ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ФАЯЗОВА ЗАРИНА КУДРАТИЛЛОЕВНА

ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР БИЛАН БОҒЛАНГАН ЖАРАЁНЛАРНИ ЧЕГАРАВИЙ БОШҚАРИШ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

УДК: 517.977

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ФАЯЗОВА ЗАРИНА КУДРАТИЛЛОЕВНА

ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР БИЛАН БОҒЛАНГАН ЖАРАЁНЛАРНИ ЧЕГАРАВИЙ БОШҚАРИШ.

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № B2018.3.PhD/FM274 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http:ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Академик Алимов Шавкат Арифджанович** физика-математика фанлари доктори
Расмий оппонентлар:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович,** физика-математика фанлари доктори профессор, (БухДУ) **Хасанов Акназар Бектурдиевич ,** физика-математика фанлари доктори профессор (СамДУ)
Етакчи ташкилот:	**ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «_ _»___________ соат ___ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4- уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2020 йил «___» _______________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» ___________ даги ______ рақамли реестр баённомаси

А. С. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, PhD

А.А. Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси ўринбосари, академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда математик физика тенгламалари билан тавсифланадиган тизимларни бошқариш назариясини ўрганишга бағишланган. Илмий амалий тадқиқотлар турли тизимларни бошқариш вазифаларига келтирилиши мумкин. Физика ва техниканинг баъзи муаммоларининг математик моделлари қуйидагича: параметрнинг маълум қийматларини олиш учун жараённи бошқариш. Бунга мисол иссиқлик тарқалиши ёки тўлқин тарқалиши жараёнларини бошқариш ҳисобланади. Тўлқин тарқалиши жараёнлари ҳолатида, соҳанинг маълум бир қисмида маълум бир тўлқин шаклига эришиш учун соҳа чегарасининг бир қисмидаги тўлқинлар параметрини назорат қилиш керак. Иссиқлик тарқалиши жараёнларида эса соҳанинг маълум бир қисмида ўртача ҳароратга эришиш учун соҳа чегарасида ҳарорат ўзгаришини бошқариш креак. Шунинг учун чегаравий бошқарув масалалари ҳам назарий, ҳам тадбиқий жиҳатдан аҳамиятли ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда чегаравий бошқариш масалалари математик физиканинг долзарб муаммоларидан бири ҳосибланади. Чегаравий муаммоларни ўрганиш математик физиканинг тескари ва нокоррект қўйилган муаммолари билан чамбарчас боғлиқ, шунинг учун улар Фредгольм ёки Вольтерра интеграл тенгламаларини ўрганишга келтирилади (одатда биринчи тур Вольтерра тенгламаси). Сўнги пайтларда иссиқлик ўзатиш жараёнларини бошқариш жадал ривожланмоқда, чунки улар қўллаш вазифалари билан чамбарчас боғлиқдир, шунинг учун иссиқлик узатиш жараёнларини бошқаришнинг чегаравий муаммоларини ўрганиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган математик физика ва оптимал бошқарувнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, оптимал бошқарув ва ўйинлар назарияси масалаларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Оддий дифференциал тенгламалар ва уларнинг системалари, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг системалари орқали тавсифланадиган жараёнларни бошқариш назариясига оид салмоқли натижаларга эришилди. “Функционал анализ, дифференциал тенглама ва математик физика математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда дифференциал тенгламалар ва математик физика масалаларини ечишда чегаравий масалаларни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Махкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

ЎзР Президентининг 2018 йил 27 апрелдаги № ПҚ-3682 “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ва 2019 йил 9 июлдаги № ПҚ-4387 “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-кувватлаш, шунингдек, ЎзР ФА В.И. Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотларнинг республика фан ва технологиясини ривожлантиришнинг устувор йуналишларига боғлиқлиги. Ушбу тадқиқот ЎзР фан ва технологияларни ривожлантиришнинг устувор йўналишларига мувофиқ амалга оширилди IV. "Математика, механика, информатика"

Муаммони ўрганилганлик даражаси. Бошқарув муаммоларининг математик назарияси ўтган асрнинг ўрталарида тез ривожлана бошлади. Фанга "бошқариш"(управления) атамаси Л. С. Понтрягин томонидан киритилган. Оддий дифференциал тенгламалар ва уларнинг системалари учун бошқарув муаммоларининг математик назариясига Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Э. Ф. Мищенко, Р. Беллманлар ишларида асос солинган. Оддий дифференциал тенгламалар ва уларнинг системалари учун бошқарув масалаларининг математик назарияси асоси Н. Н. Красовский, Н. Ю Сатимов, А. Азамов, А. Б. Куржанский, Ф. П. Васильев, И. В. Гайшун, Л. Янг ва бошқалар томонидан ривожлантирилган.

Бошқариш назариясининг яна бир йуналиши хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар билан тавсифланган жараёнлар билан боғлиқ. Бундай тенгламалар учун бошқариш муаммолари J.-L. Lions, K.A. Lur’e, V. Barbu, H. O. Fattorini, В. А. Ильин ва Е. И. Моисеев, А. Ш. Алимов, А. Г. Бутковский, А. И. Егоров, М. И. Белишев, Ю. С. Рожков, Ю. Е. Аниконов, А. В. Боровских, Л. Н. Знаменской, А. В. Фурсиков каби математикларнинг тадқиқот мавзуси бўлган. А. В. Фурсиковнинг монографиясида тақсимланган системалар учун оптимал бошқарув ўрганилган. Бошқа ишлардан фарқи шундаки, бошқариш муаммолари математик -физика тенгламаларига нокоррект қуйилган муаммолар учун ҳам олиб борилган.

Диссертациянинг мавзусига яқин тадқиқотлар, яъни гиперболик типдаги тенгламалар ва уларнинг системалари орқали берилган жараёнларни чегаравий назорат қилиш муаммолари В. А. Ильин, Е. И. Моисеевлар ишларида ўз ечимларини топган. Y. Luo, I. Lasieska, R. Triggiani, V. Barbu, V. Rascanu, H. O. Fattorini, P. Cannarsa, P. Martinez, Vancostenoble ва бошқалар ишларида параболик ва гиперболик тенгламалар учун турли хил чекловлар остида бошқарув муаммолари ўрганилади. S. Albiero ва Ш. А. Алимов ишларида вақт оптималлиги нуқтаи назаридан параболик тенгламалар учун чегаравий бошқариш ўрганилган.

Оддий дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаларини оптимал бошқариш муаммолари Н. Сатимов, А. Азамов, М. Тўхтасинов, Б. Рихсиев, О. Кучкаров, М. Маматов ва бошқалар томонидан ўрганилган.

Псевдо параболик тенгламалар билан боғлиқ бўлган чегара масалалари турли хил оптималлик шароитларида кўплаб муаллифлар томонидан ўрганилган, шу жумладан L. W. White, С. И. Ляшко, B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel, А. И. Кожанов, С. Г. Пятков, И. Егоров ва бошқалар.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасининг илмий-тадқитқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти М. Улуғбек номидаги ЎЗМУ ОТ-Ф-4(36+32)-сонли “Математик физика ва оптимал бошқарув масалаларини ечишнинг янги усулларини ишлаб чиқиш. Тоқ тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун ноклассик бошланғич, спектрал масалалар ва уларнинг тадбиқлари” мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади параболик ва псевдо параболик тенгламалар учун соҳа чегарасида Дирихле ва Нейман шартларини қаноатлантирувчи чегаравий бошқариш масалаларини интеграл кўринишдаги шартлар остида ечиш.

Тадқиқот вазифалари:

параболик ва псевдо параболик тенгламалар учун соҳа чегарасида Дирихле ва Нейман шартлари берилганда масалалар ечимини мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

бир жинсли чегараланган стерженда ёки пластинада иссиқлик алмашинуви жараёнини (ҳарорат ёки оқимни) бошқариш регулятори стерженнинг чап чегарасида жойлашган, стерженнинг маълум бир қисмида эса чеклов ҳароратнинг ўртача қиймати сифатида берилганда иссиқлик алмашинуви жараёни учун чегаравий бошқариш масаласини ечиш;

чегараланган соҳада (бир ёки икки ўлчовли) псевдо параболик тенглама билан ифодаланидиган жараён учун чегаравий бошқариш масаласи ечимининг мавжудлигини исботлаш, бу ерда ечим қиймати соҳа чегарасининг бир бўлагида берилиб (регулятор жойлашган жой), қўшимча шарт эса соҳанинг бир қисми бўйича ечимдан олинган интеграл сифатида берилади;

чегараланган (бир ёки икки ўлчовли) соҳа чегарасининг бир қисмида ечимни нормал бўйича ҳосиласи берилганда псевдо параболик тенглама билан ифодаланидиган жараён учун бошқарув масаласи ечимининг мавжудлигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти – соҳа чегарасида Дирихле ва Нейман шартлари билан параболик ва псевдо параболик тенгламалар, биринчи ва иккинчи турдаги Вольтерра интеграл тенгламалари.

Тадқиқотнинг предмети - параболик ва псевдо параболик тенгламалар учун интеграл шаклдаги қўшимча шартлар билан чегаравий бошқариш масалалари.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда математик-физиканинг замонавий усуллари, шу жумладан Фурье қаторлари назарияси, Лаплас алмаштриши, интеграл тенгламалар усуллари қўлланилади.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Дирихле шартларини қаноатлантирувчи иссиқлик алмашинув жараёнини (чегараланган бир ўлчовли стерженда) чегаравий бошқариш масаласининг интеграл шаклидаги шарт остида ечимининг мажудлиги исботланган;

икки ўлчовли соҳада (икки ўлчовли пластинка) Дирихле шартларини қаноатлантирувчи иссиқлик алмашинув жараёнини чегаравий бошқариш масаласининг бошқарув параметри мавжудлиги исботланган;

стерженнинг чап томонида иссиқлик оқими бўлган ҳолда иссиқлик алмашинув жараёнини чегаравий бошқариш масаласининг интеграл шарт остида ечими мавжудлиги исботланган ;

Дирихле (Нейман) шартини соҳа (бир ва икки ўлчовли соҳа) чегарасида қаноатлантирадиган псевдо параболик тенглама билан бериладиган жараённи чегаравий бошқариш масаласи ечимининг мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари параболик ва псевдо параболик тенгламалар билан ифодаланадиган жараёнларни чегаравий бошқариш масалаларини тадқиқ этиш натижалари математик физика ва оптимал бошқарув масалаларига мос келадиган турли моделлар ечимларини мавжудлигини аниқлашда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги- математик таҳлил ва математик-физиканинг замонавий усулларидан фойдаланган ҳолда математик исботлар ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларнинг илмий аҳамияти бир ўлчовли ва икки ўлчовли соҳалар учун Дирихле ва Нейман шартлари остида параболик ва псевдо параболик тенгламалар билан ифодаланадиган жараёнларни чегаравий бошқариш муаммоларининг ечимлари мавжудлиги исботланган.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти - амалий масалалар моделини диссертацияда ўрганилаётган математик моделлар кўринишида тасвирлаш мумкинлиги. Амалиёт муаммосини энг оддий намунаси сифатида ўрганилаётган ҳудуднинг чегарасида жойлашган регулятор билан иссиқлик ўзатиш жараёнини моделлаштиришдир.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши:

Диссертациядаги параболик типдаги тенгламалар билан ифодаланадиган чегаравий бошқарув масалаларининг ечимлари мавжудлиги ҳақидаги теоремалар асосида:

псевдо параболик, псевдо гиперболик ва бошқа ноклассик дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ечилиши тадқиқ этилиб, ечимларининг хоссалари ўрганилган ва «Ноклассик дифференциал ва операторли-дифференциал тангламалар учун чегаравий ва тескари масалалар» лойиҳасида фойдаланилган. (Россиянинг фундаментал тадқиқотлар фонди лойиҳаси № 18-51-41009). (маълумотнома № 250-2-35 20 феврал 2020 йил С. Л. Соболев номидаги МИ РФА СБ). Ноклассик тенгламалар ечимларининг хоссалари ҳақида қатор янги натижалар олиш имконини берган.

Параболик ва псевдо параболик тенгламалар учун Дирихле (Нейман) масалалари ечимларининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги натижалар асосидаги тавсиялар:

ЎзМУ нинг 5130200 - Амалий математика ва информатика таълим йўналишининг "Ўйинлар назарияси ва жараёнлар тадқиқоти" фани, 5А130100-Математика мутахассислигининг "Оптимал бошқарув" фани ишчи ўқув дастурларига киритилган, ҳамда ушбу фанларни ўқитиш жараёнида фойдаланилган, мазкур бакалавриат таълим йўналиши ва магистратура мутахассислиги битирувчилари битирув малакавий, магистрлик диссертация ишларини тайёрлашда қўлланилган. О. С. Зикировнинг "Математик физика тенгламалари" номли (ЎзР ОЎМТВ 2020 йил 4 февралдаги 89-03-448-сонли маълумотномаси) ўқув қўлланмасининг 5-§ параболик турдаги тенгламаларга қўйилган чегаравий масалаларнинг ечимини қуриш, 21-§ умумлашган ечимнинг хусусятларини ўрганиш имконини берган.

Параболик ва псевдо параболик тенгламалар билан боғланган жараёнларни чегаравий бошқариш ва бу масалаларга мос чегаравий масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги натижалар асосида:

ФИЦ ИУ РАН ҳисоблаш марказининг ҳисоблаш усуллари ва математик физикаси бўлимининг ("РФА "Информатика ва бошқарув" Федерал тадқиқот маркази" Федерал давлат ташкилотининг 2020 йил 24 январдаги 1968-52-сонли маълумотномаси) илмий мавзулари назарий асослаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Ушбу тадқиқот натижалари 11 та илмий-амалий анжуманларда, 6 та халқаро ва 5 та республика миқёсидаги конференцияларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 17 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестатция комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 113 бет.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Киришда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурлиги асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиясини ривожлантиришнинг устувор йуналишларига мослиги кўрсатилган, хорижий ва маҳаллий илмий тадқиқотлар ҳақида умумий маълумот берилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси, мақсад ва вазифалари белгиланган, тадқиқотнинг объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари очиб берилган. Олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти баён этилган, илмий-тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Ушбу ишнинг биринчи бобида бошқариш масалалари ҳақида маълумотлар, интеграл тенгламалар ечимларининг мавжудлиги, ягоналиги ва замонавий ечиш усуллари, параболик ва псевдо параболик тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг ечимлари тўғрисидаги ёрдамчи далиллар келтирилган.

Ушбу ишнинг иккинчи бобида соҳа чегарасида Дирихле ёки Нейман шартларини қаноатлантирувчи иссиқлик алмашинув жараёнлари учун чегара назорати масалалари интеграл шарт остида тадқиқ этилади.

Биринчи параграфда қуйидаги муаммонинг математик модели ўрганилади:

2π узунликдаги бир жинсли стержен қаралади. Стерженнинг чап чегарасида манба мавжуд бўлиб унда регулятор жойлашган. Соҳанинг биринчи ярмида белгиланган ҳароратни таъминлаш учун иситгич режимини мувофиқлаштириш талаб қилинади. Ушбу муаммонинг математик моделини қуйидагича тасвирлаш мумкин**:**

Фараз қилайлик $u(x,t)$ функцияси ушбу тенгламани

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (t,x) \in D_T = \{0 < t < T, \quad -\pi < x < \pi\}, \tag{1}$$

бошланғич шартни

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{2}$$

чегаравий шартларни

$$u\big|_{x=-\pi} = \mu(t), \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

қаноатлантирсин.

Бошқариш функцияси $\mu(t)$ келишиш шарти

$$\mu(0) = 0, \tag{4}$$

ва чегараланганлик шартини

$$|\mu(t)| \le 1 \tag{5}$$

қаноатлантиради деб фараз қиламиз.

Масала. Берилган иссиқлик ҳолати функцияси $\theta(t)$ учун қуйидаги шартни қаноатлантирувчи

$$\int_{-\pi}^{0} u(x,t)dx = \theta(t), \quad t \ge 0 \tag{6}$$

бошқарув параметри $\mu(t)$ ни топинг.

Таъриф 1. (1)-(3) масаланинг ечими деб ушбу

$$u(x,t)=\mu(t)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,t)$$

кўринишга эга бўлган $u(x,t)$ функцияга айтилади, бу ерда $v(x,t)$ функцияси қуйидаги тенгламани

$$v_t(x,t)-v_{xx}(x,t)=\mu'(t)\frac{\pi-x}{2\pi},$$

бир жинсли бошланғич ва чегаравий шартларни

$$v\big|_{t=0}=v\big|_{\partial D}=0,$$

қаноатлантирувчи $C([0,T]\to\tilde{W}_2^1(D))$ фазодаги умумлашган ечимдир, бу ерда $D=\left\{x:\ -\pi<x<\pi\right\}$.

Теорема 1. Шундай ўзгармас $M>0$ мавжудки $\theta\in W_2^2(-\infty,\infty)$ ва

$$\|\theta\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\le M,\qquad t\le 0 \text{ бўлганда } \theta(t)=0$$

шартларни қаноатлантирувчи барча $\theta(t)$ функция учун (5) ва (6) шартларни қаноатлантирувчи бошқарув параметри $\mu(t)$ мавжуд.

Ушбу бобни иккинчи параграфида олдинги параграфда қаралган масала стерженнинг чап чегарасида иссиқлик оқими берилган ҳолда ўрганилади (стержен узунлиги π). Бу ҳолда масаланинг математик моделини қуйидагича шакллантириш мумкин:

Фараз қилайлик $u(x,t)$ функцияси (1) тенгламани $D_T=\left\{(x,t):0<x<\pi,\ 0<t<T<+\infty\right\}$ соҳада, бир жинсли бошлангич шарт (2) (бу ерда $u\big|_{t=0}=0,\quad x\in[0,\pi]$) ва

$$u_x\big|_{x=0}=-\mu(t),\qquad u_x\big|_{x=\pi}=0,\quad 0\le t\le T \tag{7}$$

чегаравий шартларни қаноатлантиради, бу ерда $\mu(t)$, $\mu(0)=0$ шартни қаноатлантирувчи номаълум функция.

Фараз қилайлик ушбу тенглик

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}u(x,t)dx=\theta(t) \tag{8}$$

ўринли бўлсин, бу ерда $\theta(t)$ -берилган функция.

Масала. (8) шартни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ функциясини топинг.

Фараз қилайлик $v(x,t)$ функцияси қуйидаги масаланинг:

$$v_t(x,t)-v_{xx}(x,t)=-\frac{\mu(t)}{\pi}+\mu'(t)\frac{(\pi-x)^2}{2\pi},\quad (x,t)\in D_T=\left\{0<t<T,\ 0<x<\pi\right\} \tag{9}$$

бир жинсли бошланғич ва чегаравий шартлар билан

$$v\big|_{t=0}=0,\quad v_x\big|_{\partial D}=0 \tag{10}$$

$C([0,T]\to W_2^1(D))$ фазодаги умумлашган ечими бўлсин.

Таъриф 2. $W_2^{1,0}(D_T)$ фазога тегишли ва қуйидаги интеграл кўринишдаги айниятни

$$\int_{D_T}(-v\eta_t+v_x\eta_x)dxdt=\int_{D_T}(-\frac{\mu(t)}{\pi}+\mu'(t)\frac{(\pi-x)^2}{2\pi})\eta(x,t)dxdt\ , \tag{11}$$

қаноатлантирувчи $v(x,t)$ функциясига (9)-(10) масаланинг $W_2^{1,0}(D_T)$ фазодаги умумлашган ечими деб айтилади, бу ерда $\forall\eta\in W_2^1(D_T)$, $\eta(t)$ $t=T$ нольга тенг.

Теорема 2. Шундай узгармас $M>0$ сон мавжудки $\|\theta(t)\|_{W_2^2(R)}\le M$ ва барча $t\le 0$ ларда $\theta(t)=0$ бўладиган ва $W_2^2(-\infty,+\infty)$ фазога тегишли бўлган $\theta(t)$ функциялар учун (8) ва $\mu(0)=0$ шартларни қаноатлантирадиган $\mu(t)\in W_2^1(R)$ бошқарув параметри мавжуд.

Кейинги параграфда қуйидаги иссиқлик алмашинув жараёни учун чегаравий бошқариш масаласи қаралади:

$D=\{(x,y)\in R^2:|x|<\pi,|y|<\pi\}$ соҳанинг чегарасида ҳароратни бошқарадиган иситгич мавжуд. Берилган D соҳанинг бир қисмида иссиқликнинг ўртача қийматини таминлайдиган чегарадаги иситгич режимини топиш талаб қилинади.

Фараз қилайлик $u(x,y,t)$ функция қуйидаги тенгламани

$$u_t=u_{xx}+u_{yy},\quad (x,y,t)\in D_T=\{0<t<T,\ |x|<\pi,|y|<\pi\}, \tag{12}$$

бошланғич ва чегаравий шартларни

$$\begin{cases} u|_{t=0}=0,\ \ -\pi\le x,y\le\pi; \\ u|_{x=\pi}=0,\ \ 0\le t\le T,-\pi\le y\le\pi; \\ u|_{y=\pi}=0,\ \ 0\le t\le T,-\pi\le x\le\pi; \\ u|_{y=-\pi}=0,\ \ 0\le t\le T,-\pi\le x\le\pi; \\ u|_{x=-\pi}=\mu(t)\Phi(y),\ \ 0\le t\le T,-\pi\le y\le\pi; \\ \Phi(-\pi)=\Phi(\pi)=0 \end{cases} \tag{13}$$

қаноатлантиради. Бу ерда $\Phi(y)$ – берилган функция (иситгичнинг ёки кондиционернинг чизиқли зичлиги), $\mu(t)$ – бошқарув параметри, иссиқ ёки совуқ ҳаво оқимининг амплитудасини беради.

Масала.

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}u(x,y,t)dxdy=\theta(t) \tag{14}$$

шартни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқарув параметрини топинг, бу ерда $\theta(t)$ берилган функция.

Таъриф 3. (12)-(13) масаланинг ечими деб ушбу кўринишдаги

$$u(x,y,t)=\mu(t)\Phi(y)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,y,t)$$

$u(x,y,t)$ функцияни тушунамиз, бу ерда $v(x,y,t)$ қуйидаги масаланинг $C([0,T]\to\tilde{W}_2^1(D))$ фазодаги умумлашган ечимидир:

$$v_t(x,y,t)-\Delta v(x,y,t)=\left[\mu'(t)\Phi(y)-\mu(t)\Phi''(y)\right]\frac{\pi-x}{2\pi},$$

бир жинсли бошланғич ва чегаравий шартлар:

$$v\big|_{t=0} = v\big|_{\partial D} = 0,$$

бу ерда $D = \{(x, y): |x| < \pi, |y| < \pi\}$.

Лемма 1. Фараз қилайлик $\mu(t)$ ва $\Phi(y)$ функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\mu \in W_2^1(\mathbb{R}), \quad \mu(0) = 0$,

2) $\Phi \in W_2^2[-\pi, \pi]$ ва $\Phi(-\pi) = \Phi(\pi)$.

У ҳолда (12)-(13) масала ечими ягона ва у қуйидаги кўринишга эга

$$u(x, y, t) = \int_0^t \mu(\tau) \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{2\pi} e^{-(\frac{n^2+m^2}{4})(t-\tau)} \Phi_m \sin\frac{n(x+\pi)}{2} \sin\frac{m(y+\pi)}{2} d\tau,$$

бу ерда

$$\Phi_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(y) \sin\frac{m(y+\pi)}{2} dy, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Теорема 3. Фараз қилайлик $\Phi(y)$ функция $\Phi \in W_2^2[-\pi, \pi]$ айнан нольга тенг эмас ва $\Phi_m \geq 0,\ m = 1, 2, 3, \ldots$. У ҳолда шундай ўзгармас $M > 0$ топиладики барча $\theta \in W_2^2(-\infty, \infty)$ қуйидаги шартни $\|\theta\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \leq M$, барча $t \leq 0$ да $\theta(t) = 0$ қаноатлантирувчи $\theta(t)$ функциялар учун (14) шартни қаноатлантирувчи бошқариш параметри $\mu(t)$ мавжуд.

Учинчи боб Дирихле ёки Нейман шартлари соҳа чегарасида бажарилганда псевдо параболик тенгламанлар билан боғланган жараёнларни чегаравий бошқариш масалаларини интеграл шаклдаги шартлар остида ўрганишга бағишланган.

Биринчи параграфда бир ўлчовли соҳада псевдо параболик тенглама билан боғлиқ бўлган чегаравий бошқариш масаласи интеграл шаклдаги шарт остида тадқиқ этилади.

Чегараланган соҳа $D_T = \{(x,t): -\pi < x < \pi, 0 < t < T < +\infty\}$ да ушбу тенгламани

$$u_t = u_{txx} + u_{xx} \tag{15}$$

бошланғич шартни

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [-\pi, \pi] \tag{16}$$

ва чегаравий шартларни

$$u\big|_{x=-\pi} = \mu(t), \quad u\big|_{x=\pi} = 0,\ t \in [0, T] \tag{17}$$

қаноатлантирадиган $u(x,t)$ функцияни қараймиз.

Масала.

$$\int_{-\pi}^{0} u(x,t)dx = \theta(t) \tag{18}$$

тенгликни, $\mu(0) = 0$ ва

$$|\mu(t)| \leq 1 \tag{19}$$

шартларни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқарув параметрини топинг.

Таъриф 4. (15)-(17) масаланинг ечими деб ушбу кўринишдаги

$$u(x,t) = \mu(t)\frac{\pi - x}{2\pi} - v(x,t)$$

функцияга айтилади, бу ерда $v(x,t)$ функция қуйидаги масаланинг

$$v_t(x,t) - v_{xxt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = \mu'(t)\frac{\pi - x}{2\pi}, \quad (x,t)\in D_T, \tag{20}$$

бир жинсли бошланғич ва чегаравий шартлар билан

$$v\big|_{t=0} = v\big|_{\partial D} = 0 \tag{21}$$

$C([0,T]\to \tilde{W}_2^1(D))$ фазодаги умумлашган ечимидир.

Таъриф 5. (20)-(21) масаланинг $W_2^{1,0}(D_T)$ (ёки $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$)даги умумлашган $v(x,t)$ ечими деб $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$ фазога тегишли ва қуйидаги айниятни

$$\int_{D_T}(-v\eta_t + v_x\eta_x - v_x\eta_{xt})dxdt = \int_{D_T}\mu'(t)\frac{(\pi - x)}{2\pi}\eta(x,t)dxdt$$

қаноатлантирувчи $v(x,t)$ функцияга айтилади, бу ерда $\forall\eta\in W_{2,0}^1(D_T)$, $\eta_{xt}\in L_2(D_T)$ ва $\eta(x,T)=0$.

Лемма 2. Фараз қилайлик функция $\mu(t)$ қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: $\mu\in W_2^1(\mathbb{R}),\quad \mu(0)=0$. У ҳолда (15)-(17) масаланинг ечими мавжуд, ягона ва ушбу кўринишга эга

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kq_k}e^{-q_k(t-\tau)}(\mu(\tau)+\mu'(\tau))\sin\left(\frac{k}{2}(x+\pi)\right)d\tau, \quad k=1,2,\dots,$$

бу ерда $q_k = (k/2)^2/(1+(k/2)^2), \quad k=1,2,\dots$.

Теорема 4. Шундай ўзгармас $M>0$ сони топиладики барча $\theta\in W_2^1(-\infty,\infty)$ ва

$$\|\theta\|_{W_2^1(\mathbb{R})}\le M, \qquad \theta(t)=0 \quad t\le 0 \text{ да}$$

шартларни бажарувчи $\theta(t)$ функцияси учун

$$\int_{-\pi}^{0}u(x,t)dx = \theta(t)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқариш параметри мавжуд.

Ушбу бобнинг кейинги параграфи соҳа чегарасида Дирихле шарти бажарилганда псевдо параболик тенглама билан боғлиқ чегаравий бошқариш масаласи интеграл кўринишдаги чегаралаш билан ўрганилган.

Фараз қилайлик $u(x,y,t)$ функция ушбу тенгламани

$$u_t = \Delta u_t + \Delta u,\ (t,x,y)\in D_T = \{0<t<T, -\pi<x,y<\pi\}, \tag{22}$$

бошланғич шартни

$$u\big|_{t=0} = 0,\ -\pi\le x,y\le\pi \tag{23}$$

ва чегаравий шартларни

$$\begin{cases} u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{x=-\pi} = \mu(t)\Phi(y),\ 0\le t\le T, -\pi\le y\le\pi; \\ u\big|_{y=-\pi} = 0,\ u\big|_{y=\pi} = 0,\ 0\le t\le T, -\pi\le x\le\pi; \\ \Phi(-\pi) = \Phi(\pi) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

қаноатлантиради.

Хотираси сўнувчи сиқилмайдиган оддий суюқликлар назариясининг моделларидан бирини (15) тенглама билан тасвирлаш мумкин (бунга Г. И. Баренблат, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, B. D. Coleman, W. Noll, D. W. Taylor ларнинг ишларини мисол қилиб келтириш мумкин). B. D. Coleman, R. J.

Duffin, V. J. Mizel, D. Colton, R. E. Showalter, T. W. Ting ишларида (15) тенглама учун баъзи классик масалалар ечимининг турғунлиги, мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги муаммолар ўрганилган. С. И. Ляшко, А. А. Маньковский ишларида параболик ва псевдо параболик тенгламалар учун нуқтали бошқариш масаласи қаралган.

Таъриф 6. (22)-(24) масаланинг ечими деб қуйидаги шаклда

$$u(x,y,t)=\mu(t)\phi(y)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,y,t),$$

ифодаланган $u(x,y,t)$ функцияни тушунамиз, бу ерда $v(x,y,t)$ функция қуйидаги масаланинг:

$$v_t(x,y,t)\;-\;\Delta v_t(x,y,t)-\Delta v\;(x,y,t)\;=(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi},\qquad(25)$$

$(x,y,t)\in D_T,$

бир жинсли бошланғич ва чегаравий шартли:

$$v\big|_{t=0}=v\big|_{\partial D}=0\qquad(26)$$

$C([0,T]\to\tilde{W}_2^1(D))$ фазодаги умумлашган ечимидир.

Таъриф 7. (25)-(26) масаланинг $W_2^{1,0}(D_T)$ (ёки $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$) фазодаги умумлашган ечими деб $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$ га тегишли ва қуйидаги айниятни

$$\begin{aligned}&\int\limits_{D_T}(-v\eta_t+v_x\eta_x-v_x\eta_{xt}+v_y\eta_y-v_y\eta_{yt})dxdydt=\\&=\int\limits_{D_T}(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi}\eta(x,y,t)dxdydt,\end{aligned}\qquad(27)$$

бу ерда $\forall\eta\in W_{2,0}^1(D_T)$, $\eta_{xt},\,\eta_{yt}\in L_2(D_T)$ ва $\eta(T)=0$, қаноатлантирадиган $v(x,y,t)$ функцияга айтилади.

Лемма 3. Фараз қилайлик $\mu(t)$ ва $\phi(y)$ функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $\mu\in W_2^1(\mathbb{R}),\quad \mu(0)=0$;
2) $\phi(y)\in W_2^2[-\pi,\pi]$ ва $\phi(-\pi)=\phi(\pi)$.

У ҳолда (22)-(24) масала ягона ечимга эга ва у қуйидагича ифодаланади

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{n\,e^{-q_{nm}(t-\tau)}}{1+\lambda_{nm}}\{\mu(\tau)+\mu'(\tau)\}d\tau\,\phi_m\sin\left(\frac{n}{2}(x+\pi)\right)\sin\left(\frac{m}{2}(y+\pi)\right),$$

бу ерда $q_{nm}=\lambda_{nm}/(1+\lambda_{nm}),\quad \lambda_{nm}=\left(n/2\right)^2+\left(m/2\right)^2,\;\; n.m=1,2,\,\ldots\,,$

$$\phi_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(y)\sin\left(\frac{m(y+\pi)}{2}\right)dy,\;\; m=1,2,\ldots\,.$$

Масала. Берилган $\theta(t)$ функцияси бўйича

$$\int\limits_{-\pi}^{0}\int\limits_{-\pi}^{0}u(x,y,t)dxdy=\theta(t),\;\; t>0\qquad(28)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқариш параметрини топинг.

Теорема 5. Фараз қилайлик $\Phi\in W_2^2\left[-\pi,\pi\right]$ функцияси нольга айнан тенг бўлмасин ва $\Phi_m\geq0,\; m=0,1,2,....$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда шундай узгармас $M>0$ топиладики, $t\le 0$ да $\theta(t)=0$ шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\theta(t)\in W_2^1(-\infty,+\infty)$ учун (28) шартни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқарув параметри мавжуд.

Учинчи параграфда псевдо параболик тенглама билан боғланган, соҳа чегарасида ечимнинг ҳосиласи берилганда чегаравий бошқариш масаласи ўрганилган.

Фараз қилайлик $u(x,t)$ функцияси (15) тенгламани, (16) бошланғич шартни ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирсин

$$u_x\big|_{x=-\pi}=-\mu(t),\ u_x\big|_{x=\pi}=0,\ 0\le t\le T. \tag{29}$$

Масала.

$$\int_{-\pi}^{0}u(x,t)dx=\theta(t),\ \ t>0 \tag{30}$$

тенгликни, $\mu(0)=0,\ \|\mu(t)\|\le 1$ шартларни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқарув параметрини топинг.

Теорема 6. Шундай узгармас $M>0$ сон мавжудки $\|\theta(t)\|_{W_2^1(R)}\le M$ ва барча $t\le 0$ ларда $\theta(t)=0$ бўладиган ва $W_2^1\left(-\infty,+\infty\right)$ фазога тегишли бўлган $\theta(t)$ функциялар учун (30) тенгликни қаноатлантирадиган $\mu(t)$ бошқариш параметри мавжуд.

Тўртинчи параграфда псевдо параболик тенглама билан боғлиқ бўлган қуйидаги масала ўрганилади. $D=\left\{(x,y)\in R^2:|x|<\pi,|y|<\pi\right\}$ соҳа чегарасини бир қисмида масала ечими ҳосиласида бошқарув параметри жойлаштирилган. Соҳанинг маълум бир қисмида ечимнинг ўртача қийматини таъминлайдиган чегаравий бошқарув параметрини топиш талаб қилинади.

Фараз қилайлик $u(x,y,t)$ функция (22) тенгламани, (23) бошланғич шартни ва қуйидаги чегаравий шартни

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=\pi}=0,\ u_x\big|_{x=-\pi}=-\mu(t)\phi(y),\ 0\le t\le T,\ |y|\le\pi; \\ u_y\big|_{y=\pi}=0,\ u_y\big|_{y=-\pi}=0,\ 0\le t\le T,\ |x|\le\pi; \\ \Phi(-\pi)=\Phi(\pi)=0 \end{cases} \tag{31}$$

қаноатлантиради, бу ерда

$$\vartriangle u=u_{xx}+u_{yy},\ \ \vartriangle u_t=\frac{\partial\vartriangle u}{\partial t},$$

$\phi(y)$ берилган функция, $\mu(t)$-бошқарув параметри.

Таъриф 8. (22), (23), (31) масаланинг ечими деб қуйидаги шаклда

$$u(x,y,t)=\mu(t)\phi(y)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,y,t)$$

ифодаланган $u(x,y,t)$ функцияни тушинамиз, бу ерда $v(x,y,t)$ функция қуйидаги масаланинг

$$v_t(x,y,t)\ -\ \Delta v_t(x,y,t)-\Delta v\ (x,y,t)\ =(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi}, \tag{32}$$

$(x,y,t)\in D_T$,

бир жинсли бошланғич ва чегаравий шартлар билан:

$$v\big|_{t=0} = v\big|_{\partial D} = 0 \qquad (33)$$

$C([0,T] \to \tilde{W}_2^1(D))$ фазодаги умумлашган ечимидир.

Таъриф 9. Функция $v(x,y,t)$ (32)-(33) масаланинг $W_2^{1,0}(D_T)$ (ёки $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$) фазодаги умумлашган ечими дейилади, агарда $v(x,y,t)$ тўпламга $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$ тегишли бўлиб, қуйидаги интеграл айниятни

$$\int_{D_T} (-v\eta_t + v_x\eta_x - v_x\eta_{xt} + v_y\eta_y - v_y\eta_{yt})dxdydt =$$

$$= \int_{D_T} (\mu'(t)\phi(y) - \mu'(t)\phi''(y) - \mu(t)\phi''(y))\frac{\pi - x}{2\pi}\eta(x,y,t)dxdydt$$

қаноатлантирса, бу ерда $\forall \eta \in W_{2,0}^1(D_T)$, $\eta_{xt}, \eta_{yt} \in L_2(D_T)$ ва $\eta(x,y,T) = 0$.

Масала. Ечимнинг ўртача қиймати $\theta(t)$ функция берилганда,

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} u(x,y,t)dxdy = \theta(t), \quad t > 0$$

тенгликни қаноатлантирувчи бошқарув параметри $\mu(t)$ ни топинг.

Теорема 7. Фараз қилайлик $\Phi \in W_2^2[-\pi,\pi]$ функцияси нольга айнан тенг бўлмасин ва $\Phi_m \geq 0,\ m = 0,1,2,\ldots.$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда шундай узгармас $M > 0$ топиладики, $\|\theta(t)\|_{W_2^1(R)} \leq M$, $t \leq 0$ да $\theta(t) = 0$ шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $\theta(t) \in W_2^1(-\infty,+\infty)$ учун

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} u(x,y,t)dxdy = \theta(t), \quad t > 0$$

шартни қаноатлантирувчи $\mu(t)$ бошқарув параметри мавжуд.

Хулоса

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг системаси билан тавсифланган жараёнларни чегаравий бошқариш масалалари назариясида асосий муаммолардан бири бошқариш параметрининг мавжудлигини исботлашдир.

Тадқиқотнинг асосий натижалари:

1. Соҳа стержен ва пластинка бўлганда Дирихле ёки Нейман шартлари остида иссиқлик алмашинуви жараёни ечимларининг кўриниши топилган, уларнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.
2. Бир ва икки ўлчовли соҳаларда псевдо параболик тенгламалар учун қуйилган биринчи ва иккинчи тур чегаравий масалалар ечимларининг кўринишлари топилган, мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.
3. Бир ўлчовли соҳанинг чегарасида Дирихле ёки Нейман шартлари билан берилган иссиқлик алмашинув жараёнини чегаравий бошқариш масаласи ечимининг мавжудлиги ҳақидаги теорема ҳароратнинг ўртача қийматини соҳанинг бир қисмида бўлишини таъминлаган ҳолда исботланган
4. Икки ўлчовли соҳанинг чегарасида Дирихле шартлари берилганда иссиқлик алмашинув жараёнини чегаравий бошқариш масаласи ечими мавжудлиги ҳақидаги теорема қўшимча шарт интеграл кўринишда берилганда исботланган.
5. Дирихле (Нейман) чегаравий шартлари ва интеграл чекловлар билан берилган псевдо параболик тенгламалар билан ифодаланган жараёнлар учун бир ва икки ўлчовли ҳолларда чегаравий бошқариш масалалари ечимлари мавжудлиги ҳақидаги теоремалар исботланган.

Бошқариш назарияси асосида олиб борилган ушбу иш натижаларидан шундай хулоса қилиш мумкинки, ушбу муаммолар бўйича маълум шароитларда параболик тенгламалар билан боғлиқ жараёнлар учун чегаравий назоратни амалга ошириш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ФАЯЗОВА ЗАРИНА КУДРАТИЛЛОЕВНА

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССАМИ, СВЯЗАННЫМИ С УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА.

01.01.02- Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2020

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.3.PhD/FM274.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	академик **Алимов Шавкат Арифджанович**
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Қаландарович,** доктор физико-математических наук, профессор (БухГУ)
	Хасанов Акназар Бектурдиевич, доктор физико-математических наук, профессор (СамГУ)
Ведущая организация:	**Институте математики имени В.И.Романовского АН РУз**

Защита диссертации состоится «____» _____________2020 года в ____ часов на заседанииНаучного совета ___________________ при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2020 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2020 года).

Академик А.С. Садуллаев
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней,

Н.К. Мамадалиев
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д. ф. ф.-м. н.

Академик А.А. Азамов
Зам Председателя научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования на мировом уровне, во многих случаях, сводятся к изучению теории управления системами описываемыми уравнениями математической физики. Научно прикладные исследования могут быть сведены к задачам управления различными системами. Математические модели некоторых проблем физики и техники описывают процессы, в которых надо так управлять процессом, чтобы получить определенные значения параметра. В качестве примера можно привести задачи управления теплообмена или волновых процессов. В случае волновых процессов нужно управлять параметром волн на части границы области, чтобы достичь определенной формы волны в некоторой части заданной области. В случае теплообмена нужно управлять параметром температуры на части границы области, чтобы достичь заданной средней температуры в некоторой части области. Поэтому задачи граничного управления являются как теоретически, так и практически актуальными и считаются одним из актуальных направлений современной математики.

В натоящее время одной из актуальных проблем математической физики является граничное управление. Изучение граничных задач тесно связано с обратными и некорректными задачами математической физики, поэтому они также сводятся к исследованию интегральных уравнений Фредгольма или Вольтерра (чаще к уравнению Вольтерра первого рода). В последнее время управления процессами теплообмена с различных точек зрений интенсивно развиваются, так как они тесно связаны с задачами приложения, поэтому исследования граничных задач управления процессами теплообмена являются актуальными, как с точки зрения теории, так и приложения.

В нашей стране особое внимание было уделено актуальным направлениям математической физики и оптимального управления, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В частности, особое внимание было уделено изучению вопросов оптимального управления и теории игр. Значительные результаты были получены в теории управления процессами описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и их системами, дифференциальными уравнениями в частных производных и их системами. "Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук в области функционального анализа, дифференциальных уравнений и математической физики являются основными задачами и направлениями"[1]. При исполнении этого постановления важное значение имеет развитие решения краевых задач для дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан»

Настоящая диссертация в определенной степени служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента РУз, №-ПП-2909 «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» от 20 апреля 2017 года, №-ПП-3775 «О дополнительных мерах по повышению качества образования в высших образовательных учреждениях и обеспечению их активного участия в осуществляемых в стране широкомасштабных реформах» от 5 июня 2018 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика, информатика».

Степень изученности проблемы. Математическая теория задач управления начала бурно развиваться в середины прошлого века. Термин «управление» в науку был введен Л. С. Понтрягиным. Основы математической теории задач управления для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем были рассмотрены в работах Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, R. Bellman и др. Теории оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем рассмотрены в работах Н. Н. Красовского, Н. Ю. Сатимова, А. Азамова, А. Б. Куржанского, Ф. П. Васильева, И. В. Гайшуна, Л. Янга и многих других.

Другой аспект теории управления связана с процессами описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных. Задачи управления для таких уравнений были предметом исследования таких математиков как J.-L. Lions, K. A. Lur'e, V. Barbu, H. O. Fattorini, В. А. Ильин и Е. И. Моисеев, А. Ш. Алимов, А. Г. Бутковский, А. И. Егоров, М. И. Белишев, Ю. С. Рожков, Ю. Е. Аниконов, А. В. Боровских, Л. Н. Знаменской, А. В. Фурсиков и других. В монографии А. В. Фурсикова исследуется оптимальное управление для распределенных систем, в отличие от других работ здесь исследование также проводится для случаев некорректных задач уравнений математической физики.

Близкие к данной тематике исследования - граничное управление для уравнений гиперболического типа и их систем рассмотрены в работах В. А. Ильина, Е. И. Моисеева. В работах Y. Luo, I. Lasieska, R. Triggiani, V. Barbu, V. Rascanu, H. O. Fattorini, P. Cannarsa, P. Martinez, Vancostenoble и других исследованы задачи управления в различных ограничениях для уравнений параболического и гиперболического типа. В работе S. Albiero и Ш. А. Алимова исследовано граничное управление для уравнения параболического типа с точки зрения оптимальности по времени.

Задачам оптимального управления для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем посвящены работы Н. Сатимова, А. Азамова, М. Тухтасинова, Б. Рихсиева, О. Кучкарова, М. Маматова и др.

Задачи управления связанные с псевдо-параболическими уравнениями и связанные с ними краевые задачи исследовались при различных условиях оптимальности многими авторами, в том числе L. W. White, С. И. Ляшко, B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel, А. И. Кожанов, С. Г. Пятков, И. Егоров и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами института, в котором выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствие с плановой темой научно-исследовательского проекта ОТ- Ф-4-(36+42) «Разработка методов решения задач математической физики и оптимального управления. Исследование начальных и спектральных задач для дифференциальных уравнений нечетного порядка»

Целью исследования настоящей работы является решения граничных задач с условиями Дирихле и Неймана для параболических и псевдо-параболических уравнений с ограничениями интегрального типа.

Задачи исследования:

доказать существование и единственность решений задач с данными Дирихле и Неймана на границе области для параболических и псевдо параболических уравнений;

решение задачи граничного управления для процесса теплообмена в однородном ограниченном стержне или на пластине, когда регулятор (температуры или потока) находится в левом конце стержня, а ограничение задано, как среднее значение температуры в определенной части стержня;

доказать существование решения задачи граничного управления для процесса описываемого псевдо параболическим уравнением, происходящего в ограниченной области (одномерной или двумерной), где значение решения задается в одной части границы области (где расположен регулятор), а дополнительное условие задается в виде интеграла, который получается из решения;

доказательство существования решения граничного управления для псевдо параболического уравнения в ограниченной области (одномерная или двумерная), когда на части границы области известно значение производной по нормали решения.

Объектом исследования являются краевые задачи для параболических и псевдо параболических уравнений с граничными условиями типа Дирихле и Неймана, интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода.

Предметом исследования являются задачи граничного управления для параболических и псевдо параболических уравнений с интегральными ограничениями.

Методы исследования. В диссертационной работе используются современные методы математической физики, в том числе методы рядов Фурье, преобразования Лапласа и интегральных уравнений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказано существование решения задачи граничного управления для процесса теплообмена (ограниченный одномерный стержень) с данными Дирихле и интегральным ограничением;

доказана возможность управления для параболического уравнения с данными Дирихле для двумерной области (двумерная пластина) и ограничением в виде интеграла;

доказано существование решения задачи граничного управления для процесса теплообмена, когда на левой границе стержня задан поток тепла, а решение удовлетворяет условию в виде интеграла;

доказана теорема о возможности граничного управления для уравнения псевдо параболического типа с данными Дирихле (Неймана) на границе отрезка области (одномерной или двумерной).

Практические результаты исследования краевых задач управления процессами, описываемых параболическими и псевдо параболическими уравнениями, были использованы для определения существования решений различных моделей, соответствующих задачам математической физики и оптимального управления.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием современных методов математического анализа и математической физики.

Научная и практическая значимость результатов исследований. Научная значимость результатов заключается в том, что доказаны существования решения задач граничного управления для параболических и псевдо параболических уравнений с данными Дирихле или Неймана для одномерной и двумерной области с интегральными ограничениями на решения задач.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в возможности описания конкретных задач приложения в виде математических моделей исследуемых в диссертации. Наиболее простой пример приложения, моделирование процесса теплообмена с регулятором, который находится на границе исследуемой области.

Внедрения результатов.

На основе результатов диссертации о существовании решения задач граничных управлений для уравнений параболического типа:

исследованы разрешимость, изучены свойства решений краевых задач для псевдо параболических, псевдо гиперболических и других неклассических дифференциальных уравнений. А также использовались в рамках проекта «Нелокальные краевые и обратные задачи для неклассических дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений» (проект № 18-51-41009 Российского фонда фундаментальных исследований) (справка № 250-2-35 от 20 февраля 2020 года Федеральное государственное бюджетное учреждение науки ИМ им. С.Л. Соболева СО РАН (ИМ СО АН)). Получен ряд новых результатов о свойствах решений неклассических уравнений.

Рекомендаци полученные на основе результатов дисертации о существовании и единственности решений задач Дирихле (Неймана) для параболических и псевдо параболических уравнений:

были применены при написании учебных программ и в использованы в преподовании дициплин: «Теория игр и исследование процессов» для учебного направления 5130200 - Прикладная математика и информатика, «Оптимальное управление» для специаильности 5А130100 – Математика НУУз, а также при подготовке квалификационных выпускных работ и магистирских диссертаций; в учебнике О. Зикирова «Уравнения математической физики» (справка № 89-03-448 от 4 февраля 2019 года Министерства высшего и среднего образования Республики Узбекистан) позволили получить представления решений краевых задач для параболических уравнений в §5, а в §21 дали возможность изучить свойства обобщенных решений.

Результаты задач граничного управления уравнениями параболического и псевдо параболического типа, а также существования и единственности решения соответствующих граничных задач:

использовались в качестве теоретического обоснования в рамках научных тем отдела вычислительных методов и математической физики Вычислительного центра ФИЦ ИУ РАН. (справка № 1968-52 от 24 января 2020 года Федерального государственного учреждения «Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук»).

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 11 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 5 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 4 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале и 3 – в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 113 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований, степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава данной работы посвящена изложению некоторых вспомогательных фактов о задачах управления, интегральных уравнений и представлению решений некоторых краевых задач для параболических и псевдо параболических уравнений.

Вторая глава данной работы посвящена исследованию задач граничного управления для процессов теплообмена с данными Дирихле или Неймана, а также с интегральными ограничениями.

В первом параграфе исследуется математическая модель следующей задачи:

Рассматривается однородный стержень длины 2π. На левой границе находится нагреватель с регулятором. Требуется найти такой режим работы нагревателя, чтобы обеспечить заданное значение температуры в первой половине стержня. Математическую модель данной задачи можно представить следующим образом:

Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (t,x) \in D_T = \{0 < t < T, \quad -\pi < x < \pi\}, \tag{1}$$

начальному условию

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{2}$$

граничным условиям

$$u\big|_{x=-\pi} = \mu(t), \quad u\big|_{x=\pi} = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Мы предполагаем, что управление $\mu(t)$ удовлетворяет условию согласования

$$\mu(0) = 0, \tag{4}$$

а также выполняется ограничение

$$|\mu(t)| \le 1. \tag{5}$$

Задача. Для заданного температурного режима $\theta(t)$ найти управление $\mu(t)$ такое, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{-\pi}^{0} u(x,t)dx = \theta(t), \quad t \ge 0. \tag{6}$$

Определение *1.* Под решением задачи (1)-(3) мы понимаем функцию $u(x,t)$, представимую в виде

$$u(x,t) = \mu(t)\frac{\pi - x}{2\pi} - v(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ является обобщённым решением из $C([0,T] \to \tilde{W}_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = \mu'(t)\frac{\pi - x}{2\pi},$$

с однородными начальными и краевыми условиями:

$$v\big|_{t=0} = v\big|_{\partial D} = 0,$$

где $D = \{x:\ -\pi < x < \pi\}$.

Теорема 1. Существует постоянная $M > 0$ такая, что для любой функции $\theta \in W_2^2(-\infty,\infty)$, удовлетворяющей условиям

$$\|\theta\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \le M, \quad \theta(t) = 0$$

при $t \le 0$, найдется допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение соотношений (5) и (6).

Во втором параграфе данной главы исследуется граничная задача предыдущего параграфа (стержень длины π) с заданным потоком на левой границе. В этом случае математическую модель данной задачи можем сформулировать в виде:

Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) в области $D_T = \{(x,t): 0 < x < \pi,\ 0 < t < T < +\infty\}$, начальному условию (2) и граничным условиям

$$u_x\big|_{x=0} = -\mu(t), \qquad u_x\big|_{x=\pi} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

причем $\mu(t)$-неизвестная функция с условием $\mu(0) = 0.$

Задача. Требуется найти параметр управления $\mu(t)$ удовлетворяющий условию

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x,t)dx = \theta(t), \tag{8}$$

где $\theta(t)$ заданная функция.

Пусть функция $v(x,t)$ является обобщенным решением из $C([0,T] \to W_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = -\frac{\mu(t)}{\pi} + \mu'(t)\frac{(\pi - x)^2}{2\pi} \tag{9}$$

с однородными начальными и краевыми условиями

$$v\big|_{t=0} = 0, \quad v_x\big|_{\partial D} = 0. \tag{10}$$

Определение 2. Обобщенным решением задачи (9) -(10) из $W_2^{1,0}(D_T)$ назовем функцию $u(x,t)$, принадлежащую $W_2^{1,0}(D_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D_T} (-v\eta_t + v_x\eta_x)dxdt = \int_{D_T} (-\frac{\mu(t)}{\pi} + \mu'(t)\frac{(\pi - x)^2}{2\pi})\eta(x,t)dxdt \tag{11}$$

при $\forall \eta \in W_2^1(D_T)$, равным нулю при $t = T$.

Теорема 2. Существует постоянная $M > 0$ такая, что для любой функции $\theta \in W_2^2(-\infty, +\infty)$, удовлетворяющей условиям $\|\theta(t)\|_{W_2^2(R)} \le M, \quad \theta(t) = 0$ при $t \le 0$ найдётся допустимое управление $\mu(t) \in W_2^1(R)$, обеспечивающее выполнение соотношения (8) и удовлетворяющее условию $\mu(0) = 0.$

В следующем параграфе рассматривается следующая задача управления процессом теплообмена. На части границы области $D = \{(x,y) \in R^2 : |x| < \pi,\ |y| < \pi\}$ находится нагреватель, имеющий регулируемую температуру. Требуется найти такой режим работы нагревателя, чтобы средняя температура в некоторой подобласти области D принимала заданное значение.

Пусть функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x,y,t) \in D_T = \{0 < t < T,\ |x| < \pi, |y| < \pi\}, \tag{12}$$

начальному и граничным условиям

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=0, \quad -\pi\le x,y\le\pi; \\ u\big|_{x=\pi}=0, \;\; 0\le t\le T, -\pi\le y\le\pi; \\ u\big|_{y=\pi}=0, \;\; 0\le t\le T, -\pi\le x\le\pi; \\ u\big|_{y=-\pi}=0, \;\; 0\le t\le T, -\pi\le x\le\pi; \\ u\big|_{x=-\pi}=\mu(t)\Phi(y), \;\; 0\le t\le T, -\pi\le y\le\pi; \\ \Phi(-\pi)=\Phi(\pi)=0. \end{cases} \tag{13}$$

Здесь $\Phi(y)$ – заданная функция (линейная плотность нагревателя или кондиционера), $\mu(t)$ – управляющий параметр, задающий амплитуду потока горячего или холодного воздуха.

Задача. Найти параметр управления $\mu(t)$ из условия

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} u(x,y,t)\,dxdy=\theta(t). \tag{14}$$

Определение 3. Под решением задачи (12)-(13) мы понимаем функцию $u(x,y,t),$ представимую в виде

$$u(x,y,t)=\mu(t)\Phi(y)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,y,t),$$

где функция $v(x,y,t)$ является обобщённым решением из $C([0,T]\to\tilde W_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,y,t)-\Delta v(x,y,t)=\left[\mu'(t)\Phi(y)-\mu(t)\Phi''(y)\right]\frac{\pi-x}{2\pi},$$

с однородными начальными и краевыми условиями:

$$v\big|_{t=0}=v\big|_{\partial D}=0,$$

где $\quad D=\{(x,y):\ |x|<\pi, |y|<\pi\}$.

Лемма 1. Пусть функции $\mu(t)$ и $\Phi(y)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\mu\in W_2^1(\mathbb{R}), \quad \mu(0)=0$,

2) $\Phi\in W_2^2[-\pi,\pi]$ и удовлетворяет условию $\Phi(-\pi)=\Phi(\pi)$. Тогда решение задачи (12)-(13) имеет единственное решение и его вид

$$u(x,y,t)=\int_0^t \mu(\tau)\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{n}{2\pi}e^{-\left(\frac{n^2+m^2}{4}\right)(t-\tau)}\Phi_m\sin\frac{n(x+\pi)}{2}\sin\frac{m(y+\pi)}{2}\,d\tau,$$

где $\Phi_m=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(y)\sin\frac{m(y+\pi)}{2}\,dy, \qquad m=1,2,3,\ldots.$

Теорема 3. Пусть функция $\Phi\in W_2^2[-\pi,\pi]$ не равна тождественно нулю и удовлетворяет условию $\Phi_m\ge 0$. Тогда существует постоянная $M>0$ такая, что для любой функции $\theta\in W_2^2(-\infty,\infty)$, удовлетворяющей условиям

$$\|\theta\|_{W_2^2(\mathbb{R})}\le M, \quad \theta(t)=0$$

при $t\le 0,$ найдется допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение соотношения (14).

Данная глава посвящена исследованию граничного управления для псевдо - параболического уравнения с данными Дирихле или Неймана, а также с интегральными ограничениями.

В первом параграфе исследуется задача граничного управления на отрезке с интегральным ограничением связанная с псевдо-параболическим уравнением .

В ограниченной области $D_T = \{(x,t): -\pi < x < \pi, 0 < t < T < +\infty\}$ рассматривается уравнение

$$u_t = u_{txx} + u_{xx} \tag{15}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \in [-\pi, \pi], \tag{16}$$

с граничными условиями

$$u|_{x=-\pi} = \mu(t), \qquad u|_{x=\pi} = 0, \ t \in [0, T]. \tag{17}$$

Задача. Найти параметр управления $\mu(t)$ из условия

$$\int_{-\pi}^{0} u(x,t)dx = \theta(t), \tag{18}$$

где $\mu(t)$ удовлетворяет условию $\mu(0) = 0$, а также выполняется ограничение

$$|\mu(t)| \le 1. \tag{19}$$

Определение 4. Под решением задачи (15)-(17) мы понимаем функцию $u(x,t)$, представимую в виде

$$u(x,t) = \mu(t)\frac{\pi - x}{2\pi} - v(x,t),$$

где функция $v(x,t)$ является обобщённым решением из $C([0,T] \to \tilde{W}_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,t) - v_{xxt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = \mu'(t)\frac{\pi - x}{2\pi}, \quad (x,t) \in D_T, \tag{20}$$

с однородными начальными и краевыми условиями:

$$v|_{t=0} = v|_{\partial D} = 0. \tag{21}$$

Определение 5. Обобщенным решением задачи (20)-(21) из пространства $W_2^{1,0}(D_T)$ (или из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$) назовем функцию $v(x,t)$, принадлежащую $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D_T} (-v\eta_t + v_x\eta_x - v_x\eta_{xt})dxdt = \int_{D_T} \mu'(t)\frac{(\pi - x)}{2\pi}\eta(x,t)dxdt$$

при $\forall \eta \in W_{2,0}^1(D_T)$, равным нулю при $t = T$.

Лемма 2. Пусть функция $\mu(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\mu \in W_2^1(\mathbb{R}), \quad \mu(0) = 0.$$

Тогда решение задачи (15)-(17) существует, единственно и имеет вид

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kq_k} e^{-q_k(t-\tau)}(\mu(\tau) + \mu'(\tau))\sin\left(\frac{k}{2}(x+\pi)\right)d\tau, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $q_k = (k/2)^2/(1 + (k/2)^2)$, $\lambda_k = (k/2)^2 \quad k = 1, 2, \dots$.

Теорема 4. Существует постоянная $M>0$ такая, что для любой функции $\theta \in W_2^1(-\infty,\infty)$, удовлетворяющей условиям

$$\|\theta\|_{W_2^1(\mathbb{R})} \le M, \quad \theta(t)=0$$

при $t\le 0,$ найдется допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение соотношения

$$\int_{-\pi}^{0} u(x,t)dx=\theta(t) .$$

Следующий параграф посвящен исследованию граничного управления для псевдо параболического уравнения с данными Дирихле в пространстве с ограничениями интегрального типа.

Пусть функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t=\Delta u_t+\Delta u,\ \ (t,x,y)\in D_T=\{0<t<T,-\pi<x,y<\pi\}, \tag{22}$$

начальному

$$u\,|_{t=0}=0,\ \ -\pi\le x,y\le\pi \tag{23}$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} u\,|_{x=\pi}=0, \quad u\,|_{x=-\pi}=\mu(t)\Phi(y),\ \ 0\le t\le T,-\pi\le y\le\pi; \\ u\,|_{y=-\pi}=0,\ \ u\,|_{y=\pi}=0,\ \ 0\le t\le T,-\pi\le x\le\pi; \\ \Phi(-\pi)=\Phi(\pi)=0. \end{cases} \tag{24}$$

Одна из моделей теории несжимаемых простых жидкостей с затухающей памятью может быть описана уравнением (22) (по этому поводу см. работы Г. И. Баренблат, Ю. П. Желтов, B. D. Coleman, W. Noll, D. W. Taylor). Вопрос устойчивости, единственности и существования решения некоторых классических задач для рассматриваемого уравнения были изучены в работах B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel, D. Colton, R. E. Showalter, T. W. Ting. Задачи точечного управления для параболических и псевдо параболических уравнений рассматривались в работах С. И. Ляшко, А. А. Маньковский.

Определение 6. Под решением задачи (22)-(24) мы понимаем функцию $u(x,t)$, представимую в виде

$$u(x,y,t)=\mu(t)\phi(y)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,y,t),$$

где функция $v(x,t)$ является обобщённым решением из $C([0,T]\to\tilde{W}_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,y,t)\ -\ \Delta v_t(x,y,t)-\Delta v\ (x,y,t)\ =(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi}, \tag{25}$$

$$(x,y,t)\in D_T,$$

с однородными начальными и краевыми условиями:

$$v\big|_{t=0}=v\big|_{\partial D}=0. \tag{26}$$

Определение 7. Обобщенным решением задачи (25)-(26) из пространства $W_2^{1,0}(D_T)$ (или из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$) назовем функцию $u\left(x,y,t\right)$, принадлежащую $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{D_T}(-v\eta_t+v_x\eta_x-v_x\eta_{xt}+v_y\eta_y-v_y\eta_{yt})dxdydt=$$
$$=\int\limits_{D_T}(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi}\eta(x,y,t)dxdydt, \tag{27}$$

при $\forall\eta\in W_{2,0}^1(D_T)$, равным нулю при $t=T$.

Лемма 3. Пусть функции $\mu(t)$ и $\phi(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mu\in W_2^1(\mathbb{R}),\quad \mu(0)=0$;

2) $\phi(y)\in W_2^2[-\pi,\pi]$ и $\phi(-\pi)=\phi(\pi)$.

Тогда задача (22)-(24) имеет единственное решение и его можно представить в виде:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{n\,e^{-q_{nm}(t-\tau)}}{1+\lambda_{nm}}\{\mu(\tau)+\mu'(\tau)\}\,d\tau\,\phi_m\sin\left(\frac{n}{2}(x+\pi)\right)\sin\left(\frac{m}{2}(y+\pi)\right),$$

где $q_{nm}=\lambda_{nm}/(1+\lambda_{nm}),\quad \lambda_{nm}=(n/2)^2+(m/2)^2,\ n.m=1,2,\ldots,$

$$\phi_m=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\phi(y)\sin\left(\frac{m(y+\pi)}{2}\right)dy,\quad m=1,2,\ldots.$$

Задача. Для заданного среднего значения решения $\theta(t)$ найти допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее следующее равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{0}\int\limits_{-\pi}^{0}u(x,y,t)dxdy=\theta(t),\quad t>0. \tag{28}$$

Теорема 5. Пусть функция $\Phi\in W_2^2[-\pi,\pi]$ не равна тождественно нулю и удовлетворяет условию $\Phi_m\ge 0$. Тогда существует постоянная $M>0$ такая, что для любой функции $\theta(t)\in W_2^1(-\infty,+\infty)$ такой, что $\theta(t)=0$ при $t\le 0$, существует допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение условия (28).

В третьем параграфе исследована задача граничного управления для псевдо-параболического уравнения с заданным потоком на границе.

Пусть функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (15), начальному условию (16) и граничным условиям

$$u_x|_{x=-\pi}=-\mu(t),\ u_x|_{x=\pi}=0,\ 0\le t\le T. \tag{29}$$

Задача. Найти параметр управления $\mu(t)$ из условия

$$\int_{-\pi}^{0}u(x,t)dx=\theta(t). \tag{30}$$

Теорема 6. Существует положительная постоянная M такая, что для любой функции $\theta(t)\in W_2^1(-\infty,\infty),\ \theta(t)=0$, при $t\le 0$, удовлетворяющей условию $\|\theta(t)\|_{W_2^1(R_+)}\le M$ существует допустимое управление, которое удовлетворяет условию (30).

В четвертом параграфе рассматривается следующая задача связанная с псевдо параболическим уравнением. На части границы области $D=\{(x,y)\in R^2:|x|<\pi,|y|<\pi\}$ задается значение производной решения, содержащий параметр управления. Требуется найти такой режим работы, чтобы среднее значение решения в некоторой подобласти области D принимал заданное значение.

Пусть функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (22), начальному условию (23) и граничным условиям

$$\begin{cases} u_x\big|_{x=\pi}=0,\ u_x\big|_{x=-\pi}=\mu(t)\phi(y),\ 0\le t\le T,\ |y|<\pi; \\ u_y\big|_{y=\pi}=0,\ u_y\big|_{y=-\pi}=0,\ 0\le t\le T,\ |x|<\pi; \\ \Phi(-\pi)=\Phi(\pi)=0. \end{cases} \tag{31}$$

где $\vartriangle u=u_{xx}+u_{yy},\ \ \vartriangle u_t=\dfrac{\partial\vartriangle u}{\partial t}.$

Здесь $\phi(y)$ заданная функция, $\mu(t)$ - параметр управления.

Определение 8. Под решением задачи (22), (23), (31) мы понимаем функцию $u(x,y,t)$, представимую в виде

$$u(x,y,t)=\mu(t)\phi(y)\frac{\pi-x}{2\pi}-v(x,y,t),$$

где функция $v(x,t)$ является обобщённым решением из $C([0,T]\to\tilde{W}_2^1(D))$ следующей задачи:

$$v_t(x,y,t)\ -\ \Delta v_t(x,y,t)-\Delta v\ (x,y,t)\ =(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi}, \tag{32}$$

$(x,y,t)\in D_T$,

с однородными начальными и краевыми условиями:

$$v\big|_{t=0}=v\big|_{\partial D}=0. \tag{33}$$

Определение 9. Обобщенным решением задачи (32)-(33) из пространства $W_2^{1,0}(D_T)$ (или из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$) назовем функцию $v(x,y,t)$, принадлежащую $\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(D_T)$ и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{D_T}(-v\eta_t+v_x\eta_x-v_x\eta_{xt}+v_y\eta_y-v_y\eta_{yt})dxdydt=$$

$$=\int_{D_T}(\mu'(t)\phi(y)-\mu'(t)\phi''(y)-\mu(t)\phi''(y))\frac{\pi-x}{2\pi}\eta(x,y,t)dxdydt,$$

при $\forall\eta\in W_{2,0}^1(D_T)$, равным нулю при $t=T$.

Задача. Для заданного среднего значения решения $\theta(t)$ найти допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее следующее равенство

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}u(x,y,t)dxdy=\theta(t),\ \ t>0.$$

Теорема 7. Пусть функция $\Phi\in W_2^2\left[-\pi,\pi\right]$ не равна тождественно нулю и удовлетворяет условию $\Phi_m\ge 0,\ m=0,1,2,...$. Тогда существует постоянная $M>0$ такая, что для любой функции $\theta(t)\in W_2^1(-\infty,+\infty)$ удовлетворяющей условиям $\|\theta(t)\|_{W_2^1(R)}\le M,\ \ \theta(t)=0$ при $t\le 0$, найдется допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} u(x,y,t)\,dxdy = \theta(t), \quad t > 0.$$

Заключение

В теории граничного управления процессами описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных основной проблемой является доказательство существования допустимого параметра управления.

Основными результатами исследования являются:

1. Получены представления, доказаны существования и единственность решений начально-краевых задач с данными Дирихле и Неймана для процесса теплообмена в стержне и пластине.
2. Выведены виды, доказаны существования и единственность решений первой и второй краевой задачи для псевдо параболического уравнения одномерной и двумерной области.
3. Доказана теоремы о существования допустимого параметра управления задачи граничного управления процесса теплообмена в одномерном стержне при граничных условиях Дирихле и Неймана с интегральными видами ограничения.
4. Доказана теорема существования решения задачи граничного управления теплообмена на пластине с граничными условиями Дирихле и ограничениями интегрального вида.
5. Доказана теоремы о существования решения задач граничного управления процессов связанных с псевдо параболическими уравнениями в одномерном и двумерном случаях с граничными условиями Дирихле и Неймана и ограничениями интегрального вида.

Из результатов работы на основе теории управления можно сделать вывод, что при определенных условиях на данные задачи можно осуществит граничное управление для процессов связанных с уравнениями параболического типа.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

FAYAZOVA ZARINA KUDRATILLOEVNA

BOUNDARY CONTROL OF PROCESSES RELATED TO PARABOLIC TYPE EQUATIONS.

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2018.3.PhD/FM274.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	Academician **Alimov Shavkat Arifdjanovich**
Official opponents:	**Durdiev Durdimurod Kalandarovich,** Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor (BuxGU)
	Khasanov Aknazar Bekturdievich Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor (SamGU)
Leading organization:	**Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky AS RUz**

Defense will take place «____» _____________2020 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2020 year)

Academician A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,

N.K. Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, PhD.

Academician A. Azamov
Chairman of scientific seminar under
scientific council on award of scientific

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study boundary control for parabolic equations.

The object of study is the boundary control problems for parabolic and pseudo-parabolic equations with boundary conditions of the Dirichlet and Neumann types with integral type restrictions

Scientific novelty of research work is as follows:

- theorem on the existence of a solution boundary control problem for the heat transfer process (bounded one-dimensional rod) with Dirichlet data and with integral constraint;
- theorem on the existence of a solution boundary control problem for a parabolic equation with Dirichlet data in one and two-dimensional region (two-dimensional plate) and with integral constraint;
- theorem on the existence of a solution boundary control problem for the heat transfer process when a heat flux on the left boundary of the rod and with integral restriction ;
- the theorem on the possibility of boundary control for an equation of pseudo-parabolic type with Dirichlet (Neumann) data on the boundary of the region (one or two dimensional);

Implementation of the research results. Based on the results of the dissertation on the existence of solutions of boundary control problems for parabolic type equations:

investigated solvability, studied the properties of solutions of boundary value problems for pseudo-parabolic, pseudo-hyperbolic and other non-classical differential equations. They were also used in the framework of the project "Nonlocal boundary and inverse problems for non-classical differential and operator-differential equations" (project No. 18-51-41009 of the Russian Foundation for Basic Research) (reference No. 250-2-35 of February 20, 2020, the Federal State Budget Institution of science IM named after S.L.Sobolev SB RAS (IM SB AN)). A number of new results on the properties of solutions of non-classical equations are obtained.

Recommendations obtained on the basis of the results of a dissertation on the existence and uniqueness of solutions of the Dirichlet (Neumann) problems for parabolic and pseudo-parabolic equations:

were used in writing curricula and used in teaching disciplines: "Game Theory and Process Research" for the educational direction 5130200 - Applied Mathematics and Computer Science, "Optimal Control" for specialty 5A130100 - Mathematics of NUUz, as well as in the preparation of qualification final works and master's dissertations; in the textbook of O. Zikirov "Equations of Mathematical Physics" (certificate No. 89-03-448 of February 4, 2019 of the Ministry of Higher and Secondary Education of the Republic of Uzbekistan), they allowed us to obtain representations of solutions of boundary value problems for parabolic equations in §5 and in §21 made it possible to study the properties of generalized solutions.

The results of boundary control problems for equations of parabolic and pseudo-parabolic type, as well as the existence and uniqueness of the solution of the corresponding boundary value problems:

were used as a theoretical justification in the framework of scientific topics of the department of computational methods and mathematical physics of the Computing Center of the FIC IU RAS. (certificate No. 1968-52 dated January 24, 2020 of the Federal State Institution “Federal Research Center“ Informatics and Managementof the Russian Academy of Sciences ”).

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Фаязова З.К. Граничное управление процессом теплообмена //Узбекский Математический Журнал, 2013, № 2. С.122-129. (01.00.00; №6)
2. Fayazova Z.K. Boundary control for a pseudo-parabolic equation with a given flow on the boundary //Uzbek Mathematical Journal, 2019, №3. P. 40-48, (01.00.00; №6)
3. Фаязова З.К. Граничное управление процессом теплообмена в пространстве //Известия вузов. Математика, № 12, С. 82-90, 2019. (01.00.00; №22) (Scopus IF = 0,340)
4. Фаязова З.К. Граничное управление процессом теплообмена с заданным потоком на части границы области //Бюллетень института математики, 2020, № 1, стр.112-116. (Ўзбекистон Республикаси ОАК Раёсатининг 2019 йил 28 мартдаги 263/7.1-сон қарори)

II бўлим (2 часть; part 2)

1. Фаязова З.К. Boundary Control for Pseudoparabolic Equations in Space //Математические Заметки СВФУ, Том 25, №2, 2018. С.40-47. (ИФ РИНЦ=0.187).
2. Фаязова З.К. Граничное управление для псевдо параболического уравнения //Математические Заметки СВФУ, Том 26, №3, 2019. С.98-108 (ИФ РИНЦ=0.187)
3. Фаязова З.К. About operating problem for hot contact equation, Сборник докладов «Роль женщин-ученых в развитии научно-техническом прогрессе», Ташкент, 2006. С. 130-131.
4. Фаязова З.К. Об управлении процессом теплообмена, Материалы международной конференции «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач», Самарканд, 19-20 октябрь, 2007. С. 124-126.
5. Фаязова З.К. О задаче управления процессом теплообмена, Труды конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль Хорезми», Ташкент, 2009. С. 142-146

6. Фаязова З.К. Граничное управление процессом теплообмена, Материалы международной конференции «Обратные и некорректные задачи математической физики» посвященной 80-летию со дня рождения М.М. Лаврентьева, Россия, Новосибирск, 5-12 август, 2012. С. 452.
7. Фаязова З.К. Граничное управление для псевдо-параболического уравнения с данными на точке, Тезисы докладов научной конференции «Новые теоремы молодых математиков-2018», Наманган, Узбекистан, 18-19 октябрь, 2018. С. 178-179.
8. Фаязова З.К. Управление со значением производной на границе для псевдо-параболического уравнения, Тезисы докладов республиканской научно-практической конференции с участием зарубежных женщин-ученых «Актуальные проблемы математики и механики- CAWMA-2018», 25-26 октябрь, 2018. С. 77.
9. Fayazova Z.K. Control of the heat changing process with a given flow at the boundary». Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference «Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine», Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17, 2019, p. 45.
10. Фаязова З.К. Граничное управление для псевдо-параболического уравнения в пространстве, The first international conference «Mathematical Physics, Dynamical systems, Infinite-Dimensional analysis» MPhDSIDA-2019, Book of Abstracts, 17-19 June, 2019, Dolgoprudny, Russia. P.154
11. Фаязова З.К. Граничное управление для дифференциальных уравнений в частных производных, Международная конференция «Обратные и некорректные задачи», Самарканд, 2-4 октябрь 2019. С. 132-133.
12. Фаязова З.К. Граничное управление для псевдо-параболического уравнения в пространстве с заданным потоком на границе, Тезисы докладов Узбекско-Российской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», Ташкент, 24-26 октябрь, 2019. С. 176-177.
13. Фаязова З.К. Граничное управление для псевдо-параболического уравнения с ограничением в точке, «Математика ва информатиканинг замонавий муаммолари» Республика илмий-амалий анжумани материаллари, Фарғона, 2019. С.74 .

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 15.11.2019 йил
Бичими 60х44 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 3,2. Адади: 100. Буюртма: № 320.

Ўзбекистон Республикаси ИИВ Академияси,
100197, Тошкент, Интизор кўчаси, 68

«АКАДЕМИЯ НОШИРЛИК МАРКАЗИ»
Давлат унитар корхонасида чоп этилди.