В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

КАРИМОВ ЭРКИНЖОН ТЎЛҚИНОВИЧ

КАСР ВА БУТУН ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ УЛАШ ШАРТЛИ ЧЕГАРАВИЙ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ
(DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шаҳри – 2020 йил

УДК: 517.95

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

КАРИМОВ ЭРКИНЖОН ТЎЛҚИНОВИЧ

КАСР ВА БУТУН ТАРТИБЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН ИНТЕГРАЛ УЛАШ ШАРТЛИ ЧЕГАРАВИЙ ВА ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DOCTOR OF SCIENCE) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент шахри – 2020 йил

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.3.DSc/FM145 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://mathinst.uz/kengash/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Салахитдинов Махмуд** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Турметов Батырхан Худайбергенович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Исломов Бозорбой физика-математика фанлари доктори, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Қаландарович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Ургенч давлат университети

Диссертация ҳимояси В.И. Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___» ___________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (99871) 262-75-44, факс: (99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (__________ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (99871) 262-75-44).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2020 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

Ў.А.Розиқов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.Қ. Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

А.Азамов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Каср тартибли дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни тадқиқ этишнинг жаҳон миқёсидаги долзарблигини кўрсатувчи белгилардан бири рейтинги юқори илмий журналларда бу йўналишга оид кўплаб изланишларнинг чоп этилаётгани бўлса, бошқа кўрсаткич илмий натижаларни амалиётга жорий этишга йўналтирилган илмий-амалий лойиҳалар сонининг ортиб боришидир. Ер ости сувларининг ҳаракати, материалларнинг аралаш таркибига оид кимёвий ва механик жараёнлар, аномал диффузия жараёнларининг математик моделлари ва бошқа турли амалий масалалар каср тартибли дифференциал ва интеграл ҳисобга оид тадқиқотларнинг татбиқ этиш объектларидир. Умумлаштириш характери ҳамда бундай тенгламалар учун тизимлаштирилган аналитик ва сонли ҳисоб усулларнинг камлиги бу йўналишни дифференциал тенгламалар умумий назариясининг тадқиқот олиб бориладиган энг долзарб йўналишларидан бири бўлишига сабаб бўлди.

Охирги йилларда каср тартибли диффузия-тўлқин тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларнинг ечилишига оид масалалар, бу борадаги илмий натижаларнинг амалий масалаларни математик моделлаштириш муҳим аҳамият касб этмоқда. Шунинг учун бу йўналишда мақсадли илмий лойиҳаларни амалга ошириш долзарб масаладир. Аниқроқ айтганда, қуйидаги илмий йўналишлар бўйича тадқиқотлар долзарблик касб этади: каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал шартли чегаравий масалалар; турли операторлар, хусусан, каср тартибли операторлар қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун манба-функцияни топишга оид тескари масалаларнинг бир қийматли ечилишига оид саволлар; каср тартибли тенгламалар ва уларнинг хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишга татбиқига боғлиқ махсус функцияларнинг хоссаларини ўрганиш масалалари. Юқорида айтилган йўналишлар бўйича олиб борилаётган тадқиқотлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигига асос бўлади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[1]. Хусусий ҳосилали тенгламалар, хусусан, диффузия-тўлқин тенгламалари учун турли тўғри ва тескари масалаларни ҳамда каср тартибли интегро-дифференциал операторлар ва уларнинг хоссалари, уларни умумлаштириш масалаларини тадқиқ қилишга оид илмий изланишлар дунёнинг йирик илмий марказлари ва университетларида олиб борилмоқда. Хусусан, Токио университети (Япония), Техас университети (АҚШ), Сантяго де Компостела университети (Испания), Гент университети (Бельгия), Ла-Рошель университети (Франция), Берлин озод университети, Бейт амалий фанлар

[1]Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи Fractional Calculus and Applied Analysis, https://www.degruyter.com/view/j/fca; Applied Mathematics and Computation, https://www.journals.elsevier.com/locate/amc; Journal of Mathematical analysis and Applications, https://www.journals.elsevier.com/locate/jmaa; Computers and Mathematics with Applications, https://www.journals.elsevier.com/locate/camwa ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

техника университети, Брауншвайг техника университети, Штутгарт университети, Берлин техника олий мактаби (Германия), Болония университети (Италия), математика ва информатика институти (Болгария), Порто муҳандислар институти (Португалия), Кошице техника университети (Словакия), Белорусь давлат университети (Белоруссия), Россия ФА Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти (Россия) даги ишлар аҳамиятга молик.

Турли каср тартибли операторлар қатнашган дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларга оид муҳим ишларга қисқа тўхталиб ўтамиз. Хусусан, бир нечта Капуто, Хилфер каср тартибли ҳосилалар қатнашган дифференциал тенгаламалар учун Коши масаласининг ечимлари топилган, улар билан боғлиқ махсус функцияларнинг хоссалари ўрганилган (Берлин озод университети, Бейт амалий фанлар техника университети, Германия), сингуляр бўлмаган ядроли каср тартибли дифференциал операторнинг хоссалари ўрганилган (Сантяго де Компостела университети, Испания), диффузия ва диффузия-тўлқин тенгламаларнинг сонли ечимлари қурилган (Болония университети, Италия; Брауншвайг техника университети, Германия; Кошица техника университети, Словакия), бир ва кўп ўзгарувчили каср тартибли тенгламалар учун бир туркум тўғри ва тескари масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган (Ла-Рошель университети, Франция), каср тартибли дифференциал тенгламалар учун экстремум принциплари ва уларнинг Капуто, Риман-Лиувилл ҳосилалари қатнашган диффузия тенгламалари учун тескари масалаларга татбиқи исботланган (Токио университети, Япония; Техас университети, АҚШ), Коши масаласининг Райт типидаги функция орқали ифодаланган фундаментал ечими топилган ва у ёрдамида Риман-Лиувилл, Джрбашян-Нерсесян, континуал тартибли ҳосилалар қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун қўйиладиган асосий чегаравий масалаларнинг Грин функцияларини қурилган (Белорус давлат университети, Белоруссия; Россия ФА Кабардин-Балкар илмий маркази амалий математика ва автоматлаштириш институти, Россия), сингуляр бўлмаган ядроли каср тартибли ҳосила билан боғлиқ ерости сувлари ҳаракатига оид математик моделлар ўрганилган (Чанкая университети, Туркия; Порто муҳандислар институти, Португалия).

Дунёнинг кўпгина мамлакатларида долзарб йўналишлар сифатида аналитик усулларни ривожлантирган ҳолда, сонли моделлар алгоритмларини мукаммаллаштириб табиатдаги реал жараёнларни аниқроқ ўзида акс эттирадиган математик моделлар тузиш бўйича илмий-амалий лойиҳалар амалга оширилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Каср тартибли ҳисоб назариясига оид дастлабки фундаментал тадқиқотлар B.Riemann, J.Liouville, Hj.Holmgren, А.В.Летников, A.Grünwald, Н.Я.Сонин, H.Weyl, М.М.Джрбашян, А.Б.Нерсесян ва бошқалар томонидан олинган. Турли каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қатнашган оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимининг топилиши каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга бўлган қизиқишни орттирди. Турли хилдаги каср тартибли ҳосилалар қатнашган диффузия ва диффузия-тўлқин тенгламалари учун фундаментал ечимларни топиш масалалари Schneider W.R., Wyss W., Fujita Y., Mainardi F., Геккиева С., Псху А.В., Лучко Ю. ва Gorenflo R. ишларида ўрганилган. Дюамель принципининг каср тартибли аналоги, стохастик дифференциал тенгламалар билан боғланган Фоккер-Планк-Колмогоров тенгламаларининг каср тартибли аналоглари С.Умаров томонидан тадқиқ этилган. Дж.Аманов, Б.Ж.Қодирқулов томонидан тўғри тўртбурчак соҳаларда юқори тартибли, каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган тенгламалар учун бир қанча тўғри ва тескари масалалар ўрганилган. Бундай тенгламалар учун экстремум принциплари Нахушева В.А., Лучко Ю., Yamamoto M., Liu Y. томонидан тадқиқ қилинган. А.В.Псху ишларида эса Грин функциялари усули ёрдамида Риман-Лиувилл оператори ва континуал ҳосилали шундай тенгаламалар учун асосий чегаравий масалалар ўрганилган.

Каср тартибли тенгламалар системасини ўрганиш борасида М.О.Мамчуев, D.Baleanu ишларини қайд этиш керак. Килбас А.А. ва Репин О.А. ишларида каср тартибли диффузия тенгламаси қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий масалалар тадқиқ қилинган.

Турли каср тартибли ҳосила қатнашган диффузия тенгламалари учун тескари масалалар Yamomoto M., Бондаренко А.Н. ва Ивашченко Д.С., Rundell W., Tatar S., Malik S.A. ишларида ўрганилган бўлса, кўп ўзгарувчили хусусий ҳосилали каср тартибли дифференциал тенгламалар учун тескари масалалар Kirane M., Tuan N.H. томонидан тадқиқ қилинган.

К.Б.Сабитов ва унинг шогирдлари томонидан бир туркум бутун тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тескари масалалар тадқиқ қилинган. Бир нечта Капуто, Адамар, Хилфер ҳосилалари қатнашган дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар Лучко Ю., Gorenflo R., Furati K.M., Malik S.A. ишларида ўрганилган.

Турметов Б.Х. ва унинг шогирдлари томонидан Адамар, Адамар-Маршо каср тартибли операторлар соҳа чегарасида қатнашган чегаравий масалалар, уларнинг хоссалари ва уларни умумлаштириш муаммолари ўрганилган.

Сингуляр бўлмаган ядрога эга бўлган янги каср тартибли ҳосилалар қатнашган тенгламаларни тадқиқ этиш бўйича M.Caputo, M.Fabrizio, J.J.Nieto, A.Atangana, D.Baleanu ишларини алоҳида эътироф этамиз.

Каср тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни сонли ечиш усуллари S.Momani, K.Diethelm томонидан ишлаб чиқилган бўлса, хусусий ҳосилали тенгламалар учун I.Podlubny, O.P. Agrawal, D.Baleanu, A.Ashyralyev томонидан тадқиқ қилинган.

Соболев типидаги тенгламалар учун тескари масалалар А.И.Кожанов ишларида ўрганилган бўлса, M. Yamamoto, С.Кабанихина ва A.Lorenzi тўлқин тарқалишининг квант назарияси, диффузия жараёнларига оид тескари масалаларни тадқиқ қилишган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон миллий университети қошидаги Математика институтининг Ф4-ФА-Ф010: «Сингулярликка эга хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ва эркин чегарали чизиқсиз масалалар» ва Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтидаги ОТ-Ф4-88 «Иккинчи ва юқори тартибли аралаш типдаги тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалар» мавзусидаги илмий тадқиқот ишлари режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади аралаш соҳаларда турли каср тартибли интегро-дифференециал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни тадқиқ этиш, Капуто ва Хилфер каср тартибли ҳосилалар қатнашган аралаш тенгламалар учун тескари масалалар билан боғлиқ бўлган икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер типидаги функцияларнинг хоссаларини ўрганишдан иборат. Қолаверса, уларнинг турли диффузион жараёнлар, ғовак соҳаларда ерости сувлари ҳаракати, газлар оқимига татбиқини аниқлаш.

Тадқиқотнинг вазифалари:

аралаш соҳаларда каср тартибли Капуто ва Риман-Лиувилл интегро-дифференциал операторлари қатнашган аралаш тенгламалар учун интеграл улаш шартли чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилишини тадқиқ қилиш;

Капуто, Риман-Лиувилл каср тартибли ҳосилалар ва гипер-бессел оператори қатнашган хусусий ҳосилали бузиладиган дифференциал тенгламалар учун номаълум манбали тескари масалаларни тадқиқ қилиш;

бир нечта каср тартибли операторлар қатнашган аралаш типдаги тенгламалар учун тескари масалаларнинг бир қийматли ечилиши шартларини аниқлаш;

Бессел оператори қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун чегаравий масалаларнинг регуляр ечилишини исботлаш;

каср тартибли диффузия тенгламаси қатнашган аралаш тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларни аралаш соҳаларда ечиш усулларини ишлаб чиқиш.

Тадқиқотнинг объекти Капуто, Риман-Лиувилл, Хилфер, гипер-бессел маъносидаги интегро-дифференциал операторлар, Миттаг-Леффлер типидаги функциялар, каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалалардир.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, математик физика, чизиқли операторларнинг спектрал назарияси, махсус функциялар, интеграл тенгламалар ва қаторлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

аралаш соҳаларда Капуто ва Риман-Лиувилл каср тартибли интеграл-дифференциал операторлар қатнашган аралаш тенгламалар учун интеграл улаш шартли нолокал чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган;

бир нечта Капуто оператори ва Бессел оператори қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларнинг регуляр ечилиши исботланган;

тўғри тўртбурчак ва характеристик учбурчаклардан ташкил топган аралаш соҳаларда каср тартибли диффузия тенгламаси қатнашган аралаш тенгламалар учун нолокал чегаравий масалаларнинг ечиш усули ишлаб чиқилган;

текис эллиптик ва Капуто операторлари қатнашган каср тартибли аралаш тенгламалар учун манба-функцияни аниқлаш ҳақидаги тескари масалаларининг кучсиз ечилиши исботланган;

каср тартибли Капуто ҳосиласи қатнашган аралаш тенглама учун манба-функцияни аниқлаш ҳақидаги нолокал тескари масаланинг бир қийматли ечилиши учун шартлар аниқланган;

Риман-Лиувилл каср тартибли ҳосиласи қатнашган диффузия-тўлқин тенгламаси учун қўйилган биринчи чегаравий масала Грин функцияси ҳамда икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер типидаги функцияларнинг турли каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларга татбиқ қилинган янги хоссалари исбот қилинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Тупроқдаги молекуляр диффузия, ғовак муҳитларда ерости сувлари ҳаракати, газлар оқимига боғланган аниқ мисолар келтирилган. Тенгламадаги турли параметрларнинг жараёнга таъсири таҳлил қилинган. Маълум Грин функция хоссаларидан фойдаланган ҳолда ўзгариш чизиғи силлиқ бўлмаган аралаш тенгламалар учун чегаравий масалаларни интеграл тенгламалар системасига келтириш усули модификацияланган. Мос спектрал масалаларнинг хос функциялар системасининг тўлалик ва базислик хоссаларидан фойдаланиб каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларнинг текис ва абсолют яқинлашувчи қаторлар кўринишидаги ечимлари олинган. Икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер функциялари ва Грин функциясининг исботланган янги хоссалари ёрдамида каср тартибли аралаш тенгламалар учун янги синфдаги масалалар тадқиқ этиш имконияти кенгайтирилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги каср тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш, Грин функцияси ва икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер типидаги функциялар хоссаларини ўрганиш ва уларни чегаравий масалаларни ечишга татбиқ этишда математик анализ, математик физика, махсус функциялар назарияси, диф-ференциал тенгламалар, чизиқли операторларнинг спектрал назарияси, интеграл тенгламалар ва қаторлар назарияси усулларини қўллаш билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ушбу ишда олинган илмий натижалардан каср тартибли дифференциал ва интеграл тенгламалар назарияси ҳамда махсус функциялар назариясида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган илмий натижаларнинг каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар орқали ифодаланувчи турли характердаги диффузия жараёнлари, хусусан, тупроқдаги молекуляр диффузия, ғовак муҳитларда ерости сувлари, газ ва кам сиқилувчан суюқликларнинг ҳаракатланиш жараёнларига татбиқ этилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

Аралаш соҳаларда каср тартибли аралаш тенгламалар учун тескари масалалар ечимларини Фурье-Бессель ва Фурье-Лежандр қаторларига ёйиб топиш усуллари ҳамда Миттаг-Леффлер типидаги функцияларнинг янги хоссаларидан фойдаланиб илмий лойиҳа масалалари тадқиқ этилган (Гент университетининг (Бельгия) ҳамда Математика ва математик моделлаштириш университетининг (Қозоғистон) 2020 йил 12 июндаги 01-06/98-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши гипоэллиптик ва субдиффузия тенгламалари учун тескари масалаларни берилан функцияларга аниқ шартлар асосида бир қийматли ечиш имконини берган;

Капуто оператори қатнашган аралаш тенглама учун ўрганилган тескари масалаларнинг кучсиз ва регуляр ечилишининг тадқиқ этиш усуллари яна бир хорижий грантда каср тартибли аралаш тенгламалар учун турли нолокал тескари масалаларни тадқиқ қилишда ишлатилган (Уммон султонлигининг Султон Қабус университетининг тегишли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши каср тартибли дифференциал тенгламалар учун нолокал шартли тескари масалаларни қўйиш ва уларнинг ечимларини абсолют ва текис яқинлашувчи қаторлар кўринишида ифодалаб ечиш имконини берган.

Иккита ўзгариш чизиғига эга бўлган каср тартибли аралаш тенглама учун интеграл улаш шартли нолокал чегаравий масалаларнинг тадқиқ этиш усули ҳамда гипер-бессел оператори қатнашган каср тартибли дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ечиш услуби хорижий илмий журналларда (Mathematics, 2020, 8:856; Mathematical Methods in Applied Sciences, 2019, 42(11), pp. 3865-3876; Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 468(1), pp.473-479; Differ. Equ. Dyn. Syst., 2017, https://doi.org/10.1007/ s12591-017-0378-2; Electronic Journal of Differential Equations, 2014, № 97, pp. 1-17; Electronic Journal of Differential Equations, 2015, № 221, pp. 1-10) ишлатилган. Илмий натижаларни қўллаш натижасида учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этишда, Капуто операторили дискрет параболик тенгламала учун чегаравий масалалар ҳамда гипер-бессел оператори қатнашган хусусий ҳосилали тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этишда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 15 илмий-амалий анжуманларда, жумладан, 8 та халқаро ва 7 та республика илмий - амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 35 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестатция комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 18 та мақола, жумладан, 14 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўрт боб, хулоса, илова ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Диссертациянинг ҳажми 207 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Битта ва иккита тип ўзгариш чизиғига эга бўлган аралаш тенгламалар учун интеграл улаш шартли чегаравий масалалар»** деб номланган 1-бобида Хилфер, Капуто ва Риман-Луивилл каср тартибли ҳосилалар қатнашган битта ва иккита тип ўзгариш чизиғига эга бўлган аралаш тенгламалар учун интеграл улаш шартли чегаравий масалалар тадқиқ қилинган. Улаш шартининг кўринишидан келиб чиқиб ўрганилаётган масалалар эквивалент тарзда ё иккинчи тур Вольтерра, ёки иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига келтирилган. Охирги ҳолатда эса масала ечими ягоналиги алоҳида исботланган. Бу эса улаш шартларининг аралаш тенгламалар учун қўйилган масалаларнинг бир қийматли ечилишида муайян рол ўйнашини кўрсатади.

Ω соҳада қуйидаги тенглама учун

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{0t}^{\alpha,\mu}u,\ t>0, \\ u_{xx}-u_{tt}, \quad\ t<0 \end{cases} \tag{1}$$

интеграл улаш шартли чегаравий масалани баён этамиз:

1-масала. *Шундай* $u(x,t)$, *функция топилсинки, у* $\overline{\Omega}\setminus AB$ *соҳада узлуксиз бўлсин;* $u_{xx}(x,t), u_{tt}(x,t)$ *ҳосилалар* Ω_2 *соҳада узлуксиз бўлсин;* $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha,\mu}u(x,t)$ *лар* Ω_1 *соҳада узлуксиз бўлсин;* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда (1) тенгламани қаноатлантирсин;қуйидаги чегаравий* $u(0,t)=u(1,t)=0, 0\le t\le 1$, $u(x/2,-x/2)=\psi(x), 0\le x\le 1$ *ҳамда улаш шартларини қаноатлантирсин:*

$$\lim_{t\to+0} t^{(1-\mu)(1-\alpha)}u(x,t)=u(x,-0), 0\le x\le 1,$$

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha}\left[t^{(1-\mu)(1-\alpha)}u(x,t)\right]_t=\gamma_1 u_t(x,-0)+\gamma_2\int_0^x u_t(z,-0)P(x,z)dz$$

$$+\gamma_3\int_x^1 u_t(z,-0)Q(x,z)dz, 0<x<1.$$

Бу ерда $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup AB$ - x ва t ўзгарувчиларнинг бир боғламли соҳаси,

$$AB=\{(x,t):0<x<1, t=0\},\ \Omega_1=\{(x,t):0<x<1, 0<t<1\},$$

$$\Omega_2=\left\{(x,t):-t<x<t+1,-\frac{1}{2}<t<0\right\},\ D_{0t}^{\alpha,\mu}f=I_{0t}^{\mu(1-\alpha)}\frac{d}{dt}I_{0t}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f(t)$$

- $\alpha(0<\alpha\le 1)$ тартибли ва $\mu(0\le\mu\le 1)$ типдаги Хилфер интегро-дифференциал оператори, $I_{0t}^{\alpha}f(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t\frac{f(z)dz}{(t-z)^{1-\alpha}}$ - $\alpha(\mathrm{Re}\,\alpha>0)$ тартибли Риман-Лиувилл каср тартибли интеграли, $\Gamma(\alpha)$ - Эйлер гамма-функцияси, $\psi(x),P(x,z),Q(x,z)$ - берилиш соҳаларида узлуксиз бўлган функциялар, $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in R$, шундайки $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3{}^2\ne 0$.

Қуйидаги ягоналик теоремаси ўринли:

1-теорема. *Агар* $\gamma_1>0$, $\gamma_2\ge 0,\gamma_3\ge 0$ *ва қуйидаги шартлар бажарилса*

$$\frac{\partial P(x,z)}{\partial z}=-P_1(x)P_1(z),\frac{\partial Q(x,z)}{\partial z}=-Q_1(x)Q_1(z),\ P(x,x)\ge 0,\ Q(x,x)\ge 0,$$

1-масала биттадан ортиқ ечимга эга эмас.

1-мисол. *Ушбу функция* $P(x,t)=\sin x\cos t,\ Q(x,t)=e^{-x}\left(1+e^{-t}\right)$ *1-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради.*

1-масаланинг ечими мавжудиги қуйидаги теоремада исботланган:

2-теорема. *Агар 1-теореманинг барча шартлари ҳамда*

$$P(x,t),Q(x,t)\in C([0,1]\times[0,1]),(\partial/\partial t)P(x,t),$$

$$(\partial/\partial t)Q(x,t)\in C([0,1]\times[0,1]),\psi(0)=0,\ \psi(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1),$$

шартлар бажарилса, 1-масаланинг ягона ечими мавжуд.

Бу ерда $\tilde{P}(\cdot,\cdot),\tilde{Q}(\cdot,\cdot),a_i,b_i,c_i\left(i=\overline{1,3}\right),\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ - шундай берилган функцияларки,

$$a_1^2+a_2^2\ne 0,a_1^2+a_3^2\ne 0,b_1^2+b_2^2\ne 0,b_1^2+b_3^2\ne 0,\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2+\tilde{\gamma}^2\ne 0,a_i^2+b_i^2+c_i^2\ne 0,i=1,2$$

Ушбу бобнинг давомида қуйидаги масала тадқиқ қилинган:

2-масала. *Шундай* $u(x,t)$ *функцияни топилсинки,*

1) $u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega_2}\right)\cap C^2(\Omega_2),\ {}_CD_{0t}^{\alpha}u\in C(\Omega_1),u_{xx}\in C(\Omega_1)$;

2) *қуйидаги тенгламани қаноатлантирсин:*

$$u_{xx}-\frac{1+\mathrm{sgn}\,t}{2}\,{}_CD_{0t}^{\alpha}u-\frac{1-\mathrm{sgn}\,t}{2}u_{tt}=0;$$

3) *қуйидаги нолокал чегаравий шартларни қаноатлантирсин:*

$$a_1(z)u(0,z)+b_1(z)u(z/2,-z/2)=c_1(z),\ 0\le z\le 1,$$

$$a_2(z)u(1,z)+b_2(z)u((z+1)/2,(z-1)/2)=c_2(z),\ 0\le z\le 1,$$

$$a_3(z)u(0,z)+b_3(z)u(1,z)=c_3(z),\ 0\le z\le 1;$$

4) $u(x,t)$ *қуйидаги улаш шартларини ҳам қонатлантирсин:*

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha}u_t(x,t)=\tilde{\alpha}u_t(x,-0)+\tilde{\beta}\int_0^x u_t(z,-0)\tilde{P}(x,z)dz+\tilde{\gamma}\int_x^1 u_t(z,-0)\tilde{Q}(x,z)dz,\ 0<x<1.$$

Бу ерда ${}_C D_{0t}^{\alpha} f=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_0^t \dfrac{f^{(n)}(z)}{(t-z)^{\alpha-n+1}}dz \quad \left(n=\left[\operatorname{Re}(\alpha)\right]+1,\ t>0\right)$

- α каср тартибли Капуто интегро-дифференциал оператори, $0<\alpha\le 1$, $\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ - берилган ҳақиқий сонлар, $\tilde{P}(x,z),\tilde{Q}(x,z)$, $a_i(z),b_i(z),c_i(z)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ - шундай берилган функцияларки,

$$\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2+\tilde{\gamma}^2\ne 0,\ a_1^2(z)+a_2^2(z)\ne 0, a_1^2(z)+a_3^2(z)\ne 0, b_1^2(z)+b_2^2(z)\ne 0,$$

$$b_1^2(z)+b_3^2(z)\ne 0, a_j^2(z)+b_j^2(z)+c_j^2(z)\ne 0,\ j=1,2.$$

Қуйидаги теоремалар ўринли:

3-теорема. *Агар қуйидаги шартлар бажарилса*

$$\tilde{P}(x,t)=\tilde{P}_1(x)\tilde{P}_2(t),\tilde{Q}(x,t)=\tilde{Q}_1(x)\tilde{Q}_2(t),$$

$$\frac{\tilde{\alpha}}{2}\overline{d_2}'(x)+\tilde{\beta}\overline{d_2}(x)\tilde{P}_1(x)\tilde{P}_2(x)-\tilde{\gamma}\overline{d_2}(x)\tilde{Q}_1(x)\tilde{Q}_2(x)\ge 0,\frac{\tilde{\beta}\tilde{P}_1(1)}{2\overline{d_2}(1)\tilde{P}_2'(1)}\le 0,$$

$$\frac{\tilde{\gamma}\tilde{Q}_1(0)}{2\overline{d_2}(0)\tilde{Q}_2'(0)}\le 0,\frac{d}{dx}\left[\frac{\tilde{\beta}\tilde{P}_1(x)}{2\overline{d_2}(x)\tilde{P}_2'(x)}\right]\ge 0,\frac{d}{dx}\left[\frac{\tilde{\gamma}\tilde{Q}_1(x)}{2\overline{d_2}(x)\tilde{Q}_2'(x)}\right]\le 0,$$

$a_1(z)b_2(z)c_3(z)\ne\pm a_2(z)a_3(z)b_1(z)$, $\tilde{P}_2'(x)$, $\tilde{Q}_2'(x)\ne 0$, $a_1(0)\ne -b_1(0)$, *у ҳолда 2-масала биттадан ортиқ ечимга эга бўла олмайди, бу ерда*

$$\overline{d_2}(z)=\frac{1+d_2(z)}{1-d_2(z)},\ d_2(z)=\frac{a_1(z)b_2(z)c_3(z)}{a_2(z)a_3(z)b_1(z)}.$$

4-теорема. *Агар 3-теореманинг барча шартлари ҳамда*

$$a_i(z),b_i(z),c_i(z)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\tilde{P}(x,z),\tilde{Q}(x,z),$$

$$\frac{\partial\tilde{P}(x,z)}{\partial z},\frac{\partial\tilde{Q}(x,z)}{\partial z}\in C\left([0,1]\times[0,1]\right)\cap C^1\left((0,1)\times(0,1)\right),$$

шартлар бажарилса, у ҳолда 2-масала бир қийматли ечилади.

1.3 ва 1.4 параграфларда иккита тип ўзгариш чизиғига эга, Капуто ва Риман-Лиувилл каср тартибли операторлар қатнашган аралаш тенглама учун интеграл улаш шартли чегаравий масалалар ўрганилган. Тадқиқ қилинаётган масалани бир қийматли ечилишидан ташқари улаш шартининг масаланинг ечиилишига таъсир кўрсатилган.

Энди қуйидаги тенгламани

$$g(x,y)=\begin{cases}u_{xx}(x,y)-{}_C D_{0t}^{\lambda}u(x,y),\ 0<\lambda<1,\ (x,y)\in\Delta_0,\\ u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y),\ (x,y)\in\Delta_i\ (i=1,2)\end{cases}\tag{2}$$

$\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup AA_0 \cup BB_0$. соҳада тадқиқ қиламиз. Бу ерда $g(x, y)$ - берилган функция, Δ_0 - учлари $A(0,0), B(1,0), B_0(1,1) A_0(0,1)$ нуқталар бўлган ABB_0A_0 тўғритўртбурчак, $\Delta_1(\Delta_2)$ - $x<0(x>1)$ да $AA_0(BB_0)$ кесма, (2) тенгламанинг $A_0C(B_0D)$ характеристикаси ҳамда $AC: x=-\gamma_1(y)\left[BD: x=-\gamma_2(y)\right]$ силлиқ чизиқ билан чегараланган соҳа.

(2) тенглама учун Δ соҳада қуйидаги масалани тадқиқ қиламиз:

3-масала. (2) тенгламанинг

$$W_1 = \left\{u(x,t): u \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta),\, u_{xx},\, {}_C D_{0t}^{\lambda} u \in C(\Delta_0), u \in C^2(\Delta_i)\right\}$$

функциялар синфига тегишли ва қуйидаги бошланғич $u(x,0)=0,\ 0 \le x \le 1,$

чегаравий $\left.(u_x - u_y)\right|_{AC} = 0,\ \left.(u_x + u_y)\right|_{BD} = 0,$ шартларни ҳамда улаш шартларини қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$u_x(-0, y) = \alpha_1 u_x(0+, y) + \beta_1 \int_0^y u_x(0+, t) Q_1(y,t)\, dt,\ \ 0<y<1,$$

$$u_x(1+0, y) = \alpha_2 u_x(1-0, y) + \beta_2 \int_0^y u_x(1-0, t) Q_2(y,t)\, dt.\ \ 0<y<1.$$

Бу ерда $\alpha_i, \beta_i\ (i=1,2)$ - берилган шундай ҳақиқий сонларки, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \ne 0$, $Q_i(y,t)(i=1,2)$ - берилган функциялар.

Қуйидаги теорема ўринли:

5-теорема. *Агар* $\alpha_i \ne 0\ (i=1,2)$ *ва*

$$g(x, y) \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta), Q_i(y,t) \in C([0,1]\times[0,1]) \cap C^1((0,1)\times(0,1))$$

шартлар бажарилса, у ҳолда 3-масала бир қийматли ечилади.

Энди 3-масаладан қуйидаги улаш шартлари билан фарқ қилувчи **4-масала**ни тадқиқ қиламиз:

$$u_x(0+, y) = \alpha_3 u_x(0-, y) + \beta_3 \int_y^1 u_x(0-, t) P_1(y,t)\, dt, 0<y<1, \tag{3}$$

$$u_x(1-0, y) = \alpha_4 u_x(1+0, y) + \beta_4 \int_y^1 u_x(1+0, t) P_2(y,t)\, dt, 0<y<1. \tag{4}$$

Бу ерда $\alpha_i, \beta_i\ (i=3,4)$ - шундай ҳақиқий сонларки, $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \ne 0$,

$P_i(y,t)(i=1,2)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Ушбу масалани (3), (4) улаш шартлари туфайли эквивалент тарзда иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламасига келтириб бўлмайди. Масала иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига келтирилади. Шу сабабли масала ечимининг ягоналиги алоҳида исботланади.

Қуйидаги ягоналик теоремаси исботланган:

6-теорема. *Айтайлик*

$$\alpha_j \ge 0, \beta_j \ge 0,\ P_i\left(y,t\right)=P_{i,1}\left(y\right)\cdot P_{i,2}\left(t\right),\ P_{i,2}\left(1\right)=0,$$

$$P_{i,1}\left(y\right)\cdot P_{i,2}\left(y\right)\le 0, \frac{P_{i,1}\left(0\right)}{P'_{i,2}\left(0\right)}\ge 0, \left(\frac{P_{i,1}\left(y\right)}{P'_{i,2}\left(y\right)}\right)'\ge 0\left(i=1,2,\ j=3,4\right).$$

У ҳолда, агар 4-масала ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

2-мисол. $P\left(y,t\right)=e^{y}\left(1-e^{1-t}\right)$ функция 6-теореманинг барча шартларини қаноатлантиради.

4-масаланинг ечими мавжудлиги ҳақида қуйидаги теорема исботланган:

7-теорема. *Агар* $\alpha_i \ne 0\left(i=3,4\right)$ *ва қуйидаги*

$$g\left(x,y\right)\in C\left(\overline{\Delta}\right)\cap C^{1}\left(\Delta\right),\ P_i\left(\cdot,\cdot\right)\in C\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right)\cap C^{1}\left(\left(0,1\right)\times\left(0,1\right)\right)\left(i=1,2\right)$$

шартлар бажарилса, у ҳолда 4-масаланинг ечими мавжуд бўлади.

Риман-Лиувилл каср тартибли ҳосила қатнашган тип ўзгариш чизиғи иккита бўлган аралаш тенглама учун нолокал чегаравий масала эквивалент равишда иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалар системасига келтирилган.

Диссертациянинг «**Учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган тенглама учун интеграл улаш шартли чегаравий масалалар**» 2-бобида тўғри тўртбурчак ва учта характеристик учбурчакдан иборат аралаш соҳаларда Капуто каср тартибли интегро-дифференциал оператори қатнашган аралаш тенглама учун нолокал шартли учта масала тадқиқ этилган.

2.1 параграфда учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган аралаш тенглама учун характеристиканинг турли қисмларини боғловчи Франкл типидаги шартли масала тадқиқ этилган. Масала эквивалент тарзда иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламасига келтирилган.

Қуйидаги тенгламани

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_{C}D_{0y}^{\lambda}u, & (x,y)\in\Phi_0, \\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in\Phi_i (i=\overline{1,3}) \end{cases} \tag{5}$$

$\Phi=\Phi_0\cup\Phi_1\cup\Phi_2\cup\Phi_3\cup AB\cup AA_0\cup AB_0$ аралаш соҳада тадқиқ этамиз.. Бу ерда $0<\lambda\le 1$, $\Phi_0=\left\{(x,y):0<x<1, 0<y<1\right\}$, Φ_1,Φ_2,Φ_3 - учлари $A,B,C;A,A_0,D;B,B_0,E$ нуқталарда бўлган характеристик учбурчаклар, $A(0,0),A_0(0,1)$, $B(1,0),B_0(1,1)$, $C(1/2,-1/2),D(-1/2,1/2)$, $E(3/2,1/2)$.

5-масала. *(5) тенгламанинг қуйидаги*

$$W_2=\left\{u(x,y): u\in C(\overline{\Phi}), u_{xx}, {}_{C}D_{0y}^{\lambda}u\in C(\Phi_0), u(x,y)\in C^{2}(\Phi_i), i=\overline{1,3}\right\},$$

функциялар синфига тегишли, биринчи тартибли $u_x\left(x,y\right)$ *ҳосиласи* $\Phi\setminus\Phi_1$ *да узлуксиз ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$a_1(t)u(t,-t)+a_2(t)u(-t,t)=a_3(t), 0\le t\le 1/2, \qquad u|_{CB}=\phi_1(x),\ 1/2\le x\le 1,$$
$$u|_{BE}=\phi_2(y),\ \ 0\le y\le 1/2,\ \lim_{y\to+0}{}_C D_{0y}^{\lambda}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,-0),\ \ 0<x<1,$$

бу ерда $a_i(\cdot),\phi_j(\cdot)(i=\overline{1,3}, j=1,2)$ - шундай берилган функцияларки $\phi_1(1)=\phi_2(0)$.

8-теорема. *Агар қуйидаги шартлар бажарилса:*

$$a_i(\cdot),\phi_2(\cdot)\in C^1[0,1/2]\cap C^2(0,1/2)\ ,\phi_1(\cdot)\in C^1[1/2,1]\cap C^2(1/2,1)\ ,$$

$\phi_1(1)=\phi_2(0),\ a_1(0)\ne -a_2(0),$ *у ҳолда 6-масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

3-мисол. 8-теорема шартларини қаноатлантирувчи $a_i(\cdot),\phi_2(\cdot)$ функцияларга мисол тарзида қуйидагиларни келтириш мумкин:

$$a_1(t)=\cos t,\ a_2(t)=\sin t,\ a_3(t)=t^2,\ \phi_1(x)=e^{x-1},\ \phi_2(y)=e^{y}.$$

2.2 параграф учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган аралаш тенглама учун характеристикаларда нолокал шартлар берилган чегаравий масаланинг ечимини топишга бағишланган. Махсус алгоритм ёрдамида масала ечими топилган.

6-масала. *(5) тенгламанинг* $u(x,y)\in C(\overline{\Phi})\cap C^1\left(\overline{\Phi}_j\right)\cap C^2(\Phi_j),\ j=\overline{1,3};\ {}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C\left(\Phi_0\right)$ *синфга тегишли,* $u_x\left(x,y\right)$ *ҳосиласи* $x=0,\ x=1$ *гача узлуксиз ҳамда*

$$\hat{a}_1\left(t\right)u\left(-t,t\right)+\hat{a}_2\left(t\right)u\left(t,-t\right)=\hat{a}_3\left(t\right),\ 0\le t\le\frac{1}{2},$$
$$b_1\left(t\right)u\left(t,t-1\right)+b_2\left(t\right)u\left(2-t,1-t\right)=b_3\left(t\right),\ \frac{1}{2}\le t\le 1,$$
$$c_1\left(t\right)\left(u_x+u_y\right)\left(t-1,t\right)+c_2\left(t\right)\left(u_x-u_y\right)\left(2-t,t\right)=c_3\left(t\right),\ \frac{1}{2}<t<1;$$

нолокал шартлар ва қуйидаги улаш шартларини қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$\lim_{y\to+0}{}_C D_{0y}^{\lambda}u(x,y)=\alpha_1 u_y(x,-0)+\beta_1\int_0^x u_y(z,-0)P_1(x,z)dz,\ 0<x<1,$$
$$u_x(+0,y)=\alpha_2 u_x(-0,y)+\beta_2\int_0^y u_x(-0,z)P_2(y,z)dz,\ 0<y<1,$$
$$u_x(1-0,y)=\alpha_3 u_x(1+0,y)+\beta_3\int_0^y u_x(1+0,z)P_3(y,z)dz,\ 0<y<1.$$

Бу ерда $P_i(\cdot,\cdot)$, $\hat{a}_i\left(t\right), b_i\left(t\right), c_i\left(t\right)\left(i=\overline{1,3}\right)$ - шундай берилган функцияларки,

$$\begin{gathered}\hat{a}_1\left(0\right)+\hat{a}_2\left(0\right)\ne 0, b_1\left(1\right)+b_2\left(1\right)\ne 0, \hat{a}_1^2\left(t\right)+\hat{a}_2^2\left(t\right)>0, b_1^2\left(t\right)+b_2^2\left(t\right)>0,\\ c_1^2\left(t\right)+c_2^2\left(t\right)>0, \hat{a}_1^2(t)+b_2^2(t)>0, \hat{a}_2^2(t)+b_1^2(t)>0,\end{gathered} \tag{6}$$

α_i,β_i - шундай берилган ҳақиқий сонларки $\alpha_i^2+\beta_i^2\ne 0$.

9-теорема. *Айтайлик (6) шарт бажарилган бўлсин. Агар* $P_i(\cdot,\cdot)$ *функция берилган соҳасида узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи бўлса ҳамда*

$\hat{a}_i(\cdot), b_i(\cdot), c_i(\cdot) \in C^1[\cdot] \cap C^2(\cdot)(i=\overline{1,3}),$ *бўлса, 6-масаланинг ягона ечими мавжуд.*

2.3 параграфда силлиқ чизиқлар билан чегараланган махсус соҳада учта тип ўзгариш чизиғига эга бўлган аралаш тенглама махсус улаш шартли нолокал масала тадқиқ қилинган. Масала эквивалент равишда иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламалар системасига келтирилган. Шу сабабдан масала ечимининг ягоналиги алоҳида тарзда энергия интеграллари орқали исботланган.

Айтайлик $\Phi^* \subset \mathbb{R}^2$- бир боғламли аралаш соҳа бўлиб, бунда $\Phi^* = \Phi_0^* \cup \Phi_i^* \cup AB \cup BC \cup AD\left(i=\overline{1,3}\right)$, бу ерда $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$, Φ_i^* - соҳа γ_i эгри чизиқ ва AB ($i=1$), BC ($i=2$), AD ($i=3$) кесма билан чегараланган соҳа. $\gamma_1: t=-\gamma_1(x), \gamma_1(0)=\gamma_1(1)=0$, $\gamma_2: x=-\gamma_2(t),$ эгри чизиқлар $\gamma_2(0)=\gamma_2(1)=0$, $\gamma_3: x=-\gamma_3(t)+1, \gamma_3(0)=\gamma_3(1)=0$ шартни қаноатлантиради ва тўлалигича мос характеристик учбурчаклар ичида ётади.

Бу параграфда қуйидаги тенглама тадқиқ этилган.

$$Lu = f\left(x,t\right), \tag{7}$$

бу ерда $Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0t}^{\lambda} u, \ (x,t) \in \Phi_0^*, 0<\lambda<1, \\ u_{xx} - u_{tt}, \quad (x,t) \in \Phi_i^* (i=\overline{1,3}). \end{cases}$

7-масала. *(7) тенгламанинг қуйидаги функциялар синфига тегишли* $W_3 = \left\{u : u(x,t) \in C(\overline{\Phi^*}), u_{xx}, {}_C D_{0t}^{\lambda} u \in C(\Phi_0^*), u(x,t) \in C^2(\Phi_i^*), i=\overline{1,3}\right\}$, *биринчи тартибли ҳосилалари эса* Φ_0^* *ва* $\Phi_i^*(i=\overline{1,3})$ *соҳаларнинг чегараларигача узлуксиз ва ушбу*

$$\left[u_x - u_t\right]\left(\theta_1(s)\right) = \sigma_1\left[u_x + u_t\right]\left(\theta_1^*(s)\right), 0<s<1,$$

$$\left[u_x - u_t\right]\left(\theta_2(s)\right) = \sigma_2\left[u_x + u_t\right]\left(\theta_2^*(s)\right), 0<s<1,$$

$$\left[u_x + u_t\right]\left(\theta_3(s)\right) = \sigma_3\left[u_x - u_t\right]\left(\theta_3^*(s)\right), 0<s<1;$$

нолокал шартларни қаноатлантирувчи ҳамда $u(A)=u(B)=0$ *шарт ва қуйидаги улаш шартларини қаноатлантирувчи ечими топилсин:*

$$\lim_{t\to+0} {}_C D_{0t}^{\lambda} u(x,t) = \widehat{\alpha}_1 u_t(x,-0) + \widehat{\beta}_1 \int_x^1 u_t(s,-0)\widehat{P}_1(x,s)ds,$$

$$u_x(+0,t) = \widehat{\alpha}_2 u_x(-0,t) + \widehat{\beta}_2 \int_t^1 u_x(-0,s)\widehat{P}_2(t,s)ds,$$

$$u_x(1-0,t) = \widehat{\alpha}_3 u_x(1+0,t) + \widehat{\beta}_3 \int_t^1 u_x(1+0,s)\widehat{P}_3(t,s)ds.$$

Бу ерда $\sigma_i, \widehat{\alpha}_i, \widehat{\beta}_i$ - берилган шундай ҳақиқий сонларки, $\widehat{\alpha}_i^2 + \widehat{\beta}_i^2 \neq 0$, $\widehat{P}_i(\cdot,\cdot)$ - берилган функциялар, $\theta_1(s), \theta_2(s), \theta_3(s)\left[\theta_1^*(s), \theta_2^*(s), \theta_3^*(s)\right]$ - мос ҳолда $\gamma_i(s)(i=\overline{1,3})$ эгри чизиқнинг (7) тенгламанинг $x-t=s$, $t-x=s$, $x+t=1+s$ $\left[x+t=s, x+t=s, t-x=1+s\right]$ характеристикалари билан кесишиш нуқталари аффикслари.

7-масаланинг бир қийматли ечилиши ҳақидаги қуйидаги теорема ўринли:

10-теорема. *Айтайлик* $\widehat{P}_i(t,s) = \widehat{P}_{i,1}(t)\cdot\widehat{P}_{i,2}(s), \widehat{P}_{j,2}(1)=0, i=\overline{1,3}, j=2,3$ *ва*

$$\frac{\widehat{\alpha}_2(1+\sigma_2)}{1-\sigma_2} \geq 0,\ \frac{\widehat{\beta}_2(1+\sigma_2)}{1-\sigma_2}\widehat{P}_{2,1}(t)\widehat{P}_{2,2}(t) \leq 0,$$

$$\frac{\widehat{\beta}_2(1+\sigma_2)}{2(1-\sigma_2)}\cdot\frac{\widehat{P}_{2,1}(0)}{\widehat{P}_{2,2}{}'(0)} \leq 0,\ \frac{\widehat{\beta}_2(1+\sigma_2)}{2(1-\sigma_2)}\cdot\left(\frac{\widehat{P}_{2,1}(t)}{\widehat{P}_{2,2}{}'(t)}\right) \leq 0, \frac{\widehat{\beta}_1(\sigma_1-1)}{2(\sigma_1+1)} \geq 0, \widehat{P}_{1,1}(x)\cdot\widehat{P}_{1,2}(x) \geq 0, \left(\frac{\widehat{P}_{1,1}(x)}{\widehat{P}_{1,2}{}'(x)}\right) \geq 0,$$

шартлар ҳамда қуйидаги шартлар ўринли бўлсин:

$$f(x,t),\ P_i(x,t) \in C\left([0,1]\times[0,1]\right)\cap C^1\left((0,1)\times(0,1)\right),$$

$$\frac{\widehat{\alpha}_3(\sigma_3-1)}{\sigma_3+1} \leq 0, \frac{\widehat{\beta}_3(\sigma_3-1)}{\sigma_3+1}\widehat{P}_{3,1}(t)\cdot\widehat{P}_{3,2}(t) \geq 0, \frac{\widehat{\beta}_3(\sigma_3-1)}{2(\sigma_3+1)}\frac{\widehat{P}_{3,1}(0)}{\widehat{P}_{3,2}{}'(0)} \geq 0, \frac{\widehat{\beta}_3(\sigma_3-1)}{2(\sigma_3+1)}\left(\frac{\widehat{P}_{3,1}(t)}{\widehat{P}_{3,2}{}'(t)}\right) \geq 0.$$

У ҳолда 7-масаланинг ягона ечими мавжуд бўлади.

Диссертациянинг «**Капуто каср тартибли ҳосилали аралаш тенгламалар учун тўғри тўртбурчак соҳаларда тескари масалалар**» деб номланган 3-бобида тўғри тўртбурчак соҳада Капуто каср тартибли интегро-дифференциал оператори қатнашган аралаш тенгламалар учун 4 та тескари масала тадқиқ этилган.

3.1 параграфда вақт бўйича Капуто ҳосилали аралаш тенглама учун фазовий ўзгарувчилар бўйича нолокал шартли тескари масала тадқиқ қилинган. Масала ечими биортогонал қатор кўринишида қидирилиб, якунда икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер функцияси орқали ифодаланади.

Қуйидаги каср тартибли аралаш тенгламани

$$f(x) = \begin{cases} {}_C D_{0t}^{\alpha} u - u_{xx},\ t>0, \\ {}_C D_{t0}^{\beta} u - u_{xx},\ t<0 \end{cases} \tag{8}$$

$\Lambda = \left\{(x,t): 0<x<1, -p<t<q\right\}.$ тўғри тўртбурчак соҳада тадқиқ этамиз. Бу ерда $\alpha, \beta, p, q \in R^+$, шундайки $0<\alpha\leq 1, 1<\beta\leq 2$, $f(x)$ - номаълум функция.

8-масала. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи* $\left\{u(x,t), f(x)\right\}$ *функциялар жуфти топилсин:*

i) $u(x,t)\in C\left(\overline{\Lambda}\right)\cap C_x^2\left(\Lambda^+\cup\Lambda^-\right), {}_C D_{0t}^{\alpha}u \in C\left(\Lambda^+\right), {}_C D_{t0}^{\beta}u \in C\left(\Lambda^-\right), f(x)\in C[0,1];$

ii) Λ^+ *ва* Λ^- *соҳаларда (8) тенгламани ва қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантиради:*

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=0,\ -p\le t\le q,\ u(x,-p)=\psi(x),\ u(x,q)=\phi(x),\ 0\le x\le 1;$$

iii) $\lim\limits_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\lim\limits_{t\to-0}{}_C D_{t0}^{\gamma}u(x,t),\ 0<x<1,$ *улаш шартини қаноатлантиради.*

Бу ерда $\Lambda^+=\Lambda\cap\{t>0\},\Lambda^-=\Lambda\cap\{t<0\},\gamma=const\in(0,1],\psi(x),\phi(x)$ - берилган шундай функцияларки, $\phi(0)=\phi(1)$, $\psi(0)=\psi(1)$.

8-масалани тадқиқ этишдан олдин икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер типидаги функциянинг айрим хоссасини ўрганилган:

$$E_1\begin{bmatrix} \gamma_1,\alpha_1;\gamma_2,\beta_1 & |x \\ \delta_1,\alpha_2,\beta_2;\delta_2,\alpha_3;\delta_3,\beta_3 & |y \end{bmatrix}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m}(\gamma_2)_{\beta_1 n}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_2 m+\beta_2 n)}\frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_3 m)}\frac{y^n}{\Gamma(\delta_3+\beta_3 n)},$$

Қуйидаги лемма ўринли:

1-лемма. *Агар* $y=x,\gamma_2=\delta_3=1,\beta_1=\beta_3,\lambda=\beta_2$ *бўлса, у ҳолда*

$$E_1\begin{pmatrix} \gamma_1,\alpha_1;\gamma_2,\beta_1 & |x \\ \delta_1,\alpha_2,\beta_2;\delta_2,\alpha_3;\delta_3,\beta_3 & |y \end{pmatrix}-yE_1\begin{pmatrix} \gamma_1,\alpha_1;\gamma_2,\beta_1 & |x \\ \delta_1+\lambda,\alpha_2,\beta_2;\delta_2,\alpha_3;\delta_3,\beta_3 & |y \end{pmatrix}=E^{\gamma_1,\alpha_1}_{\alpha_2,\delta_1;\alpha_3,\delta_2}(x),$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ерда

$$E^{\gamma_1,\alpha_1}_{\alpha_2,\delta_1;\alpha_3,\delta_2}(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_2 m)}\frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_3 m)}.$$

Масаланинг бир қийматли ечилиши қуйидаги теоремада исботланган:

11-теорема. *Айтайлик* $0<\gamma<1$. *Агар*

$$\phi(x),\psi(x)\in C^5[0,1],\phi^{(6)}(x),\psi^{(6)}(x)\in L_2(0,1),\phi(0)=\phi(1),\phi'(0)=0,$$

$$\phi''(0)=\phi''(1),\phi^{(4)}(0)=\phi^{(4)}(1),\psi(0)=\psi(1),\psi'(0)=0,\psi''(0)=\psi''(1),\psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(1),$$

шартлар бажарилса, у ҳолда 8-масаланинг ягона ечими мавжуд.

$\gamma=1$ бўлган ҳолатда улаш шарти

$$\lim_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t),\ 0<x<1$$

кўринишга ўтади ва бу ҳол алоҳида тадқиқ этилади. Масаланинг бу ҳолда ечиилиши қуйидаги теоремада ифодаланган:

12-теорема. *Агар қуйидаги шартлар ўринли бўлса*

$$\phi(x),\psi(x)\in C^5[0,1],\phi^{(6)}(x),\psi^{(6)}(x)\in L_2(0,1),\phi(0)=\phi(1),\phi'(0)=0,$$

$$\phi''(0)=\phi''(1),\phi^{(4)}(0)=\phi^{(4)}(1),\psi(0)=\psi(1),\psi'(0)=0,\psi''(0)=\psi''(1),\psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(1),$$

$$\Delta_0=p+\frac{p^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-\frac{q^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\neq 0,$$

$$\Delta_k=p^{\beta}E_{\beta,\beta+1}\left(-(2k\pi)^2p^{\beta}\right)+pE_{\beta,2}\left(-(2k\pi)^2p^{\beta}\right)-q^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-(2k\pi)^2q^{\alpha}\right)\neq 0,$$

8-масала ечими $\gamma=1$ *ҳолда ягона ечимга эга бўлади.*

4-мисол. Айтайлик $p=q=1,$ у ҳолда

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\neq\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+1\ \ (0<\alpha\le 1, 1<\beta\le 2) \tag{9}$$

бўлиб, маълум фактдан $\Delta_0\neq 0,\ \Delta_k\neq 0.$ бўлади.

3.2 параграфда вақт бўйича Капуто ва фазовий ўзгарувчи бўйича эса текис эллиптик оператор қатнашган аралаш тенглама тадқиқот объектига айланган. Бу тенглама учун манба функцияни аниқлашга оид тескари масалалар тадқиқ этилади ва уларнинг кучсиз ечилиши исбот қилинади. Ушбу тенгламани

$$f(x)=\begin{cases} {}_C D_{at}^{\alpha}u-\mathfrak{L}^{*}u,\ t>0,\\ u_{tt}-\mathfrak{L}^{*}u, \qquad t<0,\end{cases} \tag{10}$$

қуйидаги шартлар билан бирга тадқиқ этамиз:

$$\begin{cases} u(0,t)=u(1,t)=0, -p\le t\le q,\\ u(x,-p)=\psi(x), u(x,q)=\phi(x), 0\le x\le 1,\\ u(x,+0)=u(x,-0), 0\le x\le 1, \lim\limits_{t\to +0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u_t(x,-0),\ 0<x<1.\end{cases} \tag{11}$$

Бу ерда $\mathfrak{L}^{*}v=\dfrac{d^2v(z)}{dz^2}-g(z)v(z), 0<x<1$, $\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)=\left\{v\in H^2(0,1); v(0)=v(1)=0\right\}$

(10)-(11) масаланинг кучсиз ечимига таъриф берамиз.

1-таъриф. $u(x,t)$ функция (10)-(11) масаланинг кучсиз ечими дейилади, агар $t\in[-p,q]$ учун $f(x)\in L^2(0,1)$ ва $u(\cdot,t)\in\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)$,

$$\begin{aligned} &u\in C\left([-p,q];\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)\right), \frac{\partial u}{\partial t}\in C\left([-p,0]\cup(0,q];L^2(0,1)\right),\\ &{}_C D_{0t}^{\alpha}u\in C\left([0,q];L^2(0,1)\right), \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in C\left((-p,0);L^2(0,1)\right),\end{aligned} \tag{12}$$

бўлиб, қуйидаги тенгликлар ўринли бўлса:

$$\lim_{t\to -p}\left\|u(\cdot,t)-\psi\right\|_{\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)}=0,\ \lim_{t\to q}\left\|u(\cdot,t)-\phi\right\|_{\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)}=0,\ \lim_{|t|\to 0}\left\|{}_C D_{0t}^{\alpha}u(\cdot,t)-u_t(\cdot,t)\right\|_{L^2}=0, \tag{13}$$

$$\left({}_C D_{0t}^{\alpha}u,\eta\right)+\left(\mathfrak{L}^{*}u,\eta\right)=\left(f,\eta\right), t\in[0,q], \forall\eta\in\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right), \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\eta\right)+\left(\mathfrak{L}^{*}u,\eta\right)=\left(f,\eta\right), t\in(-p,0), \forall\eta\in\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right). \tag{15}$$

Бу ерда $\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)\equiv H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$.

9-масала. *(10), (12)-(15) ларни* $\Lambda^{*}=\left\{(x,t): 0<x<1, -p<t<q\right\}$ *соҳада қаноатлантирувчи* $\{u(x,t), f(x)\}$ *функциялар жуфти топилсин.*

Бу масала учун ягоналик теоремаси исботланган.

13-теорема. *Агар* $\Delta_k=E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k q^{\alpha}\right)-\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}p-\cos\sqrt{\lambda_k}p\neq 0$ *бўлса, у ҳолда 9-масаланинг формал ечими ягона.*

Бу ерда λ_k лар $\mathfrak{L}^*$ симметрик операторнинг хос қийматлари.

Қуйидаги тасдиқ ўринли:

2-лемма. *Барча етарлича катта k ва барча $p \in \mathbb{Q}^+$ лар учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўладики, $|\Delta_k| \geq \delta > 0$, тенгсизлик ўринли бўлади.*

3.3 параграф каср тартибли кичик ҳадларга эга аралаш тенглама учун тескари масалани ўрганишга бағишланган. Ўзгарувчиларни ажратиш усулини қўллаб масала ечими қатор кўринишида изланади. Кўп ҳадли каср тартибли дифференциал тенглама ечимиддан фойдаланиб тадқиқ этилаётган масала ечими икки ўзгарувчи кўп параметрли Миттаг-Леффлер типидаги функция билан ифодаланади.

Қуйидаги аралаш тенгламани

$$\frac{1+sgn(t)}{2}\left({}_C D_{0t}^{\alpha_1}u + \mu_1\, {}_C D_{0t}^{\beta_1}u\right) + \frac{1-sgn(t)}{2}\left({}_C D_{t0}^{\alpha_2}u + \mu_2\, {}_C D_{t0}^{\beta_2}u\right) - u_{xx} = f(x) \quad (16)$$

Λ соҳада қараймиз. Бу ерда $0 < \beta_1 \leq \alpha_1 \leq 1, 1 < \beta_2 \leq \alpha_2 \leq 2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

10-масала. *Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\{u(x,t), f(x)\}$, функциялар жуфтлиги топилсин:*

1) $u(x,t) \in C(\overline{\Lambda}), u_{xx} \in C(\Lambda^+ \cup \Lambda^-), {}_C D_{0t}^{\alpha_1}u \in C(\Lambda^+), {}_C D_{t0}^{\alpha_2}u \in C(\Lambda^-), \; f(x) \in C(0,1)$;

2) (16) тенгламани Λ^+ ва Λ^- соҳаларда қаноатлантиради;

3) ушбу чегаравий шартларни қаноатлантиради: $u(0,t) = u(1,t) = 0, -p \leq t \leq q,$

$$u(x,-p) = \psi(x),\; 0 \leq x \leq 1; \; {}_C D_{t0}^{\gamma}u(x,-p) = \varphi(x), 0 < x < 1, u(x,q) = \phi(x), \; 0 \leq x \leq 1.$$

Бу ерда $\Lambda^+ = \Lambda \cap \{t > 0\}$, $\Lambda^- = \Lambda \cap \{t < 0\}$, $\psi(x), \varphi(x)$ ва $\phi(x)$ - шундай берилган функцияларки, $\psi(0) = \psi(1) = \phi(0) = \phi(1) = 0$, $0 < \gamma \leq 1$.

10-масалани тадқиқ этиш учун икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер типидаги ушбу $E_{(\alpha-\beta,\alpha),\rho}(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{x^i y^{n-i}}{\Gamma(\rho+\alpha n-\beta i)}$ функциянинг айрим хоссалари ўрганилди.

Қуйидаги тасдиқ ўринли:

3-лемма. $1 < \beta < \alpha < 2$ *ва* $0 < \rho \leq 1$ *лар учун қуйидаги тенгликлар ўринли:*

$${}_C D_{t0}^{\rho}\left(tE_{(\alpha-\beta,\alpha),2}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta}, m_2(-t)^{\alpha}\right)\right) = (-t)^{1-\rho} E_{(\alpha-\beta,\alpha),2-\rho}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta}, m_2(-t)^{\alpha}\right),$$

$${}_C D_{t0}^{\rho}\left(E_{(\alpha-\beta,\alpha),1}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta}, m_2(-t)^{\alpha}\right)\right) = (-t)^{-\rho}\left[E_{(\alpha-\beta,\alpha),1-\rho}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta}, m_2(-t)^{\alpha}\right) - \frac{1}{\Gamma(1-\rho)}\right],$$

$${}_C D_{t0}^{\rho}\left((-t)^{\alpha} E_{(\alpha-\beta,\alpha),\alpha+1}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta}, m_2(-t)^{\alpha}\right)\right) = (-t)^{\alpha-\rho} E_{(\alpha-\beta,\alpha),\alpha+1-\rho}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta}, m_2(-t)^{\alpha}\right).$$

Масаланинг бир қийматли ечилишига оид қуйидаги теорема исботланган:

14-теорема. *Агар қуйидаги шартлар бажарилса*

$$\Delta_k = p^{1-\gamma}\left\{E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2}(..p..)\left[E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),1-\gamma}(..p..)-\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\right]-\right.$$

$$E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2-\gamma}(..p..)E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),1}(..p..)-\frac{p^{\alpha_2}E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),1}(..q..)}{q^{\alpha_1}E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1+1}(..q..)}\times$$

$$\left.\left[E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2}(..p..)E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),\alpha_2+1-\gamma}(..p..)+E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2-\gamma}(..p..)E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),\alpha_2+1}(..p..)\right]\right\}\neq 0,$$

$$\varphi(x),\phi(x),\psi(x)\in C^3[0,1]\cap C^4(0,1),\varphi(0)=\varphi(1)=0,\phi(0)=\phi(1)=0,\psi(0)=\psi(1)=0,$$

$$\varphi''(0)=\varphi''(1)=0,\phi''(0)=\phi''(1)=0,\psi''(0)=\psi''(1)=0,$$

10-масаланинг ечими мвжуд ва ягонадир.

Бу ерда қуйидаги қисқартмалар ишлатилган:

$$(..q..)=\left(-\mu_1 q^{\alpha_1-\beta_1},-(k\pi)^2 q^{\alpha_1}\right),\ (..p..)=\left(-\mu_2 p^{\alpha_2-\beta_2},-(k\pi)^2 p^{\alpha_2}\right).$$

Диссертациянинг “**Тўғри тўртбурчак соҳаларда каср тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларнинг айрим татбиқлари**” деб номланган охирги бобида ғовак муҳитларда газ ёки кам сиқилувчан суюқликларнинг оқиши, турли диффузион жараёнлар ҳамда еrости сувларининг ҳаракатини моделлаштиришда пайдо бўладиган тўғри ва тескари масалалар тадқиқ этилган.

4.1 параграфда гипер-бессел оператори ва Римана-Лиувилля, Капуто маъносидаги интегро-дифференциал операторлар қатнашган бузиладиган тенгламалар учун манба функцияни топишга оид тескари масалалар тадқиқ этилган. Бу масалалар тупроқдаги газ диффузияси билан боғланган. Тадқиқотнинг асосий усули Фурье ва Фурье-Лежандр қаторларини қўллашга асосланган.

Дастлаб диффузия коэффициенти вақтга эмас, фақат фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлган ҳолат қаралган. Бундан ташқари бу ерда кислород манбаси ҳам вақтга боғлиқ бўлмаслиги талаб қилинган. Қуйида тупроқдаги кислород коцентрацияси ҳамда кислород манбасини кузатувнинг бошланғич ва охириги моментида берилган маълумотлардан фойдаланиб топиш масаласини баён қиламиз:

11-масала. Қуйидаги тенгламани ${}_C D_{0t}^{\alpha} U(t,x)=\left[(1-x^2)U_x\right]_x+h(x)$

$\widehat{\Omega}=\{(t,x):-1<x<1,0<t<T\}$ соҳада қаноатлантирувчи ҳамда ушбу

$$U(0,x)=v(x),-1\le x\le 1,U(T,x)=w(x),-1\le x\le 1,$$

шартларни қаноатлантирувчи шундай $\{U(t,x),h(x)\}$ функциялар жуфтини топингки, U,U_x лар $x=-1,x=1$ да чегараланган бўлсин. Бу ерда $0<\alpha\le 1$, $T>0$ ва $v(x),w(x)$ - берилган функциялар.

Қуйидаги теорема ўринли:

15-теорема. *Агар* $v,w\in C^3(-1,1)$ *ва* $v^{(4)},w^{(4)}\in L_2(-1,1)$ *бўлса, у ҳолда 12-масаланинг ягона ечими мавжуд ва у қуйидаги кўринишда ифодаланади*

$$U\left(t,x\right)=\frac{t^{\alpha}}{T^{\alpha}}(w_0-v_0)+v\left(x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-E_{\alpha}\left(-\lambda_n t^{\alpha}\right)}{1-E_{\alpha}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)}(w_n-v_n)P_n(x),$$

$$h\left(x\right)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha}}(w_0-v_0)-\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)v'(x)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{w_n-v_n}{1-E_{\alpha}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)}P_n(x).$$

бу ерда $\lambda_n=n(n+1)$ ва

$$v_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}v(x)P_n(x)dx,\quad w_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}w(x)P_n(x)dx,\quad n=0,1,2,...$$

Масала ечимига оид аниқ мисол келтирилган, графиклар чизилиб тегишли таҳлил ўтказилган.

5-мисол. Айтайлик $v(x)=0,\quad w(x)=w_0+w_2(3x^2-1).$ У ҳолда 15-теоремага асосан, масала ечими ушбу кўринишга эга бўлади:

$$U(x,t)=w_0\frac{t^{\alpha}}{T^{\alpha}}+w_2\frac{1-E_{\alpha}(-6t^{\alpha})}{1-E_{\alpha}(-6T^{\alpha})}(3x^2-1),\ h(x)=w_0\frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha}}+\frac{6w_2(3x^2-1)}{1-E_{\alpha}(-6T^{\alpha})}.$$

Ечимлар графиги қуйидаги қийматларда чизилган: $w_0=1, w_2=-0.5,\quad T=1.$

Таҳлил: 4.1.2 графикда каср тартибнинг аниқ бир қийматида вақтнинг турли моментларида кислород концентрацияси ва манбасининг ўзгариши кўрсатилган. Графикдан кўринадики, вақт ўтган сари кислород концентрацияси ўсиб боради, манбаси эса деярли ўзгармайди. 4.1.3 графикда эса хотира эффектини (каср тартиб) кислород комбинациясига манбадан кўра камроқ таъсир қилиши кўрсатилган. Бундан ташқари, каср тартиб ўсиб боргани сари кислород конфентрацияси камайиб боради. Бундан кўринадики, математик моделда хотира эффекти ҳисобга олинса тупроқдаги кислород миқдори кўпроқ бўлади.

Диффузия коэффициенти ўзгармас бўлиб, манба функцияси вақтга боғлиқ бўлмаган ҳамда хотира эффектининг вақтга боғлиқ бўлган ҳолати ҳам қаралган. Кузатувнинг дастлабки ва охирги моментдаги маълумотга қараб тупроқдаги кислород коцентрацияси ва манбаси топилади.

12-масала. $\Omega^*=\left\{(x,t):0<x<\pi,\,0<t<T^*\right\}$ соҳада шундай $\left\{u(x,t),f(x)\right\}$ функциялар жуфтини топилсинки, $u(\cdot,t)\in C^2[0,\pi],$ $u(x,\cdot)\in C_{\mu}\left[0,T^*\right]$ ва $f(x)\in C\left[0,\pi\right]$, бўлиб, улар қуйидаги тенглама

$${}_C\left(t^{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\beta}u(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x),\qquad (x,t)\in\Omega^*,$$

ва ушбу чегаравий шартларни

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\ 0\le t\le T^*,\ u\left(x,0\right)=\psi(x),\quad u\left(x,T^*\right)=\phi(x),\ 0\le x\le\pi,$$

қаноатлантирсин. Бу ерда ϕ и ψ - берилган шундай функцияларки,

$$\psi(0)=\psi(\pi)=0,\quad \phi(0)=\phi(\pi)=0.$$

Бу ерда $0<\beta<1,\ \theta<1,\ {}^{C}\left(t^{\theta}\dfrac{d}{dt}\right)^{\beta} g(t)=(1-\theta)^{\beta}t^{-\beta(1-\theta)}I_{1-\theta}^{0,-\beta}\left(g(t)-g(0)\right)$

- Капуто типидаги гипер-бессел оператори,

$$I_{\omega}^{\gamma,\delta}g(t)=\frac{\omega}{\Gamma(\delta)}t^{-\omega(\gamma+\delta)}\int_{0}^{t}(t^{\omega}-\tau^{\omega})^{\delta-1}\tau^{\omega(\gamma+1)-1}g(\tau)d\tau,\ \ \delta>0,\omega>0,\ \gamma\in\mathbb{R}$$

- Эрдейи-Кобер оператори, $C_{\mu}:=\left\{g(x)=x^{p}g(x);\,p>\mu,g\in C[0,\infty)\right\},\mu\geq\theta-1$

- узлуксиз функцияларнинг махсус юкли синфи.

12-масаланинг бир қийматли ечилишига оид ушбу теорема ўринли:

16-теорема. *Фараз қилайлик,* $\psi(x),\phi(x)\in C^{2}[0,\pi]$, $\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(\pi)=\phi^{(i)}(0)=\phi^{(i)}(\pi)=0,\ (i=0,2)$ *ва* $\psi'''(x),\phi'''(x)\in L_{2}(0,\pi)$, *У ҳолда 12-масаланинг ягона ечими мавжуд.*

Бу ҳолатда ҳам аниқ мисол келтирилиб тегишли графиклар чизилган ҳамда таҳлил ўтказилган.

6-мисол. Айтайлик $\psi=0,\quad \phi(x)=\sin x.$ У ҳолда 16-теоремага асосан ечим ушбу кўринишда топилади:

$$u(x,t)=\frac{1-E_{\beta,1}\left(-\dfrac{1}{(1-\theta)^{\beta}}t^{(1-\theta)\beta}\right)}{1-E_{\beta,1}\left(-\dfrac{1}{(1-\theta)^{\beta}}T^{*(1-\theta)\beta}\right)}\sin x,\ \ f(x)=\frac{1}{1-E_{\beta,1}\left(-\dfrac{1}{(1-\theta)^{\beta}}T^{*(1-\theta)\beta}\right)}\sin x.$$

Графиклар $T^{*}=1$ учун чизилган.

Таҳлил. Каср тартиб (β) ва хотира эффектининг вақтга махсус боғлиқлиги (t^{θ}) фиксирланган. 4.1.4 графикдан кўриниб турибдики, вақт ўтиши билан кислород концентрацияси ортиб боряпти, унинг манбаси эса деярли ўзгаришсиз қоляпти. 4.1.5 фигура шуни кўрсатадики, агар вақт (t) ва хотира эффектининг вақтга махсус боғлиқлигии (t^{θ}) фиксирланса, у ҳолда каср тартибнинг ўсиб бориши (каср тартибнинг бутун тартибга яқинлашиб бориши) билан кислороднинг концентрацияси ва манбаси камайиб боради. Қайд этиш керакки, каср тартибнинг турли қийматларида манбанинг ўзгариши сезиларлидир. Агар каср тартиб 0 га яқинлашса, концентрациянинг қиймати кескин фарқ қилади. Бу таббий, чунки бу ҳолатда жараённи ифодаловчи тенгламанинг типи катта фарқ қилади. 4.1.6 фигурада вақтга махсус боғлиқ хотира эффекти (t^{θ}) нинг вақт (t) ва каср тартиб (β) фиксирланган ҳолатидаги концентрация ва манбага таъсири ифода этилган. Бу ерда шуни айти керакки, вақтга махсус боғланган хотира эффекти кислород концентрацияси ($u(x,t)$) ва манбаси ($f(x)$) га акс таъсир кўрсатган. Бу эса айнан шу параметрнинг моделда иштирок этиши муҳим.

Сўнгра диффузион коэффициент вақтгагина боғлиқ бўлган, манба функция эса фақатгина фазовий координатага боғлиқ бўлган ҳолат ўрганилди. Бу моделда ҳам каср тартибли ҳосилани ишлатиш билан хотира эффекти эътиборга олинди. Кузатув давридаги бошланғич ҳамда охирги моментлардаги кислород концентрацциясидаги миқдорига қараб, тупроқдаги кислород концентрацияси ва манбалари аниқловчи тескари масала тадқиқ этилди.

13-масала. Қуйидаги тенгламанинг

$$ {}_{RL}D_{0t}^{\alpha}\bar{u}(t,x) = t^{\rho}\bar{u}_{xx}(t,x) + \bar{h}(x), \tag{17} $$

$\Omega = \left\{(t,x): 0 < x < 1,\, 0 < t < \bar{T}\right\}$ соҳадаги регуляр ечими бўлган ҳамда ушбу шартларни қаноатлантирувчи $\left\{\bar{u}(x,t), \bar{h}(x)\right\}$ функциялар жуфти топилсин:

$$ \bar{u}(t,0) = 0, \bar{u}(t,1) = 0, 0 \le t \le \bar{T},\ I_{0t}^{1-\alpha}\bar{u}(t,x)\Big|_{t=0} = \bar{\varphi}(x), 0 \le x \le 1,\ \bar{u}(\bar{T},x) = \bar{\psi}(x), 0 \le x \le 1. $$

Бу ерда $\alpha, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$, шундайки $0 < \alpha < 1, \bar{\beta} \ge 0$, $I_{0t}^{1-\alpha}(\cdot)$ - Римана- Лиувилл каср тартибли интеграли, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$ - берилган шундай функцияларки, $\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(1) = \bar{\psi}(0) = \bar{\psi}(1) = 0$.

2-таъриф. (17) тенгламанинг Ω соҳадаги регуляр ечими деганда, ушбу функциялар синфига тегишли

$$ \bar{W} = \left\{ t^{1-\alpha}\bar{u}(t,x) \in \bar{\Omega},\ {}_{RL}D_{0t}^{\alpha}\bar{u}(t,x) \in \Omega,\ \bar{u}_{xx}(t,x) \in \Omega,\ \bar{h}(x) \in C[0,1] \right\} $$

ва (17) тенгламани Ω соҳада қаноатлантирувчи $\left\{\bar{u}(x,t), \bar{h}(x)\right\}$ функциялар жуфтини тушунамиз.

13-масаланинг формал ечими ушбу кўринишга эга:

$$ \bar{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\bar{\varphi}_k t^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}-1}{\alpha}}\left(-(k\pi)^2 t^{\alpha+\bar{\beta}}\right) + \frac{\bar{h}_k}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}}\left(-(k\pi)^2 t^{\alpha+\bar{\beta}}\right) \right]\sin k\pi x, $$

$$ \bar{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\bar{T}^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}}\left(-(k\pi)^2 \bar{T}^{\alpha+\bar{\beta}}\right)} \left[\bar{\psi}_k - \bar{\varphi}_k \bar{T}^{\alpha-1} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}-1}{\alpha}}\left(-(k\pi)^2 \bar{T}^{\alpha+\bar{\beta}}\right) \right]\sin k\pi x. $$

Бу ерда

$$ E_{\alpha,m,n}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+n)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+n+1)+1)} z^k \tag{18} $$

- умумлашган Миттаг-Леффлер функцияси, бу ерда $\alpha, n \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{R}$, шундайки $\Re(\alpha) > 0, m > 0, \alpha(jm+n) \notin \mathbb{Z}^{-}(j \in \mathbb{N}_0)$.

7-мисол. Айтайлик $\bar{\psi}(x) = \sin \pi x,\ \bar{\varphi}(x) = 0.$ У ҳолда ечим қуйидагича бўлади:

$$ \bar{u}(t,x) = \frac{t^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}}\left(-\pi^2 t^{\alpha+\bar{\beta}}\right)}{\bar{T}^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}}\left(-\pi^2 \bar{T}^{\alpha+\beta}\right)} \sin \pi x, \quad \bar{h}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\bar{T}^{\alpha} E_{\alpha, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}, 1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}}\left(-\pi^2 \bar{T}^{\alpha+\beta}\right)} \sin \pi x. $$

Таҳлил. 4.1.7 фигурада каср тартиб (α) ва диффузия коэффициентининг вақтга боғлиқлиги ($\bar{\beta}$) фиксирланган пайтда вақт ўтиши билан кислород концентрацияси камайиб, манба ўзгаришсиз қолаётганини кўриш мумкин. 4.1.8 фигурада эса вақт (t) ва диффузия коэффициентнинг вақтга боғлиқлик даражаси $(\overline{\beta})$ фиксирланган каср тартибнинг ўзгариб бориши кислород концентрацияси ва манбасининг ўзгаришига қандай таъсир қилиши кўрсатилган. Каср тартибнинг ўсиб бориши билан концентрация ўсиб бориши, манба эса аксинча камайиб бориши кўрсатилган. 4.1.9 фигурада вақт (t) ва каср тартиб (α) фиксирланиб, вақтга боғлиқ диффузия коэффициенти $(\overline{\beta})$ ўзгариб бориши билан концентрация ва манбанинг қандай ўзгариши кўрсатилган. Охирги икки графиклардан каср тартиб ва диффузия коэффициентининг вақтга боғлиқлик даражасини концентрация ва манбага акс таъсир қилишини кўриш мумкин Тупроқнинг хотира эффектини ҳисобга олиш, бошқача қилиб айтганда каср тартибли тенглама ишлатиш тупроқдаги кислород концентрациясини аниқроқ ҳисоблаш имконини беради.

4.2 параграфда тадқиқот объекти ер ости сувларининг ҳаракатини ифодаловчи математик моделларда ишлатиладиган, турли каср тартибли интегро-дифференциал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар бўлди. Фурье ва Фурье-Бессель қаторлари ёрдамида бу тенгламалар учун ҳам тўғри, ҳам тескари масалалар тадқиқ қилинган.

Қуйидаги тенгламани

$$ {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u(x,t) + \lambda\, {}_C D_{0t}^{\tilde{\beta}} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{1}{x} u_x(x,t) - \frac{\nu^2}{x^2} u(x,t) + \tilde{f}(x,t) \qquad (19) $$

$\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ соҳада қарайлик, бу ерда $0 \le \tilde{\beta} \le \tilde{\alpha} \le 1,\ \nu, T > 0$, ${}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u$ - Капуто оператори.

Айтайлик $f(x,t)$ - берилган функция бўлсин. (19) тенглама учун тўғри масала қуйидагича баён этилади:

14-масала. (19) тенгламани Ω соҳада қаноатлантирувчи шундай $u(x,t)$ функция топилсинки, у қуйидаги

1. регулярлик шартлари $u, u_{xx}, {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u \in C(\Omega), \int_0^1 \sqrt{x}\, |u(x,t)|\, dx < +\infty;$
2. чегаравий шартлар $\lim_{x \to 0} x u_x(x,t) = 0, u(1,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1.$

ни қаноатлантирсин.

Айтайлик $f(x,t) = g(x)$ - номаълум функция. Ушбу ҳолатда (19) тенглама учун тескари масала қуйидагидан иборат:

15-масала. Шундай $\{u(x,t), g(x)\}$ функциялар жуфти топилсинки, у

1. қуйидаги регулярлик шартларин $u, u_{xx}, {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u \in C(\Omega), \int_0^1 \sqrt{x}\, |u(x,t)|\, dx < +\infty;$
2. Ω соҳада ушбу тенгламани

$$ {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u(x,t) + \lambda\, {}_C D_{0t}^{\tilde{\beta}} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{1}{x} u_x(x,t) - \frac{\nu^2}{x^2} u(x,t) + g(x), $$

3. ушбу чегаравий шартларни

$$\lim_{x\to 0} xu_x(x,t)=0, u(1,t)=0,\ u(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le 1,\ u(x,T)=\phi(x),\ 0\le x\le 1.$$

қаноатлантирсин. Бу ерда $\psi(x),\phi(x)$ - шундай берилган функцияларки,

$|\psi(0)|<+\infty, |\phi(0)|<+\infty,\ \psi(1)=0, \phi(1)=0.$

Асосий натижалар ушбу теоремалар кўринишида берилган:

17-теорема. *Агар* $f(x,t)$ - x *бўйича тўрт марта дифференциаллановчи;*

$f(0,t)=f'(0,t)=f''(0,t)=f'''(0,t)=0, f(1,t)=f'(1,t)=f''(1,t)=0$*;* $\dfrac{\partial^4 f(x,t)}{\partial x^4}$ *- чегараланган;* $f(x,t)$ *-* t *бўйича ёпиқ соҳада узлуксиз ва очиқ соҳада узлуксиз дифференциаллановчи бўлса, у ҳолда 14-масаланинг ечими мавжуд ва ягона ҳамда ушбу кўринишга эга:* $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t z^{\tilde{\alpha}-1}E_{(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta},\tilde{\alpha}),\tilde{\alpha}}\left(-\lambda z^{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}},-\gamma_n^2 z^{\tilde{\alpha}}\right)f_n(t-z)dz\right]J_\nu\left(\gamma_n x\right).$

18-теорема. *Агар* $\psi(x)$ *и* $\phi(x)$ *-тўрт марта дифференциалланувчи;*

- $\psi(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\psi'''(0)=0, \psi(1)=\psi'(1)=\psi''(1)=0$*;*
- $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=\phi'''(0)=0, \phi(1)=\phi'(1)=\phi''(1)=0$*;*
- $\psi^{(4)}(x)$ *и* $\phi^{(4)}(x)$ *- чегараланган ва* $E_{(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta},\tilde{\alpha}),1+\tilde{\alpha}}\left(-\lambda T^{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}},-\gamma_n^2 T^{\tilde{\alpha}}\right)\neq 0,$

шартлар бажарилса, у ҳолда 15-масаланинг ягона ечими мавжуд.

Иккита Хилфер оператори қатнашган ушбу тенгламани

$$D_{0t}^{\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1}u(t,x)+\tilde{\mu}D_{0t}^{\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2}u(t,x)-u_{xx}(t,x)=\tilde{g}(x) \qquad (20)$$

$\Omega=\{(t,x):0<t<T, 0<x<1\}$ соҳада тадқиқ этамиз. Бу ерда $\tilde{\alpha}_i,\tilde{\beta}_i (i=1,2), \mu, T$ - шундай берилган ҳақиқий сонларки, $T>0, 0<\tilde{\alpha}_2<\tilde{\alpha}_1\le 1, 0\le\tilde{\beta}_i\le 1$.

16-масала $\{u(t,x),g(x)\}$ функциялар жуфтини топишдан иборатки, у

$$W_2=\left\{u(t,x):I_{0t}^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}u\in C(\overline{\Omega}), D_{0t}^{\alpha_1,\beta_1}u\in C(\Omega),\ u_{xx}\in C(\Omega); g(x)\in C[0,1]\right\}$$

функциялар синфига қарашли бўлиб, Ω соҳада (19) тенгламани ҳамда ушбу шартларни қаноатлантирсин:

$$u(t,0)=u(t,1)=0, 0\le t\le T,\ \lim_{t\to+0} I_{0t}^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}u(t,x)=0,\ 0\le x\le 1\ \ (i=1,2),$$

$$u(T,x)=\tilde{\phi}(x), 0\le x\le 1.$$

Бу ерда $\tilde{\phi}(x)$ - шундай берилган функцияки, $\tilde{\phi}(0)=\tilde{\phi}(1)=0$.

Қуйидаги теорема ўринли:

19-теорема. *Агар*

$$T^{\tilde{\alpha}_1-1}E_{(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_1),\tilde{\alpha}_1+1}\left(-\tilde{\mu}T^{\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2},-(k\pi)^2T^{\tilde{\alpha}_1}\right)\neq 0.$$

$$\tilde{\phi}(x)\in C^2[0,1], \tilde{\phi}'''(x)\in L_2(0,1), \tilde{\phi}(0)=\tilde{\phi}(1)=\tilde{\phi}''(0)=\tilde{\phi}''(1)=0,$$

шартлар бажарилса, у ҳолда 16-масаланинг ечими мавжуд ва ягона.

4.3 параграф Римана-Лиувилл оператори қатнашган тўлқин-диффузия ва тўлқин тенгламаларини ўз ичига олган аралаш тенглама тадқиқ қилинган. Бу масала бевосита ғовак муҳитларда газ ёки кам сиқилувчан суюқлик оқишига оид жараён билан боғланган. Грин функцияси усули ҳамда Райт типидаги функция хоссаларидан фойдаланиб, тадқиқ этилган масала эквивалент тарзда иккинчи тур Вольтерра интеграль тенгламасига келтирилган.

Ушбу тенгламани

$$u_{xx}(t,x)-H(a-x)D_{0+}^{\gamma_1}u(t,x)-\left[1-H(a-x)\right]D_{0+}^{\gamma_2}u(t,x)=f(t,x) \qquad (21)$$

$\Pi=\Pi_1\cup J\cup\Pi_2$ соҳада қараймиз, бу ерда $\Pi_1=\left\{(t,x):0<x<a,0<t<T\right\}$, $\Pi_2=\left\{(t,x):a<x<b,0<t<T\right\}$, $J=\left\{(t,x):x=a,0<t<T\right\}$, $1<\gamma_1\le 2,\ 0<\gamma_2\le 1$, $H(\cdot)$ - Хевисайд функцияси, D_{0+}^{γ} - Риман-Луивилл маъносидаги γ каср тартибли ҳосила.

17-масала. (21) тенгламанинг Π соҳадаги шундай регуляр ечими топилсинки, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$u(t,0)=\varphi_0(t),\ u(t,b)=\varphi_b(t),0<t<T,\ \lim_{t\to 0^+}D_{0+}^{\gamma_1-k}u(t,x)=\psi_k(x),k=\{1,2\},0<x<a,$$

$$\lim_{t\to 0^+}D_{0+}^{\gamma_2-1}u(t,x)=\psi_3(x),\ a<x<b,\ I_{0+}^{2-\gamma_1}u(t,a^-)=I_{0+}^{1-\gamma_2}u(t,a^+),0\le t\le T,$$

$$u_x(t,a^-)=u_x(t,a^+)+\lambda u_t(t,a^+)+\mu\int_0^t u_x(z,a^+)P(z,a^+)dz,0<t<T.$$

Бу ерда λ,μ - берилган ҳақиқий сонлар, $P(t,x),\varphi_0(t),\varphi_b(t),\psi_i(x)$ - берилган функциялар $\left(i=\overline{1,3}\right)$, $D_{0+}^{-\gamma}u(\cdot)=I_{0+}^{\gamma}u(\cdot),\ \gamma>0$.

3-таъриф. (21) тенгламанинг Π соҳадаги регуляр ечими деганда қуйидаги функциялар синфига тегишли

$$W_3=\left\{u(t,x):t^{2-\gamma_1}u(t,x)\in C\left(\overline{\Pi}_1\right),t^{1-\gamma_2}u(t,x)\in C\left(\overline{\Pi}_2\right),\right.$$

$$\left.u_{xx}(t,x)\in C\left(\Pi_1\cup\Pi_2\right),D_{0+}^{\gamma_1}u(t,x)\in C\left(\Pi_1\right),D_{0+}^{\gamma_2}u(t,x)\in C\left(\Pi_2\right)\right\},$$

ва (21) тенгламани $\Pi_1\ \cup\ \Pi_2$ соҳада қаноатлантирувчи $u(t,x)$ функцияни тушунамиз.

20-теорема. *Айтайлик, $\gamma_1\ge 1+\gamma_2$. Агар $\lambda\ne 0$ ва қуйидаги шартлар бажарилса*

$$t^{2-\gamma_1}\varphi_0(t)\in C[0,T],t^{1-\gamma_2}\varphi_b(t)\in C[0,T],\varphi_0(t)\in C^1[0,T],\varphi_b(t)\in C^1[0,T],$$

$$\psi_1(x)\in C[0,a],\psi_2(x)\in C[0,a],\psi_3\in C[a,b],$$

$$t^{2-\gamma_1}f(t,x)\in C(\overline{\Pi}_1),t^{1-\gamma_2}f(t,x)\in C(\overline{\Pi}_2)$$

ҳамда $f(t,x)$ функция x бўйича Гельдер шартини қаноатлантирса, у ҳолда 17-масаланинг ягона регуляр ечими мавжуд бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши аралаш соҳаларда турли типдаги каср тартибли дифференциал операторлар қатнашган хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни ҳамда Капуто ва Хилфер каср тартибли ҳосила қатнашган аралаш тенгламалар учун тескари масалалар билан боғланган махсус функцияларнинг хоссаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқот натижалари қуйидагича:

1. Риман-Лиувилля каср тартибли ҳосила қатнашган диффузия-тўлқин тенгламаси учун биринчи чегаравий масала Грин функциясининг айрим хоссалари, ҳамда турли типдаги хусусий ҳосилали тенгламалар учун тўғри ва тескари масалаларни тадқиқ қилишда ишлатилган икки ўзгарувчили Миттаг-Леффлер типидаги функцияларнинг янги хоссалари исботланган. Олинган натижалар бундай тенгламаларни мураккаброқ соҳаларда ўрганиш ҳамда юқори тартибли тенгламалар учун чегаравий масалаларни тадқиқ этишда ишлатилади.
2. Берилган функция ва параметрларга маълум шартлар асосида Капуто каср тартибли операторили аралаш тенгламалар учун интеграл улаш шартли нолокал масалаларнинг бир қийматли ечилиши ҳақидаги теоремалар исботланган. Олинган натижалар бутун тартибли тенгламалар учун олинган олдинги натижаларни умумлаштиради ҳамда аралаш-қўшма типдаги тенгламалар учун янги синфдаги масалаларни тадқиқ қилишга имкон беради.
3. Капуто, Хилфер, текис эллиптик ва Бессел операторлари қатнашган турли типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бир қатор локал ва нолокал тўғри ва тескари масалаларнинг корректлиги исботланди. Олинган натижалар диффузия-тўлқин жараёнлари, ғовак муҳитдаги ерости сувлари ҳаракатига оид конкрет математик моделларда ишлатилиши мумкин. Бундан ташқари, олинган натижалар аралаш тенгламалар учун тескари масалаларга асос бўлиб хизмат қилиши мумкин.
4. Тупроқлардаги молекуляр диффузия, ғовак муҳитлардаги газ оқими, ер ости сувларининг ҳаракатига боғланган тескари масалаларга яққол мисоллар келтирилди Моделлаштирилаётган жараёнларга моделнинг асосий тенгламасининг турли параметрларининг таъсири таҳлил қилинди.
5. Диссертация ишининг усул ва натижалари каср тартибли дифференциал ва интеграл тенгламалар, математик физика тенгламалрига оид тадқиқотларда ишлатилиши мумкин. Ҳамда «Математика» мутахассислиги бўйича таҳсил олаётган талабаларга махсус курслар ўқишда фойдаланилиши мумкин.

Барча олинган асосий натижалар янги ва каср тартибли ҳосилали аралаш тенгламалар назариясига муҳим ҳисса қўшади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

КАРИМОВ ЭРКИНЖОН ТУЛКИНОВИЧ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКОВ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

г. Ташкент – 2020 год

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.3.DSc/FM145

Диссертация выполнена в институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.
Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу http://mathinst.uz/kengash/ и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Салахитдинов Махмуд** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Турметов Батырхан Худайбергенович** доктор физико-математических наук, профессор
	Исломов Бозорбой доктор физико-математических наук, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Қаландарович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _________ 2020 г. в _______ часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Института математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (99871) 262-75-44, факс: (99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер ______). (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81. Тел.: (99871) 262-75-44).

Автореферат диссертации разослан «___» _________ 2020 г.
(протокол рассылки № ___ от «___» _________ 2020 г.)

У.А.Розиков
Председатель научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

А.Азамов
Председатель научного семинара при научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Одним из показателей актуальности исследований прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка в мировом уровне является появляющиеся многочисленные публикации по этой тематике в рейтинговых научных журналах, а также возрастающее число научно-практических проектов, посвященных изучению различных применений в практике. Математические модели процессов по движению течений подземных вод, химические и механические процессы, связанные со свойствами композитных материалов, аномальные диффузионные процессы и другие практические задачи являются предметами применений результатов исследований по дифференциальным и интегральным исчислениям дробного порядка. В силу обобщающегося характера, а также сравнительно малое количество систематизированных аналитических и числовых методов для таких уравнений, делают это направление одним из приоритетных для исследований направлений общей теории дифференциальных уравнений.

В последние годы исследования вопросов разрешимости прямых и обратных задач для диффузионно-волновых уравнений дробного порядка, а также, применения полученных научных результатов в моделировании практических задач играют важную роль. Поэтому реализация целевых научных исследований по данной тематике является одним из актуальных задач. А именно, являются актуальными научные исследования по следующим направлениям: исследование прямых задач с нелокальными условиями для уравнений в частных производных дробного порядка; изучение вопросов однозначной разрешимости обратных задач идентификации функции источника для уравнений в частных производных с различными операторами, в том числе дробного порядка; изучение свойств специальных функций, связанных с решениями дифференциальных уравнений дробного порядка и их применения в решении различных краевых задач для уравнения в частных производных. Проводимые научные исследования по вышеуказанным направлениям являются обоснованием актуальности темы данной диссертации.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[1] . Научные исследования различных прямых и обратных краевых задач для уравнений в частных производных, включая диффузионно-волновые уравнения, а также изучение свойств специальных функций, операторов дробного интегро-дифференцирования и их обобщений, ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: университете Токио (Япония), университете Техаса (США), университете

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Fractional Calculus and Applied Analysis, https://www.degruyter.com/view/j/fca; Applied Mathematics and Computation, https://www.journals.elsevier.com/locate/amc; Journal of Mathematical analysis and Applications, https://www.journals.elsevier.com/locate/jmaa; Computers and Mathematics with Applications, https://www.journals.elsevier.com/locate/camwa, также были использованы и другие источники.

Сантьяго-де-Компостела (Испания), университет Гент (Бельгия), университете Ла-Рошель (Франция), Свободном университете Берлина, техническом университете прикладных наук Бейта, Брауншвейгском техническом университете, университете Штутгарта, Берлинской высшей школе техники (Германия), Болонском университете (Италия), институте математики и информатики (Болгария), институте инженерии Порто (Португалия), техническом университете Кошице (Словакия), Белорусском государственном университете (Белоруссия), Институте прикладной математики и автоматизации, Кабардино-Балкарском научном центре Российской академии наук (Россия).

Отметим наиболее важные результаты по исследованиям прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений с различными операторами дробного порядка. В частности, построены решения задачи Коши для дифференциальных уравнений с несколькими дробными производными Капуто, Хилфера различного порядка, исследованы свойства специальных функций, связанных с этими задачами (Свободный университет Берлина, технический университет прикладных наук Бейта, Германия), изучены свойства дифференциального оператора дробного порядка с несингулярным ядром (Университет Сантьяго-де-Компостела, Испания), построены численные решения для диффузионных и диффузионно-волновых уравнений (Брауншвейгский технический университет, Германия; Болонский университет, Италия; Технический университет в Кошице, Словакия), доказаны однозначная разрешимость ряда прямых и обратных задач для уравнений дробного порядка с двумя и многими переменными (Университет Ла-Рошель, Франция), доказаны принципы экстремума для дифференциальных уравнений дробного порядка и применены к обратным задачам для диффузионных уравнений с производной Капуто и Римана-Лиувилля (университет Токио, Япония, университет Техаса, США), построены фундаментальные решения в терминах специальной функции типа Райта, найдены решения задачи Коши, с помощью фундаментальных решений построены функции Грина и решены основные краевые задачи для уравнений в частных производных с интегро-дифференциальными операторами Римана-Лиувилля, Капуто, Джрбашяна-Нерсесяна, дробных операторов континуального порядка (Белорусский государственный университет, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарскоого научного центра Российской академии наук), исследованы математические модели течений подземных вод, связанные с операторами дробного порядка с несингулярным ядром (университет Чанкая, Турция, институт инженерии Порто, Португалия).

Во многих странах мира в последние годы как приоритетные направления реализуются научно-практические проекты по созданию математической модели, более точно отражающей реальные процессы и исследования локальных и нелокальных граничных задач развивая аналитические методы; по созданию устойчивых алгоритмов численных моделей.

Степень изученности проблемы. Первоначальные фундаментальные вклады в теорию дробного исчисления сделали B.Riemann, J.Liouville, Hj.Holmgren, А.В.Летников, A.Grunwald, Н.Я.Сонин, H.Weyl, М.М.Джрбашян, А.Б.Нерсесян и др. После нахождении решений задач Коши для обыкновенных дифференциальных дробного порядка с различными операторами интегро-дифференцирования, возрос интерес к изучению уравнений в частных производных дробного порядка. Фундаментальные решения для диффузионно-волновых уравнений с различными операторами дробного дифференцирования исследованы в работах Schneider W.R., Wyss W., Fujita Y., Mainardi F., Геккиевой С., Псху А.В., Лучко Ю. и Gorenflo R. Дробный аналог принципа Дюамеля, а также дробные аналоги уравнений Фоккер-Планк-Колмогорова, ассоциированные со стохастическими дифференциальными уравнениями исследованы С.Умаровым. Амановым Дж. и Кадиркуловым Б.Ж. исследованы различные прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка с дробными операторами дифференцирования разного типа в прямоугольных областях. Изучению принципов экстремума для таких уравнений проводились Нахушевой В.А., Лучко Ю., Yamamoto M., Liu Y. В работах Псху А.В. методом функции Грина исследованы основные краевые задачи для диффузионного уравнения с производной Римана-Лиувилля и для уравнений континуального порядка.

По изучению систем уравнений с дробными производными отметим работы Мамчуева М.О., Baleanu D. В работах Килбаса А.А. и Репина О.А. исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа с диффузионным уравнением дробного порядка.

Обратные задачи для диффузионных уравнений с различными производными дробного порядка исследованы в работах Yamomoto M., Бондаренко А.Н. и Ивашченко Д.С., Rundell W., Tatar S., Malik S.A. Обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка со многими переменными исследованы Kirane M., Tuan N.H.

Сабитов К.Б. и его учениками были исследованы обратные задачи для серии уравнений смешанного типа целого порядка. Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с несколькими производными Капуто, Адамара, Хилфера исследованы Лучко Ю., Gorenflo R., Furati K.M., Malik S.A.

Б. Турметовым и его учениками изучены вопросы разрешимости краевых задач с граничными операторами дробного порядка в смысле Адамара, Адамара-Маршо, а также их обобщения.

По исследованиями новых дифференциальных операторов дробного порядка с несингуляным ядром важные результаты получены M.Caputo, M.Fabrizio, J.J.Nieto, A.Atangana, D.Baleanu.

Методы численных решений задач для обыкновенных уравнений дробного порядка разработаны в работах S.Momani, K.Diethelm, а для уравнений в частных производных дробного порядка - в работах I.Podlubny, O.P. Agrawal, D.Baleanu, A.Ashyralyev.

Обратные задачи для уравнений соболевского типа исследована в работах А.И.Кожанова, а в работах M. Yamamoto, С.Кабанихина и A.Lorenzi исследованы обратные задачи квантовой теории распространения волн, процессов диффузии.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно- исследовательских работ Ф4-ФА-Ф010: «Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с сингулярными особенностями и нелинейные задачи со свободной границей» ИМ НУУз и ОТ-Ф4-88 «Исследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков» ИМ АН РУз.

Целью исследования является исследование прямых и обратных задач для уравнения в частных производных разного типа с различными операторами дробного дифференцирования в смешанных областях, изучение свойств функции Миттаг-Леффлера от двух переменных, связанные с обратными задачами для смешанных уравнений с производными дробного порядка Капуто и Хилфера. А также, их применения в различных диффузионных процессах, моделирование движений подземных вод, течений газа в пористых средах.

Задачи исследования:

доказательство однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральными условиями сопряжения для смешанных уравнений с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто и Римана- Лиувилля в смешанных областях;

исследование обратных задач функции источника для вырождающиеся дифференциальных уравнений в частных производных с дробными производными Капуто, Римана-Лиувилля и с оператором гипер-бесселя;

определение условий однозначной разрешимости обратных задач функции источника для смешанных уравнений с несколькими операторами дробного порядка;

доказательство регулярной разрешимости краевых задач для уравнений в частных производных с дробными производными и операторами Бесселя;

разработка способов решения нелокальных краевых задач для смешанных уравнений, содержащих уравнение диффузии дробного порядка в смешанных областях.

Объектом исследования являются операторы интегро-дифференциро-вания дробного порядка в смысле Капуто, Римана-Лиувилля, Хилфера, гипер-бесселя, функции типа Миттаг-Леффлера, уравнения в частных производных дробного порядка.

Предметом исследования являются прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных различными операторами дробного порядка.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, дифференциальных уравнений, математической физики, спектральной теории линейных операторов, теория специальных функций, интегральных уравнений и рядов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость нелокальных задач с интегральными условиями сопряжения для смешанных уравнений с оператором дробного интегро-дифференцирования в смысле Капуто и Римана-Лиувилля в смешанных областях;

доказана регулярная разрешимость прямых и обратных задач для уравнений в частных производных с несколькими операторами Капуто и оператором Бесселя;

разработан способ решения нелокальных краевых задач для смешанных уравнений, содержащее уравнение диффузии дробного порядка в смешанной области, содержащей прямоугольник и характеристические треугольники;

доказана слабая разрешимость обратных задач идентификации источника для смешанного уравнения дробного порядка с операторами Капуто и равномерно эллиптическим оператором;

определены условия разрешимости нелокальной обратной задачи функции источника для смешанных уравнений с дробной производной Капуто;

доказаны новые свойства функции Грина первой краевой задачи для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля, а также функций типа Миттаг-Леффлера от двух переменных, которые успешно применены в исследованиях прямых и обратных задач функции источника для уравнений в частных производных с различными операторами дробного интегро-дифференцирования.

Практические результаты исследования. Приведены примеры конкретных задач, связанные с молекулярной диффузией в почвах, движение подземных вод, а также с течением газа в пористых средах. Анализированы влияния различных параметров уравнения в процесс. Модифицирован метод редукции краевых задач для смешанных уравнений типа с негладкой линией изменения типа к системе интегральных уравнений с использованием свойств соответствующих функций Грина. Использованы свойства полноты и базистности корневых функций соответствующих спектральных задач, позволяющий получить решения прямых и обратных задач для уравнений в частных производных дробного порядка в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда. С помощью доказанных новых свойств функции Грина и функций типа Миттаг-Леффлера от двух переменных расширен возможность рассмотрения новых классов задач для смешанных уравнений дробного порядка.

Достоверность результатов исследования. Достоверность решения прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных разного типа с различными дифференциальными операторами дробного порядка, изучения свойств функции Грина и функций типа Миттаг-Леффлера от двух переменных и их применения к решениям краевых задач обоснованы методами математического анализа, дифференциальных уравнений, теории специальных функций, математической физики, спектральной теории линейных операторов, интегральных уравнений, теории рядов.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка, в исследованиях свойств специальных функций.

Практическое значение диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов в изучении диффузионных процессов различного характера, в частности, молекулярной диффузии в почвах, движения подземных вод, газа и малосжимаемой жидкости в пористых средах, описываемых при помощи уравнений в частных производных дробного порядка.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

- используя предложенный способ представления решений обратных задач через ряды Фурье-Бесселя, Фурье-Лежандра, а также новые свойства функций типа Миттаг-Леффлера, исследованы задачи научных проектов (соответствующая справка №01-06/98 от 12.06.2020 г. из института математики и математического моделирования, Казахстан и университета Гент, Бельгия). Применение этих научных результатов позволило при определенных условиях на заданные функции, доказать однозначной разрешимости обратных задач для уравнений гипоэллиптической и субдиффузии;

- метод исследования слабой и регулярной разрешимости обратных задач для смешанных уравнений с операторами Капуто были использованы при исследованиях обратных задач в зарубежных грантах (соответствующая справка из университета Султан Кабус). Применение этих научных результатов дало возможность формулировки и решения ряда нелокальных обратных задач для смешанных уравнений дробного порядка, представляя решения в виде равномерно и абсолютно сходящиеся бесконечных рядов;

- предложенный способ исследования нелокальных краевых задач с интегральным условием сопряжения для смешанных уравнений дробного порядка с двумя линиями изменения типа, а также способ решения прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с оператором гипер-бесселя были использованы в зарубежных научных журналах (Mathematics, 2020, 8:856; Mathematical Methods in Applied Sciences, 2019, 42(11), pp. 3865-3876; Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2018, 468(1), pp.473-479; Differ. Equ. Dyn. Syst., 2017, https://doi.org/10.1007/s12591-017-0378-2; Electronic Journal of Differential Equations, 2014, № 97, pp. 1-17; Electronic Journal of Differential Equations, 2015, № 221, pp. 1-10). Использование научных результатов послужило исследованию краевых задач для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка, краевых задач для разностного параболического уравнения с оператором Капуто, а также краевых задач для уравнений в частных производных с оператором гипер-бесселя.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 15 научно-практических конференциях, в том числе на 8 международных и 7 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего 35 научных работ, из них 18 научных статей, в том числе опубликованы 14 в зарубежных и 4 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 207 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении приведены обоснования актуальности и востребованности темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Краевые задачи с интегральным условием сопряжения для смешанных уравнений с одной и двумя линиями изменения типа»**, исследуется краевые задачи с интегральными условиями сопряжения для смешанных уравнений с одной и двумя линиями изменения типа с операторами дробного интегро-дифференцирования Хилфера, Капуто и Римана-Лиувилля. При этом в зависимости от формы условия сопряжения, задачи эквивалентно приведены либо к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, либо сведены к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, причем в последнем случае, отдельно доказана единственность решения задач. Это показывает определенное влияние условий сопряжения в исследованиях к разрешимости краевых задач для смешанных уравнений.

В области Ω для следующего уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-D_{0t}^{\alpha,\mu}u, & t>0, \\ u_{xx}-u_{tt}, & t<0 \end{cases} \tag{1}$$

сформулируем краевую задачу с интегральным условием сопряжения:

Задача 1. *Найти функцию* $u(x,t)$, *которая непрерывна в* $\overline{\Omega}\setminus\overline{AB}$; *производные* $u_{xx}(x,t), u_{tt}(x,t)$ *непрерывны в* Ω_2; $u_{xx}(x,t)$, $D_{0t}^{\alpha,\mu}u(x,t)$ *непрерывна в* Ω_1 *;удовлетворяет уравнению (1) в областях* Ω_1 *и* Ω_2*; удовлетворяет краевым условиям* $u(0,t)=u(1,t)=0, 0\le t\le 1$, $u(x/2,-x/2)=\psi(x), 0\le x\le 1$ *и условиям сопряжения* $\lim\limits_{t\to+0} t^{(1-\mu)(1-\alpha)}u(x,t)=u(x,-0), 0\le x\le 1,$

$$\lim_{t\to+0} t^{1-\alpha}\left[t^{(1-\mu)(1-\alpha)}u(x,t)\right]_t=\gamma_1 u_t(x,-0)+\gamma_2\int_0^x u_t(z,-0)P(x,z)dz$$

$$+\gamma_3\int_x^1 u_t(z,-0)Q(x,z)dz, 0<x<1.$$

Здесь $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup AB$ - односвязная область плоскости переменных x и t, где

$$AB=\{(x,t):0<x<1, t=0\},\ \Omega_1=\{(x,t):0<x<1, 0<t<1\},$$

$$\Omega_2=\left\{(x,t):-t<x<t+1,-\frac{1}{2}<t<0\right\},\ D_{0t}^{\alpha,\mu}f=I_{0t}^{\mu(1-\alpha)}\frac{d}{dt}I_{0t}^{(1-\mu)(1-\alpha)}f(t)$$

- интегро-дифференциальный оператор Хилфера порядка $\alpha\left(0<\alpha\le 1\right)$ и типа $\mu\left(0\le\mu\le 1\right)$, где $I_{0t}^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int\limits_{0}^{t}\frac{f\left(z\right)dz}{\left(t-z\right)^{1-\alpha}}$ - интегральный оператор Римана-Лиувилля порядка $\alpha\left(\mathrm{Re}\alpha>0\right)$, $\Gamma\left(\alpha\right)$ - известная гамма-функция Эйлера, $\psi\left(x\right), P\left(x,z\right), Q\left(x,z\right)$ - заданные непрерывные функции в своих областях определения, а $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\in R$, такие что $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3{}^2\ne 0$

Имеет место следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Если* $\gamma_1>0,\gamma_2\ge 0,\gamma_3\ge 0$ и *справедливы условия*

$$\frac{\partial P\left(x,z\right)}{\partial z}=-P_1\left(x\right)P_1\left(z\right),\frac{\partial Q\left(x,z\right)}{\partial z}=-Q_1\left(x\right)Q_1\left(z\right),\ P(x,x)\ge 0,\ Q(x,x)\ge 0,$$

то задача 1 не имеет более одного решения.

Пример 1. *Например,* $P\left(x,t\right)=\sin x\cos t,\ Q\left(x,t\right)=e^{-x}\left(1+e^{-t}\right)$ *удовлетворяют всем условиям теоремы 1.*

Существование решения задачи 1 обеспечено следующей теоремой:

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1 и*

$$P(x,t),Q(x,t)\in C\left([0,1]\times[0,1]\right),\left(\partial/\partial t\right)P(x,t),$$

$$\left(\partial/\partial t\right)Q(x,t)\in C\left(\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\right),\psi(0)=0,\ \psi(x)\in C^1[0,1]\cap C^2(0,1),$$

тогда существует единственное решение задачи 1.

Далее, в этой главе исследована следующая

Задача 2. Найти функцию $u\left(x,t\right)$ которая

1) $u\left(x,t\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega_2}\right)\cap C^2\left(\Omega_2\right),{}_C D_{0t}^{\alpha}u\in C\left(\Omega_1\right),u_{xx}\in C\left(\Omega_1\right)$;

2) удовлетворяет уравнению

$$u_{xx}-\frac{1+\mathrm{sgn}\,t}{2}\,{}_C D_{0t}^{\alpha}u-\frac{1-\mathrm{sgn}\,t}{2}u_{tt}=0;$$

3) удовлетворяет нелокальным краевым условиям

$$a_1\left(z\right)u\left(0,z\right)+b_1\left(z\right)u\left(z/2,-z/2\right)=c_1\left(z\right),\ 0\le z\le 1,$$

$$a_2\left(z\right)u\left(1,z\right)+b_2\left(z\right)u\left((z+1)/2,(z-1)/2\right)=c_2\left(z\right),\ 0\le z\le 1,$$

$$a_3\left(z\right)u\left(0,z\right)+b_3\left(z\right)u\left(1,z\right)=c_3\left(z\right),\ 0\le z\le 1;$$

4) $u\left(x,t\right)$ также удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{t\to+0}t^{1-\alpha}u_t\left(x,t\right)=\tilde{\alpha}u_t\left(x,-0\right)+\tilde{\beta}\int\limits_{0}^{x}u_t\left(z,-0\right)\tilde{P}\left(x,z\right)dz+\tilde{\gamma}\int\limits_{x}^{1}u_t\left(z,-0\right)\tilde{Q}\left(x,z\right)dz,\ 0<x<1.$$

Здесь ${}_C D_{0t}^{\alpha}f=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int\limits_{0}^{t}\frac{f^{(n)}\left(z\right)}{\left(t-z\right)^{\alpha-n+1}}dz\quad\left(n=\left[\mathrm{Re}\left(\alpha\right)\right]+1,\ t>0\right)$ - интегро-дифференциальный оператор дробного порядка α в смысле Капуто,

$0<\alpha\le 1,\ \tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}$ - заданные действительные числа, а $\tilde{P}(x,z),\tilde{Q}(x,z)$, $a_i(z),b_i(z),c_i(z)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ - заданные непрерывные функции, такие что

$$\tilde{\alpha}^2+\tilde{\beta}^2+\tilde{\gamma}^2\ne 0,\ a_1^2(z)+a_2^2(z)\ne 0, a_1^2(z)+a_3^2(z)\ne 0, b_1^2(z)+b_2^2(z)\ne 0,$$

$$b_1^2(z)+b_3^2(z)\ne 0, a_j^2(z)+b_j^2(z)+c_j^2(z)\ne 0,\ j=1,2.$$

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\tilde{P}(x,t)=\tilde{P}_1(x)\tilde{P}_2(t),\tilde{Q}(x,t)=\tilde{Q}_1(x)\tilde{Q}_2(t),$$

$$\frac{\tilde{\alpha}}{2}\overline{d_2}'(x)+\tilde{\beta}\overline{d_2}(x)\tilde{P}_1(x)\tilde{P}_2(x)-\tilde{\gamma}\overline{d_2}(x)\tilde{Q}_1(x)\tilde{Q}_2(x)\ge 0,\frac{\tilde{\beta}\tilde{P}_1(1)}{2\overline{d_2}(1)\tilde{P}_2'(1)}\le 0,$$

$$\frac{\tilde{\gamma}\tilde{Q}_1(0)}{2\overline{d_2}(0)\tilde{Q}_2'(0)}\le 0,\frac{d}{dx}\left[\frac{\tilde{\beta}\tilde{P}_1(x)}{2\overline{d_2}(x)\tilde{P}_2'(x)}\right]\ge 0,\frac{d}{dx}\left[\frac{\tilde{\gamma}\tilde{Q}_1(x)}{2\overline{d_2}(x)\tilde{Q}_2'(x)}\right]\le 0,$$

и $a_1(z)b_2(z)c_3(z)\ne\pm a_2(z)a_3(z)b_1(z),\ \tilde{P}_2'(x),\ \tilde{Q}_2'(x)\ne 0,\ a_1(0)\ne -b_1(0)$, *то задача 2 не может иметь более одного решения, где*

$$\overline{d_2}(z)=\frac{1+d_2(z)}{1-d_2(z)},\ d_2(z)=\frac{a_1(z)b_2(z)c_3(z)}{a_2(z)a_3(z)b_1(z)}.$$

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы 3 и условия*

$$a_i(z),b_i(z),c_i(z)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\tilde{P}(x,z),\tilde{Q}(x,z),$$

$$\frac{\partial\tilde{P}(x,z)}{\partial z},\frac{\partial\tilde{Q}(x,z)}{\partial z}\in C([0,1]\times[0,1])\cap C^1((0,1)\times(0,1)),$$

то задача 2 однозначно разрешима.

В § 1.3 и § 1.4 исследованы краевые задачи с интегральными условиями сопряжения для смешанных уравнений с двумя линиями изменения типа и с дробными производными Капуто и Римана-Лиувилля. Наряду с доказательством однозначной разрешимости, показано влияние условия сопряжения на разрешимость исследуемой задачи.

Рассмотрим уравнение

$$g(x,y)=\begin{cases}u_{xx}(x,y)-{}_C D_{0t}^{\lambda}u(x,y),\ 0<\lambda<1,\ (x,y)\in\Delta_0,\\ u_{xx}(x,y)-u_{yy}(x,y),\ (x,y)\in\Delta_i\ (i=1,2)\end{cases}\tag{2}$$

в области $\Delta=\Delta_0\cup\Delta_1\cup\Delta_2\cup AA_0\cup BB_0$. Здесь $g(x,y)$ - заданная функция, Δ_0 - прямоугольник ABB_0A_0 с вершинами $A(0,0),B(1,0),B_0(1,1)A_0(0,1)$, $\Delta_1(\Delta_2)$ - область, ограниченная отрезком $AA_0(BB_0)$, характеристикой $A_0C(B_0D)$ уравнения (2) при $x<0(x>1)$ и гладкой кривой $AC:x=-\gamma_1(y)\left[BD:x=-\gamma_2(y)\right]$.

Для уравнения (2) в области Δ сформулируем следующую задачу:

Задача 3. Найти решение уравнения (2) в классе функций

$$W_1 = \left\{ u(x,t) : u \in C\left(\overline{\Delta}\right) \cap C^1(\Delta),\, u_{xx},\, {}_C D_{0t}^{\lambda} u \in C(\Delta_0), u \in C^2(\Delta_i) \right\},$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=0,\ 0 \le x \le 1,$

краевым условиям $\left.(u_x - u_y)\right|_{AC} = 0,\ \left.(u_x + u_y)\right|_{BD} = 0,$

и условиям сопряжения при $0 < y < 1$

$$u_x(-0,y) = \alpha_1 u_x(0+,y) + \beta_1 \int_0^y u_x(0+,t) Q_1(y,t)\,dt,$$

$$u_x(1+0,y) = \alpha_2 u_x(1-0,y) + \beta_2 \int_0^y u_x(1-0,t) Q_2(y,t)\,dt.$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i\ (i=1,2)$ - заданные действительные числа, такие что $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \ne 0$, $Q_i(y,t)(i=1,2)$ - заданные функции.

Справедлива следующая

Теорема 5. *Если* $\alpha_i \ne 0\ (i=1,2)$ и

$$g(x,y) \in C\left(\overline{\Delta}\right) \cap C^1(\Delta), Q_i(y,t) \in C([0,1]\times[0,1]) \cap C^1((0,1)\times(0,1)),$$

то задача 3 однозначно разрешима.

Теперь исследуем **задачу 4**, которая отличается от задачи 3 только с условием сопряжения, т.е. условия сопряжения заменяются со следующими условиями

$$u_x(0+,y) = \alpha_3 u_x(0-,y) + \beta_3 \int_y^1 u_x(0-,t) P_1(y,t)\,dt, 0 < y < 1, \tag{3}$$

$$u_x(1-0,y) = \alpha_4 u_x(1+0,y) + \beta_4 \int_y^1 u_x(1+0,t) P_2(y,t)\,dt, 0 < y < 1. \tag{4}$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i\ (i=3,4)$ - заданные действительные числа, такие что $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \ne 0$, $P_i(y,t)(i=1,2)$ - заданные непрерывные функции.

Эта задача в силу условий сопряжения (3), (4) не может быть эквивалентно редуцирована к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Вместо этого она редуцируется к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поэтому, сначала мы должны доказать единственность решения задачи.

Доказывается следующая теорема единственности:

Теорема 6. *Пусть*

$$\alpha_j \ge 0, \beta_j \ge 0,\ P_i(y,t) = P_{i,1}(y)\cdot P_{i,2}(t),\ P_{i,2}(1) = 0,$$

$$P_{i,1}(y)\cdot P_{i,2}(y) \le 0, \frac{P_{i,1}(0)}{P'_{i,2}(0)} \ge 0, \left(\frac{P_{i,1}(y)}{P'_{i,2}(y)}\right)' \ge 0 (i=1,2,\, j=3,4).$$

Тогда если существует решение задачи 4, то оно единственно.

Пример 2. Функция $P(y,t)=e^{y}\left(1-e^{1-t}\right)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.

Также, доказана теорема о существование решения задачи 4:

Теорема 7. *Если* $\alpha_i \neq 0\left(i=3,4\right)$ и

$$g(x,y)\in C\left(\overline{\Delta}\right)\cap C^{1}(\Delta),\ P_i(\cdot,\cdot)\in C\left([0,1]\times[0,1]\right)\cap C^{1}\left((0,1)\times(0,1)\right)\left(i=1,2\right),$$

то существует решение задачи 4.

Нелокальная краевая задача со специальными интегральными условиями сопряжения для смешанного уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля с двумя параллельными линиями изменения типа эквивалентным образом приведена к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

В главе 2, с названием «**Краевые задачи с интегральным условием сопряжения для смешанного уравнения с тремя линиями изменения типа**» исследованы три задачи с нелокальными условиями для смешанного уравнения с оператором дробного дифференцирования в смысле Капуто в смешанной области, состоящая из трех характеристических треугольников и одного прямоугольника.

В § 2.1 рассмотрена краевая задача с условием типа Франкля, связывающее различные части одной характеристики, для уравнения смешанного типа с тремя линиями изменения типа. Задача эквивалентным образом редуцирована к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_{C}D_{0y}^{\lambda}u, & (x,y)\in\Phi_0, \\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in\Phi_i\,(i=\overline{1,3}) \end{cases} \tag{5}$$

в смешанной области $\Phi=\Phi_0\cup\Phi_1\cup\Phi_2\cup\Phi_3\cup AB\cup AA_0\cup AB_0$. Здесь $0<\lambda\leq 1$, $\Phi_0=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$, Φ_1,Φ_2,Φ_3 - характеристические треугольники с вершинами $A,B,C;A,A_0,D;B,B_0,E$, соответственно, где $A(0,0),A_0(0,1)$, $B(1,0),B_0(1,1)$, $C(1/2,-1/2),D(-1/2,1/2)$, $E(3/2,1/2)$.

Задача 5. *Найти решение уравнения (5) из класса функций*

$W_2=\left\{u(x,y):u\in C(\overline{\Phi}),u_{xx},{}_{C}D_{0y}^{\lambda}u\in C(\Phi_0),u(x,y)\in C^{2}(\Phi_i),i=\overline{1,3}\right\}$, *первое производное* $u_x(x,y)$ *непрерывно в* $\Phi\setminus\Phi_1$, *удовлетворяющее условиям*

$$a_1(t)u(t,-t)+a_2(t)u(-t,t)=a_3(t),0\leq t\leq 1/2, \qquad u|_{CB}=\phi_1(x),\ 1/2\leq x\leq 1,$$

$$u|_{BE}=\phi_2(y),\ \ 0\leq y\leq 1/2,\ \lim_{y\to+0}{}_{C}D_{0y}^{\lambda}u(x,y)=\lim_{y\to-0}u_y(x,-0),\ \ 0<x<1,$$

где $a_i(\cdot),\phi_j(\cdot)(i=\overline{1,3},\ j=1,2)$ - заданные функции, такие что $\phi_1(1)=\phi_2(0)$.

Теорема 8. *Если*

$$a_i(\cdot),\phi_2(\cdot)\in C^{1}[0,1/2]\cap C^{2}(0,1/2),\phi_1(\cdot)\in C^{1}[1/2,1]\cap C^{2}(1/2,1),$$

такие что $\phi_1(1)=\phi_2(0),\ a_1(0)\neq -a_2(0),$ *то сущетсвует единственное решение задачи 6.*

Пример 3. В качестве примера существования заданных функций $a_i(\cdot), \phi_2(\cdot)$ которые удовлетворяют условиям теоремы 8, приведем следующие:

$$a_1(t)=\cos t,\ a_2(t)=\sin t,\ a_3(t)=t^2,\ \phi_1(x)=e^{x-1},\ \phi_2(y)=e^{y}.$$

§ 2.2 посвящена нахождению решения одной краевой задачи с нелокальными условиями, заданные на характеристиках, для уравнения смешанного уравнения с тремя линиями изменения типа. С помощью специального алгоритма строится решение задачи.

Задача 6. *Найти решение уравнения (5) в области* Φ, *удовлетворяющую условиям гладкости* $u(x,y)\in C(\overline{\Phi})\cap C^1\left(\overline{\Phi}_j\right)\cap C^2(\Phi_j),\ j=\overline{1,3};\ {}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C\left(\Phi_0\right)$, $u_x\left(x,y\right)$ - *непрерывны вплоть до* $x=0,\ x=1$; *удовлетворяет нелокальным условиям*

$$\hat{a}_1\left(t\right)u\left(-t,t\right)+\hat{a}_2\left(t\right)u\left(t,-t\right)=\hat{a}_3\left(t\right),\ 0\le t\le\frac{1}{2},$$

$$b_1\left(t\right)u\left(t,t-1\right)+b_2\left(t\right)u\left(2-t,1-t\right)=b_3\left(t\right),\ \frac{1}{2}\le t\le 1,$$

$$c_1\left(t\right)\left(u_x+u_y\right)\left(t-1,t\right)+c_2\left(t\right)\left(u_x-u_y\right)\left(2-t,t\right)=c_3\left(t\right),\ \frac{1}{2}<t<1;$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y\to+0}{}_C D_{0y}^{\lambda}u(x,y)=\alpha_1u_y(x,-0)+\beta_1\int_0^x u_y(z,-0)P_1(x,z)dz,\ 0<x<1,$$

$$u_x(+0,y)=\alpha_2u_x(-0,y)+\beta_2\int_0^y u_x(-0,z)P_2(y,z)dz,\ 0<y<1,$$

$$u_x(1-0,y)=\alpha_3u_x(1+0,y)+\beta_3\int_0^y u_x(1+0,z)P_3(y,z)dz,\ 0<y<1.$$

Здесь $P_i(\cdot,\cdot)$, $\hat{a}_i\left(t\right), b_i\left(t\right), c_i\left(t\right)\left(i=\overline{1,3}\right)$ - заданные функции, такие что

$$\begin{aligned}&\hat{a}_1\left(0\right)+\hat{a}_2\left(0\right)\ne 0, b_1\left(1\right)+b_2\left(1\right)\ne 0, \hat{a}_1^2\left(t\right)+\hat{a}_2^2\left(t\right)>0, b_1^2\left(t\right)+b_2^2\left(t\right)>0,\\ &c_1^2\left(t\right)+c_2^2\left(t\right)>0, \hat{a}_1^2(t)+b_2^2(t)>0, \hat{a}_2^2(t)+b_1^2(t)>0,\end{aligned}\qquad(6)$$

α_i, β_i - заданные действительные числа, такие что $\alpha_i^2+\beta_i^2\ne 0$.

Теорема 9. *Пусть условие (6) справедливо. Если заданные функции* $P_i(\cdot,\cdot)$ - *непрерывны в замкнутой области и непрерывно дифференцируемы в открытой области задания и* $\hat{a}_i(\cdot), b_i(\cdot), c_i(\cdot)\in C^1[\cdot]\cap C^2(\cdot)(i=\overline{1,3})$, *то решение задачи 6 существует.*

В § 2.3 исследована задача с нелокальными условиями и со специальными условиями сопряжения для смешанного уравнения с тремя линиями изменения типа в специальной области, ограниченной гладкими кривыми. Задача эквивалентна редуцирована к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Поэтому единственность решения доказывается отдельно. Для этого использован метод интегралов энергии.

Пусть $\Phi^* \subset \mathbb{R}^2$- односвязная смешанная область, причем $\Phi^* = \Phi_0^* \cup \Phi_i^* \cup AB \cup BC \cup AD\left(i=\overline{1,3}\right)$, где $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$, Φ_i^* - область, ограниченная крывой γ_i и отрезком $AB\,(i=1)$, $BC\,(i=2)$, $AD\,(i=3)$.
Гладкие кривые $\gamma_1 : t = -\gamma_1(x), \gamma_1(0) = \gamma_1(1) = 0$, $\gamma_2 : x = -\gamma_2(t)$, $\gamma_2(0) = \gamma_2(1) = 0$, $\gamma_3 : x = -\gamma_3(t) + 1, \gamma_3(0) = \gamma_3(1) = 0$ лежат строго внутри характеристических треугольников.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,t), \tag{7}$$

где $Lu \equiv \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0t}^{\lambda} u, \ (x,t) \in \Phi_0^*, 0 < \lambda < 1, \\ u_{xx} - u_{tt}, \qquad (x,t) \in \Phi_i^* (i = \overline{1,3}). \end{cases}$

Задача 7. *Найти решение уравнения (7) из класса функций*
$W_3 = \left\{ u : u(x,t) \in C(\overline{\Phi^*}), u_{xx}, {}_C D_{0t}^{\lambda} u \in C(\Phi_0^*), u(x,t) \in C^2(\Phi_i^*), i = \overline{1,3} \right\}$, *первые производные непрерывны до границ областей* Φ_0^* *и* $\Phi_i^*(i = \overline{1,3})$*; удовлетворяет нелокальным условиям* $[u_x - u_t](\theta_1(s)) = \sigma_1 [u_x + u_t](\theta_1^*(s)), 0 < s < 1,$

$$[u_x - u_t](\theta_2(s)) = \sigma_2 [u_x + u_t](\theta_2^*(s)), 0 < s < 1,$$
$$[u_x + u_t](\theta_3(s)) = \sigma_3 [u_x - u_t](\theta_3^*(s)), 0 < s < 1;$$

удовлетворяет условиям в двух точках $u(A) = u(B) = 0$*;удовлетворяет условиям сопряжения* $\lim\limits_{t \to +0} {}_C D_{0t}^{\lambda} u(x,t) = \widehat{\alpha}_1 u_t(x,-0) + \widehat{\beta}_1 \int\limits_x^1 u_t(s,-0) \widehat{P}_1(x,s) ds,$

$$u_x(+0,t) = \widehat{\alpha}_2 u_x(-0,t) + \widehat{\beta}_2 \int\limits_t^1 u_x(-0,s) \widehat{P}_2(t,s) ds,$$
$$u_x(1-0,t) = \widehat{\alpha}_3 u_x(1+0,t) + \widehat{\beta}_3 \int\limits_t^1 u_x(1+0,s) \widehat{P}_3(t,s) ds.$$

Здесь $\sigma_i, \widehat{\alpha}_i, \widehat{\beta}_i$ - заданные действительные числа, такие что $\widehat{\alpha}_i^2 + \widehat{\beta}_i^2 \neq 0$, $\widehat{P}_i(\cdot,\cdot)$ - заданные функции, $\theta_1(s), \theta_2(s), \theta_3(s) \left[\theta_1^*(s), \theta_2^*(s), \theta_3^*(s) \right]$ - аффиксы точек пересечения кривых $\gamma_i(s)(i = \overline{1,3})$ с характеристиками $x - t = s$, $t - x = s$, $x + t = 1 + s$ $\left[x + t = s, x + t = s, t - x = 1 + s \right]$ уравнения (7), соответственно.

Для этой задачи верны следующие утверждения:

Теорема 10. *Пусть* $\widehat{P}_i(t,s) = \widehat{P}_{i,1}(t) \cdot \widehat{P}_{i,2}(s), \widehat{P}_{j,2}(1) = 0, i = \overline{1,3}, j = 2,3$

и выполняются условия $\dfrac{\widehat{\alpha}_2(1+\sigma_2)}{1-\sigma_2}\ge 0,\ \dfrac{\widehat{\beta}_2(1+\sigma_2)}{1-\sigma_2}\widehat{P}_{2,1}(t)\widehat{P}_{2,2}(t)\le 0,$

$\dfrac{\widehat{\beta}_2(1+\sigma_2)}{2(1-\sigma_2)}\cdot\dfrac{\widehat{P}_{2,1}(0)}{\widehat{P}_{2,2}{}'(0)}\le 0,\ \dfrac{\widehat{\beta}_2(1+\sigma_2)}{2(1-\sigma_2)}\cdot\left(\dfrac{\widehat{P}_{2,1}(t)}{\widehat{P}_{2,2}{}'(t)}\right)\le 0, \dfrac{\widehat{\beta}_1(\sigma_1-1)}{2(\sigma_1+1)}\ge 0, \widehat{P}_{1,1}(x)\cdot\widehat{P}_{1,2}(x)\ge 0,\ \left(\dfrac{\widehat{P}_{1,1}(x)}{\widehat{P}_{1,2}{}'(x)}\right)\ge 0,$

а также $f(x,t),\ P_i(x,t)\in C\big([0,1]\times[0,1]\big)\cap C^1\big((0,1)\times(0,1)\big),$

$\dfrac{\widehat{\alpha}_3(\sigma_3-1)}{\sigma_3+1}\le 0,\dfrac{\widehat{\beta}_3(\sigma_3-1)}{\sigma_3+1}\widehat{P}_{3,1}(t)\cdot\widehat{P}_{3,2}(t)\ge 0,\dfrac{\widehat{\beta}_3(\sigma_3-1)}{2(\sigma_3+1)}\dfrac{\widehat{P}_{3,1}(0)}{\widehat{P}_{3,2}{}'(0)}\ge 0,\ \dfrac{\widehat{\beta}_3(\sigma_3-1)}{2(\sigma_3+1)}\left(\dfrac{\widehat{P}_{3,1}(t)}{\widehat{P}_{3,2}{}'(t)}\right)\ge 0.$

Тогда существует единственное решение задачи 7.

В главе 3, названной «**Обратные задачи для смешанных уравнений с дробной производной Капуто в прямоугольных областях**» исследованы четыре обратные задачи для смешанных уравнений с операторами дробного дифференцирования Капуто в прямоугольных областях.

В § 3.1 исследуется обратная задача с нелокальными условиями по пространственной переменной для смешанного уравнения с дробной производной Капуто по временной переменной. Решение задачи ищется в виде биортогонального ряда, в итоге явный вид решения исследуемой задачи представлен через функции Миттаг-Леффлера от двух переменных.

Рассмотрим уравнение смешанного типа дробного порядка

$$f(x)=\begin{cases} {}_C D_{0t}^{\alpha}u-u_{xx},\ t>0,\\ {}_C D_{t0}^{\beta}u-u_{xx},\ t<0\end{cases}\tag{8}$$

в прямоугольной области $\Lambda=\{(x,t):0<x<1,-p<t<q\}$. Здесь $\alpha,\beta,p,q\in R^+$, такие что $0<\alpha\le 1, 1<\beta\le 2$, $f(x)$ - неизвестная функция.

Задача 8. *Найти пару функций* $\{u(x,t),f(x)\}$, *удовлетворяющая*

i) $u(x,t)\in C(\overline{\Lambda})\cap C_x^2(\Lambda^+\cup\Lambda^-), {}_C D_{0t}^{\alpha}u\in C(\Lambda^+), {}_C D_{t0}^{\beta}u\in C(\Lambda^-),\ f(x)\in C[0,1];$

ii) уравнению (8) в Λ^+ *и* Λ^- *и краевым условиям*

$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=0,\ -p\le t\le q,\ u(x,-p)=\psi(x),\ u(x,q)=\phi(x),\ 0\le x\le 1;$

iii) условию сопряжения $\lim\limits_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=\lim\limits_{t\to-0}{}_C D_{t0}^{\gamma}u(x,t),\ 0<x<1,$

где $\Lambda^+=\Lambda\cap\{t>0\}, \Lambda^-=\Lambda\cap\{t<0\}, \gamma=const\in(0,1], \psi(x),\phi(x)$ - заданные функции, причем $\phi(0)=\phi(1), \psi(0)=\psi(1)$.

Для исследования задачи 8, сначала доказали некоторые свойства функции типа Миттаг-Леффлера от двух переменных:

$$E_1\left[\begin{matrix}\gamma_1,\alpha_1;\gamma_2,\beta_1 & |x\\ \delta_1,\alpha_2,\beta_2;\delta_2,\alpha_3;\delta_3,\beta_3 & |y\end{matrix}\right]=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m}(\gamma_2)_{\beta_1 n}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_2 m+\beta_2 n)}\frac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_3 m)}\frac{y^n}{\Gamma(\delta_3+\beta_3 n)},$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Если* $y=x,\gamma_2=\delta_3=1,\beta_1=\beta_3,\lambda=\beta_2$, *тогда*

$$E_1\left(\begin{matrix}\gamma_1,\alpha_1;\gamma_2,\beta_1 & |x\\ \delta_1,\alpha_2,\beta_2;\delta_2,\alpha_3;\delta_3,\beta_3 & |y\end{matrix}\right)-yE_1\left(\begin{matrix}\gamma_1,\alpha_1;\gamma_2,\beta_1 & |x\\ \delta_1+\lambda,\alpha_2,\beta_2;\delta_2,\alpha_3;\delta_3,\beta_3 & |y\end{matrix}\right)=E^{\gamma_1,\alpha_1}_{\alpha_2,\delta_1;\alpha_3,\delta_2}(x),$$

где $E^{\gamma_1,\alpha_1}_{\alpha_2,\delta_1;\alpha_3,\delta_2}(x)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{(\gamma_1)_{\alpha_1 m}}{\Gamma(\delta_1+\alpha_2 m)}\dfrac{x^m}{\Gamma(\delta_2+\alpha_3 m)}$.

Однозначная разрешимость этой задачи доказана в следующей теореме:

Теорема 11. *Пусть* $0<\gamma<1$. *Если имеет место условие*

$\phi(x),\psi(x)\in C^5[0,1],\phi^{(6)}(x),\psi^{(6)}(x)\in L_2(0,1),\phi(0)=\phi(1),\phi'(0)=0,$

$\phi''(0)=\phi''(1),\phi^{(4)}(0)=\phi^{(4)}(1),\psi(0)=\psi(1),\psi'(0)=0,\psi''(0)=\psi''(1),\psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(1),$

то решение задачи 8 имеет единственное решение.

В случае, когда $\gamma=1$ условие сопряжения имеет вид

$$\lim_{t\to+0}{}_C D^{\alpha}_{0t}u(x,t)=\lim_{t\to-0}u_t(x,t),\ 0<x<1$$

и этот случай рассматривается отдельно. Для разрешимости задачи 8 в этом случае доказана следующая теорема:

Теорема 12. *Если выполнены условия*

$$\phi(x),\psi(x)\in C^5[0,1],\phi^{(6)}(x),\psi^{(6)}(x)\in L_2(0,1),\phi(0)=\phi(1),\phi'(0)=0,$$

$\phi''(0)=\phi''(1),\phi^{(4)}(0)=\phi^{(4)}(1),\psi(0)=\psi(1),\psi'(0)=0,\psi''(0)=\psi''(1),\psi^{(4)}(0)=\psi^{(4)}(1),$

$$\Delta_0=p+\frac{p^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}-\frac{q^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\neq 0,$$

$$\Delta_k=p^{\beta}E_{\beta,\beta+1}\left(-(2k\pi)^2p^{\beta}\right)+pE_{\beta,2}\left(-(2k\pi)^2p^{\beta}\right)-q^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}\left(-(2k\pi)^2q^{\alpha}\right)\neq 0,$$

то задача 8 с условием сопряжения в случае, когда $\gamma=1$, *имеет единственное решение.*

Пример 4. Если $p=q=1$, то из очевидного факта

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\neq\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}+1\ \ (0<\alpha\le 1,1<\beta\le 2) \tag{9}$$

следует, что $\Delta_0\neq 0,\ \Delta_k\neq 0$.

В § 3.2 объектом исследования становиться смешанное уравнение с оператором Капуто по временной переменной и с равномерно-эллиптическим оператором по пространственной переменной. Для этого уравнения исследуются обратные задачи по нахождению неизвестной правой части уравнения. Доказывается существование слабого решения поставленных задач.

Рассмотрим следующую уравнению

$$f(x)=\begin{cases} {}_C D_{at}^{\alpha}u-\mathfrak{L}^{*}u,\ t>0,\\ u_{tt}-\mathfrak{L}^{*}u, \quad t<0,\end{cases} \tag{10}$$

вместе с условиями

$$\begin{cases} u(0,t)=u(1,t)=0,-p\le t\le q,\\ u(x,-p)=\psi(x),u(x,q)=\phi(x),0\le x\le 1,\\ u(x,+0)=u(x,-0),0\le x\le 1,\lim\limits_{t\to+0}{}_C D_{0t}^{\alpha}u(x,t)=u_t(x,-0),\ 0<x<1.\end{cases} \tag{11}$$

Здесь $\mathfrak{L}^{*}v=\dfrac{d^2v(z)}{dz^2}-g(z)v(z),0<x<1$ с $\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)=\left\{v\in H^2(0,1);v(0)=v(1)=0\right\}$

Сначала приводим определение слабого решения задачи (10)-(11).

Определение 1. Функцию $u(x,t)$ мы назовем *слабым решением* задачи (10)-(11), если $f(x)\in L^2(0,1)$ и $u(\cdot,t)\in\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)$ для $t\in[-p,q]$, где $\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)\equiv H^2(0,1)\cap H_0^1(0,1)$, и если для

$$\begin{gathered} u\in C\left([-p,q];\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)\right),\frac{\partial u}{\partial t}\in C\left([-p,0]\cup(0,q];L^2(0,1)\right),\\ {}_C D_{0t}^{\alpha}u\in C\left([0,q];L^2(0,1)\right),\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\in C\left((-p,0);L^2(0,1)\right),\end{gathered} \tag{12}$$

следующие равенства верны:

$$\lim_{t\to -p}\left\|u(\cdot,t)-\psi\right\|_{\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)}=0,\ \lim_{t\to q}\left\|u(\cdot,t)-\phi\right\|_{\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right)}=0,\ \lim_{|t|\to 0}\left\|{}_C D_{0t}^{\alpha}u(\cdot,t)-u_t(\cdot,t)\right\|_{L^2}=0, \tag{13}$$

$$\left({}_C D_{0t}^{\alpha}u,\eta\right)+\left(\mathfrak{L}^{*}u,\eta\right)=\left(f,\eta\right),\ t\in[0,q],\forall\,\eta\in\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right), \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\eta\right)+\left(\mathfrak{L}^{*}u,\eta\right)=\left(f,\eta\right),\ t\in(-p,0),\ \forall\,\eta\in\mathfrak{D}^{*}\left(\mathfrak{L}^{*}\right). \tag{15}$$

Задача 9. *Единственным образом определить пару* $\{u(x,t),f(x)\}$ *в области* $\Lambda^{*}=\left\{(x,t):0<x<1,-p<t<q\right\}$, *удовлетворяющее (10) и (12)-(15).*

Имеет место следующая теорема о единственности решения задачи 9.

Теорема 13. *Если* $\Delta_k=E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k q^{\alpha}\right)-\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}\,p-\cos\sqrt{\lambda_k}\,p\neq 0$, *тогда формальное решение задачи 9 единственна.*

Здесь λ_k-собственные значения симметрического оператора $\mathfrak{L}^{*}$.

Имеет место также следующее утверждение:

Лемма 2. *Для всех достаточно больших* k *и для всех* $p\in\mathbb{Q}^{+}$, *существует такое* $\delta>0$, *причем* $|\Delta_k|\ge\delta>0$.

§ 3.3 посвящен изучению обратной задачи для смешанного уравнения дробного порядка с младшим членом. Методом разделения переменных, решение задачи представим в виде ряда. Используя решение многочленного дифференциального уравнения дробного порядка, решение поставленной задачи представляется функциями многопараметрного Миттаг-Леффлера от двух переменных.

Рассмотрим следующее уравнение смешанного типа

$$\frac{1+sgn(t)}{2}\left({}_C D_{0t}^{\alpha_1}u+\mu_1\,{}_C D_{0t}^{\beta_1}u\right)+\frac{1-sgn(t)}{2}\left({}_C D_{t0}^{\alpha_2}u+\mu_2\,{}_C D_{t0}^{\beta_2}u\right)-u_{xx}=f(x) \quad (16)$$

в области Λ. Здесь $0<\beta_1\le\alpha_1\le 1, 1<\beta_2\le\alpha_2\le 2, \mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$.

Задача 10. *Найти пару функций* $\{u(x,t), f(x)\}$, *удовлетворяющая*

1) $u(x,t)\in C(\overline{\Lambda}), u_{xx}\in C(\Lambda^+\cup\Lambda^-), {}_C D_{0t}^{\alpha_1}u\in C(\Lambda^+), {}_C D_{t0}^{\alpha_2}u\in C(\Lambda^-),\ f(x)\in C(0,1)$;

2) уравнение (16) в Λ^+ *и* Λ^-;

3) краевым условиям $u(0,t)=u(1,t)=0, -p\le t\le q,$

$$u(x,-p)=\psi(x),\ 0\le x\le 1;\ {}_C D_{t0}^{\gamma}u(x,-p)=\varphi(x),\ 0<x<1, u(x,q)=\phi(x),\ 0\le x\le 1.$$

Здесь $\Lambda^+=\Lambda\cap\{t>0\}$, $\Lambda^-=\Lambda\cap\{t<0\}$, $\psi(x),\varphi(x)$ и $\phi(x)$ - заданные функции, такие что $\psi(0)=\psi(1)=\phi(0)=\phi(1)=0$, $0<\gamma\le 1$.

Мы доказали некоторые свойства функции типа Миттаг-Леффлера от двух переменных

$$E_{(\alpha-\beta,\alpha),\rho}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{x^i y^{n-i}}{\Gamma(\rho+\alpha n-\beta i)}$$

для дальнейшего использования в исследовании задачи 10.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Для* $1<\beta<\alpha<2$ *и* $0<\rho\le 1$ *следующие равенства верны:*

$${}_C D_{t0}^{\rho}\left(tE_{(\alpha-\beta,\alpha),2}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta},m_2(-t)^{\alpha}\right)\right)=(-t)^{1-\rho}E_{(\alpha-\beta,\alpha),2-\rho}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta},m_2(-t)^{\alpha}\right),$$

$${}_C D_{t0}^{\rho}\left(E_{(\alpha-\beta,\alpha),1}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta},m_2(-t)^{\alpha}\right)\right)=(-t)^{-\rho}\left[E_{(\alpha-\beta,\alpha),1-\rho}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta},m_2(-t)^{\alpha}\right)-\frac{1}{\Gamma(1-\rho)}\right],$$

$${}_C D_{t0}^{\rho}\left((-t)^{\alpha}E_{(\alpha-\beta,\alpha),\alpha+1}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta},m_2(-t)^{\alpha}\right)\right)=(-t)^{\alpha-\rho}E_{(\alpha-\beta,\alpha),\alpha+1-\rho}\left(m_1(-t)^{\alpha-\beta},m_2(-t)^{\alpha}\right).$$

Имеет место следующая

Теорема 14. *Если имеет место условие*

$$\Delta_k=p^{1-\gamma}\left\{E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2}(..p..)\left[E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),1-\gamma}(..p..)-\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\right]-\right.$$

$$E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2-\gamma}(..p..)E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),1}(..p..)-\frac{p^{\alpha_2}E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),1}(..q..)}{q^{\alpha_1}E_{(\alpha_1-\beta_1,\alpha_1),\alpha_1+1}(..q..)}\times$$

$$\left.\left[E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2}(..p..)E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),\alpha_2+1-\gamma}(..p..)+E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),2-\gamma}(..p..)E_{(\alpha_2-\beta_2,\alpha_2),\alpha_2+1}(..p..)\right]\right\}\ne 0,$$

$$\varphi(x),\phi(x),\psi(x)\in C^3[0,1]\cap C^4(0,1), \varphi(0)=\varphi(1)=0, \phi(0)=\phi(1)=0, \psi(0)=\psi(1)=0,$$

$$\varphi''(0)=\varphi''(1)=0, \phi''(0)=\phi''(1)=0, \psi''(0)=\psi''(1)=0,$$

то решение задачи 10 существует и единственно.

Здесь для удобства чтения ввели следующие обозначения:

$$(..q..)=\left(-\mu_1 q^{\alpha_1-\beta_1}, -(k\pi)^2 q^{\alpha_1}\right),\ (..p..)=\left(-\mu_2 p^{\alpha_2-\beta_2}, -(k\pi)^2 p^{\alpha_2}\right).$$

В четвертой главе, называемой “**Некоторые применения прямых и обратных задач для уравнений с частными производными дробного порядка в прямоугольных областях**” исследуются прямые и обратные задачи, возникающие при моделировании различных диффузионных процессов, течении газов или малосжимаемых жидкостей в пористых средах, а также движение подземных вод.

В § 4.1 исследуются обратные задачи по определению функции источника для вырождающиеся уравнений в частных производных с оператором гипер-бесселя и операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, Капуто. Эти задачи связаны с процессом диффузии газа в почве. Основным аппаратом исследований являются разложение по рядам Фурье и Фурье-Лежандра.

Рассмотрим случай когда, диффузионной коэффициент не зависит от времени, а зависит только от расстояния. А также, предполагается, что источники кислорода тоже не меняются со временем. Ниже сформулируем задачу отыскания концентрации кислорода в почве вместе с источником кислорода, которая не меняется со временем на основе информации концентрации кислорода в почве в начальный и финальный момент рассматриваемой времени.

Задача 11. Найти пару функций $\{U(t,x),h(x)\}$, которая удовлетворяет уравнение ${}_C D_{0t}^{\alpha}U(t,x)=\left[(1-x^2)U_x\right]_x+h(x)$ в области $\widehat{\Omega}=\left\{(t,x):-1<x<1, 0<t<T\right\}$ вместе с начальным условием $U(0,x)=v(x), -1\le x\le 1$ и условием переопределения $U(T,x)=w(x), -1\le x\le 1,$

такая что U, U_x - ограничены при $x=-1, x=1$. Здесь $0<\alpha\le 1,\ T>0$ и $v(x), w(x)$ - заданные функции.

Справедлива следующая

Теорема 15. *Если* $v,w\in C^3(-1,1)$ *и* $v^{(4)},w^{(4)}\in L_2(-1,1)$, *то существует единственное решение задачи 11 и представимо в виде*

$$U(t,x)=\frac{t^{\alpha}}{T^{\alpha}}(w_0-v_0)+v(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-E_{\alpha}\left(-\lambda_n t^{\alpha}\right)}{1-E_{\alpha}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)}(w_n-v_n)P_n(x),$$

$$h(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^{\alpha}}(w_0-v_0)-\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)v'(x)\right]+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{w_n-v_n}{1-E_{\alpha}\left(-\lambda_n T^{\alpha}\right)}P_n(x).$$

где $\lambda_n=n(n+1)$ и

$$v_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}v(x)P_n(x)dx,\quad w_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}w(x)P_n(x)dx,\quad n=0,1,2,...$$

Приведен конкретный пример и построен график решения с последующим анализом.

Пример 5. Пусть $v(x)=0, \quad w(x)=w_0+w_2(3x^2-1).$ Тогда согласно теореме 15, решение будет иметь вид

$$U(x,t)=w_0\frac{t^\alpha}{T^\alpha}+w_2\frac{1-E_\alpha(-6t^\alpha)}{1-E_\alpha(-6T^\alpha)}(3x^2-1),\ h(x)=w_0\frac{\Gamma(\alpha+1)}{T^\alpha}+\frac{6w_2(3x^2-1)}{1-E_\alpha(-6T^\alpha)}.$$

Графики построены в случае, когда $w_0=1, w_2=-0.5,\ T=1.$

Анализ: На графике 4.1.2 показано изменение концентрации и источника кислорода в разный момент времени в определенном значении дробного порядка. Видно, что с истечением времени концентрация кислорода увеличивается, а источник кислорода остаётся почти неизменной. Также, на графике 4.1.3 показано влияние дробного порядка на концентрацию и источника кислорода в почве, т.е. эффект памяти сравнительно заметно влияет на концентрацию кислорода, чем на источник. С возрастанием порядка, концентрация кислорода уменьшается. Это показывает, что, если в математическом модели учитывается эффект памяти (применяя дробное производное вместо обычного производного), в самом деле, концентрация кислорода будет больше.

Рассмотрен также случай, когда диффузионный коэффициент постоянный, источник не зависит от времени и учитывается эффект памяти, зависящей от времени. На основе данных о концентрации кислорода в начальный и финальный момент времени, находится концентрация, а также источники кислорода в почве.

Задача 12. Найти пару функций $\{u(x,t),f(x)\}$ в области $\Omega^*=\{(x,t):0<x<\pi,\,0<t<T^*\}$ такую, что $u(\cdot,t)\in C^2[0,\pi],\quad u(x,\cdot)\in C_\mu\left[0,T^*\right]$ и $f(x)\in C\left[0,\pi\right]$, которая удовлетворяет уравнению

$${}^C\!\left(t^\theta\frac{\partial}{\partial t}\right)^\beta u(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x),\qquad (x,t)\in\Omega^*,$$

и краевым условиям

$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=0,\ 0\le t\le T^*,\ u\left(x,0\right)=\psi(x),\quad u\left(x,T^*\right)=\phi(x),\ 0\le x\le\pi,$$

где ϕ и ψ - заданные функции, такие что $\psi(0)=\psi(\pi)=0,\quad \phi(0)=\phi(\pi)=0.$

Здесь $0<\beta<1,\ \theta<1,\ {}^C\!\left(t^\theta\dfrac{d}{dt}\right)^\beta g(t)=(1-\theta)^\beta t^{-\beta(1-\theta)}I_{1-\theta}^{0,-\beta}\left(g(t)-g(0)\right)$

- оператор гипер-бесселя типа Капуто, где

$$I_\omega^{\gamma,\delta}g(t)=\frac{\omega}{\Gamma(\delta)}t^{-\omega(\gamma+\delta)}\int_0^t(t^\omega-\tau^\omega)^{\delta-1}\tau^{\omega(\gamma+1)-1}g(\tau)d\tau,\ \ \delta>0,\omega>0,\ \gamma\in\mathbb{R}$$

- оператор Эрдейи-Кобера, а $C_\mu:=\left\{g(x)=x^p g(x);\,p>\mu,g\in C[0,\infty)\right\},\mu\ge\theta-1$

- весовое пространство непрерывных функций.

Имеет место следующая теорема об однозначной разрешимости задачи 12:

Теорема 16. *Если* $\psi(x),\phi(x)\in C^2[0,\pi]$, *такие что* $\psi^{(i)}(0)=\psi^{(i)}(\pi)=\phi^{(i)}(0)=\phi^{(i)}(\pi)=0,\ \ (i=0,2)$ *и* $\psi'''(x),\phi'''(x)\in L_2(0,\pi),$

тогда существует единственное решение задачи 12.

В следующем примере полученный результат иллюстрирован визуально и приведен краткий анализ.

Пример 6. Пусть $\psi = 0, \quad \phi(x) = \sin x.$ Тогда согласно теореме 16, решение представимо в виде

$$u(x,t) = \frac{1 - E_{\beta,1}\left(-\frac{1}{(1-\theta)^{\beta}} t^{(1-\theta)\beta}\right)}{1 - E_{\beta,1}\left(-\frac{1}{(1-\theta)^{\beta}} T^{*(1-\theta)\beta}\right)} \sin x, \quad f(x) = \frac{1}{1 - E_{\beta,1}\left(-\frac{1}{(1-\theta)^{\beta}} T^{*(1-\theta)\beta}\right)} \sin x.$$

График построен при $T^* = 1.$

Анализ. При фиксировании дробного порядка (β) и специальную зависимость эффекта памяти от времени (t^{θ}), из фигуры 4.1.4 видно, что с течением времени концентрация кислорода увеличивается, а источник остаётся почти не измененным. А фигура 4.1.5 показывает, что если фиксируется время (t) и специальная зависимость эффекта памяти (t^{θ}), то с возрастанием дробного порядка, т.е. по мере приближения к целому порядку (случай когда исключается эффект памяти) концентрация и источник кислорода уменьшается. Надо отметить, что разница значений источников при разных дробных порядках более заметно. Когда значения дробного порядка близки к нулю, значение решения существенно отличается, что вполне естественно, так как в этом случае тип уравнения описывающее процесс меняется. Фигура 4.1.6 показывает влияние специальной зависимости эффекта памяти (t^{θ}) на решения при фиксированной момент времени (t) и дробного порядка (β). Здесь надо отметит, что изменения специальной зависимости эффекта памяти противоположно действует на концентрацию ($u(x,t)$) и источника ($f(x)$) кислорода, из которого следует важность рассмотрения этого параметра в моделировании.

Далее, также рассмотрен случай, когда диффузионный коэффициент зависит только от времени, а источник только от пространства. Здесь также учитывается эффект памяти с помощью рассмотрения производную дробного порядка. На основе данных о концентрации кислорода в начальный и финальный момент времени рассмотрения, находится концентрация, а также источники кислорода в почве.

Задача 13. Найти пару функций $\left\{\bar{u}(x,t), \bar{h}(x)\right\}$ являющиеся *регулярным решением* уравнения

$$_{RL}D_{0t}^{\alpha}\bar{u}(t,x) = t^{\rho}\bar{u}_{xx}(t,x) + \bar{h}(x), \tag{17}$$

в области $\Omega = \left\{(t,x) : 0 < x < 1,\, 0 < t < \bar{T}\right\}$, удовлетворяющее краевым и начальным условиям: $\bar{u}(t,0) = 0, \bar{u}(t,1) = 0, 0 \le t \le \bar{T},\ I_{0t}^{1-\alpha}\bar{u}(t,x)\big|_{t=0} = \bar{\varphi}(x), 0 \le x \le 1,$

а также условию переопределения $\bar{u}(\bar{T},x) = \bar{\psi}(x), 0 \le x \le 1.$

Здесь $\alpha, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$, такие что $0 < \alpha < 1, \bar{\beta} \geq 0$, $I_{0t}^{1-\alpha}(\cdot)$ - дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка $1-\alpha$, $\bar{\varphi}(x)$, $\bar{\psi}(x)$ - заданные функции, такие что $\bar{\varphi}(0) = \bar{\varphi}(1) = \bar{\psi}(0) = \bar{\psi}(1) = 0$.

Определение 2. Под *регулярным решением* уравнения (17) в области Ω понимается пара функций $\left\{\bar{u}(x,t), \bar{h}(x)\right\}$ из следующего класса функций

$$\overline{W} = \left\{ t^{1-\alpha}\bar{u}(t,x) \in \overline{\Omega},\ {}_{RL}D_{0t}^{\alpha}\bar{u}(t,x) \in \Omega,\ \bar{u}_{xx}(t,x) \in \Omega,\ \bar{h}(x) \in C[0,1] \right\}$$

удовлетворяющее уравнение (17) в Ω.

Формальное решение задачи 13 представлено в следующем виде

$$\bar{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\bar{\varphi}_k t^{\alpha-1} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}-1}{\alpha}} \left(-(k\pi)^2 t^{\alpha+\bar{\beta}} \right) + \frac{\bar{h}_k}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}} \left(-(k\pi)^2 t^{\alpha+\bar{\beta}} \right) \right] \sin k\pi x,$$

$$\bar{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\bar{T}^{\alpha} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}} \left(-(k\pi)^2 \bar{T}^{\alpha+\bar{\beta}} \right)} \left[\bar{\psi}_k - \bar{\varphi}_k \bar{T}^{\alpha-1} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}-1}{\alpha}} \left(-(k\pi)^2 \bar{T}^{\alpha+\bar{\beta}} \right) \right] \sin k\pi x.$$

Здесь

$$E_{\alpha,m,n}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\alpha(jm+n)+1)}{\Gamma(\alpha(jm+n+1)+1)} z^k \tag{18}$$

- обобщенная функция Миттаг-Леффлера, где $\alpha, n \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{R}$, такие что $\Re(\alpha) > 0, m > 0, \alpha(jm+n) \notin \mathbb{Z}^-(j \in \mathbb{N}_0)$.

Для визуализации результата приведен следующий пример:

Пример 7. Пусть $\bar{\psi}(x) = \sin \pi x,\ \bar{\varphi}(x) = 0.$ Тогда решение имеет вид

$$\bar{u}(t,x) = \frac{t^{\alpha} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}} \left(-\pi^2 t^{\alpha+\bar{\beta}} \right)}{\bar{T}^{\alpha} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}} \left(-\pi^2 \bar{T}^{\alpha+\beta} \right)} \sin \pi x, \quad \bar{h}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\bar{T}^{\alpha} E_{\alpha,1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha},1+\frac{\bar{\beta}}{\alpha}} \left(-\pi^2 \bar{T}^{\alpha+\beta} \right)} \sin \pi x.$$

Анализ. Фигура 4.1.7 показывает, как меняется концентрация и источник кислорода в почве, когда фиксируется дробный порядок (α) и порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени ($\bar{\beta}$). С истечением времени концентрация кислорода уменьшается, а источник остаётся неизменной. Далее, в фигуре 4.1.8 показан изменения концентрации и источника кислорода в почве при разных дробных порядках, когда время (t) и порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени ($\bar{\beta}$) фиксированы. С возрастанием порядка уравнения концентрация увеличивается, а источник наоборот уменьшается. А в фигуре 4.1.9 показаны изменения концентрации и источника когда фиксируется время (t) и дробный порядок (α) и порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени ($\bar{\beta}$) меняется. Из последних двух фигур, можно сделать вывод о противоположном влиянии дробного порядка и порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени к концентрации и источника кислорода в почве. Также, если учитывать эффекта памяти почвы, то можно более точно измерить изменения концентрации кислорода.

В § 4.2 объектами исследования становятся уравнения в частных производ-ных с различными операторами дробного интегро-дифференцирования, связан-ные с математическими моделями движение подземных вод. Исследуются как прямые, так и обратные задачи для этих уравнений с использованием разложений по рядам Фурье и Фурье-Бесселя.

Рассмотрим уравнение

$$ {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u(x,t) + \lambda\, {}_C D_{0t}^{\tilde{\beta}} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{1}{x} u_x(x,t) - \frac{\nu^2}{x^2} u(x,t) + \tilde{f}(x,t) \qquad (19) $$

в области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, где $0 \le \tilde{\beta} \le \tilde{\alpha} \le 1$, $\nu, T > 0$, ${}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u$ - производное Капуто порядка $\tilde{\alpha}$.

Пусть $f(x,t)$- заданная функция. Прямая задача для уравнения (19) сформулируем следующим образом:

Задача 14. Найти решение $u(x,t)$ уравнения (19) в Ω, которое удовлетворяет

1. условию регулярности $u, u_{xx}, {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u \in C(\Omega), \int_0^1 \sqrt{x}\,|u(x,t)|\,dx < +\infty;$
2. краевым условиям $\lim_{x\to 0} x u_x(x,t) = 0, u(1,t) = 0,\ u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1.$

Пусть теперь $f(x,t) = g(x)$ - неизвестная функция. В этом случае, обратная задача для уравнения (19) сформулируется следующим образом:

Задача 15. Найти пару функций $\{u(x,t), g(x)\}$, которая

1. удовлетворяет условиям регулярности $u, u_{xx}, {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u \in C(\Omega), \int_0^1 \sqrt{x}\,|u(x,t)|\,dx < +\infty;$
2. и в области Ω удовлетворяет уравнение

$$ {}_C D_{0t}^{\tilde{\alpha}} u(x,t) + \lambda\, {}_C D_{0t}^{\tilde{\beta}} u(x,t) = u_{xx}(x,t) + \frac{1}{x} u_x(x,t) - \frac{\nu^2}{x^2} u(x,t) + g(x), $$

3. вместе с краевыми условиями

$$ \lim_{x\to 0} x u_x(x,t) = 0, u(1,t) = 0,\ \ u(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1,\ u(x,T) = \phi(x),\ 0 \le x \le 1. $$

Здесь $\psi(x), \phi(x)$ - заданные функции, такие что $|\psi(0)| < +\infty, |\phi(0)| < +\infty,\ \psi(1) = 0, \phi(1) = 0.$

Основные результаты оформим в виде следующих теорем:

Теорема 17. *Если* $f(x,t)$ *- четыре раза дифференцируема по* x*;*

- $f(0,t) = f'(0,t) = f''(0,t) = f'''(0,t) = 0, f(1,t) = f'(1,t) = f''(1,t) = 0$*;*

- $\dfrac{\partial^4 f\left(x,t\right)}{\partial x^4}$ *- ограничена;* $f(x,t)$ *- непрерывно и непрерывно*

дифференцируема по t; то существует единственное решение задачи 14, представимой формулой $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t z^{\tilde{\alpha}-1}E_{(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta},\tilde{\alpha}),\tilde{\alpha}}\left(-\lambda z^{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}},-\gamma_n^2 z^{\tilde{\alpha}}\right)f_n(t-z)dz\right]J_\nu\left(\gamma_n x\right).$

Теорема 18. *Если* $\psi(x)$ *и* $\phi(x)$ *- четыре раза дифференцируемы;*

- $\psi(0)=\psi'(0)=\psi''(0)=\psi'''(0)=0, \psi(1)=\psi'(1)=\psi''(1)=0$*;*
- $\phi(0)=\phi'(0)=\phi''(0)=\phi'''(0)=0, \phi(1)=\phi'(1)=\phi''(1)=0$*;*
- $\psi^{(4)}(x)$ *и* $\phi^{(4)}(x)$ *- ограничены и* $E_{(\tilde{\alpha}-\tilde{\beta},\tilde{\alpha}),1+\tilde{\alpha}}\left(-\lambda T^{\tilde{\alpha}-\tilde{\beta}},-\gamma_n^2 T^{\tilde{\alpha}}\right)\neq 0,$

то существует единственное решение задачи 15.

Рассмотрим уравнение диффузии с двумя производными дробного порядка в смысле Хилфера

$$D_{0t}^{\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1}u(t,x)+\tilde{\mu}\,D_{0t}^{\tilde{\alpha}_2,\tilde{\beta}_2}u(t,x)-u_{xx}(t,x)=\tilde{g}(x) \tag{20}$$

в области $\Omega=\{(t,x):0<t<T, 0<x<1\}$. Здесь $\tilde{\alpha}_i,\tilde{\beta}_i(i=1,2),\mu,T$ - заданные действительные числа, такие что $T>0, 0<\tilde{\alpha}_2<\tilde{\alpha}_1\leq 1, 0\leq\tilde{\beta}_i\leq 1$, $D_{0t}^{\alpha,\beta}f(t)$ - дробное производное порядка α и типа β с $n-1<\alpha\leq n\in\mathbb{N}$.

Задача 16 состоит в нахождении пары функций $\left\{u\left(t,x\right),g\left(x\right)\right\}$ из класса функций

$$W_2=\left\{u\left(t,x\right):I_{0t}^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}u\in C\left(\overline{\Omega}\right),D_{0t}^{\alpha_1,\beta_1}u\in C\left(\Omega\right),\,u_{xx}\in C\left(\Omega\right);g\left(x\right)\in C\left[0,1\right]\right\}$$

которая удовлетворяет уравнение (20) в области Ω вместе с краевыми условиями

$$u(t,0)=u(t,1)=0, 0\leq t\leq T$$

и начальным условиям $\lim\limits_{t\to+0}I_{0t}^{(1-\beta_i)(1-\alpha_i)}u\left(t,x\right)=0,\ 0\leq x\leq 1\ \left(i=1,2\right),$

а также дополнительному условию $u(T,x)=\tilde{\phi}(x), 0\leq x\leq 1.$

Здесь $\tilde{\phi}(x)$ - заданная функция, такая что $\tilde{\phi}(0)=\tilde{\phi}(1)=0$.

Итак, мы доказали следующую теорему:

Теорема 19. *Если выполняются условия*

$$T^{\tilde{\alpha}_1-1}E_{(\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_1),\tilde{\alpha}_1+1}\left(-\tilde{\mu}T^{\tilde{\alpha}_1-\tilde{\alpha}_2},-(k\pi)^2T^{\tilde{\alpha}_1}\right)\neq 0.$$

$$\tilde{\phi}(x)\in C^2[0,1],\tilde{\phi}'''(x)\in L_2(0,1),\tilde{\phi}(0)=\tilde{\phi}(1)=\tilde{\phi}''(0)=\tilde{\phi}''(1)=0,$$

то существует единственное решени задачи 16.

§ 4.3 посвящен изучению краевой задачи для смешанного уравнения, составленных из уравнений диффузии и волнового уравнения с оператором Римана-Лиувилля. Задача связана с течением газа или малосжимаемой жидкости на канале, окруженной пористой средой. Используя метод функции Грина, а также некоторые свойства функции типа Райта, исследуемая задача эквивалентна редуцирована к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(t,x)-H(a-x)D_{0+}^{\gamma_1}u(t,x)-\left[1-H(a-x)\right]D_{0+}^{\gamma_2}u(t,x)=f(t,x) \qquad (21)$$

в области $\Pi=\Pi_1\cup J\cup\Pi_2$, где $\Pi_1=\left\{(t,x):0<x<a,0<t<T\right\}$, $\Pi_2=\left\{(t,x):a<x<b,0<t<T\right\}$, $J=\left\{(t,x):x=a,0<t<T\right\}$, $1<\gamma_1\le 2, 0<\gamma_2\le 1$, $H(\cdot)$ - функция Хевисайда, D_{0+}^{γ} - производная дробного порядка γ в смысле Римана-Луивилля.

Задача 17. Найти *регулярное решение* уравнения (21) в области Π, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(t,0)=\varphi_0(t),\ u(t,b)=\varphi_b(t), 0<t<T,\ \lim_{t\to 0^+}D_{0+}^{\gamma_1-k}u\left(t,x\right)=\psi_k\left(x\right), k=\{1,2\}, 0<x<a,$$

$$\lim_{t\to 0^+}D_{0+}^{\gamma_2-1}u\left(t,x\right)=\psi_3\left(x\right),\ a<x<b,\ I_{0+}^{2-\gamma_1}u\left(t,a^-\right)=I_{0+}^{1-\gamma_2}u\left(t,a^+\right), 0\le t\le T,$$

$$u_x(t,a^-)=u_x(t,a^+)+\lambda u_t(t,a^+)+\mu\int_0^t u_x(z,a^+)P(z,a^+)dz, 0<t<T.$$

Здесь λ,μ - заданные действительные числа, $P\left(t,x\right),\varphi_0\left(t\right),\varphi_b\left(t\right),\psi_i\left(x\right)$ - заданные функции $\left(i=\overline{1,3}\right)$, $D_{0+}^{-\gamma}u\left(\cdot\right)=I_{0+}^{\gamma}u\left(\cdot\right)$, $\gamma>0$.

Определение 3. Под *регулярным решением* уравнения (21) в области Π понимается такая функция $u(t,x)$ из класса функций

$$W_3=\Big\{u(t,x):t^{2-\gamma_1}u(t,x)\in C\left(\overline{\Pi}_1\right), t^{1-\gamma_2}u(t,x)\in C\left(\overline{\Pi}_2\right),$$

$$u_{xx}(t,x)\in C\left(\Pi_1\cup\Pi_2\right), D_{0+}^{\gamma_1}u(t,x)\in C\left(\Pi_1\right), D_{0+}^{\gamma_2}u(t,x)\in C\left(\Pi_2\right)\Big\},$$

удовлетворяющая уравнение (21) в областях Π_1 и Π_2.

Теорема 20. *Пусть* $\gamma_1\ge 1+\gamma_2$. *Если* $\lambda\ne 0$ *и выолнены условия*

$$t^{2-\gamma_1}\varphi_0(t)\in C[0,T], t^{1-\gamma_2}\varphi_b(t)\in C[0,T], \varphi_0(t)\in C^1[0,T], \varphi_b(t)\in C^1[0,T],$$

$$\psi_1(x)\in C[0,a], \psi_2(x)\in C[0,a], \psi_3\in C[a,b],$$

$$t^{2-\gamma_1}f(t,x)\in C(\overline{\Pi}_1), t^{1-\gamma_2}f(t,x)\in C(\overline{\Pi}_2)$$

кроме этого $f(t,x)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* x, *тогда существует единственное регулярное решение задачи 17.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению прямых и обратных задач для уравнения в частных производных разного типа с различными операторами дробного дифференцирования в смешанных областях, а также изучению свойств функции специальных функций, связанные с обратными задачами для смешанных уравнений с производными дробного порядка Капуто и Хилфера.

В заключении можно сделать следующие выводы по результатам исследований:

1. Доказаны новые утверждения, содержащие ряд свойств и оценок функции Грина первой краевой задачи для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Римана-Лиувилля, а также функции Миттаг-Леффлера от двух переменных, которые использованы в исследованиях прямых и обратных задач для уравнений в частных производных различного типов. Полученные результаты позволяют исследовать задачи для таких уравнений в более композитных областях, исходя из практической точки зрения, а также исследовать краевые задачи для уравнений в частных производных с дробными производными высокого порядка.
2. При определенных условиях на заданные параметры и функции, доказаны теоремы об однозначной разрешимости ряда нелокальных краевых задач с интегральными условиями сопряжения для смешанных уравнений с дробным интегро-дифференциальным оператором Капуто в смешанных областях. Полученные результаты обобщают результатов ранее исследованных задач для уравнений целого порядка, а также позволить исследовать новый класс краевых задач для уравнений смешанно-составного типа.
3. Установлена корректность ряда локальных и нелокальных, прямых и обратных задач для дифференциальных уравнений в частных производных разного типа с производными Капуто, Хилфера и равномерно эллиптическим оператором, а также оператором Бесселя. Полученные результаты могут быть использованы в конкретных математических моделях, связанные с диффузионно-волновыми процессами, а также с течениями подземных вод в пористых средах. Кроме того, результаты могут быть основой для дальнейшего развития исследований по обратным задачам для смешанных уравнений.
4. Приведены конкретные примеры обратных задач функции источника, связанные с молекулярной диффузии в почвах, движении подземных вод и течении газа в пористых средах. Анализированы характер влияний разных параметров уравнений моделирующие процессы.
5. Методы и результаты диссертационной работы могут быть использованы в исследованиях по дробным исчислениям, дифференциальных и интегральных уравнений, уравнений математической физики, а также при разработке специальных курсов для студентов, обучающиеся по специальности «Математика».

В целом, полученные научные результаты позволить нам утверждать, что цели диссертационной работы достигнуты. Все основные результаты являются новыми и вносят значительный вклад в теорию краевых задач для смешанных уравнений в частных производных с производными дробного порядка.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KARIMOV ERKINJON TULKINOVICH

BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH INTEGRAL TRANSMITTING CONDITIONS AND INVERSE PROBLEMS FOR INTEGER AND FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of doctoral dissertation (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.3.DSc/FM145

Dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://mathinst.uz/kengash/ and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Salakhitdinov Makhmud** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Turmatov Batyrkhan Khudaybergenovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Islomov Bozorboy doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Durdiev Durdimurod Kalandarovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Urgench** State University

Defense will take place «____» __________ 2020 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovkiy Institute of Mathematics. (Address: 100170, Uzbekistan, Tashkent city, Mirzo Ulugbek area, Mirzo Ulugbek str.,81, Ph.: (99871) 262-75-44, fax: (99871) 262-73-57, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovkiy Institute of Mathematics (is registered № _____) (Address: 100170, Uzbekistan, Tashkent city, Mirzo Ulugbek area, Mirzo Ulugbek str.,81, Ph.: (99871) 262-75-44

Abstract of dissertation sent out on « ___ » _________ 2020.
(mailing report № __ on « ___ » ____________ 2020).

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.Sc., Professor

J.Q.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, PhD.

A.Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.Sc., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the dissertation topic. Studying properties of special functions, related with solutions of fractional differential equations and their applications in certain investigations of direct and inverse problems for fractional order partial differential equations are essential. Especially, boundary-value problems for mixed differential equations involving fractional integral-differential operators is one of the important problems.

The aim of the research work is to solve direct and inverse source problems for partial differential equations of different type with integral-differential operators in mixed domains, to study properties of Mittag-Leffler type functions of two variables, connected with inverse source problems for mixed equations with Caputo and Hilfer fractional derivatives.

The tasks of research work:

to prove a unique solvability of nonlocal problems with integral transmitting conditions for mixed type equations with Caputo, Riemann-Liouville fractional differential operators in mixed domains;

to study inverse source problems for degenerate partial differential equations involving Caputo, Riemann-Liouville and hyper-bessel operators;

to define conditions of unique solvability of inverse source problems for mixed equations with several fractional derivatives;

to prove regular solvability of boundary-value problems for partial differential equations with Bessel operator;

to develop methods of solving boundary-value problems for mixed equations consisting of fractional diffusion equation in mixed domains.

The object of the research work is integro-differential operators of fractional order in the sense of Caputo, Riemann-Liouville, Caputo-Fabrizio, and Hilfer, fractional order partial differential equations.

Scientific novelty of the research work is as follows:

a unique solvability of nonlocal problems with integral transmitting conditions for mixed equations with Caputo, Riemann-Liouville fractional differential operators in mixed domains has been proved;

regular solvability of direct and inverse source problems for partial differential equations with several Caputo operators and Bessel operator has been proved;

method for solving nonlocal boundary-value problems for mixed type equation consisting of fractional order diffusion equation in mixed domain which contains a rectangle and characteristic triangles has been developed;

weak solvability of inverse source problems for mixed type equation with fractional order Caputo operator and uniformly elliptic operator has been proved;

solvability conditions for nonlocal inverse source problems for mixed type equations with Caputo fractional derivative have been defined;

new properties of the Green's function of the first boundary problem for diffusion-wave equation with the Riemann-Liouville fractional derivative, Mittag-Leffler type functions of two variables, successfully applied to the studying of direct and inverse source problems for partial differential equations with different fractional integral-differential operators.

The outline of the thesis. Dissertation work is devoted to the investigation of direct and inverse problems for different type of partial differential equation with several fractional order differential operators in mixed domains and properties of the Mittag-Leffler function of two variables, connected with inverse problems for mixed equations with Caputo and Hilfer operators.

In conclusion, we can make the following remarks on results of the investigation:

1. New statements containing several properties of the Green's function of the first boundary problem for diffusion-wave equation with the Riemann-Liouville fractional derivative and two variable Mittag-Leffler type functions, which are used at studying direct and inverse problems for different type partial differential equations, have been proved. Obtained results allows to consider problems for such equations in more composite domains, motivated from practical problems, and also investigate boundary problems for higher order fractional order partial differential equations.

2. On certain conditions to the given functions and parameters, theorems on unique solvability of series of nonlocal boundary-value problems with integral transmitting conditions for mixed type equations with Caputo integral-differential operator in mixed domains, have been proved. Obtained results generalize results of previous investigated problems for integer order equations and allows considering new class of boundary-value problems for mixed-composite type equations.

3. Correctness of some local and nonlocal direct and inverse problems for different type partial differential equations with Caputo, Hilfer, uniformly elliptic and Bessel operators, has been established. Obtained results might be used in concrete mathematical models, related with the diffusion-wave processes and groundwater movements in porous media. Moreover, results might be base for further development of investigation of inverse problems for mixed equations.

4. Concrete examples of inverse source problems, connected with molecular diffusion in soils, groundwater movement, gas flow in porous media. Influence character of parameters of governing equation have been analyzed.

5. Methods and results of the dissertation work might be used in approaches of fractional calculus, differential and integral equations, equations of mathematical physics, chapters can be base for content of special courses for students with major "Mathematics".

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Karimov E.T. Non-local problems with special gluing condition for the parabolic-hyperbolic type equation // PanAmerican Mathematical Journal. -International Publications, 2007. –v.17.- № 2. -P.11-20. (SCImago 0.19).
2. Karimov E.T. Some non-local problems for the parabolic-hyperbolic type equation with complex spectral parameter // Mathematische Nachrichten. -John Wiley & Sons, 2008. –v.281. -№ 7. –P.959-970 (2. Journal IF: 1.017).
3. Berdyshev A.S., Cabada A., Karimov E.T. On a non-local boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville fractional differential operator // Nonlinear analysis: Real World Applications. –Elsevier, 2012. –v.75. –P.3268-3273. (2. Journal IF: 1.659)
4. Karimov E.T., Sotvoldiyev A.I. Existence of solutions to non-local problems for parabolic-hyperbolic equations with three lines of type changing // Electronic Journal of Differential Equations. -Texas University in San-Marcos, 2013. –v. -№ 138. –P.1-5. (2. Journal IF: 0.954)
5. Karimov E.T., Akhatov J.S. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. -Texas University in San-Marcos, 2014. –v. 2014. -№ 14. –P.1-6. (2. Journal IF: 0.954)
6. Салахитдинов М.С., Каримов Э.Т. Об одной нелокальной задаче с условия-ми сопряжения интегрального вида для параболо-гиперболического уравнения с оператором Капуто // ДАН РУз.- Ташкент, 2014. -№ 4. –С.6-9. (01.00.00; № 7)
7. Каримов Э.Т. Краевые задачи с интегральным условием сопряжения для параболо-гиперболического уравнения с оператором Капуто в области с отходом от характеристики // УзМЖ. -Ташкент, 2014. -№ 2. –С.66-77. (01.01.01, № 6).
8. Berdyshev A.S., Karimov E.T., Akhtaeva N.S. On a boundary-value problem for the parabolic-hyperbolic equation with the fractional derivative and the sewing condition of the integral form // AIP Proceedings. -American Institute of Physics, 2014. –v.1611. –P. 133-137. (SCImago 0.16)
9. Feng P., Karimov E.T. Inverse source problems for time-fractional mixed parabolic-hyperbolic type equations // Journal of Inverse and Ill-posed problems. -DeGruyter, 2015. –v. 23. - № 4. –P.339-353. (2. Journal IF: 0.783)
10. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Uniqueness of inverse source non-local problem for fractional order mixed type equation // Eurasian Mathematical Journal. -Eurasian National University, 2016. - № 1. –P.74-83. (SCImago 0.51).
11. Karimov E., Al-Salti N., Kerbal S. An inverse source non-local problem for a mixed

type equation with a Caputo fractional differential operator // East Asian Journal of Applied Mathematics. -Cambridge University Press, 2017. –v.7. - № 2. –P.417-438 (2. Journal IF: 0.426).
12. Karimov E.T., Berdyshev A.S., Rakhmatullaeva N.A. Unique solvability of a non-local problem for mixed-type equation with fractional derivative // Mathematical Methods in the Applied Sciences. -John Wiley & Sons, 2017. –v. 40. - № 8. –P.2994-2999 (2. Journal IF: 1.017)
13. Kerbal S., Karimov E., Rakhmatullaeva N. Non-local boundary problem with integral form transmitting condition for fractional mixed type equation in a composite domain // Mat. Model. Nat. Phenom. -EDP Sciences, 2017. –v. 12. - № 3. –P.95-104 (2. Journal IF: 0.952).
14. Agarwal P., Berdyshev A., Karimov E. Solvability of a non-local problem with integral transmitting condition for mixed type equation with Caputo fractional derivative // Results in Mathematics. -Springer, 2017. –v. 71. -№ 3. –P.1235-1257. (2. Journal IF: 0.693).
15. Karimov E.T., Kerbal S., Al-Salti N. Inverse source problem for multi-term fractional mixed type equation // Advances in Real and Complex Analysis with Applications, Trends in Mathematics. -Springer, 2017.–P.289-301. (SCImago 0.29).
16. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Direct and inverse source problems for two-term time-fractional diffusion equation with Hilfer derivative // УзМЖ. -Ташкент, 2017. - № 4. –С.140-149 (01.01.01, № 6)
17. Al-Musalhi F., Al-Salti N., Karimov E. Initial boundary value problems for a fractional differential equation with hyper-Bessel operator // Fract. Calc. Appl. Anal. –DeGruyter, 2018. –v. 21. -№1. –P.200-219. (2. Journal IF: 3.514)
18. Karimov E.T. Tricomi type boundary value problem with integral conjugation condition for a mixed type equation with Hilfer fractional operator // Bulletin of the Institute of Mathematics. –Tashkent, 2019. -No 1. –P.19-26. (01.01.01, № 17)

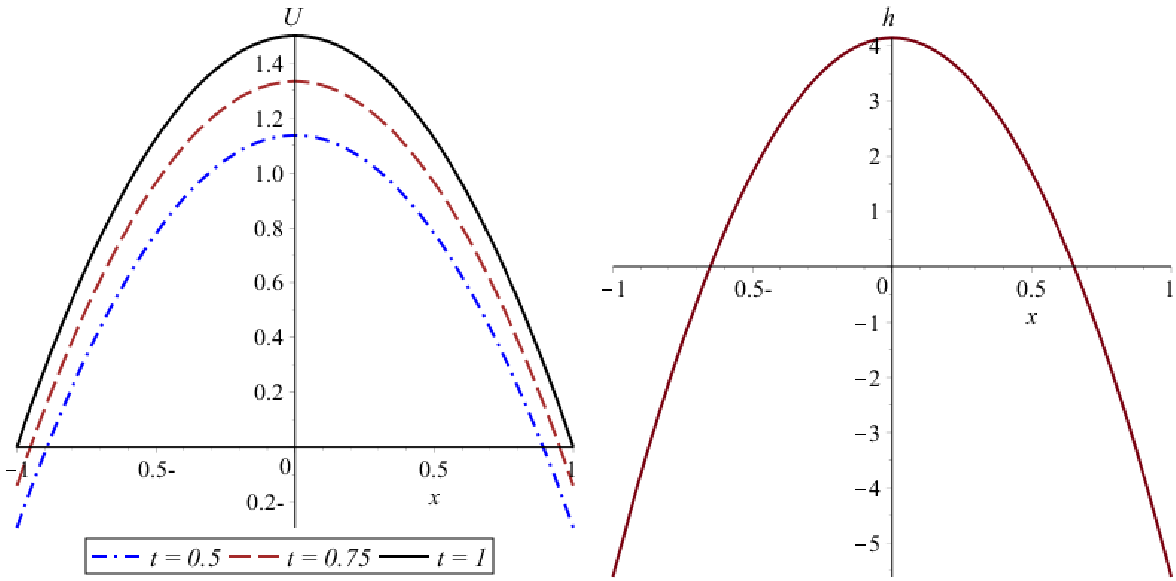
II бўлим (II часть; II part)

19. Каримов Э.Т., Бердышев А.С. Задача Трикоми со специальным условием склеивания интегрального вида для параболо-гиперболического уравнения // Тезисы научно-практического семинара «Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа». 5-6 июля 2012 года. – Самарканд, 2012. -С.19-20.
20. Каримов Э.Т., Бердышев А.С. Об одной краевой задаче с интегральным условием склеивания для параболо-гиперболического уравнения // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». 12-14 сентября, 2012 года. - Ташкент, 2012. –С.115-116.
21. Каримов Э.Т., Бердышев А.С., Ахтаева Н.С. Краевая задача с интегральным условием сопряжения для смешанного параболо-гиперболического уравнения

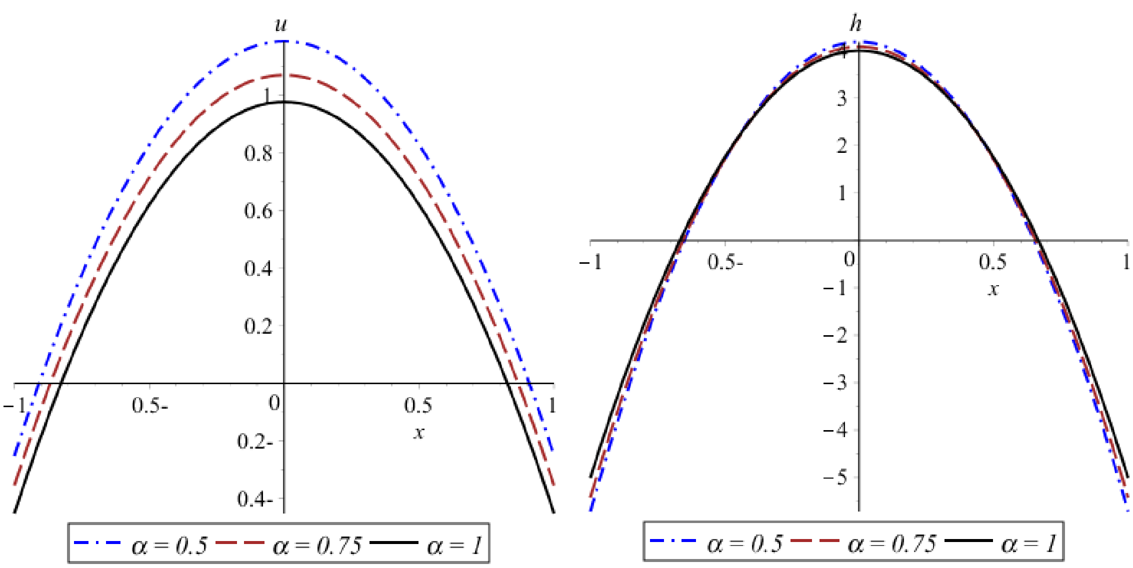
с нехарактеристической линией изменения типа // Труды межд. науч. конф. “Дифференциальные уравнения и смежные проблемы”. 26-30 июня, 2013 года. – Стерлитамак, 2013. –Т. 1. –С.132-135.
22. Каримов Э.Т., Ахатов Ж.С. О единственности решения одной задачи с интегральным условием склеивания для параболо-гиперболического уравнения с оператором дробного дифференцирования Капуто // Республика олий ўқув юртлараро илмий-амалий конференция материаллари «Математика ва уни ўқитишнинг инновацион методлари». - Тошкент, 2013. –С.49-52.
23. Каримов Э.Т., Бердышев А.С. О краевой задаче с условием склеивания интегрального вида для параболо-гиперболического уравнения с дробным оператором Капуто // Труды международной научно-практической конференции «Современные проблемы спектральной теории операторов и улучшения качества обучения математике». –Тараз, 2013. -С.152-154.
24. Каримов Э.Т., Бердышев А.С. Об одной нелокальной задаче с условием склеивания интегрального вида для параболо-гиперболического уравнения // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». 21-23 ноября, 2013 года. - Ташкент, 2013. -С.40-41.
25. Salakhitdinov M.S., Karimov E.T. Non-local boundary value problem with integral gluing condition for mixed type equation involving Caputo fractional derivative // Abstracts of the International Congress of Mathematics. August 13-21, 2014. -Seoul, 2014. -P.369-371.
26. Karimov E.T. On some applications of special functions to the investigation of boundary-value problems for PDEs // Abstracts of the 22nd International Conference on Finite and Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. August 8-11, 2014. - Gyeongju, 2014. -P.62.
27. Каримов Э.Т. Об одной нелокальной задаче для параболо-гиперболического уравнения с негладкой линией изменения типа // Труды международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Ал-Хоразмий 2014». 15-17 сентября, 2014 г. - Самарканд, 2014.
28. Каримов Э.Т. О задаче идентификации функции источника для уравнения смешанного типа с оператором дробного дифференцирования // Материалы Третьей международной Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики». 3-7 декабря, 2014 г. – Терскол, 2014. -С.94-96.
29. Karimov E.T. Inverse source problems for partial differential equations involving fractional derivatives // Abstracts of the 24th International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications. August 22-26, 2016. – Jaipur, 2016. -P.16.

30. Karimov E.T., Kerbal S., Al-Salti N. Inverse source problem for multi-term fractional mixed type equation // Тезисы республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные проблемы динамических систем и их приложения».1-3 Май, 2017. – Ташкент, 2017. –С.78.
31. Karimov E.T. On a boundary problem for mixed type equation with fractional derivative // Abstracts of 2nd USA-Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics. August 8-12, 2017. - Urgench, 2017. -P.58.
32. Agarwal P., Karimov E., Mamchuev M., Ruzhansky M. On boundary-value problems for a partial differential equation with Caputo and Bessel operators // Novel Methods in Harmonic Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. - Birkhäuser Basel, 2017. -v. 2. –P.707-719.
33. Al-Salti N., Karimov E. Inverse source problems for degenerate time-fractional PDE // Неклассические уравнения математической физики и их приложения (Тезисы докладов). –Ташкент, 2019. –С.89-90.
34. E.T.Karimov, S.Kerbal. Tricomi type problem for mixed type equation with sub-diffusion and wave equation // ФДУ. Илмий хабарлар. -Фергана, 2019. -No 3. –С.9-14.
35. Karimov E., Mamchuev M., Ruzhansky M. A Non-local initial problem for second order time-fractional and space-singular equation // Управление, оптимизация и динамические системы (Тезисы докладов). –Андижан, 2019. –С.83-85.

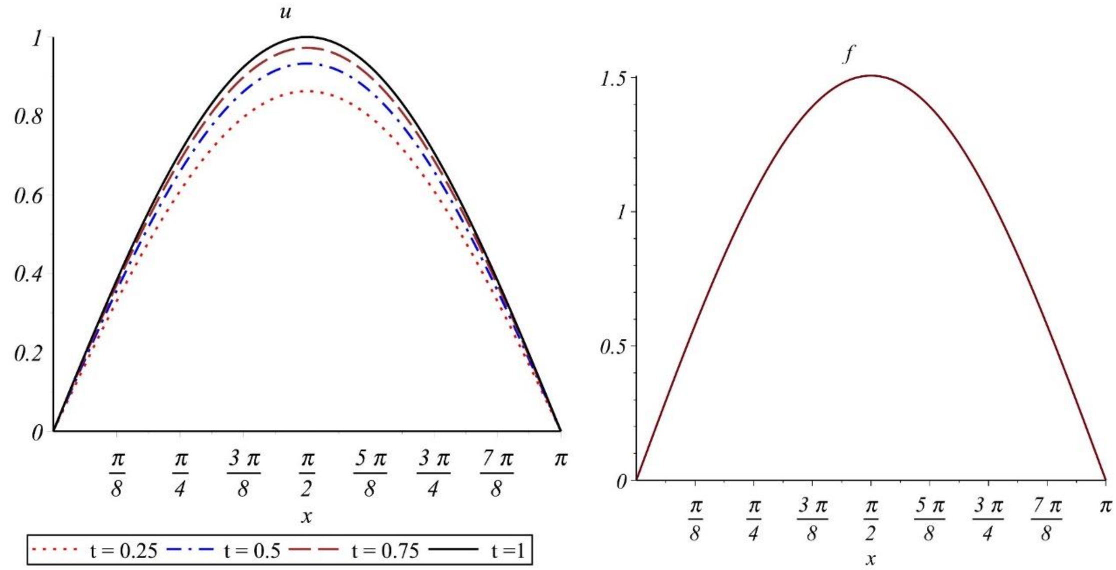
ИЛОВА ПРИЛОЖЕНИЕ APPENDIX



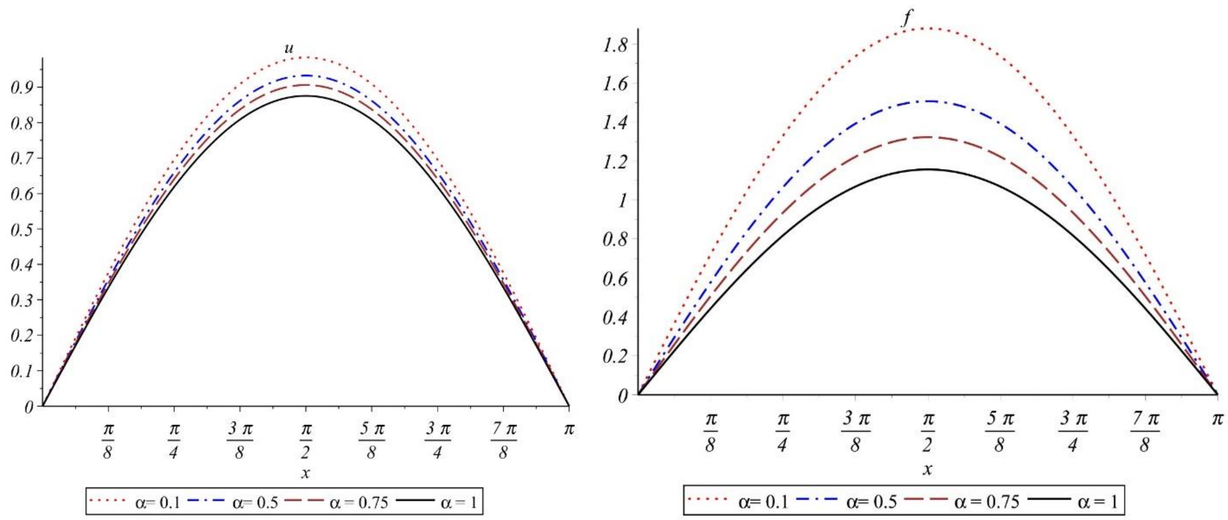
Фигура 4.1.2. Изменения концентрации и источника кислорода в разный момент времени в определенном значении дробного порядка.



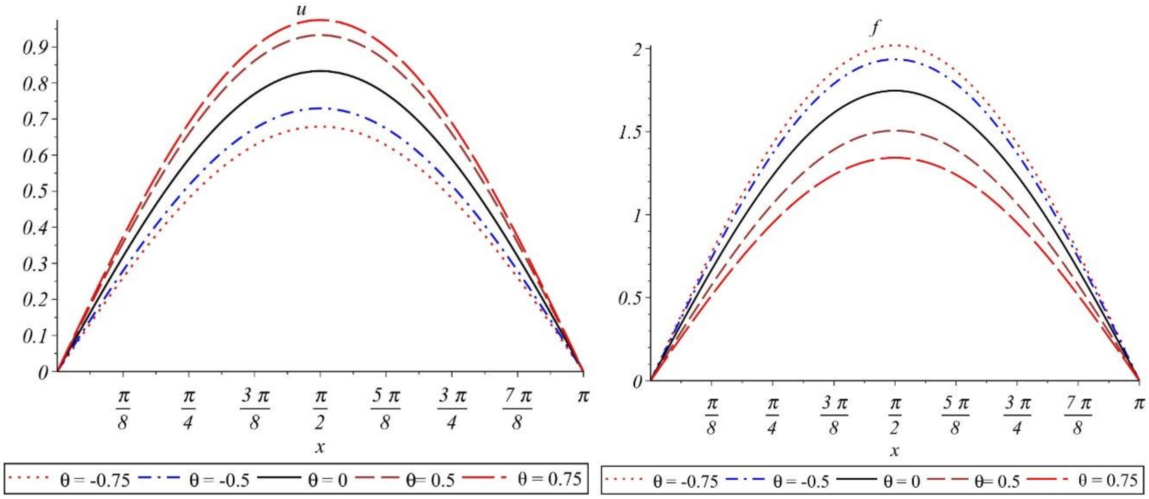
Фигура 4.1.3. Влияние дробного порядка на концентрацию и источника кислорода в почве.



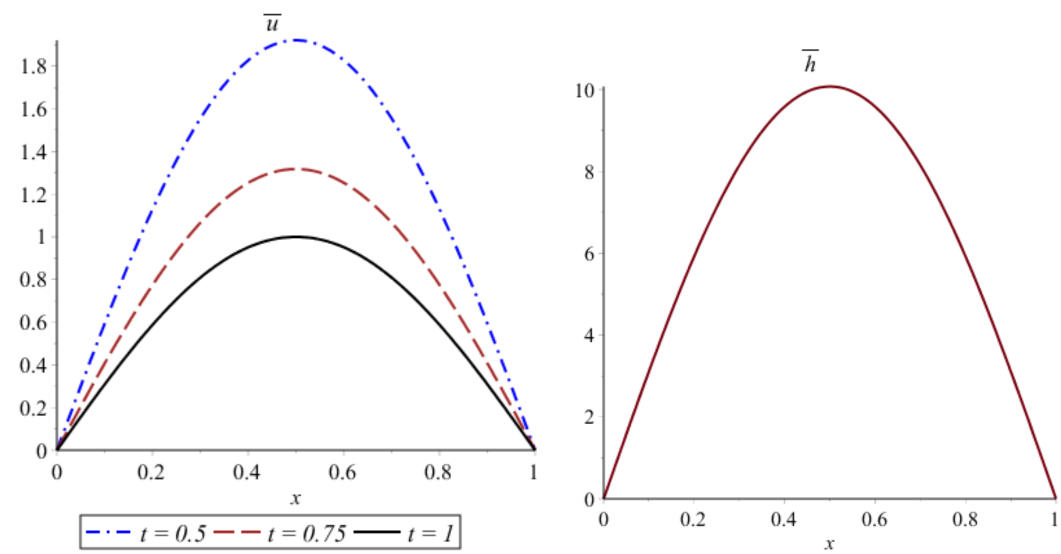
Фигура 4.1.4. Случай, фиксирования дробного порядка и специальную зависимость эффекта памяти от времени.



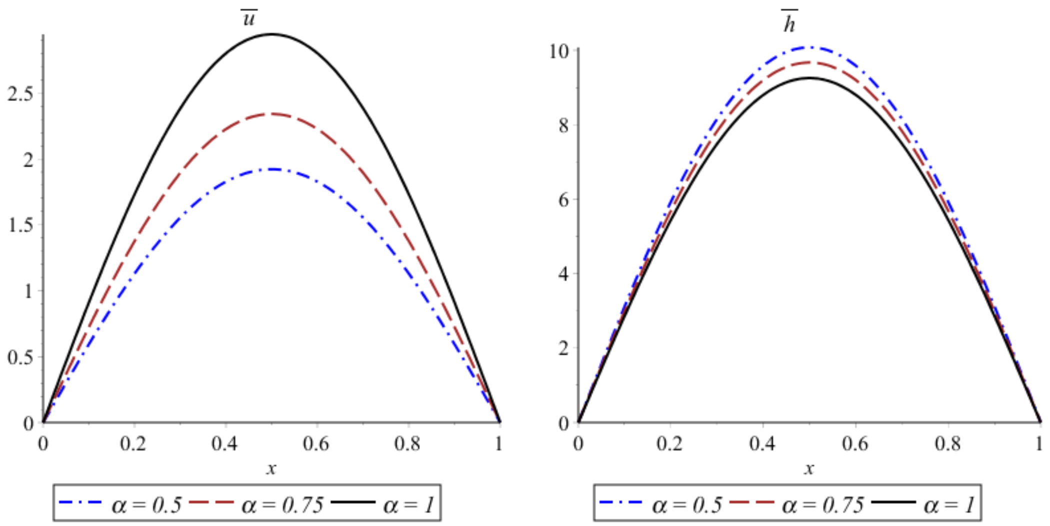
Фигура 4.1.5. Случай, когда фиксируется время и специальная зависимость эффекта памяти.



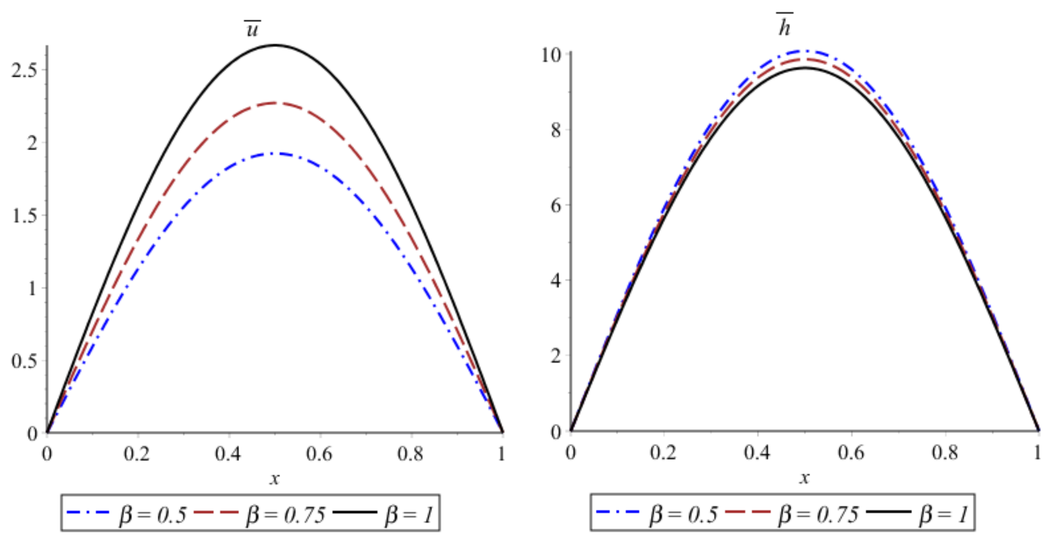
Фигура 4.1.6. Влияние специальной зависимости эффекта памяти на решения при фиксированной момент времени и дробного порядка.



Фигура 4.1.7. Изменения концентрации и источника кислорода в почве, когда фиксируется дробный порядок и порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени.



Фигура 4.1.8. Изменения концентрации и источника кислорода в почве при разных дробных порядках, когда время и порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени фиксированы



Фигура 4.1.9. Изменения концентрации и источника, когда фиксируется время и дробный порядок, а порядок зависимости диффузионного коэффициента от времени меняется.