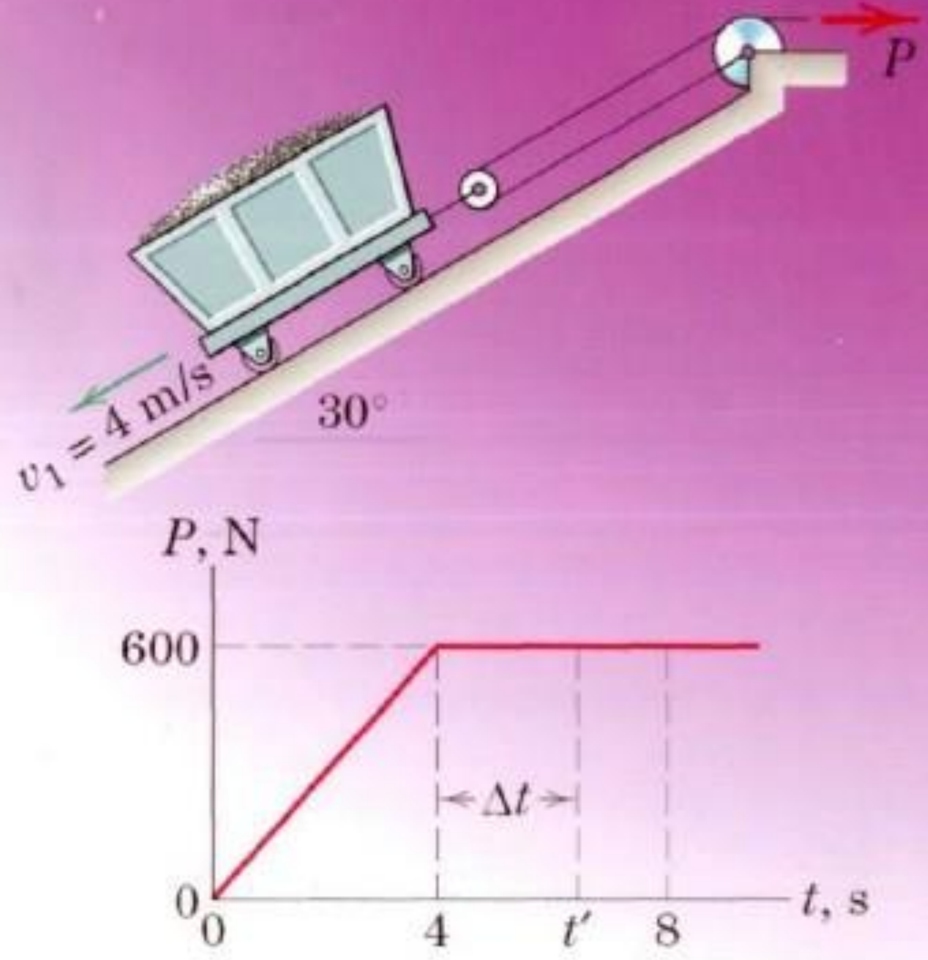
ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ТЕКСТИЛЬНОЙ И ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Кафедра «Машиноведение и сервисное обслуживание»

Д.А.МАМАТОВА, Н.В.ДРЕМОВА

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА-1

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ



Аннотация

Данное пособие составлено в соответствии с учебным планом и рабочей программе по дисциплине «Техническая механика-1»

Пособие содержит краткие теоретические сведения, необходимые как для решения задач, так и для совершенствования практических навыков.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть пособия содержит общие рекомендации к решению задач с детально разобранными примерами из курса теоретической механики.

Во второй части отражены положения основных разделов «сопротивления материалов», содержатся основные теоретические предпосылки для получения расчетных формул.

Приведены примеры решения задач по наиболее сложным для восприятия студентам и темам.

Пособие позволяет студентам использовать, как для аудиторной, так и для самостоятельной работы.

Данное пособие предназначено для всех направлений ВУЗов.

Составители: ТИТЛП «Машиноведение и сервисное обслуживание»
д.ф.т.н., доц. Д.А.Маматова
ст. пр. Н.В. Дремова

Рецензенты: д.т.н., проф. Д.М.Мухаммадиев (ИМ и СС АН РУз)
д.т.н., проф. М.Эргашов (ТИТЛП)

Утверждено научно-методическим советом ТИТЛП

(протокол № 9 от «26.04» 2019 г.)

Размножено в типографии ТИТЛП в « » экземпляров.

Введение

Механика наряду с математикой и физикой имеет большое общеобразовательное значение: способствует развитию логического мышления, приводит к пониманию весьма широкого круга явлений, относящихся к простейшей форме движущейся материи-механическому движению. Дисциплина "Техническая механика-1" является базой для создания надежных и экономичных конструкций, как на стадии проектирования, так и при изготовлении и эксплуатации.

К основным задачам этого предмета относится изучение:

1. общих законов равновесия материальных тел;
2. законов движения материальных тел;
3. методов расчета элементов конструкций и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Методическое пособие состоит из двух разделов, включающих основы теоретической механики, сопротивления материалов. Изучение методов и приемов технической механики вырабатывает навыки для постановки и решения прикладных задач. На базе минимального количества материала обучаемому сообщаются такие знания, которые позволят ему в дальнейшем всю необходимую информацию находить и усваивать самостоятельно.

Для изучения курса нужно иметь соответствующую математическую подготовку. Необходимо использовать положения и методы векторной алгебры, уметь дифференцировать функции одной переменной, знать основы теории кривых второго порядка, находить интегралы от простейших функций, решать дифференциальные уравнения.

В методическое пособие приведены примеры решения типовых задач по всем разделам. Решения задач сопровождаются рядом указаний, которые должны помочь студенту при самостоятельном изучении материала.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1

Теоретическая механика

1

1. СТАТИКА

1.1 Основные понятия статики

План:

1. Введение
2. Задачи теоретической механики
3. Понятие о силе и системе сил
4. Аксиомы статики
5. Связи и реакции связей
6. Примеры решения задач
7. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Сила ,статика, кинематика, динамика, материальная точка, абсолютно твердое тело, свободное тело, эквивалентная система сил, уравновешенная сила, равнодействующая сила, реакция связи, опора, гибкая связь, жесткий стержень, шарнир.

Введение

Техническая механика—комплексная дисциплина. Она включает три раздела: «Теоретическая механика», «Сопротивление материалов», «Детали машин».

«Теоретическая механика»—раздел, в котором излагаются основные законы движения твердых тел и их взаимодействия. В разделе «Сопротивление материалов» изучаются основы прочности материалов и методы расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость под действием внешних сил. В заключительном разделе «Технической механики» «Детали машин» рассматриваются основы конструирования и расчета деталей и сборочных единиц общего назначения.

Дисциплина «Техническая механика» является общепрофессиональной, обеспечивающей базовые знания при усвоении специальных дисциплин, изучаемых в дальнейшем.

Задачи теоретической механики

Теоретическая механика наука о механическом движении материальных твердых тел и их взаимодействии. Механическое движение понимается как перемещение тела в пространстве и во времени по отношению к другим телам, в частности к Земле.

Теоретическая механика-раздел механики, изучающий наиболее общие законы движения и равновесия т.н. «идеальных» материальных объектов, т.е. абстрактных моделей реальных тел.

К ним относятся:

- **материальная точка;**
- **абсолютно твердое тело;**
- **механическая система**-совокупность материальных точек и абсолютно твердых тел, включенных в данное рассмотрение.

Определим эти основные понятия.

Материальная точка–тело, размерами которого можно пренебречь по сравнению с расстояниями до других тел.

Абсолютно твердое тело–тело, расстояния между любыми двумя материальными точками которого не изменяются, как бы оно не перемещалось.

Из последнего определения вытекает, что такое тело–не деформируемое (абсолютно жесткое). Сама же механика–классическая (не релятивистская) механика, т.е. механика, в которой тела двигаются со скоростями, существенно меньшими скорости света.

Свободное тело–то, которому можно сообщить любое перемещение в пространстве. Если перемещение данного тела в пространстве ограничивается другими телами, то его называют несвободным. Тела, ограничивающие движение тела, называют связями.

Для удобства изучения теоретическую механику подразделяют на статику, кинематику и динамику.

Статика изучает условия равновесия тел под действием сил.

Кинематика рассматривает движение тел как перемещение в пространстве; характеристики тел и причины, вызывающие движение, не рассматриваются.

Динамика изучает движение тел под действием сил.

В отличие от физики теоретическая механика изучает законы движения некоторых абстрактных абсолютно твердых тел: здесь материалы, форма тел существенного значения не имеют. При движении абсолютно твердое тело не деформируется и не разрушается. В случае, когда размерами тела можно пренебречь, тело заменяют материальной точкой. Это упрощение, принятое в теоретической механике, значительно облегчает решение задач о движении.

Понятие о силе и системе сил

Сила—это мера механического взаимодействия материальных тел между собой. Взаимодействие характеризуется величиной и направлением, т. е. сила есть величина векторная, характеризующаяся точкой приложения (А), направлением (линией действия), величиной (модулем) (Рис.1.1). Силу измеряют в ньютонах, 1Н=1 кг•м/с^2.

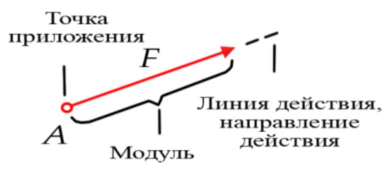


Рис. 1.1

Силы, действующие на тело (или систему тел), делятся на внешние и внутренние. Внешние силы бывают активные и реактивные. Активные силы вызывают перемещение тела, реактивные стремятся противодействовать перемещению тела под действием внешних сил.

Совокупность сил, действующих на какое-либо тело, называют системой сил.

Эквивалентная система сил—система сил, действующая так же, как заданная.

Уравновешенной (эквивалентной нулю) системой сил называется такая система, которая, будучи приложенной к телу, не изменяет его состояния.

Систему сил, действующих на тело, можно заменить одной **равнодействующей**, действующей так, как система сил.

Аксиомы статики

В результате обобщения человеческого опыта были установлены общие закономерности механического движения, выраженные в виде законов и теорем. Все теоремы и уравнения статики выводятся из нескольких исходных положений. Эти положения называют аксиомами статики.

Первая аксиома

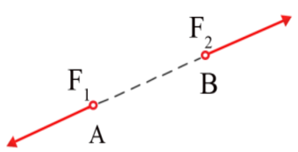


Рис. 1.2

Под действием уравновешенной системы сил абсолютно твердое тело или материальная точка находятся в равновесии или движутся равномерно и прямолинейно (закон инерции).

Вторая аксиома

$$|F_1| = |F_2|$$

Две силы, равные по модулю и направленные по одной прямой в разные стороны, уравновешиваются (Рис.1.2)

Третья аксиома

Не нарушая механического состояния тела, можно добавить или убрать уравновешенную систему сил (принцип отбрасывания системы сил, эквивалентной нулю) (Рис.1.3).

$|F_1| = |F_2|$ $\qquad\qquad$ $|F_3| = |F_4|$

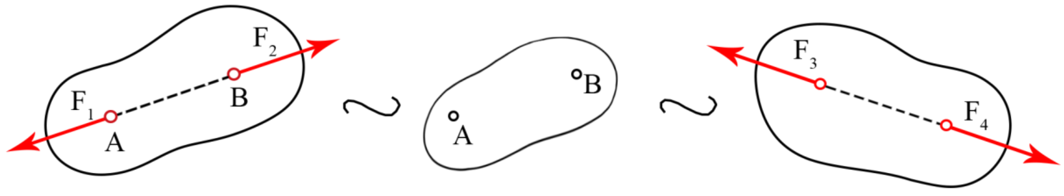
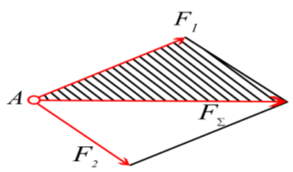


Рис. 1.3

Четвертая аксиома

Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в той же точке и является диагональю параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (Рис. 1.4), (правило параллелограмма сил).

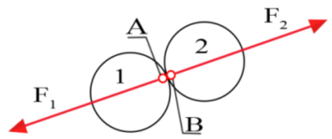


Вместо параллелограмма можно построить треугольник сил: силы вычерчивают одну за другой в любом порядке; равнодействующая двух сил соединяет начало первой силы с концом второй**.**

Рис. 1.4

Пятая аксиома

При взаимодействии тел всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие (Рис. 1.5).



Силы действующие и противодействующие всегда приложены к разным телам, поэтому они не уравновешиваются.

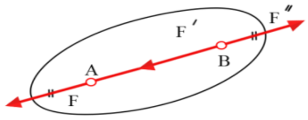
$$|\mathbf{F_1}| = |\mathbf{F_2}|$$

Рис.1.5

Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны.

Следствие из второй и третьей аксиом

Силу, действующую на твердое тело, можно перемещать вдоль линии ее действия (Рис.1.6).



$$|F| = |F'| = |F''|$$

Рис. 1.6

Сила F приложена в точке A. Требуется перенести ее в точку B. Используя третью аксиому, добавим в точке B уравновешенную систему сил $(F';F'')$
Образуется уравновешенная по второй аксиоме система сил $(F;F'')$
Убираем ее и получим в точке B силу F'', равную заданной F

Связи и реакции связей

Все законы и теоремы статики справедливы для свободного твердого тела.

Все тела делятся на свободные и связанные.

Свободные тела—тела, перемещение которых не ограничено.

Связанные тела—тела, перемещение которых ограничено другими телами.

Тела, ограничивающие перемещение других тел, называют связями.

Силы, действующие от связей и препятствующие перемещению, называют реакциями связей.

Реакция связи всегда направлена с той стороны, куда нельзя перемещаться.

Всякое связанное тело можно представить свободным, если связи заменить их реакциями (принцип освобождения от связей). Все связи можно разделить на несколько типов.

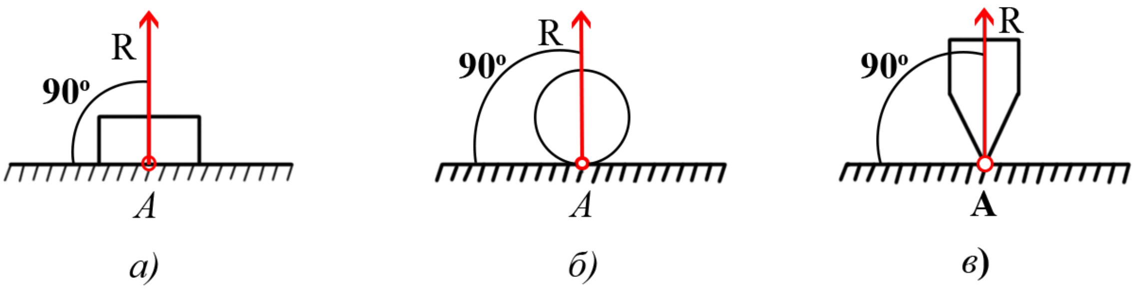


Рис.1.7

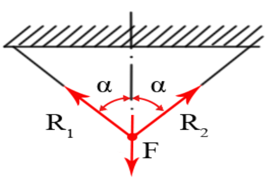


Рис.1.8

Связь—гладкая опора (без трения)

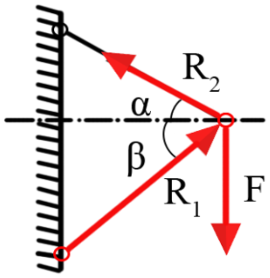
Реакция опоры приложена в точке опоры и всегда направлена перпендикулярно опоре (Рис.1.7).

Гибкая связь (нить, веревка, трос, цепь)

Груз подвешен на двух нитях (Рис. 1.8). Реакция нити направлена вдоль нити от тела, при этом нить может быть только растянута.

Жесткий стержень

На схемах стержни изображают толстой сплошной линией (Рис. 1.9).



Стержень может быть сжат или растянут. Реакция стержня направлена вдоль стержня. Стержень работает на растяжение или сжатие. Точное направление реакции определяют, мысленно убрав стержень и рассмотрев возможные перемещения тела без этой связи.

Возможным перемещением точки называется такое бесконечно малое мысленное

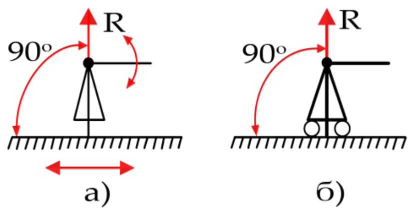
Рис.1.9

перемещение, которое допускается в данный момент наложенными на него связями.

Убираем стержень 1, в этом случае стержень 2 падает вниз. Следовательно, сила от стержня 1 (реакция) направлена вверх. Убираем стержень 2. В этом случае точка *A* опускается вниз, отодвигаясь от стены. Следовательно, реакция стержня 2 направлена к стене.

Шарнирная опора

Шарнир допускает поворот вокруг точки закрепления. Различают два вида шарниров.



Подвижный шарнир

Стержень, закрепленный на шарнире, может поворачиваться вокруг шарнира, а точка крепления может перемещаться вдоль направляющей (площадки) (Рис. 1.10).

Рис. 1.10

Реакция подвижного шарнира направлена перпендикулярно опорной поверхности, т.к. не допускается только перемещение поперек опорной поверхности.

Неподвижный шарнир

Точка крепления перемещаться не может. Стержень может свободно поворачиваться вокруг оси шарнира. Реакция такой опоры проходит через ось шарнира, но неизвестна по направлению. Ее принято изображать в виде двух составляющих: горизонтальной и вертикальной $(R_x;Ry)$ (Рис.1.11)

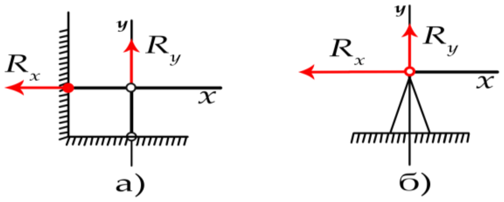
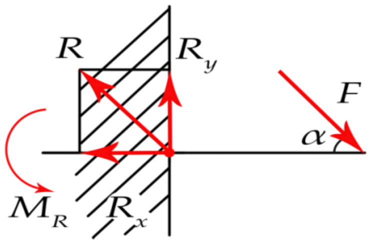


Рис. 1.11

Жесткое защемление (или заделка)



Любые перемещения точки крепления невозможны.

Под действием внешних сил в опоре возникают реактивная сила и реактивный момент M_R, препятствующий повороту (Рис. 1.12).

Рис. 1.12

Реактивную силу принято представлять в виде двух составляющих вдоль осей координат

$$R = R_x + R_y$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что изучает «Теоретическая механика»?
2. Что изучает статика, кинематика, динамика?
3. Дайте определение понятием: «материальная точка», «абсолютно твердое тело»?
4. Что называется силой, в каких единицах измеряется сила?
5. Дайте определение свободного и несвободного тела, связи и реакции связи?
6. Какая из приведенных систем сил (Рис.1.13) уравновешена?

$|F_5| = |F_6|$, $F_5 // F_6$

$|F_1| = |F_2|$

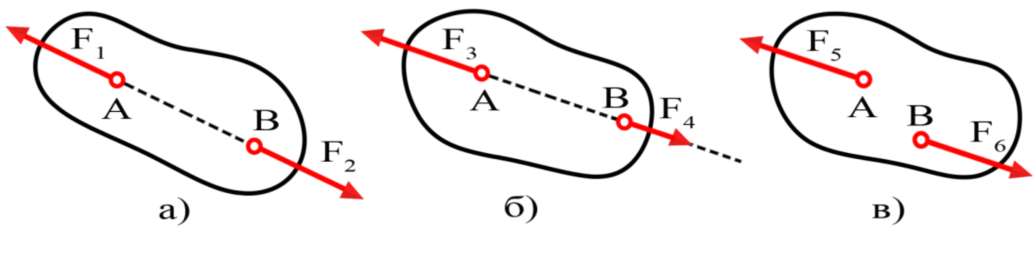
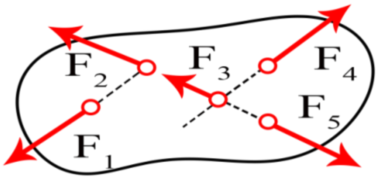


Рис.1.13

7. Какие силы системы (Рис.1.14) можно убрать, не нарушая механического состояния тела?



$$|F_1| = |F_2| = |F_4| = |F_5|$$
$$|F_3| = \frac{1}{2}|F_1|$$

Рис. 1.14

8. Тела 1 и 2 (Рис.1.15) находятся в равновесии. Можно ли убрать действующие системы сил, если тела абсолютно твердые? Что изменится, если тела реальные, деформируемые?

Рис. 1.15

9. Укажите возможное направление реакций в опорах (Рис. 1.16).

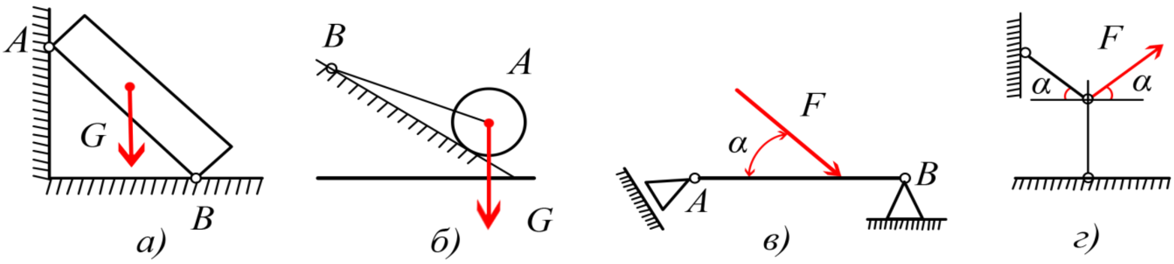


Рис. 1.16

1.2 Плоская система сходящихся сил

Знать геометрический способ определения равнодействующей системы сил, условия равновесия плоской системы сходящихся сил.

Знать аналитический способ определения равнодействующей силы, условия равновесия плоской сходящейся системы сил в аналитической форме.

Уметь определять равнодействующую, решать задачи на равновесие в геометрической форме.

Уметь определять проекции силы на две взаимно перпендикулярные оси, решать задачи на равновесие в аналитической форме.

План:

1. Плоская система сходящихся сил.
2. Равнодействующая сходящихся сил.
3. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил.
4. Решение задач на равновесие геометрическим способом.
5. Проекция силы на ось
6. Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом.
7. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме.
8. Контрольные вопросы и задания.

Ключевые слова: Плоская система сил, система сходящихся сил, равнодействующая сила, условия равновесия, аналитический способ равновесие, геометрический способ равновесие, проекция на ось и на плоскость.

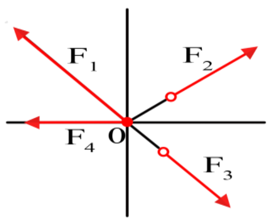


Рис. 1.17

Плоская система сходящихся сил

Система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке, называется сходящейся (Рис.1.17).

Необходимо определить равнодействующую системы сходящихся сил $(F_1, F_2, F_3; \ldots \ldots; F_n)$, n—число сил, входящих в систему.

По следствию из аксиом статики, все силы системы можно переместить вдоль линии действия, и все силы окажутся приложенными в одной точке.

Равнодействующая сходящихся сил

Равнодействующую двух пересекающихся сил можно определить с помощью параллелограмма или треугольника сил (4-я аксиома) (Рис.1.18).

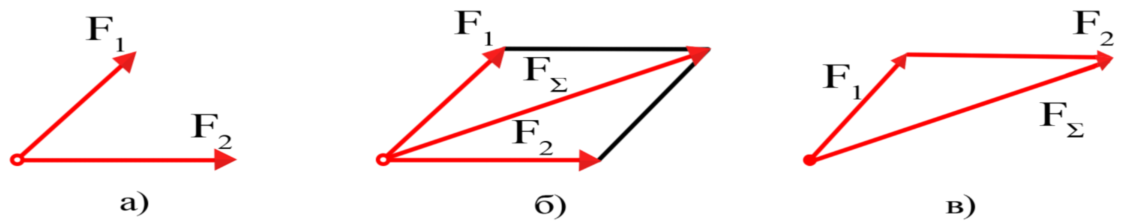
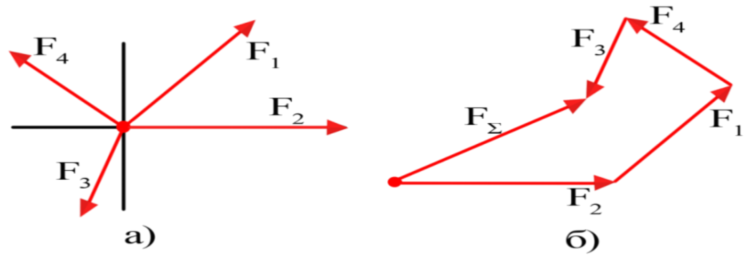


Рис.1.18

Используя свойства векторной суммы сил, можно получить равнодействующую любой сходящейся системы сил, складывая последовательно силы, входящие в систему. Образуется многоугольник сил (Рис.1.19). Вектор равнодействующей силы соединит начало первого вектора с концом последнего.



$$F_{\sum} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

Рис.1.19

При графическом способе определения равнодействующей векторы сил можно вычерчивать в любом порядке, результат (величина и направление равнодействующей) при этом не изменится.

Вектор равнодействующей направлен навстречу векторам сил-слагаемых. Такой способ получения равнодействующей называют геометрическим.

Замечание. При вычерчивании многоугольника обращать внимание на параллельность сторон многоугольника соответствующим векторам сил.

Порядок построения многоугольника сил

Вычертить векторы сил заданной системы в некотором масштабе один за другим так, чтобы конец предыдущего вектора совпадал с началом последующего.

1. Вектор равнодействующей замыкает полученную ломаную линию; он соединяет начало первого вектора с концом последнего и направлен ему навстречу.
2. При изменении порядка вычерчивания векторов в многоугольнике меняется вид фигуры. На результат порядок вычерчивания не влияет.

Условие равновесия плоской системы сходящихся сил

При равновесии системы сил равнодействующая должна быть равна нулю, следовательно, при геометрическом построении конец последнего вектора должен совпасть с началом первого.
Если плоская система сходящихся сил находится в равновесии, многоугольник сил этой системы должен быть замкнут.

Если в системе три силы, образуется треугольник сил. Сравните два треугольника сил (Рис.1.20) и сделайте вывод о количестве сил, входящих в каждую систему.

Рекомендация. Обратить внимание на направление векторов.

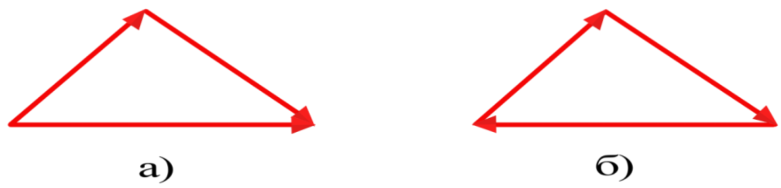


Рис. 1.20

Решение задач на равновесие геометрическим способом

Геометрическим способом удобно пользоваться, если в системе три силы. При решении задач на равновесие тело считать абсолютно твердым (отвердевшим).

Порядок решения задач:

1. Определить возможное направление реакций связей.
2. Вычертить многоугольник сил системы, начиная с известных сил в некотором масштабе. (Многоугольник должен быть замкнут, все векторы-слагаемые направлены в одну сторону по обходу контура.)
3. Измерить полученные векторы сил и определить их величину, учитывая выбранный масштаб.
4. Для уточнения решения рекомендуется определить величины векторов (сторон многоугольника) с помощью геометрических зависимостей.

Пример 1. Груз подвешен на стержнях и находится в равновесии. Определить усилия в стержнях (Рис. 1.21,а).

Решение:

1. Усилия, возникающие в стержнях крепления по величине равны силам, с которыми стержни поддерживают груз (5-я аксиома статики) (Рис. 1.21,а).

Определяем возможные направления реакций связей «жесткие стержни».

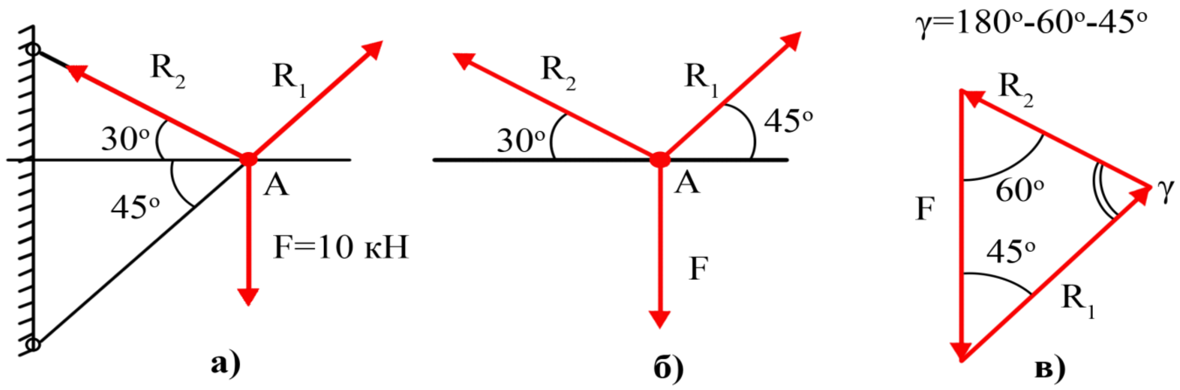


Рис. 1.21

Усилия направлены вдоль стержней.

2. Освободим точку *A* от связей, заменив действие связей их реакциями (Рис.1.21,б).

3. Система находится в равновесии. Построим треугольник сил.

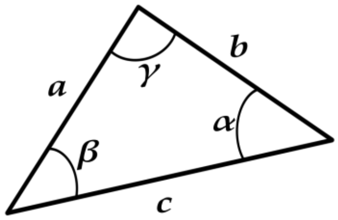
Построение начнем с известной силы, вычертив вектор *F* в некотором масштабе.

Из концов вектора *F* проводим линии, параллельные реакциям R_1 и R_2

Пересекаясь, линии создадут треугольник (Рис.1.21,в). Зная масштаб построений и измерив длину сторон треугольника, можно определить величину реакций в стержнях.

4. Для более точных расчетов можно воспользоваться геометрическими соотношениями, в частности теоремой синусов: отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла—величина постоянная

$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$ Для данного случая.



$$\frac{F}{sin\,75^o} = \frac{R_1}{sin\,60^o} = \frac{R_2}{sin\,45^o}$$

$$\frac{R_1}{sin\,60^o} = \frac{F}{sin\,75^o};$$

$$R_1 = \frac{F\,sin\,60^o}{sin\,75^o}$$

$$R_1 = \frac{10 \cdot 0{,}866}{0{,}966} = 9 \text{ кН}$$

$$\frac{R_2}{sin\,45^o} = \frac{F}{sin\,75^o};$$

$$R_2 = \frac{F\,sin\,45^{\circ}}{sin\,75^{\circ}} \;\; ; \quad R_2 = \frac{10 \cdot 0{,}707}{0{,}966} = 7{,}3 \text{ кН}$$

Замечание. Если направление вектора (реакции связи) на заданной схеме и в треугольнике сил не совпало, значит, реакция на схеме должна быть направлена в противоположную сторону $\alpha\beta\gamma$.

Определение равнодействующей аналитическим способом

Проекция силы на ось

Проекция силы на ось определяется отрезком оси, отсекаемым перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора (Рис.1.22).

$$F_x = F\cos\alpha$$

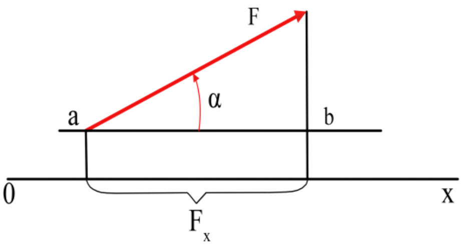


Рис. 1.22

Величина проекции силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между вектором силы и положительным направлением оси. Таким образом, проекция имеет знак: положительный при одинаковом направлении вектора силы и оси и отрицательный при направлении в сторону отрицательной полуоси (Рис.1.23).

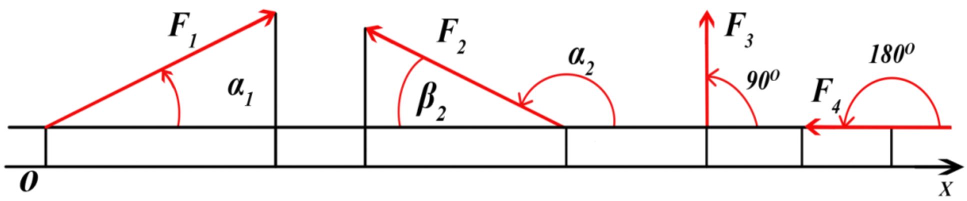


Рис. 1.23

$$F_{1x} = F_1\,cos\,\alpha_1 > 0$$

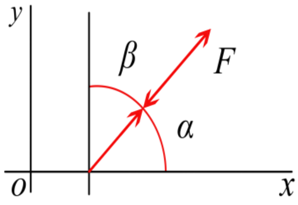
$$F_{2x} = F_2 cos\alpha_2 = -F_2 cos\beta_2;$$

$$cos\alpha_2 = \cos(180^{\circ} - \beta_2) = -cos\beta_2$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90^{\circ} = 0;$$

$$F_{4x} = F_4 \cos 180^{\circ} = -F_4$$

Проекция силы на две взаимно перпендикулярные оси (Рис.1.24)



$$F_x = F \cos \alpha > 0$$

$$F_y = F \cos \beta = F \sin \alpha > 0$$

Рис.1.24

Определение равнодействующей системы сил аналитическим способом

Величина равнодействующей равна векторной (геометрической) сумме векторов системы сил. Определяем равнодействующую геометрическим способом. Выберем систему координат, определим проекции всех заданных векторов на эти оси (Рис. 1.25,а). Складываем проекции всех векторов на оси x и y (Рис.1.25,б).

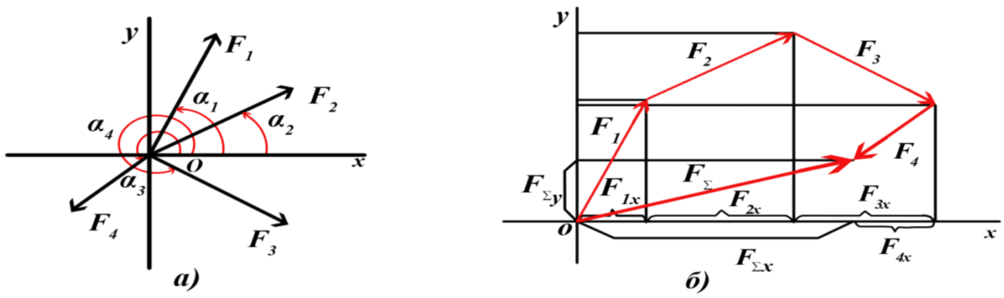


Рис. 1.25

$$F_{\sum x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}; \quad F_{\sum y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

$$F_{\sum x} = \sum_{0}^{n} F_{kx;} \quad F_{\sum y} = \sum_{0}^{n} F_{ky}$$

Модуль (величину) равнодействующей можно найти по известным проекциям:

$$F_{\sum} = \sqrt{F_{\sum x}^2 + F_{\sum y}^2}$$

Направление вектора равнодействующей можно определить по величинам и знакам косинусов углов, образуемых равнодействующей с осями координат (Рис. 1.26).

$$\cos\alpha_x = \frac{F_{\sum x}}{F_{\sum}}$$

$$cos\,\alpha_y = \frac{F_{\sum y}}{F_{\sum}}$$

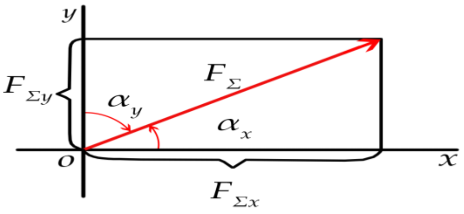


Рис.1.26

Условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитической форме

Исходя из того, что равнодействующая равна нулю, получим:

$$F_{\sum} = \sqrt{F_{\sum x}^2 + F_{\sum y}^2} \Rightarrow \begin{matrix} F_{\sum x} = \sum F_{kx} = 0 \\ F_{\sum y} = \sum F_{ky} = 0 \end{matrix}$$

$$F_{\sum} = 0$$

Условия равновесия в аналитической форме можно сформулировать следующим образом:

Плоская система сходящихся сил находится в равновесии, если алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равна нулю.

Система уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил:

$$\begin{cases} \sum_0^n F_{kx} = 0 \\ \sum_0^n F_{ky} = 0 \end{cases}$$

В задачах координатные оси выбирают так, чтобы решение было наиболее простым. Желательно, чтобы хотя бы одна неизвестная сила совпадала с осью координат.

Пример 1. Определите *x* и *y* компоненты F_1, и F_2, действующий на систему, показанную в (Рис. 1.27,а). Выразите каждую силу как вектор

Решение:

Скалярная Система обозначений. Согласно закону о параллелограмме силу F разложим на составляющие (Рис.1.7,b);. Поэтому F_{1x}, действует по оси *x*, и F_{1y}, действует по направлению оси *y*, имеем

$$F_{1x} = -200\,sin\,30°\text{Н} = -100\text{Н} = 100\text{Н} \leftarrow$$

$$F_{1y} = 200\cos 30°\,\text{Н} = 173\text{Н} = 173\text{Н} \uparrow$$

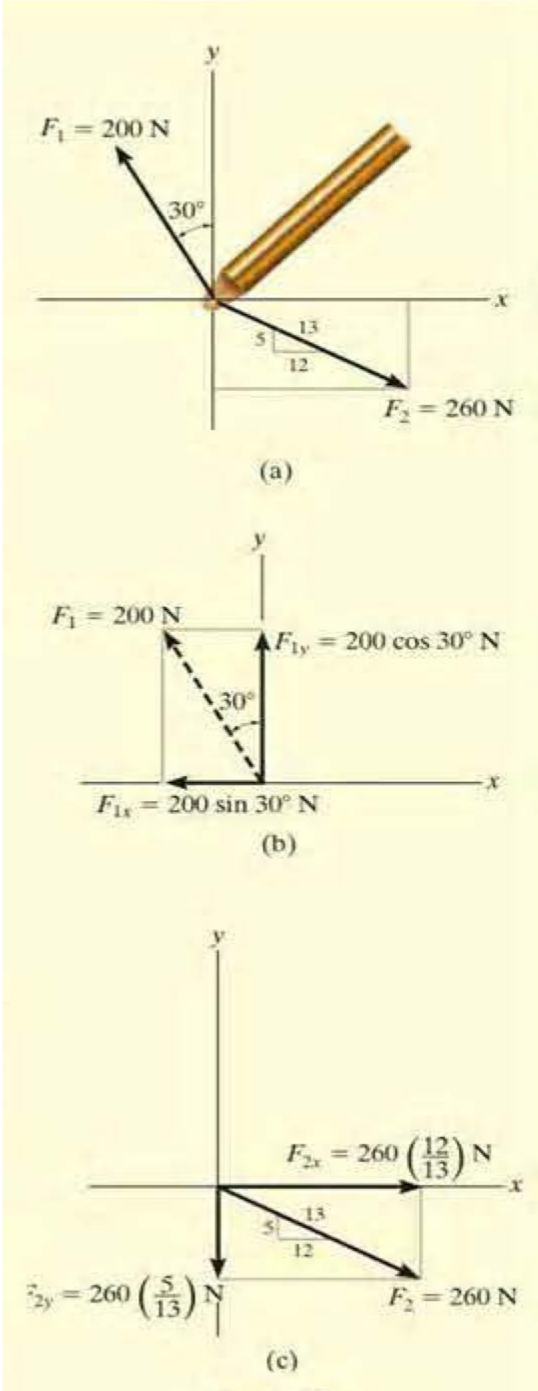


Рис. 1.27

Сила F: решен в его *x* и *y* компоненты как показано в (Рис 1.27,с). Здесь наклон линии действия для силы обозначен. От этого "наклонного треугольника" мы могли получить угол θ, например, $\theta=tan^{-1}(\frac{5}{12})$, и затем продолжите определять величины компонентов в той же самой манере что касается F_1. Более легкий метод, как бы то ни было состоит из использования пропорциональных частей подобных треугольников, то есть.

$$\frac{F_{2x}}{260\text{Н}} = \frac{12}{13} \qquad F_{2x} = 260\text{Н}\left(\frac{12}{13}\right) = 240\ \text{Н}$$

$$F_{2y} = 260\text{Н}\left(\frac{5}{13}\right) = 100\ \text{Н}$$

Заметьте как величина горизонтальной составляющей F_{2x} был получена, умножая величину силы отношением горизонтальной силы наклонного треугольника, разделенного на гипотенузу тогда как величина вертикальной составляющей, F_{2y}, была получена, умножая величину силы отношением вертикальной силы, разделенной на гипотенузу. Следовательно,

$$F_{2x} = 240\ \text{Н} = 240\ \text{Н} \rightarrow$$

$$F_{2y} = -100\ \text{Н} = 100\ \text{Н} \downarrow$$

Ответ

$$F_1 = \{-100i + 173j\}\text{Н}$$

$$F_2 = \{240i - 100j\}\text{Н}$$

Пример 2. Определить величину и направление равнодействующей плоской системы сходящихся сил

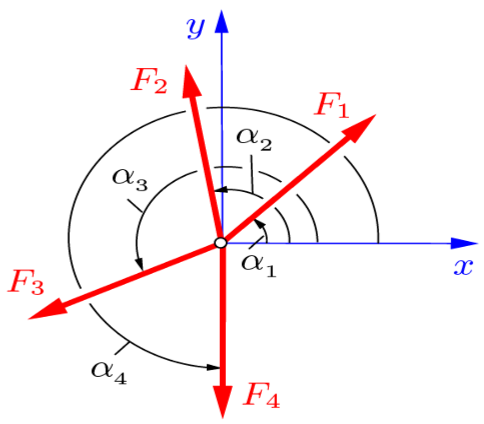


Рис. 1.28

Решение: Выбираем систему координат, углы показаны на (Рис 1.28). Определяем проекции сил системы на оси *x*.

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$$

$$= F_1 \cos a_1 + F_2 \cos a_2 + F_3 \cos a_3 + F_4 \cos a_4$$

$$= 12 \cos 45° + 8 \cos 100° + 18 \cos 205° + 4 \cos 270°$$

$$= -9.22\ \text{кН}$$

И так же на ось y

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$$

$$= F_1 \sin a_1 + F_2 \sin a_2 + F_3 \sin a_3 + F_4 \sin a_4 = 4.76 \text{ кН}$$

определяем модуль равнодействующей по величинам проекций, а также значение угла равнодействующей: (Рис. 1.27):

$$\underline{R} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{9.22^2 + 4.76^2} = \underline{10.4 \text{ кН}},$$

$$\tan a_R = \frac{R_y}{R_x} = -\frac{4.76}{9.22} = -0.52 \quad \rightarrow \quad \underline{a_R = 152.5°}$$

Пример 3. Определить величины и знаки проекций представленных на (Рис. 1.29) сил.

Решение:

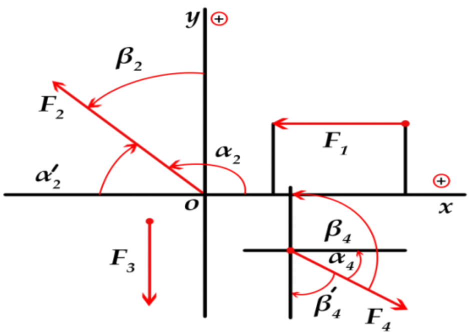


Рис. 1.29

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1;\ F_{1x} = -F_1 \cos 0° < 0;$$

$$F_{1y} = F_1 \cos \beta_1;\ F_{1y} = F_1 \cos 90° = 0$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = -F_2 \cos \alpha_2^{'}$$

$$\alpha_2^{'} = 180° - \alpha_2; \qquad F_{2x} < 0;$$

$$F_{2y} = F_2 \cos \beta_2 > 0$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 90° = 0$$

$$F_{3y} = F_3 \cos \beta_3 = F_3 \cos 180°;$$

$$F_{3y} = -F_3 < 0$$

$$F_{4x} = F_4 \cos a_4 > 0$$

$$F_{4y} = F_4 \cos \beta_4 = -F_4 \cos \beta_4^{'};$$

$$F_{4y} < 0$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какая система сил называется сходящейся?
2. Сформулируйте и запишите геометрические условие равновесия сходящихся сил?
3. Что называется проекцией силы на ось? Как определяется величина и знак проекции силы на оси координат? В каком случае проекция силы на ось равна нулю?
4. Проекция силы на ось является векторной или скалярной величиной?
5. Запишите выражение для расчета проекции силы F на ось Oy (Рис.1.30).

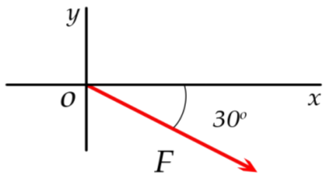


Рис.1.30

6. Определите сумму проекций сил системы на ось Ox (Рис.1.31).

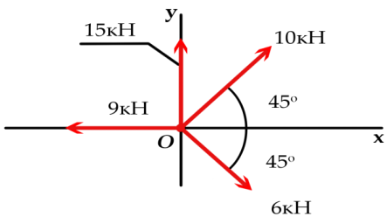


Рис. 1.31

1.3 Момент силы. Плоская система сил

Пара сил и момент силы относительно точки

Знать обозначение, модуль и определение моментов пары сил и силы относительно точки, условия равновесия системы пар сил.

Уметь определять моменты пар сил и момент силы относительно точки, определять момент результирующей пары сил.

План:

1. Пара сил, момент пары сил.
2. Момент силы относительно точки.
3. Теорема Пуансо о параллельном переносе сил.
4. Приведения к точке плоской системы произвольно расположенных сил.

5. Влияние точки приведения.
6. Частные случаи приведения системы сил к точке.
7. Условия равновесия произвольной плоской системы сил.
8. Примеры решения задач.
9. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Пара сил, момент пары силы, условия равновесия, плечо пары, главный момент, главный вектор, теорема Пуансо.

Пара сил, момент пары сил

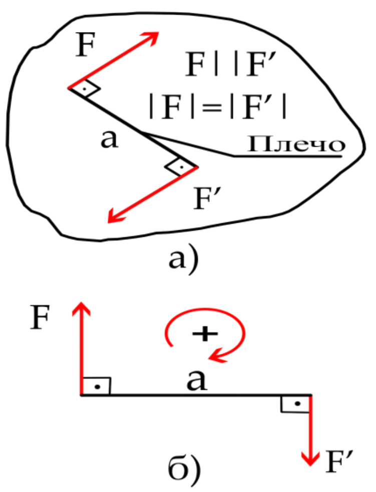


Рис. 1.32

Парой сил называется система двух сил, равных по модулю, параллельных и направленных в разные стороны.

Рассмотрим систему сил $(F;F')$, образующих пару.

Пара сил вызывает вращение тела и ее действие на тело оценивается моментом. Силы, входящие в пару, не уравновешиваются, т. к. они приложены к двум точкам (Рис. 1.32). Их действие на тело не может быть заменено одной силой (равнодействующей).

Момент пары сил численно равен произведению модуля силы на расстояние между линиями действия сил (плечо пары).

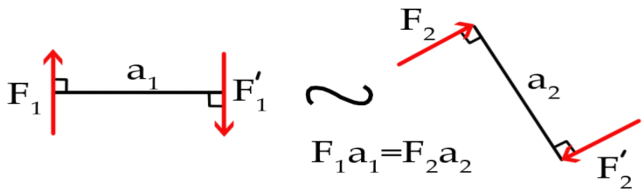
Момент считают положительным, если пара вращает тело по часовой стрелке (Рис. 1.32,б); $M(F;F')=Fa;\ M>0.$

Плоскость, проходящая через линии действия сил пары, называется плоскостью действия пары.

Свойства пар (без доказательств):

1. Пару сил можно перемещать в плоскости ее действия.
2. Эквивалентность пар. Две пары, моменты которых равны, (Рис. 1.33) эквивалентны (действие их на тело аналогично).
3. Сложение пар сил. Систему пар сил можно заменить равнодействующей парой.

Момент равнодействующей пары равен алгебраической сумме моментов пар, составляющих систему (Рис. 1.34)



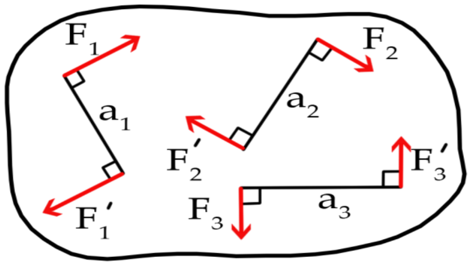


Рис. 1.33 Рис.1.34

$$M_\Sigma = F_1 a_1 + F_2 a_2 + F_3 a_3 + \cdots + F_n a_n;$$

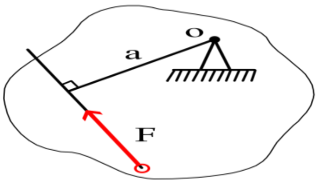
$$M_\Sigma = \sum_0^n m_k$$

4. Равновесие пар.

Для равновесия пар необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар системы равнялась нулю:

$$M_\Sigma = 0 \Rightarrow \sum_0^n m_k = 0$$

Момент силы относительно точки



Сила, не проходящая через точку крепления тела, вызывает вращение тела относительно точки, поэтому действие такой силы на тело оценивается моментом.

Момент силы относительно точки числени

Рис. 1.35

но равен произведению модуля силы на расстояние от точки до линий действия силы. Перпедикуляр, опущенный из точки на линию действия силы (Рис. 1.35), называется плечом силы.

Обозначение момента $M_O(F)$ или $m_O(F)$.

$$m_O(F) = Fa$$

Единица измерения $[m_O\ (F)]$—*Нм.*

Момент считается положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке.

Примечание. В разных учебных пособиях знак момента назначается по-разному.

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через точку, т. к. в этом случае расстояние от точки до силы равно нулю**.**

Пример. Дана система пар сил (Рис.1.36). Определить момент результирующей пары.

Решение:

Момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов пар системы

$$M_{\Sigma} = \sum_{0}^{n} m_k$$

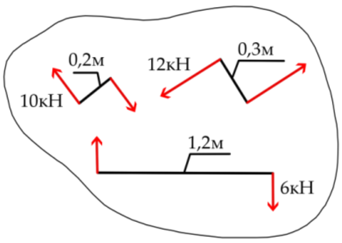


Рис.1.36

Подставив численные значения, получим:

$$m_1 = 10 \cdot 0.2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$
$$m_2 = -12 \cdot 0.3 = -3.6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$
$$m_3 = 6 \cdot 1.2 = 7.2 \text{ кН} \cdot \text{м}$$
$$M_{\Sigma} = 2 + (-3.6) + 7.2 = 5.6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Знак свидетельствует о том, что момент вызывает вращение по часовой стрелке. Величину силы и плеча определить не удается.

Примечание. Чтобы уравновесить данную систему пар, необходимо приложить пару сил, равную по модулю и направленную в обратную сторону. Такую пару сил называют уравновешивающей.

Плоская система произвольно расположенных сил

Иметь представление о главном векторе, главном моменте равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил.

Знать теорему Пуансо о приведении силы к точке, приведение произвольной плоской системы сил к точке, три формы уравнений равновесия.

Уметь заменять произвольную плоскую систему сил одной силой и одной парой.

Теорема Пуансо о параллельном переносе сил

Силу можно перенести параллельно линии ее действия, при этом нужно добавить пару сил с моментом, равным произведению модуля силы на расстояние, на которое перенесена сила.

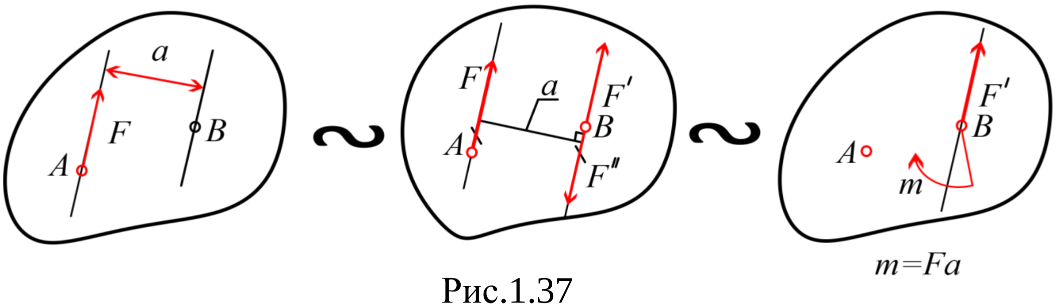


Рис.1.37

$|F| = |F'| = |F''|$

Дано: сила в точке A (Рис.1.37)

Добавим в точке B уравновешенную систему сил $(F';F'')$. Образуется пара сил $(F;\ F'')$. Получим силу в точке B и момент пары m.

Приведение к точке плоской системы произвольно расположенных сил

Линии действия произвольной системы сил не пересекаются в одной точке, поэтому для оценки состояния тела такую систему следует упростить. Для этого все силы системы переносят в одну произвольно выбранную точку—точку приведения. Применяют теорему Пуансо. При любом переносе силы в точку, не лежащую на линии ее действия, добавляют пару сил.

Появившиеся при переносе пары называют присоединенными парами.

Дана плоская система произвольно расположенных сил (Рис.1.38).

Переносим все силы в точку O. Получим пучок сил в точке O, который можно заменить одной силой—главным вектором системы. Образующуюся систему пар сил можно заменить одной эквивалентной парой—главным моментом системы.

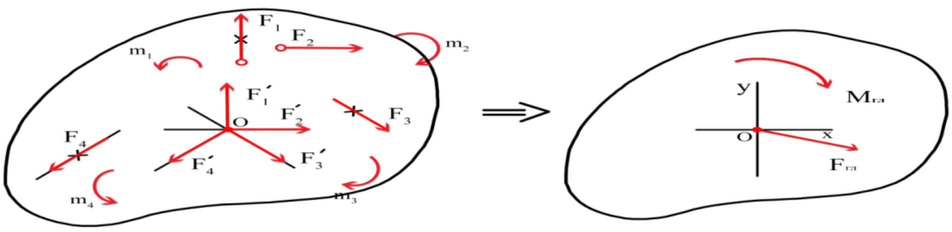


Рис.1.38

$$F_{гл} = \sum_{0}^{n} F_k$$

Главный вектор равен геометрической сумме векторов произвольной плоской системы сил. Проецируем все силы системы на оси координат и, сложив соответствующие проекции на оси, получим проекции главного вектора.

$$F_{гл_x} = \sum_{0}^{n} F_{kx}; \quad F_{гл_y} = \sum_{0}^{n} F_{ky};$$

По величине проекций главного вектора на оси координат находим модуль главного вектора:

$$F_{гл} = \sqrt{F_{гл_x}^2 + F_{гл_y}^2}$$

Главный момент системы сил равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно точки приведения**.**

$$M_{гл0} = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n;$$

$$M_{гл_O} = \sum_{0}^{n} m_O\,(F_k)$$

Таким образом, произвольная плоская система сил приводится к одной силе (главному вектору системы сил) и одному моменту (главному моменту системы сил).

Влияние точки приведения

Точка приведения выбрана произвольно. При изменении положения точки приведения величина главного вектора не изменится.

Величина главного момента при переносе точки приведения изменится, т. к. меняются расстояния от векторов-сил до новой точки приведения.

С помощью теоремы Вариньона о моменте равнодействующей можно определить точку на плоскости, относительно которой главный момент равен нулю. Тогда произвольная плоская система сил может быть заменена одной силой.

Эту силу называют равнодействующей системы сил.

Численно равнодействующая равна главному вектору системы сил, но приложена в другой точке, относительно которой главный момент равен нулю. Равнодействующую принято обозначать F_{Σ}.

Численно ее значение определяется так же, как главный вектор системы сил:

$$F_{\sum} = F_{\text{гл}}$$

$$F_{\sum} = \sqrt{\left(\sum_{0}^{n} F_{kx}\right)^{2} + \left(\sum_{0}^{n} F_{ky}\right)^{2}}$$

Точку приложения равнодействующей можно определить по формуле

$$d = \frac{M_{\text{гл}}}{F_{\text{гл}}}$$

где d—расстояние от выбранной точки приведения до точки приложения равнодействующей;

$M_{гл}$—величина главного момента относительно выбранной точки приведения;

$F_{гл}$—величина главного вектора системы сил.

Частные случаи приведения системы сил к точке

При приведении системы сил к точке возможны следующие варианты:

1. $F_{\text{гл}} = 0;\ M_{\text{гл}O} \neq 0 \Rightarrow$ тело вращется вокруг неподвижной оси.

2. $M_{\text{гл}O} = 0;\ .F_{\text{гл}} \neq 0;\ .F_{\text{гл}} = F_{\sum} \Rightarrow$ тело движется прямолинейно ускоренно.

3. $M_{\text{гл}O} = 0; F_{\text{гл}} = 0 \Rightarrow$ тело находится в равновесии.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил

1. При равновесии главный вектор системы равен нулю
($F_{гл}$=0).

Аналитическое определение главного вектора приводит к выводу:

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}_x}^{2} + F_{\text{гл}_y}^{2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0 \end{cases}$$

где F_{kx} и F_{ky}—проекции векторов на оси координат.

2. Поскольку точка приведения выбрана произвольно, ясно, что при равновесии сумма моментов сил системы относительно любой точки на плоскости должна равняться нулю:

$$M_{\text{гл}_O} = \sum_{0}^{n} m_O(F_k) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \sum\limits_{0}^{n} m_A\,(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_B\,(F_k) = 0 \end{matrix}$$

где *A* и *B*—разные точки приведения.

Условие равновесия произвольной плоской системы сил может быть сформулировано следующим образом:

Для того чтобы твердое тело под действием произвольной плоской системы сил находилось в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил системы на любую ось равнялась нулю и алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно любой точки в плоскости действия сил равнялась нулю.

Получим основную форму уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0 \\ \left.\begin{matrix} \sum\limits_{0}^{n} m_A(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_B(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_C\,(F_k) = 0 \end{matrix}\right\} \quad \text{уравнения моментов} \end{cases}$$

Теоретически уравнений моментов можно записать бесконечное множество, но практически доказано, что на плоскости можно составить только три независимых уравнения моментов и при этом три точки (центры моментов) не должны лежать на одной линии.

Таким образом, имеем пять независимых уравнений равновесия.

Практически для решения задач на плоскости достаточно трех уравнений равновесия. В каждом конкретном случае используются уравнения с одним неизвестным.

Для разных случаев используются три группы уравнений равновесия.

Первая форма уравнений равновесия: $\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_A(F_k) = 0 \end{cases}$

Вторая форма уравнений равновесия: $\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} F_{ky} = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_A(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_B(F_k) = 0 \end{cases}$

Третья форма уравнений равновесия: $\begin{cases} \sum\limits_{0}^{n} m_A(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_B(F_k) = 0 \\ \sum\limits_{0}^{n} m_C(F_k) = 0 \end{cases}$

Для частного случая, если уравновешена система параллельных сил, можно составить только два уравнения равновесия:

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = 0\,; \sum_{0}^{n} m_A(F_k) = 0$$

Ось Ox системы координат параллельна линии действия сил.

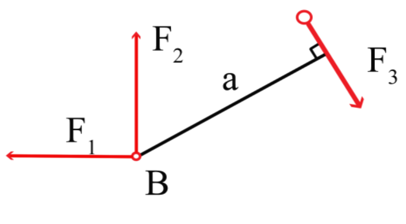


Рис.1.39

Пример 1. Найти момент присоединенной пары при переносе силы F_3 в точку B (Рис. 1.39). $F_1=10$ *кН;* $F_2=15$ *кН;* $F_3=18$ *кН;* $a=0{,}2$ *м.*

Решение:

Используем теорему Пуансо.

$$M_B(F_3) = 18 \cdot 0.2 = 3.6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Пример 2. Найти главный вектор системы (Рис. 1.40). *F=10 кН; F_2=16 кН; F_3=12 кН; m=60 кН м.*

Решение:

Главный вектор равен геометрической сумме сил:

$$F_{\text{гл}_x} = \sum_{0}^{n} F_{kx}; \qquad F_{\text{гл}_x} = F_1 \cos 45^\circ - F_2 = -9 \text{ кН}$$

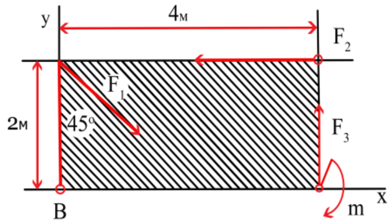


Рис.1.40

$$F_{\text{гл}_y} = \sum_{0}^{n} F_{ky};$$

$$F_{\text{гл}_y} = -F_1 \cos 45^\circ + F_3 = 5 \text{ кН}$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{F_{\text{гл}_x}^2 + F_{\text{гл}_y}^2}$$

$$F_{\text{гл}} = \sqrt{(-9)^2 + 5^2} \approx 10 \text{ кН}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется парой сил?
2. Что называется моментом пары сил и как определяется знак момента?
3. Какие пары сил называются эквивалентными?
4. Чему равна сумма проекций сил пары на любую ось?
5. Что называется моментом силы относительно точки?
6. Что называется плоской системой произвольно расположенных сил?
7. Что называется главным вектором и главным моментом плоской системы сил?
8. Чему равен главный вектор системы сил?
9. Чему равен главный момент системы сил при приведении ее к точке?
10. Чем отличается главный вектор от равнодействующей плоской системы произвольно расположенных сил?

Выбрать из предложенных ответов:

величиной;

— направлением;
— величиной и направлением;
— точкой приложения;
— ничем.

11. Какие силы из системы сил (Рис. 1.41) образуют пары?

$$F_1 = F_2 = F_4; \qquad F_3 = F_6; \qquad F_5 = 0{,}9F_6$$

12. Определите момент изображенной на (Рис. 1.42) пары сил. $|F| = |F'| = 5$ кН

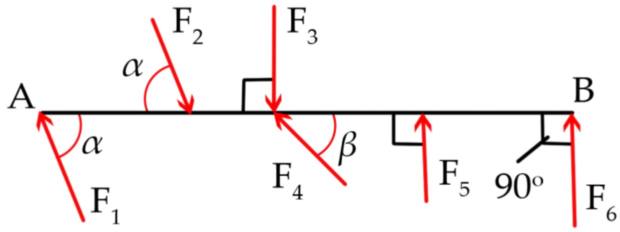


Рис.1.41

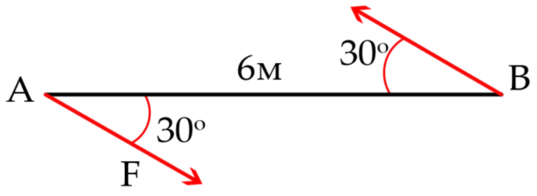


Рис.1.42

13. Какие из изображенных пар (Рис. 1.42) эквивалентны, если $F_1 = F_2 = 8$ кН; $F_3 = 6{,}4$ кН; $a_1 = 2$ м; $a_2 = 2{,}5$ м?

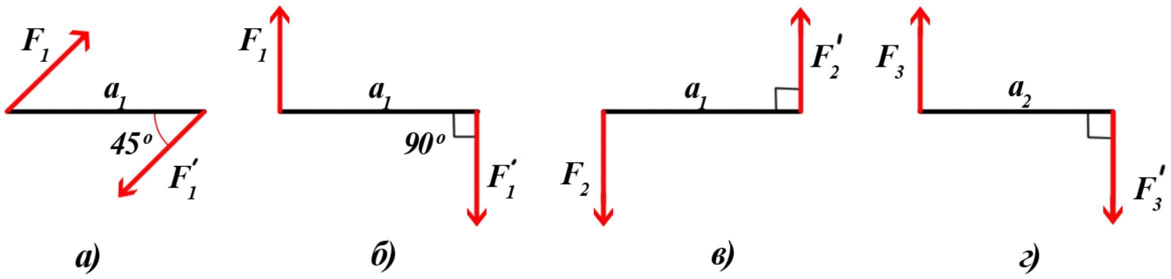


Рис.1.43

1.4 Пространственная система сил

Знать момент силы относительно оси, свойства момента, аналитический способ определения равнодействующей, условия равновесия пространственной системы сил.

Уметь выполнять разложение силы на три взаимно перпендикулярные оси, определять момент силы относительно оси.

План:

1. Момент силы относительно оси.
2. Пространственная сходящаяся система сил
3. Произвольная пространственная система сил

4. Сила тяжести.
5. Точка приложения тяжести
6. Центр тяжести однородных плоских фигур
7. Определение координат центра тяжести плоских фигур
8. Контрольные вопросы и задания.

Ключевые слова: Пространственная система сил, момент силы, относительно оси, уравнения равновесия, сила тяжести, центр тяжести, плоских фигур, круг, квадрат, прямоугольник, треугольник, полукруг, площадь.

Пространственная система сил-система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости.
Момент силы относительно оси-равен моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью (Рис.1.44,а).

$\boldsymbol{M_{OO}(F)} = \text{пр}\,\boldsymbol{Fa}$

a–Расстояние от оси до проекции *F*

прF-проекция силы на плоскость, перпендикулярную оси *OO*

прF=Fcosα

$$\boldsymbol{M_{OO}(F) = F\cos\alpha \cdot a}$$

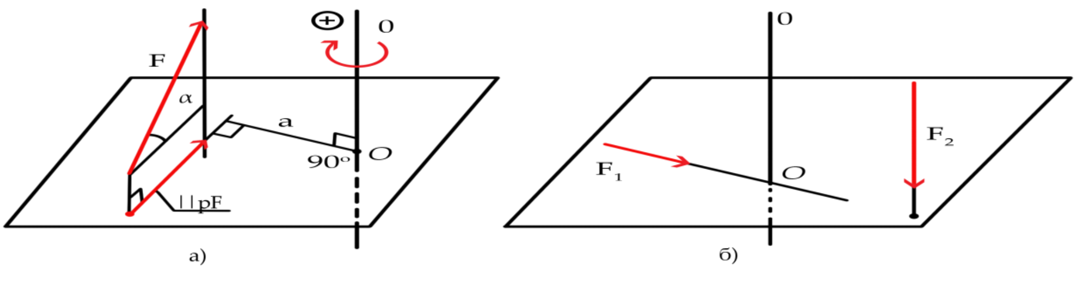


Рис.1.44

Момент считаем положительным, если сила разворачивает тело по часовой стрелке. Смотреть со стороны положительного направления оси.

Если линия действия силы пересекает ось или линия действия силы параллельна оси, моменты силы относительно этой оси равны нулю (Рис.1.44,б).

Силы и ось лежат в одной плоскости, они не смогут повернуть тело вокруг этой оси.

$$\boldsymbol{F_1}\text{пересекает ось; } \boldsymbol{M_{OO}(F_1) = 0}$$

$$\boldsymbol{F_2//OO};\ \text{пр}\,\boldsymbol{F_2 = 0; M_{OO}(F_2) = 0}$$

Пространственная сходящаяся система сил

В пространстве вектор силы проецируется на три взаимно перпендикулярные оси координат. Проекции вектора образуют ребра прямоугольного параллелепипеда, вектор силы совпадает с диагональю (Рис.1.45).

Модуль вектора может быть получен из зависимости

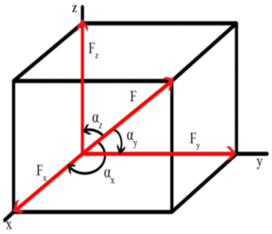


Рис. 1.45

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Где

$$F_x = F\cos\alpha_x$$

$$F_y = F\cos\alpha_y$$

$$F_z = F\cos\alpha_z$$

a_x, a_y, a_x-углы между вектором F и осями координат

Пространственная сходящаяся система сил—система сил, не лежащих в одной плоскости, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Равнодействующую пространственной системы сил можно определить, построив пространственный многоугольник (Рис.1.46)

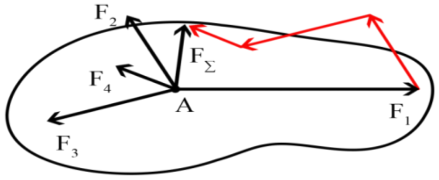
$$F_{\sum} = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots F_n$$

Доказано, что равнодействующая системы сходящихся сил приложена в точке пересечения линий действия сил системы.

Модуль равнодействующей пространственной системы сходящихся сил можно определить аналитически, использовав метод проекций.

Совмещаем начало координат с точкой пересечения линий действия сил системы. Проецируем все силы на оси координат и суммируем соответствующие проекции (Рис.1.47). Получим проекции

$$F_{\sum x} = \sum_{0}^{n} F_{kx}\,; \qquad F_{\sum y} = \sum_{0}^{n} F_{ky;} \quad F_{\sum z} = \sum_{0}^{n} F_{kz}$$



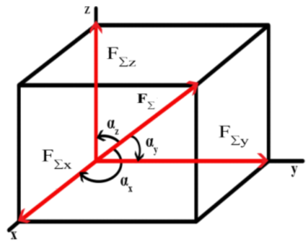


Рис.1.46 Рис.1.47

Модуль равнодействующей системы сходящихся сил определим по формуле

$$F_{\sum} = \sqrt{F_{\sum x}^2 + F_{\sum y}^2 + F_{\sum z}^2}$$

Направление вектора равнодействующей определяется углами

где:

$$\alpha_x = (F_{\sum} \wedge F_{\sum x}); \qquad \alpha_y = (F_{\sum} \wedge F_{\sum y}); \qquad \alpha_z = (F_{\sum} \wedge F_{\sum z});$$

Произвольная пространственная система сил

Приведение произвольной пространственной системы сил к центру *O*

Дана пространственная система сил (Рис.1.48,а). Приведем ее к центру *O*. Силы необходимо параллельно перемещать, при этом образуется система пар сил. Момент каждой из этих пар равен произведению модуля силы на расстояние до центра приведения.

В центре приведения возникает пучок сил, который может быть заменен суммарной силой (главный вектор) $F_{гл}$ (Рис. 1.48,б).

Моменты пар сил можно сложить, получив суммарный момент системы *Мгл* (главный момент).

Таким образом, произвольная пространственная система сил приводится к главному вектору и главному моменту.

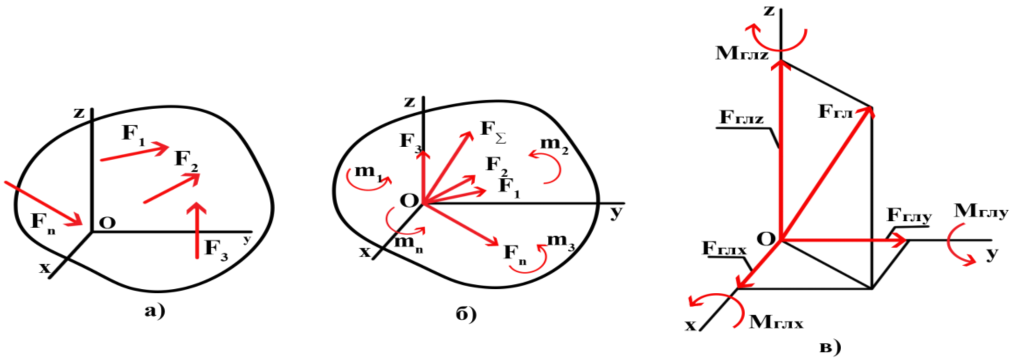


Рис.1.48

Главный вектор принято раскладывать на три составляющие, направленные вдоль осей координат (Рис. 1.48,в).

Обычно суммарный момент раскладывают на составляющие: три момента относительно осей координат.

Абсолютное значение главного вектора (Рис. 1.48,б) равно

$$F_{гл} = \sqrt{F_{глx}^2 + F_{глy}^2 + F_{глz}^2}$$

где:

$$F_{глx} = \sum_0^n F_{kx}; \quad F_{глy} = \sum_0^n F_{ky}; \quad F_{глz} = \sum_0^n F_{kz};$$

Абсолютное значение главного момента определяется по формуле:

$$M_{гл} = \sum_0^n m_k$$

$$M_{гл} = \sqrt{M_{глx}^2 + M_{глy}^2 + M_{глz}^2}$$

где:

$$M_{глx} = \sum_0^n m_{kx}; \quad M_{глy} = \sum_0^n m_{ky}; \quad M_{глz} = \sum_0^n m_{kz};$$

Уравнения равновесия пространственной системы сил

При равновесии

$$F_{гл} = 0; \; M_{гл} = 0$$

Получаем шесть уравнений равновесия

$$\sum_{0}^{n} F_{kx} = 0;\ \sum_{0}^{n} F_{ky} = 0\,;\ \sum_{0}^{n} F_{kz} = 0$$

$$\sum_{0}^{n} m_{kx}(F_k) = 0; \sum_{0}^{n} m_{ky}(F_k) = 0; \sum_{0}^{n} m_{kz}(F_k) = 0;$$

Шесть уравнений равновесия пространственной системы сил соответствуют шести независимым возможным перемещениям тела в пространстве: трем перемещениям вдоль координатных осей и трем вращениям вокруг этих осей.

Пример 1. Человек, показанный в (Рис. 1.49), действует на шнур силой 70 фунтов. Найдите проекции этой силы на координатной оси и направление.

Решение Силу *F* показывают в (Рис 1.49,a). Руководство этого вектора, ***u***, определено от радиус-вектора *r*, который простирается от *A* до *B.* Вместо того, чтобы использовать координаты конечных точек шнура, *r* может быть определен непосредственно, отмечая на (Рис., 1.49), что нужно переместить из *A {—24k),* футы. тогда *(-8j)* футы. и наконец *(12i)* футы, чтобы добраться до B. Таким образом,

$$r = \{12i - 8j - 24k\}ft$$

Величина *r*, который представляет длину шнура *AB*

$$r = \sqrt{(12\text{фт})^2 + (-8\text{фт})^2 + (-24\text{фт})^2} = 28ft$$

Формирование единичного вектора, который определяет руководство и смысл и *r* и *F*, который мы имеем

$$u = \frac{\mathrm{r}}{r} = \frac{12}{28}\mathrm{i} - \frac{8}{28}\mathrm{j} - \frac{24}{28}\mathrm{k}$$

С тех пор *F*, имеет величину 70 фунтов и руководство, определенное u. Тогда

$$F = Fu = 70\mathrm{Ib}\left(\frac{12}{28}\mathrm{i} - \frac{8}{28}\mathrm{j} - \frac{24}{28}\mathrm{k}\right)$$
$$= \{30\mathrm{i} - 20\mathrm{j} - 60\mathrm{k}\}\mathrm{Ib}$$

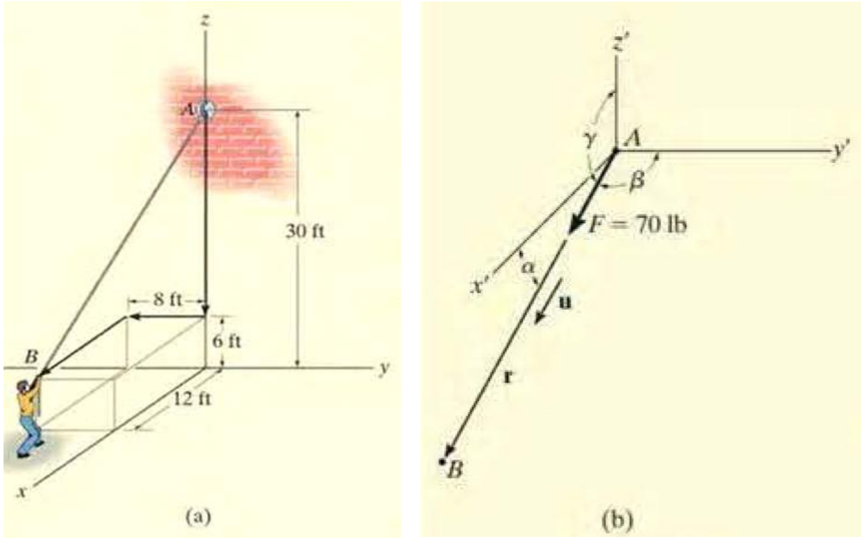


Рис. 1.49

Координатные направляющие углы измерены между r (или F) и положительным использованием ограниченной системы координат с происхождением, помещенным на (Рис. 1.49,б). От компонентов единичного вектора:

Ответ:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{28}\right) = 64.6°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{8}{28}\right) = 107°$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{24}{28}\right) = 149°$$

Отметьте: эти результаты имеют смысл при сравнении с углами, идентифицированными в (Рис. 1.49,б)

Пример 2. На тело в форме куба с ребром *a=10 см* действуют три силы (Рис. 1.48). Определить моменты сил относительно осей координат, совпадающих с ребрами куба.

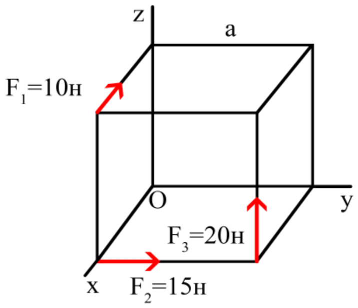


Рис. 1.50

Решение:

1. Моменты сил относительно оси *Ox:*

$m_{Ox} = (F_1) = 0$ (сила F_1 ||оси O_x)

$m_{Ox} = (F_2) = 0$ (сила F_2 ||пересекает ось O_x)

$m_{Ox} = (F_3) = F_3 a;\;\; m_{Ox} = -20 \cdot 0.1 = -2$ Нм

1. Моменты сил относительно оси *Oy*

$m_{Oy} = (F_1) = F_1 a;\; m_{Oy} = 10 \cdot 0.1 = 1$ Н · м;

$m_{Oy} = (F_2) = 0$ (сила F_2 ||оси O_y)
$m_{Oy} = (F_3) = F_3 a$; $m_{Oy} = 20 \cdot 0.1 = 2$ Н · м

3. Моменты сил относительно оси Oz:

$m_{Oz} = (F_1) = 0$ (сила пересекает оси O_z)
$m_{Oz} = (F_2) = -F_2 a$; $m_{Oz}(F_2) = -15 \cdot 0.1 = -1.5$ Н · м
$\boldsymbol{m_{Oz} = (F_3) = 0}$ (сила $\boldsymbol{F_3}$ ||оси $\boldsymbol{O_z}$)

Центр тяжести

Иметь представление о системе параллельных сил и центре системы параллельных сил, о силе тяжести и центре тяжести.

Знать методы для определения центра тяжести тела и формулы для определения положения центра тяжести плоских фигур.

Уметь определять положение центра тяжести простых геометрических фигур, составленных из стандартных профилей.

Сила тяжести—равнодействующая сил притяжения к Земле, она распределена по всему объему тела. Силы притяжения, приложенные к частицам твердого тела, образуют систему сил, линии действия которых сходятся в центре Земли (Рис.1.51). Поскольку радиус Земли значительно больше размеров любого земного тела, силы притяжения можно считать параллельными.

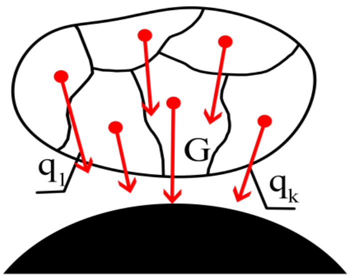


Рис.1.51

Точка приложения силы тяжести-для определения точки приложения силы тяжести (равнодействующей параллельных сил) используем теорему Вариньона о моменте равнодействующей:

Момент равнодействующей относительно оси равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно этой оси.

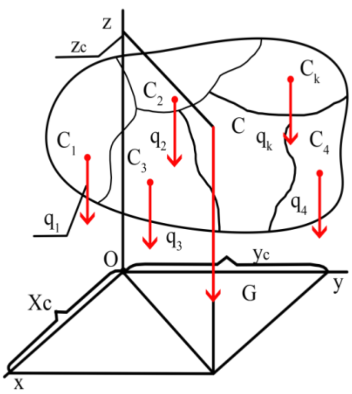


Рис. 1.52

Изображаем тело, составленное из некоторых частей, в пространственной системе координат (Рис. 1.50). Тело состоит из частей, силы тяжести которых q_k приложены в центрах тяжести (ЦТ) этих частей.

Пусть равнодействующая (сила тяжести всего тела) приложена в неизвестном пока центре ***C.***

x_c, y_c и z_c—координаты центра тяжести C.

$X_к$, $У_к$ и Z_k—координаты центров тяжести частей тела.

Из теоремы Вариньона следует:

$$M_x(F_\Sigma) = G_{y_c} = \sum_0^n q_k y_k; \quad y_c = \frac{\sum_0^n q_k y_k}{G}$$

$$M_y(F_\Sigma) = G_{x_c} = \sum_0^n q_k x_k; \quad x_c = \frac{\sum_0^n q_k y_k}{G}$$

аналогично для оси O_z

$$M_z(F_\Sigma) = G_{z_c} = \sum_0^n q_k z_k; \quad z_c = \frac{\sum_0^n q_k z_k}{G}$$

В однородном теле сила тяжести пропорциональна объему $\boldsymbol{V}$**:**

$$G = \gamma V$$

где: γ-вес единица объема.

Следовательно, в формулах для однородных тел:

$$x_c = \frac{\sum_0^n \gamma V_k x_k}{\gamma V} = \frac{\sum_0^n V_k x_k}{V}$$

$$y_c = \frac{\sum_0^n \gamma V_k y_k}{\gamma V} = \frac{\sum_0^n V_k y_k}{V}$$

$$z_c = \frac{\sum_0^n V_k z_k}{V}$$

где V_k—объем элемента тела; $\boldsymbol{V}$—объем всего тела.

Центр тяжести однородных плоских тел (плоских фигур)

Очень часто приходится определять центр тяжести различных плоских тел и геометрических плоских фигур сложной формы. Для плоских тел можно записать: $V—Ah$, где A—площадь фигуры, h—ее высота.

Тогда после подстановки в записанные выше формулы получим:

$$x_c = \frac{\sum_0^n A_k h x_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k x_k}{A} \qquad y_c = \frac{\sum_0^n A_k h y_k}{Ah} = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{A}$$

$$z_c = \frac{h}{2}$$

где A_k—площадь части сечения; $X_к$, $У_к$—координаты центра тяжести частей сечения.

Выражение $\sum_n^0 A_k x_k$ называют статическим моментом площади S_y, S_x,

Координаты центра тяжести сечения можно выразить через статический момент:

$$\sum_n^0 A_k x_k = S_y; \qquad x_c = \frac{S_y}{A}; \qquad \sum_0^n A_k x_k = S_x; \qquad y_c = \frac{S_x}{A};$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Статический момент относительно центральной оси равен нулю.

Определение координат центра тяжести плоских фигур

Примечание. Центр тяжести симметричной фигуры находится на оси симметрии.

Центр тяжести стержня находится на середине высоты. Положения центров тяжести простых геометрических фигур могут быть рассчитаны по известным формулам (Рис.1.53),а)—круг; б)—квадрат, прямоугольник; в)—треугольник; г)—полукруг).

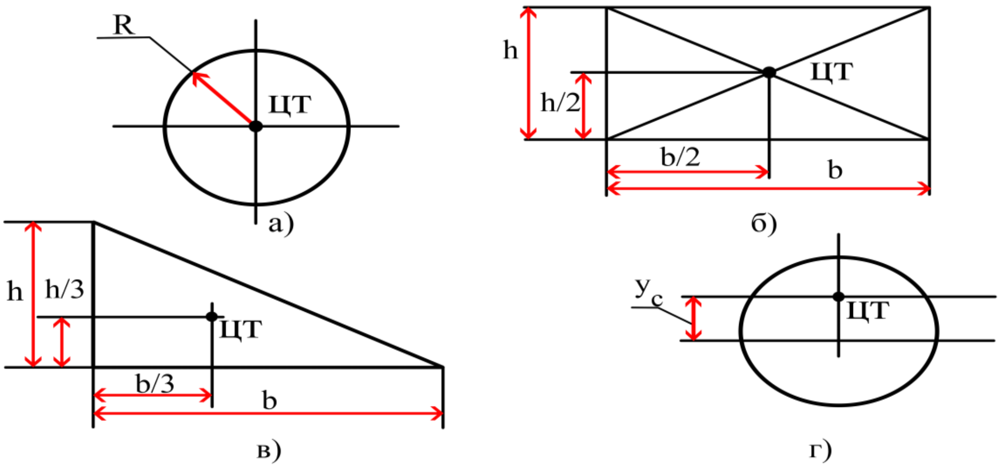


Рис.1.53

При решении задач используются следующие методы:

1. Метод симметрии: центр тяжести симметричных фигур находится на оси симметрии;

2. Метод разделения: сложные сечения разделяем на несколько простых частей, положение центров тяжести которых легко определить;

3. Метод отрицательных площадей: полости (отверстия) рассматриваются как часть сечения с отрицательной площадью.

Пример. Определить положение центра тяжести фигуры, представленной на (Рис.1.54)

Решение:

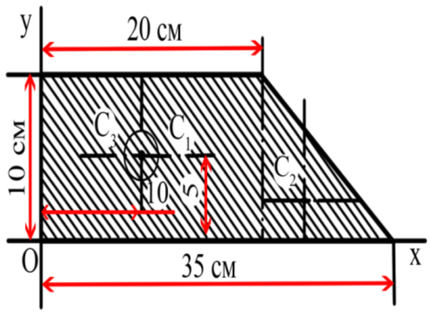


Рис.1.54

Разбиваем фигуру на три части:

1-прямоугольник,

$A_x=10\cdot 20=200\ см^2$;

2-треугольник,

$A_2=1/2\cdot 10\cdot 15=75\ см^2$;

3-круг, $A_3=\pi R^2$;

$A_3=3{,}14\ 3^2=28{,}3\ см^2$.

ЦТ фигуры 1: $x_1 = 10$ см; $y_1 = 5$ см

ЦТ фигуры 2: $x_2 = 20 + \dfrac{1}{3} \cdot 15 = 25$ см; $y_2 = \dfrac{1}{3} \cdot 10 = 3{,}3$ см

ЦТ фигуры ∶ $x_3 = 10$ см; $y_3 = 5$ см

$$x_c = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28.3 \cdot 10}{200 + 75 - 28.3} = 14.5 \text{ см}$$

Аналогично определяется $y_c=4{,}5$ *см.*

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое пространственная система сил?
2. Сколько уравнений равновесия можно составить для пространственной системы сил?
3. Как определяется момент силы относительно оси?
4. Что называется центром тяжести тела?
5. Запишите формулы для расчета главного вектора пространственной системы сходящихся сил?
6. Запишите формулу для расчета главного вектора пространственной системы произвольно расположенных сил?

7. Запишите формулу для расчета главного момента пространственной системы сил?
8. Запишите систему уравнений равновесия пространственной системы сил?
9. Почему силы притяжения к Земле, действующие на точки тела, можно принять за систему параллельных сил?
10. Запишите формулы для определения положения центра тяжести неоднородных и однородных тел, формулы для определения положения центра тяжести плоских сечений?
11. Повторите формулы для определения положения центра тяжести простых геометрических фигур: прямоугольника, треугольника, трапеции и половины круга?

2. Кинематика

2.1 Кинематика точки

Основные понятия кинематики

Иметь представление о пространстве, времени, траектории, пути, скорости и ускорении.
Знать способы задания движения точки (естественный и координатный).
Знать обозначения, единицы измерения, взаимосвязь кинематических параметров движения, формулы для определения скоростей и ускорений (без вывода).

Иметь представление о скоростях средней и истинной, об ускорении при прямолинейном и криволинейном движениях, о различных видах движения точки.

Знать формулы (без вывода) и графики равномерного и равнопеременного движений точки.

Уметь определять параметры движения точки по заданному закону движения, строить и читать кинематические графики.

План:

1. Основные кинематические параметры.
2. Скорость движения.
3. Ускорение движения.
4. Анализ видов и кинетических параметров движений
5. Равномерное движение
6. Равнопеременное движение
7. Неравномерное движение
8. Кинематические графики

9. Примеры решения задач
10. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Траектория, скорость точки, ускорение точки, радиус кривизны, касательное ускорение, нормальное ускорение, полное ускорение.

Кинематика рассматривает движение как перемещение в пространстве. Причины, вызывающие движение, не рассматриваются. Кинематика устанавливает способы задания движения и определяет методы определения кинематических параметров движения.

Основные кинематические параметры

Линию, которую очерчивает материальная точка при движении в пространстве, называют-**траекторией.**

Траектория может быть прямой и кривой, плоской и пространственной линией.

Уравнение траектории при плоском движении: $y=F(x)$.

Пройденный путь

Путь измеряется вдоль траектории в направлении движения. Обозначение—S, единицы измерения—метры.

Уравнение движения точки

Уравнение, определяющее положение движущейся точки в зависимости от времени, называется уравнением движения.

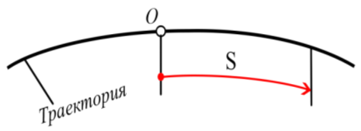


Рис. 2.1

Положение точки в каждый момент времени можно определить по расстоянию, пройденному вдоль траектории от некоторой неподвижной точки, рассматриваемый начало отсчета (Рис.2.1). Такой способ задания движения называется естественным.

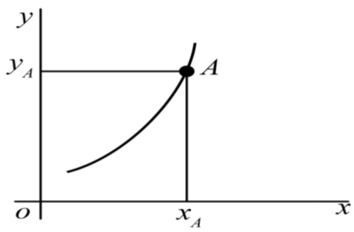


Рис.2.2

Таким образом, уравнение движения можно представить в виде $S=F(t)$. Положение точки можно также определить, если известны ее координаты в зависимости от времени (Рис. 2.2). Тогда в случае движения на плоскости должны быть заданы два уравнения:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \\ z = f3(t) \end{cases}$$

В случае пространственного движения добавляется и третья координата

Такой способ задания движения называет координатным.

Скорость движения

Векторная величина, характеризующая в данный момент быстроту и направление движения по траектории, называется скоростью.

Скорость—вектор, в любой момент направленный по касательной к траектории в сторону направления движения (Рис. 2.3).

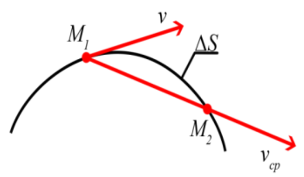


Рис.2.3

Если точка за равные промежутки времени проходит равные расстояния, то движение называют равномерным.

Средняя скорость на пути *AS* определяется как

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

где *S*—пройденный путь за время *Δt*; *At*—промежуток времени.

Если точка за равные промежутки времени проходит неравные пути, то движение называют неравномерным.

В этом случае скорость—величина переменная и зависит от времени $v=F(t)$.

При рассмотрении малых промежутков времени $(\Delta t \to 0)$ средняя скорость становится равной истинной скорости движения в данный момент. Поэтому скорость в данный момент определяют как производную пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt}$$

За единицу скорости принимают *1м/с*. Иногда скорость измеряют в *км/ч*, *1км/ч*$=\frac{1000}{3600} = 0{,}278\text{м}/c$

Ускорение точки

Векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по величине и направлению, называется ускорением точки

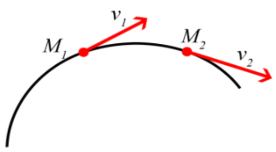


Рис.2.4

.Скорость точки при перемещении из точки M_1 в точку M_2 меняется по величине и направлению. Среднее значение ускорения за этот промежуток времени

$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ (Рис.2.4)

При рассмотрении бесконечно малого промежутка времени среднее ускорение превратится в ускорение в данный момент:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Обычно для удобства рассматривают две взаимно перпендикулярные составляющие ускорения: нормальное и касательное (Рис.2.5)

Нормальное ускорение a_n характеризует изменение скорости по направлению и определяется как

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

где r—радиус кривизны траектории в данный момент времени.

Нормальное ускорение всегда направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение a_t характеризует изменение скорости по величине и всегда направлено по касательной к траектории; при ускорении его направление совпадает с направлением скорости, а при замедлении оно направлено противоположно направлению вектора скорости.

Формула для определения касательного ускорения имеет вид:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = v' = S''$$

Значение полного ускорения определяется как (Рис. 2.6).

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

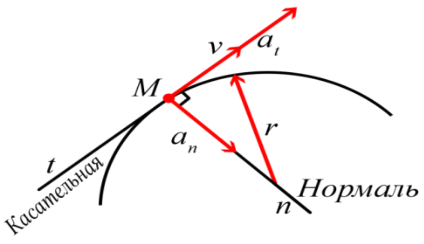


Рис.2.5

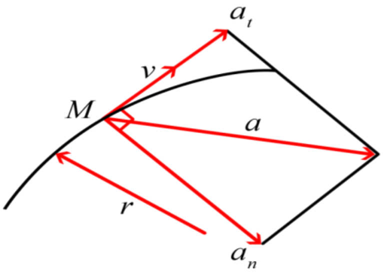


Рис.2.6

Отметьте: Помните, что скорость всегда будет тангенсом к пути, тогда как ускорение будет направлено в пределах искривления пути.

Пример 1.

Коробки в (Рис. 2.7,а) перемещение вдоль конвейера. Если коробка как в (Рис. 2.7,б) запуски после отключения в *A* и увеличивается скорость, таким образом, что a_t=$(0.2t)$ $м/с^2$, где t в секундах, определяет величину своего ускорения, когда это достигает точки B.

Решение:

Ускорение. Чтобы определить компоненты ускорения $a_t=V$ и $a_n=v^2/\rho$, сначала необходимо сформулировать v и $\dot{v}$ так, чтобы они могли быть оценены в B. С тех пор $v_A=0$, когда $t=0$, тогда

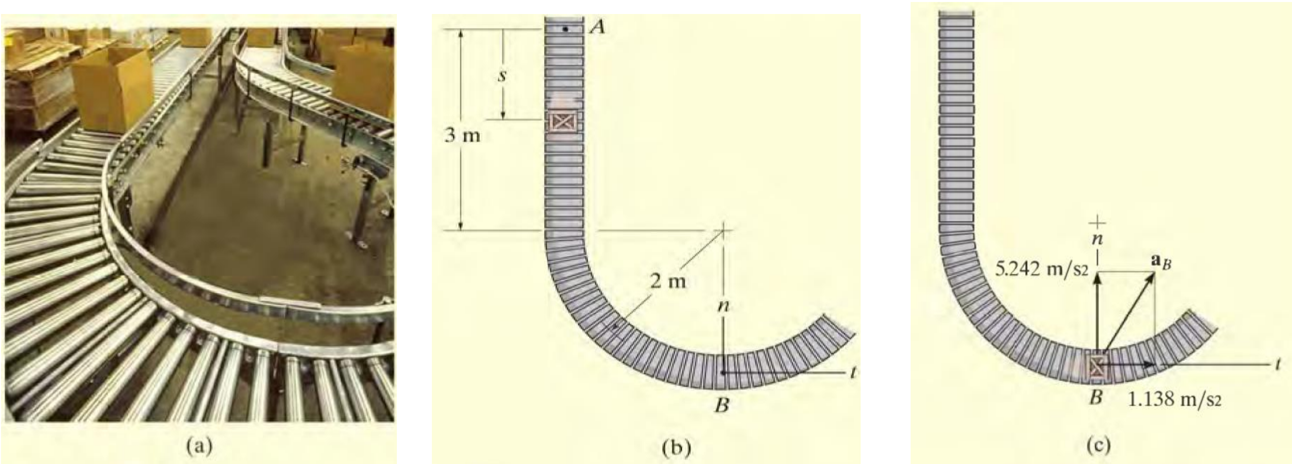


Рис.2.7

$$a_t = \dot{v} = 0.2t$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t\,dt$$

$$v = 0.1t^2$$

Время, необходимое для прохождении коробки, чтобы достичь точки B, можно определить, $s_B=3+2\pi(2)/4=6.142$ $м$, (Рис. 2.7,б) $s_A=0$, когда $t=0$ мы имеем

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142m} ds = \int_0^{tB} 0.1t^2 dt$$

$$6.142\,m = 0.0333\,t_B^3$$

$$t_B = 5.690s$$

Замена в уравнения 1 и 2

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138\ \text{м/с}^2$$

$$\dot{v}_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238\ \text{м/с}$$

$\rho_B = 2$ м, так, чтобы

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238\ \text{м/с})^2}{2\ m} = 5.242\,\text{м/с}^2$$

Величина как, a_B, (Рис 2.7,c),

$a_B = \sqrt{(1.138\,\text{м/с}^2)^2 + (5.242\,\text{м/с}^2)^2} = 5.36\ \text{м/с}^2$ отв

Пример 2. Точка движется по кривой радиуса *r=10 м* согласно уравнению (Рис.2.6)

$$S = 2.5t^2 + 1.2t + 2.5$$

Определить полное ускорение точки в конце второй секунды движения и указать направление касательной и нормальной составляющих ускорения в точке *M*.

Решение:

1. Касательное ускорение определяется как

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Уравнение скорости:

$$v = \frac{dS}{dt}$$

Скорость будет равна

$$v = 2 \cdot 2.5t + 1.2; \qquad v = 5t + 1.2\ (\text{м/с})$$

Касательное ускорение:

$$a_t = v' = 5\ \text{м/с}^2$$

Вывод: касательное ускорение не зависит от времени, оно постоянно

2. Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Скорость на второй секунде будет равна

$$v_2 = 5 \cdot 2 + 1{,}2 = 11{,}2\ \text{м/с}$$

Величина нормального ускорения:

$$a_{n2} = \frac{11{,}2^2}{10} = 12{,}54\ \ \text{м/с}^2$$

3. Полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Полное ускорение в конце второй секунды:

$$a_2 = \sqrt{5^2 + 12{,}54^2} = 13{,}5\ \text{м/с}^2$$

4. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно скорости к центру дуги.

Касательное ускорение направлено по касательной к кривой и совпадает с направлением скорости, т. к. касательное ускорение— положительная величина (скорость растет).

Кинематика точки
Анализ видов и кинетических параметров движений
Равномерное движение

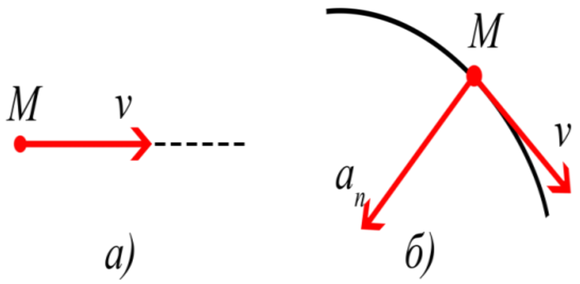


Рис.2.8

Равномерное движение—это движение с постоянной скоростью:

$$v = const$$

Для прямолинейного равномерного движения (Рис.2.8,а)

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a_t = 0$$

$$r = \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} = 0$$

Полное ускорение движения точки равно нулю: a=0.

При криволинейном равномерном движении (Рис.2.8,б)

$$r \neq \infty \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{r} \neq 0$$

Полное ускорение равно нормальному ускорению: $a=a_n$

Уравнение (закон) движения точки при равномерном движении можно получить, проделав ряд несложных операций.

Так как $v=const$, закон равномерного движения в общем виде является уравнением прямой: $S=S_o+vt$, где S_o—путь, пройденный до начала отсчета.

Равнопеременное движение

Равнопеременное движение—это движение с постоянным касательным ускорением: $a_t = const$

Для прямолинейного равнопеременного движения

$$r = \infty \Rightarrow a_n = 0; \qquad a = a_t = const$$

Полное ускорение равно касательному ускорению. Криволинейное равнопеременное движение (Рис. 2.9):

$$a_n \neq 0; \quad a_t = const \neq 0$$

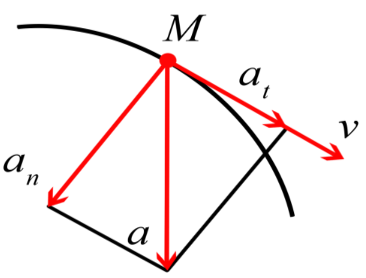


Рис.2.9

Учитывая, что $a_t = \frac{dv}{dt}$; $a_t = const$ и сделав ряд преобразований:

$$dv = a_t dt; \int\limits_v dv = a_t \int\limits_t dt$$

получим значение скорости при равнопеременном движении

$$v = v_0 + a_t t; \quad v = \frac{dS}{dt}$$

После интегрирования будем иметь закон равнопеременного движения в общем виде, представляющий уравнение параболы:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$$

где V_O—начальная скорость движения;

S_o—путь, пройденный до начала отсчета;

a_t—постоянное касательное ускорение.

Неравномерное движение

При неравномерном движении численные значения скорости и ускорения меняются.

Уравнение неравномерного движения в общем виде представляет собой уравнение третьей $S=F(t^3)$ и выше степени.

Кинематические графики

Кинематические графики—это графики изменения пути, скорости и ускорений в зависимости от времени.

Равномерное движение (Рис. 2.10)

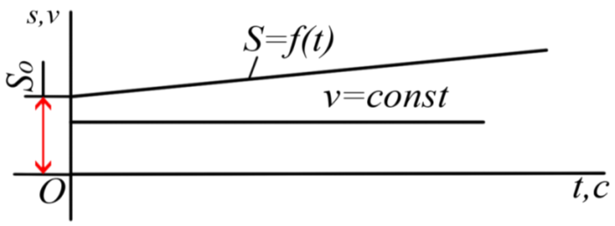


Рис.2.10

Равнопеременное движение (Рис. 2.11)

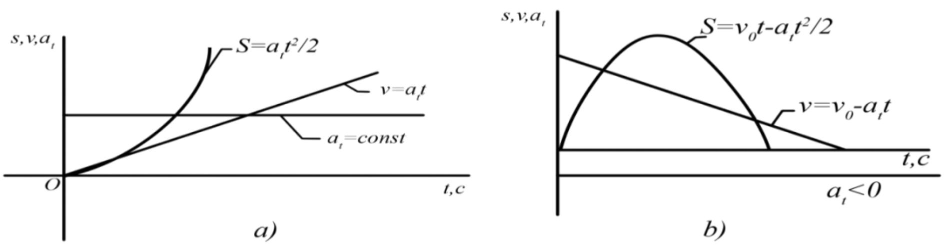
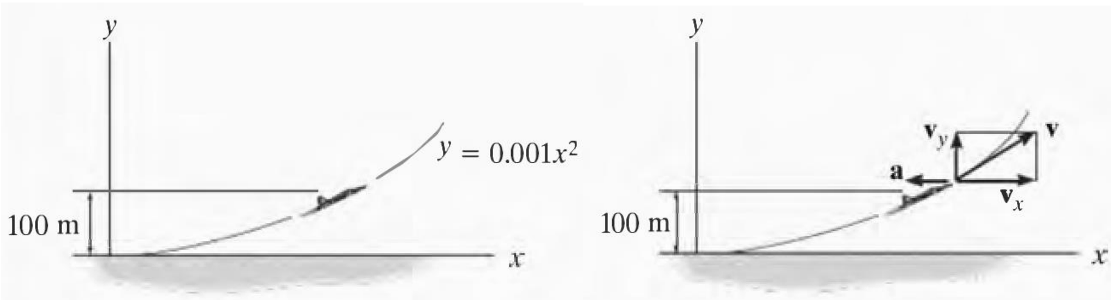


Рис.2.11

Пример 1.



(а) (б)

Рис. 2.12

В течение короткого промежутка времени путь плоскости в (Рис.2.12,а) описан *y=(0.00lx²) м*. Если плоскость повышается с постоянной скоростью *10 м/с*, определите величины скорости и ускорение плоскости, когда это в *y=100 м.*

Решение:

Когда *y=100 м,* тогда *100=0.001x²* или *x=316.2 м*. Кроме того, начиная с v_y*=10 м/с,* тогда

$$y = v_y t; \qquad 100\text{ м} = (10\text{ м/с})t \qquad t = 10\ c$$

Скорость. Используя правило цепи (см. Приложение *C)*, чтобы найти отношения между скоростными компонентами, мы имеем

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(0.001x^2) = (0.002x)\dot{x} = 0.002xv_x$$

где

$$10 \text{ м/с} = 0{,}002(316{,}2 \text{ м})(v_\text{х})$$
$$v_\text{х} = 15{,}81 \text{ м/с}$$

Величина скорости поэтому

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(15.81 \text{ м/с})^2 + (10 \text{ м/с})^2} = 18.7 \text{ м/с}$$

Ускорение. Используя правило цепи, производная времени уравнения (1) дает отношение между компонентами ускорения.

$$a_y = \dot{v}_y = 0.002\dot{x}v_x + 0.002x\dot{v}_x = 0.002(v_x^2 + xa_x)$$

Когда

$$x = 316.2\ m, \qquad v_x = 15.81 \text{м/с}, \qquad \dot{v}_y = a_y = 0,$$

$$0 = 0.002((15.81 \text{м/с})^2 + 316.2 \text{m}(\text{a}_\text{x}))$$
$$a_x = -0.791 \text{ м}/c^2$$

Величина ускорения плоскости поэтому
Ответ:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0.791\,m/s^2)^2 + (0\,m/s^2)^2}$$
$$= 0.791\ m/s^2$$

Пример 2. По заданному закону движения *S=10+20t-5t²* *([S]=м; [t]=с*) определить вид движения, начальную скорость и касательное ускорение точки, время до остановки.

(Рекомендуется обойтись без расчетов, использовать метод сравнения заданного уравнения с уравнениями различных видов движений в общем виде.)

Решение:

1.Вид движения равнопеременное

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$$

2.При сравнении уравнений очевидно, что

-и начальный путь, пройденный до начала отсчета *10 м;*

-начальная скорость *20 м/с;*

-постоянное касательное ускорение $\frac{a_t}{2} = -5$ м$/$с^2; $a_t = -10$м$/$с^2

-ускорение отрицательное, следовательно, движение замедленное (равнозамедленное), ускорение направлено в сторону, противоположную направлению скорости движения.

3. Можно определить время, при котором скорость точки будет равна нулю:

$$v = S' = 20 - 2 \cdot 5t; \quad v = 20 - 10t; \quad v = 0; \quad t = \frac{20}{10} = 2\ с$$

П р и м е ч а н и е . Если при равнопеременном движении скорость растет, значит, ускорение—положительная величина, график пути—вогнутая парабола. При торможении скорость падает, ускорение (замедление)—отрицательная величина, график пути—выпуклая парабола (Рис. 2.11)

Контрольные вопросы и задания

1. Что изучает кинематика?
2. Сформулируйте закон движения и укажите временные зависимости для скорости и ускорения точки при равномерном движении?
3. Сформулируйте закон движения и укажите временные зависимости для скорости и ускорения точки при равнопеременном движении?

4. Запишите в общем виде закон движения в естественной и координатной форме.

5. Что называют траекторией движения?

6. Как определяется скорость движения точки при естественном способе задания движения?

7. Запишите формулы для определения касательного, нормального и полного ускорений.

8. Что характеризует и как направлено нормальное ускорение?

9. Запишите формулу ускорения при прямолинейном движении?

10. Запишите формулу ускорения (полного) при криволинейном движении?

11. По заданному уравнению движения точки $S=22t—4t^2$ постройте графики скорости и касательного ускорения?

2.2 Простейшие движения твердого тела

Иметь представление о поступательном движении, его особенностях и параметрах, о вращательном движении тела и его параметрах.

Знать формулы для определения параметров поступательного и вращательного движений тела.

Уметь определять кинематические параметры тела при поступательном и вращательном движениях, определять параметры любой точки тела.

План:

1. Поступательное движение
2. Вращательное движение
3. Частные случаи вращательного движения
4. Скорость и ускорение точек вращательного тела
5. Примеры решения задач
6. Контрольные вопросы и задания

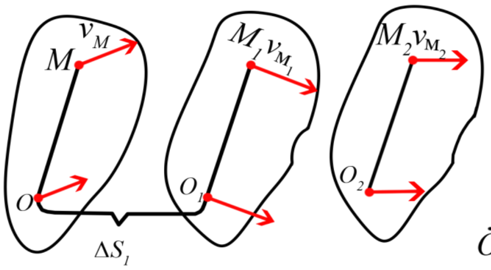
Ключевые слова: Вращательное движение, поступательное движение, угловая скорость, угловое ускорение.

Поступательное движение

Поступательным называют такое движение твердого тела, при котором всякая прямая линия на теле при движении остается параллельной начальному положению (Рис. 2.13, 2.14).

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково: скорости и ускорения в каждый момент одинаковы. Поэтому для описания движения тела можно рассматривать движение одной его точки, обычно центра масс.

Поступательное движение может быть прямолинейным и криволинейным.



$\overline{OM}||\overline{O_1M_1}||\overline{O_2M_2}$

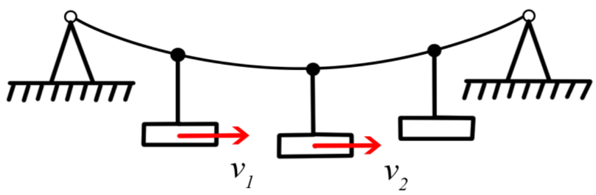


Рис.2.13 Рис.2.14

Вращательное движение

При вращательном движении все точки тела описывают окружности вокруг общей неподвижной оси.

Неподвижная ось, вокруг которой вращаются все точки тела называется осью вращения.

При этом каждая точка движется по окружности, радиус которой равен расстоянию точки до оси вращения. Точки на оси вращения не перемещаются.

Для описания вращательного движения тела вокруг неподвижной оси можно использовать только угловые параметры (Рис. 2.15)

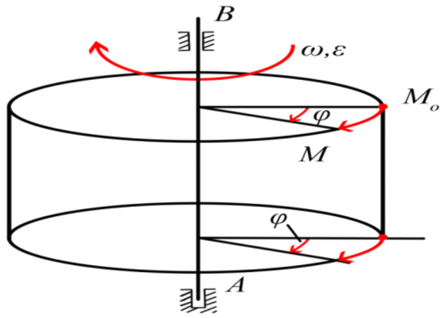


Рис.2.15

φ − угол поворота тела, $[\varphi]$ = рад;

ω –угловая скорость, определяет изменение угла поворота в единицу времени, $[\omega]$ = рад/с

Для определения положения тела в любой момент времени используется уравнение $\varphi = f(t)$.

Следовательно, для определения угловой скорости можно пользоваться выражением

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Иногда для оценки быстроты вращения используют угловую частоту вращения n, которая оценивается в оборотах в минуту.

Угловая скорость и частота вращения физически близкие величины:

Изменение угловой скорости во времени определяется угловым ускорением ε, [ε]=рад/с^2;

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

Частные случаи вращательного движения

Равномерное вращение (угловая скорость постоянна):

$$\omega = \text{const}$$

Уравнение (закон) равномерного вращения в данном случае имеет вид:

$$\varphi = \varphi_{0+}\omega t$$

где φ_o—угол поворота до начала отсчета.

Кинематические графики для этого вида движения изображены на (Рис. 2.16)

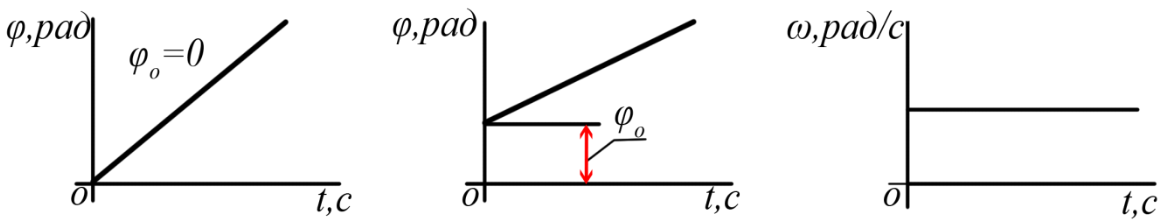


Рис.2.16

Равнопеременное вращение (угловое ускорение постоянно):

$$\varepsilon = const$$

Уравнение (закон) равнопеременного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

где ω_o—начальная угловая скорость.

Угловое ускорение при ускоренном движении—величина положительная, угловая скорость будет все время возрастать.

Угловое ускорение при замедленном движении—величина отрицательная, угловая скорость убывает.

Для данного движения кинематические графики представлены на (Рис.2.17)

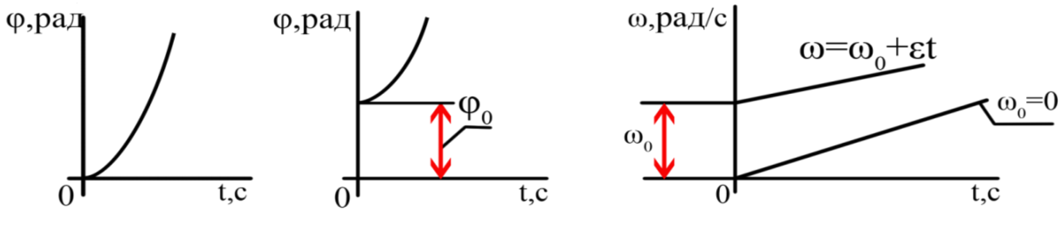
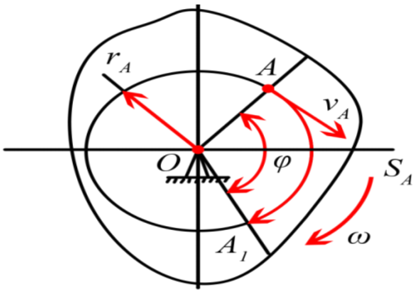


Рис.2.17

Скорости и ускорения точек вращающегося тела

Тело вращается вокруг точки *O*. Определим параметры движения точки *A*, расположенной на расстоянии *r* от оси вращения (Рис. 2.18, 2.19)



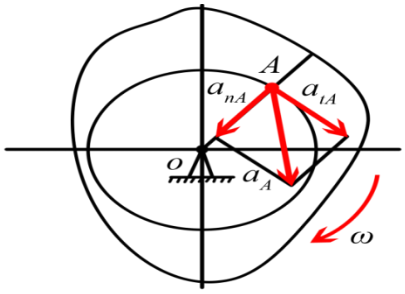


Рис.2.18 Рис.2.19

Путь точки A: $S_A = \varphi r_A$

Линейная скорость точки A: $v_A = \omega r_A$

Ускорения точки A: $a_{tA} = \varepsilon r_A$–касательное; $a_{nA} = \omega^2 r_A$–нормальное, где r_A–радиус окружности, траектории точки A.

Пример. 1: По заданному графику угловой скорости (Рис.2.20) определить вид вращательного движения.

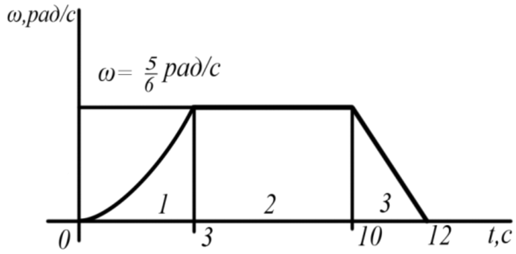


Рис.2.20

Решение:

1. Участок 1–неравномерное ускоренное движение, $\omega = \varphi`$; $\varepsilon = \omega`$
2. Участок 2–скорость постоянна–движение равномерное, $\omega = const$.
3. Участок 3–скорость убывает равномерно– равнозамедленное движение, $\varepsilon = \omega` < 0$

Пример. 2 Задано тело, вращающееся вокруг неподвижной оси по уравнению $\varphi = t^4 + 2t^2 + 5$ Произвести вычисление мгновенной угловой скорости, углового ускорения тела в конце 2 секунды после начала движения, средней угловой скорости и угла поворота за данный промежуток времени.

Решение:

Дано: $\varphi = t^4 + 2t^2 + 5, t = 2$ с

Найти: φ; ω; $< \omega >$; ε.

$\varphi = 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 5 = 29$ рад

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 4t^3 + 4t = 4 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2 = 37 \text{ рад}/c$$

$$< \omega >= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{29}{2} = 14{,}5 \text{ рад}/c$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 12^2 + 4 = 12 \cdot 2^2 + 4 = 52 \text{ рад}/c^2$$

Ответ:

$\varphi = 29$ рад; $\omega = 37$ рад$/c$; $< \omega >= 14{,}5$ рад$/c$; $\varepsilon = 52$ рад$/c^2$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. Что такое вращательное движение тела?

3. Какими кинематическими параметрами характеризуется поступательное движение и почему?
4. Запишите уравнение равномерного поступательного движения твердого тела?
5. Запишите уравнение равнопеременного поступательного движения твердого тела?
6. Запишите уравнения равномерного и равнопеременного вращательного движений твердого тела?

2.3 Плоскопараллельное движение твердого тела

Иметь представление о системах координат, об абсолютном, относительном и переносном движениях.

Знать разложение сложного движения на относительное и переносное, теорему сложения скоростей.

Знать разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное, способы определения мгновенного центра скоростей.

План:

1. Основные определения
2. Плоскопараллельное движение твердого тела
3. Метод разложения сложного движения на поступательное и вращательное
4. Метод определения мгновенного центра скоростей
5. Примеры решения задач
6. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Сложное движение, абсолютное, относительное, переносное, плоскопараллельное движения, поступательное, вращательное движения твердого тела, мгновенный центр скоростей.

Основные определения

Сложным движением считают движение, которое можно разложить на несколько простых. Простыми движениями считают поступательное и вращательное.

Для рассмотрения сложного движения точки выбирают две системы отсчета: подвижную и неподвижную.

Движение точки (тела) относительно неподвижной системы отсчета называют сложным, или абсолютным.

Подвижную систему отсчета обычно связывают с движущимся телом. Движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной называют переносным.

Движение материальной точки (тела) по отношению к подвижной системе называют относительным.

Примером может служить движение человека по эскалатору метро. Движение эскалатора—переносное движение, движение человека вниз или вверх по эскалатору—относительное, а движение по отношению к неподвижным стенам станции—сложное (абсолютное) движение.

При решении задач используют теорему о сложении скоростей:

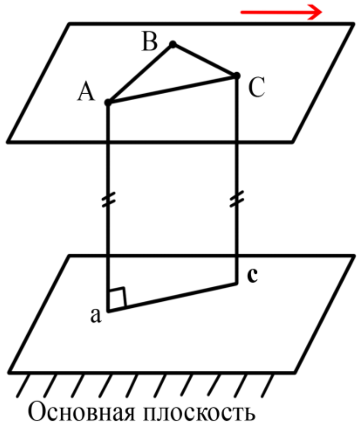
При сложном движении точки абсолютная скорость в каждый момент времени равна геометрической сумме переносной (v_e) и относительной (v_r) скоростей:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + 2v_e v_r \cos\alpha}$$

a—угол между векторами v_e и v_r.

Плоскопараллельное движение твердого тела

Плоскопараллельным, или **плоским**, называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела перемещаются параллельно некоторой неподвижной в рассматриваемой системе отсчета плоскости.



Плоскопараллельное движение можно изучать, рассматривая любое плоское сечение тела, параллельное неподвижной плоскости, называемой основной (Рис.2.21)

Рис.2.21

Все точки тела, расположенные на прямой, перпендикулярной к основной плоскости, движутся одинаково.

Плоскопараллельное движение изучается двумя методами: методом разложения сложного движения на поступательное и вращательное и методом мгновенных центров скоростей.

Метод разложения сложного движения на поступательное и вращательное

Плоскопараллельное движение раскладывают на два движения: поступательное вместе с некоторым полюсом и вращательное относительно этого полюса.

Разложение используют для определения скорости любой точки тела, применяя теорему о сложении скоростей (Рис. 2.22)

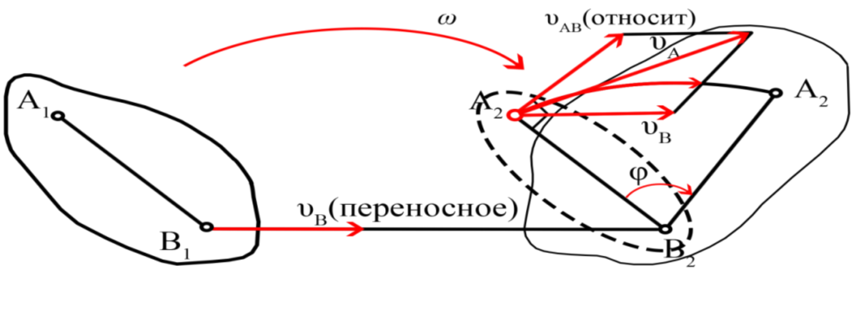
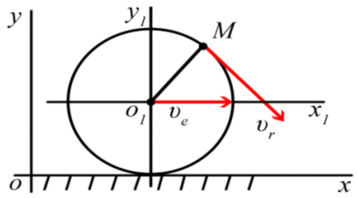


Рис.2.22

Точка *A* движется вместе с точкой *B*, а затем поворачивается вокруг *B* с угловой скоростью и, тогда абсолютная скорость точки *A* будет равна

$$v_A = v_B + v_{AB}; \qquad v_{AB} = \omega r \; (r = AB)$$



Примером плоскопараллельного движения может быть движение колеса на прямолинейном участке дороги (Рис. 2.23)

Скорость точки M

Рис.2.23

$$v_M = v_e + v_r$$

v_e–скорость центра колесо переносная

v_r–скорость вокруг центра относительная

yOx–неподвижная система координат

$y_1O_1x_1$–подвижная система координат, связанная с осью колеса

Метод определения мгновенного центра скоростей Скорость любой точки тела можно определять с помощью мгновенного центра скоростей. При этом сложное движение представляют в виде цепи вращений вокруг разных центров.

Задача сводится к определению положения мгновенного центра вращений (скоростей) (Рис. 2.24)

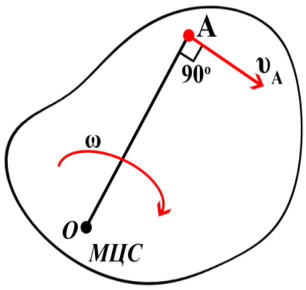


Рис.2.24

Мгновенным центром скоростей (МЦС) является точка на плоскости, абсолютная скорость которой в данный момент равна нулю.

Вокруг этой точки тело совершает поворот со скоростью ω.

Скорость точки A в данный момент равна

$$v_A = \omega OA$$

т. к. V_A—линейная скорость точки A, вращающейся вокруг МЦС.

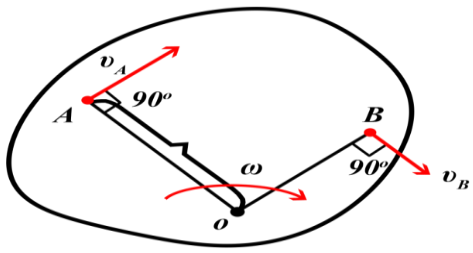
Существуют три способа определения положения мгновенного центра скоростей.

Первый способ. Известна скорость одной точки тела V_A и угловая скорость вращения тела ω (Рис.2.25).

Точку O находим на перпендикуляре к вектору скорости V_A .

$$AO = \frac{v_A}{\omega}$$

Соединяем точку O с точкой B, замеряем расстояние OB. $v_B \perp OB,$
$v_B = \omega OB.$



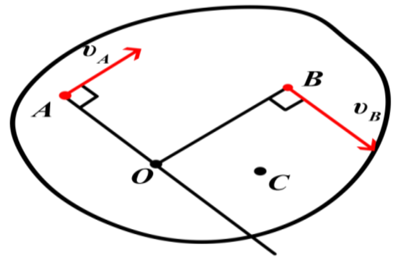


Рис.2.25 Рис.2.26

Второй способ. Известны скорости двух точек тела v_A и v_B, и они не параллельны (Рис. 2.26).

Проводим из точек А и В два перпендикуляра к известным векторам скоростей.

На пересечении перпендикуляров находим МЦС. Далее можно найти скорость любой точки С. $\frac{v_C}{v_B} = \frac{OC}{OB}$

Третий способ. Известны скорости двух точек тела, и они параллельны ($v_A \parallel v_B$) (Рис. 2.27).

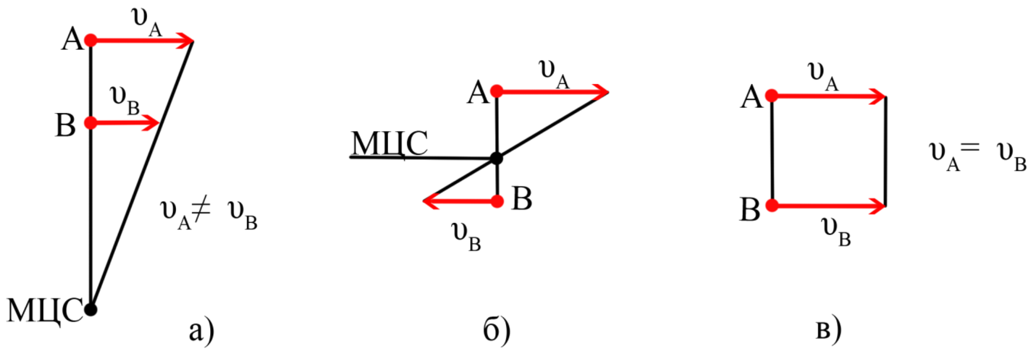


Рис.2.27

Соединяем концы векторов, МЦС находится на пересечении линии, соединяющей концы векторов с линией AB (Рис. 2.27). При поступательном движении тела (Рис. 2.27,в) МЦС отсутствует.

Пример. Рассмотрим механизм, в котором стержень *OA* вращается вокруг точки *O* со скоростью ω. Вдоль стержня перемещается ползун *M* со скоростью V_M (Рис. 2.28). Определить абсолютную скорость точки *M*.

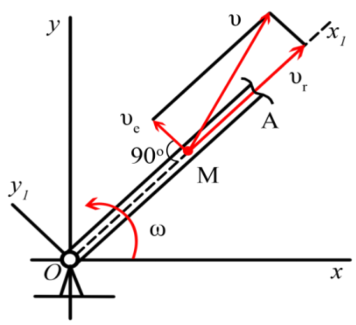


Рис.2.28

Решение:

1. Относительное движение–вдоль стержня; скорость $v_r = v_M$

2. Переносное движение–вращение стержня; скорость

$$v_e = \omega OM$$

3. Скорость абсолютного движения

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое движение твердого тела называется плоскопараллельным ?
2. Что такое мгновенный центр скоростей?
3. Какое движение называют сложным?
4. Какие движения твердого тела называют простыми?
5. Какие системы координат выбирают при определении скоростей твердых тел при сложном движении?
6. Какое движение считают переносным, а какое—относительным?

3. Динамика

3.1 Основные понятия и аксиомы динамики точки. Динамика точки

Иметь представление о массе тела и ускорении свободного падения, о связи между силовыми и кинематическими параметрами движения, о двух основных задачах динамики.

Знать аксиомы динамики и математическое выражение основного закона динамики.

Знать зависимости для определения силы трения.

План:

1. Содержание и задачи динамики
2. Аксиомы динамики
3. Понятие о трения. Виды трения
4. Примеры решения задач
5. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: *Динамика, закон динамики, принцип инерции, аксиомы динамики, динамика точки.*

Содержание и задачи динамики

Динамика—раздел теоретической механики, в котором устанавливается связь между движением тел и действующими на них силами. В динамике решают два типа задач:

определяют параметры движения по заданным силам;
определяют силы, действующие на тело, по заданным кинематическим параметрам движения.

При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, поэтому тело можно принять за материальную точку.

Если размеры тела малы по сравнению с траекторией, его тоже можно рассматривать как материальную точку, при этом точка совпадает с центром тяжести тела.

При вращательном движении тела точки могут двигаться неодинаково, в этом случае некоторые положения динамики можно применять только к отдельным точкам, а материальный объект рассматривать как совокупность материальных точек.

Поэтому динамику делят на динамику точки и динамику материальной системы.

Аксиомы динамики

Законы динамики обобщают результаты многочисленных опытов и наблюдений. Законы динамики, которые принято рассматривать как аксиомы, были сформулированы Ньютоном, но первый и четвертый законы были известны Галилею. Механику, основанную на этих законах, называют классической механикой.

Первая аксиома (принцип инерции)

Всякая изолированная материальная точка находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, приложенные силы не выведут ее из этого состояния.

Это состояние называют состоянием инерции. Вывести точек из этого состояния, т. е. сообщить ей некоторое ускорение, может внешняя сила.

Всякое тело (точка) обладает инертностью. Мерой инертность является масса тела.

Массой называют количество вещества в объеме тела, в классической механике ее считают величиной постоянной. Единица измерения массы—килограмм (кг).

Вторая аксиома (второй закон Ньютона—основной закон динамики)

Зависимость между силой, действующей на материальную точку, и сообщаемым ею ускорением следующая:

$$F = ma$$

где m—масса точки, *кг; а*—ускорение точки, *м/с*^{2}.

Ускорение, сообщенное материальной точке силой, пропорционально величине силы и совпадает с направлением силы.

Основной закон динамики в дифференциальной форме:

$$F = m\frac{d^2S}{dt^2} \text{ т. к. } a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

На все тела на Земле действует сила тяжести, она сообщает телу ускорение свободного падения, направленное к центру Земли:

$$G = mg$$

где $g = 9{,}81$ м$/c^2$, ускорение свободного падения.

Третья аксиома (третий закон Ньютона)

Силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены по одной прямой в разные стороны (Рис. 3.1):

$$F_1 = F_2; \quad F_a = m_1a_1; \quad F_2 = m_2a_2$$

Откуда

$$m_1a_1 = m_2a_2 \text{ или } \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

При взаимодействии ускорения обратно пропорциональны массам.

Четвертая аксиома (закон независимости действия сил) Каждая сила системы сил действует так, как она действовала бы одна.

Ускорение, сообщаемое точке системой сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщенных точке каждой силой в отдельности (Рис. 3.2):

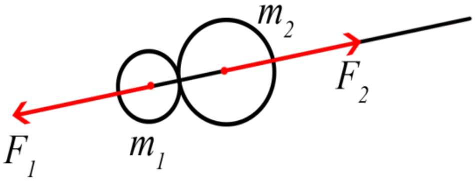


Рис.3.1

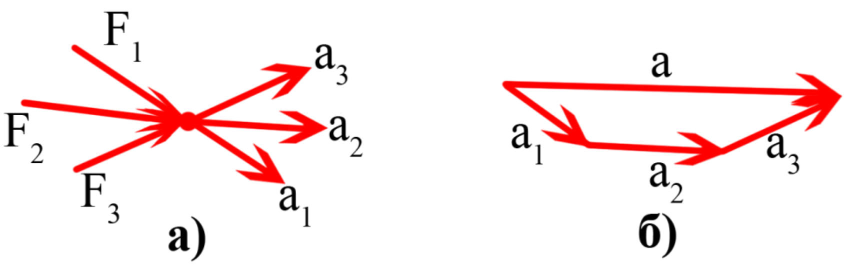


Рис.3.2

$$F_\Sigma = ma \quad a = \sum_0^n a_k$$

Понятие о трении. Виды трения

Трение—сопротивление, возникающее при движении одного шероховатого тела по поверхности другого. При скольжении тел возникает трение скольжения, при качении—трение качения. Природа сопротивлений движению в разных случаях различна.

Трение скольжения

Причина—механическое зацепление выступов. Сила сопротивления движению при скольжении называется силой трения скольжения (Рис. 3.3,а).

Законы трения скольжения:

1. Сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{тр} = F_f = fR$$

где R—сила нормального давления, направлена перпендикулярно опорной поверхности;

f—коэффициент трения скольжения.

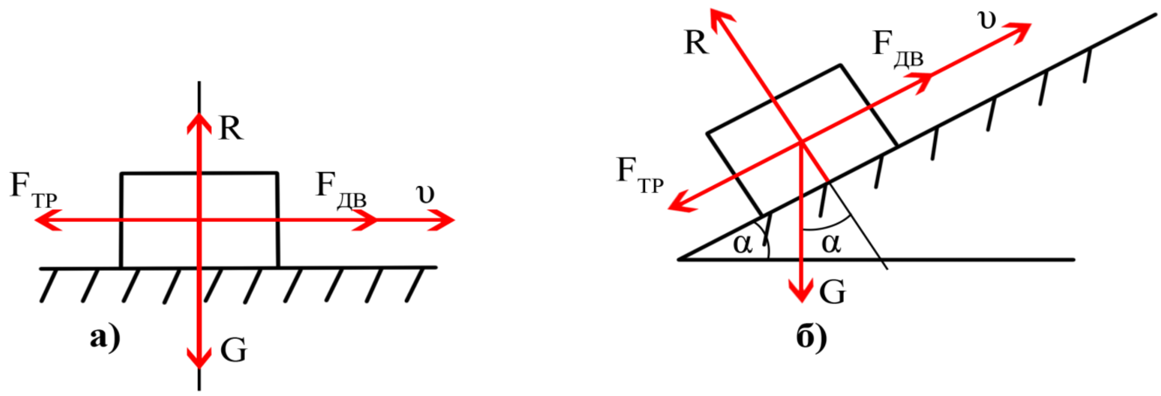


Рис.3.3

В случае движения тела по наклонной плоскости (Рис.3.3,б)

$$R = G\cos\alpha$$

где a—угол наклона плоскости к горизонту.

Сила трения всегда направлена в сторону, обратную направлению движения.

2. Сила трения меняется от нуля до некоторого максимального значения, называемого силой трения покоя (статическое трение):

$$0 < F_f \leq F_{f_0}$$

F_{f_0}—статическая сила трения (сила трения покоя).

3. Сила трения при движении меньше силы трения покоя. Сил трения при движении называется динамической силой трения (F_f)

$$F_f \leq F_{f_0}$$

Поскольку сила нормального давления, зависящая от веса и направления опорной поверхности, не меняется, то различают статический и динамический коэффициенты трения:

$$F_f = fR; \quad F_{f_0} = f_0 R$$

Коэффициент трения скольжения зависит от следующих факторов: от материала: материалы делятся на фрикционные (с большим коэффициентом трения) и антифрикционные (с малым коэффициентом трения), например F=0,1÷0,15 (при скольжении стали но стали всухую), F=0,2÷0,3 (при скольжении стали по текстолиту);

1.от наличия смазки, например F=0,04÷0,05 (при скольжении стали по стали со смазкой);

2.от скорости взаимного перемещения.

Трение качения

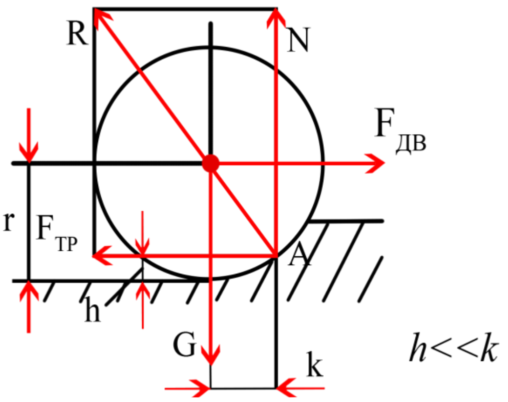


Рис.3.4

Сопротивление при качении связано с взаимной деформацией грунта и колеса и значительно меньше трения скольжения.

Обычно считают грунт мягче колеса, тогда в основном деформируется грунт, и в каждый момент колесо должно перекатываться через выступ грунта. Для равномерного качения колеса необходимо прикладывать силу $F_{дв}$ (Рис.3.4).

Условие качения колеса состоит в том, что движущийся момент должен быть не меньше момента сопротивления:

$$F_{дв} r \geq Nk$$

$$N = G; \; F_{дв} \geq k\frac{G}{r}$$

где k—максимальное значение плеча (половина колеи) принимается за коэффициент трения качения, размерность—сантиметры.

Ориентировочные значения $к$ (определяются экспериментально): сталь по стали—k=0,005 см; резиновая шина по шоссе—k=0,24 см.

Пример 1. Каково минимальное количество энергии, для запуска спутника на круглую орбиту с высотой h?

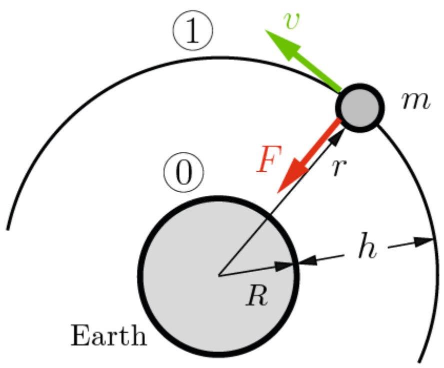


Fig. 3.5

Решение: Закону (1.88) Ньютона, сила $F=mg\ (R^2/r^2)$ действует на спутник (Рис. 3.5). Когда спутник перемещается по орбите, путь составляем $r=R+h$ от центра земли, где скорость v, которая найдена из основного уравнения движения динамики:

$$ma_n = F \quad \rightarrow \quad m\frac{v^2}{r} = mg\frac{R^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = g\frac{R^2}{R+h}$$

Потенциальная энергия спутника найдена по формуле (1.89).

$$V_0 = 0 \quad \text{и} \quad V_1 = mg\frac{R}{R+h}h,$$

Соответственно кинетическая энергия

$$T_0 = 0 \quad \text{и} \quad T_1 = \frac{mv^2}{2} = mg\frac{R^2}{2(R+h)}$$

Таким образом минимальное количество энергии необходимое при запуске,

$$\underline{\Delta \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E_1} - \boldsymbol{E_0} = (\boldsymbol{T_1} + \boldsymbol{V_1}) - (\boldsymbol{T_0} + \boldsymbol{V_0})$$

$$= \boldsymbol{mg\,R}\left(\frac{\boldsymbol{R}}{\boldsymbol{2(R+h)}} + \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{R+h}}\right) = \underline{\frac{\boldsymbol{mgR}}{\boldsymbol{2}}\left(\frac{\boldsymbol{R+2h}}{\boldsymbol{R+h}}\right)}$$

Пример 2.

Тело массой m, находится в невесомости и перемещается со скоростью v под углом a=30° относительно горизонтальной плоскости. Масса m внезапно раскалывается на три равных части $m_1=m_2=m_3=m/3$ (Рис. 3.6). После раскола массы m_1 и m_2 перемещаются под углами β_1=60° и β_2=90°, соответственно. Масса m_3 остается в покое.

Определите скорости v_1 и . v_2

Решение:

Никакие внешние силы не действуют на систему, таким образом согласно (2.14), линейный импульс системы не изменяется (линейный импульс прежде, чем расколоться=линейный импульс после раскола).

Соответственно, принцип сохранения линейного импульса дает

$\rightarrow: \quad mv\cos a = m_1v_1\cos\beta_1$

$\uparrow: \; mv\sin a = m_1v_1\sin\beta_1$

$$- m_2v_2\sin\beta_2$$

Таким образом у каждого есть два уравнения для определения скорости v_1 и v_2. Решение, дает

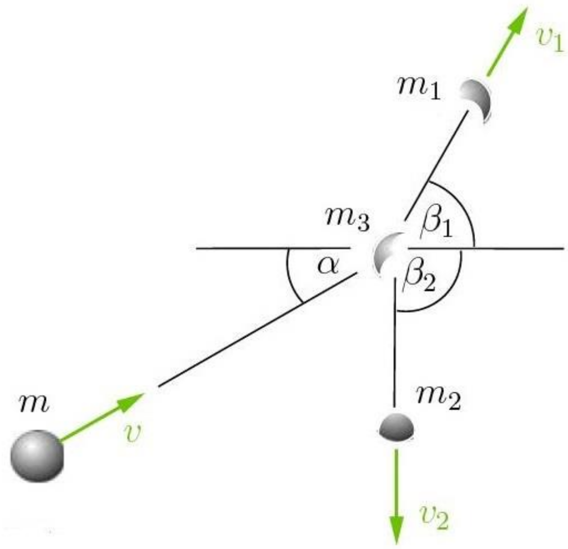


Рис. 3.6

$$\underline{v_1} = v\frac{m\cos a}{m_1\cos\beta_1} = \underline{3\sqrt{3}v}$$

$$\underline{v_2} = \frac{m_1v_1\sin\beta_1 - mv\,sin\,a}{m_2\sin\beta_2} = \underline{3v}$$

Пример 3. Свободная материальная точка, масса которой *5 кг,* движется согласно уравнению $S=0,48t^2+0,2t$. Определить величину движущей силы.

Решение:

1. Ускорение точки;

$a = v' = S''; \qquad v = S' = 0.96t + 0.2; \qquad a = v' = 0.96\text{м/с}^2$

2. Действующая сила согласно основному закону динамики

$$\boldsymbol{F = ma}; \qquad \boldsymbol{F = 5 \cdot 0.96 = 4.8\ H}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что называют массой тела? Назовите единицу измерения массы в системе СИ.

2. Что является мерой инертности тела?
3. Запишите основной закон динамики в векторной и дифференциальной форме.
4. Что такое трение?
5. Какие существуют разновидности трения?

.

3.2 Работа и мощность

Иметь представление о работе силы при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия.

Иметь представление о мощности при прямолинейном и криволинейном перемещениях, о мощности полезной и затраченной, о коэффициенте полезного действия

Знать зависимости для определения силы трения, формулы для расчета работы и мощности при поступательном и вращательном движениях.

Знать зависимости для определения мощности при поступательном и вращательном движениях, КПД.

Уметь рассчитывать работу и мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.

Уметь рассчитать мощность с учетом потерь на трение и сил инерции.

План:

1. Работа.Работа постоянной силы на прямолинейном пути
2. Работа постоянной силы на криволинейном пути
3. Работа силы тяжести
4. Работа равнодействующей силы
5. Мощность
6. Коэффициент полезного действия
7. Примеры решений задач
8. Контрольные вопросы и задания.

Ключевые слова: Работа, сила тяжести, коэффициент полезного действия, мощность, сила сопротивления.

Работа

Для характеристики действия силы на некотором перемещении точки ее приложения вводят понятие «работа силы».

Работа служит мерой действия силы, работа—скалярная величина.

Работа постоянной силы на прямолинейном пути

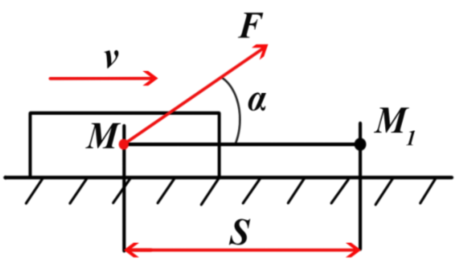


Рис.3.7

Работа силы в общем случае численно равна произведению модуля силы на длину пройденного пути и на косинус угла между направлением силы и направлением перемещения (Рис. 3.7):

$$W = FS\cos\alpha$$

Единицы измерения работы:

1 Дж (джоуль)=1Нм; 1 кДж (килоджоуль)=10^3 Дж.

Рассмотрим частные случаи.

1.Силы, совпадающие с направлением перемещения, называются **движущими силами.** Направление вектора силы совпадает с направлением перемещения (Рис. 3.8).

В этом случае $\alpha=0°$ $(\cos\alpha=1)$. Тогда $W=FS>0$.

2.Силы, перпендикулярные направлению перемещения, работы не производят (Рис.3.9).

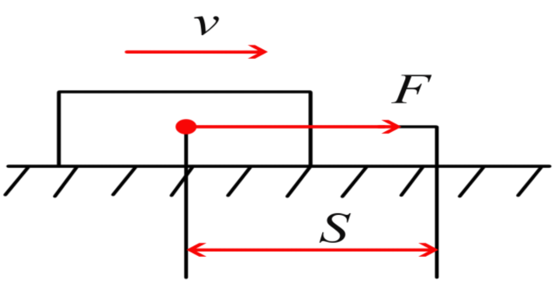


Рис.3.8

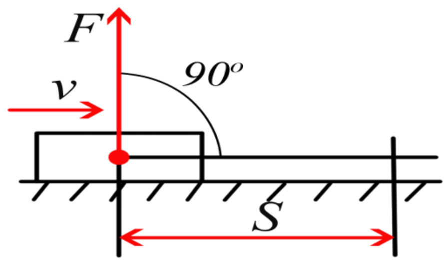


Рис.3.9

Сила F перпендикулярна направлению перемещения, α=90° ($\cos\alpha$=0); W=0.

3. Силы, направленные в обратную от направления перемещения сторону, называются силами сопротивления (Рис. 3.10).

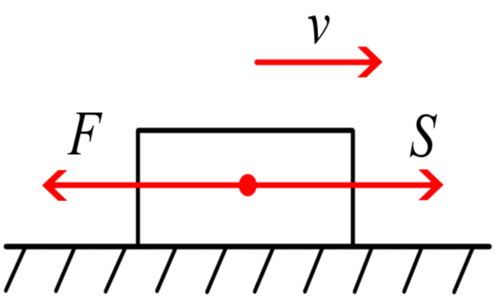


Рис.3.10

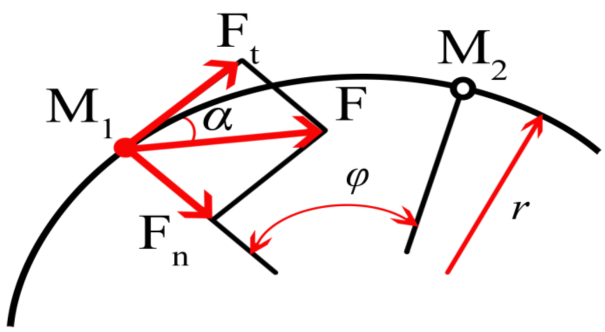
Сила F направлена в обратную от перемещения S сторону.

В этом случае $\alpha=180°$ $(\cos\alpha=-1)$, следовательно, $W=-FS<0$.

Движущие силы увеличивают модуль скорости, силы сопротивления уменьшают скорость.

Таким образом, работа может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления силы и скорости.

Работа постоянной силы на криволинейном пути Пусть точка M движется по дуге окружности и сила F составляет некоторый угол α с касательной к окружности (Рис. 3.11).



Вектор силы можно разложить на две составляющие:

$$F = F_t + F_n$$

Используя принцип независимости действия сил, определим работу каждой из составляющих силы отдельно:

Рис.3.11

где: $\Delta\check{S} = M_1M_2$ —пройденный путь

$$W(F_t) = F_t\Delta\check{S}; \qquad W(F_n) = F_n\Delta\check{S}; \qquad \Delta\check{S} = \varphi r$$

Нормальная составляющая силы F_n всегда направлена перпендикулярно перемещению и, следовательно, работы не производит $W(F_n)=0$

При перемещении по дуге обе составляющие силы разворачиваются вместе с точкой M. Таким образом, касательная составляющая силы всегда совпадает по направлению с перемещением.

Будем иметь: $W(F_t)=F_t<\varphi r$.

Касательную силу F_t обычно называют окружной силой.

Работа при криволинейном пути—это работа окружной силы:

$$W(F) = W(F_t)$$

Произведение окружной силы на радиус называют вращающим моментом:

$$M_{\text{вр}} = F_t r$$

Работа силы, приложенной к вращающемуся телу, равна произведению вращающего момента на угол поворота:

$$W(F) = M_{\text{вр}}\varphi$$

Работа силы тяжести

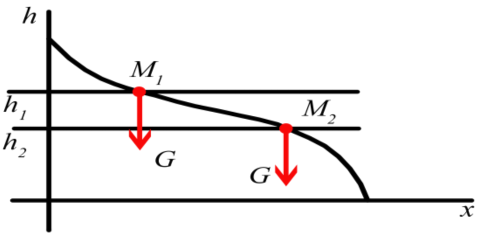


Рис.3.12

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты и равна произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки (Рис.3.12).

$$W(G) = G(h_1 - h_2) = G\Delta h$$

где *Δh*—изменение высоты.

При опускании работа положительна, при подъеме отрицательна. Работа равнодействующей силы

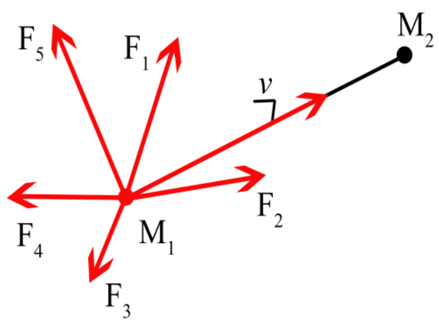
Под действием системы сил точка массой перемещается из положения M_1 в положение M_2 (Рис.3.13).

В случае движения под действием системы сил пользуются теоремой о работе равнодействующей.

Работа равнодействующей на некотором перемещении равна алгебраической сумме работ системы сил на том же перемещении

$$\boldsymbol{F_\Sigma} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2} + \boldsymbol{F_3} + \cdots + \boldsymbol{F_n}$$

Работа равнодействующей силы



$$W(F_\Sigma) = \sum_0^n W(F_k)$$

Рис.3.13

Пример. Определите работу силы тяжести при перемещении груза из точки *A* в точку *C* по наклонной плоскости (Рис.3.14). Сила тяжести тела *1500 Н. AB=6 м, BC=4 м.*

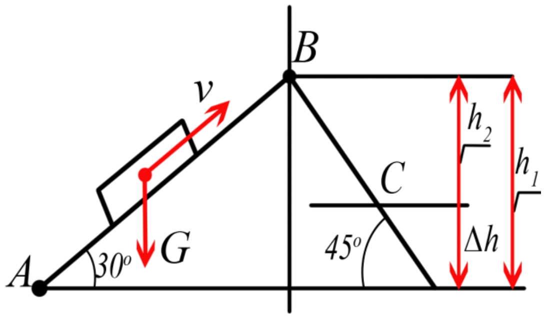


Рис.3.14

Решение:

Работа силы тяжести зависит только от изменения высоты груза. Изменение высоты при перемещении из точки A в C

$$\Delta h = h_1 - h_2;$$

$$\Delta h = AB\, sin\, 30° - BC\, sin\, 45°;$$

$$\Delta h = 6 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 0{,}7 = 0{,}2 \text{ м}$$

Работа силы тяжести: $W(G) = G\Delta h = 1500 \cdot 0{,}2 = 300$ Дж

Коэффициент полезного действия

Для характеристики работоспособности и быстроты совершения работы введено понятие мощности.

Мощность—работа, выполненная в единицу времени:

$$P = \frac{W}{t}$$

Единицы измерения мощности: ватты, киловатты,

$$1\frac{\text{Нм}}{\text{с}} = 1 \text{ Вт}; \;\; 10^3\text{Вт} = 1 \text{ кВт}$$

Мощность при поступательном движении (Рис.3.15)

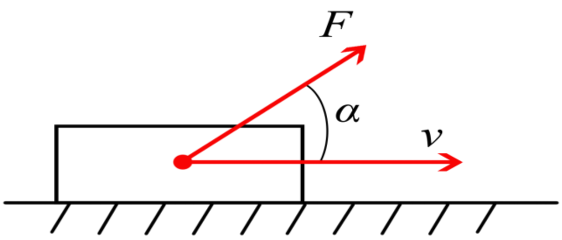


Рис.3.15

$$P = \frac{FS\, cos\, \alpha}{t}$$

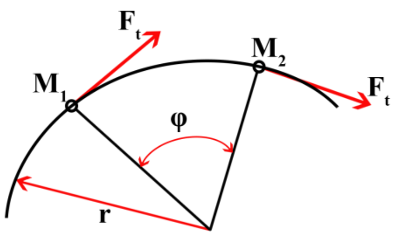
Учитывая, что $\frac{S}{t} = v_{\text{ср}}$, получим

$$P = Fv_{cp} \cos\alpha,$$

где F—модуль силы, действующей на тело; v_{cp}—средняя скорость движения тела.

Средняя мощность при поступательном движении равна произведению модуля силы на среднюю скорость перемещения и на косинус угла между направлениями силы и скорости.

Мощность при вращении (Рис.3.16)



Тело движется по дуге радиус r из точки M_1в точку M_2

$$M_1M_2 = \varphi r$$

Работа силы: $W = M_{\text{вр}}\varphi$

Рис.3.16

$M_{\text{вр}} = F_t r$ где $M_{\text{вр}}$ – вращающи момент

$$P = \frac{M_{\text{вр}}\varphi}{t}$$

Учитывая, что $\frac{\varphi}{t} = \omega_{cp}$, получим $\text{P} = \text{M}_{\text{вр}}\omega_{\text{ср}}$, где ω_{cp}-средняя угловая скорость.

Мощность силы при вращении равна произведению вращающего момента на среднюю угловую скорость.

Если при выполнении работы усилие машины и скорость движения меняются, можно определить мощность в любой момент времени, зная значения усилия и скорости в данный момент.

Коэффициент полезного действия

Каждая машина и механизм, совершая работу, тратит часть энергии на преодоление вредных сопротивлений.

Таким образом, машина (механизм) кроме полезной работы совершает еще и дополнительную работу.

Отношение полезной работы к полной работе или полезной мощности ко всей затраченной мощности называется коэффициентом полезного действия (КПД):

$$\eta = \text{КПД} = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}}$$

Полезная работа (мощность) расходуется на движение с заданной скоростью и определяется по формулам:

$$W = FS\cos a\,, \qquad P = Fv\cos a;$$
$$W = M_{\text{вр}}\varphi, \qquad P = M_{\text{вр}}\omega$$

Затраченная мощность больше полезной на величину мощности, идущей на преодоление трения в звеньях машины, на утечки и тому подобные потери.

Чем выше КПД, тем совершеннее машина.

Пример. Определить потребную мощность мотора лебедки для подъема груза весом *3 кН* на высоту *10 м* за *2,5 с* (Рис.3.17). КПД механизма лебедки *0,75*.

Решение:

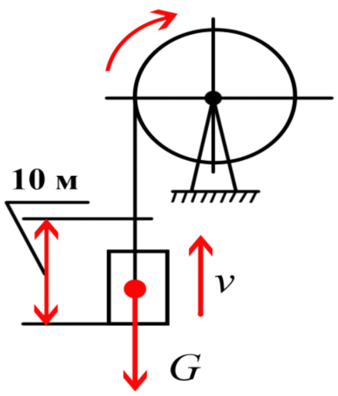


Рис.3.17

1. Мощность мотора используется на подъем груза с заданной скоростью и преодоление вредных сопротивлений механизма лебедки.

Полезная мощность определяется по формуле $P=Fv\cos a$. В данном случае *a=0;* груз движется поступательно.

2 Скорость подъема груза

$$v = \frac{S}{t};\ \ v = \frac{10}{2{,}5} = 4\,\text{м/с}$$

3. Необходимое усилие равно весу груза (равномерный подъем).

4. Полезная мощность $P = 3000 \cdot 4 = 12000$ Вт

5. Полная мощность, затрачиваемая мотором,

$$P_{\text{мотора}} = \frac{P}{\eta};\ \ P_{\text{мотора}} = \frac{12}{0{,}75} = 16\ \text{кВт}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое работа и мощность?
2. Какие силы называют движущими?
3. Какие силы называют силами сопротивления?
4. Какую силу называют окружной? Что такое вращающий момент?
5.Запишите формулы для определения работы при поступательном и вращательном движениях?
6. Вагон массой 1000 кг перемещают по горизонтальному пути на 5 м, коэффициент трения 0,15. Определите работу силы тяжести?

7. Запишите формулы для расчета мощности при поступательном и вращательном движениях?
8. Определите мощность, необходимую для подъема груза весом 0,5 кН на высоту 10 м за 1 мин?
9. Определите общий КПД механизма, если при мощности двигателя 12,5 кВт и общей силе сопротивления движению 2 кН скорость движения 5 м/с?

3.3 Динамика системы твердого тела

Иметь представление о понятиях «импульс силы», «количество движения», «кинетическая энергия», о системе материальных точек, о внутренних и внешних силах системы.

Знать основные теоремы динамики, основные уравнения динамики при поступательном и вращательном движениях твердого тела, формулы для расчета моментов инерции некоторых однородных твердых тел.

Уметь определять параметры движения с помощью теорем динамики.

План:

1. Теорема об изменении количества движения
2. Теорема об изменении кинетической энергии
3. Основы динамики системы материальных точек
4. Примеры решений задач
5. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Импульс сила, количество движение, энергия, потенциальная энергия, кинетическая энергия, силы внешние и внутренние, момент инерции

Теорема об изменении количества движения

Количеством движения материальной точки называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость mv.

Вектор количества движения совпадает по направлению с вектором скорости. Единица измерения *[mv]=кг м/с.*

Произведение постоянного вектора силы на некоторый промежуток времени, в течение которого действует эта сила, называется импульсом силы *Ft.*

Вектор импульса силы по направлению совпадает с вектором силы

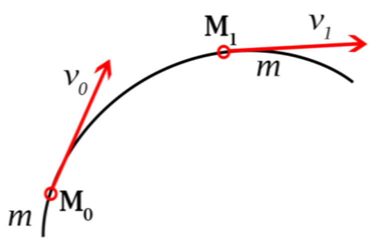


Рис.3.18

$$[\boldsymbol{Ft}] = \text{Н} \cdot \boldsymbol{c} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}$$

Использовав основное уравнение динамики, после преобразования можно получить соотношение между количеством движения и импульсом силы (Рис.3.18).

$$F = ma; \quad a = \frac{dv}{dt} = v'$$

$$F = m\frac{dv}{dt}. \quad Fdt = mdv$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int_0^t \mathrm{Fdt} = \int_{\mathrm{v}_0}^{\mathrm{v}} \mathrm{m\,dv}; \qquad \mathrm{Ft} = \mathrm{m}(\mathrm{v} - \mathrm{v}_0)$$

Полученное соотношение выражает теорему об изменении количества движения точки:

Изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующему на точку в течение того же промежутка времени.

Теорема об изменении кинетической энергии

Энергией называется способность тела совершать механическую работу.

Существуют две формы механической энергии: потенциальная? энергия, или энергия положения, и кинетическая энергия, или энергия движения.

Потенциальная энергия *(П)* определяет способность тела совершать работу при опускании с некоторой высоты до уровня моря, Потенциальная энергия численно равна работе силы тяжести.

П=Gh, где *h*—высота точки над уровнем моря.

Кинетическая энергия *(К)* определяется способностью движущегося тела совершать работу. Для материальной точки кинетическая энергия рассчитывается по формуле

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

Кинетическая энергия—величина скалярная, положительная.

Единицы измерения:

$$[\Pi] = [Gh] = \text{Н} \cdot \text{м}; \quad [K] = \left[\frac{mv^2}{2}\right] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Н} \cdot \text{м}.$$

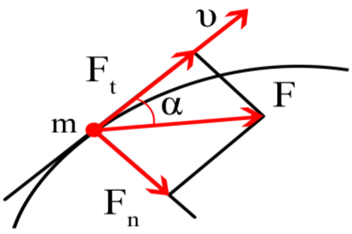


Рис. 3.19

Энергия имеет размерность работы.

Запишем для материальной точки (Рис.3.19) основное уравнение движения

$$F = ma$$

Спроектируем обе части векторного равенства на направление скорости:

$$F\cos a = ma\cos a$$

$$\text{Известно, что } a\cos a = a_t = \frac{dv}{dt}.$$

$$\text{Откуда } F\cos a = m\frac{dv}{dt}$$

Умножив обе части полученного выражения на некоторое перемещение dS, получим:

$$F\cos a\, dS = m\frac{dv}{dt}dS; \quad m\frac{dv}{dt}dS = mv\,dv$$

Интегрируем обе части равенства

$$\int_0^t F\cos a\, dS = m\int_{v_0}^{v} v\,dv$$

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Полученное равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии точки:

Изменение кинетической энергии на некотором пути равно работе всех действующих па точку сил на том же пути.

Основы динамики системы материальных точек

Совокупность материальных точек, связанных между собой силами взаимодействия, называется механической системой.

Любое материальное тело в механике рассматривается как механическая система, образуемая совокупностью материальных точек.

Из определения механической системы следует, что движение каждой из точек, входящих в систему, зависит от движения остальных точек.

Силы, действующие на точки системы, делятся на внешние и внутренние. Силы взаимодействия между точками этой системы называют внутренними. К внешним силам относятся силы, действующие со стороны точек, не входящих в эту систему.

Примерами внешних сил являются сила тяжести, сила давления, сила трения и др.

К внутренним силам относятся силы упругости.

Движение механической системы зависит не только от внешних сил, но и от суммарной массы системы

$$m = \sum_{0}^{n} \Delta m_k, \quad \text{где} \quad \Delta m_k -$$

масса отдельных точек механической системы.

Движение системы зависит и от положения центра масс ей системы— условной точки, в которой сосредоточена вся масса теля Обычно считают, что в центре масс приложены все внешние силы.

Движение центра масс определяет движение всей системы только при поступательном движении, при котором все точки тела движутся одинаково.

Основное уравнение динамики при поступательном движении тела

Для определения движения тела (системы материальных точек можно использовать второй закон динамики

$$F_{\Sigma} = ma_c,$$

где m—суммарная масса тела; a_c—ускорение центра масс тела.

В поле земного притяжения центр масс совпадает с центров тяжести.

Основное уравнение динамики вращающегося тела

Пусть твердое тело под действием внешних сил вращается вокруг оси Oz с угловой скоростью ω (Рис. 3.20).

Рассматривая твердое тело как механическую систему, разобьем ее на множество материальных точек с массами Δm_k. Каждая точка движется по окружности радиуса r_k с касательным ускорением $a_k^t = \varepsilon r_k$ и нормальным ускорением $a_k^n = \omega^2 r_k$ где $\boldsymbol{\varepsilon}$—угловое ускорение.

Используем для каждой точки принцип Даламбера и приложим силы инерции:

-касательную $\Delta F_{\text{ин}_k}^t = -\Delta m_k a_k^t$;

-нормальную $\Delta F_{\text{ин}_k}^n = -\Delta m_k a_k^n$;

Система сил, действующих на точку, по принципу Даламбера, находится в равновесии.

Поэтому алгебраическая сумма моментов относительно оси вращения должна быть равна нулю

$$M_z - \sum_0^n F^t_{ин_k} r_k = 0, \quad \text{где } M_z\text{-момент внешних сил.}$$

Моменты нормальных сил инерции $F^n_{ин_k}$ равны нулю, т. к. силы пересекают ось z. Силы, направленные по касательной к окружности, равны

$$\Delta F^t_{ин_к} = \Delta m_k a^t_k = \Delta m_k \varepsilon r_k$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$—общая величина, угловое ускорение тела.

Подставив значение силы в формулу для определения моментов, получим

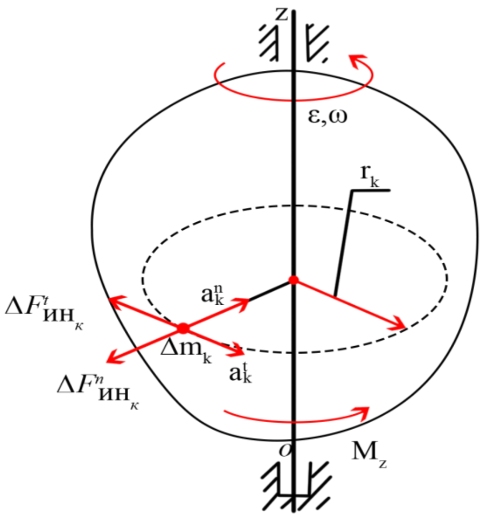


Рис.3.20

$$M_z = \varepsilon \sum_0^n \Delta m_k r_k^2$$

Величина

$$\sum_0^n \Delta m_k r_k^2$$

называется моментом инерции тела относительно оси вращения и обозначается J_z.

$$J_z = \sum_0^n \Delta m_k r_k^2$$

В результате получим выражение основного уравнения динамики вращающего тела:

$$M_z = J_z \varepsilon,$$

где M_z—сумма моментов внешних сил относительно оси; ε—угловое ускорение тела.

Момент инерции тела в этом выражении определяет меру инертности тела при вращении.

По выражению для момента инерции можно определить, что единица измерения этой величины в системе СИ $J_z=[mr^2]=кг\ м^2$.

Видно, что значение момента инерции зависит от распределения массы относительно оси вращения: при одинаковой массе момент инерции больше, если основная часть массы расположена дальше от оси вращения. Для увеличения момента инерции используют колеса со спицами и отверстиями.

Моменты инерции некоторых тел

Момент инерции сплошного цилиндра (Рис.3.21)

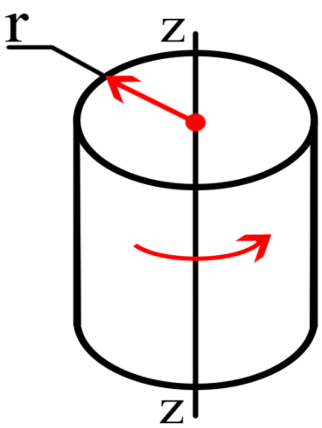


Рис.3.21

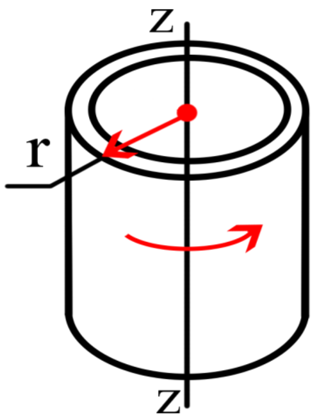


Рис.3.22

$$J_z = \frac{mr^2}{2}$$

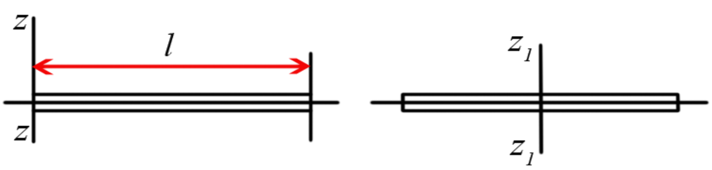
Момент инерции полого тонкостенного цилиндра (Рис.3.22)

$$J_z = mr^2$$

Момент инерции прямого тонкого стержня любого поперечного сечения

$J_z = \frac{ml^2}{3}$ (относительно zz, Рис.3.23,а);

$J_{z_1} = \frac{ml^2}{12}$(относительно z_1 z_1, Рис.3.23,б)



а) б)

Рис.3.23

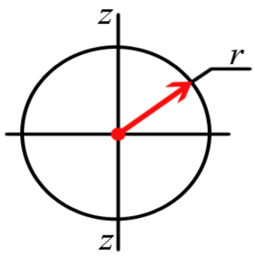


Рис.3.24

Момент инерции шара (Рис. 3.24)

$$J_z = \frac{2}{5}mr^2$$

Пример. Автомобиль двигался со скоростью *54 км/ч.* В результате резкого торможения автомобиль остановился. Определите время торможения, если коэффициент трения между поверхностью дороги и колесами автомобиля *0,36*.

Решение:

Принимаем автомобиль за материальную точку (Рис.3.25).

1. Считаем, что торможение произошло только за счет трения. Используем теорему об изменении количества движения. Начальная скорость

$$v_0 = \frac{54 \cdot 1000}{3600} = 15 \text{ м/с}$$

По теореме изменения количества движения

$$mv - mv_0 = F_\text{т} t$$

Конечная скорость $v=0$ (остановка).

2. Тормозная сила

$$F_\text{Т} = -fR$$

$$R = G = mg,$$

здесь R—сила прижатия; f—коэффициент трения; G—сила тяжести; m—масса автомобиля; g—ускорение свободного падения: g=9,81 м/с^2.

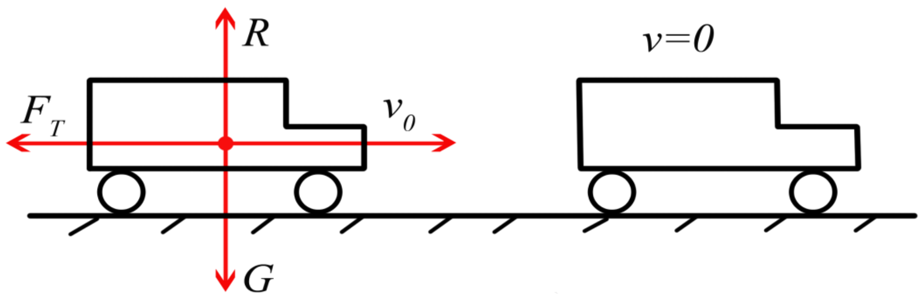


Рис.3.25

2. После подстановок получаем формулу для определения времени торможения.

$$mv - mv_0 = -fmgt;$$

$$v_0 = fgt; \quad t = \frac{v_0}{fg};$$

$$t = \frac{15}{0{,}36 \cdot 9{,}81} \approx 4{,}25 \text{ с}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое кинетическая и потенциальная энергия?
2. В чем измеряется кинетическая энергия?
3. Что называется количеством движения механической системы?
4. Запишите математическое выражение теоремы об изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной форме?
5. Что называется центром масс системы материальных точек?
6. В чем измеряется момент инерция тела?
7. Тело массой 10 кг поднято на высоту 6 м. Определите потенциальную энергию тела и работу, которую совершит тело при падении с этой высоты?
8. Материальная точка массой 16 кг, движущаяся со скоростью 10 м/с, остановилась через 40 с. Определите величину тормозной силы?
9. Тело массой 9,2 кг двигалось из состояния покоя 3 с с ускорением 4 м/с^2 под действием силы F. Определите запас кинетической энергии, накопленный телом?

Тесты для самопроверки

1. «Статика» представляет собой

A) действие системы сил на твердое тело;
B) равновесие и условие равновесия твердых тел;
C) противодействие двух тел;
D) движение материальных тел.

2. Какое тело называется абсолютно твердым?

A) камень;
B) пространственное тело;
C) недеформируемое тело;
D) деформируемое тело.

3. Сила величина …

A) скалярная;
B) векторная;
C) без модуля;
D) без направления.

4. Что называются связями?

A) всё то, что ограничивает движение тела в пространстве (плоскости);
B) все возможные препятствия;
C) если на тело не действует никакие силы;
D) действия других тел.

5.Чем характеризуется сила?

A) весом;
B) действием других тел;
C) модулем, точкой приложения, направлением;
D) направлением.

6.Что называется нулевой системой сил?

A) когда две силы направлены в одну сторону;
B) когда две силы направлены в разные стороны;
C) система из двух сил, равные по модулю и направлены вдоль одной прямой в разные стороны;
D) система из двух сил не равные по модулю.

7.Что называется линией действия силы

A) прямая линия;
B) прямая линия, вдоль которой направлена сила;
C) кривая линия;
D) окружность.

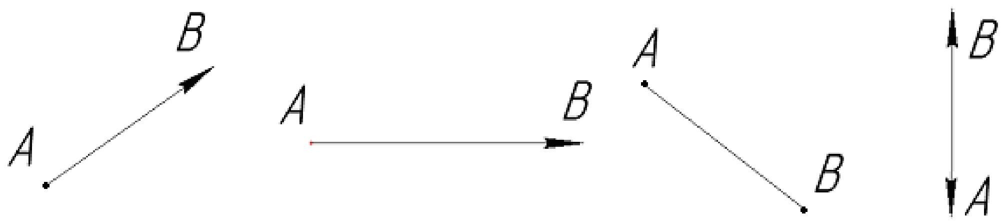
8. Перечислите основные виды опор

A) шарнирные, стержневые, тросовые, сферические;
B) точечные;
C) круговые ;
D) цилиндрические.

9. Назовите единицу измерения силы?

A) Паскаль. B) Ньютон.
C) Герц. D) Джоуль.

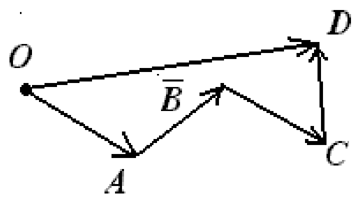
10. Укажите, какой вектор содержит все элементы, характеризующие силу, изображенный на Рисунке



A B C D

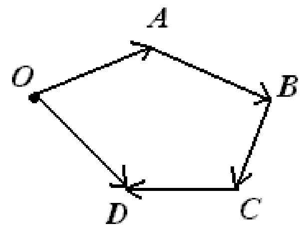
10.Сходящейся системой сил называется совокупность сил:
A. Линии действия которых пересекаются в одной точке;
B. Лежащих в одной плоскости;
C. Произвольно расположенных в пространстве;
D. Параллельных между собой.

12. В многоугольнике сил, какой вектор изображает равнодействующую силу



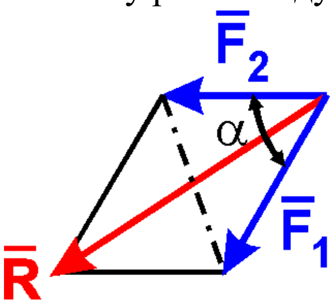
A) $\overline{BC}$; B) $\overline{AB}$; C) $\overline{OD}$; D) $\overline{OA}$; E) $\overline{DC}$.

13. В многоугольнике сил, какой вектор изображает равнодействующую силу



A) $\overline{OD}$; B) $\overline{AB}$; C) $\overline{BC}$; D) $\overline{OA}$; E) $\overline{DC}$.

14. Чему равен модуль равнодействующей сил F_1 и F_2:



A. $R = F_1 + F_2$

B. $R^2 = F_1^2 + F_2^2$

C. $R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos a$

D. $R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos a$

15. Какой вид имеют уравнения равновесия сходящейся системы сил:

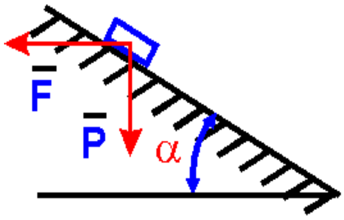
A. $\sum \overline{F}_{kx} = 0, \sum \overline{F}_{ky} = 0;$

B. $\sum m_0(\overline{F}_k) = 0, \sum \overline{F}_k = 0;$

C. $\sum \overline{F}_k = 0;$

D. $\sum m_0 = (\overline{F}_k) = 0.$

16. Груз веса ***P*** лежит на гладкой наклонной поверхности. Определить значение силы *F*, удерживающей груз в равновесии:

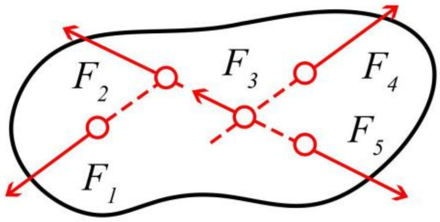


A. $P \cdot \cos a$
B. $P \cdot \sin a$
C. $P \cdot tga$
D. $P \cdot ctga$

17. Теорему о трех непараллельных силах, действующих на тело и расположенных в одной плоскости, можно применить:

A. В любом состоянии тела;
B. Когда, тело находится во вращательном движении;
C. Когда тело движется произвольно;
D. Когда тело находится в равновесии.

18. При условии, что $F_1 = -|F_4|$, $F_2 = -|F_5|$, $F_3 \neq -|F_5|$, эти силы системы можно убрать, не нарушая механического состояния тела:



A) F_1 и F_3
B) F_2 и F_5
C) F_1 и F_4
D) F_3 и F_5

19. Определение равнодействующей в плоской системе сходящихся сил графическим способом заключается в построении:

A) силового многоугольника
B) силового неравенства
C) проекций всех сил на оси координат *X* и *У*
D) круговорота внутренних и внешних сил

20. Плечом силы относительно центра называется:

A. Отрезок, соединяющий центр и точку приложения силы;

B. Кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы;
C. Луч, проходящий через центр, параллельно линии действия силы;

D. Отрезок, соединяющий центр и конец вектора силы.

21. Парой сил называется система двух сил:

A. Равных по модулю, параллельных и направленных в противоположные стороны;

B. Лежащих в одной плоскости;

C. Равных по модулю, расположенных произвольно;

D. Равных по модулю и лежащих на одной прямой;

22. Чем характеризуется пара сил (F_1, F_2)?

A. Равнодействующей $R=F_1+F_2$;

B. Плечом пары d;

C. Моментом пары $F_1 \cdot d$;

D. Плоскостью действия пары.

23. Плечо пары сил-это:
A. Отрезок, соединяющий точки приложения сил;
B. Кратчайшее расстояние между линиями действия сил;
C. Любой отрезок, пересекающий линии действия сил;
D. Отрезок, соединяющий середины векторов сил.
24. Пара сил оказывает на тело:

A) отрицательное действие
B) положительное действие
C) вращающее действие
D) изгибающее действие

25. Момент пары сил положителен при следующих условиях:

A. Всегда положителен;

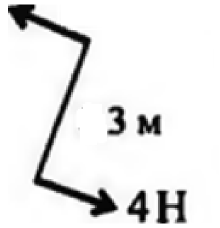
B. Всегда отрицателен;

C. Его действие направлено по ходу часовой стрелки;

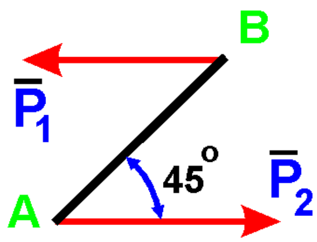
D. Его действие направлено против хода часовой стрелки;

26. Определите для рисунка, чему будет равен момент пары сил:

A) 12 Нм
B) -7 Нм
C) -12 Нм
D) -7 Нм

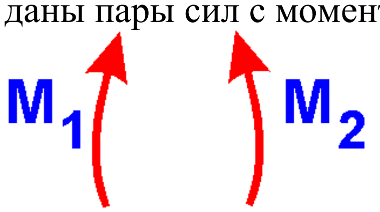


27. Определить момент пары сил $P_1=P_2=2$ *Н, AB=3 м:*



A. 1,73/2 Н·м; B. 2·1,73 Н·м;
C. 1,5·1,41 Н·м; D. 3·1,41 Н·м.

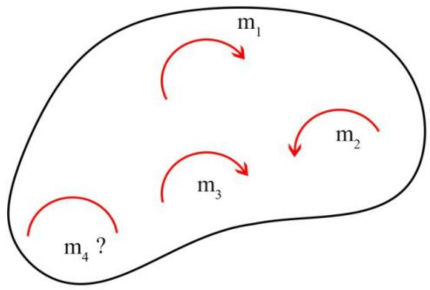
28. Каким должен быть момент уравновешивающей пары сил M_3, если даны пары сил с моментами $M_1=28$ *Н·м и* $M_2=38$ *Н·м:*



A.-10 Н·м; B. 10 Н·м;

C.-66 Н·м; D. 66 Н·м.

29. Тело находится в равновесии. $m_1 = 15\ Н \cdot м;\ m_2 = 8\ Н \cdot м;\ m_3 = 12\ Н \cdot м;$ $m_4 = ?$ Определить величину момента пары $m_4 = ?$



A. 14 Нм ; B. 19 Нм;

C. 11 Нм ; D. 15 Нм.

30. Выбрать формулу для расчета главного вектора пространственной системы сил

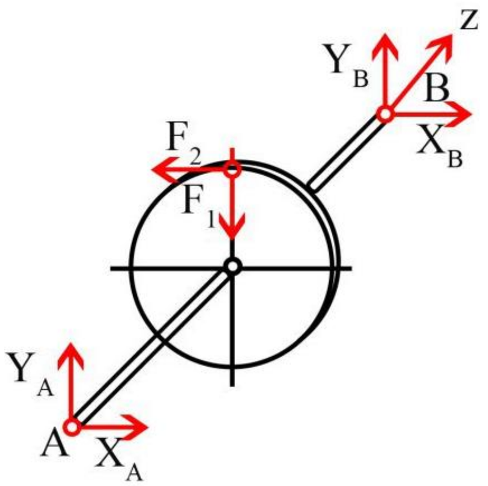
A. $F_{\sum x} + F_{\sum y} + F_{\sum}$; B. $\sqrt{F^2_{\sum x} + F^2_{\sum y} + F^2_{\sum z}}$;

C. $\sqrt{F^2_{\sum x} + F^2_{\sum y}}$; D. $\sqrt{(\sum m_{kx})^2 + (\sum m_{ky})^2}$

31. Сколько неизвестных величин можно найти, используя уравнения равновесия пространственной системы сходящихся сил

A. 6; B. 2; C. 3; D. 4.

32. Какие уравнения равновесия нужно использовать, чтобы найти X_A?



A. $\sum F_{kx} = 0;$; B. $\sum F_{ky} = 0;$;

C. $\sum m_{Bx} = 0;$; D. $\sum m_{By} = 0;$.

33. Выбрать формулу для расчета главного момента пространственной системы сил

A. $\sqrt{(\sum m_{kx})^2 + (\sum m_{ky})^2}$; B. $\sqrt{F^2_{\sum x} + F^2_{\sum y} + F^2_{\sum z}}$;

C. $\sqrt{F^2_{\sum x} + F^2_{\sum y}}$; D. $\sqrt{(\sum m_{kx})^2 + (\sum m_{ky})^2 + (\sum m_{kz})^2}$.

34. По заданным проекциям равнодействующей найти ее модуль

$F_{\sum x} = 4{,}125H; \quad F_{\sum y} = 12H; \quad F_{\sum z} = 8H$

A. 15 Н; B. 21,4 Н; C. 4,9 Н; D. 6,4 Н.

35. Пространственная система сил—это:

A. система сил, линии действия которых лежат в одной плоскости.
B. система сил, линии действия которых не лежат в одной плоскости.
C. система сил, линии действия которых перпендикулярны плоскости.
D. система сил, линии действия которых параллельны плоскости.

36. Что учит раздел «Кинематика»

A. движение материальных тел без учета причин вызывающих эти движения
B. поступательное движение твердого тела.
C. вращательное движение твердого тела.
D. винтовое движение

37. Какими способами могут быть заданы движения тела (точки)?

A. аналитический.
B. координатный, естественный, радиус-векторный.
C. арифметический.
D. интегральный.

38. Что называется траекторией ?

A) прямая линия
B) окружность
C) след, который тело оставляет во время движения
D) парабола

39. Что называется перемещением?

A) вектор соединяющий начальную и конечную точки траектории.
B) произвольная прямая линия.
C) длина окружности
D) длина дуги.

40. В каком ответе движения точки задан радиус-векторный способ?

A) $\bar{r} = \bar{r}(t)$

B) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

C) $S = S(t)$

D) $x = f(t)$

41. В каком ответе движения точки задан естественный способ?

A) $\bar{r} = \bar{r}(t)$

B) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

C) $S = S(t)$

D) $x = f(t)$

42. В каком ответе движения точки задан координатный способ?

A) $\bar{r} = \bar{r}(t)$

B) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

C) $S = S(t)$

D) $x = f(t)$

43. Сколько будет уравнений движения если тело движется в пространстве?

A) 1
B) 3
C) 2
D) 4

44. Сколько будет уравнений движения если тело движется в плоскости?

A) 2
B) 3
C) 1
D) 4

45. Найдите единицу измерения вектора скорости?

A) м/с
B) м с
C) с/м.
D) м/с^2

46. Найдите единицу измерения вектора ускорения?

A) м/с
B) м с
C) с/м.
D) м/с^2

47. Как определяется вектор скорости при естественном способе?

A) $\bar{V} = dS \cdot dt$.
B) $\bar{V} = \dfrac{dS}{dt}$
C) $\bar{V} = \dfrac{dt}{dS}$
D) $V = \dfrac{ds}{t}$

48. Как определяется вектор ускорения при естественном способе?

A. $a = d\bar{V} \cdot dt$
B. $\bar{a} = \dfrac{dt}{d\bar{V}}$
C. $\bar{a} = \dfrac{d^2 S}{d t^2}$
D. $\bar{a} = \dfrac{dV}{t}$

49. Как определяется вектор скорости при радиус-векторном способе?

A. $\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$
B. $\bar{V} = \dfrac{dt}{dr}$
C. $\bar{V} = \dfrac{d\bar{r}}{t}$
D. $\bar{V} = \dfrac{\bar{r}}{dt}$

50. Как определяется вектор ускорения при радиус векторном способе?

A. $\bar{a} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$

B. $\bar{a} = \dfrac{d^2\bar{r}}{\partial t^2}$.

C. $\bar{a} = \dfrac{dt^2}{d^2\bar{r}}$

D. $\bar{a} = d^2 r \cdot dt^2$

51. Как определяется модуль скорости при координатном способе?

A. $V = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$

B. $V = dr \cdot dt$.

C. $V = dS \cdot dt$

D. $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

52. Чему равно центростремительное ускорение при прямолинейном движении?

A) $a_n = \infty$ B) $a_n = 1$

C) $a_n = 0$ D) $a_n = -\infty$

53. Что называется поступательным движением?

A. если траектория тело прямая линия.
B. если траектория тела окружность.
C. если во время движения скорость тела увеличивается.
D. если во время движения тела, любая прямая проведенная в теле перемещается параллельно самому себе.

54. Что называется вращательным движением твердого тела?

A) движения тела по окружности

B) если во время движения тела произвольные две точки тела остаются не подвижными

C) если тело движется вдоль прямой линии

D) если во время движения $\overline{V} = const$

55. Как определяется угловая скорость?

A) $\omega = \dfrac{d\varepsilon}{dt}$ B) $\omega = \dfrac{\varphi\varepsilon}{t}$ C) $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$ D) $\omega = \eta \cdot t$

56. В каких единицах измеряется угловая скорость?

A. м/с B) рад/сек. C) м/сек^2. D) рад/сек^2.

57. Как определяется угловое ускорение?

A) $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ B) $\varepsilon = \omega \cdot t$ C) $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ D) $\varepsilon = \omega + t$.

58. Как определяется линейная скорость точки при вращательном движении?

A) $V = \frac{\omega}{R}$ B) $V = V_0 + \omega \cdot R$ C) $V = \omega \cdot R$ D) $V = \varepsilon \cdot R$.

59. В каких единицах измеряется угловое ускорение?

A) рад/сек B) рад/сек^2. C) рад сек. D) рад+сек.

60. Что называется плоскопараллельным движением твердого тела?

A. если тело движется по окружности
B. если тело движется вдоль прямой линии.
C. если во время движения тела, все точки которого перемешаются параллельно относительно некоторой неподвижной плоскости.
D. Если во время движения тела ω и ε const.

61. Как определяется скорость произвольной точки *B* тела, совершающая плоскопараллельное движение?

A. $\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{AB}$.
B. $\overline{V}_B = \overline{V}_A - \overline{V}_{AB}$.
C. $\overline{V}_B = \omega \cdot R$
D. $\overline{V}_B = \frac{\overline{V}_A}{AB}$.

62. Как определяется ускорение произвольной точки *B* тела, совершающая плоскопараллельное движение ?

A. $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{V}_{AB}$.
B. $\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{AB}^{\tau} + \overline{a}_{AB}^{n}$
C. $\overline{a}_B = \overline{a}_A - \overline{a}_{AB}$
D. $\overline{a}_B = \overline{a}_A \cdot \overline{a}_{AB}$.

63. Что называется сложным движением точки (тела)?

A) если тело одновременно участвует в нескольких движениях
B) если тело совершает круговое движение
C) если тело движется с постоянной скоростью
D) если тело вращается вокруг параллельных осей.

64. Как определяется скорость точки твердого тела при сложном движении?

A. $\overline{V}_{абс} = \overline{V}_r + \overline{V}_c$.
B. $\overline{V}_{абс} = \overline{V}_r - \overline{V}_c$.
C. $\overline{V}_{абс} = \overline{V}_r \cdot \overline{V}_c$
D. $\overline{V}_{абс} = \overline{V}_r / \overline{V}_c$.

65. Как определяется ускорение точки твердого тела при сложном движении?

A) $\overline{a}_{абс} = \overline{a}_r + \overline{a}_c + \overline{a}_{кор}$ B) $\overline{a}_{абс} = \overline{a}_r - \hat{a}_c - \overline{a}_{кор}$

C) $\overline{a}_{абс} = 2\overline{a}_r + 2\hat{a}_c + 2\overline{a}_{кор}$ D) $\overline{a}_{абс} = \overline{a}_r + \overline{a}_c + 2\overline{a}_{кор}$

66. Как определяется Кориолисово ускорение?

A) $\overline{a}_{кор} = 3\left[\overline{V}_r \cdot \overline{\omega}_e\right]$ B) $\overline{a}_{кор} = 4\left[\overline{V}_r \cdot \overline{\omega}_e\right]$

C) $\overline{a}_{кор} = 5\left[\overline{V}_r \cdot \overline{\omega}_e\right]$ D) $\overline{a}_{кор} = 2\left[\overline{V}_r \cdot \overline{\omega}_e\right]$

67. Как определяется модуль Кориолисово ускорения?

A) $\overline{a}_{кор} = 3V_r \cdot \omega_e \cos\alpha$ B) $\overline{a}_{кор} = 4V_r \cdot \omega_e \sin\alpha$

C) $\overline{a}_{кор} = 2V_r \cdot \omega_e \sin\alpha$ D) $\overline{a}_{кор} = 5V_r \cdot \omega_e tg\alpha$

68. Как определяется направление Кориолисово ускорения?

A. По правилу Жуковского.
B. По правилу Пифагора.
C. По правилу Ньютона.
D. По правилу Кеплера

69. Что называется мгновенным центром скоростей?

A) точка, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю.

B) точка, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю

C) точка, скорость которой в рассматриваемый момент времени равно бесконечности

D) точка, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно бесконечности.

70. Что называется винтовым движением?

A. Сумма поступательных и вращательных движений вокруг одной оси.
B. Сумма двух вращательных движений вокруг параллельных осей.
C. Сумма двух поступательных движений со скоростями $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$.
D. Сумма двух вращательных движений вокруг пересекающихся осей.

71. Динамикой называется раздел механики, в которой изучается…

A) движение материальных точек и тел под действием сил
B) условие равновесия материальных тел
C) геометрические свойства движения тел
D) аналитические свойства

72. Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых координатах

A) $m\dfrac{d^2x}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rx}$ $m\dfrac{d^2y}{d\cdot t^2}=\sum F_{Ry}$ $m\dfrac{d^2z}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rz}$

B) $m\dfrac{d^2x}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rx}$ $m\dfrac{d^2y}{d\cdot t^2}=\sum F_{Ry}$

C) $m\dfrac{d^2y}{d\cdot t^2}=\sum F_{Ry}$ $m\dfrac{d^2z}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rz}$

D) $m\dfrac{d^2x}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rx}$

73. Прямолинейное движение точки

A) $m\dfrac{d^2x}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rx}$ B) $m\dfrac{d\ \ x}{d\cdot t}=\sum F_{Rx}$

C) $m=\sum F_{Rx}$ D) $\sum F_{Rx}=0$

74. Импульс силы

A) $S=\int F\cdot d\,t$ B) $\bar{S}=\int\limits_0^{t_1}\bar{F}d\,t$

C) $S=\int\limits_0^{t_1}Fd\,t$ D) $S=F\cdot t_1$

75. Единица измерения импульса силы

A) $кг\cdot м/с^2$ B) $кг\cdot м/с$

C) $кг\cdot м^2/с$ D) $Н\cdot м$

76. Теорема об изменении количества движения точки

A) $m\cdot\bar{V}_1-m\cdot\bar{V}_0=\sum\bar{S}_K$ B) $m\cdot V_1-m\cdot V_0=\sum S_K$

C) $m\cdot V=\sum S_K$ D) $m\cdot\bar{V}_1-m\cdot\bar{V}_0=0$

77. Теорема моментов:

A) $m(m\cdot V)=r\cdot mV$ B) $\dfrac{d}{dt}\left(\bar{r}\times m\bar{V}\right)=\bar{r}\times\bar{F}$ *или* $\dfrac{d}{dt}\left[m_0\left(m\bar{V}\right)\right]=\bar{m}_0\left(\bar{F}\right)$

C) $m\cdot V=r\cdot V$ D) $m\cdot(m)=r\cdot V$

78. Элементарная работа

A) $\bar{m}_0\left(m\cdot\bar{V}\right)=\bar{r}\cdot m\bar{V}$ B) $dA=F_\tau\cdot d\,x$

C) $\bar{S}=\int\limits_0^{f_1}\bar{F}d\,t$ D) $m\cdot\bar{V}_1-m\cdot\bar{V}_0=\sum\bar{S}_K$

79. Единица измерения работы.

A) Н B) джоуль C) кг D) кг/с

80. Элементарная работа силы, величина какая ….

A) векторная B) скалярная

C) продольная D) поперечная

81. Элементарная работа отрицательная, если …

A) угол α равен нулю B) угол α тупой

C) угол α острый D) угол α прямой

82. Элементарная работа положительная, если …

A) угол α равен нулю B) угол α α тупой

C) угол α острый D) угол α прямой

83. Если угол $\alpha = 90^0$, элементарная работа ….

A) положительна B) равная нулю

C) отрицательная D) не будет совсем

84. Мощность

A) $N = F_\tau \cdot V$ B) $N = F_\sigma \cdot V$

C) $N = F \cdot V$ D) $N = A \cdot F$

85. Работа силы упругости:

A) $A_{(M_0 M_1)} = \pm P \cdot h$ B) $A_{(M_0 M_1)} = -\int_{M_0}^{M_1} f \cdot F_{mp} dS$

C) $A_{(M_0 M_1)} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right)$ D) $A_{(M_0 M_1)} = c \cdot \left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right)$

86. Единица измерения мощности

A) кН B) джоуль C) кг D) Вт

87. Работа силы тяжести:

A) $A_{(M_0 M_1)} = \pm P \cdot h$ B) $A_{(M_0 M_1)} = -\int\limits_{M_0}^{M_1} f \cdot F_{mp} dS$

C) $A_{(M_0 M_1)} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right)$ D) $A_{(M_0 M_1)} = P \cdot h$

88. Работа силы трения

A) $A_{(M_0 M_1)} = -\int\limits_{M_0}^{M_1} f \cdot F_{mp} dS$ B) $A_{(M_0 M_1)} = \pm P \cdot h$

C) $A_{(M_0 M_1)} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right)$ D) $A_{(M_0 M_1)} = \int f \cdot F_{mp} d\,S$

89. Теорема об изменении кинетической энергии точки.

A) $m \cdot V_1^2 - m \cdot V_2^2 = \sum A_{(M_0 M_1)}$ B) $\frac{m \cdot V_1}{2} - \frac{m \cdot V_2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}$

C) $\frac{m \cdot V_1^2}{2} - \frac{m \cdot V_2^2}{2} = \sum A_{(M_0 M_1)}$ D) $m \cdot V = \sum A_{(M_0 M_1)}$

90. Единица измерения кинетической энергии

A) кН B) джоуль C) кг D) Вт

91. Относительное движение точки

A) $m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F}_k + \sum \bar{F}_{пер}^{и} + \sum \bar{F}_{кор}^{и}$ B) $m \cdot a = \sum F_k + \sum F_{пер}^{и} + \sum F_{кор}^{и}$

C) $m \cdot a = \sum F_k + \sum F_{пер}^{и}$ D) $m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F}_k + \sum \bar{F}_{кор}^{и}$

92. Основные виды сил:

A) Сила тяжести, сила трения

B) Сила тяжести, сила упругости

C) Сила вязкого трения, сила аэродинамического сопротивления

D) все ответы верны

93. Законы динамики:

A) Закон действия силы и противодействия

B) Закон инерции

C) Основной закон

D) все ответы верны

94. Сколько задач динамики?

A) Одна задача динамики

B) Две задачи динамики

C) Три задачи динамики

D) все ответы верны

95. Криволинейное движение точки:

A) $m\frac{d^2x}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rx} \quad m\frac{d^2y}{d\cdot t^2}=\sum F_{Ry}$

B) $m\frac{d^2y}{d\cdot t^2}=\sum F_{Ry} \quad m\frac{d^2z}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rz}$

C) $m\frac{d^2z}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rz}$

D) $m\frac{d^2x}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rx} \quad m\frac{d^2y}{d\cdot t^2}=\sum F_{Ry} \quad m\frac{d^2z}{d\cdot t^2}=\sum F_{Rz}$

96. По какой формуле определяется траектория точки:

A) $y=x\cdot tg\alpha-\frac{g}{2\cdot V_0^2\cos^2\alpha}\cdot x^2$ B) $y=x\cdot tg\alpha$

C) $y=tg\alpha-\frac{g}{V_0^2\cos^2\alpha}$ D) $y=-\frac{g}{2\cdot V_0^2\cos^2\alpha}$

97. Укажите уравнение движения гармонических колебаний:

A) $x=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha)$ B) $x=A\cdot e^{-bt}\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha)$

C) $x=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\alpha)+\frac{P_0}{\omega^2-q^2}\cdot\sin qt$

D) $x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + D \cdot \sin(qt + \beta)$

98. Укажите уравнение движения затухающих колебаний:

A) $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

B) $x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

C) $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + \dfrac{P_0}{\omega^2 - q^2} \cdot \sin qt$

D) $x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + D \cdot \sin(qt + \beta)$

99. Уравнение вынужденных колебаний без учета сил сопротивления среды:

A) $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

B) $x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

C) $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + \dfrac{P_0}{\omega^2 - q^2} \cdot \sin qt$ D)
$x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + D \cdot \sin(qt + \beta)$

100. Укажите уравнение вынужденных колебаний с учетом сил сопротивления среды:

A) $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

B) $x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$

C) $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + \dfrac{P_0}{\omega^2 - q^2} \cdot \sin qt$

D) $x = A \cdot e^{-bt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha) + D \cdot \sin(qt + \beta)$

Коды правильных ответов

Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**
1	B	21	A	41	C	61	A	81	B
2	C	22	C	42	B	62	B	82	C
3	B	23	B	43	B	63	A	83	B
4	A	24	C	44	A	64	A	84	A
5	C	25	D	45	A	65	A	85	C
6	C	26	A	46	A	66	D	86	D
7	B	27	D	47	B	67	D	87	A
8	A	28	A	48	C	68	A	88	A
9	B	29	A	49	A	69	B	89	C
10	A	30	B	50	B	70	A	90	B
11	A	31	C	51	D	71	A	91	A
12	C	32	D	52	C	72	A	92	D
13	A	33	D	53	D	73	A	93	D
14	C	34	A	54	B	74	B	94	B
15	A	35	B	55	A	75	B	95	D
16	C	36	A	56	B	76	A	96	A
17	D	37	B	57	C	77	B	97	A
18	C	38	C	58	C	78	B	98	B
19	A	39	A	59	B	79	B	99	C
20	B	40	A	60	C	80	B	100	D

Часть 2

Сопротивление материалов

2

4. Сопротивление материалов

4.1. Основные понятия сопротивления материалов.
4.2. Основные положения. Нагрузка внешние и внутренние. Метод сечений

Знать метод сечений, внутренние силовые факторы, составляющие напряжений.

Уметь определять виды нагружений и внутренние силовые-факторы в поперечных сечениях**.**

План:

1. Основные понятия.
2. Гипотезы и допущения.
3. Основные требования к деталям и конструкциям.
4. Виды расчетов в сопротивление материалов.
5. Внутренние усилия. Метод сечений.
6. Понятие о напряжениях.
7. Контрольные вопросы и задания.

Ключевые слова: Прочность, жесткость, устойчивость, расчетная схема, брус, оболочка, пластина, внутренние усилия, напряжение, деформация, пролет балки, консоль, шарнир, сила сосредоточенная сила, нагрузка, метод сечений.

Общие определения

Сопротивление материалов-раздел более общей науки-механики деформируемого твердого тела, в котором излагаются основы и методы инженерных расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость, устойчивость и выносливость при одновременном удовлетворении требований надежности, экономичности и долговечности. Кроме сопротивления материалов в механику деформируемого твердого тела входят: теория упругости, теория пластичности и ползучести, теория сооружений, строительная механика, механика разрушения и др.

Прочность-способность материала (образца, детали, элемента конструкции...) не разрушаясь сопротивляться действию внешних сил.

Часто под прочностью понимают способность сопротивляться развитию пластических деформаций под действием внешних сил. Целью расчета на прочность является определение размеров деталей или величины внешних нагрузок, при которых исключается возможность разрушения элемента конструкции.

Жесткость-способность конструктивных элементов деформироваться без существенного изменения геометрических размеров. Целью расчета на жесткость является определение нагрузок и размеров деталей, при которых исключается возможность появления недопустимых с точки зрения нормальной работы конструкции деформаций.

Устойчивость-способность конструктивного элемента сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия. При потере устойчивости возникает продольный изгиб-изгиб первоначально прямолинейного стержня под действием центрально приложенных продольных сжимающих сил.

Выносливость или циклическая прочность-способность материала противостоять усталости.

Усталость-процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств, образованию трещин, их развитию и разрушению.

Надежность-свойство объекта сохранять работоспособное состояние в течение некоторого времени или некоторой наработки.

Долговечность-свойство элемента или системы длительно сохранять работоспособность до наступления предельного состояния при определенных условиях эксплуатации.

Гипотезы и допущения

Принятые в сопротивлении материалов

Гипотеза сплошности и однородности—материал представляет собой однородную сплошную среду; свойства материала во всех точках тела одинаковы и не зависят от размеров тела. Атомистическая теория дискретного строения вещества во внимание не принимается. Гипотеза позволяет не учитывать особенности кристаллической структуры металла, разный химический состав и прочностные свойства связующего и наполнителей в пластмассах, бетонах (щебень, песок, цемент), наличие сучков в древесине.

Гипотеза об изотропности материала-физико-механические свойства материала одинаковы по всем направлениям. В некоторых случаях предположение об изотропии неприемлемо, материал является анизотропным. Так, анизотропными являются древесина, свойства которой вдоль и поперек волокон различны, а также армированные (композиционные) материалы.

Гипотеза об идеальной упругости материала-тело способно восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших его деформацию.

Гипотеза о совершенной упругости материала-перемещения точек конструкции в упругой стадии работы материала прямо пропорциональны силам, вызывающим эти перемещения (справедлив закон Гука). В действительности реальные тела можно считать упругими только до определенных величин нагрузок, и это необходимо учитывать, применяя формулы сопротивления материалов.

Гипотеза Бернулли о плоских сечениях-поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси в деформированном состоянии; при изгибе сечения поворачиваются не искривляясь.

Принцип Сен-Венана-в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузки, деформация тела не зависит от конкретного способа нагружения и определяется только статическим эквивалентом нагрузки. Резко выраженная неравномерность распределения напряжений по сечению 2-2, показанная на Рисунке, постепенно выравнивается (сечение 3-3) и на удалении, равном ширине сечения (сечения 4-4 и 5-5), исчезает.

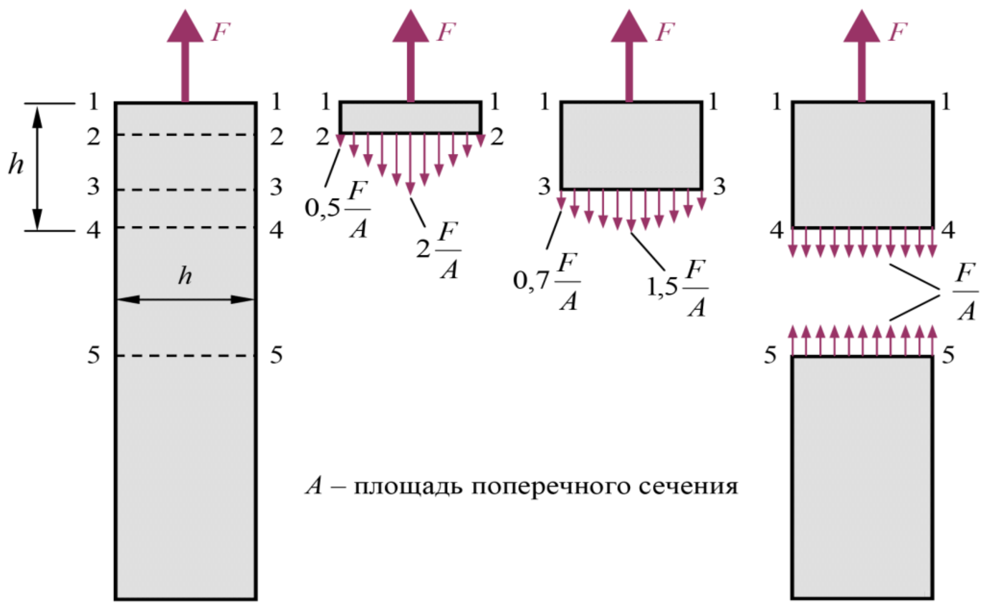


Рис.4.1 Распределение нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня при растяжении сосредоточенной силой

Принцип Д'Аламбера-если к активным силам, действующим на точки механической системы, и реакциям наложенных связей присоединить

силы инерции, то получится уравновешенная система сил. Принцип используется в расчетах на прочность при динамическом действии сил.
Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции)- результат воздействия нескольких внешних факторов равен сумме результатов воздействия каждого из них, прикладываемого в отдельности, и не зависит от последовательности их приложения. Это же справедливо и в отношении деформаций.
Принцип начальных размеров (гипотеза о малости деформаций)- деформации в точках тела настолько малы по сравнению с размерами деформируемого тела, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок, приложенных к телу. Допущение применяют при составлении условий статики, считая тело абсолютно твердым.

Типы схематизаций, используемые в сопротивлении материалов

Реальный объект-исследуемый элемент конструкции, взятый с учетом всех своих особенностей: геометрических, физических, механических и других.

Расчет реального объекта является или теоретически невозможным, или практически неприемлемым по своей сложности. Поэтому в сопротивлении материалов используют расчетные схемы, в которых применяют упрощения, облегчающие расчет.

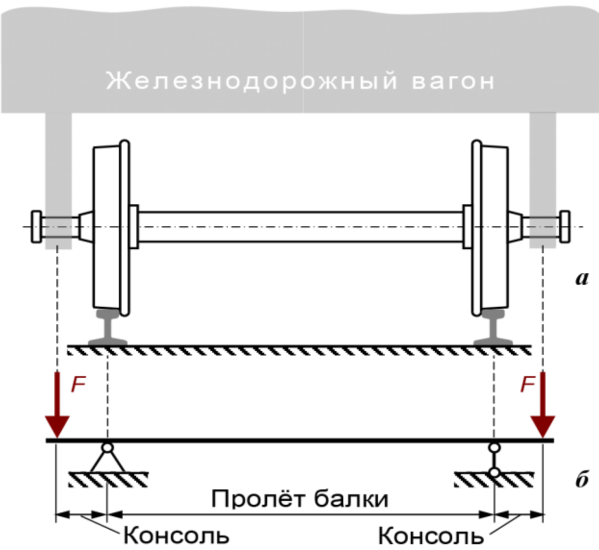


Рис.4.2 Пример реальной конструкции (а) и соответствующей ей расчётной схемы (б)

Расчетная схема-идеализированная схема, отражающая наиболее существенные особенности реального объекта, определяющие его поведение под нагрузкой. В зависимости от постановки задачи и требуемой точности ее решения для одной и той же конструкции может быть предложено несколько расчетных схем. Так же и одна расчетная схема может соответствовать различным конструкциям.

Основная цель сопротивления материалов-создать практически приемлемые простые приемы (методики) расчета типовых наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Необходимость перехода от реального объекта к расчетной схеме (с целью упрощения расчетов) заставляет вводить схематизацию понятий. Выделяют следующие типы схематизации:

физическая схематизация;

геометрическая схематизация;

силовая схематизация.

Физическая схематизация (модель материала)

Все изучаемые тела считают выполненными (изготовленными) из материалов, наделенными идеализированными свойствами. Материал элементов конструкций считают сплошным, однородным, изотропным и линейно упругим (см. выше гипотезы 1, 2, 3, 4).

Геометрическая схематизация (модель формы)

Виды конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, при всем их разнообразии, можно свести к четырем основным категориям.

Массивное тело-тело, у которого все три размера величины одного порядка (Рис.4.3). Это-фундаменты сооружений, подпорные стенки, станины станков и т. п.

Брус-тело, одно из измерений которого, значительно больше двух других**.** Брусья с прямолинейной осью постоянного сечения **(**а**),** переменного сечения **(**б**),** ступенчатый **(**в**),**
тонкостенный (толщина стенок значительно меньше габаритных размеров сечения) стержень (г), с криволинейными осями (д), **(**е**),** (ж) (Рис.4.4).

Оболочка-тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями**,** расположенными на близком расстоянии одна от другой (Рис.4.5). Геометрическое место точек, равноудаленных от обеих поверхностей оболочки, называют срединной поверхностью**.** По форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические, конические, сферические и др. К оболочкам относятся тонкостенные резервуары, котлы, купола зданий, обшивки фюзеляжей, крыльев (и других частей летательных аппаратов), корпуса судов и т. п.

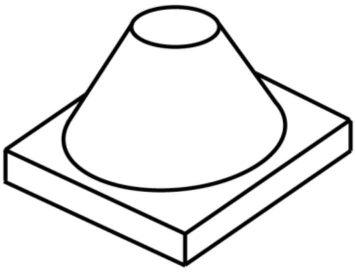


Рис.4.3. Массивнов тело

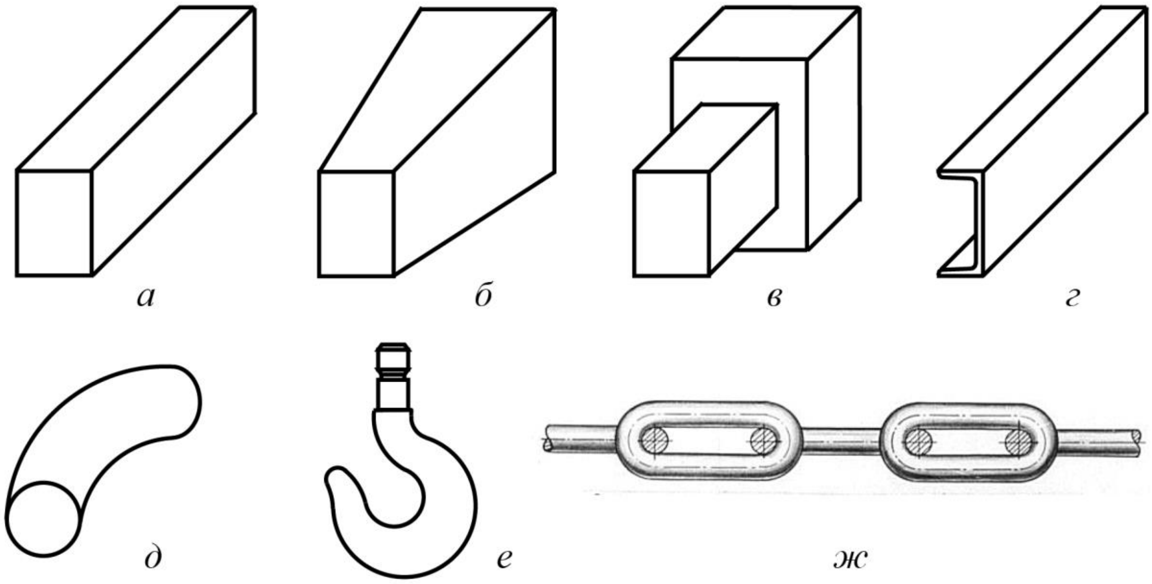


Рис.4.4. Примеры брусьев различной формы

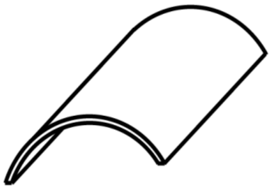


Рис.4.5. Оболочка

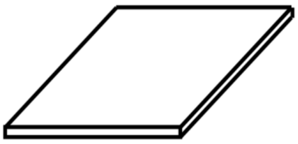


Рис.4.6. Пластина

Пластина-тело, ограниченное двумя параллельными поверхностями (Рис.4.6). Пластины могут быть круглыми, прямоугольными и иметь другие очертания. Толщина пластин, как и оболочек, может быть постоянной или переменной. Пластинами являются плоские днища и крышки резервуаров, перекрытия инженерных сооружений, диски турбомашин и т. п.

Тела, имеющие эти основные формы, и являются объектами расчета на прочность, жесткость и устойчивость. В настоящем учебном пособии рассматриваются разделы, связанные с расчетом брусьев с прямолинейной геометрической осью.

Схематизация опор

Схемы реальных опорных устройств можно свести к трем типам.

Шарнирно-подвижная опора балки (Рис.4.7,а) препятствует только вертикальному перемещению конца балки, но ни горизонтальному перемещению, ни повороту. Такая опора при любой нагрузке дает одну реакцию.

Шарнирно-неподвижная опора (Рис.4.7,б) препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, но не препятствует повороту сечения. Дает две реакции: вертикальную и горизонтальную.

Заделка (защемление*)* (Рис. 4.7,в). Опора препятствует вертикальному и горизонтальному перемещениям конца балки, а также повороту сечения. Дает три реакции: вертикальную и горизонтальную силы и пару сил.

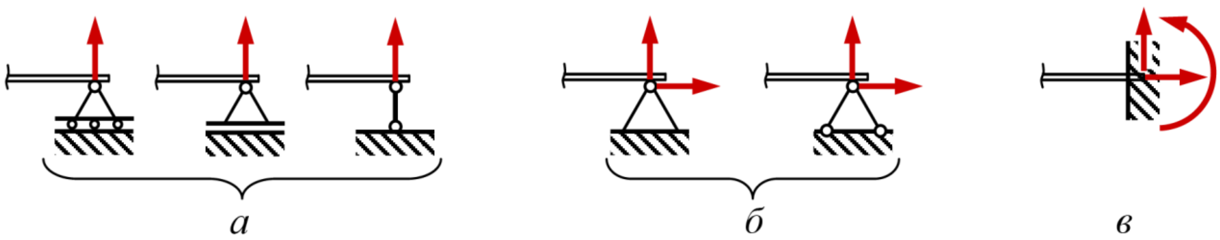


Рис.4.7. Схемы опорных устройств варианты их изображения:

а–шарнирно-подвижная опора; б–шарнирно-неподвижная опора;

в–защемление (жесткая заделка)

Силовая схематизация (модель нагружения)

В нагруженном теле, находящемся в равновесии, внешние нагрузки стремятся вызвать деформацию тела, а внутренние усилия стремятся сохранить тело как единое целое.

Внешние нагрузки-силы взаимодействия между рассматриваемым элементом конструкции и другими телами, связанными с ним.

Классификация внешних нагрузок производится по трем признакам: способу приложения, продолжительности действия, характеру изменения.

По способу приложения: сосредоточенные, распределенные.

Сосредоточенными (Рис. 4.8,а) называют силы, приложенные к площадкам, размеры которых малы по сравнению с размерами объекта, например, давление обода колеса на рельс. Размерность Н, кгс (ньютон, килограмм силы).

Распределенными по площади (поверхностными) (Рис.4.8,б) называют силы, приложенные к площадкам контакта, например, давление жидкости или газа на стенки сосуда, снеговая нагрузка на кровлю здания. Давление выражается в единицах силы, отнесенных к единице площади, Н/м^2, кгс/см^2. Производная единица Паскаль: 1 Па=1 Н/м^2.

Распределенные по длине (Рис. 4.9,а) равномерно или по заданному закону (треугольному, параболическому...). Размерность Н/м, кгс/м.

Объемные силы (Рис. 4.9,б) непрерывно распределены по объему, занимаемому элементом, например, сила тяжести, сила инерции. Характеризуются интенсивностью, то есть отношением единицы силы к единице объема, Н/м^3, гс/см^3.

По продолжительности действия: постоянные и временные.

Постоянные действуют в течение всего времени существования конструкции, например, нагрузка на фундамент здания.

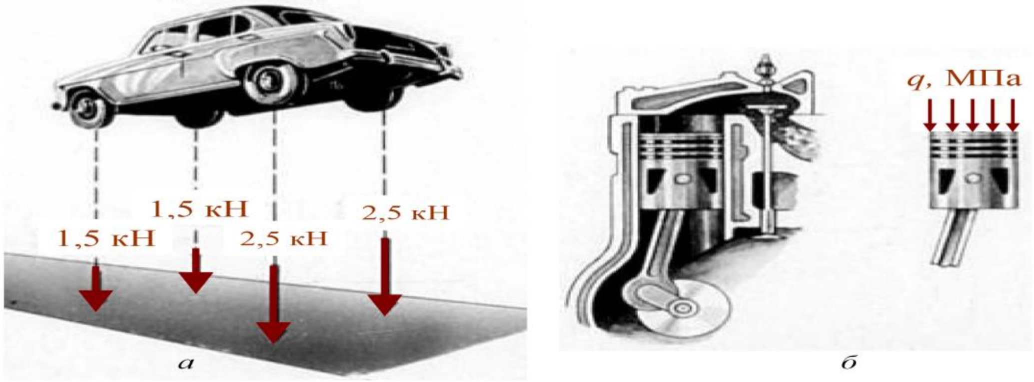


Рис.4.8. Примеры сосредоточенной (*а*) и равномерно распределенной по площади (б) нагрузок.

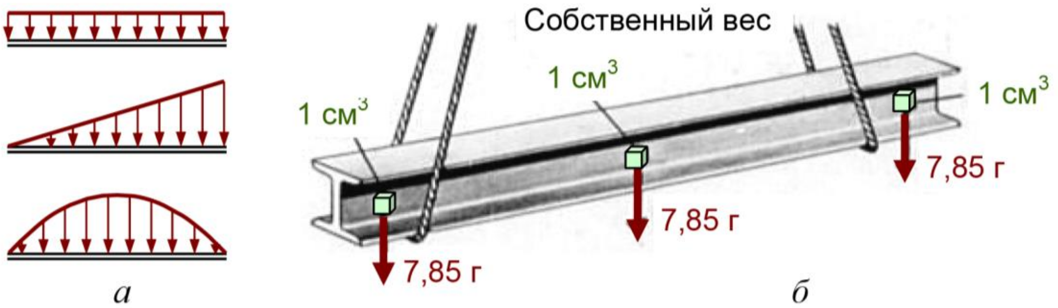


Рис.4.9. Виды распределенной по длине (а) и объему (б) нагрузок.

Временные действуют на протяжении отдельных периодов эксплуатации объекта, например, давление газа в баллоне.

По характеру изменения в процессе приложения

Статические-постоянные (нагрузка от собственного веса), или медленно изменяющиеся так, что силами инерции вследствие ускорения можно пренебречь (изменение давления от снеговой нагрузки).

Динамические-вызывающие в конструкции или отдельных ее элементах большие ускорения, которыми пренебречь нельзя. Величина этой нагрузки значительно изменяется за малые промежутки времени, например, ударная.

Повторно-переменные-изменяющиеся по некоторому закону. Примеры: изменение натяжения ветви ремня (или цепи) в зависимости от ее положения в текущий момент времени-сбегающая или набегающая ветвь на ведущий шкив (звездочку). Изменение натяжения спицы велосипедного колеса в зависимости от ее положения (верхнее или нижнее в данный момент вращения колеса).

Внутренние усилия. Метод сечений

Величиной внутренних усилий определяется степень деформации элемента конструкции и возможность разрушения в том или ином опасном сечении элемента конструкции.

Внутренние усилия-силы взаимодействия между частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами), возникающие внутри элемента конструкции, как противодействие внешним нагрузкам.
Для выявления внутренних усилий пользуются методом сечений.

1. Разрезаем нагруженное тело плоскостью P на две части (Рис. 4.10,а).

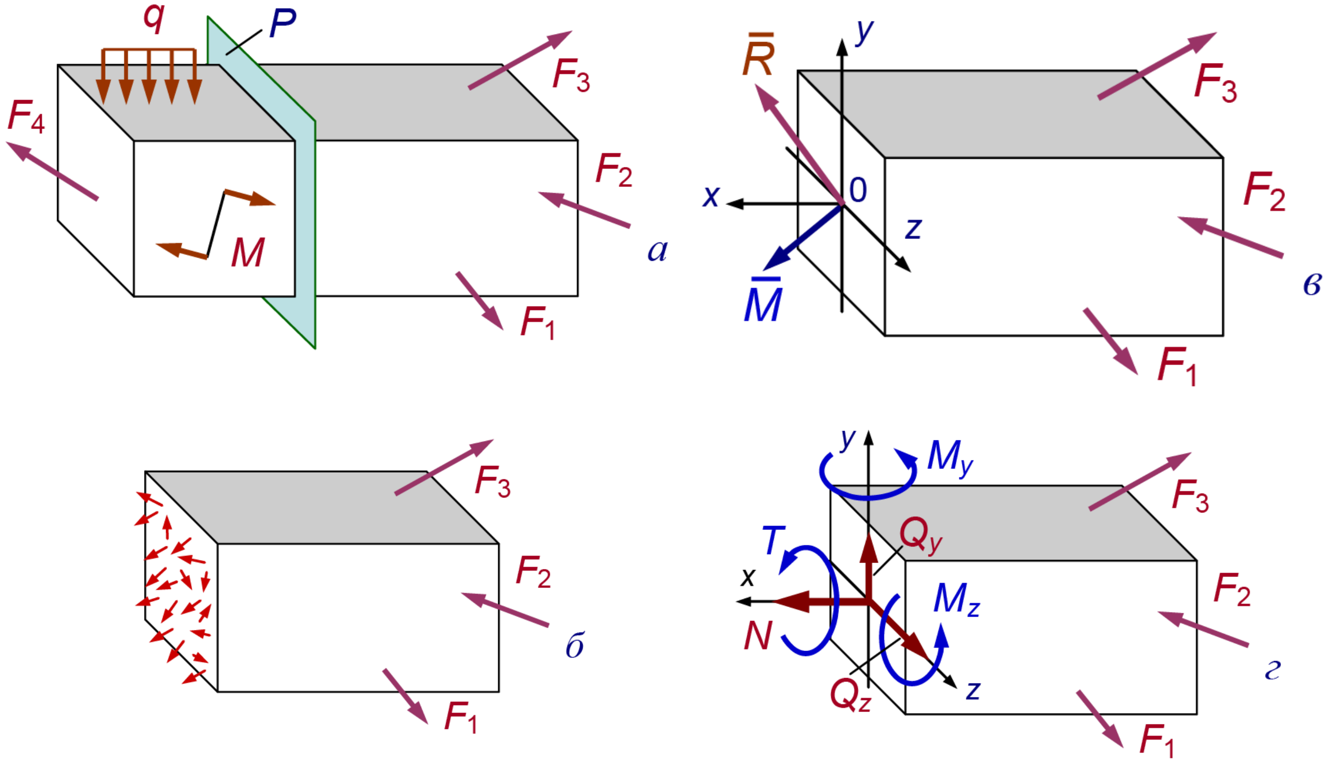


Рис.4.10. Определение внутренних усилий методом сечений

2.Отбрасываем одну из частей (Рис.4.10,б). Реальное тело представляет собой конгломерат различно ориентированных зерен, от граней которых в разных направлениях действуют элементарные внутренние усилия.
3.Заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями. При этом используется аппарат теоретической механики: определение равнодействующей системы сходящихся сил, параллельных сил, перенос сил в заданную точку-центр тяжести сечения 0 (Рис.4.10,в). Полученные в результате приведения главный вектор R и главный момент M спроецировать на главные оси инерции z, y и геометрическую ось x.

4.Уравновешиваем. уравнения равновесия позволяют определить внутренние усилия. Всего их шесть: три силы-проекции главного вектора R (Рис.4.10,г):

Таким образом, можно сформулировать правило определения внутренних силовых факторов: внутренние силы N, Q_y, Q_z численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения, Аналогично: внутренние моменты T, M_y, M_z численно равны алгебраической сумме моментов от внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения, Какую именно сторону, правую или левую, верхнюю или нижнюю следует рассматривать, зависит от схемы нагружения. Предпочтение следует отдавать более простому варианту.

Принимая во внимание важность описанных выше процедур, запишем кратко последовательность основных этапов метода сечения:

Р-разрезать тело на две части плоскостью;

О-отбросить одну из частей тела;

З-заменить действие отброшенной части внутренними усилиями;

У-уравновесить, уравнения равновесия составить.

Единица измерения усилий-ньютон (обозначение: Н). Это производная единица. Исходя из второго закона Ньютона $(F=m\cdot a)$ она определяется как сила, изменяющая за 1 с скорость тела массой 1 кг на 1 м/с в направлении действия силы. Таким образом, 1 Н=1 кг м/с^2. Измерять силу в ньютонах стали спустя два века после смерти великого ученого, когда была принята система СИ. 1 Н=0,10197162 кгс; 1 кгс=9,80665 Н.

Каждая компонента внутренних усилий характеризует сопротивление тела какому-либо одному виду деформации простому сопротивлению. Например, при $N\neq0$, будет растяжение или сжатие. При $Q\neq0$ имеет место сдвиг, при $T\neq0$-кручение, а при $M\neq0$-изгиб. При наличии двух и более компонентов будет сложное сопротивление тела.

Понятие о напряжениях

Напряжение в точке по сечению-

внутренняя сила взаимодействия, приходящаяся на единицу площади у этой точки.

Напряжение-величина, характеризующая интенсивность внутренних усилий в точке.

Рассмотренные ранее усилия N, Q_y, Q_z, M_y, M_z, T являются интегральным эквивалентом внутренних сил, распределенных по площади сечения. Эти силы характеризуются их интенсивностью (Рис. 4.10)

$$N_z = \sum_0^n F_{kz}; \qquad M_z = \sum_0^n m_z(F_k);$$

$$Q_x = \sum_0^n F_{kx}; \qquad M_x = \sum_0^n m_x(F_k);$$

$$Q_y = \sum_0^n F_{ky}; \qquad M_y = \sum_0^n m_y(F_k);$$

Из приведенных уравнений следует, что:

Nz—продольная сила, равная алгебраической сумме проекций на ось *Oz* внешних сил, действующих на отсеченную часть бруса; вызывает растяжение или сжатие;

Qx—поперечная сила, равная алгебраической сумме проекций на ось *Ox* внешних сил, действующих на отсеченную часть;

Qy—поперечная сила, равная алгебраической сумме проекций на ось *Oy* внешних сил, действующих на отсеченную часть;

силы *Qx* и *Qy* вызывают сдвиг сечения;

Mz—крутящийся момент, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно продольной оси *Oz;* вызывает скручивание бруса;

Mx—изгибающий момент, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси *Ox*;

My—изгибающий момент, равный алгебраической сумме моментов внешних сил относительно оси *Oy;*

моменты *Mx* и *My* вызывают изгиб бруса в соответствующей плоскости.

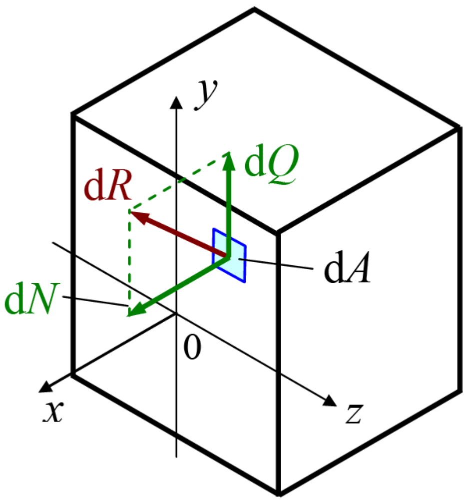


Рис. 4. 11. Разложение элементарного внутреннего усилия на составляющие.

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}; \;\; \sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}; \;\; \tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

Напряжение нормальное -перпендикулярное к сечению, характеризует интенсивность сил отрыва или сжатия частиц элементов конструкции.
Напряжение касательное -действующее в плоскости сечения, характеризует интенсивность сил, сдвигающих эти части в плоскости сечения.
Напряжение полное

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$$

Суммируя элементарные усилия $\sigma{\cdot}dA$, $\tau y \cdot dA$, $\tau_z \cdot dA$ (Рис. 4.11), распределенные по сечению и их моменты относительно координатных осей, получим (Рис. 4.11)

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \qquad T = \int_A (\tau_y z - \tau_z y) dA;$$

$$Q_y = \int_A \tau_y \cdot dA; \qquad M_y = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA;$$

$$Q_z = \int_A \tau_z \cdot dA; \qquad M_z = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA;$$

Единица измерения давления и механического напряжения паскаль (обозначение Па). Паскаль-давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м^2.

1 Па=1 Н/м^2; 1 МПа=0,102 кгс/мм^2; 1 МПа=10,2 кгс/см^2; 1 МПа=1 Н/мм^2; 1 кгс/мм^2=9,81 МПа.

Виды деформаций и деформирования

Реальные тела не являются абсолютно твердыми и под действием приложенных сил могут изменять свое положение в пространстве.
Перемещение-изменение положения в пространстве точки или
Деформация-изменение формы и размеров тела под действием приложенных сил.
Деформация упругая Δl_e-исчезающая после снятия нагрузки (от англ. elastic).
Деформация пластическая Δl_p- остающаяся после снятия нагрузки (от англ. plastic).
Деформация абсолютная (полная)-$\Delta t=\Delta t_e+\Delta lp$.
Деформация относительная $\varepsilon=\Delta l/1$. ΔS—абсолютный сдвиг.

$$p=\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\,.$$

γ—относительный сдвиг, угловая деформация,
угол сдвига

$$y \approx tg\,\gamma = \frac{S}{a}$$

Растяжение (сжатие)-вид сопротивления (деформирования), при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно-продольное усилие *N*. Стержень-брус, работающий на растяжение или сжатие.

Сдвиг-вид сопротивления (деформирования), характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями. Внутреннее усилие одно-поперечная сила *Q*.

Кручение-вид сопротивления (деформирования), при котором из шести внутренних усилий не равно нулю одно-крутящий момент *T*. Кручение возникает при действии на брус внешних сил, образующих момент относительно его продольной оси. Вал-брус, работающий на кручение. Вал -вращающаяся (обычно в подшипниках) деталь машины, передающая крутящий момент.

Изгиб-вид сопротивления (деформирования), при котором происходит искривление оси прямого бруса, или изменение кривизны кривого бруса.

Пример. 1 Определить величину продольной силы в сечении 1-1 (Рис. 4.12).

Решение:

Используем уравнение равновесия

$$\sum_{0}^{n} F_{kz} = 0$$

Рассматривая левую часть бруса, определяем N_{z1}=-12+8—5=9 кН Рассматривая правую часть бруса, определяем N_{z1}=23—14=9 кН

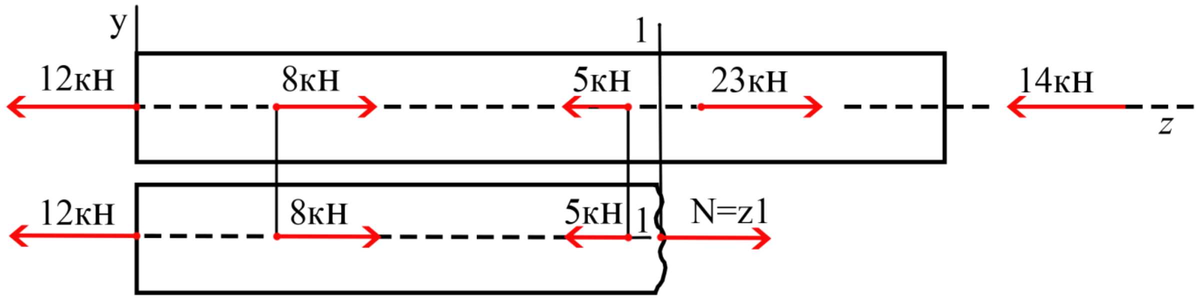


Рис.4.12

Величина продольной силы в сечении не зависит от того, какая часть бруса рассматривается.

Пример 2. Определить внутренний силовой фактор в сечении 1-1 (Рис. 4.13,а).

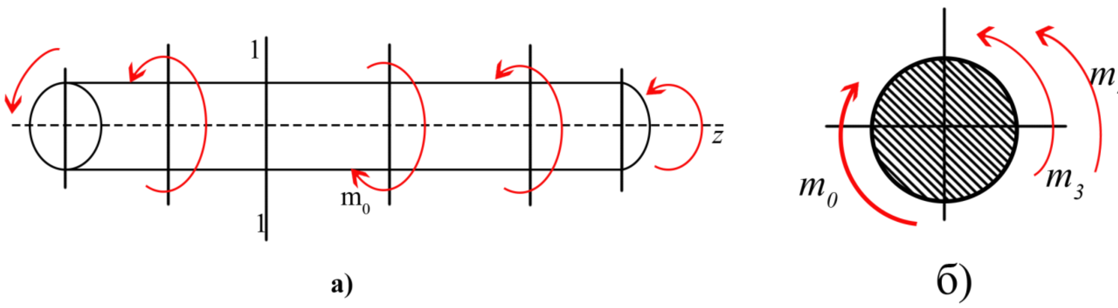


Рис.4.13

$m_1 = 102$ кН · м
$m_2 = 88$ кН · м
$m_3 = 40$ кН · м
$m_4 = 16$ кН · м

Решение:

Используем уравнение равновесия

$$\sum m_z = 0$$

$$m_0 = \mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2 + \mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_4; \qquad \mathrm{m}_0 = 246 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Рассматриваем правую часть бруса. На отсеченную часть бруса принято смотреть со стороны отброшенной части (Рис. 19.5,б)

Получаем

$$\mathrm{M}_z = 246 - 40 - 16 = 190 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Контрольные вопросы и задания:

1. Что изучает сопротивление материалов?
2. Что понимается под прочностью?
3. Что такое жесткость?
4. Какие основные задачи решаются в курсе сопротивления материалов?
5. Что такое расчетная схема?
6. Какие нагрузки называются сосредоточенными и распределенными и в каких единицах они измеряются?
7. В чем разница между статическим динамическим нагружением?
8. Что называется стержнем, пластиной и оболочкой?
9. Какое напряжение называется нормальным и какое касательным?
10. Какой метод используется при определении внутренних силовых факторов и в чем заключается его сущность?
11. Что такое деформация? Какие вам известны простейшие деформации?
12. Перечислите основные допущения относительно структуры и свойств технических материалов, которые принимаются в сопротивлении материалов?

4.3 Сдвиг и смятие

Иметь представление о деформациях, о внутренних силовых факторах при сдвиге и смятии.
Уметь выполнять проектировочные и проверочные расчеты на прочность, подбор сечений, проверка заклепок на смятие.

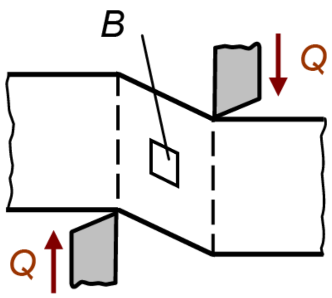
План:

1. Основные понятия.
2. Расчетные формулы.
3. Расчет заклепочных соединений.
4. Контрольные вопросы и задания.

Ключевые слова: Сдвиг, смятие, закон Гука при сдвиге, абсолютная деформация, чистый сдвиг, модуль сдвига, жесткость при сдвиге, условие прочности при сдвиге, смятии.

Сдвиг-простой вид деформации, характеризующийся взаимным смещением параллельных слоев материала под действием приложенных сил при неизменном расстоянии между слоями.

При сдвиге в поперечном сечении из шести внутренних усилий действует только одно-поперечная сила Q (Рис. 4.14).



Порядок вывода расчетных формул в сопротивлении материалов

Рис.4.14

При выводе любых аналитических зависимостей в сопротивлении материалов рассматривается существование малого элемента тела с целью последовательного определения его перемещений, деформаций и напряжений в нем. Проинтегрировав установленные зависимости по всему объему тела, находят связь перемещений, деформаций и напряжений с внешними силами.

Всякий расчет состоит из четырех этапов:

статический анализ-устанавливает связь напряжений с внешними нагрузками путем интегрирования уравнений равновесия элемента по всему объему тела;

геометрический анализ-устанавливает связь между перемещениями и деформациями малого элемента тела;

физический анализ-устанавливает связь между деформациями элемента и напряжениями в нем. При упругой деформации используется закон Гука;

синтез установленных зависимостей. Подставляя найденные на трех предыдущих этапах выражения одно в другое и упрощая их, получают окончательные расчетные формулы.

Для установления связи внутренних усилий с напряжениями и деформациями при сдвиге рассмотрим несколько этапов.

Статическая сторона задачи-условие равновесия (Рис. 4.15)

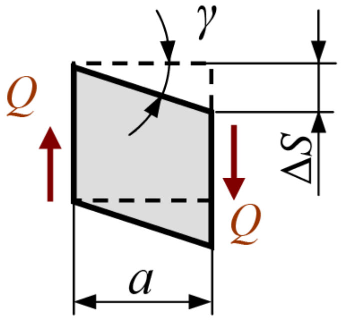
$$\sum y = 0; \qquad Q = \int_A \tau \cdot dA$$

В действительности, касательные напряжения распределяются по сечению неравномерно. Однако, если принять допущение о равномерном распределении напряжений, что широко используется на практике, то

$$Q = \tau \cdot A, \quad \text{откуда} \quad \tau = \frac{Q}{A} \qquad (4.1)$$

Геометрическая (деформационная) сторона задачи

В элементе B, выделенном на (Рис. 4.14), ΔS-абсолютный сдвиг; γ-относительный сдвиг



$$\gamma \approx tg\,\gamma = \frac{\Delta S}{a} \qquad (4.2)$$

Физическая сторона задачи

В области упругих деформаций справедлив закон Гука

$$\tau = G \cdot \gamma \qquad (4.3)$$

Математическая сторона задачи

Подставляя (4.1) и (4.2) в (4.3), получим закон Гука для сдвига

$$\frac{Q}{A} = G\frac{\Delta S}{a}, \quad \text{откуда} \quad \Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A} \qquad (4.4)$$

Произведение GA-жесткость сечения при сдвиге;

G-модуль сдвига, модуль касательной упругости, модуль упругости второго рода.

Для стали в расчетах принимают $G=80\ ГПа=80\cdot10^4\ МПа=8\cdot10^3\ кН/см^2$.

Установлена связь между упругими постоянными

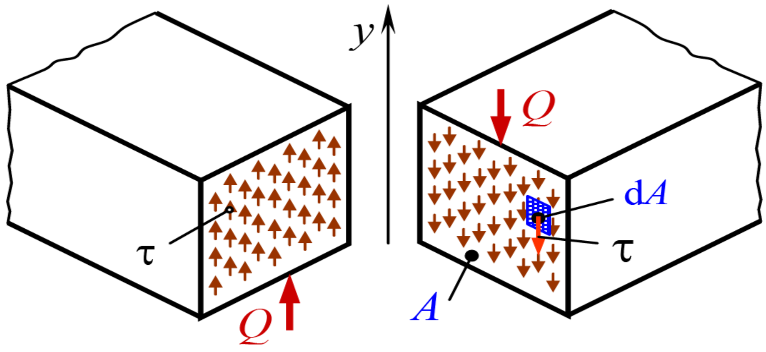


Рис.4.15. Внутренние усилия и напряжения, возникающие в сдвигаемых слоях.

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \qquad (4.5)$$

где μ-коэффициент поперечной деформации (Пуассона)

Напряженное состояние

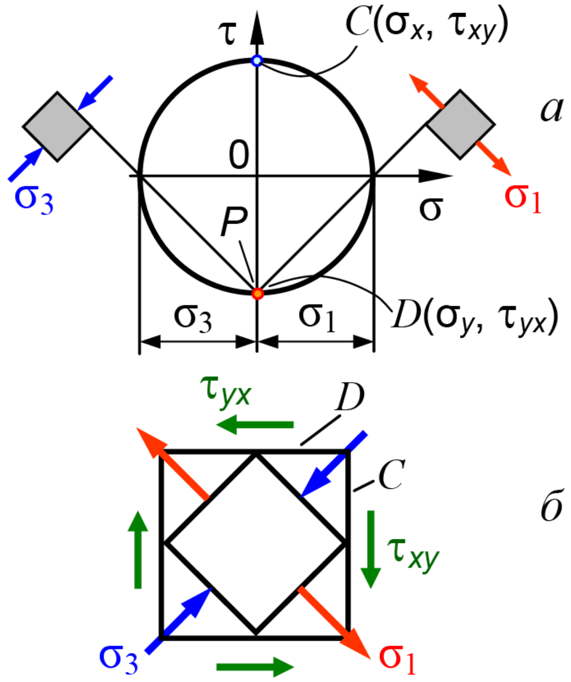


Рис.4.16. Построение круга Мора для определения главных площадок и величины главных напряжений.

По граням выделенного на (Рис. 4.14) элемента *В* действуют только касательные напряжения τ; нормальные напряжения $\sigma_x=0$, $\sigma_y=0$. Графическим построением (Рис. 4.16,а) и аналитическим решением по формулам

$$tg\,2\alpha = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = \frac{-2\tau_{xy}}{0} = -\infty; \quad 2\alpha = -90°;$$

$$\sigma_{max,min} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{max} = \tau_{xy} = \sigma_1; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_{min} = -\tau_{xy} = \sigma_3$$

получаем: главные площадки ориентированы под углом 45° к направлению сдвигающих напряжений (Рис. 4.16,б), величины главных нормальных напряжений равны касательным напряжениям.

Имеет место чистый сдвиг-частный случай плоского напряженного состояния, при котором по граням элемента действуют только касательные напряжения.

Допускаемые напряжения. Расчет на прочность

Эквивалентные напряжения по I гипотезе прочности:

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{экв},\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{\sigma_1} \le [\boldsymbol{\sigma}], \quad \text{но} \quad \boldsymbol{\sigma_1} = \boldsymbol{\tau}, \ \text{следовательно} \ [\boldsymbol{\tau}] = [\boldsymbol{\sigma}]$$

Соотношение справедливо для хрупких материалов.

Эквивалентные напряжения по III гипотезе прочности:

$\sigma_{\text{экв},III} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$, но $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$. тогда $2[\tau] \le [\sigma]$, откуда

$$[\tau] = 0{,}5[\sigma]$$

Эквивалентные напряжения по IV гипотезе прочности:

$$\sigma_{\text{экв},IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2]} \le [\sigma]$$

Подставив $\sigma_1=\tau$, $\sigma_2=0$ и $\sigma_3=-\tau$, получим

$$\sigma_{\text{экв},IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\frac{1}{2}[\tau^2 + \tau^2 + 4\tau^2]} = \tau\sqrt{3} \leq [\sigma],$$

откуда

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = 0{,}577[\sigma]$$

Таким образом, при расчете деталей из пластичных материалов, работающих на срез (болты, заклепки, шпонки...) условие прочности может быть записано так:

$$\tau = \frac{Q}{A} \leq [\tau] \text{ где } [\tau] = (0{,}5 - 0{,}6)[\sigma] \quad (4.6)$$

Смятие-вид местной пластической деформации, возникающей при сжатии твердых тел, в местах их контакта.

Смятие материала начинается в случае, когда интенсивность напряжений достигает величины предела текучести материала. Размеры смятого слоя зависят от величины, характера и времени воздействия нагрузки, а также от температуры нагрева сжимаемых тел. Смятие наблюдается не только у пластичных, но и у хрупких материалов (закаленная сталь, чугун и др.). Смятие возникает в соединениях (болтовых, заклепочных, шпоночных и др.), в местах опирания конструкций и в зонах контакта сжатых элементов. Смятие широко используется для создания заклепочных, врубовых и других плотных соединений; является начальной стадией таких процессов холодной и горячей обработки металлов, как прокатка, вальцовка, ковка. Величину напряжений смятия в конструкциях обычно ограничивают допускаемым напряжением смятия, которое определяется характером соприкасающихся поверхностей, свойствами используемого материала и его ориентацией относительно действующих нагрузок (например, в случае древесины - вдоль или поперек волокон).

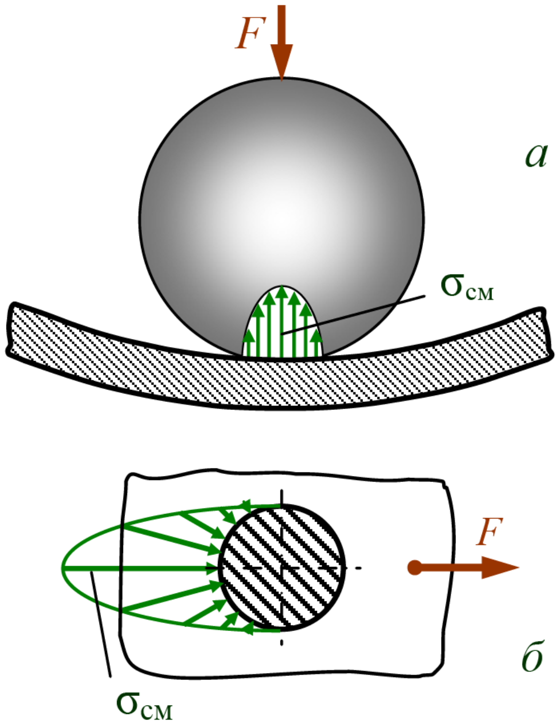


Рис. 4.17. Характер распределения шарика с кольцом (а) и листа с заклепкой (б).

Пример. Подобрать диаметр заклепок, соединяющих накладки с листом; проверить прочность заклепок на смятие и листов на разрыв. Материал листов и заклепок-прокат из стали

Дано: *F=8 кН; t_1=5 мм; t_2=3 мм; b=50 мм; σ_m=235 МПа.*

Решение:

1. Определение диаметра заклепок

Допускаемые напряжения, рассчитанные на основе механической характеристики - предела текучести и нормативного коэффициента запаса:

$$[\sigma_p] = \sigma_T/[n_T] = \frac{235}{1.5} = 156.7\text{МПа} \approx 160\text{МПа};$$

$$[\tau] = 0.6[\sigma] = 0.6 \cdot 160 = 96\text{МПа};$$

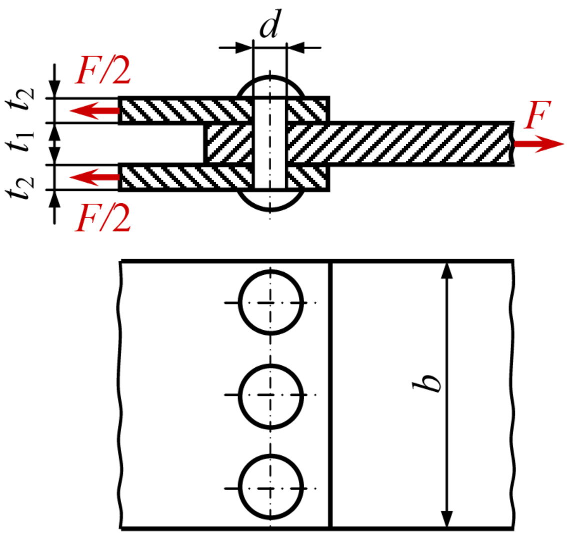
$$[\sigma_{\text{см}}] = (2 \div 2.5)[\sigma_p] = (2 \div 2.5) \cdot 160 = (320 \div 400)\text{МПа}$$

Допускаемые напряжения согласно рекомендациям табл. П2:

$$\left[\sigma_p\right] = 125 \text{ МПа}; \quad \left[\tau_{\text{ср}}\right] = 75 \text{ МПа}; \quad [\sigma_{\text{см}}] = 190 \text{ МПа}$$

Из двух значений допускаемого напряжения на срез (96 и 75 МПа) принимаем меньшие значения допускаемого напряжения *[τ_{cp}]=75 МПа.* Из условия прочности при срезе

$$\tau = \frac{Q}{A_{cp}} \le [\tau]$$



определяем требуемую площадь поперечного сечения заклепок.

Стержень заклепки подвергается перерезыванию в двух плоскостях; средняя часть заклепки сдвигается вправо. Суммарная площадь среза

$$A_{\text{ср}} \ge \frac{Q}{[\tau]} = \frac{\pi d^2}{4} m \cdot n, \quad \to \quad d \ge \sqrt{\frac{4Q}{\pi \cdot m \cdot n \cdot [\tau]}},$$

где m=2-количество плоскостей среза заклепки;

n=3-количество заклепок.

$$d \ge \sqrt{\frac{4 \cdot 8000}{\pi \cdot 2 \cdot 3 \cdot 75 \cdot 10^6}} = 0{,}00476 \text{ м}$$

Принимаем *d=5 мм.*

2. Проверка заклепок на смятие

Давление, передающееся на поверхность заклепки от листа, распределяется неравномерно, по сложной зависимости, изменяясь от нуля до значительных величин (Рис. 4.17). На практике, чтобы вычислить условное напряжение смятия необходимо разделить силу, приходящуюся на заклепку, на площадь диаметрального сечения. Эта площадь представляет собой прямоугольник, одной стороной которой служит диаметр заклепки, другая сторона равна толщине листа, передающего давление на стержень заклепки. Так как толщина среднего листа меньше суммы толщин обеих накладок, то в худших (наиболее опасных) условиях по смятию будет именно средняя часть заклепки. Условие прочности на смятие:

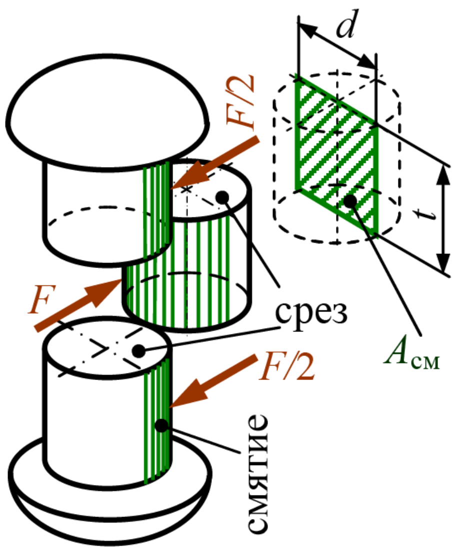


Рис. 4.18. Поверхности среза и смятия в заклепочном соединении.

$$\sigma_{см} = \frac{F}{A_{см}} \leq [\sigma_{см}]$$

где $A_{см} = d \cdot t_1 \cdot n = 5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$ мм^2

Тогда $\sigma_{см} = \dfrac{F}{A_{см}} = \dfrac{8000}{75} = 106{,}7 \dfrac{Н}{мм^2} = 106{,}7$ МПа

Прочность на смятие обеспечена.

3. Проверка прочности листа на разрыв

Опасным считается сечением листа, проходящее через заклепочные отверстия; здесь рабочая ширина листа является наименьшей. Площадь сечения листа, ослабленного заклепочными отверстиями (площадь «живого» сечения)

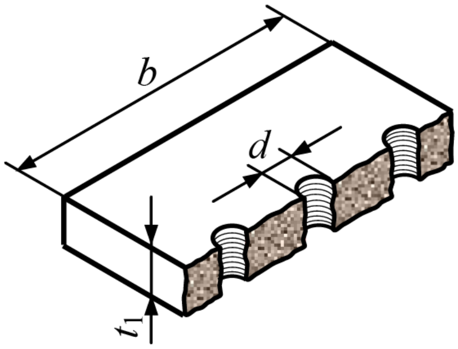


Рис. 4.19. Определение площади «живого» сечения листа

$$A_{\text{раз}} = b \cdot t_1 - n \cdot d \cdot t_1 = t_1(b - n \cdot d) = 5(50 - 3 \cdot 5) = 175 \text{ мм}^2$$

$$\sigma_{\text{разр}} = \frac{8000}{175} = 45{,}7 \text{ МПа}$$

что меньше допускаемого

$$[\sigma] = 125 \text{ МПа}$$

Вывод. Из условия прочности на сдвиг подобран диаметр двухсрезных заклепок. Условия прочности на смятие заклепок и разрыва листа выполняются.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется сдвигом?
2. Сформулируйте закон Гука?
3. Абсолютная деформация при сдвиге?
4. Что называется смятие?
5. Приведите примеры деталей работающих на сдвиг?
6. Запишите условие при сдвиге и смятии?
7. Какие внутренние силовые факторы возникают при сдвиге и смятие?

4.4 Растяжение и сжатие.

Цель учебного занятия: Научить студентов рассчитывать конструкции, работающие на растяжение-сжатие на прочность и жесткость.
Иметь представление о продольных силах, о нормальных напряжениях в поперечных сечениях.
Знать правила построения эпюр продольных сил и нормальных напряжений, закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.
Уметь строить эпюры продольных сил и нормальных напряжения
Иметь представление о продольных и поперечных деформациях и их связи.
Знать закон Гука, зависимости и формулы для расчета напряжений и перемещений.
Уметь проводить расчеты на прочность и жесткость статически определимых брусьев при растяжении и сжатии.

План:

1. Продольная сила.
2. Напряжения при растяжении и сжатии.
3. Продольные и поперечные деформации Закон Гука.
4. Примеры решений задач.
5. Контрольные вопросы и задания.

*Ключевые слова: Продольная сила, эпюра продольных сил, продольная деформация, поперечная деформация, абсолютная деформация, относительная деформация, напряжение, допускаемые напряжения, потенциальная энергия деформации, расчет на прочность, растяжение, сжатие***.**

Растяжение и сжатие

Растяжением или сжатием называют вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор—продольная сила.
Продольные силы меняются по длине бруса. При расчетах после определения величин продольных сил по сечениям строится график-эпюра продольных сил.
Условно назначают знак продольной силы.

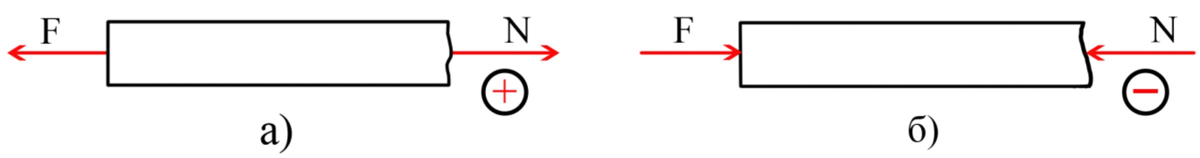


Рис.4.20

Если продольная сила направлена от сечения, то брус растянут. Растяжение считают положительной деформацией (Рис. 4.20,а).
Если продольная сила направлена к сечению, то брус сжат. Сжатие считают отрицательной деформацией (Рис.4.20,б).

Примеры построения эпюры продольных сил

Рассмотрим брус, нагруженный внешними силами вдоль оси. Брус закреплен в стене (закрепление «заделка») (Рис. 4.21,а).
Делим брус на участки нагружения.
Участком нагружения считают часть бруса между внешними силами.

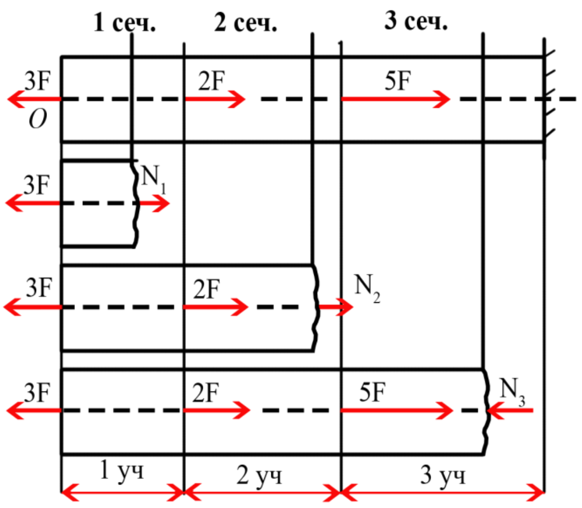


Рис 4.21 а

На представленном Рисунке 3 участка нагружения.

Воспользуемся методом сечений и определим внутренние силовые факторы внутри каждого участка.

Расчет начинаем со свободного конца бруса**,** чтобы не определять величины реакций в опорах.

Участок 1**:** $\sum \mathrm{F_z} = 0;$

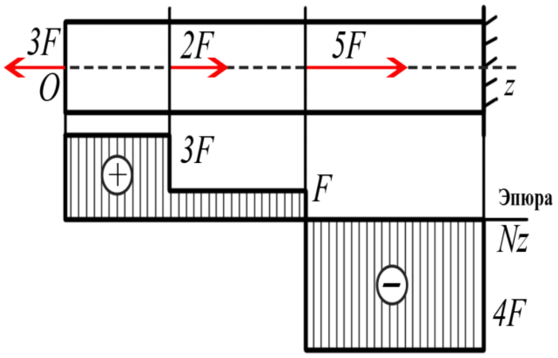
$$-3F + N_1 = 0; \quad N_1 = 3F$$

Продольная сила положительна, участок 1 растянут.

Участок 2: $\sum F_z = 0;$

$$-3F + 2F + N_2 = 0; \quad N_2 = F$$

Продольная сила положительна, участок 2 растянут.
Участок 3: $\sum F_z = 0;$
$-3F + 2F + 5F - N_3 = 0; \qquad N_3 = 4F$
Продольная сила отрицательна, участок 3 сжат. Полученное значение N_3 равно реакции в заделке.
Под схемой бруса строим эпюру продольной силы (Рис.4.21,б).



Эпюрой продольной силы называется график распределения продольной силы вдоль оси бруса.

Ось эпюры параллельна продольной оси.

Нулевая линия проводится тонкой линией. Значения сил откладывают от оси, положительные—вверх, отрицательные—вниз.

Рис.4.21 б

В пределах одного участка значение силы не меняется, поэтому эпюра очерчивается отрезками прямых линий, параллельными оси *Oz*.

Правило контроля: в месте приложения внешней силы на эпюре должен быть скачок на величину приложенной силы.

На эпюре проставляются значения N_z. Величины продольных сил откладывают в заранее выбранном масштабе.

Эпюра по контуру обводится толстой линией и заштриховывается поперек оси.

Изучая деформации при растяжении и сжатии, обнаруживаем, что выполняются гипотеза плоских сечений и принцип смягчения граничных условий.

Гипотеза плоских сечений заключается в том, что поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси.

Следовательно, продольные внутренние волокна удлиняются одинаково, а внутренние силы упругости распределены по сечению равномерно.

Принцип смягчения граничных условий гласит: в точках тела, удаленных от мест приложения нагрузки, модуль внутренних сил мало зависит от способа закрепления. Поэтому при решении задач не уточняют способ закрепления.

Напряжения при растяжении и сжатии

При растяжении и сжатии в сечении действует только нормальное напряжение.

Напряжения в поперечных сечениях могут рассматриваться как силы, приходящиеся на единицу площади.

Таким образом, направление и знак напряжения в сечении совпадают с направлением и знаком силы в сечении (Рис.4.22).

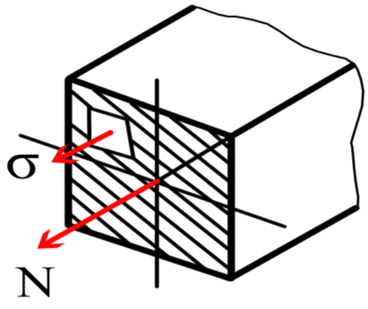


Рис.4.22

Исходя из гипотезы плоских сечений, можно предположить, что напряжения при растяжении и сжатии в пределах каждого сечения не меняются. Поэтому напряжение можно рассчитать по формуле

$$\sigma = \frac{N_z}{A},$$

где N_z—продольная сила в сечении;
A—площадь поперечного сечения.

Величина напряжения прямо пропорциональна продольной силе и обратно пропорциональна площади поперечного сечения.

Нормальные напряжения действуют при растяжении от сечения (Рис. 20.4,а), а при сжатии к сечению (Рис.4.23).

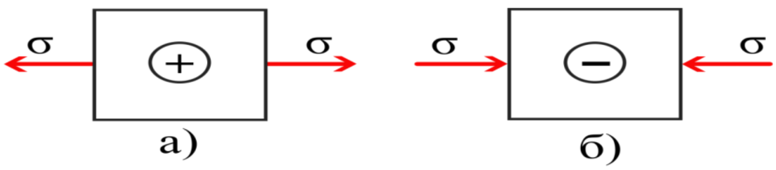


Рис.4.23

Размерность (единица измерения) напряжений—*Н/м²* *(Па)*, однако это слишком малая единица, и практически напряжения рассчитывают в *Н/мм²* *(МПа)*: *1 МПа=10⁶Па=1 Н/мм²*, или *10 МПа=1 кН/см²*.

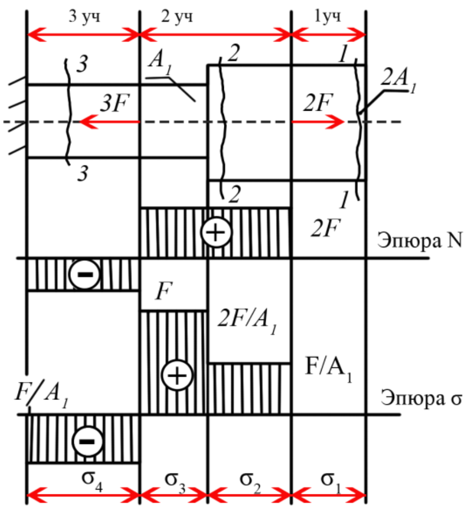


Рис.4.24

При определении напряжений брус разбивают на участки нагружений, в пределах которые продольные силы не изменяются и учитывают места изменены площади поперечных сечений.

Рассчитывают напряжения по сечениям, и расчет оформляют в виде эпюры нормальных напряжений.

Строится и оформляется такая эпюра так же, как и эпюра продольных сил.

Рассмотрим брус, нагруженный внешними силами вдоль оси (Рис.4.24).

Обнаруживаем три участка нагружения и определяем величины продольных сил.
Участок 1: $N_1=0$
Внутренние продольные силы равны нулю.
Участок 2: $N_2=2F$. Продольная сила на участке положительна.
Участок 3: $N_3=2F—3F=-F$. Продольная сила на участке отрицательна.
Брус—ступенчатый.
С учетом изменений величин площади поперечного сечения участков напряжений больше.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A_1} = 0; \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_1} \oplus, \quad \sigma_3 = \frac{2F \oplus}{A_1}; \quad \sigma_4 = \frac{-F}{A_1} \ominus$$

Строим эпюры продольных сил и нормальных напряжений. Масштабы эпюр могут быть разными и выбираются исходя из удобства построения.

Пример. Ступенчатый брус нагружен вдоль оси двумя силами. Брус за щемлен с левой стороны (Рис.4.25). Пренебрегая весом бруса, построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Решение:

1.Определяем участки нагружения, их два.
2.Определяем продольную силу в сечениях 1 и 2.
3.Строим эпюру.
4.Рассчитываем величины нормальных напряжений и строим эпюру нормальных напряжений в собственном произвольном масштабе.

1.Определяем продольные силы. $\sum F_z = 0$

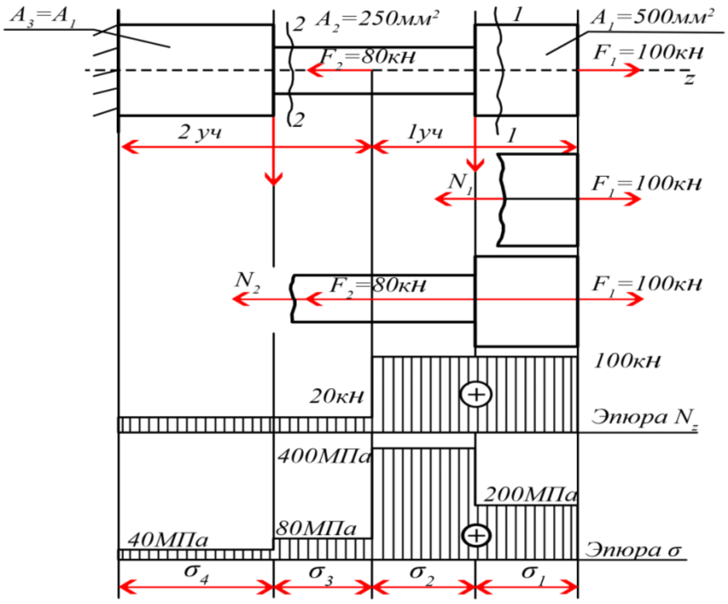


Рис.4.25

Сечение 1.-$N_1+F_1=0$; $N_1=F_1=100$ кН.

Сечение 2.-$N_2+F_1–F_2=0$; $-80-N_2+100=0$; $N_2=100-80=20$ кН.

В обоих сечениях продольные силы положительны.

2. Определяем нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{N_z}{A}$$

Сопоставляя участки нагружения с границами изменения площади, видим, что образуется 4 участка напряжений.

Нормальные напряжения в сечениях по участкам:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{500} = 200\ \text{Н/мм}^2; \qquad \sigma_2 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{100 \cdot 10^3}{250} = 400\ \text{Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{250} = 80\ \text{Н/мм}^2; \qquad \sigma_4 = \frac{N_2}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{500} = 40\ \text{Н/мм}^2;$$

Растяжение и сжатие.
Продольные и поперечные деформации.
Закон Гука

Деформации при растяжении и сжатии

Рассмотрим деформацию бруса под действием продольной силы F (Рис.4.26).

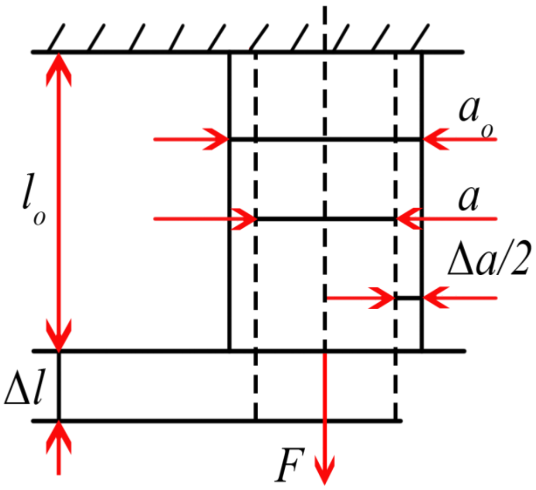


Рис.4.26

Начальные размеры бруса: l_0—начальная длина, a_0—начальная ширина.

Брус удлиняется на величину Δl; Δl—абсолютное удлинение. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, Δa—абсолютное сужение; $\Delta l>0$; $\Delta a<0$.

При сжатии выполняется соотношение $\Delta l<0$; $\Delta a>0$.

В сопротивлении материалов принято рассчитывать деформации в относительных единицах:

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$; $\varepsilon -$ относительно удаление;

$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a_0}$; $\varepsilon' -$ относительно сужение;

Между продольной и поперечной деформациями существует зависимость

$$\varepsilon' = \mu\epsilon$$

где μ—коэффициент поперечной деформации, или коэффициент Пуассона, характеристика пластичности материала.

Закон Гука

В пределах упругих деформаций деформации прямо пропорциональны нагрузке:

$$F = k\Delta l,$$

где F—действующая нагрузка; k—коэффициент. В современной форме:

$$\sigma = \frac{N}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Получим зависимость *а=Ее,* где *Е*—модуль упругости, характеризует жесткость материала.

В пределах упругости нормальные напряжения пропорциональны относительному удлинению.

Значение *Е* для сталей в пределах $(2 \div 2{,}1) \cdot 10^5$ *МПа.*

При прочих равных условиях, чем жестче материал, тем меньше он деформируется:

$$\downarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E \uparrow}$$

Формулы для расчета перемещений поперечных сечений бруса при растяжении и сжатии

Используем известные формулы.

Закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Откуда

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

В результате получим зависимость между нагрузкой, размерами бруса и возникающей деформацией:

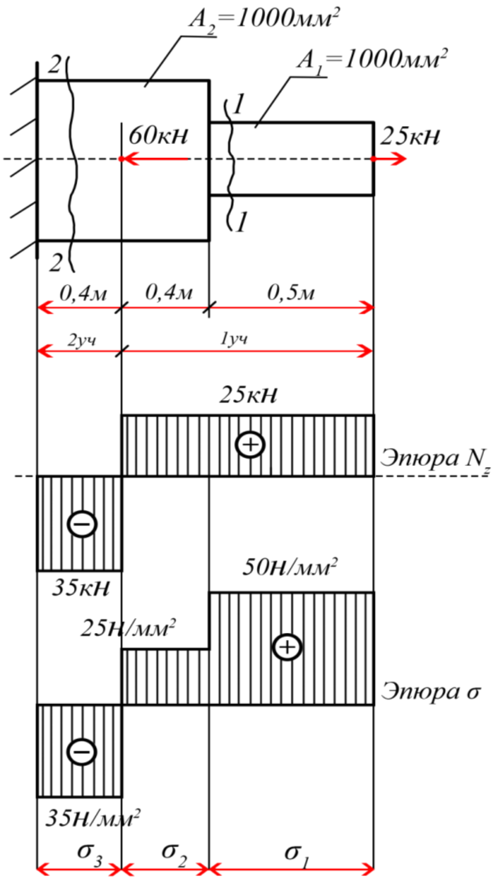


Рис. 4.27

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}; \qquad \sigma = \frac{N}{A};$$

где Δl – абсолютное удаление мм

σ – нормальное напряжение Мпа

$$\Delta l = \frac{\sigma l}{E} \text{ или } \Delta l = \frac{Nl}{AE}$$

l—начальная длина, мм;

E—модуль упругости материала, *МПа;*

N—продольная сила, Н;

A—площадь поперечного сечения, *мм^2;*

Произведение *AE* называют жесткостью сечения.

Примеры.

Дана схема нагружения и размеры бруса до деформации (Рис.4.27). Брус защемлен, определить перемещение свободного конца.

Решение:

1. Брус ступенчатый, поэтому следует построить эпюры продольных сил и нормальных напряжений.

Делим брус на участки нагружения, определяем продольные силы, строим эпюру продольных сил.

2. Определяем величины нормальных напряжений по сечениям с учетом изменений площади поперечного сечения.

Строим эпюру нормальных напряжений.

3. На каждом участке определяем абсолютное удлинение. Результаты алгебраически суммируем.

П р и м е ч а н и е . Балка защемлена, в заделке возникает неизвестная реакция в опоре, поэтому расчет начинаем со свободного конца (справа).

1. Два участка нагружения:

участок 1: $N_1=+25$ *кН*; растянут;

участок 2: $25-60+N_2=0$; $N_2=-35$ *кН;* сжатие.

2. Три участка по напряжениям:

$$\sigma_1=\frac{N_1}{A_1};\quad \sigma_1=\frac{25\cdot 10^3}{500}=50\ \text{Н/мм}^2;$$

$$\sigma_2=\frac{N_1}{A_2};\quad \sigma_1=\frac{25\cdot 10^3}{1000}=25\,\text{Н/мм}^2;$$

$$\sigma_3=\frac{N_2}{A_2};\quad \sigma_1=\frac{-35\cdot 10^3}{1000}=-35\ \text{Н/мм}^2;$$

3.Удлинения участков (материал—сталь $E=2\bullet 10^5$ *МПа):*

$$\Delta l_1=\frac{\sigma_1 l_1}{E};\quad \Delta l_1=\frac{50\cdot 0{,}5\cdot 10^3}{2\cdot 10^5}=0{,}125\ \text{мм};$$

$$\Delta l_2=\frac{\sigma_2 l_2}{E};\quad \Delta l_2=\frac{50\cdot 0{,}4\cdot 10^3}{2\cdot 10^5}=0{,}05\ \text{мм};$$

$$\Delta l_3=\frac{\sigma_3 l_3}{E};\quad \Delta l_3=\frac{-35\cdot 0{,}4\cdot 10^3}{2\cdot 10^5}=-0{,}07\ \text{мм};$$

4.Суммарное удлинение бруса (перемещение свободного конца).

$$\Delta l=\Delta l_1+\Delta l_2+\Delta l_3;\quad \Delta l=0{,}125+0{,}05-0{,}07=0{,}105\ \text{мм}$$

Геометрические характеристики плоских сечений

Иметь представление о физическом смысле и порядке определения осевых, центробежных и полярных моментов инерции, о главных центральных осях и главных центральных моментах инерции.

Знать формулы моментов инерции простейших сечений, способы вычисления моментов инерции при параллельном переносе осей.

При растяжении и сжатии, смятии и сдвиге деталь сопротивляется деформации всем сечением одинаково. Здесь геометрической характеристикой сечения является площадь.

При кручении и изгибе сечение сопротивляется деформации не одинаково, при расчетах напряжений появляются другие геометрические характеристики сечения, влияющие на сопротивления сечения деформированию.

Статический момент площади сечения

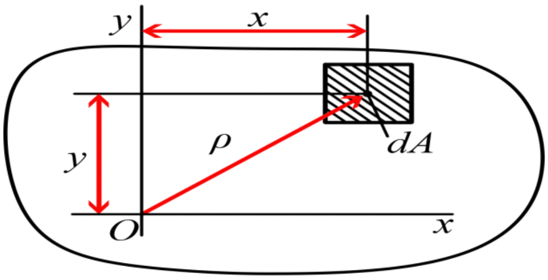


Рис.4.28

Рассмотрим произвольное сечение (Рис.4.28).

Если разбить сечение на бесконечно малые площадки dA и умножить каждую площадку на расстояние до оси координат и проинтегрировать полученное выражение, получим статический момент площади сечения:

1) Относительно оси $\boldsymbol{Ox}$ $\boldsymbol{S_x} = \int_A \boldsymbol{y\, dA}$;
2) Относительно оси $\boldsymbol{Oy}$ $\boldsymbol{S_y} = \int_A \boldsymbol{x\, dA}$;

Для симметричного сечения статические моменты каждой половины площади равны по величине и имеют разный знак. Следовательно, статический момент относительно оси симметрии равен нулю.

Статический момент используется при определении положения центра тяжести сечения:

$$x_C = \frac{\sum_0^n A_k X_k}{\sum_0^n A_k}; y_C = \frac{\sum_0^n A_k y_k}{\sum_0^n A_k}; \quad \sum_0^n A_k y_k \approx \int_A y\, dA$$

Формулы для определения положения центра тяжести можно записать в виде

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \qquad y_C = \frac{S_x}{A}$$

Центробежный момент инерции

Центробежным моментом инерции сечения называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на обе координаты:

$$J_{xy} = \int_A xy\, dA$$

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Центробежный момент инерции относительно осей, проходящих через центр тяжести сечения, равен нулю.

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, называются главными. Главные оси, .проходящие через центр тяжести, называют главными центральными осями сечения.

Осевые моменты инерции

Осевым моментом инерции сечения относительно некоторой оси, лежащей в этой же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой оси:

1) осевой момент инерции сечения относительно оси Ox

$$J_x = \int_A y^2\, dA$$

1) осевой момент инерции сечения относительно оси Oy

$$J_y = \int_A x^2\, dA$$

Полярный момент инерции сечения

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на квадрат их расстояния до этой точки:

$$J_p = \int_A \rho^2\, dA,$$

где p—расстояние до полюса (центра поворота) (Рис.4.28).

Поскольку $p^2=x^2+y^2$, получим: полярный момент инерции, сечения равен сумме осевых:

$$J_p = J_x + J_y$$

Осевые моменты инерции характеризуют сопротивление сечения повороту относительно соответствующей оси.

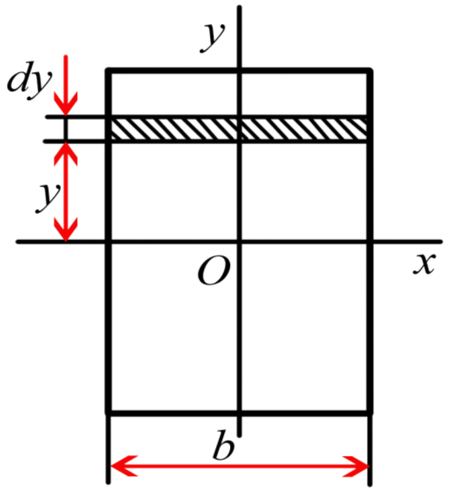
Полярный момент инерция характеризует сопротивление сечения повороту вокруг полюса (начала координат). Единицы измерения моментов инерции: $м^4$; $см^4$; $мм^4$.

Моменты инерции простейших сечений

Осевые моменты инерции прямоугольника (Рис.4.29)

Представим прямоугольник высотой h и шириной b в виде сечения, составленного из бесконечно тонких полос. Запишем площадь такой полосы $bdy=dA$. Подставим в формулу осевого момента инерции относительно оси *Ox:*

$$J_x = \int_A by^2\,dy = b\int_A y^2 dy;$$



$$J_x = b\int_{-h/2}^{h/2} y^2\,dy = \frac{2bh^3}{2^3\cdot 3};$$

Получим: $J_x = \frac{bh^3}{12}$

По аналогии, если разбить прямоугольник на вертикальные полосы, рассчитать площади полос и подставить в формулу для осевого момента инерции относительно оси *Oy,* получим:

Рис.4.29

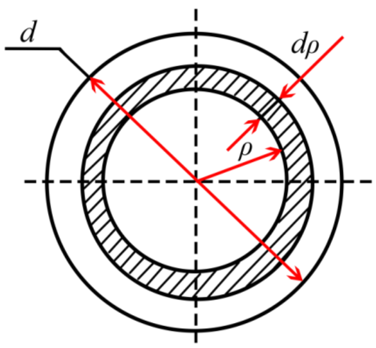
$$J_y = \int_A x^2\,dA = \frac{hb^3}{12}$$

Очевидно, что при $h>b$ сопротивление повороту относительно оси *Ox* больше, чем относительно *Oy*.

Для квадрата*:*

$$h = b; \qquad J_x = J_y = \frac{h^4}{12}$$

Полярный момент инерции **круга**



Для круга вначале вычисляют полярный момент инерции, затем—осевые.

Представим круг в виде совокупности бесконечно тонких колец (Рис.4.30).

Площадь каждого кольца можно рассчитать как площадь прямоугольника с длинной стороной, равной длине соответствующей окружности, и высотой, равной толщине кольца: $dA=2\pi\rho\,d\rho$**.**

Рис.4.30

Подставим это выражение для площади в формулу для полярного момента инерции:

$$J_p = \int_A \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi\int_0^{d/2} \rho^3 d\rho; \quad J_\rho = \frac{2\pi d^4}{4\cdot 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}$$

Получим формулу для расчета полярного момента инерции круга:

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

Подобным же образом можно получить формулу для расчета полярного момента инерции кольца:

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d^4 - d_{\text{вн}}^4)$$

где d—наружный диаметр кольца; d_{BH}—внутренний диаметр кольца.
Если обозначить $d_{BH}/d = c$, то

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4)$$

Осевые моменты инерции круга и кольца

Используя известную связь между осевыми и полярным моментами инерции, получим:

$$J_p = J_x + J_y; \quad J_x = J_y = \frac{J_p}{2};$$

Моменты инерции относительно параллельных осей

Оси Ox о и Ox_o параллельны (Рис.4.31).

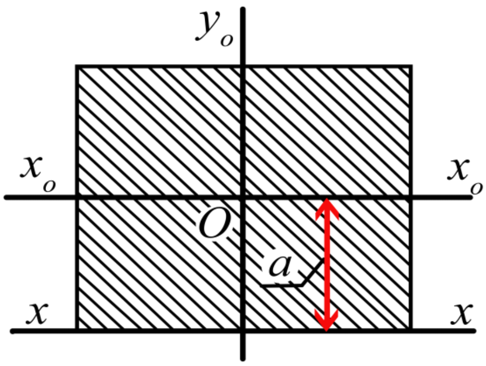


Рис.4.31

При параллельном переносе прямоугольной системы осей y_oOx_o в новое положение y_oOx значения моментов инерции J_x, J_y, J_{xy} заданного сечеия меняются. Задается формула перехода без вывода.

$$J_x = J_{x_0} + Aa^2$$

здесь J_x—момент инерции относительно оси Ox; J_{x_0}—момент инерции относительно оси O_{x_0}

A—площадь сечения;

a—расстояние между осями Ox и Ox_o.

Главные оси и главные моменты инерции

Главные оси—это оси, относительно которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения: минимальный и максимальный.

Главные центральные моменты инерции рассчитываются относительно главных осей, проходящих через центр тяжести.

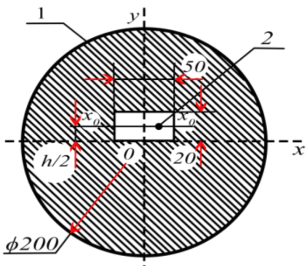


Рис. 4.32

Пример. Определить величину осевых моментов инерции плоской фигуры относительно осей *Ox* и *Oy* (Рис.4.32).

Решение:

1. Определим осевой момент инерции относительно оси *Ox*. Используем формулы для главных центральных моментов. Представим момент инерции сечения как разность моментов инерции круга и прямоугольника.

Для круга $J_{x_1} = \frac{\pi d^4}{64}$

Для прямоугольника $J_{x_{02}} = \frac{bh^3}{12}$

Для прямоугольника ось *Ox* не проходит через ЦТ. Момент инерции прямоугольника относительно оси *Ox:*

$$J_{x_2} = J_{x_{02}} + a^2 A,$$

где *A*—площадь сечения; *a*—расстояние между осями Ox и Ox_o.

$$J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

Момент инерции сечения:

$$J_x = J_{x_1} - J_{x_2}, \quad J_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{3};$$

$$J_x = \frac{3{,}14 \cdot 2^4 \cdot 10^8}{64} - \frac{50 \cdot 2^3 \cdot 10^3}{3} = 783{,}7 \cdot 10^5 \text{мм}^4; \quad J_x = 7837 \text{ см}^4$$

2. Осевой момент инерции относительно оси *Oy:*

$$J_{y_1} = J_{x_1} = \frac{\pi d^4}{64} - \text{круг}; \; J_{y_2} = \frac{hb^3}{12} - \text{прямоуголник}$$

Момент инерции сечения:

$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{h \cdot b^3}{12}; \quad J_y = \frac{3{,}14 \cdot 200^4}{64} - \frac{20 \cdot 50^3}{12} = 760 \cdot 50^5 \text{мм}^4;$$

$$J_y = 7600 \text{ см}^4$$

Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется коэффициент Пуассона?
2. Что понимается под гипотезой плоских сечений?
3. Что называется модулем упругости E? Какова его размерность? Как влияет величина модуля упругости на деформации стержня?
4. Что такое статический момент сечения?
5. Что такое осевой и центробежный моменты инерции плоского сечения?
6. Напишите формулы для вычисления осевых моментов инерции для прямоугольника, квадрата, круга и кольца?
7. Какие внутренние силовые факторы возникают в сечении бруса при растяжении и сжатии?
8. Как распределены напряжения по сечению при растяжении и сжатии?
9. Запишите формулу для расчета нормальных напряжений при растяжении и сжатии.
10. Как назначаются знаки продольной силы и нормального напряжения?
11. В каких единицах измеряется напряжение?
12. Стальной стержень длиной *1,5 м* вытянулся под нагрузкой на *3 мм*. Чему равно относительное удлинение? Чему равно относительное сужение? *(μ=0,25.)*
13. Что характеризует коэффициент поперечной деформации?
14. Сформулируйте закон Гука в современной форме при растяжении и сжатии.
15. Диаметр сплошного вала увеличили в *2* раза. Во сколько раз величатся осевые моменты инерции:

$$J_x = \frac{\pi d^4}{32}$$

16. Осевые моменты сечения равны соответственно J_x=*2,5 мм* и J_y=*6,5 мм*. Определите полярный момент сечения.
17. Осевой момент инерции кольца относительно оси *Ох* J_x=*4 см*^{4}. Определите величину J_p .

4.5 Кручение

Цель занятия: Научить производить расчет конструкции на кручение на прочность и жесткость. Иметь представление о деформациях при кручении, о внутренних силовых факторах при кручении. Уметь строить эпюры крутящих моментов

План:

1. Деформации при кручении
2. Внутренние силовые факторы при кручении
3. Эпюры крутящих моментов
4. Примеры решения задач
5. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Крутящий момент, мощность, эпюра крутящего момента, угол закручивания, жесткость при кручении, модуль сдвига, условие прочности при кручении, касательное напряжение, полярный момент инерции, полярный момент сопротивление, главные напряжение, потенциальная энергия деформации при кручении.

Деформации при кручении

Кручение круглого бруса происходит при нагружении его парами сил с моментами в плоскостях, перпендикулярных продольной оси. При этом образующие бруса искривляются и разворачиваются на угол γ, называемый углом сдвига (угол поворота образующей). Поперечные сечения разворачиваются на угол $<\varphi$, называемый углом закручивания (угол поворота сечения, Рис. 4.33).

Длина бруса и размеры поперечного сечения при кручении не изменяются.

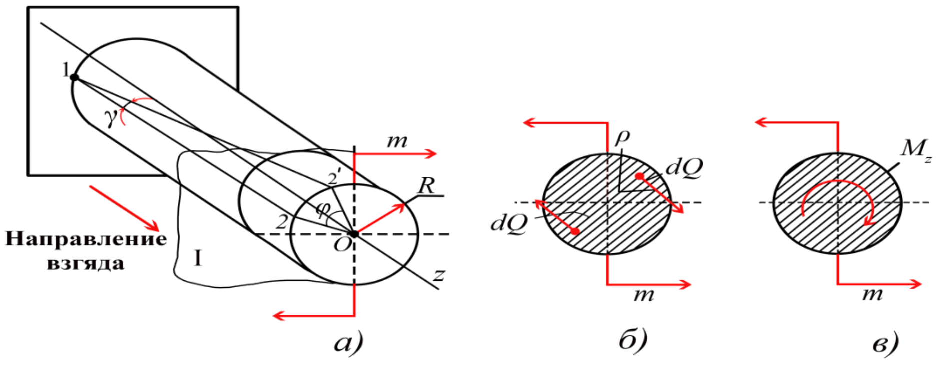


Рис.4.33

Связь между угловыми деформациями определяется соотношением

$$\frac{\varphi}{\gamma} = \frac{l}{R};$$

l—длина бруса; R—радиус сечения.

Длина бруса значительно больше радиуса сечения.
Угловые деформации при кручении рассчитываются в радианах.

Гипотезы при кручении

1.Выполняется гипотеза плоских сечений: поперечное сечение бруса, плоское и перпендикулярное продольной оси, после деформации остается плоским и перпендикулярным продольной оси.

2.Радиус, проведенный из центра поперечного сечения бруса, после деформации остается прямой линией (не искривляется).

3.Расстояние между поперечными сечениями после деформации не меняется. Ось бруса не искривляется, диаметры поперечных сечений не меняются.

Внутренние силовые факторы при кручении

Кручением называется нагружение, при котором в поперечном сечении бруса возникает только один внутренний силовой фактор—крутящий момент.

Внешними нагрузками также являются две противоположно направленные пары сил.

Рассмотрим внутренние силовые факторы при кручении круглого бруса (Рис.4.33).

Для этого рассечем брус плоскостью I и рассмотрим равновесие отсеченной части (Рис.4.33,а). Сечение рассматриваем со стороны отброшенной части.

Внешний момент пары сил разворачивает участок бруса против часовой стрелки, внутренние силы упругости сопротивляются повороту. В каждой точке сечения возникает поперечная сила dQ (Рис.4.33,б). Каждая точка сечения имеет симметричную, где возникает поперечная сила, направленная в обратную сторону. Эти силы образуют пару с моментом $dm=pdQ$; p—расстояние от точки до центра сечения. Сумма поперечных сил в сечении равна нулю:

$$\sum dQ = 0$$

С помощью интегрирования получим суммарный момент сил упругости, называемый крутящим моментом:

$$M_K = \int_A dm = \int_A \rho \, dQ$$

Практически крутящий момент определяется из условия равновесия отсеченной части бруса.

$$\sum m_z = 0, \quad \text{т.е} \; -m + M_z = 0; \quad M_z = m = M_K$$

Крутящий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, действующих на отсеченную часть (Рис.4.33,в).

Эпюры крутящих моментов

Крутящие моменты могут меняться вдоль оси бруса. После определения величин моментов по сечениям строим график-эпюру крутящих моментов вдоль оси бруса.

Крутящий момент считаем положительным, если моменты внешних пар сил направлены по часовой стрелке, в этом случае момент внутренних сил упругости направлен против часовой стрелки (Рис.4.34).

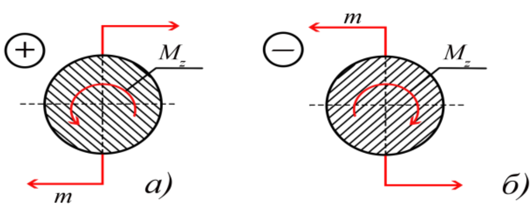


Рис.4.34

Порядок построения эпюры моментов аналогичен построению эпюр продольных сил. Ось эпюры параллельна оси бруса, значения моментов откладывают от оси вверх или вниз, масштаб построения выдерживать обязательно.

Пример 1.

Стальной вал *ABCDE* (Рис. 4.35) *d=30 мм*, свободно вращаются на подшипниках в опорах *A* и *E,* ведомый вал С с крутящим моментом T_2*=450 Н·м*, ведущие в т. *B* и *D* T_1*=275 Н·м* и T_3*=175 Н·м*, действуют в противоположном направлении крутящего момента T_2. Расстояние L_{BC}*=500мм,* L_{CD}*=400мм*, модуль сдвига *G=80ГПа*. Определить максимальное напряжение и угол закручивания в каждой части вала. *B* и *D*.

Решение:

Определяем крутящий момент на участке *CD,* затем определяем угол закручивания

$$T_{CD} = T_2 - T_1 = 450 \text{ Н} \cdot \text{м} - 275 \text{ Н} \cdot \text{м} = 175 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

На конце *AB* крутящий момент равен нулю, принебрегаем трением в опорах, найдем крутящий момент, получили, что T_{CD} положителен. Положительный знак в результате означает, что T_{CD} действует в принятом положительном направлении.

Крутящий момент T_{BC} найдем подобным образом, используя схему свободного конца.

$$T_{BC} = -T_1 = -275\ \text{Н}\cdot\text{м}$$

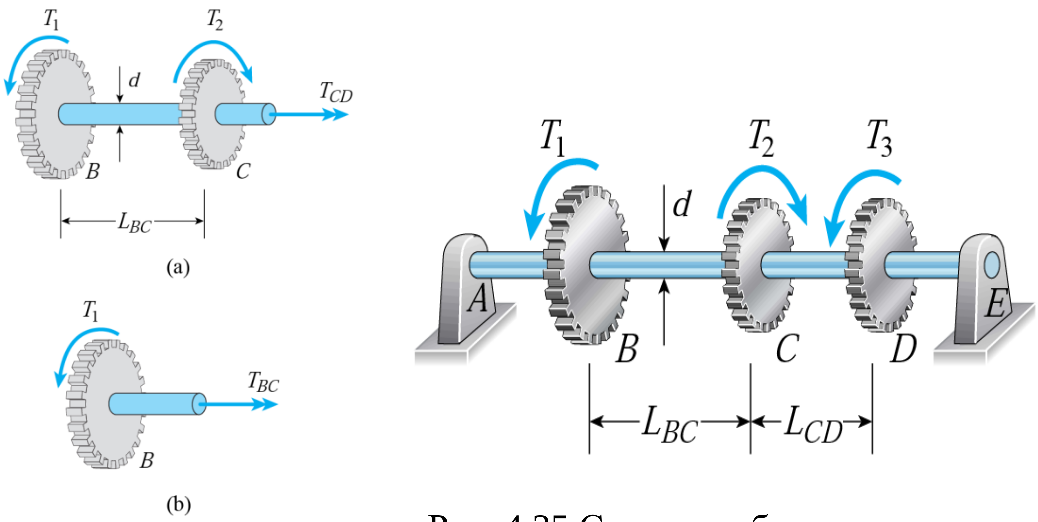


Рис. 4.35 Схемы свободного корпуса

$$\tau_{BC} = \frac{16T_{BC}}{\pi d^3} = \frac{16(275\text{Н}\cdot\text{м})}{\pi(30\text{мм})^3} = 51{,}9\ \text{МПа} \qquad \Leftarrow$$

$$\tau_{CD} = \frac{16T_{CD}}{\pi d^3} = \frac{16(175\text{Н}\cdot\text{м})}{\pi(30\text{мм})^3} = 33{,}0\ \text{МПа} \qquad \Leftarrow$$

таким образом,

Определим угол закручивания, так как ϕ_{BD} есть алгебраическая сумма, поэтому

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD}$$

Вычисляем момент инерции:

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi(30\text{мм})^4}{32} = 79{,}520\ \text{мм}^4$$

Теперь вычисляем углы закручивания:

$$\phi_{BC} = \frac{T_{BC}L_{BC}}{GI_P} = \frac{(-275\text{Н}\cdot\text{м})(500\ \text{мм})}{(80\ \text{ГПа})(79{,}520\ \text{мм})^4} = -0{,}0216\ \text{рад}$$

$$\phi_{CD} = \frac{T_{CD}L_{CD}}{GI_P} = \frac{(175\text{Н}\cdot\text{м})(400\ \text{мм})}{(80\ \text{ГПа})(79{,}520\ \text{мм})^4} = 0{,}0110\ \text{рад}$$

$$\phi_{BD} = \phi_{BC} + \phi_{CD} = -0.0216 + 0.0110 = -0.0106\ \text{рад} = -0{,}61^\circ \qquad \Leftarrow$$

Минус знак означает, что механизм *D* вращается по часовой стрелке (когда рассматривающийся от правого конца вала) относительно механизма *B*. Однако, в большинстве случаях считают абсолютной величиной

Пример 2. На распределительном валу (Рис.4.36) установлены четыре шкива, на вал через шкив 1 подается мощность *12 кВт*, которая через шкивы *2, 3, 4* передается потребителю; мощности распределяются следующим образом: $P_2=8$ *кВт,* $P_3=3$ *кВт,* $P_4=1$ кВт, вал вращается с постоянной скоростью $\omega=25$ *рад/с*. Построить эпюру крутящих моментов на валу.

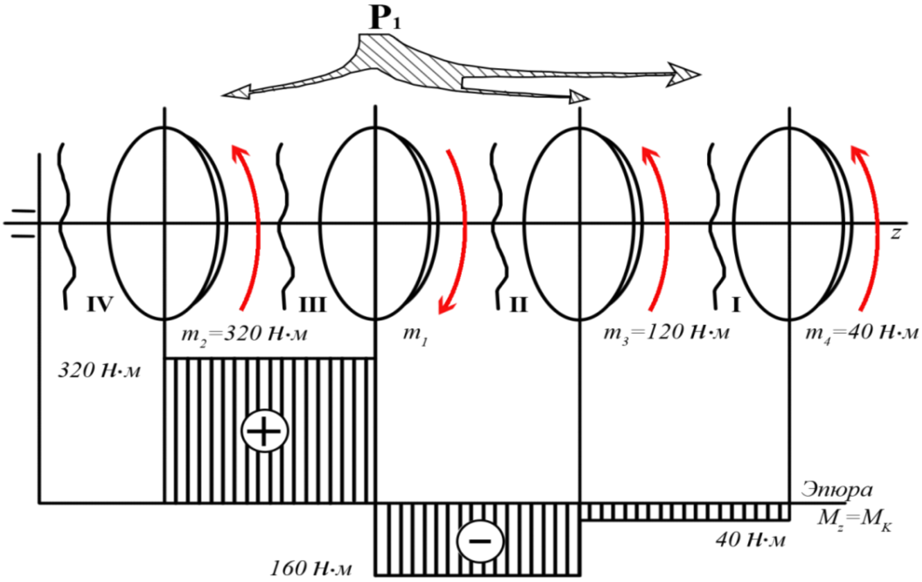


Рис.4.36

Решение:

1. Определяем моменты пар сил на шкивах.

Вращающий момент определяем из формулы мощности при вращательном движении

$$P = m\omega, \qquad m = \frac{P}{\omega}$$

Момент на шкиве 1 движущий, а моменты на шкивах 2, 3, 4—моменты сопротивления механизмов, поэтому они имеют противоположное направление. Брус скручивается между движущим моментом и моментами сопротивления. При равновесии момент движущий равен сумме моментов сопротивления:

$$m_1 = \frac{12 \cdot 10^3}{25} = 480 \text{ Н} \cdot \text{ м}; \quad m_2 = \frac{8 \cdot 10^3}{25} = 320 \text{ Н} \cdot \text{ м};$$

$$m_3 = \frac{3 \cdot 10^3}{25} = 120 \text{ Н м}; \quad m_4 = \frac{1 \cdot 10^3}{25} = 40 \text{ Н} \cdot \text{ м}$$

$$m_1 = m_2 + m_3 + m_4; \quad m_1 = 320 + 120 + 40 = 480 \text{ Н} \cdot \text{ м}$$

2. Определяем крутящие моменты в поперечных сечениях бруса с помощью метода сечений.

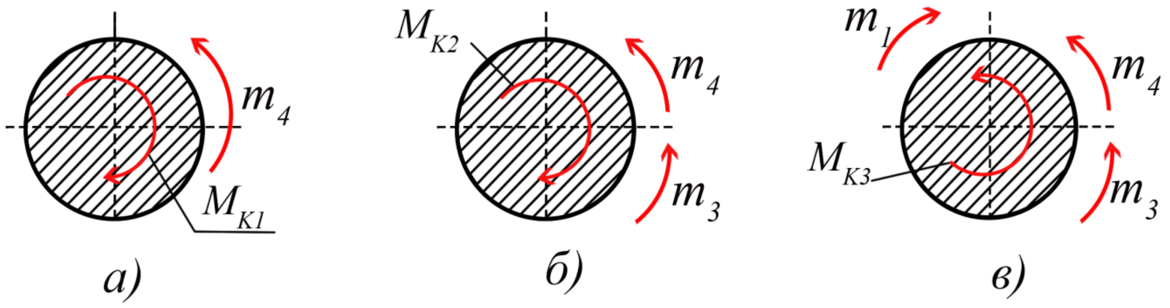


Рис.4.37

Сечение I (Рис.4.37,а):
$m_4 + M_{K_1} = 0$; $M_{K_2} = m_4$; $M_{K_1} = 40$ Н · м—крутящий момент отрицательный.
Сечение II (Рис.4.37,б):
$m_4 - m_3 + M_{K_2} = 0$; $М_{K_2} = m_3 + m_4$; $M_{K_2} = 40 + 120 = 160$ Н · м—крутящий момент отрицательный.
Сечение III (Рис.4.37,в):
$-m_4 - m_3 + m_1 - M_{K_3} = 0$; $-M_{K_3} = m_4 + m_3 - m_1$; $-M_{K_3} = 40 + 120 - 480$; $M_{K_3} = 320$ Н · м-крутящий момент положительный.
Сечение IV: $M_{K_4} = m_4 - m_3 + m_1 - m_2 = 0$
3. Строим эпюру крутящих моментов. Заметим, что скачок ня эпюре всегда численно равен приложенному вращающему момент
Выбираем соответствующий масштаб.
Откладываем значения моментов, штрихуем эпюру поперек, об водим по контуру, записываем значения моментов (см. эпюру под схемой вала (Рис. 4.36)). Максимальный крутящий момент на участке III $M_{K_3} = 320\ Н \cdot м$

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется кручением?
2. Какие деформации возникают при кручении?
3. Какие гипотезы выполняются при деформации кручения?
4. Изменяются ли длина и диаметр вала после скручивания?
5. Какие внутренние силовые факторы возникают при кручении?

4.6 Изгиб

Цель занятия: Ознакомить студентов с основными понятиями по теме изгиб. Научить определять внутренние усилия при изгибе (Q, M_u) и построение их эпюр

Иметь представление о видах изгиба и внутренних силовых факторах.

Знать методы для определения внутренних силовых факторов и уметь ими пользоваться для определения внутренних силовых факторов при прямом изгибе.

Знать распределение нормальных напряжений по сечению балки при чистом изгибе, расчетные формулы и условия прочности.

Уметь выполнять проектировочные и проверочные расчеты на прочность, выбирать рациональные формы поперечных сечений.

План:

1. Деформация при изгибе
2. Формула для расчета нормальных напряжений при изгибе
3. Рациональные сечения при изгибе
4. Расчет на прочность при изгибе
5. Примеры решения задач
6. Контрольные вопросы и задания

Ключевые слова: Изгиб, прямой изгиб, чистый изгиб, косой изгиб, поперечный изгиб, поперечная сила, изгибающий момент, опора, опорная реакция, заделка, шарнирно подвижная опора, шарнирно неподвижная опора, статически определимая задача, статически неопределимая задача, уравнение равновесия, внутренние усилия, эпюра.

Изгибом называется такой вид нагружения, при котором в поперечном сечении бруса возникает внутренний силовой фактор—изгибающий момент.

Брус, работающий на изгиб, называют **балкой.**

Изображен брус, закрепленный справа (защемление), нагруженный внешними силами и моментом (Рис.4.38).

Плоскость, в которой расположены внешние силы и моменты, называют силовой плоскостью.

Если все силы лежат в одной плоскости, изгиб называют плоским.

Плоскость, проходящая через продольную ось бруса и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называется главной плоскостью бруса.

Если силовая плоскость совпадает с главной плоскостью бруса, изгиб называют прямым (Рис.4.38).

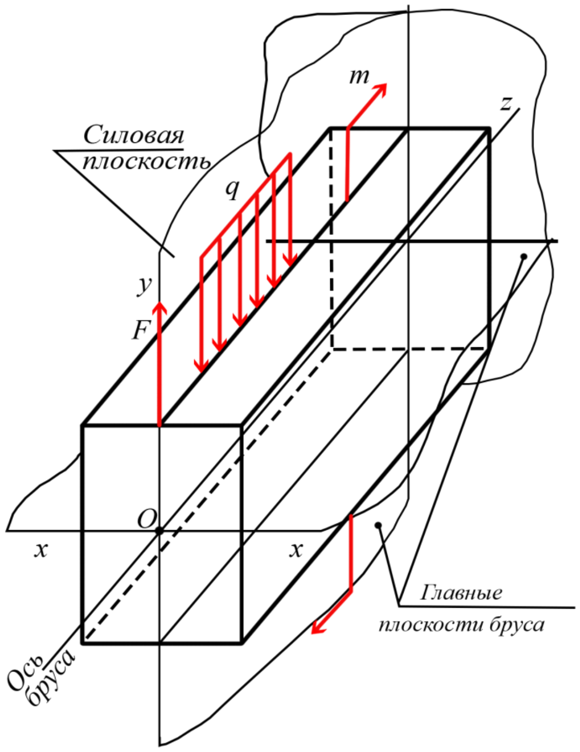


Рис.4.38

Если силовая плоскость не проходит через главную плоскость бруса, изгиб называют косым изгибом (Рис.4.39).

Внутренние силовые факторы при изгибе

Пример. Рассмотрим балку, на которую действует пара сил с моментом m и внешняя сила F (Рис. 4.40,а). Для определения внутренних силовых факторов пользуемся методом сечений.

Рассмотрим равновесие участка 1 (Рис.4.40,б).

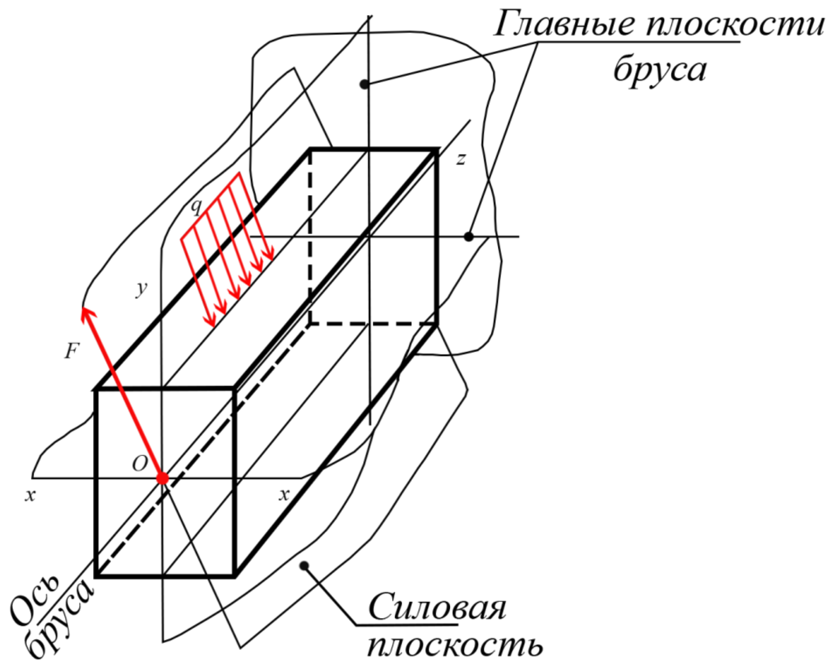


Рис.4.39

Под действием внешней пары сил участок стремится развернуться по часовой стрелке.

Силы упругости, возникающие в сечении 1, удерживают участок в равновесии.

Продольные силы упругости выше оси бруса направлены налево, а силы ниже оси направлены направо. Таким образом, при равновесии участка 1 получим: $F_z=0$. Продольная сила N в сечении равна нулю. Момент сил упругости относительно оси Ox может быть получен, если суммировать элементарные моменты сил упругости в сечении 1-1 относительно оси Ox:

$$M_x = \int_A y\, dN$$

Этот момент называют изгибающим моментом $M_x=M_u$.

Из схемы вала на (Рис. 4.40,б) видно, что часть волокон (выше оси) испытывают сжатие, а волокна ниже оси растянуты. Следовательно, в сечении должен существовать слой не растянутый и не сжатый, где напряжения σ равны нулю.

Такой слой называют нейтральным слоем (НС). Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения бруса называют нейтральной осью.

Нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения. Здесь нейтральный слой совпадает с осью Ox.

Практически величина изгибающего момента в сечении определяется из уравнения равновесия:

$$\sum \boldsymbol{m_{x_{1-1}} = m - M_{x_1} = 0}; \quad \boldsymbol{M_{x_1} = m}$$

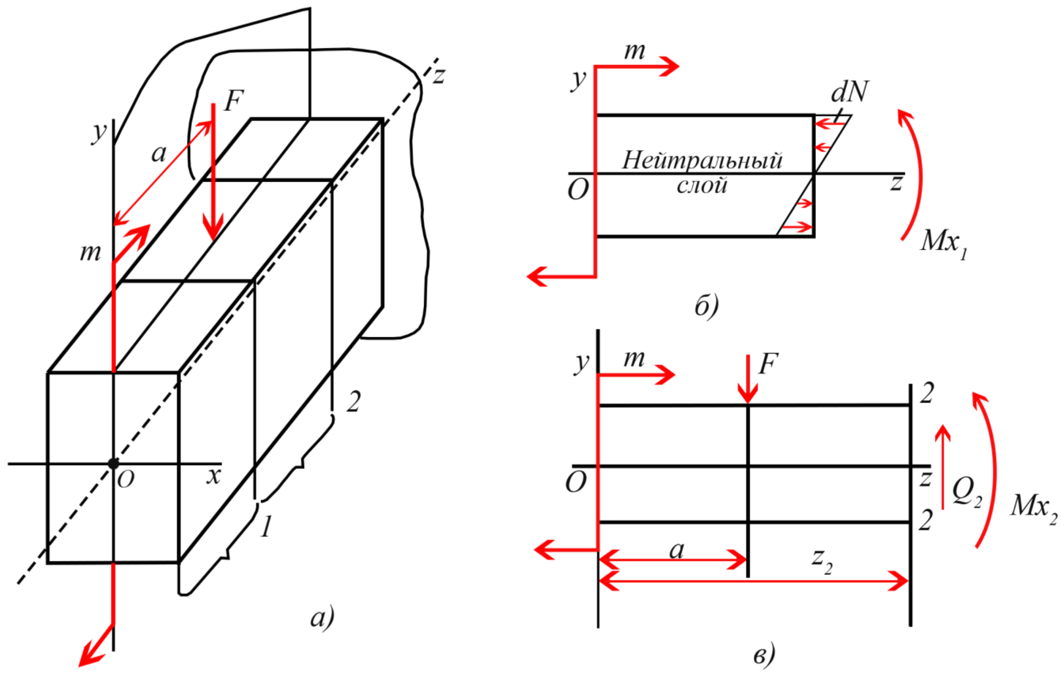


Рис.4.40

Таким образом, в сечении 1-1 продольная сила равна нулю, изгибающий момент в сечении постоянен.

Изгиб, при котором в поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент, называется чистым изгибом.

Рассмотрим равновесие участка бруса от свободного конца до сечения 2 (Рис.4.40,в).

Запишем уравнения равновесия для участка бруса:

$\sum F_y = 0; \ -F + Q_2 = 0; \ \ Q_2 = F = const$

В сечении бруса 2-2 действует поперечная сила, вызывающая сдвиг

$\sum m_{x_{2-2}} = 0; \quad m - F(z_2 - a) - M_{x_2} = 0$

Изгибающий момент в сечении:

$$M_{x_2} = m - F(z_2 - a);$$

$\mathbf{z_2}$—расстояние от сечения 2 до начала координат.

Изгибающий момент зависит от расстояния сечения до начала координат.

Изгиб, при котором в поперечном сечении бруса возникает изгибающий момент и поперечная сила, называется поперечным изгибом.

Принятые в машиностроении знаки поперечных сил и изгибающих моментов

Знаки поперечных сил

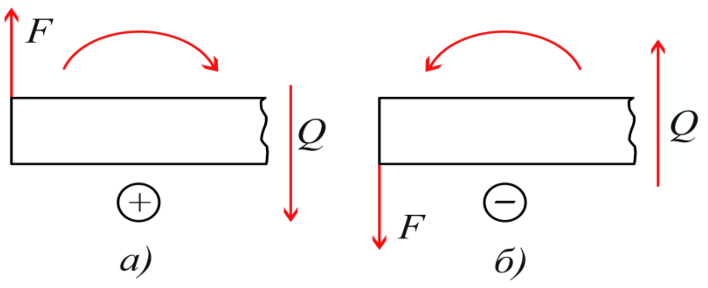


Рис.4.41

Поперечная сила в сечении считается положительной, если она стремится развернуть сечение по часовой стрелке (Рис.4.41,а), если против, отрицательно (Рис.4.41,б).

Знаки изгибающих моментов

Если действующие на участке внешние силы стремятся изогнуть балку выпуклостью вниз, то изгибающий момент считается положительным (Рис.4.42,а), если наоборот —отрицательным (Рис.4.42,б).

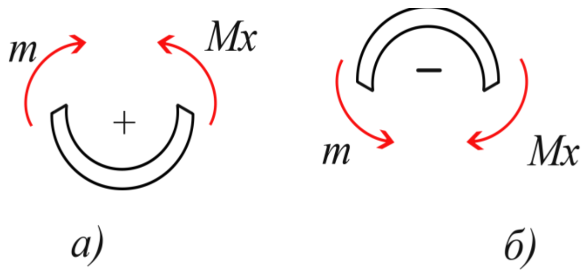


Рис.4.42

Пример 1. Простой стержен *AB* нагружен силой *P* и оментом пара сил M_0, действуя как показано на (Рис 4.42), Найдите, поперечную силу *V* и изгибающий момент M. в сечениях, расположенных следующим образом: *(a)* небольшое расстояние налево от середины луча, и *(b)* небольшое расстояние направо от середины луча

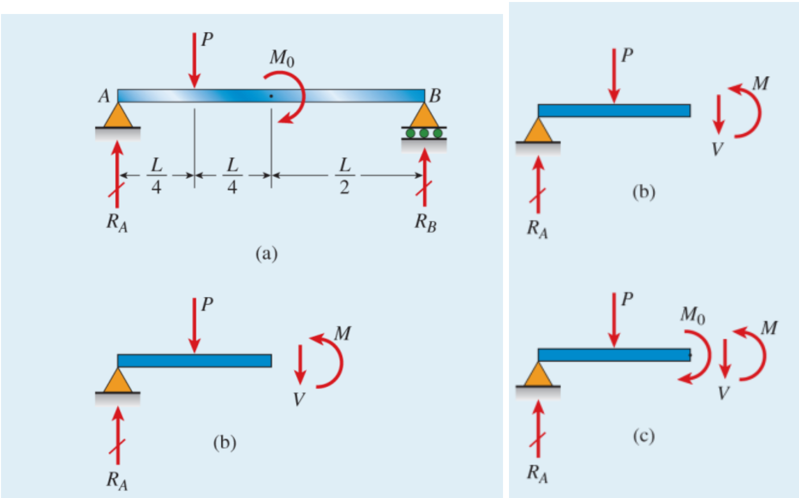


Рис. 4.43

Решение: Реакции. первый шаг при анализе этого стержня-определение реакции R_A и R_B. Сумма моментов относительно B и A дает два уравнения равновесия, из который находим, соответственно,

$$R_A = \frac{3P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad R_B = \frac{P}{4} + \frac{M_0}{L}$$

(a) Сила сдвига и изгибающий момент налево от середины. Это свободное тело проводится в равновесии грузом P, R_A реакции, и двумя неизвестными V и изгибающий момент M_O, Обе силовые факторы которых показаны в положительных направлениях . Пара M_O не действует на свободное тело, потому что стержень разрезан налево от его точки приложения.

$$\sum F_{\text{верт}} = 0 \qquad R_A - P - V = 0$$

Откуда мы получаем поперечную силу :

$$V = R_A - P = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L}$$

Уравнения моментов относительно сечения

$$\sum M = 0 \qquad -R_A\left(\frac{L}{2}\right) + P\left(\frac{L}{4}\right) + M = 0$$

Из которого получим выравненные для изгибающим моментом. Решая в течение изгибающего момента M, мы добираемся

$$M = R_A\left(\frac{L}{2}\right) - P\left(\frac{L}{4}\right) = \frac{PL}{8} - \frac{M_0}{2} \qquad (c) \Leftarrow$$

Изгибающий момент M может быть или положительным или отрицательным в зависимости от величин грузов P и M_O. Поперечную силы и изгибающий момент действует направо от середины. В этом случае получим

$$V = -\frac{P}{4} - \frac{M_0}{L} \qquad M = \frac{PL}{8} + \frac{M_0}{2} \qquad (d, e) \Leftarrow$$

Эти результаты показывают, что, когда сечение перемещено слева направо от пары M_O, сила сдвига не изменяется (потому что вертикальные силы, действующие на свободное тело, не изменяются), но изгибающий момент увеличивается алгебраически на величину, равную M_O.

Пример 2. На балку действует пара сил с моментом т и распределенная нагрузка интенсивностью q. Балка защемлена справа (Рис.4.44).

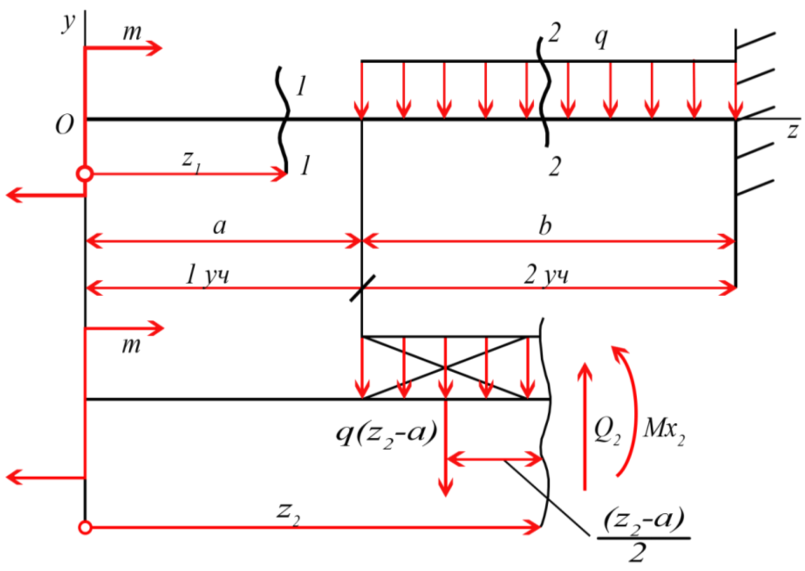


Рис.4.44

Рассечем балку на участке 1 на расстоянии Z_1 от левого края. Рассмотрим равновесие отсеченной части. Из уравнения

$$\sum m_{x_1} = 0$$

Получим:

$$m - M_{x_1} = 0; \quad M_{x_1} = m = const$$

Участок 1—участок чистого изгиба.

Рассечем балку на участке 2 на расстоянии $z_2>a$ от края, z_2-расстояние сечения от начала координат.

Из уравнения $\sum F_y = 0$ найдем поперечную силу Q_2 Заменяем распределенную нагрузку на рассматриваемом участке равнодействующей силой $q(z_2—a)$.

$$\sum F_y = -q(z_2 - a) + Q_2 = 0 \quad Q_2 = q(z_2 - a)$$

Из уравнения моментов определяем изгибающий момент в сечении:

$\sum m_{x_2} = 0$;

$\sum m_{x_2} = m - q(z_2 - a)\frac{z_2 - a}{2} - M_{x_2} = 0$;

На втором участке возникает поперечный изгиб.

$$M_{x_2} = m - \frac{q(z_2 - a)^2}{2}$$

Выводы

При действии распределенной нагрузки возникает поперечная сила, линейно зависящая от координаты сечения.

Изгибающий момент на участке с распределенной нагрузки меняется в зависимости от координаты сечения по параболическому закону.

Дифференциальные зависимости при прямом поперечном изгибе.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов существенно упрощается при использовании дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью равномерно распределенной нагрузки (теорема Журавского):

Поперечная сила равна производной от изгибающего момента по длине балки:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q$$

Интенсивность равномерно распределенной нагрузки равна производной от поперечной силы по длине балки:

$$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dz}} = \mathrm{q}$$

Из выше указанного следует:

Если $M_и = const$, то $Q = 0$; если $Q = const$; то $q = 0$

Интенсивность распределенной нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по длине балки:

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q$$

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов можно строить, предварительно разделив балку на участки нагружения и составляя уравнения, выражающие изменения Q и M_x по участкам.

Напомним, что границы участков нагружения—это сечения, в которых приложены внешние нагрузки.

Пример 1. Консольный стержень луч с двум сосредоточенными нагрузками. Найдите силу сдвига и диаграммы изгибающего момента для консольного стержня с двумя сосредоточенными грузами (Рис. 4.45)

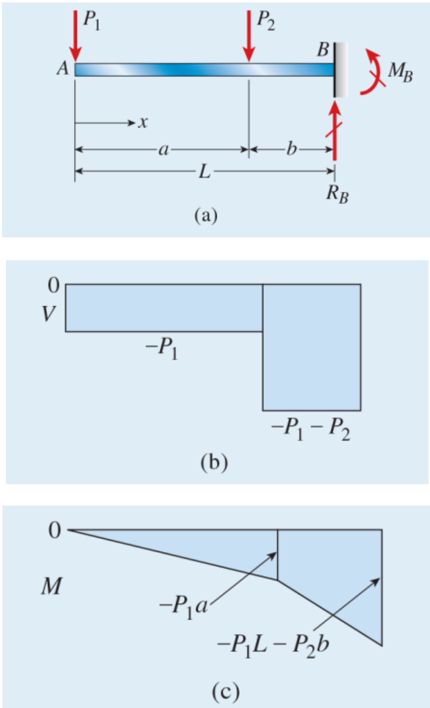


Рис. 4.45

Решение: Реакции в точке зацеплении *(B)* стержень действует вертикальная реакция R_B (положительный когда вверх) и M_B реакции момента (положительный, когда против часовой стрелки):

$$R_B = P_1 + P_2 \qquad M_B = -(P_1L + P_2b)$$

Силы сдвига и изгибающие моменты. Мы получаем силы сдвига и изгибающие моменты, провода сечении в каждом из двух участков и решая уравнения равновесия.

$$V = -P_1 \qquad M = -P_1x \qquad (0 < x < a)$$

$$V = -P_1 - P_2 \qquad M = -P_1x - P_2(x - a) \qquad (a < x < L)$$

Соответствующие поперечные силы и диаграммы изгибающего момента показано на (Рис. 4.45) . Сила сдвига является постоянной между нагрузками и достигает своего максимального численного значения в опоре, где равно в вертикальной реакции R_B.

Диаграмма изгибающего момента состоит из двух наклоненных прямых, каждый имеющий наклон, равный сдвигу, вызывает в соответствующем сегменте луча. Максимальный изгибающий момент действует опоре и равен в M_B.

Пример 2. На балку действуют сосредоточенные силы и момент (Рис. 4.46). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

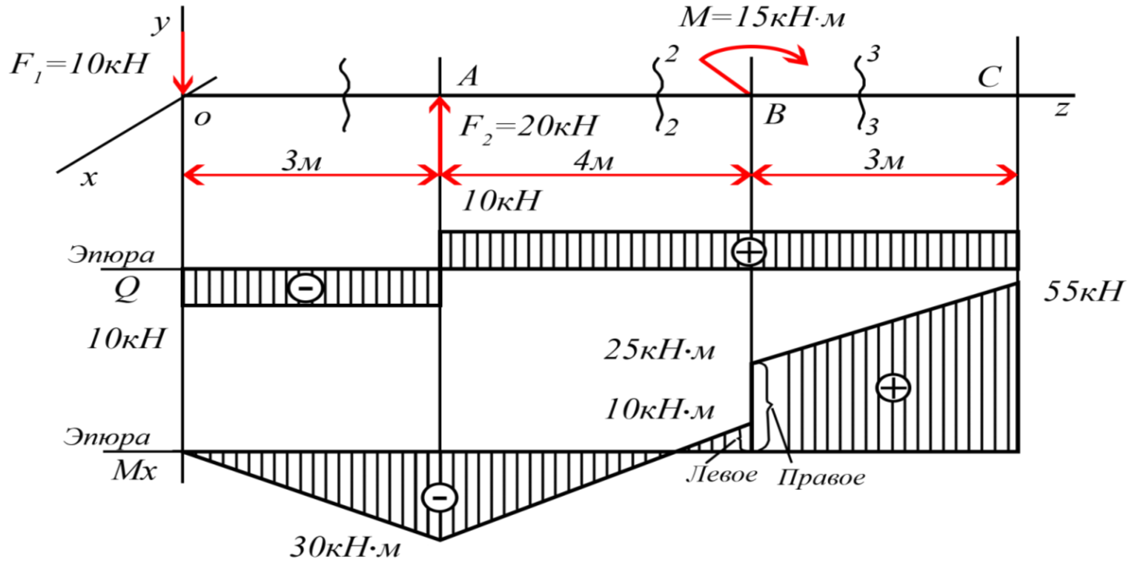


Рис.4.46

Решение:

Последовательно по участкам нагружения рассматриваем внутренние силовые факторы в сечениях. Силовые факторы определяем из условий равновесия отсеченной части. Для каждого участка записываем уравнения внутренних силовых факторов.

Используем известные правила:

-поперечная сила численно равна алгебраической сумме проекций внешних сил на ось Oy,

-изгибающий момент численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, действующих на отсеченную часть, относительно нейтральной оси, совпадающей с осью Ox

-принятые знаки поперечных сил и изгибающих моментов (Рис.4.47):

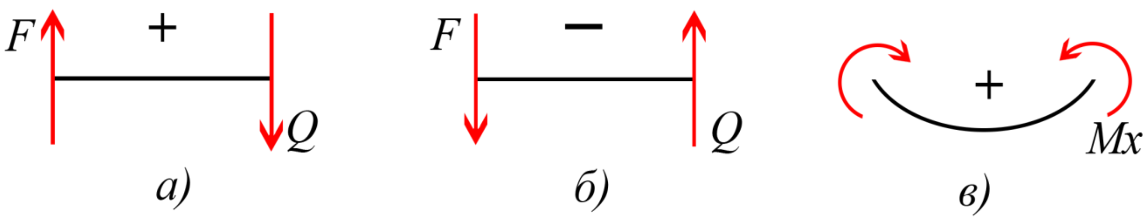


Рис.4.47

Составим уравнения равновесия.

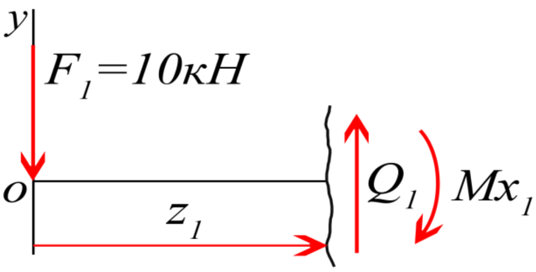


Рис. 4.48 а

1. Рассмотрим участок 1 (Рис.4.48,а).

$$\sum y = 0; \; -F_1 + Q_1 = 0; \;\; Q_1 = F_1;$$

$Q_1 = -10$ кН

Сила Q_1—отрицательна. Сила Q на участке 1 постоянна.

$\sum m_{x_1} = 0; -F_1 z_1 + M_{x_1} = 0; M_{x_1} = F_1 z_1$

M_x −отрецательный

$0 \le z_1 \le 3$ м:

при $z_1 = 0; \quad M_{x_0} = 0;$

при $z_1 = 3\,m; \; M_{x_A} = -30$ кН

Изгибающий момент меняется по линейному закону, график—прямая линия.

1. Рассмотрим участок 2 (Рис.4.48,б).

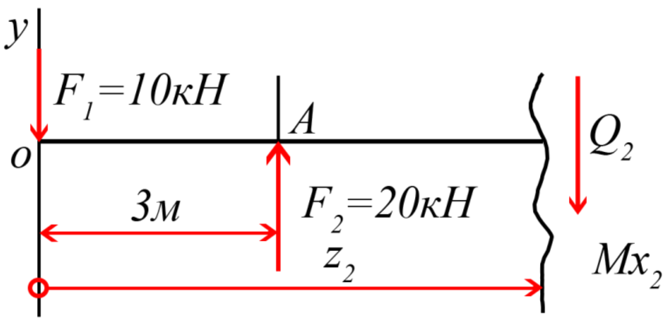


Рис.4.48 б

$$\sum F_y = 0; \; -F_1 + F_2 - Q_2 = 0;$$

$$Q_2 = -F_1 + F_2$$

$$Q_2 = -10 + 20 = 10 \text{ кН}$$

Сила Q_2 положительна.

$$\sum m_{x_2} = 0;$$

$$-F_1 z_2 + F_2(z_2 - 3) + M_{x_2} = 0;$$

$$M_{x_2} = F_1 z_2 - F_2(z_2 - 3)$$
$$3\ \text{м} \le z_2 \le 7\ \text{м}:$$
$$\text{при}\ z_2 = 3\ m$$
$$M_{x_A} = 10 \cdot 3 = 30\ \text{кН} \cdot \text{м};$$
$$M_{x_A} - \ \text{отрицательный}$$
$$\text{при}\ z_2 = 7\ m$$
$$M_{x_B}^{\text{слева}} = 10 \cdot 7 - 20 \cdot 4 = -10\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

Знак сменился; $M_{X_в}$ слева от сечения B—положительный.

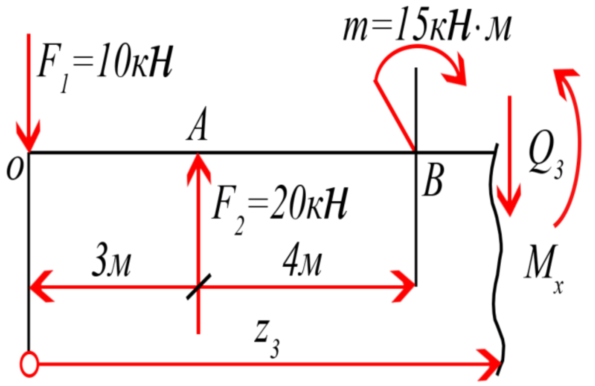
Поперечную силу и изгибающий момент можно определять сразу из зависимостей

$$Q_y = \sum F_y;\ \ M_x = \sum m_x$$

Не составляя уравнения равновесия участка.

Знак каждого из слагаемых этих уравнений определяем отдельно (участок 3).

2. Рассмотрим участок 3 (Рис.4.48,в).



$$Q_3 = -10 + 20 = 10\ \text{кН}$$

положительна

$$\sum m_{x_3} = 0;$$
$$M_{x_3} = -F_{z_3} + F_2(z_3 - 3) + m$$
$$7\ m \le m_3 \le 10\ m:$$
$$\text{при}\ z_3 = 7\ m$$

Рис.4.48 в

$$M_{x_A}^{\text{справа}} = -10 \cdot 7 + 20 \cdot 4 + 15 = 25\ \text{кН} \cdot \text{м};$$
$$\text{при}\ z_3 = 7\ m$$
$$M_{x_B} = -10 \cdot 10 + 20 \cdot 10 + 15 = 55\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

Обращаем внимание, что для точки B получено два значения изгибающих моментов: из уравнения для участка 2 левее точки B и из уравнения для участка 3—правее точки B.

Это объясняется тем, что именно в этой точке приложен внешний момент и поэтому внутренний момент сил упругости меняется

В точках приложения внешнего момента на эпюре моментов появится скачок, равный величине приложенного момента.

Поперечная сила в точке *B* для второго и третьего участков одинакова. Следовательно, приложение внешнего момента не отражается на эпюре поперечных сил. График поперечной силы на участке 3—прямая линия.

График изменения изгибающих моментов на третьем участке также прямая линия.

3. Построение эпюр. Порядок построения эпюр остается прежним: масштабы эпюр выбираются отдельно, исходя из значений максимальных сил и моментов.

Графики обводятся толстой основной линией и заштриховываются поперек. На графиках указываются значения поперечных сил, изгибающих моментов и единицы измерения.

Нормальные напряжения при изгибе.

Расчеты на прочность

Деформации при чистом изгибе

При чистом изгибе в сечении возникает только один внутренний силовой фактор—изгибающий момент.

Рассмотрим деформацию бруса, нагруженного внешней парой сил с моментом (Рис.4.49,а).

При чистом изгибе выполняются гипотезы плоских сечений и не надавливаемости слоев.

Сечения бруса, плоские и перпендикулярные продольной оси, после деформации остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси.

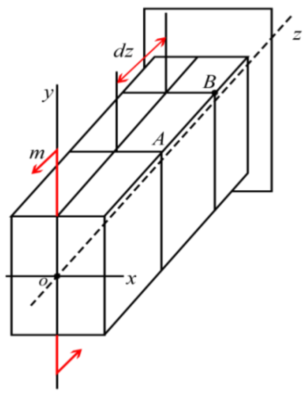


Рис. 4.49 а

Продольные волокна не давят друг на друга, поэтому слои испытывают простое растяжение или сжатие.

Действуют только нормальные напряжения.

Поперечные размеры сечений не меняются.

Продольная ось бруса после деформации изгиба искривляется и образует дугу окружности радиуса ρ (Рис.4.49,б) Материал подчиняется закону Гука.

Можно заметить, что слои, расположенные выше продольной оси, растянуты, расположенные ниже оси—сжаты (Рис.4.49,б). Так как деформации по высоте сечения меняются непрерывно, имеется слой, в котором нормальные напряжения а равны нулю; такой слой называют нейтральным слоем (НС). Доказано, нейтральный слой проходит через центр тяжести сечения; ρ—радиус кривизны нейтрального слоя.

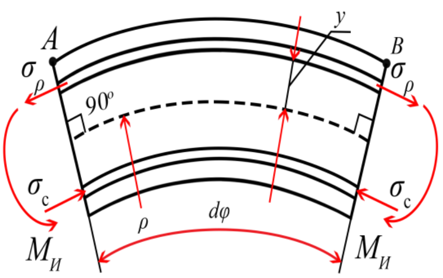


Рис.4.50 б

Рассмотрим деформацию слоя, расположенного на расстоянии $\boldsymbol{y}$ от нейтральной оси (участок AB**,** Рис.4.50,б).

Длина участка до деформации равна длине нейтральной оси:

$$l_0 = \rho d\varphi$$

Абсолютное удлинение слоя

$$\Delta l = (\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi = y d\varphi$$

Относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}; \quad \varepsilon = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}$$

Относительное удлинение прямо пропорционально расстоянию слоя до нейтральной оси.

Используем закон Гука при растяжении: $\sigma = E\varepsilon$.

Получим зависимость нормального напряжения при изгибе от положения слоя:

$$\sigma_и = \frac{Ey}{\rho}$$

Формула для расчета нормальных напряжений при изгибе

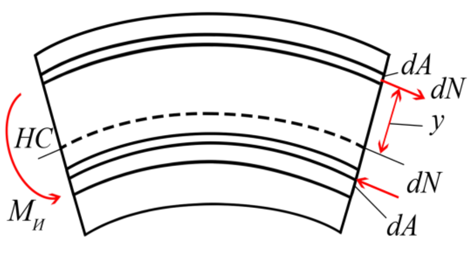


Рис.4.51

Рассмотрим изогнутый участок бруса dz (Рис. 4.51).

dN—элементарная продольная сила в точке сечения;

dA—площадь элементарной площадки;

dm—элементарный момент, образованный силой относительно нейтрального слоя.

$$dN = \sigma_и dA; \quad dm = \sigma_и y dA$$

Суммарный изгибающий момент сил упругости в сечении

$$M_и = \int_A \sigma_и y dA = \int_A \frac{Ey}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA$$

$\int_A y^2 dA = J_x$-осевой момент инерции сечения. Таким образом:

$$M_и = \frac{E}{\rho} J_x$$

Откуда $E/p = M_u/J_x$-Ранее получено

$$\sigma_и = \frac{Ey}{\rho}$$

После ряда преобразований получим формулу для определения нормальных напряжений в любом слое поперечного сечения бруса:

$$\sigma_и = \frac{M_и y}{J_x},$$

где J_x—геометрическая характеристика сечения при изгибе.

Эпюра распределения нормальных напряжений при изгибе изображена на (Рис.4.52).

По эпюре распределения нормальных напряжений видно, что максимальное напряжение возникает на поверхности.

Подставим в формулу напряжения значение $y = y_{max}$.
Получим

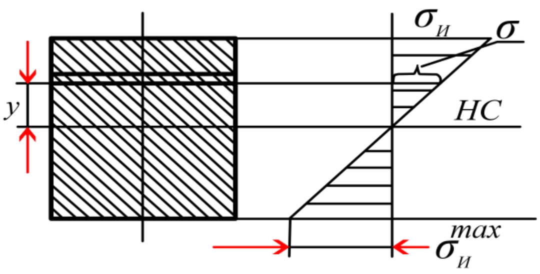


Рис.4.52

$$\sigma_и = \frac{M_и y_{max}}{J_x}$$

Отношение $\frac{J_x}{y_{max}}$ принято обозначать W_x:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}$$

Эта величина называется моментом сопротивления сечения при изгибе, или осевым моментом сопротивления.

Размерность—*мм*^{3}, *см*^{3}.

W_x характеризует влияние формы и размеров сечения на прочность при изгибе.

Напряжение на поверхности

$$\sigma_и^{max} = \frac{M_и}{W_x}$$

Рациональные сечения при изгибе

Определим рациональные сечения при изгибе, для этого сравним моменты сопротивления простейших сечений.

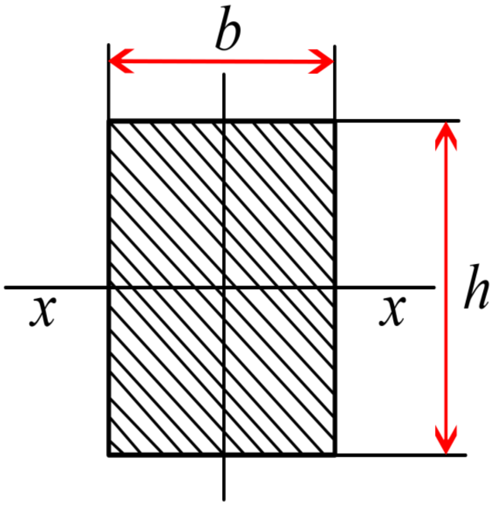


Рис.4.53

Осевой момент инерции прямоугольника (Рис.4.53) равен

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

Осевой момент сопротивления прямоугольника

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}$$

Сравним сопротивление изгибу двух прямоугольных сечений (Рис. 4.54).

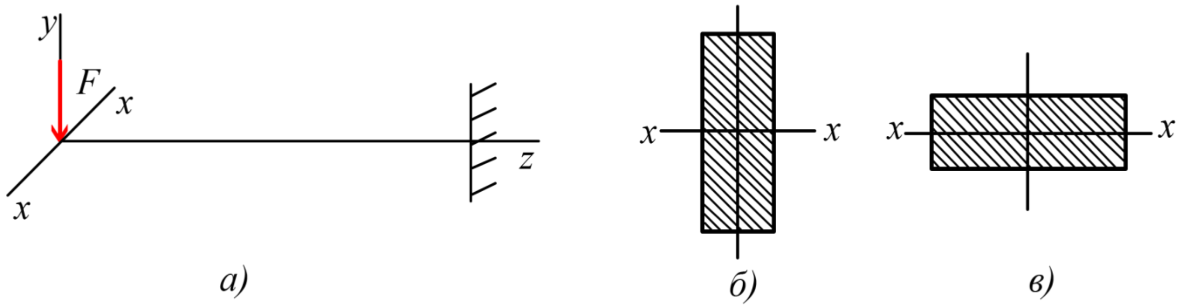


Рис.4.54

Вариант на (Рис.4.54,б) обладает большим сопротивлением изгибу при прочих равных условиях.

Осевой момент инерции круга (Рис.4.55) равен

$$J_x = \frac{\pi d^4}{64}$$

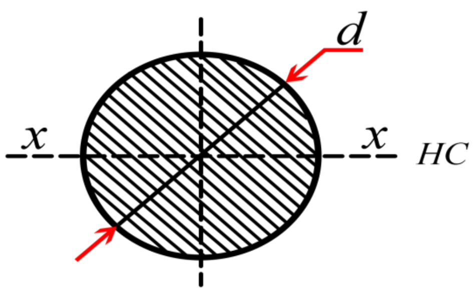


Рис.4.55

Осевой момент сопротивления круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

Все необходимые расчетные данные (площади, моменты инерции и сопротивления) стандартных сечений приводятся в таблицах стандартов (Приложение 1).

Для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, выбирают сечения, симметричные относительно оси, вокруг которой совершается изгиб (Рис.4.56).

Пример.

Сравним моменты сопротивления двух сечений одинаковой площади: двутавра (Рис.4.56,г) и круга (Рис.4.56,а).

Двутавр № 10 имеет площадь 12 см^2, осевой момент инерции 198 см^4, момент сопротивления 39,7 см^3.

Круг той же площади имеет диаметр $d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$=4 см, осевой момент инерции $\boldsymbol{J_x}$=25,12 см^4, момент сопротивления $\boldsymbol{W_x}$=6,2 см^3.

$$\frac{W_{x_1}}{W_{x_2}} = \frac{39{,}7}{6{,}2} \approx 6$$

Сопротивление изгибу у двутавровой балки в шесть раз выше, чем у балки круглого сечения.

Из этого примера можно сделать вывод: сечения прямоугольные, квадратные, круглые и ромбовидные нерациональны (Рис.4.56,а,б).

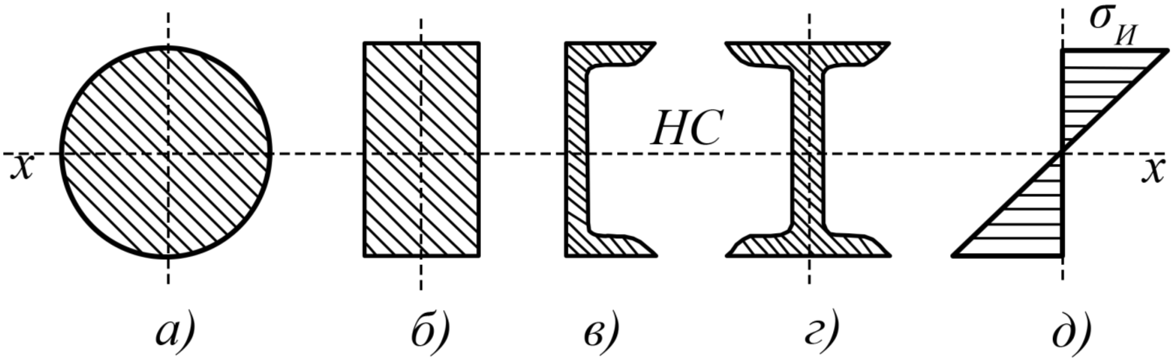


Рис.4.56

Для материалов, обладающих разной прочностью при растяжении и сжатии (хрупкие материалы обладают значительно большей прочностью на сжатие, чем на растяжение), выбирают асимметричные сечения тавр, рельс и др.

Расчет на прочность при изгибе

Рассчитать на прочность—это значит определить напряжение и сравнить его с допустимым.

Условие прочности при изгибе:

$$\sigma_{и}^{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma_{и}]$$

где $[\sigma_u]$—допускаемое напряжение.

По этому неравенству проводят проверочные расчеты после окончания конструирования балки.

Для балок из хрупких материалов расчеты ведут по растянутой и сжатой зоне одновременно (Рис.4.57).

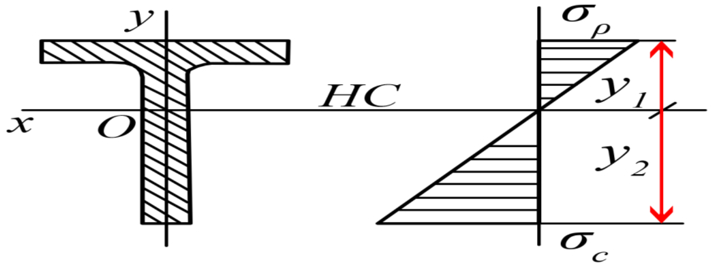


Рис.4.57

$$\sigma_p^{max} = \frac{M_x y_1}{J_x} \leq [\sigma_p];$$
$$\sigma_c^{max} = \frac{M_x y_2}{J_x} \leq [\sigma_c];$$

При проектировочном расчете определяют потребные размеры поперечных сечений балки или подбирают материал.

Схема нагружения и действующие нагрузки известны.

По условию прочности можно определить нагрузочную способность балки $[M_u]=Wp[\sigma]$.

Примеры.

Подобрать размеры сечения балки в виде двутавра. Известна схема нагружения балки (Рис.4.58), материал—сталь, допускаемое напряжение материала при изгибе $[\sigma_p]=[\sigma_c]=160$ *МПа.*

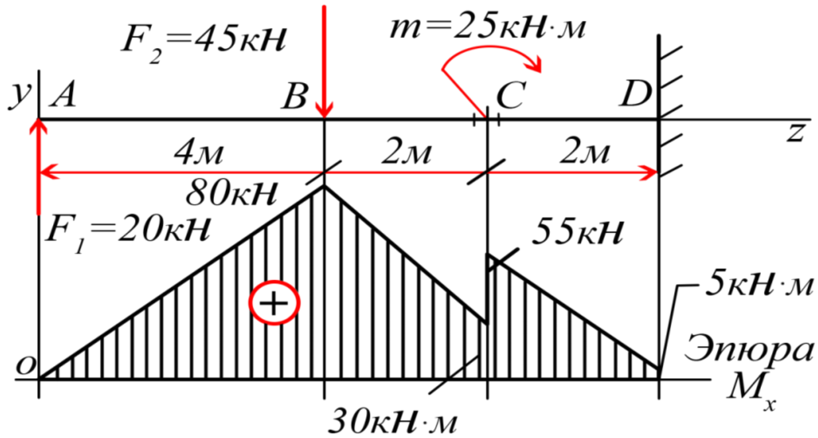


Рис.4.58

Решение:

1. Для защемленной балки реакции в опоре определять не следует.

Проводим расчеты по характерным точкам. Размеры сечения подбираем из расчета по нормальным напряжениям. Эпюру поперечных сил строить необязательно.

Определяем моменты в характерных точках.

$$M_A = 0;\ \ M_B = F_1 \cdot 4;\ \ M_B = 20 \cdot 4 = 80\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

В точке ***C*** приложен внешний момент пары, поэтому расчет про водим для левого сечения (без момента) и для правого—с моментом m

$$M_C^{\text{лев}} = F_1 \cdot 6 - F_2 \cdot 2; \quad M_C^{\text{лев}} = 20 \cdot 6 - 45 \cdot 2 = 30\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

Момент положительный

$$M_C^{\text{прав}} = M_C^{\text{лев}} + m;\ M_C^{\text{прав}} = 30 + 25 = 55\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

Момент в заделке

$$M_D = F_1 \cdot 8 - F_2 \cdot 4 + m;$$

$$M_D = 20 \cdot 8 - 45 \cdot 4 + 25 = 5\ \text{кН} \cdot \text{м}$$

Выбираем соответствующий масштаб по максимальному значению изгибающего момента.

Опасное сечение—сечение балки, где действует максимальный момент. Подбираем размеры балки в опасном сечении по условию прочности

$$\sigma_{\text{и}}^{max} = \frac{M_{\text{и}}}{W_x} \le [\sigma_{\text{и}}]; \quad W_x \ge \frac{M_B}{[\sigma_{\text{и}}]};$$

$$W_x = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 10^3}{160} = 500 \cdot 10^3 \text{мм}^3; \quad W_x = 500\ \text{см}^3$$

Основываясь на значении W_x=500 см^3 по таблице *ГОСТ 8239-89* выбираем двутавр *№ 30 а:* момент сопротивления W_x=518 см^3; площадь сечения ***A***=49,9 см^3.

Для сравнения рассчитаем размеры балки квадратного сечения (Рис.4.59) при том же моменте сопротивления сечения.

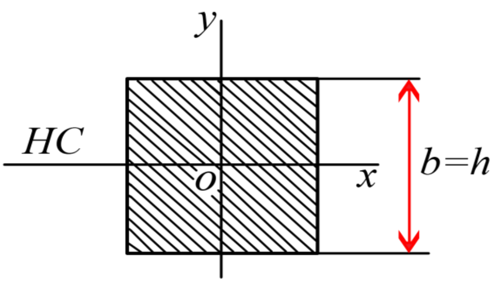


Рис.4.59

$$W_x = \frac{bh^2}{6};\ \ b = h;\ \ W_x = \frac{b^3}{6}$$

$$W_x = 500\ \text{см}^3 = \frac{b^3}{6}; \quad b \ge \sqrt[3]{6W_x}$$

Сторона квадрата

$$b \ge \sqrt[3]{6 \cdot 500} \approx 14{,}5\ \text{см}.$$

Площадь сечения балки

A=b^2=14,5^2=210,2 см^2.

Балка квадратного сечения в 4 раза тяжелее.

Контрольные вопросы и задания

1. Какую плоскость называют силовой?
2. Какой изгиб называют прямым? Что такое косой изгиб?
3. Какие силовые факторы возникают в сечении балки при чистом изгибе?
4. Какие силовые факторы возникают в сечении при поперечном изгибе?
5. Напишите формулу для определения нормального напряжения при изгибе в любой точке поперечного сечения.
6. Нормальное напряжение в точке *B* поперечного сечения 120МПа. Определите напряжение в точке *C* (Рис.4.60).
7. В каком случае (Рис.4.61) балка выдержит большую нагрузку?

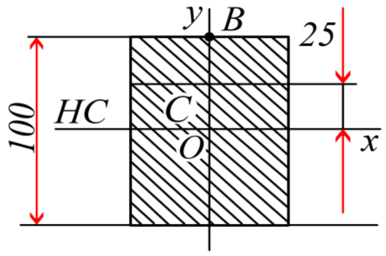


Рис.4.60

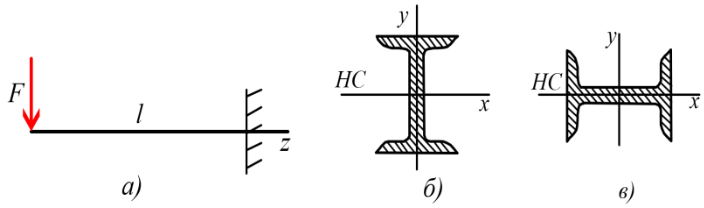


Рис.4.61

8.Напишите условие прочности при изгибе.

4.7 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

План:

1. Понятие о сложным сопративлении.
2. Косой изгиб.
3. Изгиб с растяжением.
4. Внецентренное растяжение или сжатие.
5. Изгиб с кручением.

Ключевые слова: Изгиб, косой изгиб, изгиб с растяжением, изгиб с кручением, внецентренное растяжение, внецентренное сжатие, условие прочности, напряжение, изгибающий момент.

В общем случае нагрузка на брус может быть такой, что в его поперечных сечениях возникает одновременно несколько внутренних усилий.

Такой случай рассматривают как комбинацию простых видов сопротивления и называют **сложным сопротивлением.**

Расчеты на прочность и жесткость бруса при сложном сопротивлении основываются обычно на принципе независимости действия сил (суперпозиций), при котором каждый из простых видов сопротивления рассматривают независимо от остальных. Полные напряжения и деформации, возникающие в упругой системе, определяют путем геометрического сложения напряжений и перемещений, соответствующих простым видам сопротивления.

В зависимости от сочетания внутренних усилий сложное сопротивление условно подразделяют на три вида: косой изгиб, изгиб с растяжением, а также изгиб с кручением.

Косой изгиб

Косой изгиб-частный случай сложного сопротивления, при котором силовая плоскость не совпадает с главными плоскостями инерции.

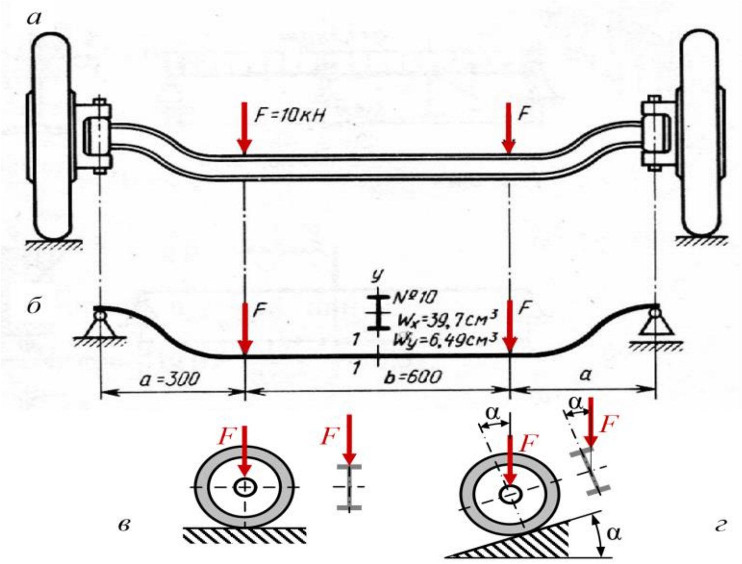


Рис.4.62. При въезде автомобиля на наклонную плоскость линия действия силы F не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции поперечного сечения балки

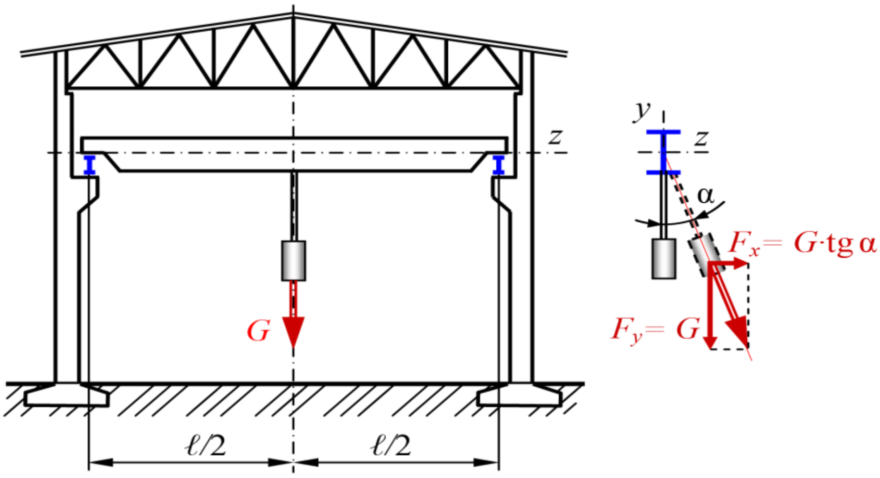


Рис.4.63. В начале движения мостового крана вдоль пролета цеха, при его торможении возникает горизонтальная сила вследствие инерции груза

В общем случае косого изгиба в поперечных сечениях возникают четыре внутренних усилия: две поперечные силы Q_z, Q_y и два изгибающих момента M_z, M_y. Влиянием поперечных сил на прочность и жесткость при расчете длинных балок часто пренебрегают ввиду их малости. Так, для прямоугольника и круга соответственно $\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = 4\frac{l}{h}$ и $\frac{\sigma_{max}}{\tau_{max}} = 6\frac{l}{d}$

В дальнейшем будем учитывать только изгибающие моменты.

Напряжения при косом изгибе

Изгибающий момент M (Рис.4.63,а) в сечении раскладывают на две его составляющие, действующие в главных плоскостях инерции $M_z = M \cdot cos\,\alpha$ и $M_y = M \cdot sin\,\alpha$ (Рис.4.64,б).

От каждого из внутренних усилий возникают нормальные напряжения, приложенные к одной паре площадок. Две другие пары площадок свободны от напряжений. Имеет место линейное напряженное состояние. Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами z, y определяют суммой напряжений от моментов M_z, M_y (Рис.4.64,в):

$$\sigma = \pm\sigma' \pm \sigma'' = \frac{M_z \cdot y}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z}{I_y} \qquad (8.1)$$

Из Рисунка следует, что опасными являются точки, в которых складываются напряжения с одним знаком, то есть точки A и C:

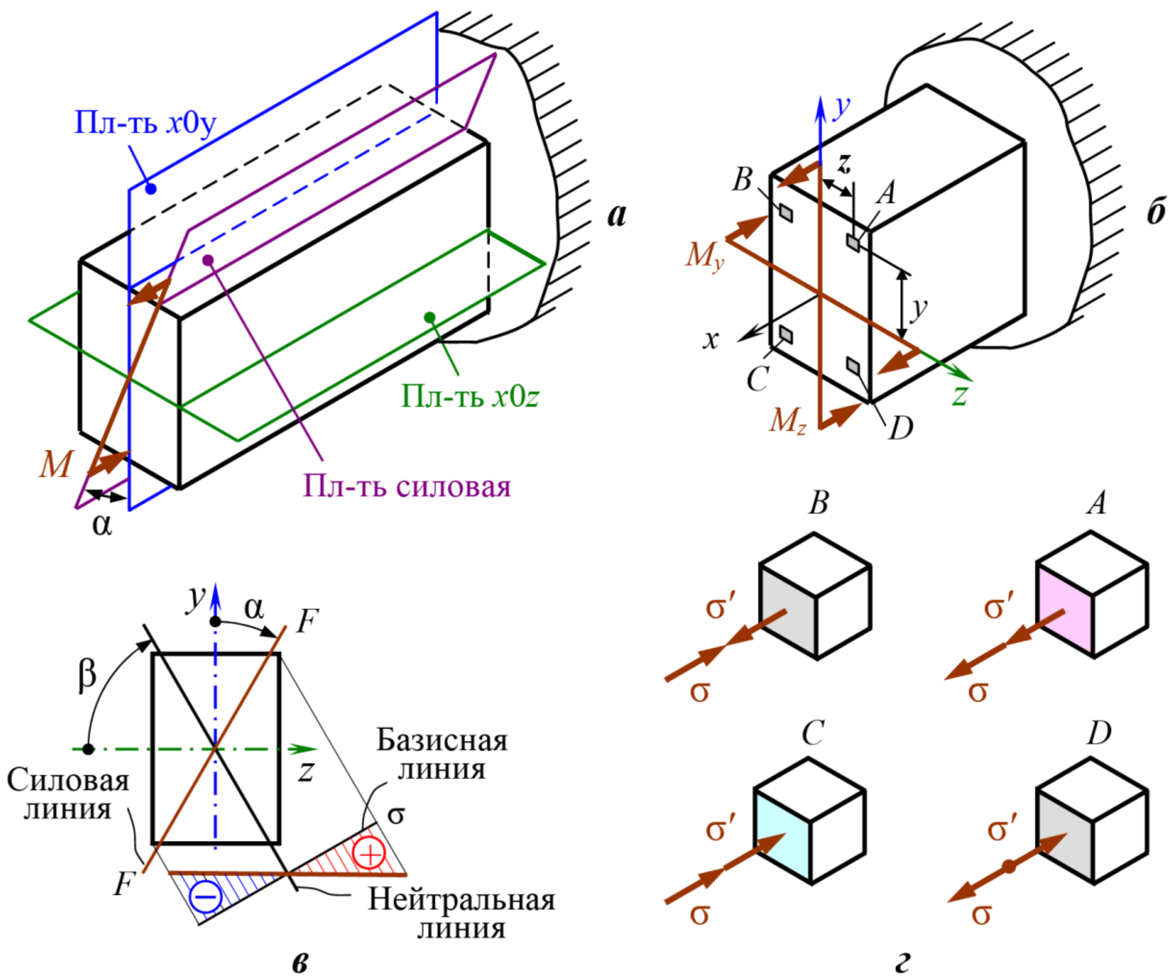


Рис.4.64 . Взаимное положение силовой плоскости и главных плоскостей инерции при косом изгибе (*а*); внутренние усилия в произвольном сечении бруса (*б*); характер распределения напряжений в произвольном сечении бруса (*в*); напряженное состояние в произвольных точках поперечного сечения бруса (*г*)

$$\sigma = M\left(\frac{y \cdot \cos\alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin\alpha}{I_y}\right) \qquad (8.2)$$

Правила знаков: из анализа знаков напряжений (Рис.4.64,г) следует, что для получения верного результата по формулам (8.1) и (8.2) необходим как учет знака изгибающего момента, так и выбор (назначение) направления координатных осей в сечении.

Направление координатных осей следует выбирать так, чтобы в первом квадранте координатной системы *z0y* (где z>0; y>0) изгибающий момент вызывал растягивающие напряжения**.**

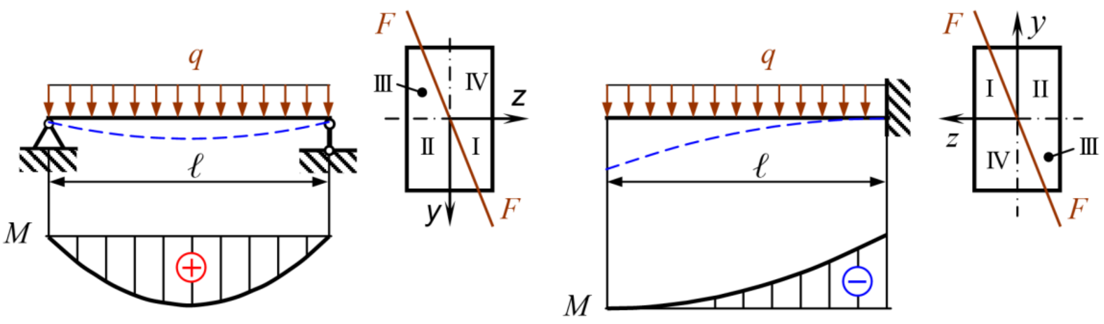


Рис. 4.65. Примеры выбора направления координатных осей при косом изгибе

Нейтральная линия при косом изгибе

В уравнении (8.2), связывающем напряжение в произвольной точке с ее координатами, переменными являются координаты *z, y*. Поскольку они в первой степени, то, следовательно, напряжения распределяются по линейному закону и должна быть линия, на которой напряжения равны нулю.

Нейтральная линия (нейтральная ось)-геометрическое место точек сечения, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Приравняв (8.2) нулю

$$0 = M(\frac{y \cdot \cos\alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin\alpha}{I_y})$$

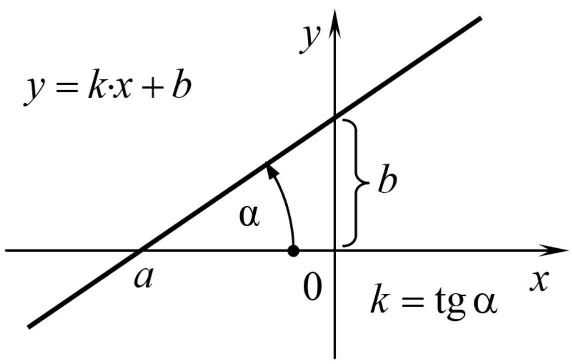


Рис. 4.66. Уравнение прямой с угловым коэффициентом и график прямой линии, известные из школьного курса

получают уравнение нейтральной линии вида $y = K \cdot x + b$:

$$\frac{y \cdot \cos\alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin\alpha}{I_y} = 0$$

$$y = -\frac{I_z}{I_y}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot z$$

то есть уравнение прямой с угловым коэффициентом

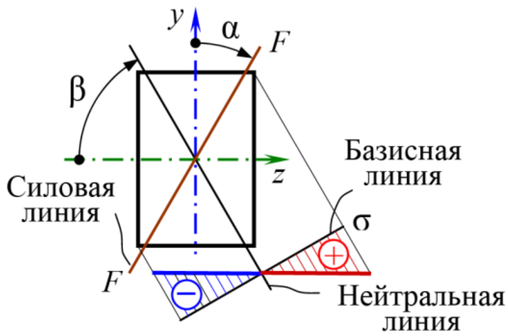
$$y = \left(-\frac{I_z}{I_y} tg\,\alpha\right) \cdot z + 0, \qquad (8.3)$$

где собственно угловой коэффициент вычисляют

$$k = -\frac{I_z}{I_y} tg\alpha = tg\beta \qquad (8.4)$$

Анализ уравнений (8.3), (8.4)

1. Свободный член уравнения (8.3) равен нулю, следовательно, прямая проходит через начало координат. Нейтральная линия разделяет сечение на сжатую и растянутую области.



2. Углы α и β в уравнении (8.4) имеют разные знаки, следовательно, силовая и нейтральная линии лежат в разных плоскостях. Углы α и β откладывают в одном направлении, но от разноименных осей (см. Рис.4.63,в).

3. Углы $\alpha \neq \beta$, следовательно, силовая F-F и нейтральная линии не перпендикулярны (см. Рис.4.64,в).

Расчет на прочность при косом изгибе

Поскольку напряженное состояние линейное (Рис.4.64,г), результаты расчета по любой из гипотез прочности совпадают. Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Их положение определяют графически после построения нейтральной линии (Рис.4.64,в).

Условие прочности, вытекающее из уравнения (8.1):

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \cdot y_{max}}{I_z} + \frac{M_y \cdot z_{max}}{I_y} \leq [\sigma],$$

или

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \qquad (8.5)$$

Условие прочности, вытекающее из уравнения (8.2):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha) \leq [\sigma], \qquad (8,6)$$

то есть такое же как при плоском изгибе, но с множителем в скобках большим единицы.

Выполняют три вида расчетов: поверочный, проектный и определение допускаемой нагрузки.

Проектный расчет. Требуемый размер поперечного сечения находят из условия прочности (8.6):

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha) \qquad (8,7)$$

Искомый параметр находится по обе стороны от знака неравенства. Полученное уравнение-трансцендентное, то есть не могущее быть выраженным алгебраическим выражением. Такие уравнения решают методом итераций, то есть методом последовательных приближений.

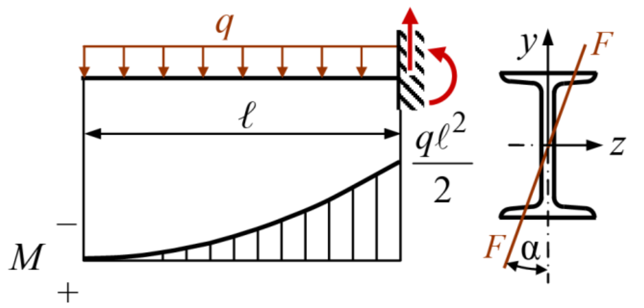
Для стандартного прокатного профиля (двутавра, швеллера.) отношение W_z/Wy зависит от размеров профиля. Так, для двутавров от № 10 до № 60 отношение W_z/Wy изменяется в диапазоне от 6,12 до 14,07. Поэтому в первом приближении принимают среднее число из указанного диапазона (например, 10). Подбирают профиль, а затем выполняют поверочный расчет. Следующая проба-уточненная. Перегрузку

$$\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]}100$$

выше 5 % не допускают.

Пример.1. Подобрать размер двутавра для консольной балки, нагруженной распределенной нагрузкой.

Дано: *q=5 кН/м; α=10°; ℓ=2 м; [σ]=200 МПа.*



Решение: Из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right) \leq [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha)$$

$$\text{где} \quad M_{max} = \frac{ql^2}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

$$W_z \geq \frac{10\cdot 10^3}{200\cdot 10^6}(0{,}985 + 10\cdot 0{,}174) = 136\cdot 10^{-6}\ \text{м}^3$$

Принимаем двутавр № 18: W_z=143 см^3; W_y=18,4 см^3.

Поверочный расчет:

$$\sigma_{max} \geq \frac{10 \cdot 10^3}{143 \cdot 10^{-6}}\left(0{,}985 + \frac{143}{18{,}4}0{,}174\right) = 163 \text{ мПа}$$

Недогрузка $\frac{200-163}{200}100 = 18.2\%$ Такая перегрузка допустима.

Принимает двутавр № 16: $W_z = 109 \text{ см}^3$; $W_y = 14{,}5\ см^3$

Поверочнќй расчет: $\sigma_{max} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}}\left(0{,}985 + \frac{109}{14{,}5}0{,}174\right) = 210 \text{ мПа}$

Перегрузка $\frac{200-210}{200}100 = -5\%$. Такая перегрузка допустима.

Напряжения при плоском изгибе, то есть при α=0

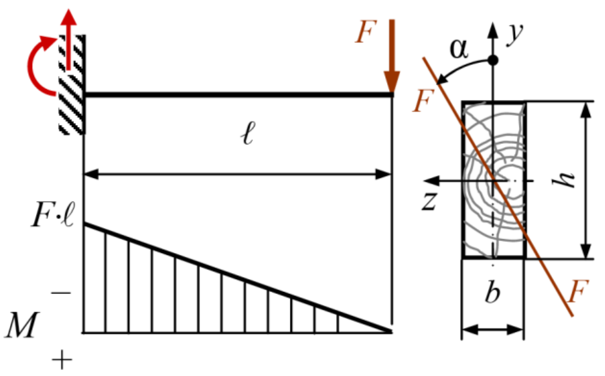
$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{10 \cdot 10^3}{109 \cdot 10^{-6}} = 91{,}7\text{мПа}$$

Сопоставление напряжений при косом и плоском изгибах:

$$\frac{\sigma^{к}_{max}}{\sigma^{п}_{max}} = \frac{210}{91{,}7} = 2{,}29$$

Вывод: напряжения при косом изгибе больше, чем при плоском изгибе в 2,29 раз. Косой изгиб опаснее плоского.

Пример.2. Подобрать размеры поперечного сечения деревянной балки с отношением высоты к ширине *c=h/b=2 . Дано: F=2 кН; α=30°; ℓ=3 м; [σ]=10 МПа.*



Решение: Из условия прочности при косом изгибе:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z}\left(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha\right) \leq [\sigma]$$

требуемый момент сопротивления

$$W_z \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]}(\cos\alpha + \frac{W_z}{W_y}\sin\alpha)$$

$$\text{где} \quad \frac{W_z}{W_y} = \frac{bh^2}{6} \cdot \frac{6}{hb^2} = \frac{h}{b} = c,$$

С другой стороны, $W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(bc)^2}{6} = \frac{b^3c^2}{6}$ откуда $b \geq \sqrt[3]{\frac{6W_z}{c^2}}$

Из эпюры моментов M_{max}=*F·ℓ=2·3=6 кН·м*. Тогда

$$W_z \geq \frac{6000}{10^6}(\cos 30^\circ + 2sin30^\circ) = 1120 \cdot 10^{-6}\text{м}^3\ ,$$

Откуда $\quad b \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 1120 \cdot 10^{-6}}{2^2}} = 0{,}119$ м.

Принимаем: *b=0,12 м, h=0,24 м*. Выполняем поверочный расчет:

$$\sigma_{max} = \frac{6000 \cdot 6}{0{,}12 \cdot 0{,}24^2}\left(0{,}866 + \frac{0{,}24}{0{,}12}0{,}5\right) = 9{,}72\ \text{мПа}\ , \qquad \text{что меньше } [\sigma]$$

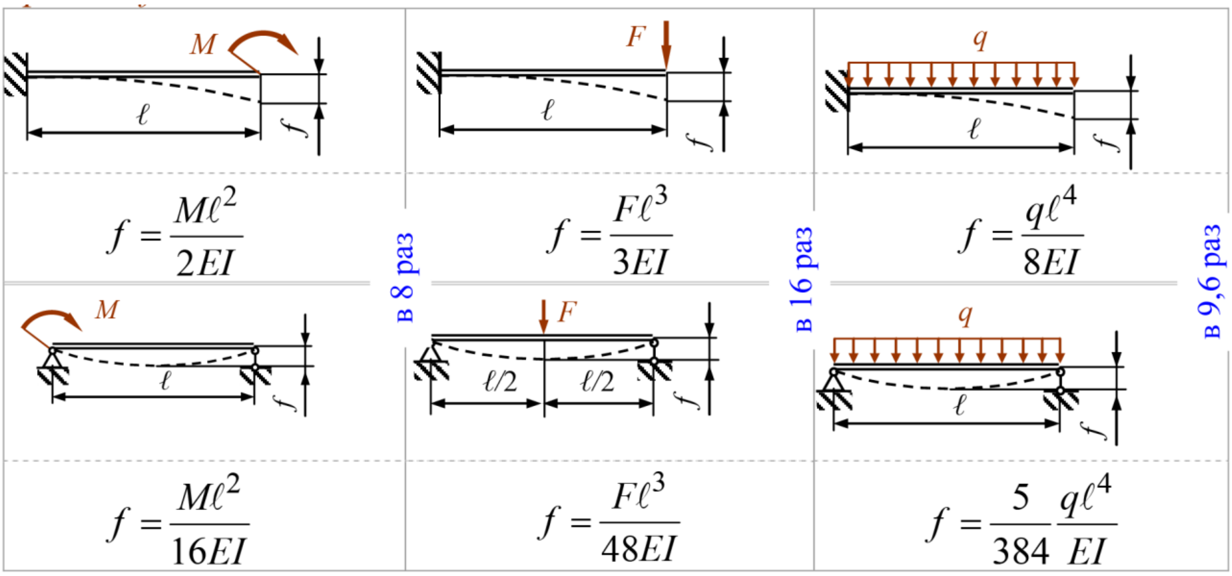
$$\sigma_{\alpha=0} = \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{6000 \cdot 6}{0{,}12 \cdot 0{,}24^2} = 5{,}21\ \text{мПа.}$$

$$\frac{\sigma_{\alpha=30}}{\sigma_{\alpha=0}} = \frac{9{,}72}{5{,}21} = 1{,}86\ \text{раз.}$$

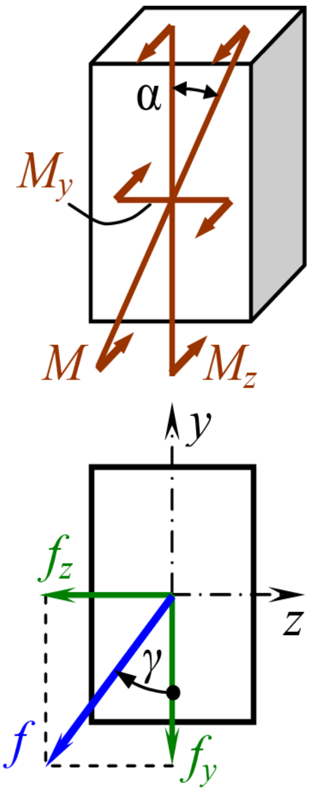
Вывод: косой изгиб опаснее плоского.

Деформация балок при косом изгибе

С использованием универсального уравнения упругой линии (метода начальных параметров) или энергетического метода для некоторых случаев плоского изгиба найдено максимальное значение прогиба - стрела прогиба F



Деформацию балок при косом изгибе определяют путем геометрического сложения векторов прогибов в направлениях главных центральных осей инерции.



Так, для первого из приведенных выше примеров

$$f_y = \frac{M_z l^2}{2EI_z}; \qquad f_z = \frac{M_y l^2}{2EI_y}$$

$$f_y = \frac{M\cos\alpha \cdot l^2}{eEI_z}; \quad f_z = \frac{M\sin\alpha\, l^2}{2EI_y}$$

Величину полного прогиба определяют:

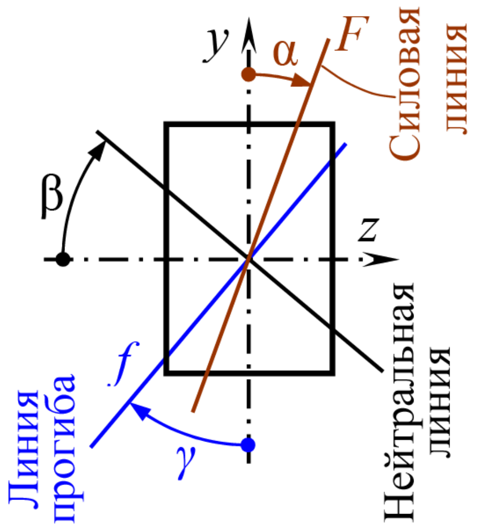
$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \frac{Ml^2}{2E}\sqrt{\frac{cos^2\alpha}{I_z^2} + \frac{sin^2\alpha}{I_y^2}},$$

или $$f = \frac{Ml^2}{2EI_z}\sqrt{cos^2\alpha + (\frac{I_z}{I_y})^2 sin^2\alpha}\,, \qquad (8.8)$$

то есть так же, как и при плоском изгибе, но с множителем (корнем), большим единицы.

Положение плоскости изгиба (направление перемещения центра тяжести сечения) определяется углом γ:

$$tg\,\gamma = \frac{f_z}{f_y} = \frac{M\sin\alpha\, l^2}{2EI_y}\frac{2EI_z}{M\cos\alpha\cdot l^2} = \frac{I_z}{I_y}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



или $$tg\gamma = \frac{I_z}{I_y}tga \qquad (8.9)$$

Из сопоставления формул (8.8) и (8.4) следует, что нейтральная плоскость и плоскость изгиба взаимно перпендикулярны *(tgγ=-tgβ)* и не совпадают с силовой плоскостью:

Изгиб с растяжением

Изгиб с растяжением-частный случай сложного сопротивления, при котором на брус действуют продольные и поперечные нагрузки, пересекающие ось бруса.

В общем случае в поперечных сечениях возникают пять внутренних усилий: действующие в двух плоскостях изгибающие моменты M_z, M_y, поперечные силы Q_z, Q_y, а также продольная сила N. Возникает сложный изгиб с растяжением или сжатием.

Пренебрегая касательными напряжениями от поперечных сил Q_z, Q_y (для длинных балок с отношением $l/h>10$ их влияние незначительно), можно считать напряженное состояние в опасных точках линейным.

Внецентренное растяжение или сжатие

Внецентренное растяжение-частный случай изгиба с растяжением, при котором брус растягивается силами, параллельными оси бруса так, что их равнодействующая не совпадает с осью бруса, а проходит через точку *P*, называемую полюсом силы.

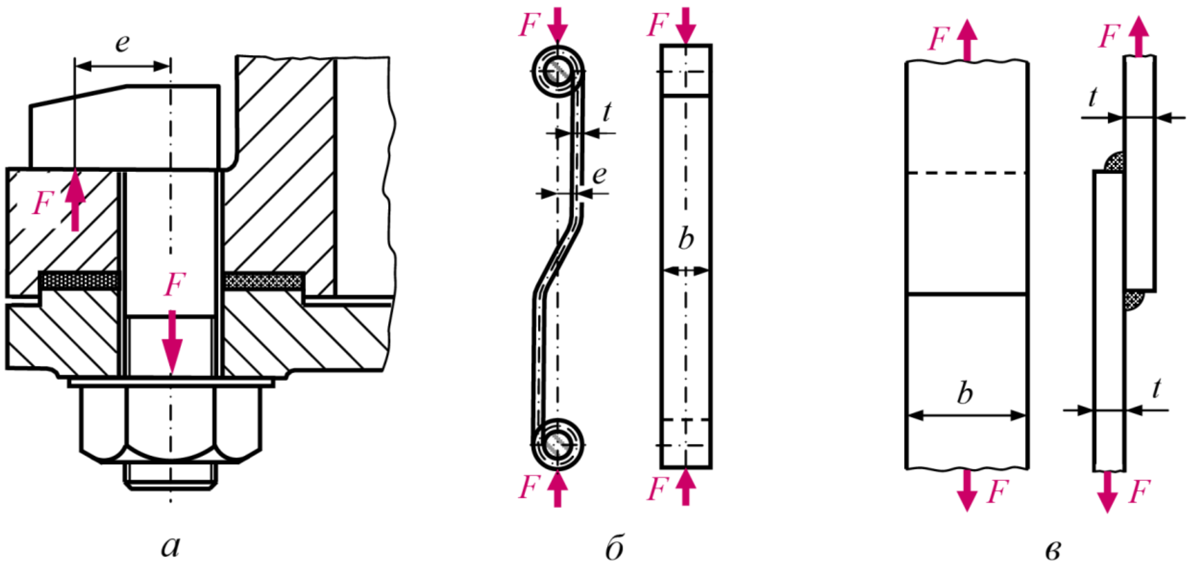


Рис.4.67 . Примеры деталей и узлов, работающих при внецентренном нагружении: а–болт-костыль; б–пружина сцепления; в–сварное соединение

Внутренние усилия и напряжения

В произвольном сечении x бруса (Рис.4.68,а) методом сечений определяем внутренние усилия

$$\sum x = 0; \quad N = F; \quad \sum M_x = 0; \quad T = 0;$$

$$\sum y = 0; \quad Q_y = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad M_y = F \cdot z_p;$$

$$\sum z = 0; \quad Q_y = 0; \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = F \cdot y_p;$$

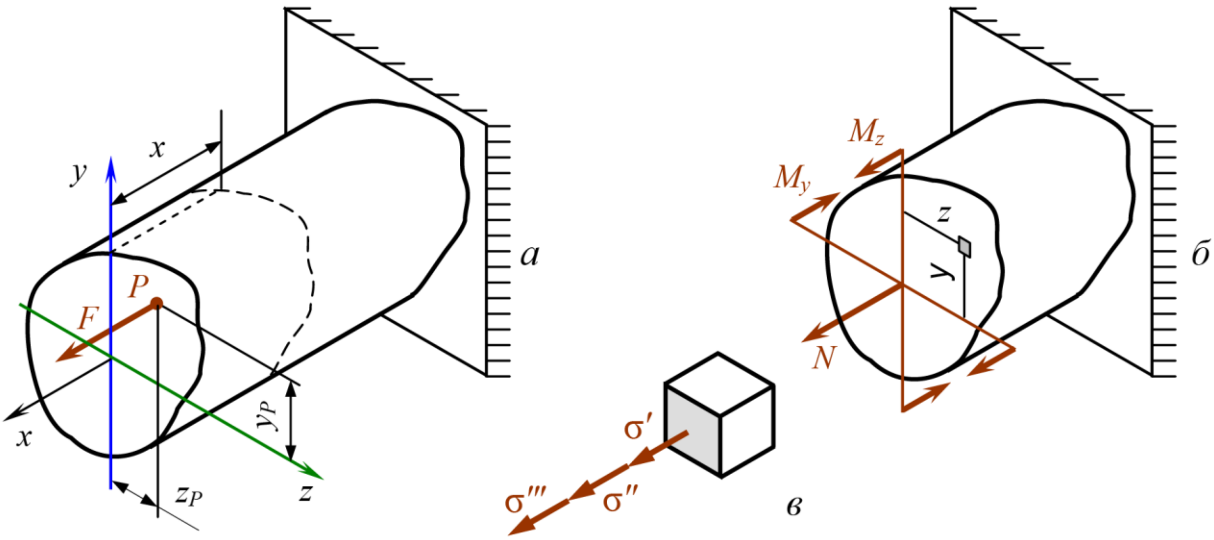


Рис.4.68. Схема к определению внутренних усилий и напряжений при внецентренном приложении силы

Отличны от нуля три внутренних усилия (Рис.4.68,б), от которых возникают нормальные напряжения, действующие по одной из трех пар граней (Рис.4.68,в); две другие пары граней свободны от напряжений. Имеет место линейное напряженное состояние. Напряжения в произвольной точке являются суммой трех слагаемых

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z;$$

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_p \cdot y}{A \cdot I_z / A} + \frac{F \cdot z_p z}{A \cdot I_y / A}.$$

Учитывая, что отношение $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ - радиус инерции сечения, получим

$$\sigma = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2}\right) \qquad (8.10)$$

О правиле знаков внутренних усилий. Формула (8.10) выведена для случая положительной растягивающей силы N и изгибающих моментов M_z, M_y, вызывающих растягивающие напряжения в точке, принадлежащей первой четверти осей координат (где x>0 и y>0). Поэтому оси координат поперечного сечения бруса следует направлять так, чтобы полюс P (точка приложения силы) находился в первом квадранте. Если сила, приложенная к брусу, сжимающая, то ее числовое значение будет со знаком минус.

Анализ формулы (8.10)

1.Отсутствие координаты x свидетельствует о неизменности напряжений вдоль оси бруса.

2.В случае приложения силы в центр тяжести сечения ($z_P=0$, $y_P=0$) напряжения в любой точке сечения постоянны и равны $\sigma=F/A$, то есть центральное растяжение является частным случаем внецентренного.

3.Независимо от значений координат полюса P напряжение в центре тяжести сечения ($y_{цт}=0$, $z_{цт}=0$), $\sigma_{цт}=F/A$.

4.Переменные z и y в первой степени, следовательно, формула (8.10) является уравнением прямой и нормальные напряжения распределяются по линейному закону, значит должна быть нейтральная линия, на которой напряжения равны нулю.

Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении

Нейтральная линия (нейтральная ось)-геометрическое место точек, в которых нормальное напряжение в поперечном сечении равно нулю.

Приравняем нулю уравнение (8.10). Поскольку *F/A≠0*, то выражение в скобках равно нулю

$$1+\frac{y_p\cdot y}{i_z^2}+\frac{z_p\cdot z}{i_y^2}=o$$

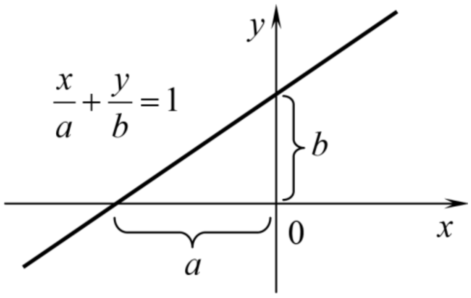


Рис.4.69. Уравнение прямой в отрезках и график прямой линии, известные из школьного курса

Переменные z, y в первой степени, следовательно, нормальные напряжения в сечении распределяются по линейной зависимости. Полученное выражение приведем к виду уравнения прямой в отрезках, где a и b-отрезки, отсекаемые линией на осях координат. В нашем случае уравнение нейтральной линии будет записано как

$$\frac{y}{(-\frac{i_z^2}{y_p})}+\frac{z}{(-\frac{i_y^2}{z_p})}=1 \qquad (8.11)$$

Свободный член полученного уравнения не равен нулю, следовательно, нейтральная линия через начало координат не проходит. Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях y и z, соответственно равны:

$$y_{\text{н.л}} = -\frac{i_z^2}{y_p}; \qquad z_{\text{н.л}} = -\frac{i_y^2}{z_p}. \qquad (8.12)$$

По найденным значениям отрезков проводят нейтральную линию и находят точки B и C, наиболее удаленные от нее (Рис.4.70). Выполняют это простым геометрическим построением, проводя касательные к сечению, параллельные нейтральной оси. Найденные точки-опасные, поскольку напряжения в них наибольшие по величине.

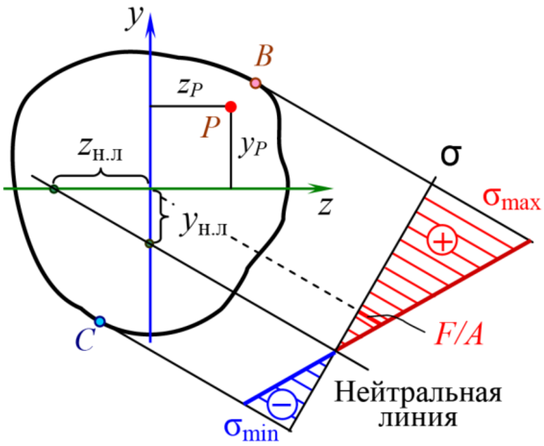


Рис.4.70 Эпюра напряжений в поперечном сечении

Уравнения (8.12), связывающие координаты полюса Р-точки приложения внешней нагрузки с положением нейтральной линии, являются гиперболической функцией. Чем ближе полюс P к центру тяжести сечения (значения y_p, z_p уменьшаются), тем нейтральная линия проходит дальше и в пределе стремится к бесконечности. И, наоборот, по мере отдаления точки приложения силы от центра тяжести нейтральная линия асимптотически приближается к нему. Однако пересечь центр тяжести сечения нейтральная линия не может (см. анализ формулы (8.10)). В центре тяжести $\sigma_{цТ}=F/A$ (Рис.4.69), поскольку $y_{цт}=0$ и $z_{цт}$ =0(подставьте в (8.10)).

Нейтральная линия может разделять поперечное сечение на области, в которых действуют напряжения разных знаков. Некоторые материалы (чугун, силумин, керамика, кирпичная кладка...) хорошо сопротивляются сжатию и плохо-растяжению. Поэтому необходимо уметь определять такую область приложения нагрузки, в которой не возникают напряжения разных знаков.

Расчет на прочность при внецентренном нагружении

Поверочный расчет выполняют, используя условие прочности
Поверочный расчет выполняют, используя условие прочности

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M_z}{W_z} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

Проектный расчет обладает особенностью, связанной с тем, что геометрические характеристики, входящие в условие прочности содержат искомый размер поперечного сечения в разной степени. Площадь A измеряется в *м*^{2}, а моменты сопротивления W в м^3. Попытка выразить искомый размер из условия прочности приводит к трансцендентной функции, то есть аналитической функции, не являющейся алгебраической.

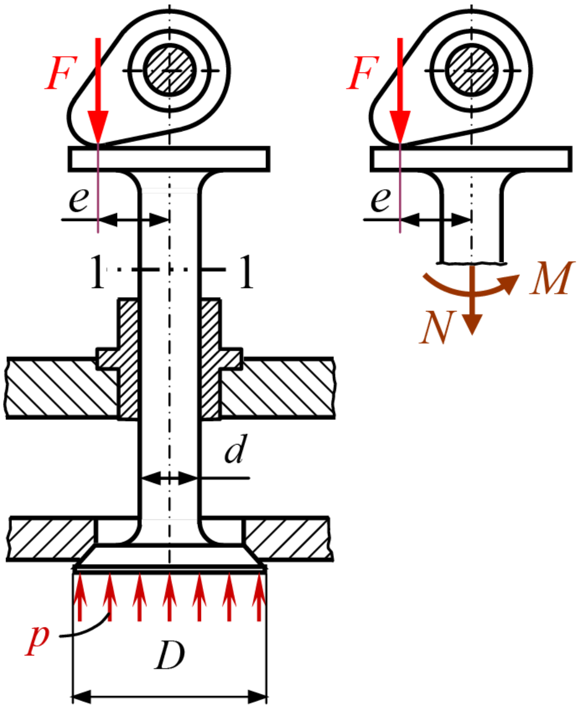
Проектный расчет выполняют методом итераций 1 [от лат. iteratio– повторение]. В первом приближении, пренебрегая одним из внутренних усилий–продольной силой *N*–подбирают размер сечения только из условия прочности при изгибе.

Полученный размер подставляют в исходное уравнение и выполняют следующую пробу. Процесс повторяют до тех пор, пока невязка–разность размеров последующей и предыдущей проб, не достигнет заданной наперед малости.

Пример.3.

Подобрать диаметр стержня выпускного клапана. При расчете использовать усилие F в момент открывания клапана в конце рабочего хода поршня.

Дано*: p=1,5 МПа; e=12 мм;* D*=35 мм; [σ]=210 МПа*



Решение: Сила давления газов на тарелку клапана

$$F = p \cdot A_{\text{клап}} = \text{p}\frac{\pi}{4}D^2 = 1{,}5\frac{\pi}{4}35^2$$
$$= 1443\ H.$$

Внутренние усилия в сечении 1-1 стержня клапана (по модулю):

N=F; M=F·e.

Условие прочности:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{max} = \frac{F \cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F \cdot e \cdot 32}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$\frac{4F}{\pi d^3}(d + 8e) \leq [\sigma], \text{ откуда } d \geq \sqrt[3]{\frac{4F}{\pi[\sigma]}(d + 8e)}.$$

По обе стороны от знака неравенства искомый диаметр–имеем трансцендентное уравнение, которое решаем методом приближений:

$$d_0 = 0; \qquad d_1 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210}(0 + 8 \cdot 12)} = 9{,}435 \text{ мм}$$

$$d_2 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210}(9{,}435 + 8 \cdot 12)} = 9{,}735 \text{ мм}$$

$$d_3 \geq \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1443}{\pi \cdot 210}(9{,}735 + 8 \cdot 12)} = 9{,}744 \text{ мм}$$

Метод последовательных приближений, при котором каждое новое приближение вычисляют исходя из предыдущего; начальное приближение выбирается в достаточной степени произвольно.

Разность между последним и предпоследним приближениями

$$\frac{9{,}744 - 9{,}735}{9{,}744}100 = 0{,}0924\%$$

Процесс подбора прекращаем, принимаем *d=10 мм*.

Проверка:

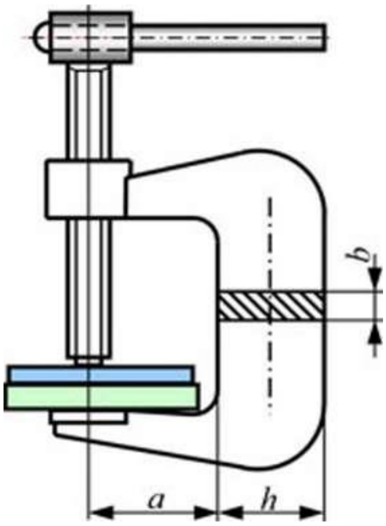
$$\sigma = \frac{F\cdot 4}{\pi d^2} + \frac{F\cdot e\cdot 32}{\pi d^3} = \frac{1443\cdot 4}{\pi\cdot 100} + \frac{1443\cdot 12\cdot 32}{\pi\cdot 1000} = 18{,}4 + 176{,}4$$
$$= 194{,}8 \text{ мПа}$$

Напряжения изгиба больше напряжений растяжения в

$$\frac{\sigma_{изг}}{\sigma_{изг}} = \frac{176{,}4}{18{,}4} = 9{,}6 \text{ раза}$$

Пример.4.

Из расчета на прочность определить размер *h* скобы струбцины.



Решение: Условие прочности при внецентренном растяжении плоской фигуры

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \le [\sigma]\,,$$

где $A = b\cdot h;\quad W = b\cdot\frac{h^2}{6};\ M = F(a+\frac{h}{2})$

Условие прочности:

$$\sigma = \frac{F}{bh} + \frac{F\left(a+\frac{h}{2}\right)6}{bh^2} = \frac{F}{bh} + \frac{6Fa}{bh^2} + \frac{3Fh}{bh^2} \le [\sigma];$$

$$\frac{F}{h^2}\left(\frac{h}{b} + 6\frac{a}{b} + 3\frac{h}{b}\right) \le [\sigma];\quad \frac{F}{h^2}\left(4\frac{h}{b} + 6\frac{a}{b}\right) \le [\sigma]$$

Требуемый размер скобы:

$$h \ge \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}(4\frac{h}{b} + 6\frac{a}{b})}$$

Размер h в обеих части неравенства. Полученное уравнение–трансцендентное. Решаем его методом последовательных приближений. В первом приближении принимаем h в скобках под корнем равным нулю: h_0=0. Тогда

$$h_1 = \sqrt{\frac{F}{[\sigma]}(4\frac{0}{b} + 6\frac{a}{b})} = \sqrt{\frac{16000}{90}(0 + 6\frac{90}{16})} = 77{,}46 \text{ мм;}$$

$$h_2 = \sqrt{\frac{16000}{90}(4\frac{77,46}{16} + 6\frac{90}{16})} = 97,17 \text{ мм}$$

Следующее приближение

$$h_3 = \sqrt{\frac{16000}{90}(4\frac{97,17}{16} + 6\frac{90}{16})} = 101,58 \text{ мм}$$

Невязка подбора

$$\frac{h_3 - h_2}{h_3}100 = \frac{101,58 - 97,17}{97,17}100 = 4,5\%$$

Следующее приближение

$$h_4 = \sqrt{\frac{16000}{90}(4\frac{101,58}{16} + 6\frac{90}{16})} = 102,54 \text{ мм}$$

Невязка подбора

$$\frac{h_4 - h_3}{h_4}100 = \frac{102,54 - 101,58}{101,58}100 = 0,95\%$$

Последняя невязка менее *1 %*, поэтому выходим из цикла подбора. Принимаем *h=103 мм.*

Проверка:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} = \frac{16000}{16 \cdot 103} + \frac{16000 \cdot 6}{16 \cdot 103^2}\left(90 + \frac{103}{2}\right);$$

$$\sigma = 9,71 + 80,03 = 89,74 \text{ мПа } < [\sigma]$$

Сопоставим вклады от изгиба и растяжения в общее напряжение:

$$\frac{\sigma_{\text{изг}}}{\sigma} = \frac{80,03}{89,74} = 0,892. \qquad \frac{\sigma_{\text{раст}}}{\sigma} = \frac{9,71}{98,74} = 0,108$$

Напряжения от изгиба в 8,24 раза превышают напряжения от растяжения. Полученное соотношение можно сделать более благоприятным снизив долю растягивающих напряжений от изгиба за счет уменьшения плеча e изгибающего момента. На практике применяют тавровое и двутавровое сечения, смещая центр тяжести с ближе к линии действия силы и располагая больше материала в области растягивающих напряжений, к которым хрупкие материалы более чувствительны.

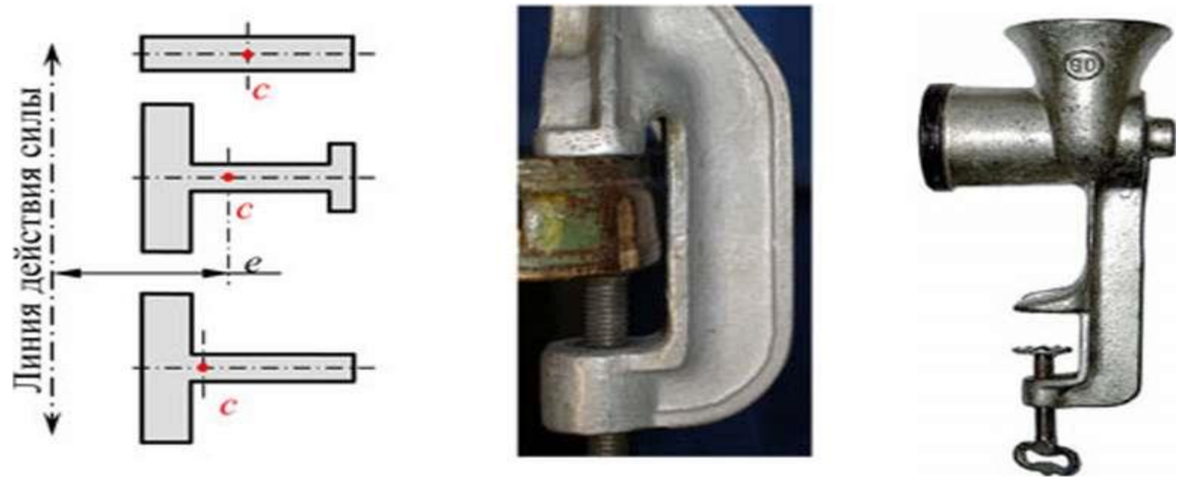


Рис.4.71. Примеры выполнения поперечного сечения бруса, подверженного действию внецентренного растяжения

Изгиб с кручением

Изгиб с кручением–вид сложного сопротивления, при котором в поперечном сечении бруса возникают

изгибающие и крутящий моменты. Рассмотрим случай, при котором внешние силы располагаются в плоскости поперечного сечения, но не пересекают геометрическую ось x (Рис.4.72,а).

Силу F разложим на ее составляющие F_x, F_y. Методом сечений определим внутренние усилия в произвольном сечении x (Рис.4.72,б).

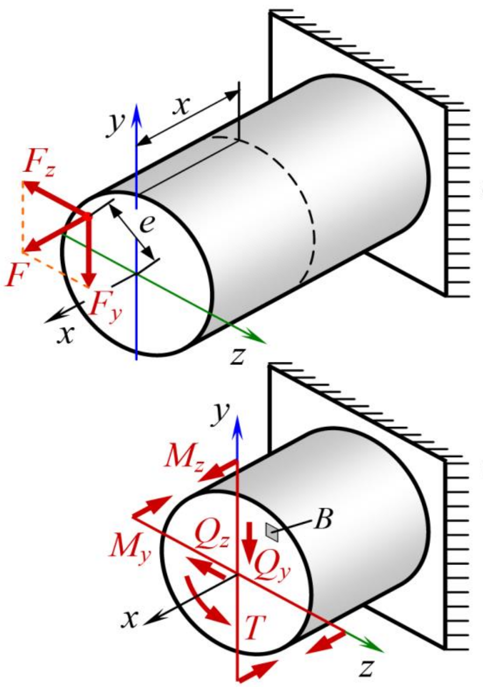


Рис.4.72. Определение внутренних усилий при изгибе с кручением

Спроецировав все силы на координатные оси и составив уравнения моментов относительно координатных осей, найдем внутренние усилия. Из шести внутренних усилий не равно нулю пять.

$$\sum x = 0; \quad N = 0; \quad \sum M_x = 0;$$

$$T = F \cdot e;$$

$$\sum y = 0; \quad Q_y = F_y; \quad \sum M_y = 0; \quad M_y = F_z \cdot x;$$

$$\sum z = 0; \quad Q_y = F_z; \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = F_y \cdot x;$$

На выделенном элементе *B* (Рис.4.72,б) показаны действующие по его граням напряжения (Рис.4.73,а). От поперечных сил и крутящего момента возникают касательные напряжения τ_{Qy}, τ_{Qz}, τ_T. От изгибающих моментов– нормальные напряжения σ′ и σ″. Для длинных валов и балок ($\ell > 10d$) влиянием поперечных сил часто пренебрегают. Таким образом, учитывают только три момента: крутящий и два изгибающих. От них возникают три напряжения: одно касательное и два нормальных (Рис.4.73,б).

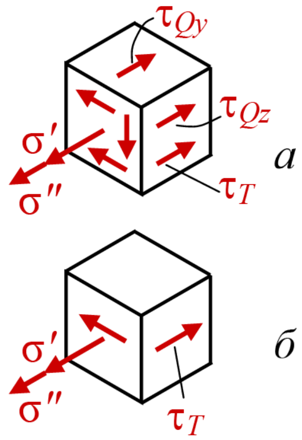


Рис.4.73. Анализ напряженного состояния

Расчет на прочность при изгибе с кручением

Из (Рис. 4.72), б следует, что в произвольном сечении возникает плоское напряженное состояние

$$\sigma_x = \sigma_{M_z} + \sigma_{M_y} = \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z; \quad \sigma_y = 0; \quad \sigma_z = 0;$$

$$\tau_{xz} = \tau_T = \frac{T}{I_p}\rho$$

(Рис.4.73) Определение внутренних усилий при изгибе с кручением как при изгибе, так и при кручении круглого сечения опасными являются точки на периферии. Для круга и кольца

$$W_z = W_y = W_{oc}; \quad W_p = 2W_{oc}$$

$$\sigma_{M_{y,max}} = \frac{M_y}{W_{oc}}; \quad \sigma_{M_{z,max}} = \frac{M_z}{W_{oc}} \quad \tau_{T_{,max}} = \frac{T}{2W_{oc}}$$

Условие прочности для пластичных материалов по III теории прочности (наибольших касательных напряжений): $\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]$

$$\text{где } \sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2}\sqrt{(\frac{\sigma_x}{2})^2 + \tau_{xz}^2}; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{(\frac{\sigma_x}{2})^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$\text{тогда}\quad \sigma_{\text{экв}} = \left[\frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2}\right] - \left[\frac{\sigma_x}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2}\right];$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_T^2} \le [\sigma].$$

Поскольку для круглого и кольцевого сечений не существует точки, одинаково удаленной от обеих осей инерции z, y, то используют результирующий момент–геометрическую сумму векторов изгибающих моментов относительно осей *z, y:*

$$M_{\text{рез}} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \qquad (8.12)$$

$$\text{тогда} \qquad \sigma_x = \frac{M_{\text{рез}}}{W_{\text{ос}}}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{M_y^2 + M_z^2}{W_{oc}^2} + 4\frac{T^2}{(2W_{oc})^2}} \le [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = \frac{\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2}}{W_{oc}} \le [\sigma].$$

Условие прочности при совместном действии изгиба и кручения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{oc}} \le [\sigma]. \qquad (8.13)$$

$M_{прив}$–приведенный момент, действие которого эквивалентно совместному действию M_y, M_z, *T* в соответствии с используемыми теориями прочности.

По III теории прочности (наибольших касательных напряжений)

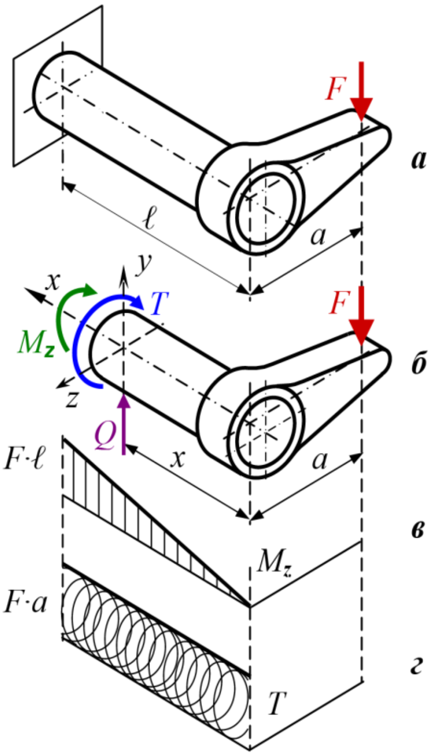
$$M_{\text{прив},\ III} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \qquad (14)$$

По IV теории прочности (энергетической)

$$M_{\text{прив},\ IV} = \sqrt{M_y^2 + M_z^2 + 0.75 \cdot T^2} \qquad (15)$$

Приведенного момента в действительности не существует, изобразить его нельзя, вектора он не имеет. Величина приведенного момента зависит от используемой теории прочности. Результаты расчетов по III и IV теориям прочности близки, отличаются примерно на 5–10 %.

Пример.5. Вал с кривошипом подвергается действию силы *F=3,5 кН.* Определить диаметр вала по третьей теории прочности при *[σ]=160 МПа*; *ℓ=50 см, а=10 см.*



Решение: Внутренние усилия определяем методом сечений.

Рассекаем вал на две части в произвольном сечении х,

Отбрасываем одну из частей (поз. б Рис),

Заменяем действие отброшенной части внутренними усилиями и в координатной системе *xyz* составляем

У равнения статики:

$$\sum x = 0; \quad N = 0; \quad \sum M_x = 0; \quad T = -F \cdot a;$$

$$\sum y = 0; \quad Q_y = F; \quad \sum M_y = 0; \quad M_y = 0;$$

$$\sum z = 0; \quad Q_z = 0; \quad \sum M_z = 0; \quad M_z = -F \cdot x.$$

Строим эпюры изгибающего и крутящего моментов, действующих в поперечных сечениях вала (поз. в и г Рис). приведенный момент в опасном сечении–в защемлении:

$$M_{\text{прив}} = \sqrt{M_z^2 + T^2} = \sqrt{(-Fl)^2 + (-Fa)^2} = F\sqrt{l^2 + a^2} = 3500\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}1^2} = 1785 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Из условия прочности при изгибе с кручением $\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{прив}}}{W_{oc}} = [\sigma]$ находим $W_{oc} = \frac{M_{\text{прив}}}{[\sigma]} = \frac{\pi}{32} d^3$,

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{прив}}}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{32 \cdot 1785}{\pi \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0{,}0484 \text{ м}.$$

Округлив до большего значения, принимаем диаметр вала *d=50 мм.*

Контрольные вопросы и задания

1.Что такое сложное сопротивление?

2.Что такое косой изгиб?

3.Что такое изгиб с растяжением?

4. Что такое внецентренное растяжение или сжатие?

5. Что такое изгиб с кручением?

6. Косой изгиб бурса. На брус прямоугольного поперечного сечения, защемленного левым концом (Рис.4.74), $\mathbf{P = 2,5}$ кН. Длина $\mathbf{a = 2}$ м, соотношение размеров прямоугольного сечения бруса $\mathbf{\frac{h}{b} = 2.}$ Найти размеры сечения, если допускаемое напряжение материала бруса $[\boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{1,0}\,\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$

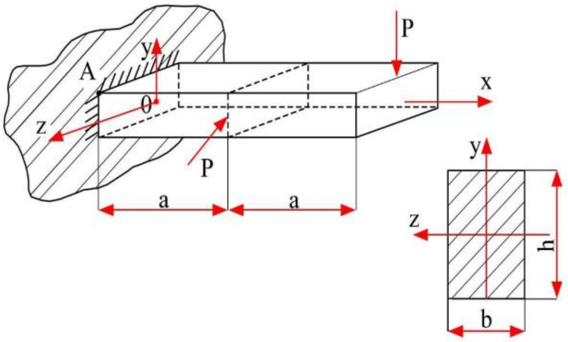


Рис.4.74 Косой изгиб бруса

7. Изгиб с растяжением балки. Для стальной балки коробчатого поперечного сечения, защемленной левым концом, подобрать размеры поперечного сечения (Рис.4.75,а). Исходные данные:

$$P_1 = 8 \text{ кН} \qquad P_2 = 6 \text{ кН} \quad l_1 = 2 \text{ м} \quad l_2 = 3 \text{ м} \quad [\sigma] = 210 \text{ Мпа}$$

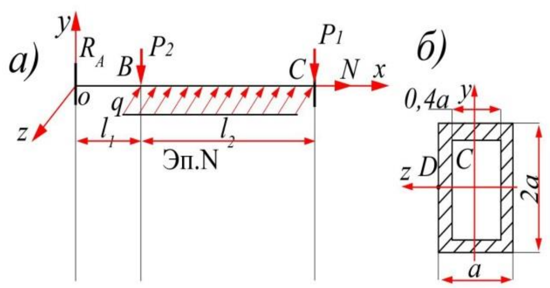


Рис.4.75. Изгиб балки в двух плоскостях, испытывающей растяжение

Тесты для самопроверки

1. Что называется брусом?

A. один из трех размеров значительно меньше двух других;
B. все три размера одинакового размера;
C. поперечные размеры малы по сравнению с длиной;
D. ширина и длина одинакового порядка;
E. толщина мала по сравнению с другими размером

2. Какие бывают силы?

A. только внутренние;
B. только внешние;
C. только упругие;
D. внутренние и внешние;
E. внутренние и упругие.

3. Какие силы называются внешними?

A. которые возникают внутри тела;
B. действующие на конструкцию извне;
C. только опорные реакции;
D. только реактивные силы;
E. упругие силы.

4. Какие силы называются внутренними?

A. силы взаимодействия между частицами тела;
B. действующие на конструкцию извне;
C. только опорные реакции;
D. только реактивные силы;
E. объемные силы.

5. Какие силы называются сосредоточенными?

A. силы, распределенные по объему тела;
B. силы, распределенные по поверхности тела;
C. силы, действующие по длине бруса;
D. силы, приложенные к небольшой площадке тела;
E. собственный вес тела.

6. Какие силы называются распределенными?

A. силы, распределенные по объему тела;
B. силы, распределенные по ко всей или какой-либо части поверхности тела;
C. силы, действующие по длине бруса;
D. силы, приложенные к небольшой площадке тела;
E. собственный вес тела.

7. Что такое деформация?

A. только изменение формы тела;
B. только изменение размеров тела;
C. изменение объема тела;
D. изменение формы и размеров тела;
E. только изменение длины бруса.

8. Какая деформация называется упругой?

A. изменение линейных размеров;
B. изменение угловых размеров;
C. изменением линейных и угловых размеров;
D. деформация которая исчезает после снятия нагрузки;

9. Какая деформация называется пластической?

A. изменение линейных размеров;
B. изменение угловых размеров;
C. изменением линейных и угловых размеров;
D. деформация, сохраняемая телом после удаления нагрузки.

10. Какая деформация называется линейной?

A. изменение линейных размеров;
B. изменение угловых размеров;
C. изменением линейных и угловых размеров;
D. деформация полностью исчезающая после прекращения действия сил;

11. Какая деформация называется угловой?

A. изменение линейных размеров;
B. изменение угловых размеров;

C. изменением линейных и угловых размеров;
D. деформация полностью исчезающая после прекращения действия сил;

12. Что такое напряжение?

A. проекция главного вектора на нормаль;
B. проекция главного вектора, лежащая в плоскости сечения;
C. сила вызывающая деформацию тела;
D. интенсивность внутренних сил приходящая на единицу площади;

13. Какое напряжение называется нормальным?

A. проекция полного напряжения на нормаль;
B. проекция полного напряжения лежащая в плоскости сечения;
C. напряжение, вызывающие деформацию тела;
D. интенсивность внутренних сил приходящих на единицу объема;

14. Какое напряжение называется касательным?

A. проекция полного напряжения на нормаль;
B. проекция полного напряжения лежащая в плоскости сечения;
C. напряжение вызывающие деформацию тела;
D. интенсивность внутренних сил приходящих на единицу объема;

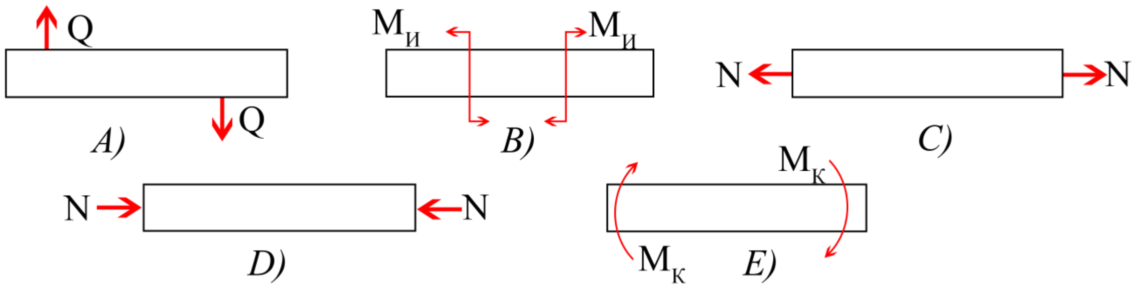
15. Какие внутренние силовые факторы могут возникнуть в поперечном сечении стержня в общем случае нагружения?

A. только продольная сила (N_x) *;*
B. только поперечные силы (Q_y, Q_z)*;*
C. только изгибающие моменты (M_y, M_z)*;*
D. только крутящий момент $(M_к)$*;*

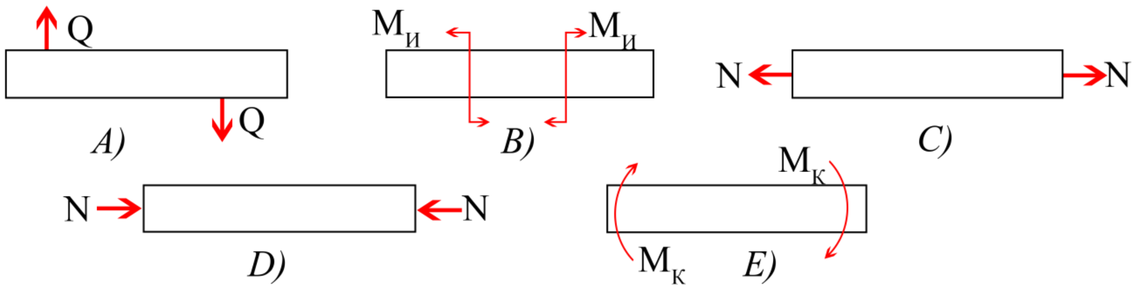
16. Какой вид деформации вызывает продольная сила N_x?

A. деформацию растяжения-сжатия;
B. деформацию сдвига;
C. деформацию кручения;
D. деформацию изгиба;

17. На каком из рисунков изображена деформация растяжения?



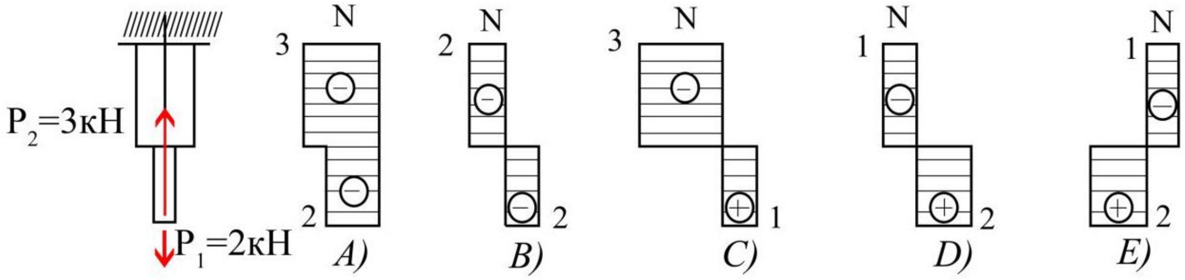
18.На каком из рисунков изображена деформация сжатия?



19. Какие внутренние усилия возникают в поперечном сечении бруса при растяжении (сжатии)?

A. M_x B. Q C. N D. M_z E. M_y

20. На каком из рисунков показан правильный вид эпюры продольных сил?



21. По какой формуле определяется нормальное напряжение в поперечном сечении бруса при растяжении/сжатии?

A. $\sigma = \dfrac{M_и}{A}$ B. $\sigma = \dfrac{Q}{F}$ C. $\sigma = \dfrac{N}{A}$ D. $\sigma = \dfrac{F}{Q}$ E. $\sigma = \dfrac{M_k}{J_y}$

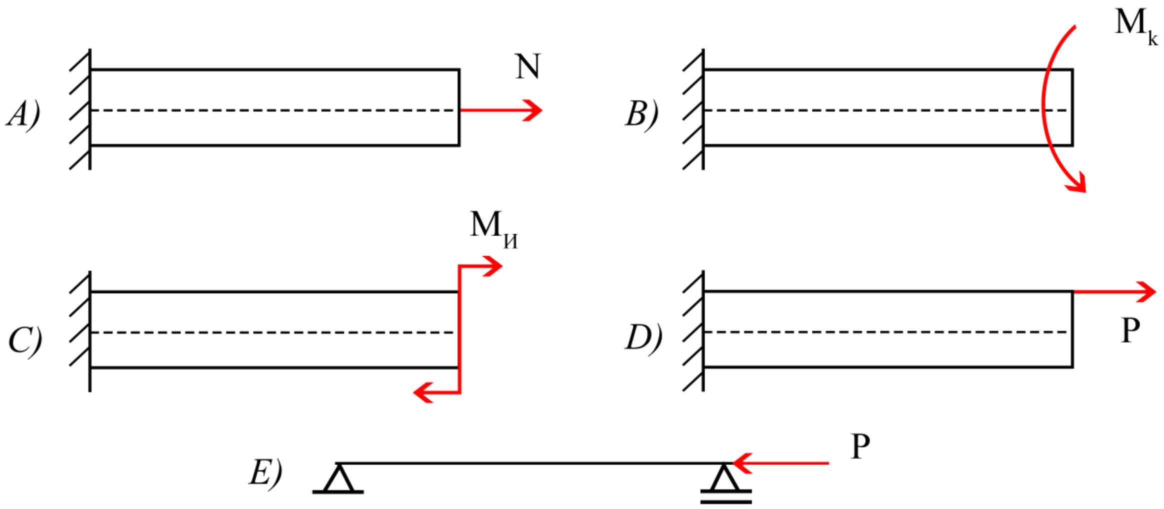
22. Какова размерность нормального напряжения?

A. *кг* B. *кг/см* C. *км/кг* D *кН/см*^{2} *(Н/м*^{2}*)* E. *т/м*

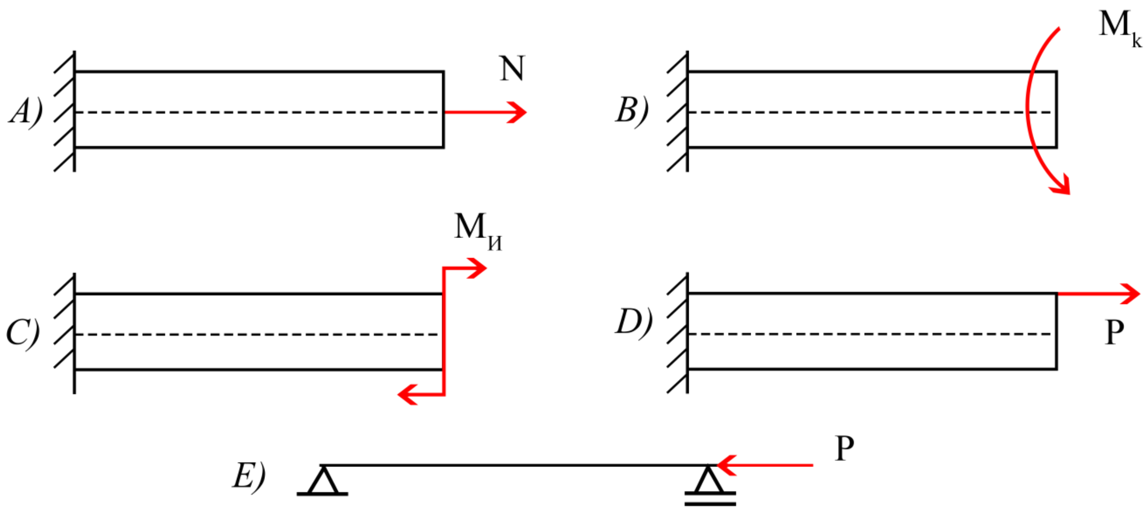
23. По какой формуле определяется абсолютная деформация при растяжении/сжатии?

A. $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ B. $\Delta l = \dfrac{N \cdot l}{G \cdot A}$ C. $\varepsilon = -\mu \varepsilon^{-1}$ D. $l = \dfrac{N \cdot \Delta l}{EF}$ E. $\Delta l = \dfrac{N \cdot l}{E \cdot A}$

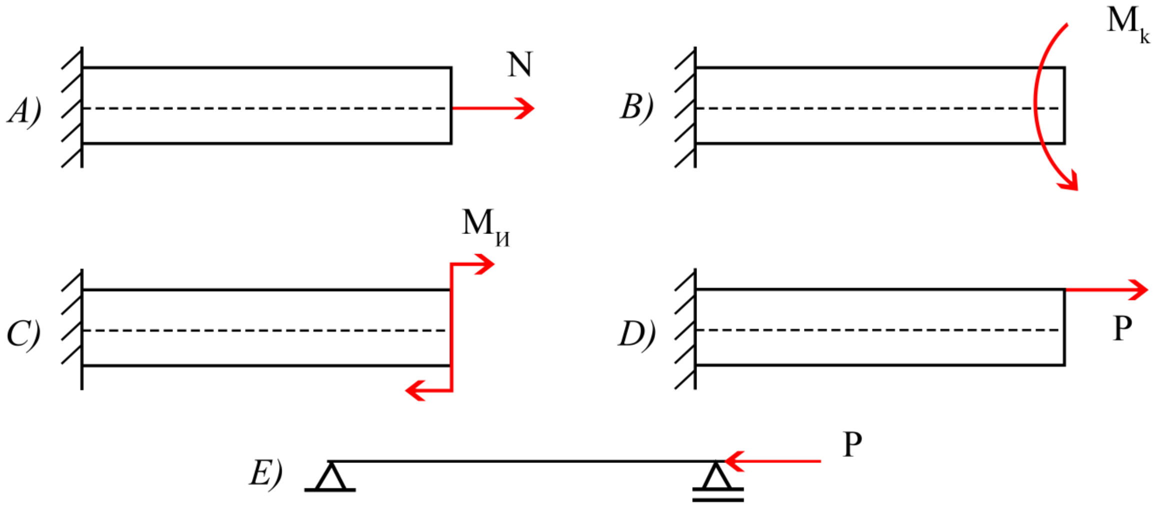
24.На каком из рисунков показана деформация кручения



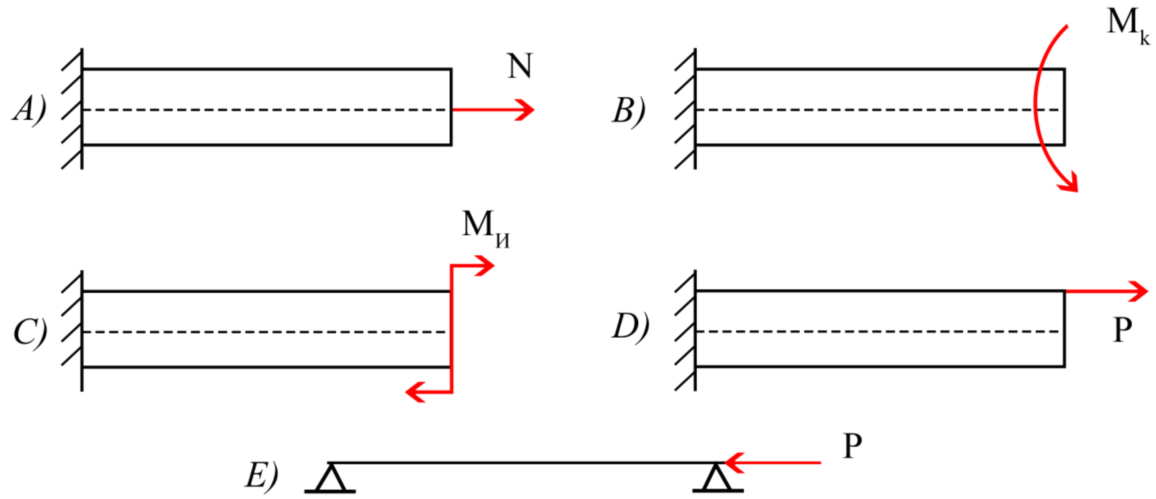
25. На каком из рисунков показан изгиб



26. На каком из рисунков показано внецентренное сжатие



27.На каком из рисунков показан продольный изгиб?



28. По какой формуле вычисляется момент, передаваемые шкивом, по заданной мощности и числу оборотов в минуту?

A. $M_к = \frac{\tau \cdot I_P}{\rho}$ B. $M_K = \frac{n}{N}$ C. $M_R = \frac{\varphi \cdot G \cdot I_P}{\rho}$

D. $M_R = 71620\frac{N}{n}$ E. $M_K = 97360\frac{n}{N}$

29.Какой вид имеет закон Гука при сдвиге (кручении) ?

A. $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$ B. $\tau = G \cdot \gamma$ C. $\gamma = \dfrac{G}{\tau}$ D. $\gamma = \dfrac{G}{\sigma}$ E. $\tau = \varepsilon \cdot G$

30.Укажите формулу для определения напряжений в поперечном сечении скручиваемого круглого стержня.

A. $\sigma = \dfrac{\mathrm{M}_u}{I_Y} \cdot z$ B. $\tau = \mathrm{E} \cdot \gamma$ C. $\tau = \dfrac{w_P}{M_K}$ D. $\sigma = \dfrac{M_u}{W_Y}$ E. $\tau = \dfrac{M_k}{I_P} \cdot \rho$

31.Чему равны наибольшие касательные напряжения при кручении

A. $\sigma_{\max} = \dfrac{Mu}{Wy}$ B. $\tau_{\max} = \dfrac{Mk}{Wp}$ C. $\tau_{\max} = \dfrac{Mk}{Ip}$

D. $\tau_{\max} = \dfrac{Mk \cdot l}{G \cdot Iy}$ E. $\tau_{\max} = \dfrac{Mk \cdot l}{G \cdot Iy} \leq [\tau]$

32.Чему равен полярный момент инерции круглого сечения?

A. $I_Y = \dfrac{\pi \cdot d^4}{64}$ B. $I_p = \dfrac{\pi \cdot d^2}{4}$ C. $I_p = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$

D. $I_y = \dfrac{\pi \cdot d^3}{64}$ E. $I_P = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$

33.Чему равен полярный момент сопротивления круглого сечения?

A. $W_P = \dfrac{\pi \cdot d^3}{16}$ B. $W_P = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$ C. $W_P = \dfrac{\pi \cdot d^3}{32}$

D. $W_P = \dfrac{\pi \cdot d^4}{64}$ E. $W_P = \dfrac{\pi \cdot d^2}{32}$

34 . Что такое жесткость сечения при кручении?

A. Произведение $E \cdot Iy$ B. $E \cdot I_P$ C. $G \cdot I_p$ D. $G \cdot W_P$ E. $E \cdot F$

35. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях бруса при кручении?

A. $M_и$ B. M_K C. N D. $Q,\ M_K$ E. $N,\ M_K$

36. Как пишется условие прочности при кручении?

A. $\tau = \frac{M_K}{I_P} \cdot \rho$; B. $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P} \le [\tau]$; C. $\tau_{\max} = \frac{M_K}{I_P} \le [\tau]$;

D. $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_И} \le [\tau]$ E. $\tau_{\max} = \frac{M_K}{I_P} \cdot \rho \le [\tau]$

37. По какой формуле определяется угол закручивания при кручении?

A. $\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_P}$; B. $\varphi = \frac{M_и \cdot l}{E \cdot I_P}$; D. $\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_Y}$;

E. $\varphi = \frac{M_K \cdot l}{E \cdot I_Y}$; E. $\varphi = \frac{M_и \cdot l}{G \cdot I_P}$

38. Чему равны главные напряжения при кручении?

A. $\sigma_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_K}{I_p}$; B. $\sigma_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_K}{I_y}$;

D. $\sigma_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_и}{W_p}$; E. $\sigma_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_K}{I_y} \cdot \rho$;

C. $\sigma_{\max} = \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p}$

39. По какой формуле вычисляется потенциальная энергия деформации при кручении?

A. $\Pi = \frac{N^2 \cdot l}{2 \cdot EF}$; B. $\Pi = \frac{Q^2 \cdot l}{2 \cdot FG}$; C. $\Pi = \frac{M_И{}^2 \cdot l}{2 \cdot EI_Y}$;

D. $\Pi = \frac{M_И{}^2 \cdot l}{2 \cdot FG}$; E. $\Pi = \frac{M_K{}^2 \cdot l}{2 \cdot GI_P}$

40. По какой формуле производится расчет бруса на жесткость при кручении?

A. $\tau_{\max} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot W_P} \le [\varphi]$; B. $\varphi_{\max} = \frac{M_И \cdot l}{G \cdot I_Y} \le [\varphi]$;

C. $\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot l}{E \cdot I_P} \le [\varphi]$; D. $\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot l}{E \cdot I_Y} \le [\varphi]$; E. $\varphi_{\max} = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_P} \le [\varphi]$

41. По какой формуле определяется нормальное напряжение в поперечном сечении бруса при косом изгибе?

A. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot y + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot z$; B. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y + \frac{N}{F}$;

C. $\sigma = \frac{M_Y}{W_Y} \cdot z + \frac{M_Z}{W_Z} \cdot y$; D. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y$; E. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot \rho + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot \rho$

42. Чему равны наибольшие, нормальные напряжения в поперечном сечении бруса при косом изгибе?

A. $\sigma_{\max} = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y}$; B. $\sigma_{\max} = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y} + \frac{N}{F}$; C. $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P}$;

D. $\sigma_{\max} = \frac{M_И}{W_И}$; E. $\sigma_{\min}^{\max} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$

43. По какой формуле определяются напряжения в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении?

A. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot y + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot z$; B. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y + \frac{N}{F}$; C. $\sigma = \frac{M_Y}{W_Y} \cdot z + \frac{M_Z}{W_Z} \cdot y$;

D. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y$; E. $\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot \rho + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot \rho$

44. Чему равны наибольшие, нормальные напряжения в поперечных сечениях бруса при внецентренном растяжении?

A. $\sigma_{\max} = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y}$; B. $\sigma_{\max} = \frac{M_Z}{W_Z} + \frac{M_Y}{W_Y} + \frac{N}{F}$; C. $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_P}$;

D. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_И}{W_И}$; E. $\sigma_{\min}^{\max} = \dfrac{\sigma}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2}$

45. По какой формуле определяется положение нейтральной оси при косом изгибе?

A. $\dfrac{y \cdot \cos\alpha}{I_Y} + \dfrac{z \cdot \sin\alpha}{I_Z} = 0$; B. $\dfrac{z \cdot \cos\alpha}{I_Y} + \dfrac{y \cdot \sin\alpha}{I_Z} = 0$; C. $tg\beta = -tg\dfrac{I_Y}{I_Z}$;

D. $ON = -\dfrac{i^2 z}{y_A}$; $ON_1 = -\dfrac{i^2 y}{z_A}$; E. $1 + \dfrac{y_A}{i^2 z} \cdot y + \dfrac{z_A}{i^2 y} \cdot z = 0$

46. По какой формуле определяются отрезки, отсекаемые нейтральной линией при внецентренном сжатии?

A. $\dfrac{y \cdot \cos\alpha}{I_Y} + \dfrac{z \cdot \sin\alpha}{I_Z} = 0$; B. $\dfrac{z \cdot \cos\alpha}{I_Y} + \dfrac{y \cdot \sin\alpha}{I_Z} = 0$; C. $tg\beta = -tg\dfrac{I_Y}{I_Z}$;

D. $ON = -\dfrac{i^2 z}{y_A}$; $ON_1 = -\dfrac{i^2 y}{z_A}$; E. $1 + \dfrac{y_A}{i^2 z} \cdot y + \dfrac{z_A}{i^2 y} \cdot z = 0$

47. Как пишется условие прочности при косом изгибе?

A. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{F} \le [\sigma]$; B. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{И\max}}{W_Y} \le [\sigma]$; D. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_Z}{W_Z} + \dfrac{M_Y}{W_Y} \le [\sigma]$;

C. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{F} + \dfrac{M_Y}{W_Y} + \dfrac{M_Z}{W_Z} \le [\sigma]$; E. $\sigma_{экв\,III} = \dfrac{M_{экв\,III}}{W_И} \le [\sigma]$

48. Как пишется условие прочности при внецентренном растяжении?

A. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{F} \le [\sigma]$; B. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{И\max}}{W_Y} \le [\sigma]$; C. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_Z}{W_Z} + \dfrac{M_Y}{W_Y} \le [\sigma]$;

D. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{F} + \dfrac{M_Y}{W_Y} + \dfrac{M_Z}{W_Z} \le [\sigma]$; E. $\sigma_{экв\,III} = \dfrac{M_{экв\,III}}{W_И} \le [\sigma]$

49. Как пишется условие прочности при изгибе с кручением по третьей теории прочности?

A. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{F} \le [\sigma]$; B. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_{И\max}}{W_Y} \le [\sigma]$; C. $\sigma_{\max} = \dfrac{M_Z}{W_Z} + \dfrac{M_Y}{W_Y} \le [\sigma]$;

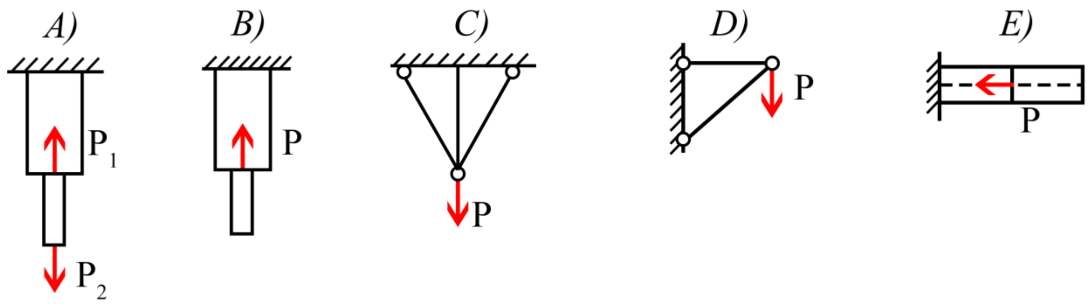
D. $\sigma_{\max} = \dfrac{N}{F} + \dfrac{M_Y}{W_Y} + \dfrac{M_Z}{W_Z} \le [\sigma]$; E. $\sigma_{экв\,III} = \dfrac{M_{экв\,III}}{W_И} \le [\sigma]$

50. Какой вид имеет условие устойчивости сжатого стержня?

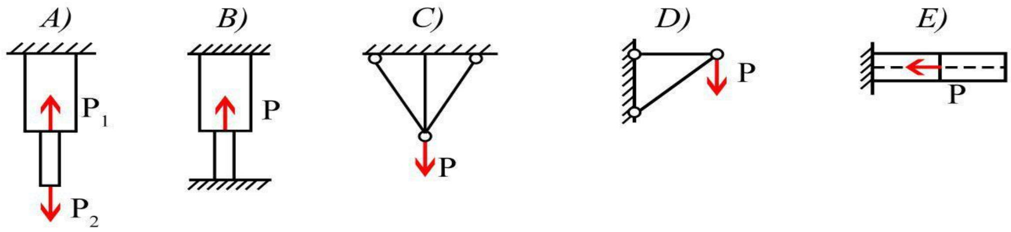
A. $\sigma = \dfrac{N}{F} \le [\sigma]$; B. $\sigma = \dfrac{M_И}{I_Y} \le [\sigma]$; C. $\sigma = \dfrac{M_K}{W_\rho} \le [\sigma]$;

D. $\sigma = \dfrac{M_И}{W_Y} \le [\sigma]$; E. $\sigma = \dfrac{P}{F} \le [\sigma]$

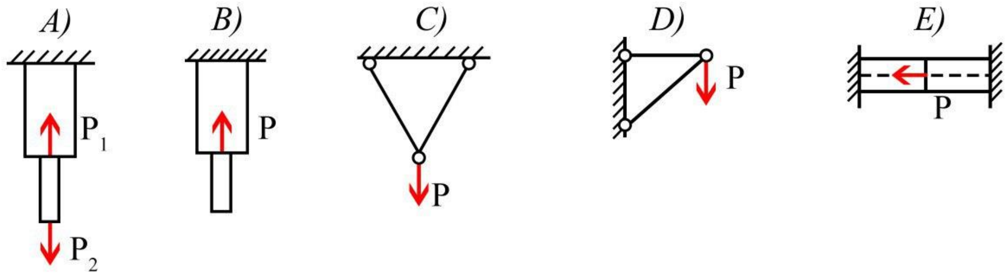
51. На каком из рисунков показана статически неопределимая система



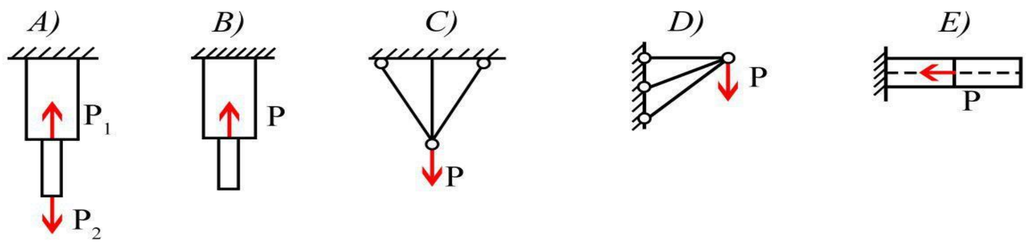
52. На каком из рисунков показана статически неопределимая система?



53. На каком из рисунков показана статически неопределимая система?



54. Укажите на рисунке статически неопределимую систему



55. Чему равно значение коэффициента Пуассона для стали?

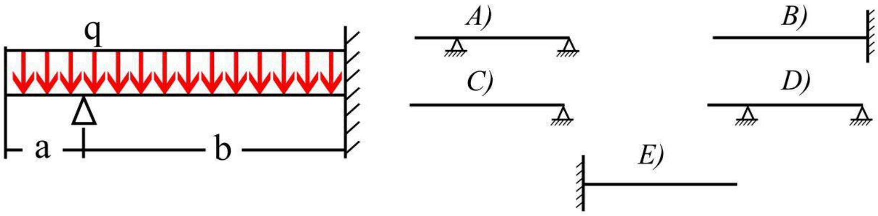
A. $\mu = 0{,}1$, B. $\mu = 0{,}2$, 3. $\mu = 0{,}3$, 4. $\mu = 0{,}4$, 5. $\mu = 0{,}5$

56. Какая существует дифференциальная зависимость между изгибающимся моментом и поперечной силой?

A. $q = \frac{d^2M}{dx^2}$ B. $Q = \frac{dM_u}{dx}$ C. $q = \frac{dQ}{dx}$

D. $q = \frac{dN}{dx}$ E. $Q = \frac{d^2M_u}{dx}$

57. Какая из схем является основной системой для балки, показанной на Рисунке?



58. По какой формуле определяют осевой момент сопротивления балки круглого сечения?

A. $W_y = \frac{bh^2}{12}$ B. $W_y = \frac{bh^2}{6}$ C. $W_y = \frac{\pi d^3}{64}$

D. $W_y = \frac{\pi d^3}{32}$ E. $W_y = \frac{\pi d^4}{32}$

59. По какой формуле определяют осевой момент сопротивления балки прямоугольного сечения?

A. $W_y = \frac{bh^2}{12}$ B. $W_y = \frac{\pi d^3}{32}$ C. $W_y = \frac{\pi d^3}{64}$

D. $W_y = \frac{bh^2}{6}$ E. $W_y = \frac{\pi d^4}{32}$

60. Чему равны касательные напряжения при изгибе?

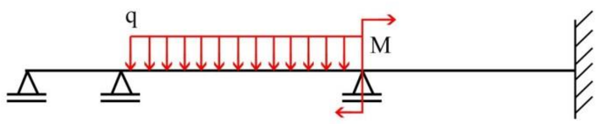
A. $\tau = \frac{Q\,S_y^*}{I_y b}$ B. $\tau = \frac{Q\,S_y}{Eb}$ C. $\sigma = \frac{M_u S_y}{Eb}$

D. $\sigma_{\max} = \frac{M_u}{I_y} \cdot z$ E. $\tau = \frac{Q_{\max} S_y}{I_y}$

61. Какова размерность относительной деформации?

A. кг B. см C. безразмерная D. кН/см^2 (МПа) E. т/м

62. Чему равна степень статистической неопределимости балки, показанной на рисунке?



A. Один B. Два C.Три D. Четыре E. Пять

63. Какова связь между поперечной и относительной продольной деформацией?

A. $\varepsilon = \mu\varepsilon^1$ B. $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$ C. $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E}$

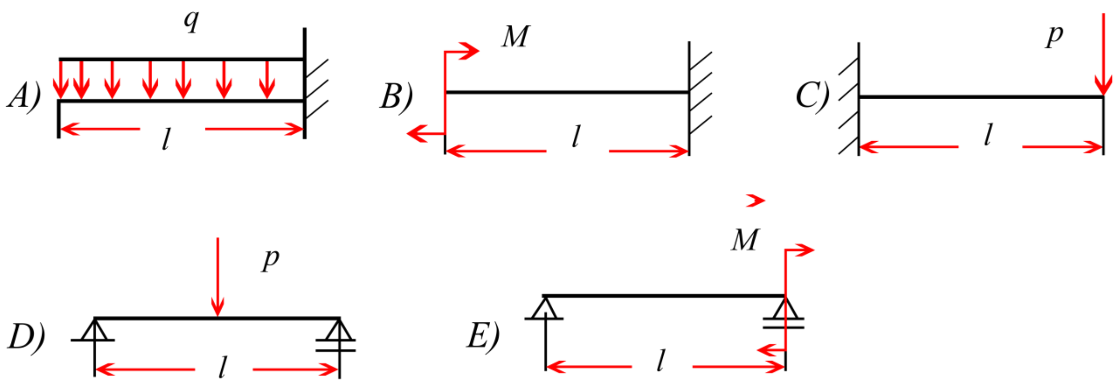
D. $\varepsilon = \dfrac{E}{\sigma}$ E. $\varepsilon^1 = -\mu\varepsilon$

64. Как меняются нормальные напряжения по высоте балки при чистом изгибе?

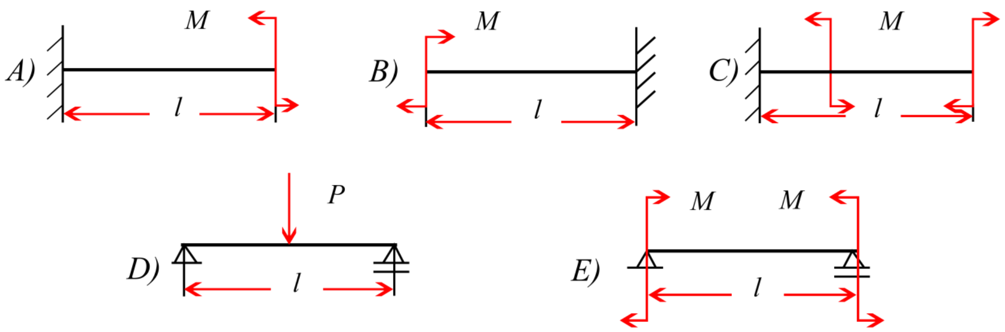
A. $\sigma = \dfrac{M_и}{E} \cdot z$ B. $\sigma = \dfrac{M_и}{\rho} \cdot z$ C. $\sigma = \dfrac{E}{\rho} \cdot z$

D. $\sigma = \dfrac{M_и}{I_Y} \cdot \rho$ E. $\sigma = \dfrac{Q}{\rho} \cdot z$

65. Какая из балок, показанных на рисунке, испытывает чистый изгиб?



66. На каком из рисунков показан поперечный изгиб?



67. Как пишется условие прочности при изгибе по касательным напряжениям?

A. $\tau = \dfrac{Q S_y}{I_y E} = [\sigma]$

B. $\tau = \dfrac{Q_{\max}}{I_y b} \cdot z = [\tau]$

C. $\tau_{\max} = \dfrac{Q_{\max} S_y}{I_y} \leq [\tau]$

D. $\tau_{\max} = \dfrac{M_{u\,\max}}{I_y} \leq [\tau]$

E. $\tau = \dfrac{Q_{\max} S_y}{I_y b} \leq [\tau]$

68. Какая существует дифференциальная зависимость между изгибающим моментом и интенсивностью распределенной нагрузки?

A. $q = \dfrac{d^2 M}{dx^2}$

B. $Q = \dfrac{dM_u}{dx}$

C. $q = \dfrac{dQ}{dx}$

D. $q = \dfrac{dN}{dx}$

E. $Q = \dfrac{d^2 M_u}{dx}$

Коды правильных ответов

Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**	Вопрос	**Ответ**
1	A	15	A	29	B	43	B	57	C
2	D	16	A	30	E	44	B	58	D
3	B	17	C	31	B	45	E	59	D
4	A	18	D	32	C	46	D	60	A
5	B	19	C	33	A	47	D	61	C
6	B	20	D	34	C	48	D	62	C
7	D	21	C	35	B	49	E	63	E
8	D	22	D	36	B	50	E	64	D
9	D	23	E	37	A	51	C	65	B
10	A	24	B	38	C	52	B	66	D
11	A	25	C	39	E	53	E	67	E
12	A	26	D	40	E	54	D	68	A
13	B	27	E	41	D	55	C		
14	D	28	D	42	A	56	B		

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. В двух томах. - СПб.: Лань, 2002, 736 с.

2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для студентов высших технических учебных заведений. - Изд. 20-е, стер.- Москва: Высшая школа, 2010, 415 с.

3. Мещерский И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. - 50 изд., стереотипное.-СПб.: Лань, 2010, 450 с.

4. Валиашвили Н.В, Гаврюшин С.С. Сопротивление материалов и конструкций. Учебник–М.:Юрайт, 2018, 429с.

5. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для втузов/9 изд., перераб. - М.: Наука, 1999, 512 с.

6. Степин П. А. Сопротивление материалов: учебник/12 изд. стереотипное- М.: Лань, 2012, 321с

7. Яблонский А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике – М.: Высшая школа 2006, 386с

8. Л.С.Минин, Ю.П. Самсонов, В.Е. Хроматов. Сопротивление материалов. Расчетные и тестовые задания 3-е издание Москва-Юрайт, 2018, 201с

9. Эрдеди А.А., Эрдеди Н.А. Теоретическая механика. Сопротивление материалов/ 8-е издание, стереотипное- М.: Академия. 2007, 324с.

10. Dietmar Gross Werner Hauger Jörg Schröder WolFgang A. Wall Nimal Rajapakse «Engineering Mechanics 1 Statics» 2nd Edition Springer Science+Business Media Dordrecht 2012, 28 p

11. James M. Gere Barry J. Goodno «Mechanics oF materials» Eighth edition Copyright 2012 Cengage Learning Printed in Canada 363 p, 383 p

12. James M. Gere «Mechanics oF Materials» sixth edition Copyright 2004 Thomson Learning, 205 p

13. R. C. Hibbeler «Engineering mechanics Statics» twelfth edition 2010, 35 p, 60 p

14. R. C. Hibbeler «Dynamics» twelfth edition printed in the United States oF America 2010, 38 p

15. Dietmar Gross • Werner Hauger Jorg Schroder • WolFgang A. Wall Sanjay Govindjee «Engineering Mechanics 3» Dynamics Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011, 76 p, 97 p.