битта AC характеристикада, яъни BC характеристика чегаравий шартдан озод қилинган ҳолда қараймиз. (38) ва (39) шартлар Франкл шарти дейилади,

§ 3.1. параграфда (14) тенглама учун (36) – (39) шартларни қаноатлантирувчи ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган.

Ушбу параграфдаги асосий натижалар қуйидаги теоремалар ҳисобланади.

Теорема 5. *(А.В.Бицадзенинг экстремум принципи). Агар:* $\psi(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0,\ \phi(x)\equiv 0$ *шартлар ва*

$$a(x)>0,\ b(x)>0,\ x\in\overline{I}, \tag{41}$$

тенгсизликлар бажарилса, у ҳолда B масала ечими $u(x,y)$ *ўзининг энг катта мусбат максимум қийматига ва энг кичик манфий минимум қийматига* $\overline{\Omega}^+$ *ёпиқ соҳанинг* σ_0 *чизиғи нуқталарида эришади.*

Теорема 6. *Агар берилган функциялар* $a(x), b(x), \psi(x)$, $f(x)\in C\left(\overline{I}\right)\cap C^{1,\alpha}\left(I\right)$, $\phi(x)\in C^{0,\alpha}\left(\overline{I}\right)$ *бўлиб, шулар билан биргаликда асосан*

$\phi(x)=(1-x^2)\tilde{\phi}(x), \quad \tilde{\phi}(x)\in C^{0,\alpha}\left(\bar{I}\right), \quad f(-1)=f(0)=f(1)=0$ *ва* (40), (41) *шартлар бажарилса, B масала ечими мавжуд.*

Таърифланган масала ечими мавжудлиги интеграл тенгламалар усулида исботланган. Шуни эслатиб ўтамизки, аралаш типдаги тенгламалар учун қўйилган бошқа масалалардан фарқи, бу ерда бир вақтда Дирихле ва шакли ўзгарган Хольмгрен масалалари ечимларини берувчи формулалар интеграл ифодаларидан фойдаланилади.

§3.2. параграфда (14) тенглама $\beta_0=-m/2$ ҳолда қаралган. Бу параграфда

$$sign\, y|y|^m u_{xx}+u_{yy}-(m/2y)u_y=0 \tag{42}$$

тенгламанинг Ω соҳада B масаланинг қўйилишида келтирилган (37) – (39) шартларни қаноатлантирувчи ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган. Лекин (37) шарт Бицадзе-Самарский шарти билан алмаштирилган:

$$u(x,\sigma_0(x))=c(x)u(x,0)+\phi_0(x),\ \ x\in\bar{I}, \tag{43}$$

бунда $c(x),\ \phi_0(x)$ – берилган силлиқ функциялар.

§3.3. да (14) тенгламанинг яна бир хусусий ҳоли $\beta_0=0$ қаралган. Бу ерда ички характеристикада силжишли шартли масала корректлиги тадқиқ қилинган.

Ω соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)$ функция изланган:

1) $u(x,y)$ функция ҳар бир $\bar{\Omega}^+$ ва $\bar{\Omega}^-$ соҳаларда узлуксиз;

2) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ ва шу соҳада (14) ($\beta_0=0$) тенгламани қаноатлантиради;

3) Ω^- соҳада (14) ($\beta_0=0$) тенгламанинг R_1 синфга тегишли $u(x,y)$ умумлашган ечими бўлсин;

4) (14) ($\beta_0=0$) тенгламанинг AB – параболик бузилиш чизиғи кесмасида умумий уланиш шартлари бажарилади:

$$u(x,-0)=u(x,+0)+a_0(x), \quad x\in\bar{I}, \tag{44}$$

$$\lim_{y\to-0}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x)\lim_{y\to+0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x), \quad x\in I\setminus\{c\}, \tag{45}$$

бу лимитлар $x\to\pm1, x\to c$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибда махсусликка эга бўлиши мумкин, бунда $\beta=m/2(m+2)$;

5) қуйидаги шартлар бажарилади

$$u(x,\sigma_0(x))=c_0(x)u(x,+0)+\phi_0(x),\ \ x\in\bar{I}, \tag{46}$$

$$u\left[\theta_1^*(x)\right]-\mu u\left[\theta_0^*(p(x))\right]=\psi_0(x),\ x\in[-1,c], \tag{47}$$

$$u(p(x),-0)-u(x,+0)=f_0(x), \quad x\in[-1,c], \tag{48}$$

бунда $\theta_1^*(x_0)$ ва $\theta_0^*(p(x_0))$ – $M(x_0,0)$ ва $M(p(x_0),0)$ $x_0\in[-1,c],\ p(x_0)\in[c,1]$. нуқталардан чиқувчи, мос равишда EC_0 ва EC_1 характеристикалар кесишиш нуқталари аффикслари.

Берилган $\phi_0(x), c_0(x), \psi_0(x), a_0(x), b(x), f_0(x), b_0(x)$ функциялар ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиз дифференциалланувчи функциялар. Қўйилган масалани қисқача B_2 билан белгилаймиз.

- (46) шарт AB бузилиш чизиғи ва σ_0 да берилган Бицадзе-Самарский шарти дейилади;
- (47) шарт EC_0 ва EC_1 характеристикаларда берилган силжишли шарт дейилади
- (48) шарт изланаётган функциянинг $[-1,c]$ ва $[c,1]$ кесмалардаги мос равишда юқори ва қуйи қийматларини боғловчи силжишли шарт дейилади.

Изланаётган масала ечими ягоналиги А.В.Бицадзенинг экстремум принципи ёрдамида исботланади.

Ушбу теоремалар асосий натижалар ҳисобланади.

Теорема 7. *Агар* $a_0(x)\equiv 0, b_0(x)\equiv 0, \phi_0(x)\equiv 0, \psi_0(x)\equiv 0, f_0(x)\equiv 0$ *шартлар ва*

$$\mu<0,\ 0\le c_0(x)<1, \tag{49}$$

тенгсизлик бажарилса, B_2 *масала ечими* $\bar{\Omega}$ *ёпиқ соҳада айнан нолга тенг.*

Теорема 8. (44) – (48) *чегаравий шартларда берилган функциялар* $a_0(x),\ b_0(x),\ b(x),\ c_0(x),\ \phi_0(x)\in C\left(\bar{I}\right)\cap C^{1,\alpha}\left(I\right)$, $\psi_0(x),\ f_0(x)\in C[-1,c]\cap C^{1,\alpha}\left(-1,c\right)$ *бўлсин, шулар билан биргаликда* $c_0(x)=(1-x^2)\tilde{c}_0(x),\ \phi_0(x)=(1-x^2)\tilde{\phi}_0(x),\ \tilde{c}_0(x),\ \tilde{\phi}_0(x)\in C\left(\bar{I}\right)\cap C^{1,\alpha}\left(I\right)$, $f_0(-1)=0$. *Агар* (49) *шарт ва*

$$\frac{2\pi}{1-\sin(\alpha\pi/2)}\left[\frac{|m_1|+|n_2|}{k^{(1+\alpha)/2}}+\frac{|m_2|+|n_1|}{k^{(1-\alpha)/2}}\right]<1, \tag{50}$$

бунда

$$m_1=B_1(c)(A^*(c)-B^*(c)\pi ctg(\alpha\pi)),\ m_2=B_2(c)(A^*(c)-B^*(c)\pi ctg(\alpha\pi)),$$

$$n_1=k^{-\alpha}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}B^*(c)B_1(c),\ n_2=k^{\alpha}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}B^*(c)B_2(c),$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда B_2 *масала бир қийматли ечимга эга.*

Таърифланган масала ечими мавжудлигини исботлашда (32) типдаги ностандарт сингуляр интеграл тенгламага келади, бунда тенглама қайта регуляллаштирилганда.

Эслатиб ўтамизки, бунда тенглама фақат битта яккаланган нуқтада биринчи тартибли махсусликка эга бўлган нофредгольм операторини ва Коши ядроли сингуляр операторни ўзида бирлаштирган.

ХУЛОСА

Ушбу диссертация иши соҳа ичида бузиладиган гиперболик ва аралаш турдаги сингуляр коэффициентли тенгламалар учун ноклассик чегаравий масалалар ўрганилган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилар:

1. Соҳа ичида бузиладиган гиперболик типдаги тенглама учун изланаётган ечимнинг чегаравий характеристикадаги қиймати билан соҳа ичида ётувчи иккита махсус чизиқдаги қийматлари Бицадзе-Самарский шарти билан боғланган масала тадқиқ қилинган. Бу масалани ечими иккита силжишли яккаланган нуқтада кичик махсусликка эга бўлган Вольтерра типидаги интеграл тенгламага келади ва бу тенглама кетма-кет яқинлашиш усули билан ечилган.
2. Соҳа ичида бузиладиган гиперболик типдаги тенглама учун битта характеристикада силжишли шартли масала ўрганилган. Бу масалада ечимни излаш жараёнида функционал тенгламага келиниб, бу тенглама ечими изланаётган синфнинг муҳимлиги контр мисол ёрдамида кўрсатилган.
3. Сингуляр коэффициентли Геллерстедт тенгламаси учун етишмайдиган Бицадзе-Самарский шартли масала корректлиги ўрганилган. Масала ечими мавжудлигини исботлашда характеристик бўлмаган қисмида биринчи тартибли махсуслик бўлган нофредгольм операторли Трикоми сингуляр интеграл тенгламасига олиб келинган ва тенгламани регулярлаштириш алгоритми берилган.
4. Сингуляр коэффициентли аралаш турдаги тенглама учун битта чегаравий характеристикада силжишли шартли масала ва Геллерстедт тенгламаси учун ички характеристикаларда силжишли шартли масала коррект эканлиги исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.30.09.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЧОРИЕВА САНАМ ТОЖИЕВНА

ЗАДАЧА С УСЛОИЯМИ СМЕЩЕНИЯ НА ГРАНИЧНЫХ И ВНУТРЕННИХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2019

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM224

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Мирсабуров Мирахмат** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** доктор физико-математических наук, профессор **Зикиров Обиджон Салижанович** доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский Государственный Университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2019 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.30.09.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана, (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2019 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2019 года).

А.С. Садуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н.

Ш.А. Алимов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа. Уравнения смешанного типа являются хорошей моделью реальных физических и биологических процессов. Повышенный интерес к этому классу уравнений объясняется как большой теоретической значимостью полученных результатов, так и их многочисленными приложениями в газовой динамике, гидродинамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхности, в безмоментной теории оболочек, в различных разделах механики сплошных сред, акустике, в теории электронного рассеяния и многих других областях знаний. Поэтому постановка и решения краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа является одной из важных задачей современной теории дифференциальных уравнений.

В настоящее время в мире актуальным является изучение нелокальных краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений, а также уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. Одним из важных вопросов в теории уравнений математической физики является изучение разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа со специальными условиями сопряжения. Исходя из этого, постановка и исследование нелокальных краевых задач для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом представляет одно из приоритетных направлений научных исследований.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам фундаментальных наук, имеющих прикладное значение. Перед наукой ставится задача сближения фундаментальных исследований к практике. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по алгебру и функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и математической физике, прикладной математике и математическому моделированию, является одним из основных задач[2]. Для дальнейшего развития теории краевых задач для уравнений смешанного типа важное место заняла работа задача со смешением. Развитие исследований уравнений в частных производных в частности развитие теории краевых задач для вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентами играет важную роль в реализации указанного постановления.

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Развитие теории вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа берет свое начало от фундаментальных работ Г. Дарбу, Ф. Трикоми Е. Хольмгрена и С.Геллерстедта, опубликованных, соответственно, в 1894, 1923, 1927 и 1935 годах.

Для уравнений смешанного типа первые фундаментальные исследования были выполнены итальянским математиком Франческо Трикоми в 1920 году. После этой работы теория краевых задачи для уравнений смешанного типа стала развиваться в основном в трех направлениях: первое направление – это исследование задачи Трикоми для более общих уравнений второго порядка, среди которых следует отметить работы С. Геллерстедта; А.В.Бицадзе; К.И.Бабенко; Л. И. Кароля; С.П. Пулькина; второе направление – это различные модификации задачи Трикоми; третей направление – это спектральные задачи для уравнения смешанного типа.

Решающим моментом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа является теория потенциалов, разработанная шведским математиком Свеном Геллерстедтом, с помощью которой решение задач Дирихле и Хольмгрена для вырождающегося эллиптического уравнения выписывается в удобной интегральной форме, которое очень удобно использовать при исследовании краевых задач для уравнений смешанного типа. Так же большим успехом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа является принцип экстремума А.В.Бицадзе, который широко используется при доказательстве единственности решения задачи. Существенном результатом в развитии теории краевых задачи для уравнений смешанного типа так же является метод регуляризации Карлемана развитой С.Г.Михлиным для решения интегрального уравнения Ф.Трикоми.

Настоящая диссертация посвящена исследованию нелокальных краевых задач для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений и уравнений смешанных типов с сингулярным коэффициентом.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по фундаментальному проекту Ф–4–32: «Изучение корректности задач, объединивших в одной формулировке условия задачи Трикоми, задач со смещением и Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом», Термезского государственного университета.

Целью исследования является доказательство корректности задачи с условиями Бицадзе-Самарского, Франкля и смещения на граничных и внутренних характеристиках для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения и уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом.

Задачи исследования:

- решение интегральных и функциональных уравнений со слабой особенностью со сдвигом с помощью метода последовательных приближений и итерации;

- построит контр пример, указывающий на существенность, где ищется решение интегральных уравнений со слабой особенностью со сдвигом;

- построение решения нестандартного сингулярного интегрального уравнения Трикоми методом Карлемана развытой С.Г.Михлиным.

- доказать корректность задачи с условием смещения на одной граничной характеристике для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом;

- доказать корректность задачи с условием смещения на внутренней характеристике для уравнений смешанного типа.

Объектом исследования является уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом, вырождающийся внутри области гиперболические уравнения, интегральные уравнения со слабой особенностью с двумя некарлемановскими сдвигами.

Предметом исследования являются постановка и исследование задачи с условиями смещения на граничных и внутренних характеристиках для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом и исследование нелокальных краевых задач для гиперболического уравнения с вырождением внутри области.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории интегральных уравнений, теории краевых задач математической физики, методы итерации и последовательных приближений, принципы экстремума.

Научная новызна исследования заключается в следующем:

решена задача для гиперболических уравнений, вырождающихся внутри области, с условием Бицадзе-Самарского, связывающим значения искомого решения на характеристике со значениями на двух специальных кривых лежащих внутри области;

решена задача с условиями смещения на одной характеристике для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений и показано важность класса решений, который ищется решение полученного функционалного уравнения, показано с помощью построением котрпримера;

доказано корректность задачи с недостающим условием Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом;

предложен алгоритм регуляризации сингулярного интегрального уравнения Трикоми с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, имеющего изолированную особенность первого порядка в одной точке;

доказано корректность задачи с условием смещения на одной граничной характеристике и на внутренной характеристике, соответственно для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом и для уравнений смешанного типа.

Практические результаты исследования состоят в следующем: предложен алгоритм регуляризации сингулярного интегрального уравнения Трикоми с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, имеющего изолированную особенность первого порядка в одной точке.

Достоверность результатов исследования обоснована принятыми математические дедуктивными выводами с исползованием методов математической физики, общей теории краевых задач для уравнений смешанного типа, методы итерации и последовательных приближений для функциональных и интегральных уравнений и строгими и польными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории краевых задач для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные научные результаты могут быть использованы при решении краевых задач типа задачи Бицадзе-Самарского для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, а также при решении прикладных задач, приводящихся к таким уравнениям.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по задачам с условиями смещения на граничных и внутренних характеристиках для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом внедрены в следующих научно-исследовательских проектах:

разработанные методы регуляризации нестандартных сингулярных интегральных уравнений использованы при решение нелокальных краевых задачах для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в международного проекта под номером №0213-2014-0002 «Нелокальные дифференциальные уравнеюния смешанного типа математических моделей экстремальных процессов» (Институт прикладной математике и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН). Применение научного результата развивает исследования нелокальных краевых задач для класса вырождающихся уравнений смешанного типа;

теоремы по обоснованию корректности новых нелокальных краевых задач типа Бицадзе-Самарского для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом использованы при решение интегрального уравнения типа Трикоми в международном проекте РФФИ №17-41-020516 «Математические модели трансзвуковых течений жидкостей и газов и их приложения» (Стерлитамакский филиал Государственного автономного научного учреждения Институт Стратегических исследований Республики Башкортостан, письмо о внедрении № 85 от 12 сентября 2019 г.). Применение результатов даёт возможность построение решения сингулярных интегральных уравнений типа Трикоми в явном виде.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации доложено в научных докладах на 3 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 8 статьи опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соисканий ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 3 статьи опубликованы в зарубежном журнале, 5 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 112 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуалность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретичесая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названной «Нелокальные краевые задачи для вырождаюшегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами», посвящена постановке и исследованию краевых задач для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом. В §1.1. исследована краевая задача типа задачи Бицадзе-Самарского для вырождаюшегося внутри области уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.

Рассмотрим уравнение

$$-|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \alpha_0 |y|^{m/2-1} u_x + (\beta_0 / y) u_y = 0 \qquad (1)$$

В уравнении (1) предполагается, что постоянные $m > 0$, α_0 и β_0 удовлетворяют условиям $-(m/2) \le \beta_0 < 1,\ 0 \le \alpha_0 < (m+2)/2.$

На плоскости параметров $\alpha_0 o \beta_0$ рассмотрим треугольник $S_0B_0C_0$ ограниченный прямыми

$$S_0B_0 : \beta_0 = 1, B_0C_0 : \beta_0 - \alpha_0 = -(m/2), C_0S_0 : \alpha_0 = 0.$$

Пусть Ω – конечная односвязная область плоскости независимых переменных x, y, ограниченная характеристиками

$$\left.\begin{matrix} AC_1 \\ BC_1 \end{matrix}\right\}: \ x \mp \frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} = \mp 1, \quad y > 0,$$

$$\left.\begin{matrix} AC_2 \\ BC_2 \end{matrix}\right\}: \ x \mp \frac{2}{m+2} (-y)^{\frac{m+2}{2}} = \mp 1, \quad y < 0$$

уравнения (1), где $A(-1,0)$, $B(1,0)$.

Пусть $P(\alpha_0, \beta_0) \in \Delta S_0B_0C_0,$т.е. $\alpha \ge 0,\ \beta < 1,\ 0 \le \alpha + \beta < 1,\ \beta < \alpha,$ где

$$\left.\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right\} = \frac{m + 2(\beta_0 \pm \alpha_0)}{2(m+2)}.$$

Подстановка задачи Γ. Найти в области Ω регулярное решение

$$u(x,y) = \begin{cases} u_1(x,y),\ (x,\ y) \in \Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \\ u_2(x,\ y), (x,\ y) \in \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}. \end{cases}$$

уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2) \cap C^2(\Omega \setminus AB)$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_j\left[\theta^{(j)}(x)\right] = \mu_1 u_j\left[\theta^{(j)}_{k_1}(x)\right] + \mu_2 u_j\left[\theta^{(j)}_{k_2}(x)\right] + \delta_j(x),\ \forall x \in I = AB,\ j = 1,2 \qquad (2)$$

здесь $j=1$ соответствующая области Ω_1, а $j=2$ – области Ω_2, и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to+0} u_1(x,y) = c \lim_{y\to-0} u_2(x,y), \forall x \in [-1, 1], \qquad (3)$$

$$\lim_{y\to+0} y^{\beta_0} \frac{\partial u_1}{\partial y} = \rho(x) \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u_2}{\partial y} + \lambda(x),\ \forall x \in (-1,1), \qquad (4)$$

где $\theta^{(j)}(x)(\theta^{(j)}_{k_1}(x),\ \theta^{(j)}_{k_2}(x))$ – аффиксы точки пересечения характеристики BC_j (исходяшей из точки B кривой $x + \left[2k_j/(m+2)\right]|y|^{(m+2)/2} = 1,$ лежащей внутри области Ω_j) с характеристикой, выходяшей из точки $M(x_0, 0) \in I;$ $c = const \ne 0;$ $\mu_1, \mu_2 = const;$ $\delta_j(x),\ \rho(x),\ \lambda(x)$ – заданные функции из класса $C^2(\bar{I}) \cap C^3(I),$ причем $\rho(x) - c \ne 0, \quad k_1 > k_2 > 1,\ \delta_j^{(n)}(1) = 0,\ \lambda^{(n)}(1) = 0,\ n = 0,1,2.$

Изложенная задача приводится к уравнению типа «Волтерра» вида

$$\nu_2(x)=\int_x^1\frac{K_1(x,s)\nu_2(s)ds}{\left|s-a_1-b_1x\right|^l}+\int_x^1\frac{K_2(x,s)\nu_2(s)ds}{\left|s-a_2-b_2x\right|^l}+f(x),\quad \forall x\in I,\quad l=1-\alpha-\beta,\ (5)$$

имеющий слабую особенность в двух подвижных точках.

Здесь

$$K_i(x,s)=\begin{cases}\dfrac{\mu_i\beta(1-\alpha)(1-x)^{\beta}b_i(\rho(s)-c)}{(a_i(1-s))^{\alpha}(\rho(x)-c)(1-a_i^{-\beta}\mu_1-a_i^{-\beta}\mu_2)}\times\\ \times F(\alpha,1-\beta,2;b_i(s-x)/a_i(1-s)),\quad x\le s\le a_i+b_ix,\\ -\dfrac{\mu_i\Gamma(1-\beta)(1-\alpha)(a_i(1-s))^{1-\beta-\alpha}(1-x)^{\beta}(\rho(s)-c)}{(b_i(s-x))^{1-\beta}\Gamma(2-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)(\rho(x)-c)(1-a_i^{-\beta}\mu_1-a_i^{-\beta}\mu_2)}\times\\ \times F(-\beta,1-\beta,2-\alpha-\beta;a_i(1-s)/b_i(s-x)),\\ a_i+b_ix\le s\le 1,\end{cases}$$

где $a_i=\dfrac{2}{k_i+1},\ b_i=\dfrac{k_i-1}{k_i+1}=1-a_i,\ i=1,2$.

Уравнение типа «Вольтерра» (5) решена с помошью методам последовательных приближений. Основной результат данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Г при достаточно малых* μ_1 *и* μ_2 *для которых выполняется условие*

$$\left|\frac{|\mu_1|K_1(a_1^{1-\ell}+b_1^{1-\ell})+|\mu_2|K_2(a_2^{1-\ell}+b_2^{1-\ell})}{1-\ell}\right|<1$$

однозначно разрешима, где $\left|(1-x)^{\alpha-\beta}K_k(x,t)\right|\le K_k$, $\left|f(x)\right|\le M$, $k=1,2$.

В § 1.2. рассмотрена задача с аналогами условия Франкля для уравнения (1)

$$D_{-1,x}^{1-\beta}u^-[\theta^-(x)]=\mu_1(x)D_{-1,x}^{1-\beta}u^-[\theta^-(p(x))]+\rho_1(x)\qquad(6)$$

$$D_{x,1}^{1-\alpha}u^+[\theta^+(x)]=\mu_2(x)D_{x,1}^{1-\alpha}u^+[\theta^+(q(x))]+\rho_2(x)\qquad(7)$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0}u^+(x,y)=\lim_{y\to-0}u^-(x,y)=\tau(x),\ \forall x\in\bar I=[-1,1],\qquad(8)$$

$$\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u^+}{\partial y}=\lim_{y\to-0}(-y^{\beta_0})\frac{\partial u^-}{\partial y}=\nu(x),\ \forall x\in I=(-1,1),\qquad(9)$$

где $\mu_1(x),\ \mu_2(x),\ \rho_1(x),\ \rho_2(x)\in C^3(\bar I)$ заданные функции, причем

$$\left|\mu_1(x)a_1^{1-\alpha-\beta}\right|<1,\ \left|\mu_2(x)b_2^{1-\alpha-\beta}\right|<1,\qquad(10)$$

$$\theta^+(x)=\left(\frac{1+x}{2}+i\left(\frac{m+2}{4}(1-x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right);\ \theta^-(x)=\left(\frac{x-1}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(1+x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right);$$

$$\theta^{+}(q(x))=\left(\frac{1+q(x)}{2}+i\left(\frac{m+2}{4}(1-q(x)\right)^{\frac{2}{m+2}}\right);$$

$$\theta^{-}(p(x))=\left(\frac{p(x)-1}{2}-i\left(\frac{m+2}{4}(1+p(x))\right)^{\frac{2}{m+2}}\right).$$

На $\bar{I}=[-1,1]$ рассмотрим функции $p(x), q(x)\in C^{1}(\bar{I})$ со следующими свойствами: $p(x), q(x)$ отображает множества точек отрезка $\bar{I}$ на множество точек отрезков $[-1,c_1]$ и $[c_2,1]$ соответственно, где $c_1,c_2\in(-1,1)$. В качестве примера таких функций приведем линейные функции $p(x)=a_1x-b_1,\ q(x)=b_2x+a_2$, где $a_k=(1+c_k)/2, b_k=(1-c_k)/2,\ k=1,2$ и $a_k+b_k=1,\ a_k-b_k=c_k$.

Этой краевой задачу обозначим через Γ_1. Для доказательству единственность решений задачи Γ_1 получены функциональные соотношения между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на интервале I. Эти соотношения в областях Ω^{-} и Ω^{+} соответственно имеют вид

$$\nu(x)=-\gamma D_{-1,x}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\sum_{k=0}^{\infty}A_k(x)F_1(p_k(x)) \qquad (11)$$

и

$$\nu(x)=\gamma D_{x,1}^{1-\alpha-\beta}\tau(x)+\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x)F_2(q_k(x)). \qquad (12)$$

Единственность решение задачи Γ_1 доказывается с помощью интегралных тождеств.

Существование решений задачи Γ_1. С учетом условия сопряжение (8) и (9), вычитая (11) из (12), и получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $\tau(x)$

$$\tau(x)+\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1-x}{1-s}\right)^{1-\alpha-\beta}\frac{\tau(s)ds}{s-x}=F_4(x), \qquad (13)$$

где $F_4(x)-$ регулярный оператор, $\lambda-$параметр.

Теорема 2. *Уравнение (13) при выполнении условий* $\beta_0<\dfrac{2-m}{4}$, $\sin\alpha\pi-\sin\beta\pi\cos(\alpha+\beta)\pi>0$ *в классе функции Гёльдера, где функция* $(1-x)^{\alpha+\beta-1}\tau(x)$ *может быт не ограниченной в точке* $x=1$ *и ограниченной в точке* $x=-1$ *однозначно разрешима.*

Вторая глава диссертации названной «Задача Бицадзе-Самарского с аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом» посвящена постановке и исследованию задачи Бицадзе-Самарского с аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смешанного типа

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \tag{14}$$

с сингулярным коэффициентом, где постоянная $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Пусть D конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$ а при $y < 0$ характеристиками AC и BC уравнения (14).

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 точку пересечении характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)$ – интервал оси $y = 0$. Приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx,$ где $k = (1-c)/(1+c), \delta = 2c/(1+c)$. Это функция отображает множества точек отрезка $[-1,c]$ в множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p(-1) = 1, p(c) = c.$

В этой задаче характеристика AC произвольным образом разбита на два куска: AC_0, C_0C и на куске AC_0 задается условие Бицадзе-Самарского, а C_0C освобожден от краевого условия и это недостающее условие Бицадзе-Самарского заменено аналогом условия Франкля на отрезке вырождения AB.

Постановка задачи A. Требуется найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x,y) \in C(\overline{D})$;
2. $u(x,y) \in C^2(D^+)$ и удовлетворяет уравнению (14) в этой области;
3. $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 в области D^-;
4. на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{15}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1, x = c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m+2)$.

5. Выполнено

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0} = \phi(x), \quad -1 \le x \le 1, \tag{16}$$

$$D^{\beta}_{-1,x}(1+x)^{2\beta-1} u[\theta(x)] = a(x)u(x,0) + b(x), \ -1 < x < c, \tag{17}$$

$$u(x,0) - \mu u(p(x),0) = f(x), \quad -1 \le x \le c, \tag{18}$$

где $\mu = const, \ \ a(x), b(x), f(x), \varphi(x) -$заданные гладкие функции.

Условие (18) является аналогом условия Франкля на линии вырождения AB.

В силу формулы Дарбу, дающей в области D^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными:

$$\lim_{y\to -0} u(x,y)=\tau(x),\ x\in \bar{I};\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I, \tag{19}$$

из краевого условия (17) нетрудно получить равенство

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-2\beta}a_1(x)\tau(x)+b_1(x),\ x\in(-1,c), \tag{20}$$

которое является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на интервал $(-1,c)$ оси $y=0$ из области D^-, где

$$\gamma=\frac{2\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-2\beta)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2\beta},\ b_1=-\gamma D_{-1,x}^{1-2\beta}(1+x)^{1-\beta}b(x),\ a_1(x)=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}-a(x)(1+x)^{1-\beta}.$$

Единственность решений задачи A.

Теорема 3. *(Аналог принцип экстремума А.В.Бицадзе).*

Решение задачи A при выполнения условий $\phi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,\ b(x)\equiv 0,$

$$\mu>1,\ \left(a(x)(1+x)^{1-\beta}\right)'\le 0 \tag{21}$$

свой положительный максимум и отрицательный минимум в области $\bar{D}^+$ достигает в точках кривой $\bar{\sigma}_0$.

Существование решения задачи A.

Теорема 4. *Решение* задачи *A при выполнении условий* (21) *и*

$$\frac{\pi^2 ctg(\alpha\pi)\cos(\alpha\pi)}{\mu k^{\alpha-1/2}ch(\pi x)}<1 \tag{22}$$

однозначно разрешима.

Приведем хорошо известное соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное I из области D^+,

$$\nu(x)=-k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}}-(2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}}\right\}+\Phi(x),\ x\in I, \tag{23}$$

где $\mathit{\Phi}(x)-$ известная функция. Формула (23) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенными на I из области D^+. Заметим, что соотношение (23) справедливо для всего промежутка I.

В силу формулы (15), исключая $\nu(x)$ из функциональных соотношений (20) и (23), после несложных преобразований получим сингулярное интегральное уравнение

$$A(x)\tau(x)-\lambda\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)dt=\Phi_1(x),\ x\in(-1,c), \tag{24}$$

где $\lambda=\dfrac{\Gamma(2\beta)}{\pi\Gamma(\beta)}\cos\beta\pi$, $A(x)=\dfrac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}(1+\sin\beta\pi)-a(x)(1+x)^{1-\beta}$,

$\Phi_1(x)-$известная функция.

Заметим, что так как в (24) $x\in(-1,c)$, тогда интегралы с пределом $(-1,1)$ имеют сингулярную особенность только при $t\in(-1,c)$, поэтому эти интегралы разобьем на два интеграла с пределами $(-1,c)$ и $(c,1)$, получим

$$\begin{gathered}A(x)\tau(x)-\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt-\\-\lambda\int_{c}^{1}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt=\Phi_1(x),\ x\in(-1,c)\end{gathered}\tag{25}$$

В интеграле по промежутку $(c,1)$ левой части (25), сделав замену переменного интегрирования $t=p(s)=\delta-ks$, с учетом равенства $\mu\tau(p(s))=\tau(s)-f(s)$ имеем

$$\begin{gathered}A(x)\tau(x)-\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt=\\=-\frac{\lambda}{\mu}\int_{-1}^{c}\frac{p'(s)\tau(s)}{p(s)-x}ds+R[\tau]+\Phi_2(x),\ -1\le x\le c\end{gathered}\tag{26}$$

где $R[\tau]-$ регулярный оператор, $\Phi_2(x)-$известная функция.

Первый интегральный оператор правой части (26) не является регулярным, так как подынтегральное выражение при $x=c,\,s=c$ имеет изолированную особенность первого порядка и поэтому это слагаемое в (26) выделено отдельно.

Временно считая правую часть уравнения (26) известной функцией, перепишем его в виде

$$A(x)\tau(x)-\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt=g_0(x),\ -1<x<c\tag{27}$$

где

$$g_0(x)=-\frac{\lambda}{\mu}\int_{-1}^{c}\frac{p'(s)\tau(s)}{p(s)-x}ds+R[\tau]+\Phi_2(x)\tag{28}$$

Введя обозначения $(1+x)^{2\beta-1}\tau(x)=\rho(x),\ (1+x)^{2\beta-1}g_0(x)=g(x)$, уравнение (27) преобразуем к виду

$$A(x)\rho(x)-\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\rho(t)\,dt=g(x),\ -1\le x\le c.\tag{29}$$

Решение сингулярного интегрального уравнения (29) будем искать в классе функций ограниченных в точке $x=c$, и допускающего особенность порядка ниже $1-2\beta$ в точке $x=-1$, т.е. в классе $h(c)$.

Применяя метод регуляризации Карлемана с развытой С.Г.Минлиным к уравнению (29), получим

$$\tau(x)=\frac{\lambda k}{\mu}A^*(x)\int_{-1}^{c}\frac{\tau(s)ds}{\delta-ks-x}-\frac{\lambda k}{\mu}\lambda^*(x)\int_{-1}^{c}\tau(s)ds\int_{-1}^{c}\left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2}\right)^{\alpha}\times$$
$$\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\frac{dt}{\delta-kx-t}+R\left[\tau\right]+\Phi_3(x). \tag{30}$$

где $R\left[\tau\right]$– регулярный оператор, $\Phi_3(x)$ – известная функция.

Вычислив внутренние интегралы в (30) и выделив характеристическую часть, с учетом тождества $\delta-kc-c=0$ получим

$$\tau(x)=\tilde{\lambda}(c)\int_{-1}^{c}\left(\frac{c-x}{c-s}\right)^{\alpha}\frac{\tau(s)ds}{(c-s)\left(k+\dfrac{c-x}{c-s}\right)}+R_1[\tau]+\Phi_3(x), \tag{31}$$

где $R_1[\tau]$ – регулярный оператор, $\tilde{\lambda}(c)=\dfrac{k^{1-\alpha}\lambda\lambda^*(c)}{\mu}\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$.

Уравнение (31) сделав замену переменных $s=c-(1+c)e^{-t}$, $x=c-(1+c)e^{-y}$ и обозначая $\rho(y)=\tau[c-(1+c)e^{-y}]e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y}$, получим интегральную уравнение Винера-Хопфа

$$\rho(y)=\tilde{\lambda}(c)\int_{0}^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_4[\rho]+\Phi_4(y). \tag{32}$$

Это уравнение с помощью преобразования Фурье, приводится краевой задачи Римана и тем самым решается в квадратурах.

В §2.2 рассмотрена уравнение (14) для предельного значения параметра $\beta_0=-m/2$ с условиями:

$$u(x,\sigma_0(x))=\phi(x),\quad x\in[-1,1], \tag{33}$$
$$u[\theta_0(x)]=au(x,0)+b(x),\ x\in[-1,c], \tag{34}$$
$$u(x,0)-\mu u(p(x),0)=f(x),\quad x\in[-1,c], \tag{35}$$

где $\mu=const, a=const, b(x), f(x), \varphi(x)-$ заданные гладкие функции.

Исследование этой задачи проводится аналогично задаче *A*.

Третья глава диссертации посвящена исследованию задачи с аналогами условия Франкля на граничной и внутренней характеристике в смешанной области для уравнения смещанного типа с сингулярным коэффициентом.

Пусть Ω конечная односвязная область комплексной плоскости $z=x+iy$ ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1,$ с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0$ – характеристиками AC и BC.

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$.

Постановка задачи. Найти в области Ω функцию $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (14) в этой области;

2) в области Ω^- $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 уравнения (14);

3) на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to +0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\quad x\in I, \tag{36}$$

причем эти пределы при $x\to\pm 1$ могут иметь особенности порядка меньше $1-2\beta$, где $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2),\ I=(-1,1)-$ интервал оси $y=0$;

4) выполнено

$$u(x,\sigma_0(x))=\phi(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{37}$$

$$a(x)D_{-1,x}^{1-\beta}u[\theta(x)]+b(x)D_{x,1}^{1-\beta}u[\theta(-x)]=\psi(x),\ x\in\overline{I}, \tag{38}$$

$$u(-x,0)-u(x,0)=f(x),\quad x\in\overline{I}, \tag{39}$$

где $D_{-1,x}^{1-\beta}$ и $D_{x,1}^{1-\beta}$ – операторы дробного дифференцирования, $\theta(x_0)$ и $\theta(-x_0)$, соответственно, аффиксы точек пресечения характеристики AC с характеристикой выходящей из точки $(x_0,0)$ и $(-x_0,0)$ $x_0\in I$, $\phi(x),\,a(x),\,b(x),\,\psi(x),\ f(x)$ заданные функции, причем $f(-x)=-f(x)$

$$(1-x)^{\beta}a(x)-(1+x)^{\beta}b(x)\neq 0,\ x\in I. \tag{40}$$

Обычно в краевой задаче со смещением, условие смещения вида (38) задаётся на обеих характеристиках AC и BC. Мы будем рассмотреть случаю, когда условие (38) задается только на характеристике AC, т.е. характеристика BC освобождена от краевого условия. Условия (38) и (39) являются аналогами условия Франкля.

В § 3.1. доказано единственность и существования решений уравнений (14) удовлетворяющий (37) – (39).

Единственность решения сформулированной задачи доказано методом принципа экстремума.

Основные результаты данного параграфа является следующие теоремы.

Теорема 5. *(Аналог принципа экстремума А.В.Бицадзе) Решение* $u(x,y)$ *задачи* B*, при выполнении условий:* $\psi(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,\ \phi(x)\equiv 0$ *и*

$$a(x)>0,\, b(x)>0,\, x\in\overline{I}, \tag{41}$$

своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{\Omega}^+$ *достигает в точках кривой* σ_0.

Теорема 6. *Решение задачи B когда заданные функции:* $a(x),b(x),\psi(x)$, $f(x)\in C\left(\overline{I}\right)\cap C^{1,\alpha}\left(I\right)$, $\phi(x)\in C^{0,\alpha}\left(\overline{I}\right)$, *причем* $\phi(x)=(1-x^2)\tilde{\phi}(x)$, $\tilde{\phi}(x)\in C^{0,\alpha}\left(\overline{I}\right)$, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$, *и при выполнении условие* (40) *и* (41) *существует.*

Существование решения сформулированной задачи доказано методом интегральных уравнений. Заметим, что в отличие от других задач для уравнений смешанного типа здесь есть необходимость использования сразу двух интегральных представлений решений т.е. используются формулы дающие решения задача Дирихле и видоизмененной задачи Хольмгрена.

В §3.2. рассмотрена уравнение (14) в случае $\beta_0 = -m/2$. В этом параграфе доказано единственность и существования решений уравнений

$$sign\, y|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0. \tag{42}$$

удовлетворяющий в области Ω условия (37) – (39) приведенной в постановке задачи B. Но первая равенства условия (37) заменён условием Бицадзе-Самарского

$$u(x, \sigma_0(x)) = c(x)u(x,0) + \phi_0(x), \ \ x \in \bar{I}, \tag{43}$$

где $c(x),\ \phi_0(x)$ – заданные гладкие функции.

В §3.3. рассмотрена еще одна частная случай уравнение (14), в случае $\beta_0 = 0$. Здесь исследуется на корректность задача со смешением на внутренних характеристиках. Требуется найти в области Ω функцию $u(x, y)$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y)$ непрерывна в каждой из замкнутых областей $\bar{\Omega}^+$ и $\bar{\Omega}^-$;

2) $u(x, y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (14) ($\beta_0 = 0$) в области Ω^+;

3) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 уравнения (14) ($\beta_0 = 0$) в области Ω^-;

4) на отрезке AB – линии параболического вырождения уравнения (14) ($\beta_0 = 0$) выполняются общие условия склеивания:

$$u(x,-0) = u(x,+0) + a_0(x), \quad\quad x \in \bar{I}, \tag{44}$$

$$\lim_{y\to -0} \frac{\partial u}{\partial y} = b(x) \lim_{y \to +0} \frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x), \quad\quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{45}$$

эти пределы при $x \to \pm 1, x \to c$ могут иметь особенности порядка ниже $1 - 2\beta$, где $\beta = m/2(m+2)$;

5) выполняются условия

$$u(x, \sigma_0(x)) = c_0(x)u(x,+0) + \phi_0(x), \ \ x \in \bar{I}, \tag{46}$$

$$u\left[\theta_1^*(x)\right] - \mu u\left[\theta_0^*(p(x))\right] = \psi_0(x), \ x \in [-1, c], \tag{47}$$

$$u(p(x),-0) - u(x,+0) = f_0(x), \ \ x \in [-1, c], \tag{48}$$

где $\theta_1^*(x_0)$ и $\theta_0^*(p(x_0))$ – аффиксы точек пересечения характеристик EC_0 и EC_1 с характеристиками исходящей соответственно из точек $M(x_0, 0)$ и $M(p(x_0), 0)$ $x_0 \in [-1, c],\ p(x_0) \in [c, 1]$.

Заданные функции $\phi_0(x), c_0(x),\ \psi_0(x),\ a_0(x), b(x),\ f_0(x), b_0(x)$ непрерывно-дифференцируемые в замыкании множества их определения.

Поставленной задачи кратко обозначим B_2.

- Условие (46) является условием Бицадзе-Самарского заданное на σ_0 и AB;

- Условие (47) является условием смещения на внутренних характеристиках EC_0 и EC_1;

- Условие (48) является локальным условием смещения связывающим значения искомой функции соответственно на верхнем и нижнем краях разрезка вдоль отрезков $[-1, c]$ и $[c, 1]$.

Единственность решения исследуемой задачи доказывается методом принципа экстремума А.В.Бицадзе.

Основные результаты являются следующие теоремы.

Теорема 7. *Решение* $u(x,y)$ *задаче* B_2, *при выполнении условий* $a_0(x) \equiv 0, b_0(x) \equiv 0, \phi_0(x) \equiv 0, \psi_0(x) \equiv 0, f_0(x) \equiv 0$ и

$$\mu < 0,\ 0 \le c_0(x) < 1, \tag{49}$$

в замкнутой области $\bar{\Omega}$ *тождественно равно нулю*.

Теорема 8. *Пусть заданные функции в краевых условия* (44) – (48) *удовлетворяет условиям*: $a_0(x),\ b_0(x),\ b(x),\ c_0(x),\ \phi_0(x) \in C\left(\bar{I}\right) \cap C^{1,\alpha}\left(I\right)$, $\psi_0(x),\ f_0(x) \in C[-1, c] \cap C^{1,\alpha}\left(-1, c\right)$, причем $c_0(x) = (1-x^2)\tilde{c}_0(x)$, $\phi_0(x) = (1-x^2)\tilde{\phi}_0(x),\ \ \tilde{c}_0(x),\ \tilde{\phi}_0(x) \in C\left(\bar{I}\right) \cap C^{1,\alpha}\left(I\right),\ \ f_0(-1) = 0.$ *Пусть так же выполнены условия* (49) *и*

$$\frac{2\pi}{1-\sin(\alpha\pi/2)}\left[\frac{|m_1|+|n_2|}{k^{(1+\alpha)/2}} + \frac{|m_2|+|n_1|}{k^{(1-\alpha)/2}}\right] < 1, \tag{50}$$

где

$$m_1 = B_1(c)(A^*(c) - B^*(c)\pi ctg(\alpha\pi)),\ m_2 = B_2(c)(A^*(c) - B^*(c)\pi ctg(\alpha\pi)),$$

$$n_1 = k^{-\alpha}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}B^*(c)B_1(c),\ n_2 = k^{\alpha}\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}B^*(c)B_2(c),$$

тогда решение задачи B_2 *однозначно разрешима.*

Доказательство существования решения сформулированной задачи сводиться к решению нестандартного сингулярного интегрального уравнения типа (32), где осуществляется повторная регуляризация уравнения.

Заметим, что здесь в одном уравнение объеденены оператор с ядром Коши и нефредгольмовый оператор имеющей в ядре изолированную особенность первого порядка только в одной точке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию неклассических краевых задач для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом.

Основные результаты исследования следующие:

1. Для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений изучены задача с условием Бицадзе-Самарского, связывающих значений искомого решения на характеристике со значениями на двух специальных кривых лежащих внутри области. Это задача приведена к интегральную уравнению типа Вольтерра, имеющее слабую особенность в двух подвижных точках, и решена с помощью методом последовательных приближений.

2. Для вырождающихся внутри области гиперболических уравнений исследуется задача с условиями смещения на одной характеристике.

Построен контрпример, указывающий важность класса решений в котором ищется решение функционального уравнения.

3. Исследуется корректность задачи с недостающим условием Бицадзе-Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.

Излагается алгоритм регуляризации сингулярного интегрального уравнения Трикоми с нефредгольмовым оператором в нехарактеристической части уравнения, имеющего изолированную особенность первого порядка в одной точке.

4. Для уравнений смешанного типа с сингулярным коэффициентом доказывается корректность задачи с условием смещения на одной граничной характеристике и для уравнения Геллерстедта доказывается корректность задачи условием смещения на внутренних характеристиках смешанной области.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.30.09.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TERMEZ STATE UNIVERSITY

CHORIYEVA SANAM TOJIYEVNA

01.01.02-Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2019

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM224

Dissertation has been prepared at Termez State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Mirsaburov Miraxmat** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Official opponents:	**Urinov Axmadjon Qushoqovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Zikirov Obidjan Salijanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «____» _____________2019 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.30.09.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)246-53-21, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2019 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2019 year)

A.S. Sadullaev
Chairman of Scientific Council on award of scientific degree, D.Ph.M.S. academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degree, D. Ph.Ph.M.

Sh.A. Alimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree, D.Ph.M.S. academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the work is to prove the correctness of the problem with the conditions of Bitcadze-Samarsky, Frankl and the displacement on the boundary and internal characteristics for a hyperbolic equation and a mixed type equation with a singular coefficient that degenerates inside the domain.

The object of the research work is mixed type equations with a singular coefficient, hyperbolic equations degenerating within the region, integral equations with a weak singularity with two non-Carleman shifts.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the problem for hyperbolic equations degenerating inside the domain is solved with the Bitcadze-Samarsky condition connecting the values of the desired solution on the characteristic with the values on two special curves lying inside the domain;

the problem with the displacement conditions on one characteristic for hyperbolic equations degenerating within the domain is solved, and the importance of the class of solutions that seeks the solution of the resulting functional equation is shown, it is shown by constructing a coding example;

the correctness of the problem with the missing Bitcadze-Samarsky condition for the Gellerstedt equation with a singular coefficient is proved;

an algorithm for regularizing the Tricomi singular integral equation with a non-Fredholm operator in the non-characteristic part of the equation having an isolated first-order singularity at one point is proposed;

the correctness of the problem with the displacement condition on one boundary characteristic and on the internal characteristic is proved, respectively, for equations of mixed type with a singular coefficient and for equations of mixed type.

Implementation of research results. The results obtained on problems with shift conditions on the boundary and internal characteristics for a mixed type equation with a singular coefficient were introduced in the following research projects:

The developed methods for regularizing non-standard singular integral equations were used to solve nonlocal boundary value problems for the Gellerstedt equation with a singular coefficient in the project number 0213-2014-0002 "Nonlocal differential equations of mixed type of mathematical models of extreme processes" (Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences). The application of the scientific result develops research on nonlocal boundary value problems for the class of degenerate equations of mixed type;

theorems to justify the correctness of new nonlocal boundary value problems of Bitcadze-Samarsky type for degenerate hyperbolic equations and mixed type equations with a singular coefficient inside the domain were used to solve an integral equation of the Tricomi type in RFFI project No. 17-41-020516 “Mathematical models of transonic flows of liquids and gases and their applications ”(Sterlitamak branch of the State Autonomous Scientific Institution Institute for Strategic Studies of the Republic of Bashkortostan, letter of introduction No. 85 dated 12 September 2019). Application of the results makes it possible to construct a solution of singular integral equations of the Tricomi type in explicit form.

The structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three chapters, conclusion and list of used literature. The volume of the dissertation is 112 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙҲАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Об одной нелокальной краевой задаче для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Уз. Мат. журнал, 2010, №4, С.118-126 (01.00.00, № 6).
2. Чориева С.Т. Краевая задача для гиперболического уравнения, вырождающегося внутри области. Узб.мат.журнал, 2011, №2, с.174-182 (01.00.00, № 6).
3. Чориева С.Т. Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смешанного типа. Узб. мат. журнал. 2012, №2, С.158-168 (01.00.00, № 6).
4. Чориева С.Т. Об одной задаче со смещением на внутренних характеристиках. Узб. мат. журнал, 2015 г., №4. С.36-42 (01.00.00, № 6).
5. Чориева С.Т. Задача с условием Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта. Узб.мат.журнал, 2017.№4,С.94-102(01.00.00,№ 6).
6. Чориева С.Т. Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смещанного типа с сингулярным коэффициентом. Известия вузов. Математика. 2013. №5, С.51-60.
   Choriyeva S.T. The Bitsadze-Samarskii Problem with the Frankl Condition on the Degeneration Line for a Mixed-Type Equation with Singular Coefficient.//Russian Mathematics. 2013, Vol. 57, Issue 5, pp.42-50.(№41. SCImago: IF=0.39).
7. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с условием Франкля на характеристике для одного класса уравнений смешанного типа.//Дифференц. уравнения, 2015, том 51,№1 С.136-140.
   Mirsaburov M., Choriyeva S.T. Problem with the Frankl Condition on a Characteristic for a Class of Equations of Mixed Type.// Differential Equations, 2015, Vol., 51, No1, pp.1-6 (№1. Web of Science. IF=0.344).
8. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с аналогом условия Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. Известия вузов. Математика. 2017.№11, С.39-45.
   Mirsaburov M., Choriyeva S.T.A Problem With an Analog oh Frankl Condition on the Characteristic for Gellerstedt Equation With Singular Coefficient.//Russian Matematics. 2017, Vol., 61, No 11, pp.34-39. (№41. SCImago: IF=0.39).

I бўлим (1 часть; part 2)
Часть II

9. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Задача с условием Бицадзе-Самарского в гиперболической части смешанной области для уравнения Геллерстедта, с сингулярным коэффициентом. Межд. Российско-Болгарский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик-Хабез,25-30 июня, 2010г. С.175-177.

10. Чориева С.Т. Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смешанного типа. Межд.Российско-Болгарский симпозиум «Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики» Нальчик, 5-8 декабря, 2011г.С.171-173.
11. Чориева С.Т. Задача Бицадзе-Самарского с условием Франкля на отрезке линии вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом. Эльбрус, «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». 29 мая-1июня 2012г. С.282-285.
12. Чориева С.Т. Задача с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках для уравнения Геллерстедта, когда часть границы эллиптической области совпадает с отрезком оси y=0. «Актуалные вопросы математики, математического моделирования и информационных технологий», Термез, Республиканской научной конференции. 21-22 ноября 2012г, С.36-40.
13. Мирсабуров М., Чориева С.Т. Об одной задаче со смещением на внутренних характеристиках. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 21-23 ноября, 2013г. С.76-78.
14. Мирсабуров М., Чориева С.Т. О единственности решения задачи с аналогом условия Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Ташкент, 23-25 ноября, 2014г.С.72-75.
15. Чориева С.Т., Шойкулов Ш., Турдиев Х. О единственности решения задачи со смещением на внутренних характеристиках для уравнения смешанного типа. Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные методы математической физики и их приложения», Ташкент, 15-17 апреля 2015 г. С.304-306.
16. Мирсабуров М., Чориева С.Т. О единственности решения задачи с аналогами условия Франкля на характеристике для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. Материалы научной конференции «Актуальные вопросы анализа», Карши, 22-23 апреля, 2016 г. С.118-120.
17. Чориева С.Т., Саломов Г., Мирсабурова У. Задача с условиями смешения на параллельных характеристиках для уравнения Геллерстедта. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент,15-17 декабря,2017г. С.79-80.
18. Чориева С.Т., Эргашева С., Исломова Н. Аралаш типдаги сингуляр коэффициентли тенглама учун нолокал шартли масала. Республика илмий-амалий анжумани материаллари «Математика ва информатиканинг замонавий муаммолари» Фарғона,2019й. 102-104 бетлар.

Автореферат - «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди
(11 декабрь 2019 йил).

Босишга рухсат этилди: __._____.2019 йил
Бичими 60x84 1\16, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2.25. Адади: 100. Буюртма: № ___.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
босмахонасида чоп этилди