ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.3.30.12.2019.FM 01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БЕРДАҚ НОМИДАГИ ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ОТЕМУРАТОВ БАЙРАМБАЙ ПЕРДЕБАЕВИЧ

КЎП ЎЛЧАМЛИ КОМПЛЕКС АНАЛИЗДА БИР ЎЛЧАМЛИ ГОЛОМОРФ ДАВОМ ЭТТИРИШ ХОССАСИГА ЭГА ФУНКЦИЯЛАР ВА ЧЕГАРАВИЙ МОРЕРА ТЕОРЕМАСИ

01.01.01 –Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

УДК: 517.55

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.3.30.12.2019.FM 01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БЕРДАҚ НОМИДАГИ ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ОТЕМУРАТОВ БАЙРАМБАЙ ПЕРДЕБАЕВИЧ

КЎП ЎЛЧАМЛИ КОМПЛЕКС АНАЛИЗДА БИР ЎЛЧАМЛИ ГОЛОМОРФ ДАВОМ ЭТТИРИШ ХОССАСИГА ЭГА ФУНКЦИЯЛАР ВА ЧЕГАРАВИЙ МОРЕРА ТЕОРЕМАСИ

01.01.01– Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ДОКТОРЛИК (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.DSc/FM152 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Қорақалпоқ давлат университетида бажарилган.
Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ҳамда «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Кытманов Александр Мечиславович** физика-математика фанлари доктори, профессор Сибир федерал университети (Россия)
Расмий оппонентлар:	**Рахимов Абдуғофур Абдумажидович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Имомкулов Севдиёр Акрамович физика-математика фанлари доктори
	Джумабаев Давлатбай Халилаевич физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Қарши давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.3.30.12.2019.FM 01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «11» июнь соат 10:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.(+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент шаҳри, Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.(+99871)246-02-24).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________ куни тарқатилди.

(2020 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С.Саъдуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д.(PhD)

Р.Н.Ғаниходжаев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш
қошидаги илмий семинар раиси
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда функциялар назариясида голоморф функцияларни интеграл ифодалашлар ва функцияни голоморф давом эттиришларни тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Голоморф функцияларни интеграл ифодалашлар кўп ўлчамли комплекс анализда кучли конструктив қурол ҳисобланади. Тадбиқларнинг аксарият қисми ядроси ташқи ўзгарувчи бўйича голоморф бўлган интеграл ифодалашларга тўғри келади. Аммо, кейинги вақтларда кенгроқ соҳалар синфи учун яроқли бўлган, ядроси голоморф бўлмаган интеграл ифодалашлар ҳам ривожлана бошлади (Бохнер-Мартинелли, Коши-Фантаппье, логарифмик қолдиқ). Интеграл кўринишларни қўллаш ғояси комплекс тўғри чизиқ ва эгри чизиқ бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функцияларни ўрганишда жуда ҳам самарали бўлиб чиқди. Шунинг учун ҳам кўп ўлчамли комплекс анализда интеграл ифодалаш ва унинг тадбиқига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда кўп ўлчамли комплекс фазода функцияларни голоморф давом эттириш масалаларида интеграл ифодалашларнинг чегаравий хоссаларини ўрганиш ва уларни тадбиқ этиш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функцияларни тадқиқ қилиш; интегралланувчи функцияларни соҳа чегарасидан голоморф давом эттириш шартларини аниқлаш; доиравий соҳаларда бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функцияларни таснифлаш; классик соҳаларда интегралланувчи функциялар учун кўп ўлчамли Мореранинг чегаравий теоремаларини тадбиқ этиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларниниг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган математик ва комплекс анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, соҳа чегарасида интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш ва уларнинг қўлланилиши борасида салмоқли натижаларга эришилди. Математика, физика, амалий математика соҳасида халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш Республика олимларининг асосий вазифалари ва фаолияти йўналишлари этиб белгиланган[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида функцияларни голоморф давом эттириш назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сонли «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сонли «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ҳамда 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сонли «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора тадбирлари тўғрисидаги» Қарорлари ва мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи[2].

Кўп ўлчамли комплекс фазода функцияни аналитик ва функцияларни фиксирланган йўналиш бўйлаб голоморф давом эттиришга оид тадқиқотлар ва илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасаларида, жумладан, Сибир федерал университети, Новосибирск давлат университети, Москва давлат университети, Россия ФА В.А. Стеклов номидаги математика Институти, Россия ФА Сибир бўлими ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика Институти (Россия), Princeton University, Baldwin Wallace University, University of North Carolina, Washington University (АҚШ), Potsdam University (Германия), Holon institute of technology, Bar-Ilan University (Исроил), Sapienza University of Rome, Universit`a di Padova, via Trieste (Италия), Математика институти (Любляна, Словения) олиб борилмоқда.

Кўп ўлчамли комплекс фазода чегараси силлиқ бўлган соҳалар учун функцияни аналитик давом эттириш ва махсус интегралларнинг чегаравий хоссаларини ўрганишга оид дунёда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: Бохнер (Princeton University (АҚШ)) ва Мартинелли (Sapienza University of Rome (Италия)), мустақил равишда голоморф функцияларнинг компакт махсус хусусиятларини бартараф этиш ҳақидаги Гартогс теоремасини исботлашди; Бохнер эса, аслини олганда, чегараси силлиқ бўлган соҳалар ва соҳа чегарасида узлуксиз бўлган функциялар учун Гартогс теоремасини исботлаган; Вайнсток (Baldwin Wallace University (АҚШ)) уни чегараси чексиз марта силлиқ бўлган соҳаларда узлуксиз бўлган функциялар учун исботлади; Л.А.Айзенберг (Bar-Ilan University (Исроил)) ва А.М.Кытмановнинг (Сибирь Федерал университети (Россия)) ишларида $\mathbf{C}^n$

---

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи: www.math.prinston.edu, www.northcorolina.edu, www.umb.edu, www.osu.edu, www.stonybrook.edu, www.bw.edu, www.unirome1.it, www.uni-wuppertal.de, www.uni-postdam.de, www.sfu-kras.ru, www.mi.ras.ru, www.msu.ru, www.nsu.ru, www1.bin.ac.il, www.ac-grenoble.fr/stendhal/, www.upmc.fr, http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567 ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

да берилган силлиқ чегарали чегараланган D соҳа чегарасида ва чегара бўйича интеграллашда Бохнер-Мартинелли ядросига ортогонал бўлган функцияни голоморф давом эттириш мумкинлиги исботланган.

Морера теоремасининг глобал чегаравий вариантлари А.М.Кытманов ва С.Г.Мысливец (Сибир Федерал университети (Россия)) ишларида, М.Л.Аграновский (Holon institute of technology (Исроил)) ва И.Глобевник (Математика институти (Любляна, Словения)) ишларида қаралди. С.Г.Мысливец, шунингдек, комплекс эгри чизиқлар бўйлаб Морера хоссасига эга функцияларни тадқиқ қилди.

Дунёда бугунги кунда кўп ўлчамли комплекс анализда интеграл ифодаларни тадқиқ этиш ва уларнинг қўлланилиши бўйича бир қатор изланишлар, жумладан: Бохнер-Мартинелли интегралининг чегаравий хоссалари ва унинг бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функцияларни голоморф давом эттириш масалаларига татбиқлари; Бохнер-Мартинелли интегралининг сакраши ҳақидаги узлуксиз функциялар учун теоремалар; комплекс тўғри ва эгри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функциялар учун Лере (Коши-Фонтаппье), Пуассон, Коши-Сеге (Хуа Локен), логарифмик қолдиқ интеграл формулалари татбиқлари; кўпҳилликлар, гиперсиртларда CR-функцияларнинг аналитик ифодаси; Морера теоремасининг кўп ўлчамли чегаравий аналоглари; чегараланган соҳанинг чегарасида берилган функциянинг шу соҳа ичкарисига голоморф давом этиши; классик ва чегараланмаган соҳаларда чегаравий Морера теоремалари каби устивор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Бир ўлчамли голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремалар ва Морера типидаги теоремалар бирқатор математиклар томонидан ўрганилди. Аммо бу ишларда фақат соҳа чегарасида узлуксиз функциялар қаралди. Интегралланувчи функциялар синфи учун улар ўрганилмаган эди.

Комплекс текисликда бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функциялар билан боғлиқ натижалар тривиал ҳисобланади, чегаравий Морера теоремалари эса мавжуд эмас. Шу сабабли, диссертацияда ўрганилаётган муаммолар асосан кўп ўлчамли.

Тадқиқот мавзусига оид биринчи натижа М.Л.Аграновский ва Р.Е.Вальский томонидан олинган: улар шарда бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функцияларни ўрганишган. Бу натижанинг исботи шарнинг автоморфизмлар гуруҳи хоссаларига асосланган.

Радоннинг комплекс алмаштириши ёрдамида Е.Л.Стаут томонидан Аграновский ва Вальский теоремаси силлиқ чегарали ихтиёрий чегараланган соҳалар учун исботланди. Стаут теоремасининг муқобил исботи ядроси голоморф бўлмаган Бохнер–Мартинелли интеграл кўриниши ёрдамида А.М.Кытманов томонидан олинди. Интеграл кўринишларни қўллаш ғояси комплекс тўғри чизиқ ва эгри чизиқ бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функцияларни ўрганишда жуда ҳам самарали бўлиб чикди.

Морера хоссаси бу – берилган функциянинг соҳа чегараси билан комплекс тўғри чизиқларнинг (ўлчами 2 га тенг бўлган махсус кўринишдаги ҳақиқий текисликларнинг) кесишмасининг чегараси бўйича олинган интегралининг нолга тенглигидан иборатдир. Айтиш жоизки, агарда функция бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлса, у Морера хоссасига эга бўлади. Бунинг тескариси, умуман олганда, ўринли эмас.

Айтайлик, D – чегараси ∂D силлиқ боғламли (C^2 синфига тегишли) бўлган, $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ фазодаги чегараланган соҳа бўлсин. Гартогснинг классик теоремаси тасдиқлашича, агарда D да берилган f функциянинг координата текисликларига параллель бўлган ихтиёрий комплекс тўғри чизиққа торайиши голоморф бўлса, у ҳолда f функция D соҳада голоморф бўлади. Табиий савол пайдо бўлади: айтайлик, f функция фақат ∂D чегарада берилган бўлсин; соҳа чегарасининг бир ўлчамли комплекс кесимларининг қандай оиласи учун, f функциянинг кесимлар ичига голоморф давомлари мавжудлигидан унинг бутун соҳага голоморф давоми мавжудлиги келиб чиқади? Чегараси икки марта силлиқ бўлган комплекс соҳани кесиб ўтувчи барча комплекс тўғри чизиқлар оиласи бунинг учун етарли бўлади. Бу тасдиқ $B(0,1)$ шар учун М.Л. Аграновский, Р.Э. Вальский, А. Нагель ва У. Рудин ишларида исботланган. Чегараси икки марта силлиқ бўлган ихтиёрий соҳа учун бундай натижа Е.Л.Стаут томонидан олинган.

Е. Гринберг, И. Глобевник ва Е.Л. Стаут ихтиёрий чегараланган соҳа учун Мореранинг чегаравий теоремасини исботлашди. И. Глобевник ва Д.Говекар Морера теоремасининг локал вариантларини олган. Комплекс эгри чизиқлар бўйлаб Морера хоссасига эга функциялар С.Г. Мысливец ишларида ўрганилган.

А.М. Кытманов, С.Г. Мысливец ишларида, узлуксиз функциялар учун комплекс ва ҳақиқий текисликлар бўйлаб Морера теоремасининг глобал чегаравий аналоги ўрганилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси Қорақалпоқ давлат университетининг «Математик анализ» ва «Алгебра, геометрия ва функционал анализ» кафедраларидаги ОТ-4-27 «Йордан учликлари предуал фазоларинииинг тавсифланиши, сиғимлар фазоси ва функцияларни голоморф давом эттириш» (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий-тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади интегралланувчи функциялар учун кўп ўлчамли Мореранинг чегаравий теоремаларини олиш ва бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар учун олинган натижаларни фукцияларни голоморф давом эттириш масалаларига қўллашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қўйидагилардан иборат:

• соҳа чегарасида интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш шартларини олиш;

• очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функцияларнинг голоморфлигини исботлаш;

• интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш учун етарли бўлган комплекс тўғри чизиқлар оиласи структурасини тадқиқ этиш;

• очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб интегралланувчи функциялар учун Морера теоремаларининг кўп ўлчамли аналогини олиш;

• комплекс эгри чизиқлар бўйлаб интегралланувчи функциялар учун кўп ўлчамли Морера теоремаларининг чегаравий аналогини исботлаш;

• соҳа чегарасида берилган ва соҳадаги чекли сондаги нуқталардан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функцияларнинг шу соҳа ичкарисига голоморф давом этиши билан боғлиқ натижалар олиш;

Тадқиқотнинг объекти. Кўп комплекс ўзгарувчили голоморф функциялар, функциянинг соҳа чегарасидан голоморф давоми, L^p синфидаги функцияларнинг интеграл ифодалари тадқиқот объекти ҳисобланади.

Тадқиқотнинг предмети соҳа чегарасида берилган функцияларни голоморф давом эттириш теоремаларига мос келувчи интеграл ифодалашлардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари: голоморф функцияларнинг интеграл ифодалари, кўп ўлчамли ҳақиқий ва комплекс анализ усуллари, Лебег интеграллари ва L^p фазо хоссалари қўлланилади.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

• бирўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар синфи учун Стаут теоремаси умумлаштирилган;

• берилган очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар учун Аграновский ва Семенов теоремасининг умумлашмаси олинган;

• ҳосил қилувчи кўпхиллик ўсмасидан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар, Харди синфидаги функциягача голоморф давом эттирилиши исботланган;

• берилган очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб интегралланувчи функциялар учун Морера теоремаси исботланган;

• комплекс эгри чизиқлар бўйлаб интегралланувчи функциялар учун Морера теоремасининг кўп ўлчамли аналоги олинган;

• классик соҳаларда интегралланувчи функциялар учун чегаравий Морера теоремасининг кўп ўлчамли аналоглари исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар учун исботланган теоремалар ва Мореранинг кўп ўлчамли теоремаларининг кўп ўлчамли комплекс анализдаги интеграл ифодалашлар назарияси масалаларига, Бохнера-Мартинелли типидаги интегралларнинг сакрашларига, шунингдек, математик физиканинг чегаравий масалаларини ечиш усулларида қўлланилиши мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти чегараланган соҳаларда функцияларни голоморф давом эттириш ва интеграл ифодаларнинг чегаравий хоссалари билан боғлиқ масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар чегараси силлиқ чегараланган соҳаларда бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функцияларга боғлик турли хил масалаларни ечишга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

– Гартогс-Бохнернинг классик теоремасини умумлаштирувчи бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функцияларни соҳа чегарасидан голоморф давом эттириш шартлари РФФИнинг «Кўп ўлчамли комплекс анализ» мавзусидаги 18-51-41011 рақамли гранти доирасидаги узлуксиз функциялар учун олинган натижаларни кенгайтиришда қўлланилган (Сибир федерал университетининг 2020 йил 25 майдаги 178-сонли маълумотномаси, Россия). Илмий натижанинг қўлланилиши Бохнер-Мартинелли интеграли билан ифодаланувчи функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремаларни умумлаштириш имконини берган;

– соҳа чегарасида интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш «Ноалгебраик тенгламалар системалари, илдизларнинг даражали йиғиндилари ва компьютер алгебраси» мавзусидаги 15-01-00277 рақамли хорижий грантда соҳа чегарасидаги мураккаброқ махсус ҳолатлар ҳақидаги масалаларни ечишда қўлланилган (Сибир федерал университетининг 2020 йил 25 майдаги 176-сонли маълумотномаси, Россия). Соҳа чегарасида интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш ноалгебраик тенгламалар системаси нолларининг даражалар йиғиндисини қуриш имкониятини берган;

– чегаравий Морера теоремалари «Кўп ўлчамли интеграл алмаштиришлар ва уларнинг комплекс аналитик геометрия ва дифференциал ва айирмалар тенгламалари назариясига қўлланилиши» мавзусидаги 14-01-00544 рақамли грантда чегарада берилган функциялар учун Бохнер-Мартинелли интеграли хоссаларини ўрганишда қўлланилган (Сибир федерал университетининг 2020 йил 25 майдаги 177-сонли маълумотномаси, Россия).

Чегаравий Морера теоремаси ва соҳа чегарасида интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш гиперсиртлардаги интеграл операторлар алгебрасини таснифлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 5 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 31 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та мақола, жумладан, 5 таси хорижий ва 9 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, бешта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 186 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий моҳияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг I боби ёрдамчи ҳисобланади. У ерда комплекс тўғри чизиқ бўйлаб голоморф давом эттиришнинг асосий принциплари, маълум натижалар ва ушбу йўналишдаги ечилмаган масалалар келтирилади. Шунингдек, $f \in L^p(\partial D)(p \geq 1)$ синфига тегишли функцияларнинг интеграл формулаларнинг асосий хоссалари ўрганилади, уларнинг комплекс тўғри чизиқлар ва гиперсиртлар бўйлаб голоморф давом эттириш муаммоларига тадбиқ қилиш усуллари келтирилади. Келтирилган натижалар. уларнинг интегралланувчи функциялар синфида қўлланилиш усуллари кейинчалик асосий натижаларни исботлашда фойдаланилади.

«Бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар ҳақида» деб номланувчи иккинчи боб комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар синфини ўрганишга бағишланган.

§2.1 да очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар қаралган.

Айтайлик, $D-$ чегараси ∂D икки марта силлиқ боғламли бўлган, $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ фазодаги чегараланган соҳа бўлсин.

$f\in L^p(\partial D)$ функцияси учун Бохнер-Мартинелли интегралини

$$F(z)=\int\limits_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta,z),\quad z\notin\partial D$$

орқали белгилаймиз.

Бу функция соҳа ташқарисида гармоник бўлади.

Теорема 2.1.1. *Фараз қилайлик $V-$ $\mathbb{C}^n\setminus D$даги очиқ тўплам ва $f\in L^p(\partial D), p\geq 2$ функция Vни кесиб ўтувчи ва D соҳадан ўтувчи деярли барча комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда f функция $F\in H^p(D)$ нинг нормал чегаравий қиймати бўлади.*

Диссертант томонидан ушбу теорема V тўплами D соҳага тегишли очиқ тўплам бўлган ҳолда аввалроқ исботланган эди. Таъкидлаш жоизки, $V\subset\mathbb{C}^n\setminus D$ ва $V\subset D$ ҳолларда теореманинг исботлари бир-биридан фарқ қилади. Бундан ташқари, очиқ тўпламни $\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}$ тўпламида ётувчи Γ ҳосил қилувчи кўпҳиллик ўсмаси билан алмаштириб, **теорема 2.1.1** ни яна да кучайтириш мумкин (келгуси параграфдаги **теорема 2.2.1**).

Теорема 2.1.1 ни исботлашда қўйидаги тасдиқлар фойдаланилади.

Лемма 2.1.1. *Агар $z\in V$ нуқта ва деярли барча $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ лар учун $f\in L^p(\partial D)$ функцияси $z\in\mathbb{C}^n$ нуқтадан $b\in\mathbb{C}P^{n-1}$ вектор йўналишида ўтувчи*

$$l=\{\zeta:\zeta_j=z_j+b_jl,\ j=1,2,...,n,\ t\in\mathbb{C}\}$$

кўринишдаги комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_{\partial D}(\zeta_k-z_k)f(\zeta)U(\zeta,z)=0,\ \ k=1,2,...,n.$$

Теорема 2.1.2. *Айтайлик, $f\in L^p(\partial D), p\geq 2$ ва $F(z)-$ D соҳада голоморф бўлса, у ҳолда $F(z)\in H^p(D)$ бўлади ва интегралнинг нормал чегаравий қийматлари соҳа чегараси ∂D нинг деярли ҳамма жойида f билан устма-уст тушади.*

Айтайлик $D-$ $\mathbb{C}^n\,(n>1)$даги, чегараси ∂D боғламли икки марта силлиқ қатъий псевдоқаварик, чегараланган соҳа бўлсин. 1.3.2 (1 боб) ва 2.1.1 теоремалардан қўйидаги натижани оламиз.

Натижа 2.1.1. *Фараз қилайлик $V-$ $\mathbb{C}^n\setminus D$даги очиқ тўплам ва $f\in L^p(\partial D), p\geq 1$ функция Vни кесиб ўтувчи ва D соҳадан ўтувчи деярли барча комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда f функция $F\in H^p(D)$ нинг нормал чегаравий қиймати бўлади.*

Шундай қилиб, ушбу тасдиқда интегралланувчи функциялар синфи кенгаяди.

§2.2 да соҳа ташқарисидаги ҳосил қилувчи кўпхиллик бўлагидан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи қаралади.

$\Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ ҳосил қилувчи кўпхилликдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласини қараймиз. Эслатиб ўтамиз, агар ҳар бир $z \in \Gamma$ нуқта учун $T_z(\Gamma)$ уринма фазонинг комплекс чизиқли қобиғи $\mathbb{C}^n$ фазо билан устма-уст тушса, унда силлиқ (C^∞ синфли) Γ кўпхиллик ҳосил қилувчи дейилади. L_Γ орқали Γ ни кесиб ўтадиган барча комплекс тўғри чизиқлар оиласини белгилаймиз.

Теорема 2.2.1. *Айтайлик, $\Gamma -$ $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ даги ҳосил қилувчи кўпхилликнинг ўсмаси ва $f \in L^p(\partial D), p \geq 2$ функцияси L_Γ оиласидаги деярли барча комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда D соҳада голоморф ва радиал лимитлари соҳа чегараси ∂D нинг деярли ҳамма жойида f билан устма-уст тушадиган $F \in H^p(D)$ функция мавжуд.*

2.2.1 теоремани исботлаш учун бизга қуйидаги тасдиқлар зарур бўлади.

Лемма 2.2.1. *Агар $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ нуқта ва шу нуқтадан ўтувчи деярли барча комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб f функцияси бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлса, у ҳолда $F(z)=0$ ва $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ тартибли (бу ерда $\|\alpha\| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \geq 0$) барча ҳосилалар учун*

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = \frac{\partial^{\|\alpha\|} F}{\partial z_1^{\alpha_1} ... \partial z_n^{\alpha_n}}(z) = 0.$$

Лемма 2.2.2. Агарда *W да берилган ҳақиқий аналитик функция F*

$$F\big|_\Gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial z^\alpha \partial w^\beta}\right|_\Gamma = 0$$

шартларини қаноатлантирса, у ҳолда W да у нолга тенг бўлади, бу ерда $W -$ нол нуқтанинг атрофи.

Олдинги параграфдагига ўхшаш, қатъий псевдоқавариқ, чегараланган соҳалар синфи учун интегралланувчи функциялар синфини кенгайтириш мумкин.

Айтайлик, $D -$ чегараланган қатъий псевдоқавариқ соҳа бўлсин.

Натижа 2.2.1. *Айтайлик, $\Gamma -$ $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ даги ҳосил қилувчи кўпхилликнинг ўсмаси ва $f \in L^p(\partial D), p \geq 1$ функцияси L_Γ оиласидаги деярли барча комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда D соҳада голоморф ва радиал лимитлари соҳа чегараси ∂D нинг деярли ҳамма жойида f билан устма-уст тушадиган $F \in H^p(D)$ функция мавжуд.*

2.3-параграфда ҳосил қилувчи кўпхилликнинг ўсмаси D соҳада ётувчи ҳол қаралади. Ушбу параграфдаги асосий натижалар қўйидаги теоремалардан иборат.

Дастлаб, Неванлинн хоссасига эга соҳа тушунчасини келтирамиз. Айтайлик, $G \subset \mathbb{C}$ – бир боғламли соҳа ва $t = k(\tau)$ – бирлик доира $\Delta = \{\tau : |\tau| < 1\}$ ни G га акслантирувчи конформ акслантириш бўлсин.

Агарда G да иккита чегараланган голоморф u ва v функциялари мавжуд бўлиб, $S = \partial\Delta$ нинг деярли барча жойида

$$\overline{k}(\tau) = \frac{u(k(\tau))}{v(k(\tau))}$$

тенглиги бурчак чегаравий нуқталар маъносида бажарилса, у ҳолда G соҳа *Неванлинн хоссасига эга* дейилади. Бу эса ∂G да $\bar{t} = \dfrac{u(t)}{v(t)}$ бўлишини билдиради.

Биз G соҳа *кучайтирилган Неванлинн хоссасига эга* бўлсин деб фараз қиламиз, яъни $\mathbb{C} \backslash \Delta$ да $u_1(\tau) \neq 0$ ва $\overline{k}(\infty) \neq 0$.

Теорема 2.3.1. *Айтайлик, Γ — D даги ҳосил қилувчи кўпхиллик ўсмаси, $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ функцияси деярли барча $l \in L_\Gamma$ комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга ва $D \cap l$ кесишманинг боғламли компоненталари кучайтирилган Неванлинн хоссасига эга* бўлсин. *У ҳолда D соҳада голоморф ва соҳа чегараси ∂D да f билан устма-уст тушадиган $F \in H^p(\overline{D})$ функция мавжуд.*

Теорема 2.3.2. *Айтайлик, Γ — D даги ҳосил қилувчи кўпхиллик ўсмаси, $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ функцияси деярли барча $l \in L_\Gamma$ комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга ва $D \cap l$ кесишманинг боғламли компоненталарида $\dfrac{1}{\overline{k}(t)}$ функция $\partial D \cap l$ дан $D \cap l$ га голоморф давом эттирилсин. У ҳолда D соҳада голоморф ва соҳа чегараси ∂D да f билан устма-уст тушадиган $F \in H^p(\overline{D})$ функция мавжуд.*

Олдинги параграфдаги сингари, интегралланувчи функциялар синфи $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 1$ фунцияларигача кенгайтирилиши мумкин.

§2.4 да соҳа ташқарисидаги ҳосил қилувчи кўпхиллик ўсмасидан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи қаралади.

Чегараси $\partial D \in C^2$ икки марта силлиқ бўлган $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳани қараймиз. $\mathbb{C}^n$ фазонинг нуқталарини $z = (z_1, ..., z_n)$, $w = (w_1, ..., w_n)$ ва ҳоказо кўринида белгилаймиз. $z, w \in \mathbb{C}^n$ нуқталар учун мос равишда скаляр кўпайтма ва модуль киритамиз:

$$\langle z,w\rangle=\sum_{k=1}^{n}z_k\omega_k,\qquad |z|=\sqrt{\langle z,\overline{z}\rangle}.$$

Келгусида биз

$$\left\langle b^0,\overline{\zeta}\right\rangle=b_1^0\overline{\zeta}_1+\ldots+b_n^0\overline{\zeta}_n\neq 0 \text{ барча } \zeta\in\overline{D} \text{ учун} \tag{1}$$

бажариладиган $b^0\neq 0$ йўналиш мавжудлигини фараз қиламиз. Агарда 0 нуқта $\overline{D}$дан етарлича узоқда жойлашган ёки $D-$чизиқли қавариқ соҳа бўлса, ушбу шарт ҳар доим бажарилади.

Айтайлик, $\Gamma-$ $\mathbb{C}^n$ фазодаги $\overline{D}$дан ташқарида жойлашган, $(n-1)$ ўлчамли комплекс кўпхилликнинг ўсмаси бўлсин. Силжиш ва унитар алмаштириш бажариш орқали $0\in\Gamma$ ва 0 нуқтанинг U атрофида Γ комплекс гиперсирт

$$\Gamma=\left\{z\in U: z_n=\varphi(z'),\ z'=(z_1,\ldots,z_{n-1})\right\},$$

кўринишга эга деб ҳисоблаш мумкин, бу ерда φ функция $\mathbb{C}^{n-1}$даги нолнинг атрофида голоморф ва $\varphi(0)=0,\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}(0)=0,\ k=1,\ldots,n-1.$

$z\in\mathbb{C}^n$ нуқтадан $b\in\mathbb{C}P^{n-1}$ вектор йўналишида ўтувчи

$$l=\left\{\zeta\in\mathbb{C}^n:\ \zeta_j=z_j+b_jt,\ \ j=1,\ldots,n,\ \ t\in\mathbb{C}\ \right\}$$

кўринишдаги комплекс тўғри чизиқлар тўплами L_Γ ни қараймиз. Юқорида таъкидлаганимиздек, Сард теоремасига кўра, деярли барча $z\in\mathbb{C}^n$ ва фиксирланган $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ лар учун $l\cap\partial D$ кесишма чекли сондаги бўлакли-силлиқ эгри чизиқлардан иборат ($\partial D\cap l\neq\varnothing$ бўлган ҳол бундан мустасно). Бундан ташқари, агарда $f\in L^p(\partial D)$, $p\geq 2$ бўлса, у ҳолда деярли барча $z\in\Gamma$ ва $b\in\mathbb{C}P^{n-1}$ лар учун $f\in L^p(\partial \mathrm{D}\cap l)$.

$U(\zeta,z)$ Бохнер-Мартинелли ядросини қараймиз ва $f\in L^p(\partial\mathrm{D})$ функцияси учун Бохнер-Мартинелли интегралини аниқлаймиз:

$$F(z)=\int\limits_{\partial\mathrm{D}_\zeta}f(\zeta)U(\zeta,z),\quad z\notin\partial D.$$

Бу параграфнинг асосий натижаси

Теорема 2.4.1. *Айтайлик, $D-$икки марта силлиқ, (1) шартларни қаноатлантирувчи бирбоғламли соҳа бўлсин. Агарда $f\in L^p(\partial D), p\geq 2$* ва *$L_\Gamma$ оиласига тегишли комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлса, у ҳолда f функция D соҳага голоморф* *давом эттирилади. Аниқроғи, $F \in H^p(D)$ ва унинг радиал лимитлари деярли ҳамма жойда f билан устма-уст тушади.*

Эслатма 2.4.1. *Агарда Г ўсма бутун $\mathbb{C}^n$ да берилган $\tilde{\Gamma}$ комплекс гиперсиртнинг бўлагидан иборат бўлса, яъни Г аналитик гиперсирт бутун $\mathbb{C}^n$ га аналитик давом эттирилса, у ҳолда (1) шарт ортиқча бўлиб қолади.*

Шундай қилиб қўйидаги теоремага эга бўламиз.

Теорема 2.4.2. *Айтайлик, D — чегараси боғламли силлиқ бўлган бирбоғламли соҳа, $\tilde{\Gamma}$ — $\mathbb{C}^n$ даги комплекс гиперсирт бўлиб, $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap U \subset \mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ ўсмада $f \in L^p(\partial D), p \geq 2$ функция L_Γ оиласига тегишли комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда f функция D соҳага голоморф давом эттирилади.*

Эслатма 2.4.2. Фараз қилайлик $\gamma \subset \Gamma$, $0 \in \gamma$ кўпхиллик Γ даги C^∞ синфига тегишли ҳосил қилувчи кўпхиллик бўлсин, яъни ҳар бир $z \in \Gamma$ нуқта учун $T_z(\gamma)$ уринма фазонинг комплекс чизиқли қобиғи $T_z(\Gamma)$ уринма фазо билан устма-уст тушсин. У ҳолда 2.4.1 теоремасини қўйидагича кучайтириш мумкин.

Теорема 2.4.3. *Агарда D соҳа, Γ комплекс гиперсиртидаги ҳосил қилувчи γ кўпхиллик ва $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ функция 2.4.1 теорема шартларини қаноатлантирса, у ҳолда $F(z)$ Бохнер-Мартинелли интеграли $H^p(D)$ синфига тегишли бўлиб, унинг радиал лимитлари деярли ҳамма жойда f билан устма-уст тушади.*

«Доиравий соҳаларда бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар» деб номланувчи III бобда, n-доиравий ва доиравий соҳаларда комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттириш масалалари қаралган.

§3.1 да биз $\mathbb{C}^n$ фазодаги B шарда ётувчи $(n+1)$ нуқта орқали ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласини қараймиз.

Фараз қилайлик, B – $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ даги маркази нол нуқтада бўлган бирлик шар, $S = \partial B$ шарнинг чегараси бўлсин. $H^p(B)$ функциялар синфи таърифини эслатиб ўтамиз.

Голоморф функция $f \in H^p(B)$ $(p > 0)$ бўлади, агар

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_S \left| f(\varsigma - \varepsilon \nu(\varsigma)) \right|^p d\sigma < +\infty,,$$

бунда $d\sigma -$ ∂B сирт элементи, $\nu(\zeta) -$ ∂B сиртга ζ нуқтада ўтказилган ташқи нормалнинг бирлик вектори. Яхши маълумки, $f \in H^p(B)$ функциянинг нормал чегаравий қийматлари $L^p(\partial B)$ синфига тегишли ($d\sigma$ Лебег ўлчами бўйича).

$z \in \mathbb{C}^n$ нуқтадан $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ вектор йўналишида ўтувчи

$$l=\{\varsigma:\varsigma_j=z_j+b_jt,\ j=1,...,n,\ t\in\mathbb{C}\},$$

кўринишдаги бир ўлчамли l комплекс тўғри чизиқларни қараймиз. У ҳолда, агарда $f\in L^p(S)$ бўлса, унда деярли барча $z\in B$ ва $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ лар учун $f\in L^p(S\cap l)$.

Ушбу бобда биз $p\geq 1$ деб ҳисоблаймиз.

$f\in L^p(S)$ функцияси l $(l\cap S\neq\varnothing)$ комплекс тўғри чизиқ бўйлаб *бирўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга* дейилади, агар қуйидаги хоссаларга эга f_l функция мавжуд бўлса:

a) $f_1\in H^p(B\cap l)$,

b) f_l функциянинг нормал чегаравий қийматлари $S\cap l$ тўпламда f билан устма-уст тушади.

Агарда $f\in L^p(S)$ функция ихтиёрий комплекс тўғри чизиқ $l\in L$ бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлса, у ҳолда бу функция L *оиласи бўйлаб бирўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига* эга дейилади. Агарда $f\in L^p(S)$ функцияси L оиласи бўйлаб бирўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга эканлигидан f функциянинг Bга голоморф эттирилиши келиб чикса (яъни f функция Sда CR-функция), у ҳолда L тўплами *голоморф давом эттириш учун етарли* дейилади.

L_a билан a нуқталардан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бирлашмасини, $L_{a,b,c,...}$ билан эса $L_a\cup L_b\cup L_c\cup...$ йиғиндини белгилаймиз.

Теорема 3.1.1. *Айтайлик, $f\in L^p(S)$ функция L_0 оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин, у ҳолда*

$$\Phi(z,w)=\int\limits_S f(\zeta)Q(z,w,\varsigma)d\sigma(\zeta),$$

интеграли учун

$$\Phi(0,w)=\text{const}\quad ва\quad \left.\frac{\partial^\alpha\Phi(z,w)}{\partial z^\alpha}\right|_{z=0}-\ даражаси\,\|\alpha\|\,дан\ юқори\ бўлмаган\ кўпҳад,$$

бу ерда

$$Q(\mathrm{z},\,w,\,\zeta)=c_n\frac{\left(1-\langle \mathrm{z},\,w\rangle\right)^n}{\left(1-\langle \mathrm{z},\overline{\zeta}\rangle\right)^n\left(1-\langle\zeta,w\rangle\right)^n}$$

Қуйидаги

$$\Phi(z,w)=\Phi(\varphi_a(u),\varphi_{\overline{a}}(\upsilon))=\int\limits_S f(\zeta)Q\left(\varphi_a(u),\varphi_{\overline{a}}(\upsilon),\zeta\right)d\sigma(\zeta),$$

интегралини қараймиз, бунда $\varphi_\alpha(u)-$ $a\in B$ нуқтани 0 га ўтказувчи шар автоморфизми.

$\varPhi_a\left(u,v\right)=\int\limits_S f_a(\eta)Q(u,\upsilon,\eta)d\sigma(\eta)$ деб оламиз. Қўйидаги теорема 3.1.1 теореманинг ихтиёрий $a\in B$ нуқтадаги аналогини беради.

Теорема 3.1.2. *Айтайлик,* $f\in L^p(S)$ *функция* L_a, $a\in B$ *оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин, у ҳолда* $\Phi(a,w)=const$ *ва* $\dfrac{\partial^a\Phi(a,\omega)}{\partial z^a}$ *– даражаси* $\|\alpha\|$ *юқори бўлмаган* $\varphi_a(w)$ *га нисбатан кўпҳадлар.*

Теорема 3.1.3. *Айтайлик,* $f\in L^p(S)$, $a\in B$ *бўлиб,* $\Phi(z,w)$ *функция қўйидаги шартларини қаноатлантирсин:*

$$\Phi(0,w)=const,\ \Phi(a,w)=const\ \text{ва}\ \frac{\partial^a\Phi(0,w)}{\partial z^a}-\text{даражаси}\ \|\alpha\|\ \text{юқори}$$

бўлмаган $\varphi_a(w)$ *га нисбатан кўпҳадлар.*

У ҳолда $\gamma\cap B$ *комплекс тўғри чизиғига тегишли ихтиёрий* z *нуқтаси учун* w *ўзгарувчига нисбатан* $\Phi(\mathrm{z},w)=const$, $\dfrac{\partial^\beta\Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$, $\|\beta\|>0$. Бу ерда $\gamma-$ 0 ва a *нуқталардан ўтувчи комплекс тўғри чизиқ.*

Натижа 3.1.1. *Айтайлик,* $f\in L^p(S)$ *функция* L_a, $a\in B$ *оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда* $\gamma\cap B$ *комплекс тўғри чизиғига тегишли ихтиёрий* z *нуқтаси учун* w *ўзгарувчига нисбатан* $\Phi(\mathrm{z},w)=const$, $\dfrac{\partial^\beta\Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$, $\|\beta\|>0$

Натижа 3.1.2. *3.1.1 натижанинг шартларида* $\gamma\cap B$ *комплекс тўғри чизиғига тегишли ихтиёрий* z *нуқтаси учун* $\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar{z}^\beta}=0$, $\|\beta\|>0$.

Теорема 3.1.4. *Айтайлик,* $f\in L^p(S)$ *функция* $L_{c,d}$, $c,d\in B$ *оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда фиксирланган* $|t|<1$ *учун* ω *ўзгарувчига нисбатан* $\Phi(c+(d-c)t,\,w)=\mathrm{const}$ *ва* $\dfrac{\partial^\beta\varPhi(c+(d-c)t,w)}{\partial w^\beta}=0$, $\|\beta\|>0$ *тенгликлари бажарилади.*

Натижа 3.1.3. *3.1.4 теорема шартларида* $\left.\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar{z}^\beta}\right|_{z=c+(d-c)t}=0$, $\|\beta\|>0$.

Теорема 3.1.5. *Айтайлик,* $n=2$ *ва* $f\in L^p(S)$ *функция* $L_{a,c,d}$, *оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин, бу ерда* $a,c,d\in B$ *нуқталари* $\mathbb{C}^2$ *даги битта комплекс тўғри чизиқда ётмайди. У* *ҳолда ихтиёрий* $z \in B$ *ва* $\|\beta\| > 0$ *учун* $\dfrac{\partial^{\beta}\Phi(z,w)}{\partial w^{\beta}} = 0$ *бўлади,* $f(\zeta)$ *функция эса* B *га голоморф давом эттирилади.*

3.1.5 теоремадан келиб чиқадики, $B \subset \mathbb{C}^2$ нинг чегарасида берилган интегралланувчи функция учун $L_{a,c,d}$ тўплами комплекс тўғри чизиқларнинг етарли оиласи бўлади, бу ерда $a,c,d \in B$ нуқталари $\mathbb{C}^2$даги битта комплекс тўғри чизиқда ётмайди.

$\mathbb{C}^n$ фазо ва ундаги B шар билан боғлиқ умумий ҳолни қараймиз. A орқали $\mathbb{C}^n$ даги комплекс гипертекисликда ётмайдиган $a_k \in B \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1,...,n+1,$ нуқталар тўпламини белгилаймиз.

Теорема 3.1.6. $f \in L^p(S)$ *функция* $L_A = \cup\{L_{ak}, k = 1,2,..,(n+1)\}$ *оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $z \in B$ *ва* $\|\beta\| > 0$ *учун* $\dfrac{\partial^{\beta}\Phi(z,w)}{\partial w^{\beta}} = 0$ *бўлади,* $f(\zeta)$ *функция эса* B *га голоморф давом эттирилади.*

§3.2 да бизлар n-доиравий соҳада интегралланувчи функцияларни голоморф давом эттирилиши учун, ундаги $(n+1)$ нуқталардан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласининг етарли эканини исботладик.

Айтайлик, D – маркази нолда бўлган, чегараланган тўлиқ *n-доиравий соҳа бўлсин, яъни* ҳарбир $z^0 = (z_1^0,.....,z_n^0) \in D$ нуқта билан бирга у

$$\left\{z \in \mathbb{C}^n : \ |z_k| \le |z_k^0|, \ k = 1,.....,n\right\}$$

поликругни ўз ичига олади.

U билан $\mathbb{C}^n$ даги комплекс гипертекисликда ётмайдиган $a_k \in D \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1,...,n+1,$ нуқталар тўпламини белгилаймиз.Ушбу параграфнинг асосий натижаси

Теорема 3.2.6. $f(\zeta) \in L^p(\partial D)$, $p \ge 1$ *функция* L_U *оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $z \in D$ *ва* $\|\gamma\| > 0$ *учун* $\dfrac{\partial^{\gamma}\Phi(z,w)}{\partial w^{\gamma}} = 0$ *бўлади,* $f(\zeta)$ *функция эса* B *га* H^p *синфидаги функциягача голоморф давом эттирилади.*

3.3 параграф доиравий соҳаларда интегралланувчи функциялар учун кўп ўлчамли Гартогс теоремаларига бағишланган.

Айтайлик, D – $\mathbb{C}^n$ да чегараси силлиқ чегараланган соҳа бўлсин. Қуйидагича:

$$l_{z,b} = \left\{\varsigma \in \mathbb{C}^n : \varsigma = z + bt, t \in \mathbb{C}\right\} = \left\{(\varsigma_1,...,\varsigma_n) : \varsigma_j = z_j + b_j t, \, j = 1,2,...,n, t \in \mathbb{C}\right\}$$

комплекс тўғри чизиқларни қараймиз, бу ерда $z \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$.

Олдинги параграфдагига ўхшаш, $f \in L^p\left(\partial D\right)$ функция $l_{z,b}$ бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга ва l_Γ голоморф давом эттириш учун етарли тўплам бўлсин.

Агарда $D \cap l_{z,b}$ кесим ихтиёрий $b \in \mathbb{C}P^{n-1}$ учун кучайтирилган Неванлинн хоссасига эга бўлса, $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳа $z \in D$ нуқтада кучайтирилган Неванлинн хоссасига эга дейилади.

Параграфнинг асосий натижалари теорема 3.3.1 ва 3.3.2 лардан иборат.

Теорема 3.3.1. *Айтайлик, $n = 2$, ва D соҳа $a, c, d \in D$ нуқталарда кучайтирилган Неванлинн хоссасига эга, чегараси икки марта силлиқ қатъий қавариқ доиравий соҳа ва $f\left(\zeta\right) \in L^p\left(\partial D\right)$ функция $L_{a,c,d}$, оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин, бу ерда a, c, d нуқталари $\mathbb{C}^2$ даги битта комплекс тўғри чизиқда ётмайди. У ҳолда $f(\zeta)$ функция эса D га голоморф давом эттирилади.*

U билан $\mathbb{C}^n$ даги комплекс гипертекисликда ётмайдиган $a_k \in D \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1,\ldots,n+1$, нуқталар тўпламини белгилаймиз.

Теорема 3.3.2. *Айтайлик, D соҳа U тўплам нуқталарида кучайтирилган Неванлинн хоссасига эга, чегараси икки марта силлиқ қатъий қавариқ доиравий соҳа ва $f\left(\zeta\right) \in L^p\left(\partial D\right)$ функция L_U оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлсин. У ҳолда $f(\zeta)$ функция эса D га голоморф давом эттирилади.*

«Интегралланувчи функциялар учун кўпўлчамли чегаравий Морера теоремалари ҳақида» деб аталувчи IV боб соҳа чегарасида интегралланувчи функцияларнинг Морера хоссаларига бағишланган. Олдинги бобларда биз бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлган функцияларни қараган эдик. Морера хоссаси бу – берилган функциянинг соҳа чегараси билан комплекс тўғри чизиқларнинг кесишмасининг чегараси бўйича олинган интегралининг нолга тенглигидан иборатдир.

§4.1 да чегараланган соҳаларда интегралланувчи функциялар учун чегаравий Морера теоремалари қаралади.

Айтайлик, $D-$ боғламли силлиқ ∂D чегарали (C^2 синфига тегишли) $\mathbb{C}^n\ (n > 1)$ фазодаги чегараланган соҳа бўлсин.

$z \in \mathbb{C}^n$ нуқтадан $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ вектор йўналишида ўтувчи

$$l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1,2,\ldots,n,\ t \in \mathbb{C}\} \qquad (2)$$

кўринишдаги бир ўлчамли l комплекс тўғри чизиқларни қараймиз.

Параграфнинг асосий натижаси қўйидаги

Теорема 4.1.1. *Айтайлик,* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *ва деярли барча* $z \in \mathbb{C}^n$ *ва деярли барча* $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ *лар учун Морера шартларини қаноатлантирсин:*

$$\int_{\partial D \cap l} f(z+bt)dt = \int_{\partial D \cap l} f(z_1+b_1t,...,z_n+b_nt)dt = 0. \qquad (3)$$

У ҳолда Бохнер-Мартинелли интеграли $F \in H^p(D)$ *ва* f *функцияси* D *соҳага* F *функциясигача голоморф давом эттирилади яъни,* $F(z)$ *нинг радиал чегаравий қийматлари деярли ҳамма жойда* $f(\xi)$ *билан устма уст тушади.*

4.1.1-теорема соҳа чегараси боғлиқ бўлмаган ҳолда ўринли эмас. ушбу теоремани (3) ўрнига бошқа шарт қўллаш орқали умумлаштириш мумкин.

Теорема 4.1.2. *Айтайлик,* $k-$ *тайинланган манфий бўлмаган бутун сон ва* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *бўлсин. Агар деярли барча* $z \in \mathbb{C}^n$ *ва деярли барча* $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1n-1}$ *лар учун*

$$\int_{\partial D \cap l} f(z+bt)t^k dt = \int_{\partial D \cap l} f(z_1+b_1t,...,z_n+b_nt)t^k dt = 0$$

шарти ўринли бўлса, у ҳолда f *функцияси* D *соҳага* $F \in H^p(D)$ *функциясигача голоморф давом эттирилади.*

$k = 0$ бўлганда 4.1.1 теорема келиб чиқади.

§4.2 да бирор очиқ тўпламни кесиб ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб Морера хоссасига эга интегралланувчи функцияларнинг голоморф давом эттирилиши исботланади.

И. Глобевник ва Е. Л. Стаут томонидан, (3) шартлар бажарилишидан f функциянинг D соҳага голоморф давом эттирилиши келиб чиқиши учун етарли бўладиган $L = \{l\}$ комплекс чизиқлар оиласини топиш масаласи қўйилган эди. Масалан, бирор $V \subset D$ очиқ тўпламни кесиб ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар тўплами L_V етарли оила бўладими?

Теорема 4.2.1. *Айтайлик, фиксирланган* k *ва* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *функциялари учун*

$$\int_{\partial D \cap l} f(z+bt)t^k dt = \int_{\partial D \cap l} f(z_1+b_1t,...,z_n+b_nt)t^k dt = 0, \qquad (4)$$

шартлари $V \subset D$ *очиқ тўпламни кесиб ўтувчи (3) кўринишдаги деярли барча* l *комплекс тўғри чизиқлар тўплами учун бажарилсин. У ҳолда* f *функцияси* D *соҳага* $F \in H^p(D)$ *функциясигача голоморф давом эттирилади.*

Ушбу теорема $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ бўлган ҳолда ҳам тўғри бўлади.

Теорема 4.2.2. *Айтайлик, фиксирланган* k *ва* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *функциялари учун (4) шартлар* $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ *тўпламни кесиб ўтувчи (2) кўринишдаги деярли барча* l *тўғри чизиқлар учун бажарилсин. У ҳолда* f

функцияси D *соҳага* $F\in H^{p}(D)$ *функциясигача голоморф давом эттирилади.*

§4.3 да $l\in L$ чизиқлар бўйлаб Морера хоссасига эга $\phi\in L^{p}(\partial D),\ p\geq 2$ функцияси D соҳага голоморф давом эттирилиши учун етарли бўлган, махсус кўринишдаги L чизиқлар оиласи ўрганилади. Шу мақсадда, кўп ўлчамли логарифмик қолдиқ формуласидаги ядро қаралади, унинг хоссалари ўрганилади ва тадбиқ сифатида комплекс эгри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга функциялар ҳақида теоремалар келтирилади.

Теорема 4.3.1. *Агар* $\phi\in L^{p}(\partial D),\ p\geq 2$ *функцияси учун*

$$F^{-}(z)=\int_{\partial D_{\zeta}}\phi(\zeta)U(f(\zeta-z))=0,\ z\notin\overline{D},$$

шарти ўринли бўлса, у ҳолда ϕ *функция* D *соҳага* $F\in H^{p}(D)$ *функциясигача голоморф давом эттирилади.*

Айтайлик, $\phi_2(t),...,\phi_n(t)-$ $\mathbb{C}$ да (комплекс текисликда) нолга айланмайдиган бутун функциялар бўлсин. Ихтиёрий $b=(b_2,...,b_n)\in\mathbb{C}^{n-1}$ вектори учун $z\in\mathbb{C}^{n}$ нуқтадан қуйидаги кўринишга эга эгри чизиқ ўтказамиз

$$L_{z,b}=\{\zeta\in\mathbb{C}^{n}:\zeta_j-z_j=b_j(\zeta_1-z_1)^{k_j}\phi_j(\zeta_1-z_1),\ j=2,..,n,\ k_j\in\mathbb{N}\}. \quad (5)$$

Агар z^{0} нуқта учун $z_1^{0}\neq z_1$ бўлса, b ни танлаш орқали z^{0} нуқтадан ўтадиган (5) кўринишдаги $L_{z,b}$ эгри чизиқни топиш мумкин

Қуйидагича таъриф келтирамиз. $\phi\in L^{p}(\partial D)$ функцияси (5) кўринишдаги комплекс эгри чизиқ бўйлаб *бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга* дейилади, агар $L_{z,b}\cap\partial D=\varnothing$ бўлган ҳар қандай $L_{z,b}$ эгри чизиқ учун қуйидаги хоссаларга эга $F_{z,b}(t)$ функция мавжуд бўлса:

a) $F_{z,b}(t)\in H^{p}(\overline{D}\cap L_{z,b})$,

b) $F_{z,b}(t)$ функциянинг нормал чегаравий қийматлари $\partial D\cap L_{z,b}$ тўпламда ϕ билан устма-уст тушса.

Теорема 4.3.2. *Агар* $\phi\in L^{p}(\partial D),\ p\geq 2$ *функцияси (5) кўринишдаги* $L_{z,b}$ *комплекс эгри чизиқлар бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга бўлса, у ҳолда деярли барча* $z\in\mathbb{C}^{n}\setminus\overline{D}$ *ва*

$$f_1(z)=z_1^{q},\ \ f_j(z)=\frac{z_j^{q_j}}{\phi_j^{q_j}(z_1)}$$

кўринишдаги $(f_1,..., f_n)$ *функциялар учун*

$$\int_{\partial D}\phi(\zeta)U(f(\zeta-z))=0$$

шарти ўринли ва ϕ *функция* D *соҳага голоморф давом эттирилади.*

«Классик соҳаларда Морера хоссасига эга бўлган функциялар» деб номланувчи бешинчи бобда классик соҳалар учун чегаравий Морера теоремалари қаралади. Бошланғич нуқта сифатида Нагел ва Рудин натижаси олинди, унга кўра агар $f - \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ даги шарнинг чегарасида узлуксиз ва

$$\int_{0}^{2\pi} f\left(\psi\left(e^{i\varphi},0...,0\right)\right)e^{i\varphi}d\varphi = 0$$

тенглиги шарнинг барча (голоморф) ψ автоморфизмлари учун бажарилса, у ҳолда f функция шарга голоморф давом эттирилади.

М.Л.Аграновский ишида қувурсимон типдаги классик соҳаларда узлуксиз функцияларнинг мебиус-инвариант фазолари таснифланди.

§5.1 да биринчи тип классик соҳа учун чегаравий Морера теоремаси исботланди. Айтайлик, D_I биринчи тип классик соҳа яъни

$$I^{(n)} - Z\overline{Z} > 0$$

шартини қаноатлантирувчи m сатр ва n устунли Z матрицалар тўплами бўлсин (матрица элементлари комплекс сонлар). Унинг Шилов чегараси S_I

$$UU^{*} = I^{(m)}$$

шарти билан аниқланган m сатр ва n устунли U матрицалардан ташкил топган. Хусусан, $m = n$ бўлганда S_I барча унитар матрицалар тўплами $U(n)$ билан устма уст тушади. $H^{p}(D_I)$ синфи

$$\sup_{0<r<1}\int_{S}\left|F(r\zeta)\right|^{p} d\mu < +\infty,$$

шартини қаноатлантирувчи ва D_I да голоморф функциялардан иборат, бунда $r\zeta = (r\zeta_1,...,r\zeta_N)$, $d\mu - S_I$ да нормаланган Лебег ўлчови, ўз навбатида буришларга нисбатан инвариант Хаар ўлчови билан устма уст тушади.

D_I даги ҳарқандай f функция учун ва ихтиёрий $\zeta \in S_I$ учун $\Delta = \left\{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\right\}$да кесим-функция f_{ζ} ни қараймиз: $f_{\zeta}(t) = f(t\zeta)$. Ушбу кесим-функция f функциянинг N-ўлчамли хоссаларини f_{ζ}нинг бир ўлчамли хоссалари билан боғлаш имконини беради.

$\lambda_0 \in S_I$ $\left(\lambda_0 = \left(\lambda_1^0,...,\lambda_N^0\right)\right)$ нуқтани фиксирлаймиз ва Δ доиранинг D_I соҳага қўйидаги жойлашувини қараймиз:

$$\left\{\zeta \in \mathbb{C}^{N} : \zeta_j = t\lambda_j^0,\ j = 1,...,N,\ |t| < 1\right\} \tag{6}$$

Бундай жойлашувда Δнинг чегараси T айлана S_I остовда ётувчи айланага ўтади. Агарда D_I соҳанинг ихтиёрий автоморфизмини ψ деб олсак, у ҳолда (6) тўплам ушбу автоморфизм таъсирида чегараси S_I да ётадиган бирон бир аналитик доирага ўтади.

Δ_ψ орқали

$$\Delta_\psi = \left\{ \zeta : \zeta = \psi\left(t\lambda_0\right), \left|t\right| < 1, \right\},$$

кўринишидаги аналитик доирани белгилаймиз, бу ерда λ_0 – остовда ётувчи фиксирланган нуқта. Бу ҳолда бу аналитик доиранинг чегараси T_ψ остов S_I да ётади.

Параграфнинг асосий натижаси

Теорема 5.1.1. *Агарда* $f \in L^p(\mathrm{S}_I)$, $\mathrm{p} \geq 1$ *функция*

$$\int_T f\left(\psi\left(t\lambda\right)\right) dt = 0$$

Морера шартини барча $\psi = \psi_A$ *автоморфизмлар ва* D_I *соҳанинг деярли барча* $\psi = \varphi_\lambda$ *автоморфизмлари учун қаноатлантирса, у ҳолда* f *функция* D_I *соҳага* $H^p\left(\bar{D}_I\right)$ *синфининг* F *функциясигача голоморф давом эттирилади.*

Теорема 5.1.2 *Агарда* $f \in L^p\left(S_I\right)$ *ва*

$$\int_{S_I} f\left(W\right) \psi_k^A\left(W\right) P\left(W, A\right) d\mu\left(W\right) = 0 \tag{7}$$

тенглиги D_I *соҳанинг* A *нуқтани 0 га ўтказувчи барча* ψ_A *автоморфизмлари, барча* $k = 1, \ldots.., N$ *ва барча* $A \in D_I$ *нуқталари учун бажарилса, у ҳолда* f *функция бирон бир* $F \in H^p(D_I)$ *функциянинг радиал чегаравий қийматларига тенг бўлади.*

5.1.1 теореманинг исботи кўрсатадики, агарда (7) шарт $V \subset D_I$ очиқ тўпламининг A нуқтасига мос келувчи ψ_A автоморфизмлар учун бажарилса ҳам теорема тасдиғи ўринли бўлади. Буни кўрсатиш учун ҳақиқий аналитик функциялар учун ягоналик теоремасини қўллаш етарли.

Теорема 5.1.3. Агарда $f \in L^p\left(S_I\right)$ *функция (7) шартни* $V \subset D_I$ очиқ тўпламида ётувчи барча A *нуқталар ва* $\psi = \psi_A$ *автоморфизмининг барча компоненталари ва барча* $\psi = \varphi_\lambda$ *автоморфизмлари учун қаноатлантирса, у ҳолда* f *функция бирон бир* $F \in H^p(D_I)$ *функциянинг радиал чегаравий қийматларига тенг бўлади.*

5.1.2 ва 5.1.3 теоремаларидан келиб чиқадиган

Натижа 5.1.1. *Агарда* $f \in L^p\left(S\right)$ *функция барча* ψ *автоморфизмлар (ёки 0 нуқтани* $V \subset D_I$ *очиқ тўпламнинг нуқталарига ўтказувчи* ψ *автоморфизмлар) учун* Δ_ψ *аналитик доираларга (t бўйича)*

$H^{p}\left(\Delta_{\psi}\right)$ *синфидаги функцияларгача голоморф давом эттириладиган бўлса, у ҳолда* f *функция* D_I *га голоморф давом эттирилади..*

5.2 ва **5.3 параграфларида** шунга ўхшаш натижалар иккинчи, учинчи ва тўртинчи тип классик соҳаларда олинган. Бу ердаги асосий натижалар 5.2.1, 5.2.2, 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 теоремалардир.

§5.4 параграфда чегараси Пуанкаре сфераси деб аталувчи чегараланмаган $D,$ соҳани қарадик. Бу соҳа

$$D=\left\{\left(z,w\right)=\left(z,w_1,...,w_n\right)\in\mathbb{C}^{1+n}:\ \operatorname{Im} z>\left|w\right|^2\right\}$$

кўринишида аниқланади. У чегараланмаган бўлиб, чегараси

$$\partial D=\left\{\left(\zeta,\eta\right)\in\mathbb{C}^{1+n}:\ \operatorname{Im}\zeta=\left|\eta\right|^2\right\}$$

тўпламидан иборат.

Пуанкаре сферасида узлуксиз функциялар учун чегаравий Морера теоремаси С.Г.Мысливец ишларида ўрганилган. Қўйидаги $L_{z,w,b}:t\to\left(\zeta,\eta\right)$

$$\zeta=\frac{z-it}{1+t},\eta=\frac{w+bt}{1+t}, \qquad (8)$$

акслантиришни қараймиз, бунда $z\in\mathbb{C},\ b\in\mathbb{C}^n,\left(z,w\right)\in D,$ $t-$ комплекс параметр. (8) акслантириш $\left|t-a\right|<R$ доирани чегараси ∂D да ётувчи D соҳага акслантиради, бу ерда

$$a=\frac{\frac{z}{2i}-\frac{1}{2}-\left\langle w,\bar{b}\right\rangle}{1+\left|b\right|^2},\ \ R^2=\frac{\operatorname{Im} z-\left|w\right|^2}{1+\left|b\right|^2}+\frac{\left|\frac{z}{2i}-\frac{1}{2}-\left\langle w,\bar{b}\right\rangle\right|^2}{1+\left|b\right|^2},$$

Шундай қилиб, (8) акслантириш D соҳада чегараси ∂D га тегишли бўлган аналитик доирани аниқлайди.

Параграфнинг асосий натижаси

Теорема 5.4.1. *Айтайлик,* $f\in L^p\left(\partial D\right), p\geq 1.$ *Агарда деярли барча* $\left(z,w\right)\in D$ *ва* $b\in\mathbb{C}^n$ *учун*

$$\int\limits_{\partial D\cap L_{z,w,b}} f dt=0,$$

шарти бажарилса. у ҳолда f *функция* D *соҳага голоморф давом эттирилади.*

Муаллиф ушбу диссертацияда кўрилган масалаларни қўйиш ва диссертация ишига доимий эътиборда булганлиги учун илмий маслаҳатчи, физика-математика фанлари доктори, профессор А.М.Кытмановга ва диссертация натижаларини кўп маротаба муҳокама қилишда ва ишини якунлашда қимматли маслаҳатларини аямаган академик А.Саъдуллаевга, профессор Г.Худайбергановга чуқур миннатдорчилик билдиради.

ХУЛОСА

Диссертация иши интегралланувчи функциялар учун кўп ўлчамли чегаравий Морера теоремаларини олиш ва бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функцияларни ўрганишга бағишланган.

Ишда қўйидаги янги натижалар олинган:

1. Бирўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар синфи учун Стаут теоремаси умумлаштирилди;
2. Берилган очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб бирўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар учун Аграновский ва Семенов теоремасининг умумлашмаси олинди;
3. Ҳосил қилувчи кўпҳиллик ўсмасидан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар оиласи бўйлаб бир ўлчамли голоморф давом эттириш хоссасига эга интегралланувчи функциялар, Харди синфидаги функциягача голоморф давом эттирилиши исботланди;
4. Берилган очиқ тўпламдан ўтувчи комплекс тўғри чизиқлар бўйлаб интегралланувчи функциялар учун Морера теоремаси исботланди;
5. Комплекс эгри чизиқлар бўйлаб интегралланувчи функциялар учун Морера теоремасининг кўп ўлчамли аналоги олинди;
6. Классик соҳаларда интегралланувчи функциялар учун чегаравий Морера теоремасининг кўп ўлчамли аналоглари исботланди.

Олинган барча натижалар кўп ўлчамли комплекс анализдаги интеграл ифодалашлар назарияси масалаларига, Бохнер-Мартинелли типидаги интегралларнинг сакрашларига, шунингдек, математик физиканинг чегаравий масалаларини ечиш усулларида қўлланилиши мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.3.30.12.2019.FM 01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. БЕРДАХА

ОТЕМУРАТОВ БАЙРАМБАЙ ПЕРДЕБАЕВИЧ

ФУНКЦИИ С ОДНОМЕРНЫМ СВОЙСТВОМ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ МОРЕРА В МНОГОМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

01.01.01– Математический анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА (DSC) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Ташкент – 2020 год

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2020.2.DSc/FM152

Диссертация выполнена в Каракалпакском государственном университете.
Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице Научного совета (http://fti-kengash.uz/) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Кытманов Александр Мечиславович** доктор физико-математических наук, профессор Сибирский федеральный университет (Россия)
Официальные оппоненты:	**Рахимов Абдугофур Абдумажидович** доктор физико-математических наук, профессор
	Имомкулов Севдиер Акрамович доктор физико-математических наук
	Джумабаев Давлатбай Халилаевич доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Каршинский государственный университет**

Защита диссертации состоится «11» июня 2020 г. В 10:00 часов на заседании Научного совета DSc.3.30.12.2019.FM 01.01 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район. ул. Университетская 4. Тел.(+99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (регистрационный номер ______).(Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район. ул. Университетская 4. Тел.(+99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _________ 2020 г.

(протокол реестра № ___ от «___» _________ 2020 г.).

А.С.Садуллаев
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.ф.-м.н.(PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Большинство научно-практических исследований, проводимые в мировом масштабе, приводятся к задачам интегральных представлений голоморфных функций в теории функций и исследованиям голоморфных продожений функций в многомерном комплексном пространстве. Интегральные представления голоморфных функций являются мощным конструктивным аппаратом в многомерном комплексном анализе. Основная масса приложений приходится на интегральные представления, ядро которых голоморфно по внешней переменной. Но в последнее время большое развитие получили и интегральные представления с не голоморфным ядром, которые пригодны для большего класса областей (Бохнера-Мартинелли, Коши-Фантаппье, логарифмического вычета). Идея использования интегральных представлений оказалось очень полезным при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и кривых. Поэтому развитие исследований по интегральным представлениям в многомерном комплексном анализе и их приложениям является одной из важных задач.

В настоящее время изучение граничных свойств интегральных представлений и их применение в задачах голоморфного продолжения функций в комплексном пространстве играют важную роль в мире. В этом плане: исследование интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения; определение условий голоморфного продолжения интегрируемых функций с границы области; изучение интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения в круговых областях; получение многомерных граничных аналогов теоремы Морера в классических областях являются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране стали больше уделять внимание актуальным направлениям фундаментальной науки, как математический и комплексный анализ, имеющим научные и практические значения. В частности, достигнуты значимые результаты по голоморфным продожениям интегрируемых функций и их приложениям. Основными задачами и направлениями деятельности ученых Республики являются научные исследования на уровне международных стандартов в области математики, физики, прикладной математики[3]. Развитие исследования теории голоморфного продолжения функций играет важную роль при обеспечении исполнения данного постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии

[3] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан ».

действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[4].

Научные исследования, направленные на изучение аналитического продолжения и продолжения функций вдоль фиксированного направления в многомерном комплексном анализе осуществляются в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, таких как, Сибирский федеральный университет, Новосибирский государственный университет, Московский государственный университет, Институт математики им. В.А. Стеклова, Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской АН (Россия), Princeton University, University of North Carolina, Baldwin Wallace University, Washington University (США), Potsdam University (Германия), Holon institute of technology, Bar-Ilan University (Израиль), Sapienza University of Rome, Universit`a di Padova, via Trieste (Италия), Институт математики (Любляна, Словения).

В результате исследований, проводимых в мире по изучению аналитического продолжения функций для областей с гладкой границей и граничных свойств особых интегралов в многомерном комплексного анализе решены ряд актуальных задач, в том числе, получены следующие научные результаты: Бохнер (Princeton University (США)) и Мартинелли (Sapienza University of Rome (Италия)), в независимом порядке, нашли строгое доказательство теоремы Гартогса о стирании компактных особенностей голоморфных функций; а Бохнер, на самом деле, доказал теорему Гартогса для областей с гладкой границей и функций, непрерывных на границе; Вайнсток (Baldwin Wallace University (США)) доказал ее для непрерывных функций в областях с бесконечно гладкой границей; в работах Л. А. Айзенберга (Bar-Ilan University (Израиль)) и А. М. Кытманова (Сибирский федеральный университет (Россия)) доказано голоморфное

[4]Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации разработан на основе: www.math.prinston.edu, www.northcorolina.edu, www.umb.edu, www.osu.edu, www.stonybrook.edu, www.bw.edu, www.unirome1.it, www.uni-wuppertal.de, www.uni-postdam.de, www.sfu-kras.ru, www.mi.ras.ru, www.msu.ru, www.nsu.ru, www1.bin.ac.il, www.ac-grenoble.fr/stendhal/, www.upmc.fr, Матем. Сборник http://mi.mathnet.ru/rus/msb/v136/i4/p567 и других источников.

продолжение функции, по границе области D из $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей и ортогональной ядру Бохнера-Мартинелли при интегрировании на границе.

Глобальные граничные аналоги теоремы Морера были изучены в работах А.М. Кытманова, С.Г. Мысливец (Сибирский федеральный университет (Россия)), в работах М.Л.Аграновского (Holon institute of technology (Израиль)) и И.Глобевника (Институт математики (Любляна, Словения)). Функции со свойством Морера вдоль комплексных кривых было рассмотрено в работе С.Г. Мысливец..

В мире на данное время, осуществляется ряд научных исследований по интегральным представлениям в многомерном комплексном анализе и их приложениям, в частности, исследуются: граничные свойства интеграла Бохнера-Мартинелли и их приложения к задачам голоморфного продолжения функций с одномерным свойством голоморфного продолжения; теоремы о скачке интеграла Бохнера-Мартинелли для непрерывных функций; приложения интегральных формул Лере (Каши-Фантапье), Пуассона, Коши-Сеге (Хуа Локена), логарифмического вычета для функций со свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и кривых; аналитическое выражение CR-функций на гиперповерхностях, на многообразиях; многомерные граничные аналоги теоремы Морера; голоморфное продолжение функции, заданной на границе ограниченной области, во внутрь этой области; граничные теоремы Морера в классических и неограниченных областях.

Степень изученности проблемы. Теоремы об одномерном голоморфном продолжении и теоремы типа Морера в теории функции изучались многими математиками. Но в этих работах рассматривались непрерывные функции на границе области. Для класса интегрируемых функций они не исследовались.

На комплексной плоскости результаты, связанные с функциями, имеющими одномерные свойства голоморфного продолжения с границы, тривиальны, а граничные теоремы Морера отсутствуют. Поэтому рассматриваемые в диссертации проблемы существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к этой теме исследования были получены М.Л.Аграновским и Р.Е. Вальским, изучившие функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Далее, Е.Л. Стаут, используя комплексное преобразование Радона, перенес теорему Аграновского и Вальского на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М. Кытмановым, применивший интеграл Бохнера-Мартинелли с неголоморфным ядром. Идея использования интегральных представлений оказалось очень полезным при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и кривых.

Свойство Морера заключается в равенстве нулю интегралов от данной функции по границе пересечения границы области с комплексными прямыми (с вещественными плоскостями специального вида размерности 2). Заметим, что если функция обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то она удовлетворяет свойству Морера. Обратное, вообще говоря, не верно.

Пусть $D-$ ограниченная область в $\mathbb{C}^n (n>1)$ со связной гладкой границей ∂D (класса C^2). Классическая теорема Гартогса утверждает, что функция f, заданная всюду в D, голоморфна в области D, если голоморфны ее сужения на любую комплексную прямую, параллельную координатным плоскостям. Возникает естественный вопрос: пусть функция f задана только на границе ∂D. Для каких семейств комплексных одномерных сечений границы области из существования голоморфных продолжений f внутрь сечений следует существование голоморфного продолжения во всю область? Достаточным является семейство всех комплексных прямых, пересекающих данную комплексную область с дважды гладкой границей. Для шара $B(0,1)$ это было доказано в работах М.Л. Аграновского, Р.Э. Вальского и А. Нагеля и У. Рудина. Для произвольной области, с дважды гладкой границей аналогичный результат был доказан Е.Л. Стаутом. Далее, Е. Гринберг, И. Глобевник и Е.Л. Стаут получили граничную теорему Морера для произвольной ограниченной области. Локальные варианты теоремы Морера рассмотрены И. Глобевником, Д. Говекар. Функции со свойством Морера вдоль комплексных кривых было рассмотрено в работе С.Г. Мысливец. Глобальные граничные аналоги теоремы Морера вдоль комплексных и действительных плоскостей были изучены в работах А.М. Кытманова, С.Г. Мысливец.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Исследования по диссертации проводились в рамках научно-исследовательского проекта ОТ-4-27 "Описание предуальных пространств Йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функций" кафедр «Математический анализ» и «Алгебра, геометрия и функциональный анализ» Каракалпакского государственного университета (2017-2020 гг).

Цель исследования. Целью диссертационной работы является получение многомерных граничных теорем Морера для интегрируемых функций и исследование интегрируемых функций с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, состоят из следующих:

• получение условий голоморфного продолжения интегрируемых на границе области функций;

• доказательство голоморфности интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства комплексных прямых, проходящих через открытое множество;

• исследование структур семейств комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения интегрируемых функций;

• получение многомерного граничного аналога теоремы Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных прямых, проходящих через открытое множество;

• показательство многомерного граничного аналога теоремы Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных кривых;

• получение результатов голоморфного продолжения в область функций, заданных на границе и обладающих одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых, проходящих через конечное число точек в области.

Объект исследования. Объектом исследования является голоморфные функции многих комплексных переменных, голоморфное продолжение функций заданных на границе области, интегральные представление функций из класса L^p.

Предмет исследования состоит из интегральных представлений, соответствующих теореме об аналитическом продолжении функций, заданных на границе области.

Методы исследования: используются интегральные представления голоморфных функций, методы многомерного действительно и комплексного анализа, свойства интегралов Лебега и пространства L^p.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

• обобщена теорема Статута для класса интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения;

• получено обобщение теоремы Аграновского и Семенова для интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через заданное открытое множество;

• доказано, что интегрируемые функции со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых, проходящие через росток порождающего многообразия, голоморфно продолжаются до функции класса Харди;

• доказана теорема Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных прямых, проходящих через заданное открытое множество;

• получен многомерный аналог теоремы Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных кривых.

• доказаны аналоги многомерной граничной теоремы Морера в классических областях для интегрируемых функций.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения доказанных теорем для интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения и многомерных теорем Морера к исследованию задач теории интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, к скачкам интеграла типа Бохнера-Мартинелли, а также в методах решения граничных задач математической физики.

Достоверность результатов исследования обоснована применением методов математического анализа, функционального анализа и теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется их использованием при голоморфном продолжении функций в ограниченных областях и при решении задач, связанных с граничными свойствами интегральных представлений.

Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что полученные научные результаты служат при решении различных задач, связанных с функциями одномерным свойством голоморфного продолжения в ограниченной области с гладкой границей.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в процессе исследования диссертации внедрены на практике по следующим направлениям:

– условия голоморфного продолжения интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения с границы области, обобщающие классические теоремы Гартогса-Бохнера, были использованы в гранте РФФИ под номером **18-51-41011** по теме «Многомерный комплексный анализ» для того, чтобы расширить результаты, полученные для непрерывных функций (справка Сибирского федерального университета от 25 мая 2020 года под номером **178**). Применение научного результата дало возможность обобщения теорем о голоморфном продолжении функций, представимых интегралом Бохнера-Мартинелли;

голоморфное продолжение интегрируемых функций с границы области, использовались в зарубежном гранте под номером **15-01-00277** по теме «Неалгебраические системы уравнений, степенные суммы корней и компьютерная алгебра» при решении задач со сложными особенностями на границе (справка Сибирского федерального университета от 25 мая 2020 года под номером **176**). Применение научного результата дало возможность построения степенных сумм нулей систем неалгебраических уравнений;

Граничные теоремы Морера и голоморфное продолжение интегрируемых функций были использованы в зарубежном гранте под номером **14-01-00544** по теме «Многомерные интегральные преобразования и их применения в комплексной аналитической геометрии и теория дифференциальных и разностных уравнений» в изучении свойств интеграла Бохнера Мартинелли для функций, заданных на границе (справка Сибирского федерального университета от 25 мая 2020 года под номером **177**). Применение научного результата дало возможность описания алгебры интегральных операторов на гиперповерхностях.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 5 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 31 научных работ, из них 14 научных статей, в том числе опубликованы 5 в зарубежных и 9 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 186 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Глава I диссертации является вспомогательной. В ней приводятся основные принципы голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, известные результаты и нерешенные задачи в этом направлении. Изучаются также основные свойства интегральных формул функций класса $f \in L^p(\partial D)(p \geq 1)$, приводятся методы их применения к проблемам голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых и комплексных поверхностей. Приведенные результаты, методы их применения в классе интегрируемых функций далее используются нами в доказательствах основных результатов.

Вторая глава **«Об интегрируемых функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения»**, посвящена исследованию классов интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых.

В параграфе **§2.1** рассмотрены интегрируемые функции, со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через открытое множество

Пусть $D-$ ограниченная область в $\mathbb{C}^n\,(n>1)$ со связной дважды гладкой границей ∂D.

Для функции $f \in L^p(\partial D)$ обозначим интеграл Бохнера-Мартинелли

$$F(z)=\int_{\partial D} f(\zeta)U(\zeta,z), \quad z \notin \partial D.$$

Эта функция гармонична на внешности области.

Теорема 2.1.1. *Пусть $V-$открытое множество в $\mathbb{C}^n \setminus D$ и функция $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ и обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых, пересекающих V и* *проходящих через область* D, *тогда* f *является нормальным граничным значением некоторой функции* $F \in H^p(D)$.

Нами теорема 2.1.1 ранее была доказана, в случае когда V была открытым множеством, принадлежащим области D. Отметим, что доказательства утверждений для $V \subset \mathbb{C}^n \setminus D$ и для $V \subset D$ существенно различные. Кроме того, теорема 2.1.1 допускает дальнейшее усиление, заменой открытого множества ростком некоторого порождающего многообразия Γ, лежащего в $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ (теорема 2.2.1 следующего параграфа).

При доказательстве теоремы 2.1.1 используются следующие утверждения.

Лемма 2.1.1. *Если для точки* $z \in V$ *и для почти всех* $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ *функция* $f \in L^p(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида*

$$l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j l,\ j = 1, 2, ..., n,\ t \in \mathbb{C}\},$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ *в направлении вектора* $b \in \mathbb{C}P^{n-1}$, *то*

$$\int_{\partial D} (\zeta_k - z_k) f(\zeta) U(\zeta, z) = 0,\ \ k = 1, 2, ..., n.$$

Теорема 2.1.2. *Пусть функция* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *и* $F(z)-$ *голоморфна в* D, *тогда* $F(z) \in H^p(D)$ *и её нормальные граничные значения почти всюду совпадают с* f *на* ∂D.

Пусть $D-$ ограниченная строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n\ (n > 1)$ со связной дважды гладкой границей ∂D. Из теорем 1.3.2 (глава 1) и 2.1.1. получаем следующий результат.

Следствие 2.1.1. *Пусть* V *– открытое множество в* $\mathbb{C}^n \setminus D$ *и функция* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 1$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых, пересекающих* V *и проходящих через область* D, *тогда* f *является нормальным граничным значением некоторой функции* $F \in H^p(D)$.

Таким образом, в этом утверждении класс интегрируемых функций расширяется.

В параграфе **§2.2** рассматривается семейство комплексных прямых, проходящих через кусок порождающего многообразия, лежащего вне области.

Рассмотрим семейство комплексных прямых, проходящих через некоторое порождающее многообразие $\Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Напомним, что *гладкое (класса* C^∞*) многообразие* Γ *называется порождающим, если для каждой точки* $z \in \Gamma$ *комплексная линейная оболочка касательного пространства*

$T_z(\Gamma)$ *совпадает с* $\mathbb{C}^n$. Обозначим через L_Γ семейство всех комплексных прямых, пересекающих Γ.

Теорема 2.2.1. *Пусть* Γ *– росток порождающего многообразия в* $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ *и функция* $f \in L^p(\partial D), p \geq 2$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из* L_Γ. *Тогда существует функция* $F \in H^p(D)$, *голоморфная в* D, *радиальные пределы которой совпадают с функцией* f *почти всюду на границе* ∂D.

Для доказательства теоремы 2.2.1 нам понадобится следующие утверждения.

Лемма 2.2.1. *Если для точки* $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ *и для почти всех комплексных прямых, проходящих через* z, *функция* f *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения, то вместе с* $F(z)$ *все частные производные порядка* $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$

$$\frac{\partial^\alpha F}{\partial z^\alpha}(z) = \frac{\partial^{\|\alpha\|} F}{\partial z_1^{\alpha_1}...\partial z_n^{\alpha_n}}(z) = 0,$$

где $\|\alpha\| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \geq 0$.

Лемма 2.2.2. *Если вещественно аналитическая функция* F, *заданная в окрестности* W *удовлетворяет условиям*

$$F\big|_\Gamma = 0, \ \left.\frac{\partial^{\alpha+\beta} F}{\partial z^\alpha \partial w^\beta}\right|_\Gamma = 0$$

то она равна нулю в W, *где* W *–окрестность точки ноль.*

Также как и в предыдущем параграфе для класса строго псевдовыпуклых областей класс интегрируемых функций можно расширить.

Пусть D – ограниченная строго псевдовыпуклая область.

Следствие 2.2.1. *Пусть* Γ *–росток порождающего многообразия в* $\mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ *и функция* $f \in L^p(D),\ p \geq 1,$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из* L_Γ. *Тогда существует функция* $F \in H^p(D)$, *голоморфная в* D, *радиальные пределы которой совпадает с функцией* f *почти всюду на границе* ∂D.

В параграфе **§2.3** рассматривается случай, когда росток порождающего многообразия лежит в области D. Основными результатами параграфа являются следующие теоремы.

Сначала приведем понятие области со свойством Неванлинны. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – односвязная область и $t = k(\tau)$ – конформное отображение единичного круга $\Delta = \{\tau : |\tau| < 1\}$ на G.

Область G является *областью со свойством Неванлинны*, если существуют две ограниченные голоморфные функции u и v в G такие, что почти всюду на $S=\partial\Delta$ выполняется равенство

$$\overline{k}(\tau)=\frac{u\left(k(\tau)\right)}{v\left(k(\tau)\right)}$$

в смысле угловых граничных значений. По сути это означает, что $\bar{t}=\dfrac{u(t)}{v(t)}$ на ∂G.

Нам понадобится, чтобы область G обладала *усиленным свойством Неванлинны*, т.е. чтобы функция $u_1(\tau)\neq 0$ в $\mathbb{C}\backslash\Delta$ и $\overline{k}(\infty)\neq 0$.

Теорема 2.3.1. *Пусть Γ — росток порождающего многообразия в области D, функция $f\in L^p(\partial D), p\geq 2$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых $l\in L_\Gamma$ и связные компоненты пересечения $D\cap l$ являются областями с усиленным свойством Неванлинны, тогда существует функция $F\in H^p\left(\overline{D}\right)$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D.*

Теорема 2.3.2. *Пусть Γ росток порождающего многообразия в области D, функция $f\in L^p(\partial D), p\geq 2$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль почти всех комплексных прямых $l\in L_\Gamma$ и на связных компонентах пересечения $D\cap l$ функция $\dfrac{1}{\overline{k}(t)}$ голоморфно продолжается с $\partial D\cap l$ в $D\cap l$. Тогда существует функция $F\in H^p\left(\overline{D}\right)$, голоморфная в D и совпадающая с функцией f на границе ∂D.*

Как и в предыдущем параграфе класс интегрируемых функций может быть расширен до функций $f\in L^p(\partial D), p\geq 1$.

В параграфе **§2.4** рассматривается семейство комплексных прямых, проходящи через росток комплексной гиперповерхности, лежащей вне области.

Рассмотрим область $D\subset\mathbb{C}^n$ с дважды гладкой границей $\partial D\in C^2$. Точки пространства $\mathbb{C}^n$ будем обозначать через $z=(z_1,...,z_n),\quad w=(w_1,...,w_n)$ и т.д. Для точек $z,w\in\mathbb{C}^n$ введем соответственно, скалярное произведение и модуль

$$\left\langle z,\overline{w}\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}z_k\overline{\omega}_k,\qquad |z|=\sqrt{\left\langle z,\overline{z}\right\rangle}.$$

В дальнейшем будем предполагать существование направления $b^0\neq 0$ такого, что

$$\left\langle b^0,\bar\zeta\right\rangle = b_1^0\bar\zeta_1+\ldots+b_n^0\bar\zeta_n \neq 0 \text{ для всех } \zeta\in\bar D. \qquad (1)$$

Это условие всегда выполнимо, если, например, точка 0 лежит достаточно далеко от $\bar D$ или область D – линейно выпукла.

Пусть Γ – росток комплексного многообразия размерности $(n-1)$ в $\mathbb{C}^n$, лежащий вне $\bar D$. Делая сдвиг и унитарное преобразование, можно считать, $0\in\Gamma$ и в некоторой окрестности U точки 0 комплексная гиперповерхность Γ имеет вид

$$\Gamma=\left\{z\in U: z_n=\varphi(z'),\ z'=(z_1,\ldots,z_{n-1})\right\},$$

где φ голоморфная функция в окрестности нуля в $\mathbb{C}^{n-1}$ и $\varphi(0)=0,\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z_k}(0)=0,\ k=1,\ldots,n-1.$

Рассмотрим множество комплексных прямых L_Γ вида

$$l=\left\{\zeta\in\mathbb{C}^n:\ \zeta_j=z_j+b_jt,\quad j=1,\ldots,n,\ t\in\mathbb{C}\ \right\},$$

проходящие через точку $z\in\Gamma$ в направлении вектора $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$. Как мы уже отметили выше, по теореме Сарда для фиксированного $b\in\mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ для почти всех $z\in\mathbb{C}^n$ пересечение $l\cap\partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D\cap l\neq\varnothing$). Кроме того, если $f\in L^p(\partial D),\ p\geq 2$, то для почти всех $z\in\Gamma$ и $b\in\mathbb{C}P^{n-1}$ функция $f\in L^p(\partial D\cap l)$.

Рассмотрим ядро Бохнера-Мартинелли $U(\zeta,z)$ и для функции $f\in L^p(\partial D)$ определим интеграл Бохнера-Мартинелли

$$F(z)=\int\limits_{\partial D_\zeta} f(\zeta)U(\zeta,z),\quad z\notin\partial D.$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 2.4.1. *Пусть D – дважды гладкая, односвязная область, удовлетворяющая условиям (1). Если функция* $f\in L^p(\partial D),\ p\geq 2$, и *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства L_Γ, тогда функция f голоморфно продолжается в область D. А именно, интеграл Бохнера-Мартинелли $F(z)$ принадлежит классу Харди $H^p(D)$, радиальные граничные значения которой почти всюду совпадает с f.*

Замечание 2.4.1. Если росток Γ является частью комплексной гиперповерхности $\tilde\Gamma$, заданного во всем $\mathbb{C}^n$, т.е. если аналитическая поверхность Γ аналитический продолжается на всю $\mathbb{C}^n$, то условие (1) становится лишним.

Тем самым мы получаем следующую теорему.

Теорема 2.4.2. *Пусть D — односвязная ограниченная область со связной гладкой границей, $\tilde{\Gamma}$ — комплексная гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$ такая, что на некотором ростке $\Gamma = \tilde{\Gamma} \cap U \subset \mathbb{C}^n \setminus \bar{D}$ функция $f \in L^p(\partial D), p \geq 2,$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых из семейства L_Γ. Тогда функция f голоморфно продолжается в область D.*

Замечание 2.4.2. Пусть многообразие $\gamma \subset \Gamma,\ 0 \in \gamma$, является порождающим многообразием класса C^∞ в Γ , т. е. для каждой точки $z \in \Gamma$ комплексная линейная оболочка касательного пространства $T_z(\gamma)$ совпадает с касательным пространством $T_z(\Gamma)$. Имеет место следующее усиление теоремы 2.4.1

Теорема 2.4.3. *Если область D, росток порождающего в комплексной гиперповерхности Γ многообразия γ и функция $f \in L^p(\partial D),\ p \geq 2$, удовлетворяют условиям теоремы 2.4.1, то интеграл Бохнера-Мартинелли $F(z)$ принадлежит классу Харди $H^p(D)$, радиальные граничные значения которой почти всюду совпадает с f.*

В главе 3 **«Интегрируемые функции со свойством одномерного голоморфного продолжения в круговых областях»,** рассмотрены задачи о голоморфном продолжении интегрируемых функций в n-круговых и круговых областях, обладающих свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства комплексных прямых.

В параграфе **§3.1** мы рассмотрим семейство комплексных прямых, проходящих через $(n+1)$ точек, лежащих в шаре B пространства $\mathbb{C}^n$. Пусть B – единичный шар в $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ с центром в нуле, $S = \partial B$ граница шара. Напомним определение класса функций $H^p(B)$.

Голоморфная функция $f \in H^p(B)\ (p>0)$, если

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_S \left| f(\varsigma - \varepsilon \nu(\varsigma)) \right|^p d\sigma < +\infty,$$

где $d\sigma$ – элемент поверхности ∂B, а $\nu(\varsigma)$– единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂B в точке ς. Хорошо известно, что нормальные граничные значения функции $f \in H^p(B)$ принадлежат классу $L^p(\partial B)$ (по мере $d\sigma$).

Рассмотрим одномерные комплексные прямые l вида

$$l = \{\varsigma : \varsigma_j = z_j + b_j t,\ j=1,\dots,n,\ t \in \mathbb{C}\}, \tag{3.1.1}$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$. Тогда, если $f \in L^p(S)$, то для почти всех $z \in B$ и почти всех $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ функция $f \in L^p(S \cap l)$.

В этой главе мы считаем, что $p \ge 1$.

Напомним, функция $f \in L^p(S)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой l $(l \cap S \ne \varnothing)$, если существует функция f_1 со следующими свойствами

a) $f_1 \in H^p(B \cap l)$

b) нормальные граничные значения функции f_l почти всюду совпадают с f на множестве $S \cap l$

Будем говорить, что функция $f \in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль некоторого семейства* L, если она обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль любой комплексной прямой $l \in L$. Назовем множество L *достаточным для голоморфного продолжения*, если из того, что $f \in L^p(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из семейства L следует, что функция f голоморфно продолжается в B (т. е. f является CR-функцией на S).

Обозначим через L_a совокупность комплексных прямых, проходящих через точки a, а через $L_{a,b,c,\dots}$ объединение $L_a \cup L_b \cup L_c \cup \dots$

Теорема 3.1.1. *Пусть функция* $f \in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* L_0, *тогда для интеграла*

$$\Phi(z,w) = \int_S f(\zeta) Q(z,w,\varsigma) d\sigma(\zeta),$$

справедливы $\Phi(0,w) = \text{const}$ *и* $\left.\dfrac{\partial^\alpha \Phi(z,w)}{\partial z^\alpha}\right|_{z=0}$ – *многочлен по* ω *степени не выше* $\|\alpha\|$, *здесь*

$$Q(\mathrm{z},\, w,\, \zeta) = c_n \frac{\left(1-\langle z,\, w\rangle\right)^n}{\left(1-\langle z,\overline{\zeta}\rangle\right)^n \left(1-\langle \zeta, w\rangle\right)^n}$$

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z,w) = \Phi(\varphi_a(u), \varphi_{\overline{a}}(\upsilon)) = \int_S f(\zeta) Q\left(\varphi_a(u), \varphi_{\overline{a}}(\upsilon), \zeta\right) d\sigma(\zeta),$$

где $\varphi_\alpha(u)$ – автоморфизм шара, переводящий точку $a \in B$ в 0.

Положим $\Phi_a(u,v)=\int\limits_S f_a(\eta)Q(u,\upsilon,\eta)d\sigma(\eta).$ Следующая теорема является аналогом теоремы 3.1.1 для произвольной точки $a\in B$.

Теорема 3.1.2. *Пусть функция* $f\in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* L_a, $a\in B$, *тогда* $\Phi(a,w)=const$ *и* $\dfrac{\partial^a\Phi(a,\omega)}{\partial z^a}$ *– являются многочленами по* $\varphi_a(w)$ *степени не выше чем* $\|a\|$.

Теорема 3.1.3. *Пусть функция* $f\in L^p(S)$, *точка* $a\in B$, *функция* $\Phi(z,w)$ *удовлетворяет условиям* $\Phi(0,w)=const$, $\Phi(a,w)=const$ *и* $\dfrac{\partial^a\Phi(0,w)}{\partial z^a}$ *– являются многочленами по* $\varphi_\alpha(w)$ *степени не выше чем* $\|\alpha\|$. *Тогда для любого фиксированного z, принадлежащего комплексной прямой из* $\gamma\cap B$ *справедливо* $\Phi(z,w)=const$ *по переменной* w, $\dfrac{\partial^\beta\Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$, $\|\beta\|>0$. *Здесь,* γ *– комплексная прямая, проходящая через точки 0 и a.*

Следствие 3.1.1. *Пусть функция* $f\in L^p(S)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* L_a $a\in B$. *Тогда для любого фиксированного z, принадлежащего комплексной прямой* $\gamma\cap B$, *по переменной w справедливо* $\Phi(z,w)=const,$ $\dfrac{\partial^\beta\Phi(z,w)}{\partial w^\beta}=0$ *при* $\|\beta\|>0$.

Следствие 3.1.2. *В условиях следствия 3.1.1 для любого фиксированного* z, *принадлежащего комплексной прямой* $\gamma\cap B$, *производные* $\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar{z}^{\beta}}=0$, $\|\beta\|>0$.

Теорема 3.1.4. *Пусть функция* $f\in L^p(\mathrm{S})$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* $L_{c,d}$, $c,d\in B$. *Тогда при фиксированном* $|t|<1$ *по переменной* ω *имеют место равенства* $\Phi(c+(d-c)t,\ w)=\mathrm{const}$ *и* $\dfrac{\partial^\beta\Phi(c+(d-c)t,w)}{\partial w^\beta}=0$, $\|\beta\|>0$.

Следствие 3.1.3. *В условиях теоремы 3.1.4 производные* $\left.\dfrac{\partial^\beta F(z)}{\partial \bar{z}^{\beta}}\right|_{z=c+(d-c)t}=0$ *при* $\|\beta\|>0$.

Теорема 3.1.5. *Пусть* $n=2$ *и функция* $f\in L^p(\mathrm{S})$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств* $L_{a,c,d}$, *где*

$a,c,d \in B$ не лежат на одной комплексной прямой в $\mathbb{C}^2$. Тогда $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ *для любого $z \in B$ и $\|\beta\| > 0$, а $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B.*

Из теоремы 3.1.5 следует, что в шаре $B \subset \mathbb{C}^2$ достаточным семейством комплексных прямых, для интегрируемой функции, заданной на границе шара, является множество $L_{a,c,d}$ где a,c,d – произвольные точки из шара, не лежащие на одной комплексной прямой.

Рассмотрим теперь общий случай пространства $\mathbb{C}^n$ и шара B в нем, $B \subset \mathbb{C}^n$. Обозначим через A множество точек $a_k \in B \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1,...,n+1$, не лежащих на комплексной гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 3.1.6. *Пусть функция $f \in L^p(S)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств $L_A = \cup\left\{L_{ak},\, k = 1,2,..,(n+1)\right\}$. Тогда для любого $z \in B$ и $\|\beta\| > 0$* $\dfrac{\partial^\beta \Phi(z,w)}{\partial w^\beta} = 0$ *а $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в B.*

В параграфе **§3.2** мы доказали достаточность семейства комплексных прямых, проходящих $(n+1)$ точек n-круговой области для голоморфного продолжения интегрируемых функций.

Пусть D – *ограниченная полная n-круговая область в* $\mathbb{C}^n$ *с* центром в нуле, т.е. вместе с каждой точкой $z^0 = (z_1^0,.....,z_n^0) \in D$ она содержит поликруг

$$\left\{z \in \mathbb{C}^n :\ |z_k| \le |z_k^0|,\ k = 1,.....,n\right\}.$$

Обозначим теперь, U множество точек $a_k \in D \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1,...,(n+1)$, не лежащих на комплексной гиперповерхности в $\mathbb{C}^n$. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.2.6. *Пусть $f(\zeta) \in L^p(\partial D)$, $p \ge 1$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства L_U, тогда* $\dfrac{\partial^\gamma \Phi(z,w)}{\partial w^\gamma} = 0$ *для любого $z \in D$ и $\|\gamma\| > 0$, а функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в область D до функции класса H^p.*

Параграф §3.3 посвящен получению многомерного аналога теоремы Гартогса в круговых областях для интегрируемых функций.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой границей. Рассмотрим комплексные прямые вида

$$l_{z,b} = \left\{\varsigma \in \mathbb{C}^n : \varsigma = z + bt, t \in \mathbb{C}\right\} = \left\{(\varsigma_1,...,\varsigma_n) : \varsigma_j = z_j + b_j t,\ j = 1,2,...,n, t \in \mathbb{C}\right\}$$

где $z \in \mathbb{C}^n$, $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$.

Как в предыдущем параграфе, функция $f \in L^p(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых $l_{z,b}$ и $l_Г$ достаточное множество для голоморфного продолжения.

Область $D \subset \mathbb{C}^n$ обладает усиленным свойством Неванлинны в точке $z \in D$, т.е. сечение $D \cap l_{z,b}$ обладает усиленным свойством Неванлинны для любого $b \in \mathbb{C}P^{n-1}$.

Основными результатами параграфа являются теоремы 3.3.1 и 3.3.2.

Теорема 3.3.1. Пусть $n = 2$ и D *– ограниченная строго выпуклая круговая область с дважды гладкой границей и обладает усиленным свойством Неваннлинны в точках* $a, c, d \in D$ *и функция* $f(\zeta) \in L^p(\partial D)$ *обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейства* $L_{\{a,c,d\}}$, *и точки* a, c, d *не лежат в одной комплексной прямой из* $\mathbb{C}^2$, *то функция* $f(\zeta)$ *голоморфно продолжается в* D.

Обозначим через U множество точек $a_k \in D \subset \mathbb{C}^n$, $k = 1,...,n+1$, которые не лежат на одной комплексной гиперплоскости в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 3.3.2. *Пусть D – ограниченная строго выпуклая круговая область с дважды гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ и обладает усиленным свойством Неванлинны в точках из множества U и функция $f(\zeta) \in L^p(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейства L_U, то функция $f(\zeta)$ голоморфно продолжается в D.*

Глава **IV «О многомерных граничных теоремах Морера для интегрируемых функций»** посвящена свойствам Морера функций, интегрируемых на границе области. В предыдущих главах мы рассмотрели функции, обладающих одномерным свойством голоморфного продолжения. А свойство Морера заключается в равенстве нулю интегралов от данной функции по границе пересечения границы области с комплексными прямыми (с вещественными плоскостями размерности 2).

В **§4.1** рассматриваются многомерная граничная теорема Морера в ограниченных областях для интегрируемых функций.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n (n > 1)$ со связной гладкой границей ∂D (класса C^2). Рассмотрим одномерные комплексные прямые l вида

$$l = \{\zeta : \zeta_j = z_j + b_j t,\ j = 1,2,...,n,\ t \in \mathbb{C}\} \qquad (2)$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{C}P^{n-1}$.

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа гладких кривых. Как всегда, для функции $f \in L^p(\partial D)$ обозначим интеграл Бохнера-Мартинелли через

$$F(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \;\; z \notin \partial D.$$

Основным результатом параграфа является

Теорема 4.1.1. *Пусть функция* $f \in L^p(\partial D), p \geq 2$, *и для почти всех* $z \in \mathbb{C}^n$ *и почти всех* $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1}$ *функция* f *удовлетворяет условиям Морера*

$$\int_{\partial D \cap l} f(z + bt)dt = \int_{\partial D \cap l} f(z_1 + b_1 t, ..., z_n + b_n t)dt = 0. \qquad (3)$$

Тогда интеграл Бохнера-Мартинелли $F \in H^p(D)$ *и функция* f *голоморфно продолжается в* D *до функции* F *т.е., радиальные граничные значения* $F(z)$ *почти всюду совпадает с* $f(\xi)$.

Без условия связности границы области теорема 4.1.1, очевидно, не верна. Теорему 4.1.1. можно обобщить, используя вместо (3) другое условие.

Теорема 4.1.2. *Пусть* k *– фиксированное неотрицательное целое число и функция* $f \in L^p(\partial D), p \geq 2$. *Если для почти всех* $z \in \mathbb{C}^n$ *и почти всех* $b \in \mathbb{C}\mathbf{P}^{n-1n-1}$

$$\int_{\partial D \cap l} f(z + bt)t^k dt = \int_{\partial D \cap l} f(z_1 + b_1 t, ..., z_n + b_n t)t^k dt = 0,$$

то функция f *голоморфно продолжается в* D *до функции* $F \in H^p(D)$.

При $k = 0$ получим теорему 4.1.1, поэтому достаточно доказать теорему 4.1.2 для произвольного $k \geq 0$.

В §4.2 доказывается голоморфная продолжимость интегрируемых функций, удовлетворяющих свойству Морера вдоль комплексных прямых, проходящих через фиксированное открытое множество

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n (n > 1)$ со связной гладкой границей ∂D (класса C^2). В работе И. Глобевника и Е. Л. Стаута была поставлена задача о нахождении достаточного семейства комплексных прямых $L = \{l\}$, для которых из условия (3) следует голоморфная продолжаемость функции f в область D. Например, является ли таким достаточным семейством множество L_V комплексных прямых l, пересекающих некоторое открытое множество $V \subset D$?

Теорема 4.2.1. *Пусть для фиксированного* k *и функции* $f \in L^p(\partial D), p \geq 2$ *условие*

$$\int_{\partial D \cap l} f(z + bt)t^k dt = \int_{\partial D \cap l} f(z_1 + b_1 t, ..., z_n + b_n t)t^k dt = 0, \qquad (4)$$

выполнено для почти всех прямых l *(вида (4.1.1)), пересекающих открытое множество* $V \subset D$. *Тогда функция* f *голоморфно продолжается в* D *до функции* $F \in H^p(D)$.

Теорема 4.2.1 верно и в том случае, когда $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Сформулируем ее.

Теорема 4.2.2. *Пусть для фиксированного* k *и функции* $f \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *условие* (4) *выполнено для почти всех прямых* l *(вида (2)), пересекающих открытое множество* $V \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. *Тогда функция* f *голоморфно продолжается в* D *до функции* $F \in H^p(D)$.

В **§4.3** изучается семейство кривых L специального вида, достаточное, чтобы функция $\phi \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$, обладающая свойством Морера вдоль кривых $l \in L$, голоморфно продолжалась в D. Для этой цели рассматриваются ядра, стоящие в формуле многомерного логарифмического вычета, изучаются его свойства и приводится, в качестве применения, теоремы о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых.

Теорема 4.3.1. *Если для функции* $\phi \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *выполнено условие*

$$F^-(z) = \int_{\partial D_\zeta} \phi(\zeta) U(f(\zeta - z)) = 0,\ z \notin \overline{D},$$

то ϕ *голоморфно продолжается в* D *до функции* $F \in H^p(D)$.

Пусть $\phi_2(t),...,\phi_n(t)$ – целые функции в $\mathbb{C}$ (комплексной плоскости) не обращающиеся в нуль. Для произвольного вектора $b = (b_2,...,b_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ проведем через точку $z \in \mathbb{C}^n$ кривую вида

$$L_{z,b} = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \zeta_j - z_j = b_j (\zeta_1 - z_1)^{k_j} \phi_j(\zeta_1 - z_1),\ j = 2,..,n,\ k_j \in \mathbb{N}\}. \quad (5)$$

Если точка z^0 такова, что $z_1^0 \neq z_1$, то подбирая подходящим образом b, можно найти кривую $L_{z,b}$ вида (5), проходящую через точку z^0.

Дадим следующее определение. Функция $\phi \in L^p(\partial D)$ обладает *одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль кривых* вида (5), если для любой кривой $L_{z,b}$ такой, что $L_{z,b} \cap \partial D = \varnothing$ существует функция $F_{z,b}(t)$ со следующими свойствами:

a) $F_{z,b}(t) \in H^p(\overline{D} \cap L_{z,b})$,

b) нормальные граничные значения $F_{z,b}(t)$ совпадают с ϕ на множестве $\partial D \cap L_{z,b}$.

Теорема 4.3.2. *Если функция* $\phi \in L^p(\partial D)$, $p \geq 2$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых* $L_{z,b}$ *вида (5), то*

$$\int_{\partial D} \phi(\zeta) U(f(\zeta - z)) = 0,$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$, *для функций* $(f_1, ..., f_n)$ *вида*

$$f_1(z) = z_1^q, \ f_j(z) = \frac{z_j^{q_j}}{\phi_j^{q_j}(z_1)},$$

где $q_j \in \mathbb{N}$ *и* q_j *выбраны так, что* $q_2 k_2 = ... = q_n k_n = q$ *и* ϕ *голоморфно продолжается в область* D.

В главе V **«Функции со свойством Морера в классических областях»,** рассматриваются граничные варианты теоремы Морера для классических областей. Отправной точкой ее послужил результат Нагеля и Рудина, который говорит о том, что если функция f – непрерывна на границе шара в $\mathbb{C}^N$ и интеграл

$$\int_0^{2\pi} f\left(\psi\left(e^{i\varphi}, 0...,0\right)\right) e^{i\varphi} d\varphi = 0$$

для всех (голоморфных) автоморфизмов ψ шара, то функция f голоморфно продолжается в шар.

В работе М.Л.Аграновского дано описание мебиус-инвариантных пространств непрерывных функций в классических областях трубчатого типа, т.е. тех классических областях, для которых вещественная размерность границы Шилова совпадает с комплексной размерностью области.

В **§5.1** доказана многомерная граничная теорема Морера в классической области первого типа.

Пусть дана классическая область первого типа, т.е. область D_I, образованная матрицами Z из m строк и n столбцов (элементы матриц - комплексные числа) удовлетворяющими условию

$$I^{(n)} - Z\overline{Z} > 0,$$

а ее граница Шилова S_I образована матрицами U из m строк и n столбцов с условием, что

$$UU^* = I^{(m)}.$$

В частности, при $m = n$ многообразие S_I совпадает с множеством всех унитарных матриц $U(n)$. Определим класс $H^p(D_I)$ как класс всех функций F, голоморфных в D_I, для которых

$$\sup_{0<r<1} \int_S \left|F(r\zeta)\right|^p d\mu < +\infty,$$

здесь $r\zeta = (r\zeta_1, ..., r\zeta_N)$, а $d\mu$ – нормированная мера Лебега на многообразии S_I, которая является мерой Хаара и, следовательно, инвариантна относительно поворотов.

Для любой функции f в D_I, и для любого $\zeta \in S_I$ рассмотрим срез-функцию f_ζ в $\Delta = \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ следующего вида: $f_\zeta(t) = f(t\zeta)$. Эта срез–функция дает возможность связать некоторые N-мерные свойства функции f с одномерными свойствами f_ζ.

Зафиксируем точку $\lambda_0 \in S_I$ $\left(\lambda_0 = \left(\lambda_1^0, ..., \lambda_N^0\right)\right)$ и рассмотрим следующее вложение диска Δ в область D_I

$$\left\{\zeta \in \mathbb{C}^N : \zeta_j = t\lambda_j^0,\ j = 1, ..., N,\ |t| < 1\right\} \tag{6}$$

Граница T диска Δ при этом вложении перейдет в окружность, лежащую на остове S_I. Если $\psi -$произвольный автоморфизм области D_I (т.е. биголоморфное отображение области D_I на себя), то множество вида (6) под действием этого автоморфизма перейдет в некоторый аналитический диск с границей на S_I.

Обозначим через Δ_ψ аналитический диск вида

$$\Delta_\psi = \left\{\zeta : \zeta = \psi\left(t\lambda_0\right), |t| < 1,\right\},$$

где $\lambda_0 -$ фиксированная точка из остова S_I, а $\psi -$автоморфизм области D_I. Тогда граница T_ψ этого аналитического диска лежит на S_I.

Основным результатом параграфа является

Теорема 5.1.1. *Если функция* $f \in L^p(\mathrm{S}_I)$, $\mathrm{p} \geq 1$, *удовлетворяет условию Морера*

$$\int_T f\left(\psi\left(t\lambda\right)\right)dt = 0$$

для всех автоморфизмов $\psi = \psi_A$ *и почти всех автоморфизмов* $\psi = \varphi_\lambda$ *области* D_I, *то функция f голоморфно продолжается в* D_I *до функции* F *класса* $H^p\left(\bar{D}_I\right)$.

Теорема 5.1.2 *Если функция* $f \in L^p\left(S_I\right)$ *и для нее выполнено равенство*

$$\int_{S_I} f\left(W\right)\psi_k^A\left(W\right)P\left(W, A\right)d\mu\left(W\right) = 0 \tag{7}$$

для всех автоморфизмов ψ_A *области* D_I *переводящих точку A из* D_I *в 0, всех* $k = 1, ..., N$, *и всех точек* $A \in D_I$ *то функция* f *является радиальным граничным значением некоторой функции* $F \in H^p(D_I)$.

Доказательство теоремы 5.1.1 показывает, что оно остается верным, если условие (7) выполняется лишь для тех автоморфизмов ψ_A, для которых точка A лежит в некотором открытом множестве $V \subset D_I$. Чтобы убедится в этом, достаточно применить теорему единственности для вещественно аналитических функций. Применяя, это обобщение теоремы 5.1.1 мы можем доказать

Теорема 5.1.3. *Если функция $f \in L^p(S_I)$ удовлетворяет условию (7) для всех точек А, лежащих в некотором открытом множестве $V \subset D_I$ и всех компонент автоморфизмов $\psi = \psi_A$ и почти всех автоморфизмов $\psi = \varphi_\lambda$, то f является радиальным граничным значением на S_I некоторой функции $F \in H^p(D_I)$.*

Из теоремы 5.1.2 и 5.1.3 вытекает следующее

Следствие 5.1.1. *Если функция $f \in L^p(S)$ голоморфно (по t) продолжается в аналитические диски Δ_ψ для всех автоморфизмов ψ (либо для всех автоморфизмов ψ, переводящих точку 0 в точки некоторого фиксированного открытого множества $V \subset D_I$) до функций класса $H^p(\Delta_\psi)$, то функция f голоморфно продолжается в D_I.*

В **параграфах 5.2 и 5.3** получены аналогичные результаты в классических областях второго, третьего и четвертого типа. Основными результатами этих параграфов являются теоремы 5.2.1, 5.2.2, 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3.

В параграфе **§5.4** мы рассмотрели случай неограниченной области D, граница которой называется сферой Пуанкаре. Эта область имеет вид

$$D = \left\{ (z,w) = (z, w_1, ..., w_n) \in \mathbb{C}^{1+n} :\ \operatorname{Im} z > |w|^2 \right\}.$$

Она является неограниченной областью, а ее граница имеет вид

$$\partial D = \left\{ (\zeta, \eta) \in \mathbb{C}^{1+n} :\ \operatorname{Im} \zeta = |\eta|^2 \right\}.$$

Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре для непрерывных функций была рассмотрена в работе С.Г.Мысливец. Рассмотрим отображение $L_{z,w,b} : t \to (\zeta, \eta)$ вида

$$\zeta = \frac{z - it}{1+t}, \eta = \frac{w + bt}{1+t}, \tag{8}$$

где $z \in \mathbb{C},\ b \in \mathbb{C}^n,$ точка $(z,w) \in D,$ а $t-$ комплексный параметр. Отображение (8) переводит круг $|t - a| < R,$ где

$$a = \frac{\frac{z}{2i} - \frac{1}{2} - \left\langle w, \bar{b} \right\rangle}{1 + |b|^2},\ \ R^2 = \frac{\operatorname{Im} z - |w|^2}{1 + |b|^2} + \frac{\left| \frac{z}{2i} - \frac{1}{2} - \left\langle w, \bar{b} \right\rangle \right|^2}{1 + |b|^2},$$

в область D с границей ∂D. Таким образом, отображение (8) определяет аналитический диск в области D с границей на ∂D.

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 5.4.1. *Пусть $f \in L^p(\partial D), p \geq 1.$ Если для почти всех $(z,w) \in D$ и $b \in \mathbb{C}^n$ выполнены условия*

$$\int_{\partial D\cap L_{z,w,b}} f dt = 0,$$

то f *голоморфно продолжается в область* D.

Автор выражает глубокую благодарность за постановку задачи и за постоянное внимание к работе научному консультанту, доктору физико-математических наук, профессору А.М.Кытманову и академику А.Садуллаеву, профессору Г.Худайберганову за многократные обсуждения результатов и за ценные советы при завершении этой диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена получению многомерных граничных теорем Морера для интегрируемых функций и исследованию классов интегрируемых функций с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Основные результаты диссертации состоят из следующего:

1. Обобщена теорема Стаута для класса интегрируемых функций, со свойством одномерного голоморфного продолжения;
2. Получено обобщение теоремы Аграновского и Семенова для интегрируемых функций со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых, проходящих через заданное открытое множества в шаре;
3. Доказано, что интегрируемые функции со свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых, проходящие через росток порождающего многообразия, голоморфно продолжаются до функции класса Харди;
4. Доказана теорема Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных прямых, проходящих через заданное открытое множество;
5. Получен многомерный аналог теоремы Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных кривых.
6. Доказаны аналоги многомерной граничной теоремы Морера в классических областях для интегрируемых функций.

Все эти результаты могут быть применены к исследованию задач теории интегральных представлений в многомерном комплексном анализе, скачкам интеграла типа Бохнера-Мартинелли, а также в методах решения граничных задач математической физики.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.
3.30.12.2019.FM 01 01 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY NAMED AFTER BERDAKH

OTEMURATOV BAIRAMBAY PERDEBAEVICH

FUNCTIONS WITH THE ONE-DIMENSIONAL HOLOMORPHIC CONTINUATION PROPERTY AND MORERA'S BOUNDARY THEOREMS IN MULTIDIMENSIONAL COMPLEX ANALYSIS

01.01.01 – Mathematical analysis
(Physical ana Mathematical Sciences)

DISSERTATION ABSTRACT

OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2020

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.DSc/FM152

Dissertation has been prepared at Karakalpak State University.
The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website (http://fti-kengash.uz/) and on Information and educational portal "ZiyoNet" (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific consultant:	**Kytmanov Aleksandr Mechislavovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor Siberian Federal University (Russia)
Official opponents:	**Raximov Abdugofir Abdumadjidovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor **Imomkulov Sevdiyor Akramovich** doctor of physical and mathematical sciences **Djumabaev Davlatboy Xalilaevigh** doctor of physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Karshi State University**

Defense will take place «11» June 2020 at 10:00 at the meeting of Scientific council number DSc.3.30.12.2019.FM 01.01 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent, 2b, Almazar area, University str. 4, Phone: (+99871)227-12-24, Fax: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz)

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №______) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent, Almazar area, University str. 4, Phone: (99871) 246-02-24)

Abstract of dissertation sent out on «___» _________ 2020 year.

(mailing report № ______ on «___» _________ 2020) year.

A.S.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. And Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. Integral representations of holomorphic functions are a powerful constructive tool in multidimensional complex analysis. The bulk of applications are used in integral representations whose kernel is holomorphic in terms of an external variable. But recently, integral representations with a non-holomorphic kernel that are suitable for a larger class of domains (Bohner-Martinelli, Cauchy-Fantappier, logarithmic deduction) have also received great development. This dissertation deals with applications of such integral representations to holomorphic extensions along complex lines and curves, as well as to multidimensional boundary variants of the classical Morera’s theorem for integrable functions.

The aim of research work is to obtain multidimensional boundary Morera's theorem for integrable functions and to study integrable functions with the one-dimensional holomorphic continuation property.

Tasks of research work are as follows:

- Proof of holomorphy of integrable functions with the property of a one-dimensional holomorphic continuation along a family of complex lines passing through an open set;
- Obtaining a multidimensional boundary analog of Morera's theorem for integrable functions along complex lines passing through an open set;
- Proof of a multidimensional boundary analog of Morera's theorem for integrable functions along complex curves;

* Investigation of the existence of holomorphic continuation of functions defined on the boundary and having the one-dimensional holomorphic continuation property along families of complex lines passing through a finite number of points in the domain.

The object of the research work is holomorphic functions of many complex variables, holomorphic continuation of functions defined on the boundary of the domain, integral representations of functions from L^p.

Scientific novelty of the research work is as follows:

- generalized Stout's theorem for a class of integrable functions, with the property of one-dimensional holomorphic continuation;
- a generalization of the Agranovsky and Semyonov theorem for integrable functions with the property of a one-dimensional holomorphic continuation along complex lines passing through a given open set in a sphere is obtained;
- Proved that integrable functions with the property of one-dimensional holomorphic continuation along families of complex lines passing through the sprout of the generating variety continue holomorphically to a function of the hardy class;
- Morera's theorem is proved for integrable functions along complex lines passing through a given open set;
- a multidimensional analog of Morera's theorem for integrable functions along complex curves is obtained.
- analogs of the multidimensional Morera boundary theorem in classical domains for integrable functions are proved;

Summary of the dissertation.

The dissertation work is devoted to the study of functions with the one dimensional holomorphic continuation property and Morera's boundary theorems in multidimensional complex analysis.

Implementation of the research results. The results obtained during the research of the dissertation are implemented in practice in the following areas:

- terms of holomorphic continuation of integrable functions with one-dimensional property of holomorphic continuation to the border region, which generalizes a classical theorem of Hartogs-Bochner, was used in the RFBR (Russian Foundation for Basic Research) grant number 18-51-41011 on "Multidimensional complex analysis" (certificate of the Siberian Federal University from may 25 2020 under the number 178). Application of the scientific result made it possible to generalize theorems about holomorphic continuation of functions represented by the Bochner-Martinelli integral;
- holomorphic continuation of integrable functions from the boundary of the region, were used in the foreign grant number 15-01-00277 on the topic "Non-Algebraic systems of equations, power sums of roots and computer algebra" (reference of the Siberian Federal University from 25 may 2020 under the number 176). The application of the scientific result made it possible to construct power sums of zeros of systems of non-algebraic equations;
- Morera's boundary theorems and holomorphic continuation of integrable functions the singular Bohner-Martinelli integral operator on hyper surfaces with conical edges were used in the foreign grant number 14-01-00544 on the topic "Multidimensional integral transformations and their applications in complex analytical geometry and theories of difference and differential equations" (reference of the Siberian Federal University dated May 25, 2020, number 177). The application of the scientific result made it possible to describe the algebra of singular integral operators on hyper surfaces with conical edges.

The outline of the thesis.

The dissertation consists of an introduction, five chapters, a conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 186 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Отемуратов Б.П. Об интегрируемых функциях со свойством одномерного голоморфного продолжения. // Доклады академии наук Республики Узбекистан, Ташкент-2009, №5., стр.18-21. (01.00.00; №7)

2. Отемуратов Б.П., Кутлымуратов Б. Граничная теорема Мореры на сфере Пуанкаре для интегрируемых функций. // Узбекский математический журнал, 2010г., №4. Стр.185-190. (01.00.00; №6)

3. Отемуратов Б.П. Теорема Морера для интегрируемых функций вдоль комплексных кривых. // Вестник НУУз. 2011г.№1/1 стр.249-256. (01.00.00; №8)

4. Отемуратов Б.П. Аналоги теоремы Морера для интегрируемых функций в классических областях. // Узбекский математический журнал, 2012., №3, с.115-122. (01.00.00; №6)

5. Отемуратов Б.П. Некоторые множества комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения интегрируемых функций. // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика, 2012 5(1). стр.91-96.

6. Отемуратов Б.П., Кутлымуратов Б. Об интегрируемых функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. // Узбекский математический журнал, 2014, №1, стр.56-63. (01.00.00; №6)

7. Отемуратов Б.П., Худайберганов Г. О рядах Лорана в пространстве $\mathbb{C}^n$. // Узбекский математический журнал, 2016, №3, стр.154-158. (01.00.00; №6)

8. Отемуратов Б.П., Худайберганов Г. Ряды Лорана для классических областей Картана. // Вестник НУУз. 2017. №2(1),с. 156-162 (01.00.00; №8)

9. Отемуратов Б.П. Голоморфное продолжение интегрируемых функций вдоль комплексных прямых в шаре. // Узбекский математический журнал, 2017, №2, стр.109-119. (01.00.00; №6)

10. Отемуратов Б.П. Об условиях голоморфного продолжения функций с границы области. // Известия ВУЗов. Математика., 2017, №9,с.48-53. (01.00.00; №22)

11. Отемуратов Б.П. On holomorphic continuation integrable functions of along finite families of complex lines in $n-$ circular domain. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2018. 11(1) p.91-96. (01.00.00; №59)

12. Отемуратов Б.П. О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения интегрируемых функций, заданных на границе области. // Вестник НУУз.Точные науки. №2(1) с.156. (01.00.00; №8)

13. Otemuratov B.P., Khudayberganov G., Rakhmanov U. Boundary Morera Theorem for The Matrix Ball of The Third Type. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics. 2018. 11(1) p.40-45. (01.00.00; №59)

14. Otemuratov B.P. A Multidimensional Boundary Analogue of Hartogs's Theorem on n-Circular Domains for Integrable Functions: 2 USUZCAMP, Urgench, Uzbekistan, August 8–12, 2017, pp 109-123(V.264). (3. Scopus. IF=0.31)

II бўлим (Часть II; Part II)

15. Kosbergenov S., Otemuratov B.P. Integrable functions with the Morera Property along complex lines. // Вестник КГУ, Нукус 2009, №2(3), стр. 3-5.

16. Косбергенов С., Отемуратов Б.П., Изетаева Г. О формуле Мартинелли-Бохнера с обобщенным ядром. // Вестник КГУ, Нукус, 2009, №3(4), стр. 3-6.

17. Отемуратов Б.П., Сапаров З. Псевдополиномиальное отображение Вейерштрасса одного класса голоморфного отображения.// Вестник КГУ,-Нукус. 2009. №1 стр.7-9.

18. Отемуратов Б.П., Кутлымуратов Б.Ж. Функции со свойством Морера на сфере Пуанкаре. // Материалы республиканской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Нукус 2009, 25-27 октябрь, стр.57-58.

19. Отемуратов Б.П. О функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных кривых. // Материалы республиканской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Нукус 2009, 25-27 октябрь, стр.58-60.

20. Отемуратов Б.П., Сапаров З. Вычисление полной суммы локальных вычетов в n мерном торе. // Материалы республиканской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», Нукус 2009, 25-27 октябрь, стр.62-64.

21. Отемуратов Б.П. Условие голоморфной продолжимости интегрируемых функций вдоль комплексных кривых. // Труды конференции Проблемы современной математики, Карши. 2011, 22-23 апрель. стр.204-205.

22. Отемуратов Б.П. Теоремы Морера для функций класса L^p в классических областях. // Материалы республиканской конференции Современные проблемы комплексного и функционального анализа, Нукус 2012., 11-12 май, стр.154-156.

23. Отемуратов Б.П. О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения интегрируемых функций. // Тезисы докладов Республиканской научной конференции Актуальные вопросы комплексного анализа, Ташкент 2013,19-21 сентябрь. стр. 93-94.

24. Отемуратов Б.П., Кутлымуратов Б. Об интегрируемых функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль семейств комплексных прямых. // Тезисы докладов Республиканской научной

конференции Актуальные вопросы комплексного анализа, Ташкент 2013,19-21 Сентябрь. стр 94-96.

25. Отемуратов Б.П., Худайберганов Г. Ряды Лорана относительно классических областей Картана третьего типа. // Abstract of republican scientific conference with participation of foreign scientists. Modern problems of dynamical systems and their applications, Tashkent, 2017, 1-3 may, p.48-50.

26. Otemuratov B.P. A multidimensional boundary analogue of Hartogs's theorem on n-circular domains. // Abstracts the second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics, Urgench, 2017. p.104-105.

27. Отемуратов Б.П. О голоморфном продолжении функций вдоль конечных семейств комплексных прямых в *n* круговой области. // Abstracts of the Uzbek-Israel scientific conference Contemporary problems in mathematics and physics, Tashkent, 2017, 6-10 October. p. 201-202.

28. Otemuratov B. On condition of holomorphic continuations of functions from a boundary of a domain. // Abstracts of the international conference Complex Analysis and its applications, Gelendzhik, 2018, 2-9 June.(http://confirent.ru/en/node/1731)

29. Отемуратов Б.П. Аналог многомерной граничной теоремы Гартогса в круговых областях для интегрируемых функций. // Abstracts of the international conference Mathematical analysis and its application to mathematical physics, Samarkand, 2018,17-20 September. p. 29-30.

30. Отемуратов Б.П. Об условиях голоморфного продолжения распределений с границы области.// Тезисы докладов Республиканской научной конференции «Актуальные вопросы методики и преподавания математики и информатики», Нукус, 2019, 18-19 декабрь, стр. 29-30.

31. Отемуратов Б.П. Аналог многомерной граничной теоремы Гартогса в круговых областях. // Материалы республиканской конференции «Актуальные проблемы и применения анализа», Карши, 2019, 4-5 октябрь. стр.30-31.