ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЯКУБОВ АЛИШЕР САМАНДАРОВИЧ

ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ НОДИВЕРГЕНТ НОЧИЗИҚЛИ СИСТЕМАЛАР БИЛАН ИФОДАЛАНУВЧИ ЖАРАЁНЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА фанлари доктори (DSc) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

УДК 519.957

Физика-математика фанлари доктори (DSc)
диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата дисертации доктора (DSc)
по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor
of physical and mathematical sciences (DSc)

Матякубов Алишер Самандарович
Параболик типдаги нодивергент ночизиқли системалар билан ифодаланувчи жараёнларни сонли моделлаштириш.............................. 3

Матякубов Алишер Самандарович
Численное моделирование процессов, описываемых нелинейными системами параболического типа в недивергентном виде…................... 32

Matyakubov Alisher Samandarovich
Numerical modeling of processes described by nonlinear systems of parabolic type in a non-divergent form ……………………………………… 61

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works... 66

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МАТЯКУБОВ АЛИШЕР САМАНДАРОВИЧ

ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ НОДИВЕРГЕНТ НОЧИЗИҚЛИ СИСТЕМАЛАР БИЛАН ИФОДАЛАНУВЧИ ЖАРАЁНЛАРНИ СОНЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА фанлари доктори (DSc) диссертацияси

АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

Фан доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.2.DSc/FM78 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифасида (ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Арипов Мирсаид Мирсидикович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Маматов Алишер Зулунович** техника фанлари доктори, профессор
	Полатов Асхад Муҳамеджонович физика-математика фанлари доктори, профессор
	Холмуродов Абдулхамид Эркинович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Термиз давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «18» июнь соат 14^00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (44 рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2020 йил «15» июнь куни тарқатилди.
(2020 йил 17-рақамли реестр баённомаси).

А. Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Б.Ф.Абдурахимов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фан доктори (DSc) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Охирги 30 йил мобайнида жаҳон миқёсида фаннинг механика, физика, технология, биофизика, биология, экология, тиббиёт ва бошқа турли соҳаларида учрайдиган, ночизиқли дифференциал тенгламалар орқали ифодаланувчи ҳодиса ва жараёнларнинг математик моделларини ўрганишга катта қизиқиш борлиги кузатилмоқда. Бундай моделларнинг асосини параболик типдаги хусусий ҳосилали ночизиқли дифференциал тенгламалар ташкил этади. Бироқ бугунги кунда тақрибий автомодел ечимларни ўрганаётган, адекват математик моделлаштириш ва компьютер тажрибалари билан тасдиқланган, А.А. Самарский, Курдюмов С. П., В. А. Галактионов, J. Vazguez, Junger ва М.М. Арипов илмий мактаблари яратаётган усуллар мунтазам ўрганилаётган бўлсада, турли ночизиқли математик моделлар учун ҳозирда етарлича асосланган назариялар мавжуд эмас.

Мустақиллик йилларида мамлакатимизда механикада ғовак тупроқдаги фильтрлаш, тиббиётда майда қон томирларида қоннинг ҳаракатланиши, экологияда чиқиндиларнинг буғланиб тарқалиши, биологик популяциянинг ўсиши ва кўчиши жараёнларини ифодаловчи ничизиқли математик моделлар ўрганилган. Шу нуқтаи назардан, қатор математик моделларни ривожлантириш ва мавжуд тадқиқот усулларини умумлаштириш устида салмоқли илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системалари орқали ифодаланувчи жараёнлар ночизиқли математик моделларининг тадқиқ этилиши ва амалиётга татбиқ этиш юзасидан қуйидаги йўналишлардаги илмий-тадқиқот изланишларини амалга ошириш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади: ночизиқли параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаларининг сифат хоссаларини ўрганиш усулларини ишлаб чиқиш; турли фазоларда ечим асимптотикаларини топиш; ечимлар баҳоларини аниқлаш; чизиқсиз жараёнларнинг математик моделларини ўрганишга ёрдам берувчи амалий дастурлар мажмуини яратиш; жараёнларни вақт бўйича кечишини назорат қилиш. Юқорида келтирилган илмий-тадқиқотлар йўналишида бажарилаётган илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2012 йил 21 мартдаги ПҚ-1730-сон «Замонавий ахборот-коммуникация технологияларини жорий этиш ва янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2010 йил 15 декабрдаги ПҚ-1442-сон «Ўзбекистон Республикасининг саноатини 2011-2015 йилларда ривожлантиришнинг устувор йўналишлари ҳақида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарорлари ва Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2012 йил 1 февралидаги 24-сонли

«Жойларда компьютерлаштириш ва ахборот коммуникация технологияларини бундан кейинги ривожлантиришга шароитлар яратиш учун чора-тадбирлар тўғрисида»ги қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли барча меъёрий-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи [1].

Ночизиқли математик моделлар автомодел ечимларининг сифат хоссаларини тадқиқ этиш бўйича илмий изланишлар жаҳоннинг етакчи олий таълим муассасалари ва илмий марказлари, жумладан, Institute for Calculus Applications (Италия), Mathematisches Institut, RWTH Aachen University (Германия), Universidad Carlos III de Madrid (Испания), National Taiwan Normal University (Тайвань), Zhongshan University, Jilin University, Southeast University, Nantong University, Central South University (Китай), Purdue University (АҚШ), University of Oxford (Буюкбритания), Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine (Франция), Viena University (Австрия), Bath mathematical center (Буюкбритания), Россия ФАнинг Амалий математика институти, Москва давлат университетида (Россия), Қозоғистон миллий университети, Математика ва математик моделлаштириш институти (Қозоғистон), Ўзбекистон Миллий университети, Самарқанд давлат университети, Урганч давлат университети (Ўзбекистон)да олиб борилмоқда.

Параболик типдаги нодивергент тенгламалар ва тенгламалар системаларини тадқиқ этишга оид жаҳонда олиб борилган тадқиқотлар натижасида қатор илмий натижалар олинган, жумладан: ечимнинг мавжудлик ва ягоналик шартлари топилган, Коши масаласининг вақт бўйича ечимлари хоссалари ўрганилган (Institute for Calculus Applications, Mathematisches Institut, RWTH Aachen University, Purdue University), ночизиқли диффузия тенгламалари учун blow-up ечимлари тарқалиш тезлиги ва мавжудлик шартлари топилган (Universidad Carlos III de Madrid, National Taiwan Normal University, Southeast University, Nantong University, Jiangsu University), бошланғич-чегаравий масаланинг ечимлари локаллашиш хоссасига эга эканлиги исботланган ва ечим баҳоси олинган (Zhongshan University, Jilin University), глобал ечим мавжудлиги критик экспонента қиймати топилган (Central South University).

Дунёда ночизиқли жараёнларни сонли моделлаштириш бўйича бир қатор устувор йўналишларда илмий тадқиқот ишлари олиб борилмоқда, жумладан: чизиқсиз масалаларда вақт бўйича глобал ечимларнинг мавжуд бўлиш шартларини топиш; чекли тезликда тарқалишини аниқлаш; автомодел

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе следуюших источников: Universal Journal of Computional Mathematics, International Mathematical Journals: Nonlinear Analysis, Applied Mathematical Modelling, Computational Mathematics and Mathematical Physics, http://www.springer.com/mathematics; http://www.sciencedirect.com/science/jrnlallbooks /sub/mathematics.

ечимлар хоссаларини, ечимларнинг асимптотик ҳолатини ўрганиш; эффектив сонли схемаларни таклиф қилиш ва асослаш; чизиқсиз жараёнларни сонли ўрганишга имкон берувчи дастурий воситалар мажмуини ишлаб чиқиш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Нодивергент ночизиқли тенгламалар ечимлари хоссаларини тадқиқ этиш Фридман ва Маклеод томонидан бошланган. Бу даврда дунё олимлари илмий тадқиқотларида асосий эътибор асосан глобал ечимларнинг мавжудлиги, чекли вақтда чегараланмаган ечим хоссаларини ўрганишга қаратилган. Турли жабҳаларда учрайдиган ночизиқли жараёнларнинг ўрганилаётган математик моделлари натижалари тадбиқ этилди, манба ёки ютилишга эга ночизиқли муҳитларда дивергент тенгламаларга хос бўлмаган янги эффектлар топилди. Жумладан, H.Fujita, M.Bertsch, M.Wiegner, T.Tsutsumi, P. Markovich, M.Ishiwata, M.Wang, S.Zhou, О.А.Олейник, А.С.Калашников, Ю.А.Дубинский, А.И.Кожанов томонидан ечимнинг чегараланмаганлиги, чекли тезликда тарқалиш эффекти ва иссиқлик тарқалишининг фазовий локаллашиши, манба ёки ютилишга эга ночизиқли муҳитларда таъсирланиш жараёнининг чекли вақт мавжуд бўлиши кабилар аниқланди.

Нодивергент тенглама умумлашган ва глобал ечимларини ўрганиш бўйича A.Friedman, J.Mcleod, M.Bertsch, M.Wiegner, T.Tsutsumi, M.Ishiwata, M.Wang, S.Zhou; ечим асимптотикаларини ўрганиш бўйича Gage E., Angenent S., Wiegner M., Winkler M., Jin Ch., Yin J.; параболик типдаги нодивергент квазичизиқли тенглама ва тенгламалар системаси учун Дирихле масаласи билан ифодаланувчи жараёнлар математик модели хусусиятларини аниқлаш бўйича W.Du, J.Yin, Y.Wang, M.X.Wang, Z.Xiang, M.Yongsheng, S.N.Zheng, M.Winkler; нодивергент тенглама ва тенгламалар системаси учун Коши масаласи глобал ечимлар мавжудлиги, blow-up ечимларни тадқиқ этиш бўйича Deng W., Li Y., Xie Ch., Lu H., Duan Z., Zhou L., Wang M., Wei Y., Sun Y., Shi Y., Wu M., Huiling Li, Yang Zhang, Koichi Anadaa, Tetsuya Ishiwatab, Ferreira R., de Pablo A., Rossi J.D. Yunzhu Gao,Qiu Meng, Yingjia Guo, Zhi-wen Duan, Li Zhou лар шуғулланишган.

Ўзбекистонда ночизиқли диффузия масалалари билан Н.Муҳитдинов, Б.М.Хужаяров, А.С.Расулов, М.Арипов, Н.Равшанов, Ж.Тохиров, Кортевег-де Фриз тенгламалар учун турли масалалар билан О.Ҳасанов, Г.Ўрозбоев ва уларнинг шогирдлари шуғулланишган. Уларнинг асосий ишлари дивергент тенглама ва тенгламалар системаси билан ифодаланадиган ночизиқли диффузия масаласи ечимлари хоссаларини сонли ўрганишга бағишланади ва бу методларни фильтрация, диффузия, иссиқлик ўтказувчанлик жараёнларини моделлаштиришга қўллаш мумкин. Нодивергент тенглама ва тенгламалар системасига оид илмий ишлар билан М.Арипов, Ш.Садуллаева, Д.Мухаммадиева, Ж.Раимбеков, М.Хожимуродовалар шуғулланишган. Улар томонидан автомодель таҳлил асосида табиатшуносликнинг турли соҳаларида учрайдиган жараёнларни ифодаловчи ночизиқли масалалар ечимларининг сифат хоссалари тадқиқ этилган ва сонли ечилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ, А-5-44 «Колмогоров-Фишер типидаги чизиқсиз биологик популяция системаларини сонли моделлаштириш» (2015-2017), ОТ-Ф4-30 «Икки марта ночизиқли кросс системанинг конвектив кўчиш, ўзгарувчан зичлик, манба ёки ютиш таъсиридаги сифат хоссаларини тадқиқ қилиш» (2017-2019 гг) мавзуларидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бир жинсли ва ўзгарувчан зичликли муҳитларда манба ёки ютилишга эга квазичизиқли параболик типдаги нодивергент тенгламалар системалари (crosswise) билан ифодаланувчи жараёнларнинг ночизиқли математик моделларининг сифат хоссаларини сонли ва аналитик тадқиқ этиш, ночизиқли чегаравий масалаларни сонли ечиш учун дастурий воситалар мажмуини яратишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

бир жинсли бўлмаган муҳитда биологик тур диффузияси жараёни ночизиқли модели ечимларининг вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартларини топиш;

нодивергент кўринишдаги ва ўзгарувчан зичликка эга политропик фильтрация жараёни математик моделининг секин диффузияли ҳоли учун тарқалиш тезлигининг чеклилиги ва фазовий локаллашув шартларини топиш;

манба ва ўзгарувчан зичликка эга бузилувчи нодивергент тенгламалар системаси учун Коши ва чегаравий масалаларнинг компакт юритувчили умумлашган ечимларининг асимптотик ифодаларини тадқиқ қилиш;

манба ва ўзгарувчан зичликка эга биологик тур диффузияси системаси ночизиқли математик модели ечимларининг вақт бўйича глобал бўлиш ва бўлмаслик шартларини топиш;

манба ва ўзгарувчан зичликка эга нодивергент параболик тенгламалар системаси учун Зельдович-Баренблатт туридаги ечимлар қуриш ва тарқалиш тезлигининг чеклилиги хусусиятлари ва фазовий локаллашув шартларини исботлаш;

ўзгарувчан зичлик ва манба билан берилган биологик тур диффузияси жараёнлари ночизиқли математик моделларининг сифат хоссаларини ўрганиш учун сонли ҳисоблаш схемаларини, алгоритмини ва дастурий воситалар мажмуини ишлаб чиқиш, ҳамда ечимларни визуаллаштириш;

Тадқиқотнинг объекти параболик типдаги бузилувчи нодивергент тенгламалар системаси билан ифодаланувчи ночизиқли биологик тур диффузияси, икки компонентали ночизиқли муҳитларда иссиқлик тарқалиши, газ ва суюқликларда фильтрация жараёнларидан иборат.

Тадқиқотнинг предметини муҳитнинг бир жинслилиги ва бир жинсли эмаслигини ҳисобга олган ҳолда икки карра ночизиқли ва нодивергент кўринишдаги масалаларни сонли-аналитик жиҳатдан тадқиқ этиш усуллари ва амалиёти ташкил этади.

Тадқиқот усуллари. Тадқиқот ишида автомодель ва тақрибий автомодель усулларидан, турли турдаги ечимларни қуриш ва таҳлил қилиш учун солиштириш теоремалари, оддий ночизиқли дифференциал тенгламалар системаларини ечиш учун эталон тенгламалар методи, ечимларни баҳолаш усуллари, сонли схемаларни қуриш учун айирмали схемалар, итерация, ҳайдаш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

манбасиз ёки манбага эга бир жинсли муҳитда биологик тур диффузияси ночизиқли модели учун вақт бўйича глобал ва глобал бўлмаган ечимларга эга бўлиш шартлари аниқланган;

бир жинсли бўлмаган муҳитда ночизиқли масалаларнинг вақтга кўра глобал ечимга эга бўлишлик ва эга бўлмаслик шартларига таъсири аниқланган;

бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган муҳитда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси учун Коши масаласининг умумлашган ечимлари учун қуйи ва юқори баҳолар қурилган;

эталон тенгламалар усули ёрдамида параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси учун Коши масаласининг турли автомодель ечимлар асимптотикаларининг бош ҳадлари олинган;

манбасиз ёки манбага эга параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси учун Зельдович-Баренблатт туридаги ечимлар ва улар асосида тарқалиш тезлигининг чеклилиги хусусиятлари аниқланган;

ўзгарувчан зичликли биологик тур диффузияси ночизиқли математик моделларининг сифат хоссаларини ўрганиш учун сонли ҳисоблаш схемалари қурилган, алгоритмлар, дастурий воситалар комплекси Matlab муҳитида ишлаб чиқилган ва ночизиқли масалаларнинг ечимлари визуаллаштирилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Турли соҳаларда вужудга келадиган ночизиқли масалаларни ечиш учун асимптотик формулалар қурилган, консерватив айирмали схемалар ва итерацион жараён қурилган, ҳамда дастурлар мажмуи яратилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Олинган натижалар ва тасдиқлар қатъий исботланган ва сонли тадқиқотлар натижалари билан тасдиқланган. Ечимлар учун олинган баҳолардан фойдаланган ҳолда ечимларнинг сонли таҳлили келтирилган бўлиб, улар диссертация ишида таклиф этилган усулларини ҳамда эталон тенгламалар методи ва ночизиқли эффектларни сақлаган ҳолда автомодель таҳлилга асосланган ҳисоблаш методларининг тўғрилигини ва самарадорлигини тасдиқлаганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларнинг илмий аҳамияти шундан иборатки, шунга ўхшаш масалаларни ечишда Коши масаласи ва ночизиқли математик моделлар ечимларининг глобал мавжудлиги назариясини қўллаш ҳамда олинган натижалар биологик тур диффузияси, Колмогоров-Фишер туридаги биологик популяция масаласи, инфекцион касалликлар тарқалиши, кучсиз магнит майдонларида резистив диффузия ҳодисалари ночизиқли моделларида қўллаш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот ишининг амалий аҳамияти қурилган итерацион жараёнлар, ишлаб чиқилган сонли схемалар ва дастурий воситалар комплекси турли ночизиқли икки компонентали муҳитларда диффузия, фильтрация, реакция-диффузия, иссиқлик ўтказувчанлик масалаларининг секин ва тез кечувчи диффузия ҳолларида сонли ҳисоблаш экспериментларини ўтказишга имкон беради ҳамда ўрганилаётган ночизиқли масалалар синфи учун янги эффектлар – ечимнинг локаллашуви ва чекли тарқалиш ҳодисаларини аниқлашга хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси билан ифодаланадиган биологик тур диффузияси жараёнлари тадқиқотида олинган натижалар қуйидагича амалиётга жорий қилинган:

бир жинсли бўлмаган муҳитда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси билан ифодаланадиган ночизиқли моделлар ечимлари вақтга кўра глобал ечимга эга бўлишлик ва эга бўлмаслик шартлари РФФИ №18-51-41002 «Кесишиш эффектлари билан диссипатив яқинлашишда икки фазали муҳитнинг термодинамик изчил моделини математик моделлаштириш» грант лойиҳасида тўғридан-тўғри ва тескари масалаларнинг ечимини исботлашда қўлланилган (РФА СБ Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти (Россия)нинг 2019 йил 12 сентябрдаги 15301/09-324-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши априор ахборотларни ҳисобга олиш имконини берган;

параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси билан ифодаланадиган биологик популяция ва бир жинсли бўлмаган муҳитда иссиқлик тарқалиш жараёнларини сонли ечишда ечим асимптотикаларини (асимптотиканинг бош ҳадлари) бошланғич берилганлар сифатида асослаш РФФИ №18-51-41002 «Кесишиш эффектлари билан диссипатив яқинлашишда икки фазали муҳитнинг термодинамик изчил моделини математик моделлаштириш» грант лойиҳасида тўғридан-тўғри ва тескари масалаларнинг ечимини исботлашда қўлланилган (РФА СБ Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти (Россия)нинг 2019 йил 12 сентябрдаги 15301/09-324-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши иссиқлик физикаси ва биологик жараёнларнинг тескари масалаларини ечишда янги сонли алгоритмларни асослаш имконини берган;

бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган муҳитда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси учун Коши масаласи умумлашган ечимларининг қуйи ва юқори баҳолари МК-1152.2018.1 «Фрактал осцилляторларнинг кенг синфини ўрганиш» грант лойиҳасида Коши масаласининг глобал ечими мавжудлигини исботлашда қўлланилган (Камчатка давлат университети (Россия)нинг 2020 йил 16 январдаги 18-22-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши ночизиқли жараёнларни визуаллаштиришга хизмат қилган ҳамда Коши масаласининг глобал ечими мавжудлигини исботлашга имкон берган;

ишлаб чиқилган алгоритмлар ва дастурий воситалар комплекси «Тўқимачилик материалларининг ғоваклиги ва ҳаво ўтказувчанлиги» грант лойиҳасида ночизиқли математик моделларни ўрганиш учун қўлланилган (Аттика ғарбий университети (Греция)нинг 2018 йил 27 июлдаги маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши тўқимачилик материалларининг ҳаво ўтказувчанлиги жараёнларини визуаллаштиришга хизмат қилган;

ўзгарувчан зичликли биологик тур диффузияси ночизиқли математик моделлари сифат хоссаларини ўрганиш учун таклиф этилган ҳисоблаш схемалари МК-1152.2018.1 «Фрактал осцилляторларнинг кенг синфини ўрганиш» грант лойиҳасида ночизиқли математик моделларни ўрганиш учун қўлланилган (Камчатка давлат университети (Россия)нинг 2020 йил 16 январдаги 18-22-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши биологик популяция ночизиқли жараёнларини визуаллаштиришга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Тадқиқот натижалари 31 та илмий-амалий анжуманларда, шу жумладан 22 та халқаро ва 9 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 49 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та мақола, жумладан 8 таси республика ва 6 таси хорижий журналларда нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация таркиби кириш, тўртта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан иборат. Диссертациянинг ҳажми 194 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурияти асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари тараққиётининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари белгилаб олинган ҳамда тадқиқот объекти ва предмети аниқланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг ишончлилиги асослаб берилган, уларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларини амалда жорий қилиш ҳолати, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Икки карра ночизиқли муҳитда биологик тур диффузияси жараёнини математик моделлаштириш»** деб номланган биринчи боби манбага эга бўлмаган бир жинсли муҳитда диффузия тенгламалар системаси учун Коши масаласи автомодель ечимлари асимптотикаларини тадқиқ этишга бағишланган.

Биринчи параграфда манбага эга ночизиқли диффузия жараёни математик моделининг хоссалари ва бу соҳада олинган халқаро илмий тадқиқотлар натижалари баёни келтирилган.

Иккинчи параграфда асосий таърифлар ва ёрдамчи тасдиқлар келтирилган.

3-параграф ночизиқли муҳитда диффузия жараёнини моделлаштирувчи параболик типдаги тенгламалар системаси учун қуйидаги Коши масаласи автомодель ечимлар асимптотикаси тадқиқига бағишланган:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = v^{m_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = u^{m_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned} \qquad (t,x)\in Q, \qquad (1)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ v(0,x)=v_0(x), \qquad x\in R, \qquad (2)$$

бу ерда $Q=R^+\times R$, p, m_1, m_2 - ҳақиқий мусбат сонлар, $u=u(t,x)\ge 0, v=v(t,x)\ge 0$ - изланаётган ечим, $u_0(x),\ v_0(x)$ - чегараланган, узлуксиз, манфий бўлмаган функциялар.

Маълумки, (1) тенгламалар системаси бузилувчи бўлиб, $u=0,\ v=0$ ёки $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|=0, \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|=0$ бўлганда классик ечимга эга бўлмаслиги мумкин. Шунинг учун унинг ечимини $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x},\ \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\in C\left(R_+^N\times(0,+\infty)\right),\ u\ge 0,\ v\ge 0$ синфда умумлашган ечим сифатида қаралади ва (1) тенгламалар системасини интеграл айният маъносида каноатлантиради.

Қуйидаги автомодель ечимни қарайлик

$$u(t,x)=(T+t)^{-\alpha_1}w(\tau,x),\ v(t,x)=(T+t)^{-\alpha_2}\psi(\tau,x),$$

$$w(\tau,x)=f(\xi),\ \psi(\tau,x)=\phi(\xi),$$

бу ерда $\tau(t)=\begin{cases} \dfrac{(T+t)^{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}}{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}, & 1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1>0, \\ \ln(T+t), & 1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1=0, \\ -\dfrac{(T+t)^{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}}{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}, & 1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1<0. \end{cases}$

$$\xi=\begin{cases} x\tau^{-\frac{1}{p}}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)\neq 0,\\ x-\tau, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)=0.\end{cases}$$

$f(\xi)$, $\phi(\xi)$ функциялар эса қуйидаги автомодель масаланинг ечими бўлади

$$\begin{aligned} Lf &\equiv \frac{1}{p}\xi\frac{df}{d\xi}+\phi^{m_1}\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)}f=0,\\ L\phi &\equiv \frac{1}{p}\xi\frac{d\phi}{d\xi}+f^{m_2}\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\phi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\varepsilon\alpha_2}{1-\alpha_1 m_2-\alpha_2(p-2)}\phi=0, \end{aligned} \qquad (3)$$

$$f(0)=M_1>0,\ \phi(0)=M_2>0,\ f(d_1)=\phi(d_2)=0,\ 0<d_1<\infty,\ \ 0<d_2<\infty. \qquad (4)$$

Секин диффузия ҳоли ($p-2-m>0,\ m=\max\{m_1,m_2\}$):

Қуйидаги функциялар

$$\bar f(\xi)=\begin{cases} A\left(a-\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_1}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)\neq 0,\\ M_1\exp(-\xi), & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)=0,\end{cases}$$

$$\bar\phi(\xi)=\begin{cases} B\left(a-\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_2}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)\neq 0,\\ M_2\exp(-\xi), & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)=0,\end{cases}$$

$\xi<a^{(p-1)/p}$ бажарилганда (4) шартни қаноатлантиради, бу ерда $\gamma=\dfrac{p}{p-1},\ \gamma_1=\dfrac{(p-1)(p-2-m_1)}{(p-2)^2-m_1m_2},\ \gamma_2=\dfrac{(p-1)(p-2-m_2)}{(p-2)^2-m_1m_2},$ $b_+=\max(0,b),$

$a^{\gamma_1}A=M_1,\ \ a^{\gamma_2}B=M_2$.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$C_i=\begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i-\alpha_i(p-2)}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)>0,\\ -\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i-\alpha_i(p-2)}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)<0,\ \ i=1,2.\end{cases}$$

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 1. Фараз қилайлик $p-2-m>0,\ m=\max\{m_1,m_2\}$,

$$-\frac{\gamma_i}{p(\gamma_i-1)(p-1)}+C_i\le 0,\ \ i=1,2,$$

$$A^{p-2}B^{m_1}\gamma(\gamma_1-m_1\gamma_2)\,|\,\gamma\gamma_1\,|^{p-2}=\frac{1}{p},$$

$$A^{m_2}B^{p-2}\gamma(\gamma_2-m_2\gamma_1)\,|\,\gamma\gamma_2\,|^{p-2}=\frac{1}{p},$$

$u_+\left(0,x\right)\geq u_0\left(x\right),\ v_+\left(0,x\right)\geq v_0\left(x\right),\ x\in R$ ўринли бўлсин.

У ҳолда (1)-(2) масала учун Q соҳада глобал ечим мавжуд ва унинг учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади $u_+\left(t,x\right)\geq u\left(t,x\right),\ v_+\left(t,x\right)\geq v\left(t,x\right),\ x\in R,$

бу ерда $u_+\left(t,x\right)=\left(T+t\right)^{-\alpha_1}\bar{f}\left(\xi\right),\ v_+\left(t,x\right)=\left(T+t\right)^{-\alpha_2}\bar{\phi}\left(\xi\right).$

Фараз қилайлик $\alpha_2 m_1+\alpha_1\left(p-2\right)=\alpha_1 m_2+\alpha_2\left(p-2\right)$ тенглик бажарилсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 2. Фараз қилайлик $1-\alpha_2 m_1-\alpha_1\left(p-2\right)\neq 0$ бўлсин. У ҳолда (3), (4) масаланинг финит ечими $\xi\to a^{\frac{p-1}{p}}$ да қуйидаги асимптотикага эга

$$f(\xi)=c_1\left(a-\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_1)}{(p-2)^2-m_1m_2}},\ \phi\left(\xi\right)=c_2\left(a-\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_2)}{(p-2)^2-m_1m_2}},$$

бу ерда c_i (i=1,2) коэффициентлар қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими

$$c_1^{p-2}c_2^{m_1}=b_{11},$$
$$c_2^{p-2}c_1^{m_2}=b_{12}.$$

Тез диффузия ҳоли ($1<p<2-m,\ m=\max\{m_1,m_2\}$):

Фараз қилайлик (3) тенгламалар системаси учун қуйидаги шарт бажарилсин

$$f'\left(0\right)=0,\ \phi'\left(0\right)=0,\ f\left(\infty\right)=0,\ \phi\left(\infty\right)=0. \quad (5)$$

Қуйидаги функциялар

$$\bar{f}\left(\xi\right)=A\left(a+\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{-\frac{(p-1)(2+m_1-p)}{(p-2)^2-m_1m_2}},\ \ \bar{\phi}\left(\xi\right)=B\left(a+\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{-\frac{(p-1)(2+m_2-p)}{(p-2)^2-m_1m_2}},$$

(5) шартни қаноатлантиради, бу ерда $A>0,\ B>0,\ a>0,\ b_+=\max(0,b)$.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$C_i=\begin{cases}\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i-\alpha_i\left(p-2\right)}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1\left(p-2\right)>0,\\ -\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i-\alpha_i\left(p-2\right)}, & 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1\left(p-2\right)<0,\ i=1,2.\end{cases}$$

Теорема 3. Фараз қилайлик $1<p<2-m,\ m=\max\{m_1,m_2\},$

$$\frac{\gamma_i}{p\left(p-1\right)\left(1-\gamma_i\right)}+C_i\geq 0,\ \ i=1,2,$$

$$A^{p-2}B^{m_1}\gamma\left(m_1\gamma_2-\gamma_1\right)|\,\gamma\gamma_1\,|^{p-2}=\frac{1}{p},$$

$$A^{m_2}B^{p-2}\gamma\left(m_2\gamma_1-\gamma_2\right)|\,\gamma\gamma_2\,|^{p-2}=\frac{1}{p},$$

$u_0(x) \geq u_-(0,x),\ v_0(x) \geq v_-(0,x),\ x \in R$ ўринли бўлсин.

У ҳолда (1)-(2) масала учун Q соҳада глобал ечим мавжуд ва унинг учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади $u(t,x) \geq u_-(t,x),\ v(t,x) \geq v_-(t,x),\ x \in R,$

бу ерда $u_-(t,x) = (T+t)^{-\alpha_1} \bar{f}(\xi),\ v_-(t,x) = (T+t)^{-\alpha_2} \bar{\phi}(\xi).$

Бу параграфда (3), (5) масаланинг чексизликда сўнувчи ечимлари қаралган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$b_{i3} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \left(\frac{2+m_i-p}{(p-2)^2 - m_1 m_2} - C_i\right),\ b_{i5} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^p \frac{2(2+m_i-p)}{(p-2)^2 - m_1 m_2},$$

$$b_{i4} = (p-1)^{-p-1} \left|\frac{(p-2)^2 - m_1 m_2}{2+m_i-p}\right|^{p-1} \left(\frac{2+m_i-p}{(p-2)^2 - m_1 m_2} + \frac{1}{p}\right)^{-1},\ i = 1,2.$$

Теорема 4. Фараз қилайлик $1 - \alpha_2 m_1 - \alpha_1(p-2) \neq 0$ бўлсин. У ҳолда (3), (5) масаланинг чексизликда сўнувчи ечимлари $\xi \to \infty$ да қуйидаги асимптотикага эга

$$f(\xi) = c_1 \left(a + \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{(p-1)(2+m_1-p)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},\ \phi(\xi) = c_2 \left(a + \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{(p-1)(2+m_2-p)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},$$

бу ерда c_i (i=1,2) коэффициентлар қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечими

$$c_1^{p-2} c_2^{m_1} = b_{13}\, b_{14},$$
$$c_2^{p-2} c_1^{m_2} = b_{23}\, b_{24}.$$

Натижа 1. (1)-(2) масаланинг умумлашган ечими $x \to a^{\frac{p-1}{p}} \tau^{\frac{1}{p}}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_A(t,x) = c_1 (T+t)^{-\alpha_1} \left(a - \left(x\tau^{-1/p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_1)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},$$

$$v_A(t,x) = c_2 (T+t)^{-\alpha_2} \left(a - \left(x\tau^{-1/p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_2)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}}.$$

1.4 параграф биологик турлар учун диффузия жараёнини моделлаштирувчи параболик типдаги квазичизиқли нодивергент тенгламалар системаси учун қуйидаги Коши масаласи автомодель ечимлар асимптотикаси тадқиқига бағишланган

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1} \nabla\left(u^{m_1 - 1} \nabla u\right),\ \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2} \nabla\left(v^{m_2 - 1} \nabla v\right),\ t > 0,\ x \in R^N, \tag{6}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\quad v|_{t=0}=v_0(x)\ge 0,\quad x\in R^N, \tag{7}$$

бу ерда $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, m_1, m_2, α_1, α_2 - берилган ҳақиқий сонлар, $N\ge 1-$ фазо ўлчови, $u=u(t,x)\ge 0$, $v=v(t,x)\ge 0$ - изланаётган ечимлар.

Маълумки, (6) система сонли параметрлари қийматларига боғлиқ ҳолда турли жараёнларни ифодалайди: биологик тур диффузияси, кучсиз магнит майдонларида резистив диффузия ҳодисалари, инфекцион касалликлар тарқалиши ва бошқалар.

Ундан ташқари, (6) система $\alpha_1=0,\ \alpha_2=0$ бажарилганда ғовак муҳит, ночизиқли иссиқлик тарқалиш ёки ночизиқли диффузия тенгламалар системаси сифатида маълум.

Ечимни солиштириш теоремалари ва эталон тенгламалар усулини қўллаган ҳолда, (6)-(7) масаланинг ечими баҳолари олинган. Бу ҳолда ҳам юқоридаги 1-4 теоремалар ўринли эканлиги исботланган.

1.5 параграфда $\mathrm{Q}=\{(\mathrm{t},\mathrm{x}):\ \mathrm{t}>0,\ \mathrm{x}\in\mathrm{R}^{\mathrm{N}}\}$ соҳада икки карра ночизиқли параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси учун Коши масаласи қаралган

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=v^{m_1}\nabla\left(\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u^l\right),\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=u^{m_2}\nabla\left(\left|\nabla v^k\right|^{p-2}\nabla v^l\right),\end{aligned} \tag{8}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\quad v|_{t=0}=v_0(x)\ge 0,\quad \forall x\in R^N \tag{9}$$

бу ерда $\mathrm{p},\ \mathrm{m}_1,\ \mathrm{m}_2,\mathrm{k},\mathrm{l}$ - мусбат ҳақиқий сонлар, $u=u(t,x)\ge 0$, $v=v(t,x)\ge 0$ - изланаётган ечимлар.

(8)-(9) масаланинг автомодель ечимлари асимптотик ифодалари қурилган, сонли параметрлари қийматларига боғлиқ ҳолда уларнинг мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари топилган.

(8) системанинг автомодель ечимлари қуйидаги кўринишда изланади

$$\mathrm{u}(\mathrm{t},\mathrm{x})=(\mathrm{T}+\mathrm{t})^{-\alpha_1}\mathrm{w}(\tau,\mathrm{x}),\quad \mathrm{w}(\tau,\mathrm{x})=\mathrm{f}(\xi),$$

$$\mathrm{v}(\mathrm{t},\mathrm{x})=(\mathrm{T}+\mathrm{t})^{-\alpha_2}\varphi(\tau,\mathrm{x}),\quad \varphi(\tau,\mathrm{x})=\phi(\xi),$$

бу ерда

$$\tau(\mathrm{t})=\begin{cases}\dfrac{(\mathrm{T}+\mathrm{t})^{1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1}}{1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1}, & 1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1>0,\\ \ln(\mathrm{T}+\mathrm{t}), & 1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1=0,\\ -\dfrac{(\mathrm{T}+\mathrm{t})^{1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1}}{1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1}, & 1-\alpha_1(\mathrm{k}(\mathrm{p}-2)+\mathrm{l}-1)-\alpha_2\mathrm{m}_1<0.\end{cases}$$

$$\xi=\begin{cases}|x|\tau^{-\frac{1}{p}}, & 1-\alpha_i\left(k(p-2)+l-1\right)-\alpha_{3-i}m_i\neq 0,\\ \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i x_i-\tau, & 1-\alpha_i\left(k(p-2)+l-1\right)-\alpha_{3-i}m_i=0\quad (i=1,2),\end{cases}$$

Акслантиришлардан сўнг (8) система қуйидаги кўринишга ўтади

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\xi\frac{df}{d\xi}+\phi^{m_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right)+c_1 f=0,\\ &\frac{1}{p}\xi\frac{d\phi}{d\xi}+f^{m_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{d\phi^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\phi^l}{d\xi}\right)+c_1\phi=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$c_{i1}=-\frac{(p-1)^p A_{3-i}^{-\gamma_i}A_i^{2-p}a^{-\frac{p-1}{p}}}{(p+\gamma_i-2)p^p\varphi_i},\quad c_{i2}=\frac{|p-1|^p(1-\gamma_i)}{|p+\gamma_i-2|},\quad c_{i3}=-\frac{(p-1)^p A_{3-i}^{-\gamma_i}A_i^{1+q_i-p}\psi_i}{p^p\varphi_i a},$$

Фараз қилайлик $(q_1-1)(p-2-\gamma_1)=(q_2-1)(p-2-\gamma_2)$ тенглик бажарилсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 5. Фараз қилайлик $1-n_1(p-2)-n_2\gamma_1>0$ бўлсин. У ҳолда (10) системанинг компакт юритувчили ечими учун $\xi\to a^{\frac{p-1}{p}}$ да қуйидаги асимптотика ўринлидир

$$f_i(\xi)=A_i\left(a-\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p+\gamma_i-2}}\left(y_i^0+o(1)\right)$$

бу ерда y_i^0 (i=1,2) ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг мос равишда z_i (i=1,2) ечимлари

1. $c_{i1}+c_{i2}z_i^{p-2}z_{3-i}^{\gamma_i}+c_{i3}z_i^{q_i-1}=0$ агар $\gamma_1=\gamma_2$ ва $b_{i2}=0$ (i=1,2) бўлса.
2. $c_{i1}+c_{i2}z_i^{p-2}z_{3-i}^{\gamma_i}=0$ агар $\gamma_1=\gamma_2$ ва $b_{i2}>0$ (i=1,2) бўлса.
3. $c_{i2}z_i^{p-1}z_{3-i}^{\gamma_i}+c_{i3}z_i^{q_i-1}=0$ агар $b_{i1}>0$ ва $b_{i2}=0$ (i=1,2) бўлса.

Бундан келиб чиқадики, (8) системанинг умумлашган ечими $x\to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_{iA}(t,x)=A_i^2(T+t)^{-\frac{1}{1-q_i}}\left(a-\left(\frac{|x|}{\tau^{1/p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p+\gamma_i-2}}\left(y_i^0+o(1)\right)\qquad i=1,2.$$

Диссертациянинг **«Манба ёки ютилишга эга икки карра ночизиқли муҳитда биологик тур диффузияси жараёнини математик моделлаштириш»** деб номланган иккинчи боби диффузия жараёнлари ночизиқли математик модели ечимлари учун вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартларини ўрганишга, автомодель ечимлари асимптотикаларини тадқиқ этишга бағишланган.

2.1 параграфда Q={(t,x): 0< t < ∞, x∈R^1} соҳада икки компонентли биологик тур диффузиясини ифодаловчи нодивергент система ечимининг сифат хоссалари тадқиқ этилган

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= u^{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\varepsilon v^{q_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= v^{\gamma_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{\sigma}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\varepsilon u^{q_2}, \end{aligned} \quad (11)$$

бу ерда $\sigma,\ \gamma_i,\ q_i\ (i=1,2)$ - мусбат ҳақиқий сонлар, $\varepsilon=\pm1,\ u=u(t,x)\geq 0,$ $v=v(t,x)\geq 0$ - изланаётган ечимлар.

(11) тенгламалар системаси кўп физик ҳодисаларни ифодалайди. Хусусан, (11) системада $q=\gamma+1,\ 0<\gamma<1$ бўлганда битта тенглама учун ғовак муҳит тенгламаси хусусий ҳолига, $q=2$ бўлганда физика плазмаси ҳодисасига мос келади.

(11) системада $q=\gamma+1, \sigma=0$ бўлганда битта тенглама учун Chen H., Wang Ch., Yin J. томонидан Коши масаласи ўрганилган, глобал ечим мавжудлиги исботланган, ечимнинг асимптотик хоссалари ўрганилган. (11) системада $q=0, \sigma=0$ бўлганда битта тенглама учун Zhou W., Yao Z., Wiegner M. томонидан Коши масаласи ўрганилган, ягона ёпишқоқ ечим мавжудлиги исботланган, ечимнинг асимптотик хоссалари ўрганилган. (11) системада $\sigma=0$ бўлганда битта тенглама учун Wiegner M., Wang S., Wang M.X., Xie C.H. томонидан Коши масаласи ўрганилган, blow-up хоссаси ва ечимнинг асимптотик хоссалари тадқиқ этилган. (11) системада $q=0$ бўлганда битта тенглама учун Raimbekov J.R. томонидан Коши масаласи ўрганилган, ечимнинг асимптотик ҳолати тадқиқ этилган, тез ва секин диффузия ҳоллари ўрганилган.

(11) система учун автомодель тенгламалар ечимлари асимптотикасини ўрганиш учун жорий системани тадқиқ этиш осонроқ бўлган кўринишга келтирамиз. Бунинг учун (11) системага қуйидаги алмаштиришларни қўллаймиз

$$\begin{aligned} u(t,x)&=\bar{u}(t)w_1(\tau,x),\ \ w_1(\tau,x)=f_1(\xi),\ \ f_1(\xi)=\bar{f}_1(\xi)y_1(\eta), \\ v(t,x)&=\bar{v}(t)w_2(\tau,x),\ \ w_2(\tau,x)=f_2(\xi),\ \ f_2(\xi)=\bar{f}_2(\xi)y_2(\eta), \end{aligned}$$

бу ерда

$$\bar{u}(t)=A_1(T+\varepsilon t)^{\varepsilon n_1},\ \ \bar{v}(t)=A_2(T+\varepsilon t)^{\varepsilon n_2},\ \ \tau(t)=A_1^{\gamma_1+\sigma}\frac{(T+\varepsilon t)^{\varepsilon n_1(\gamma_1+\sigma)+1}}{\varepsilon n_1(\gamma_1+\sigma)+1},$$

$$\xi=x\tau^{-\frac{1}{\sigma+2}},$$

$$\eta=-\ln\left(a-b\xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right),\ \overline{f_i}(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}},\quad (i=1,2),\ a>0,\ b>0.$$

алмаштиришдан сўнг (11) система қуйидаги кўринишга келади

$$\begin{gathered}y_i^{\gamma_i}\frac{d}{d\eta}\left(\left|\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right|^{\sigma}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right)\right)+a_{i2}(\eta)\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right)+\\+a_{i1}(\eta)y_i^{\gamma_i}\left(\left|\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right|^{\sigma}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right)\right)+a_{i3}(\eta)y_{3-i}^{q_i}+a_{i4}(\eta)y_i=0\end{gathered}\tag{12}$$

Бу ерда $a_{ij}(\eta)$ ифодаси аниқланган функциялар.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$c_{i1}=\frac{1}{(\sigma+2)^{\sigma+2}(\sigma+\gamma_i)b^{\sigma+1}},\quad c_{i2}=\frac{\gamma_i-1}{(\sigma+\gamma_i)^{\sigma+2}},\quad c_{i3}=-\frac{\psi_i}{ab^{\sigma+1}(\sigma+2)}\quad (i=1,2).$$

Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 6. Фараз қилайлик $(1+q_1)(\gamma_1+\sigma)=(1+q_2)(\gamma_2+\sigma)$ бўлсин. У ҳолда (12) системанинг $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ \eta\to+\infty$ ($0<y_i^0<+\infty$ (i=1,2)) кўринишдаги $(y_1(\eta),y_2(\eta))$ ечими мавжуд бўлиши учун қуйидаги шартлардан бири бажарилиши зарур:

1. $s_i=0$ ва y_i^0 (i=1,2) ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг

$$c_{i1}+c_{i2}z_i^{\sigma+\gamma_i}+c_{i3}z_iz_{3-i}^{q_i}=0\quad (i=1,2).$$

мос равишда z_i (i=1,2) ечимлари.

2. $s_i>0$ ва y_i^0 (i=1,2) ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг

$$c_{i1}+c_{i2}z_i^{\sigma+\gamma_i}=0\quad (i=1,2).$$

мос равишда z_i (i=1,2) ечимлари.

3. $s_1=0, s_2>0$ ва y_i^0 (i=1,2) ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг

$$c_{11}+c_{12}z_1^{\sigma+\gamma_1}+c_{13}z_1z_2^{q_1}=0,$$
$$c_{21}+c_{22}z_2^{\sigma+\gamma_2}=0$$

мос равишда z_i (i=1,2) ечимлари.

4. $s_1>0, s_2=0$ ва y_i^0 (i=1,2) ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг

$$c_{21}+c_{22}z_2^{\sigma+\gamma_2}+c_{23}z_2z_1^{q_2}=0,$$
$$c_{11}+c_{12}z_1^{\sigma+\gamma_1}=0.$$

мос равишда z_i (i=1,2) ечимлари.

2.2 параграф $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ соҳада қуйидаги масала ечимининг сифат хоссаларини тадқиқ этишга бағишланган

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right)+\varepsilon u^{\beta_1},\ \frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right)+\varepsilon v^{\beta_2}, \quad (13)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\ v|_{t=0}=v_0(x)\ge 0,\ \forall x\in R^N \quad (14)$$

бу ерда $m_1,\ m_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\beta_1,\beta_2$ - мусбат ҳақиқий сонлар, $\varepsilon=\pm 1,\ u=u(t,x)\ge 0,$ $v=v(t,x)\ge 0$ - изланаётган ечимлар.

(13) ночизиқли система сонли параметрларига боғлиқ ҳолда умумлашган ечим вақт бўйича глобаллик шартлари ўрганилади.

Автомодель система ночизиқли ажратиш алгоритми ёрдамида қурилган:

$$\begin{aligned}&\phi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2b_1}\frac{df}{d\xi}+d_1\left(f^{\beta_1}-f\right)=0,\\&f^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\phi^{m_2-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2b_2}\frac{d\phi}{d\xi}+d_2\left(\phi^{\beta_2}-\phi\right)=0,\end{aligned} \quad (15)$$

$$f(0)=M_1>0,\ \phi(0)=M_2>0,\ f(s_1)=\phi(s_2)=0,\ 0<s_1<\infty,\ \ 0<s_2<\infty, \quad (16)$$

Фараз қилайлик $n_1(m_1-1)+n_2\alpha_1=n_2(m_2-1)+n_1\alpha_2$ тенглик бажарилсин. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 7. Фараз қилайлик $\varepsilon=+1,\quad 1+\varepsilon\alpha_1 n_2+\varepsilon n_1(m_1-1)>0,$ $\beta_i<1,\ i=1,2$ бўлсин. У ҳолда (15), (16) масаланинг компакт юритувчили ечими учун $\xi\to\sqrt{a}$ да қуйидаги асимптотика

$$f(\xi)=z_1\left(a-\xi^2\right)^{p_1}\left(1+o(1)\right),\ \phi(\xi)=z_2\left(a-\xi^2\right)^{p_2}\left(1+o(1)\right),$$

ўринли бўлиши учун, қуйидаги шартлардан бири бажарилиши зарур:

1. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2=\dfrac{1}{1-\beta_2}$ ва z_1, z_2 - қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$c_{i1}z_i^{\beta_i-1}+c_{i2}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i3}=0,\ i=1,2.$$

2. $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i},\ m_i p_i<1,\ \ i=1,2$ ва z_1, z_2 - қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$c_{i1}z_i^{\beta_i-m_i}+c_{i2}z_{3-i}^{\alpha_i}=0,\ i=1,2.$$

3. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2<\dfrac{1}{1-\beta_2},\ m_2 p_2<1$ ва z_1, z_2 - қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$\begin{cases}c_{11}z_1^{\beta_1-1}+c_{12}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+c_{13}=0,\\ c_{21}z_2^{\beta_2-m_2}+c_{22}z_1^{\alpha_2}=0.\end{cases}$$

4. $p_1 < \frac{1}{1-\beta_1}$, $p_2 = \frac{1}{1-\beta_2}$, $m_1 p_1 < 1$ ва z_1, z_2 - қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$\begin{cases} c_{11} z_1^{\beta_1 - m_1} + c_{12} z_2^{\alpha_1} = 0, \\ c_{21} z_2^{\beta_2 - 1} + c_{22} z_2^{m_2 - 1} z_1^{\alpha_2} + c_{23} = 0. \end{cases}$$

Натижа 2. (13)-(14) масаланинг умумлашган ечими $|x| \to a^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon = +1$, $1 + \varepsilon\alpha_1 n_2 + \varepsilon n_1 (m_1 - 1) > 0$, $\beta_i < 1$, $i = 1,2$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_A(t,x) = A(T+t)^{n_1} \left(a - \left(|x| \tau^{-1/2}\right)^2\right)^{p_1} \left(1 + o(1)\right),$$

$$v_A(t,x) = B(T+t)^{n_2} \left(a - \left(|x| \tau^{-1/2}\right)^2\right)^{p_2} \left(1 + o(1)\right),$$

бу ерда $A = z_1 A_1$, $B = z_2 A_2$ и $n_1, n_2, p_1, p_2 -$ аниқланган ўзгармаслар.

2.3 параграфда ночизиқли муҳитларда диффузия жараёнлари, ғовак пластлар орқали суюқликлар оқими масаласи, биологик популяция динамикаси масаласи, политропик фильтрация жараёнларини ифодаловчи математик модел қаралган. $Q = \{(t,x):\ t > 0,\ x \in R^N\}$ соҳада қуйидаги параболик типдаги нодивергент система қаралган

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\gamma_i} \nabla \left(|\nabla u_i|^{\sigma} \nabla u_i \right) + \varepsilon u_{3-i}^{q_i}, \tag{17}$$

бу ерда σ, γ_i, q_i $(i = 1,2)$ - мусбат ҳақиқий сонлар, $\varepsilon = \pm 1$, $u_i = u_i(t,x) \geq 0$ - изланаётган ечимлар. $\varepsilon u_{3-i}^{q_i}$ ҳадлар манба $(\varepsilon = +1)$ ёки ютилишга $(\varepsilon = -1)$, эга эканлигини англатади. (17) системанинг $\varepsilon = -1$ бўлганда автомодел ечимининг асимптотик ифодаси топилган, сонли параметрларига боғлиқ ҳолда, улар мавжудлигининг зарурий ва етарли шартлари топилган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$c_{i1} = -\frac{1}{(\sigma+2)^{\sigma+2} (\sigma + \gamma_i) b^{\sigma+1} \varphi_i},\quad c_{i2} = \frac{1-\gamma_i}{(\sigma+\gamma_i)^{\sigma+2}},\quad c_{i3} = -\frac{\psi_i}{ab^{\sigma+1} (\sigma+2)^{\sigma+2} \varphi_i},$$

$$c_{i4} = \frac{1-\gamma_i}{(\sigma+\gamma_i)^{\sigma+1}},\ c_{i5} = -\frac{(\sigma+1)\mu^{-1}\varphi_i^{-1}}{(\sigma+2)^{\sigma+1} b^{\sigma + \frac{1}{\sigma+2}} a^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}} \quad (i = 1,2).$$

У ҳолда қуйидаги теорема ўринли:

Теорема 8. Фараз қилайлик $(1+q_1)(\gamma_1 + \sigma) = (1+q_2)(\gamma_2 + \sigma)$, $s_i = 0$ ва $-n_i(\sigma + \gamma_i) + 1 > 0$ бўлсин. У ҳолда (17) системанинг чексизликда сўнувчи ечимлари $x\left(A_1^{\gamma_1+\sigma}\frac{(T+t)^{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}}{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}\to\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_i(t,x)=A_i(T+t)^{-n_i}\left(a-b\left(x\left(A_1^{\gamma_1+\sigma}\frac{(T+t)^{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}}{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}\right)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}}y_i(\eta),$$

бу ерда $y_i(\eta)=y_i^0+o(1)$, $0<y_i^0<+\infty$ (i=1,2) ва y_i^0 (i=1,2) ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг

$$c_{i1}+c_{i2}z_i^{\sigma+\gamma_i}+c_{i3}z_i^{-1}z_{3-i}^{q_i}=0 \quad (i=1,2).$$

z_i (i=1,2) ечимлари.

§2.4 да $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ соҳада қуйидаги параболик типдаги нодивергент система қаралган

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\gamma_i}\nabla\left(\left|\nabla u_i\right|^{\sigma}\nabla u_i\right)-\prod_{j=1}^{2}u_j^{q_{ij}} \quad (i=1,2). \tag{18}$$

бу ерда σ, γ_i, q_{i1}, q_{i2} $(i=1,2)$ - мусбат ҳақиқий сонлар, $u_i=u_i(t,x)\ge 0$ - изланаётган ечимлар.

(18) система учун автомодел тенглама ечимлари асимптотикалари ўрганилган. Бу ҳолда ҳам юқоридаги 8-теорема ўринли эканлиги исботланган.

Натижа 3. (18) тенгламалар системасининг умумлашган ечими $|x|\to\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}\tau^{\frac{1}{\sigma+2}}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_i(t,x)=A_i(T+t)^{-n_i}\left(a-b\left(\frac{x}{\tau^{\frac{1}{\sigma+2}}}\right)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}}\left(y_i^0+o(1)\right), \quad i=1,2$$

$\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i\to\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}+\tau$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_i(t,x)=A_i(T+t)^{-n_i}\left(a-b\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i-\tau\right)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}}\left(y_i^0+o(1)\right), \quad i=1,2.$$

Диссертациянинг **«Ўзгарувчан зичликли муҳитда биологик тур диффузияси жараёнини математик моделлаштириш»** деб номланган учинчи боби ўзгарувчан зичликли муҳитда манба ёки ютилишга эга диффузия жараёнлари ночизиқли математик модели ечимлари сифат хоссаларини тадқиқ этиш, ночизиқли диффузия жараёнларини сонли моделлаштиришга бағишланган. Эталон тенгламалар усули асосида юқори ва қуйи ечимлар қурилган, вақт бўйича глобаллик ва глобал бўлмаслик шартлари олинган.

3.1 параграфда $Q=\{(t,x):\ 0< t < \infty,\ \ x\in R^1\}$ соҳада қуйидаги масала қаралган

$$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right),\ |x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right), \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \ge 0,\ \ v|_{t=0} = v_0(x) \ge 0,\ \ \forall x\in R^N \tag{20}$$

бу ерда $m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2$ - мусбат ҳақиқий сонлар, $n \ne -2$, $u = u(t,x) \ge 0$, $v = v(t,x) \ge 0$ - изланаётган ечимлар.

(19) ночизиқли нодивергент тенгламалар системаси ўзгарувчан зичлик ($|x|^n$) таъсирида кечадиган турли жараёнларни ифодалайди: биологик тур учун диффузия жараёни, кучсиз магнит майдонларида резистив диффузия ҳодисалари, инфекцион касалликлар тарқалиши ва бошқалар.

Бу параграфда жараён кезишига ўзгарувчан зичликнинг таъсири автомодель ёндошув асосида ўрганилган ва қуйидаги шартлар бажарилганда

$$1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1) > 0,\quad (m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2 \ne 0,$$

$$\alpha_1 k_2 + k_1(m_1-1) = \alpha_2 k_1 + k_2(m_2-1),\ k_1 > 0,\ k_2 > 0,$$

системанинг қуйидаги

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A_1(T+t)^{-k_1}\left(a-\left(1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1)\right)|x|^{n+2}(T+t)^{\alpha_1 k_2 + k_1(m_1-1)-1}\right)_+^{p_1}, \\ v(t,x) &= A_2(T+t)^{-k_2}\left(a-\left(1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1)\right)|x|^{n+2}(T+t)^{\alpha_1 k_2 + k_1(m_1-1)-1}\right)_+^{p_2}, \end{aligned} \tag{21}$$

аниқ хусусий ечими топилган, бу ерда $A_1, A_2, p_1, p_2, k_1, k_2 -$ аниқланган ўзгармаслар ва аниқ ечим таъсири тахлил қилинган. Жараён тарқалиш фронти аниқланган ва фронт атрофида ечим асимптотикаси эканлиги кўрсатилган.

Натижа 4. (19)-(20) масаланинг умумлашган ечими $|x| \to a^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{n+2}}$, $1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1) > 0$, $(n+2)(p_i m_i - 1) > 0,\ i=1,2$ бажарилганда қуйидаги асимптотик ифодага эга

$$u_A(t,x) = A(T+t)^{-k_1}\left(a-\left(|x|\tau^{-1/(n+2)}\right)^2\right)^{p_1}(1+o(1)),$$

$$v_A(t,x) = B(T+t)^{-k_2}\left(a-\left(|x|\tau^{-1/(n+2)}\right)^2\right)^{p_2}(1+o(1)).$$

§3.2 да қуйидаги параболик система учун

$$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right) + |x|^n u^{\beta_1}, \quad |x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_1-1}\nabla v\right) + |x|^n v^{\beta_2}, \qquad (22)$$

$$u(0,x) = u_0(x) \ge 0, \; v(0,x) = v_0(x) \ge 0, \quad x \in R^N, \qquad (23)$$

секин диффузия ҳолида ечимнинг қуйидаги сифат хоссалари ўрнатилган: ечим баҳоси, чекли тезликли тарқалиш, компакт юритувчили ечим асимптотик ҳолати.

Бу ерда $n,\ m_1, m_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ сонли параметрлар.

Системанинг қуйидаги автомодель ечимлари

$$u(t,x) = A_1 (T+t)^{1/(1-\beta_1)} f(\xi),\ v(t,x) = A_2 (T+t)^{1/(1-\beta_2)} \phi(\xi),\ \xi = |x|\tau^{-\frac{1}{n+2}} \qquad (24)$$

бу ерда $\tau(t) = \begin{cases} \int (T+t)^{\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+\frac{m_1-1}{1-\beta_1}} dt = \int (T+t)^{\frac{\alpha_2}{1-\beta_1}+\frac{m_2-1}{1-\beta_2}} dt, & \frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1-1}{1-\beta_1} + 1 \ne 0 \\ \ln(T+t), & \frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1-1}{1-\beta_1} + 1 = 0, \end{cases}$

$$b_i = \frac{1}{1-\beta_i} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha_i}{1-\beta_{3-i}} + \frac{m_i-1}{1-\beta_i} + 1},\ d_i = (1-\beta_i)^{\frac{m_i-1}{1-\beta_i}} (1-\beta_{3-i})^{\frac{\alpha_i}{1-\beta_{3-i}}},\ i = 1,2,$$

мавжудлиги кўрсатилган ва у қуйидаги кўринишга

$$\begin{gathered} \phi^{\alpha_1}\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1} f^{m_1-1} \frac{df}{d\xi}\right) + \frac{1}{d_1(n+2)}\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi} + \frac{b_1}{d_1}\xi^n\left(f^{\beta_1} - f\right) = 0, \\ f^{\alpha_2}\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1} \phi^{m_2-1} \frac{d\phi}{d\xi}\right) + \frac{1}{d_2(n+2)}\xi^{n+1}\frac{d\phi}{d\xi} + \frac{b_2}{d_2}\xi^n\left(\phi^{\beta_2} - \phi\right) = 0. \end{gathered} \qquad (25)$$

келтирилган. (25) тенгламалар системасининг манфий бўлмаган ва қуйидаги шартни қаноатлантирувчи ечимларини қаралган:

$$\begin{gathered} f(0) = M_1,\ \phi(0) = M_2,\ M_1 \in R^+, M_2 \in R^+, \\ f(d_1) = \phi(d_2) = 0,\ 0 < d_1 < \infty,\ \ 0 < d_2 < \infty. \end{gathered} \qquad (26)$$

(25) - (26) масалага ечимларни солиштириш теоремаси ва эталон тенгламалар усулини қўллаган холда, (22) - (23) масала ечими баҳолари олинди.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз: $p_i = \dfrac{m_{3-i} - \alpha_i - 1}{(m_1-1)(m_2-1) - \alpha_1\alpha_2},\ i = 1,2.$

Теорема 9. Фараз қилайлик $m_{3-i} > 1 + \alpha_i,\ M_i^{\beta_i - 1} \le 1 + \dfrac{N+n}{n+2}\ \dfrac{p_i}{b_i(p_i m_i - 1)},$

$$M_i^{m_i-1} M_{3-i}^{\alpha_i} = \frac{a}{d_i (p_i m_i - 1)(n+2)^2},\ i = 1,2,$$

$u_+(0,x) \ge u_0(x),\ v_+(0,x) \ge v_0(x),\ x \in R^N$ бажарилсин.

У ҳолда (22)-(23) масала учун Q соҳада глобал ечим мавжуд ва унинг учун қуйидаги баҳо ўринли бўлади

$$u(t,x) \le u_+(t,x), v(t,x) \le v_+(t,x),$$

бу ерда

$$u_+(t,x) = A(T+t)^{1/(1-\beta_1)}\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_1}, \; v_+(t,x) = B(T+t)^{1/(1-\beta_2)}\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_2} \quad (27)$$

9-теоремада (22)-(23) масаланинг юқори ечими (27) кўринишда эканлиги исботланган. Кейинги теоремада $\bar{f}(\xi) = A\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_1}$, $\bar{\phi}(\xi) = B\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_2}$ функциялар $\xi \to a^{1/(n+2)}$ да (25)-(26) масала ечимининг асимптотикаси эканлиги кўрсатилган.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$b_{i1} = p_i(p_i m_i - 1), \; b_{i2} = -\frac{p_i}{d_i(n+2)^2}, \; b_{i3} = \frac{b_i}{d_i(n+2)^2 a}, \quad i = 1,2.$$

Теорема 10. Фараз қилайлик $\frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1 - 1}{1-\beta_1} + 1 > 0$ бўлсин. У ҳолда (25), (26) масаланинг компакт юритувчили ечими $\xi \to a^{1/(n+2)}$ да қуйидаги асимптотик ифодага эга бўлади

$$f(\xi) = c_1\left(a-\xi^{n+2}\right)^{p_1}(1+o(1)), \; \phi(\xi) = c_2\left(a-\xi^{n+2}\right)^{p_2}(1+o(1)),$$

агар қуйидаги шартлардан бири бажарилса:

1. $p_1 = \frac{1}{1-\beta_1}, p_2 = \frac{1}{1-\beta_2}$ ва c_i (i=1,2) қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$b_{i1} c_i^{m_i - 1} c_{3-i}^{\alpha_i} + b_{i2} + b_{i3} c_i^{\beta_i - 1} = 0, \; i = 1,2.$$

2. $p_i < \frac{1}{1-\beta_i}$, $p_i m_i > 1$, $i = 1,2$ ва c_i (i=1,2) қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$b_{i1} c_i^{m_i - 1} c_{3-i}^{\alpha_i} + b_{i2} = 0, \; i = 1,2.$$

3. $p_1 = \frac{1}{1-\beta_1}$, $p_2 < \frac{1}{1-\beta_2}$, $p_2 m_2 > 1$ ва c_i (i=1,2) қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

$$\begin{cases} b_{11} c_1^{m_1 - 1} c_2^{\alpha_1} + b_{12} + b_{13} c_1^{\beta_1 - 1} = 0, \\ b_{21} c_2^{m_2 - 1} c_1^{\alpha_2} + b_{22} = 0. \end{cases}$$

4. $p_1 < \frac{1}{1-\beta_1}$, $p_2 = \frac{1}{1-\beta_2}$, $p_1 m_1 > 1$ ва c_i (i=1,2) қуйидаги ночизиқли алгебраик тенгламалар системасининг ечимлари

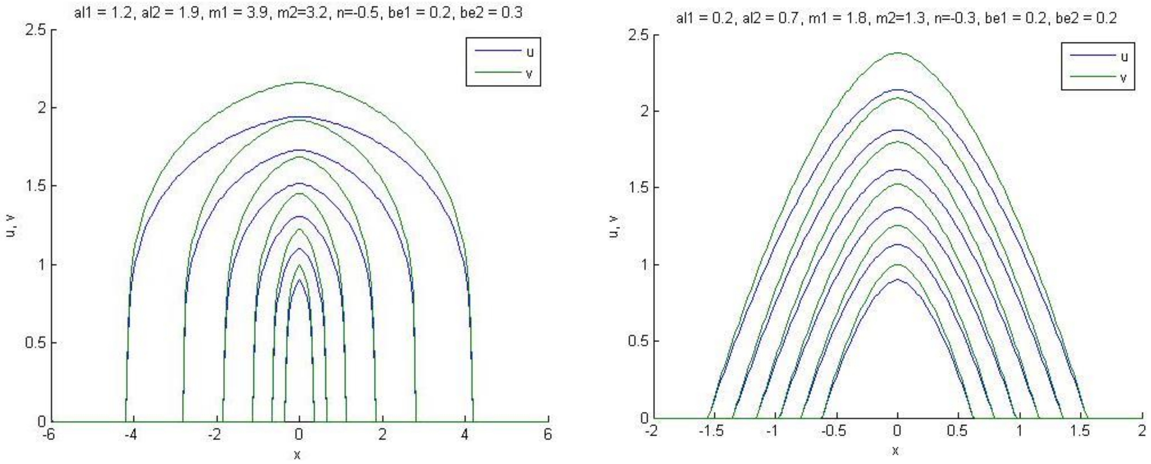
$$\begin{cases} b_{11}c_1^{m_1-1}c_2^{\alpha_1}+b_{12}=0, \\ b_{21}c_2^{m_2-1}c_1^{\alpha_2}+b_{22}+b_{23}c_2^{\beta_2-1}=0. \end{cases}$$

9-теорема эркин чегара учун қуйидаги баҳо ўринли эканлигини кўрсатади $|x(t)| \le \left[\frac{a}{k}\right]^{\frac{1}{n+2}}(T+t)^{\frac{k}{n+2}}$, бу ерда $k=\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+\frac{m_1-1}{1-\beta_1}+1.$

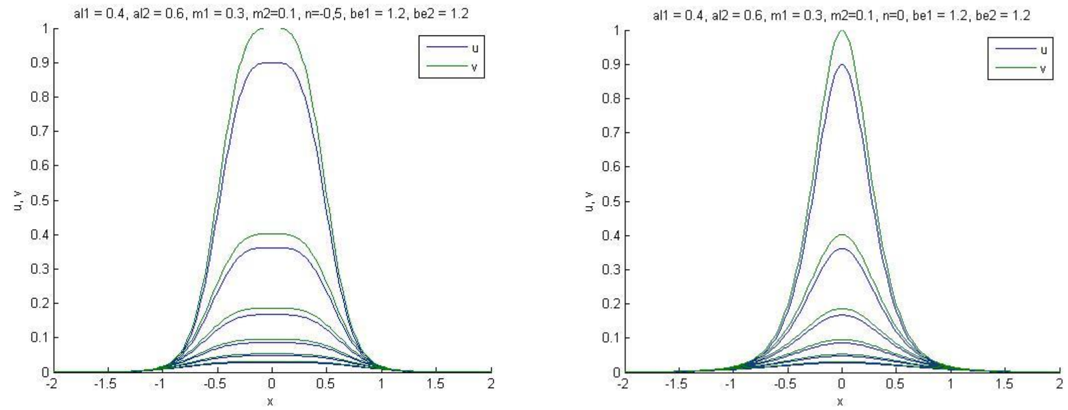
10-теорема эркин чегара қуйидаги асимптотикага эга эканлигини кўрсатади $|x(t)| \sim \left[\frac{a}{k}\right]^{\frac{1}{n+2}}(T+t)^{\frac{k}{n+2}}$.

Олинган натижалар (22) тенгламалар системаси учун Коши масаласини сонли ечиш имконини беради.

Сонли параметр қийматлари турли бўлганда сонли тажриба айрим натижалари келтирилган.



1-расм. Секин диффузия ҳоли. $n<0$: $\alpha_1>1, \alpha_2>1$ ва $\alpha_1<1, \alpha_2<1.$



2-расм. Тез диффузия ҳоли. $\alpha_1<1, \alpha_2<1$: $n<0$ ва $n=0$.

1-расмда (22) - (23) масаланинг компакт юритувчили ечимлари кўрсатилган.

2-расмда (22) - (23) масаланинг чексизликда сўнувчи ечимлари кўрсатилган.

§3.3 да биологик тур учун диффузия жараёнларини ифодаловчи манбага эга параболик типдаги нодивергент ночизиқли тенгламалар системаси учун

Коши масаласи қаралган. Нодивергент тенгламалар системаси учун Зельдович-Баренблатт типидаги ечим қурилган, ечимни солиштириш теоремаси ёрдамида чекли тезликли тарқалиш хусусияти ўрнатилган, секин ва тез диффузия ҳоллари ўрганилган. Ночизиқли тенгламалар системаси учун сонли параметрлари қийматларига боғлиқ ҳолда умумлашган ечим глобаллик шартлари таҳлил қилинган. Бу ҳолда юқоридаги 9,10-теоремалар ўринли эканлиги исботланган.

§3.4 ва §3.5 қуйидаги Коши масаласининг

$$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = u^{\gamma_1}\nabla\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) + \varepsilon |x|^n v^{q_1},$$
$$|x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = v^{\gamma_2}\nabla\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right) + \varepsilon |x|^n u^{q_2}, \tag{28}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \ge 0,\ v|_{t=0} = v_0(x) \ge 0,\ \forall x \in R^N \tag{29}$$

автомодел ечимлари асимптотикасини тадқиқ этишга бағишланган.

Wang M., Xie C.H. ишларида (28)-(29) Коши масаласи $p=2, n=0$ да классик ечим мавжудлиги ва ягоналиги ўрганилган. Wang M., Wei Y. ишларида (28) система $p=2, n=0$ ҳолда ўрганилган ва система ягона классик ечимга эга эканлиги исботланган, кескинлашиш тезлиги ва blow-up ечим баҳоланган. $n=2$ бўлганда (28) система Дирихле чегаравий шарти билан Deng W., Li Y., Xie Ch. томонидан ўрганилган, глобал ечим мавжудлиги зарурий ва етарли шартлари топилган, blow-up ечимлар ўрганилган.

Бу параграфларда ечимни солиштириш теоремаси ёрдамида (28) система умумлашган ечими глобаллик хоссалари исботланган, автомодел ечимлар асимптотик ҳолати ўрганилган.

Диссертациянинг **«Ўзгарувчан зичликли муҳитда биологик тур диффузияси жараёнини математик моделлаштириш. Кўп ўлчовли ҳол»** деб номланган тўртинчи боби ночизиқли диффузия модели хусусиятларини эталон тенгламалар усули ва автомодел таҳлил асосида тадқиқ этишга бағишланади. Бир жинсли бўлмаган муҳитда диффузия жараёнларини ифодалайдиган параболик типдаги ночизиқли тенгламалар системаси ўрганилган. Параболик типдаги ночизиқли нодивергент тенгламалар системаси сонли параметрлари қийматларига боғлиқ ҳолда вақт бўйича глобал бўлмаслик шартлари олинган. Ечимни солиштириш теоремаси асосида юқори ва қуйи ечимлар қурилган, ночизиқли диффузия жараёнлари сонли моделлаштирилган.

§4.1 ва §4.2 ларда манбага эга параболик типдаги нодивергент ночизиқли тенгламалар системаси учун Коши масаласи қаралган

$$
\begin{aligned}
&|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\nabla\left(|x|^k u^{m_1-1}\nabla u\right) + |x|^n u^{\beta_{11}} v^{\beta_{12}}, \\
&|x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\nabla\left(|x|^k v^{m_1-1}\nabla v\right) + |x|^n u^{\beta_{21}} v^{\beta_{22}}.
\end{aligned}
\qquad t \in (0,T),\ x \in R^N, \tag{30}
$$

$$
u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in R^N, \tag{31}
$$

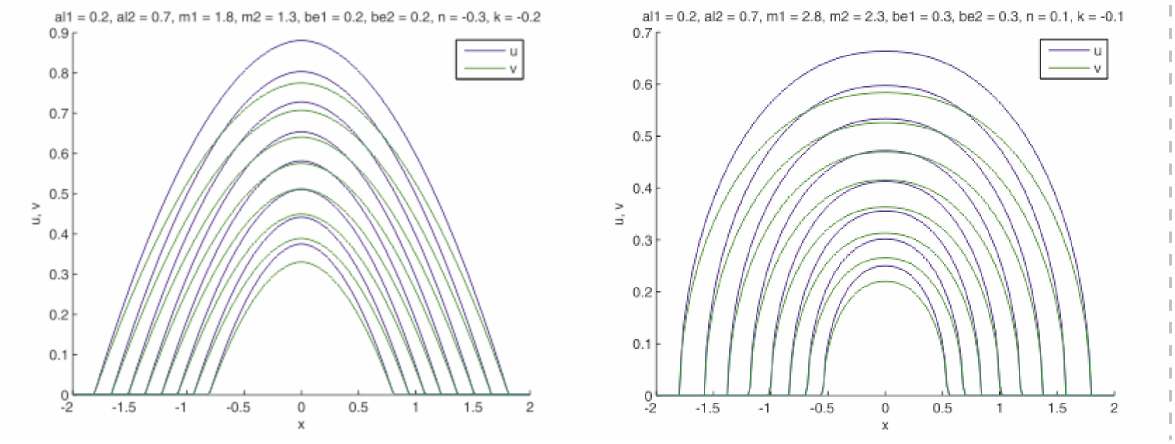
(30) система учун Зельдовича-Баренблатт типидаги ечим олинган. Ечимни солиштириш теоремаси асосида манбага эга параболик типдаги нодивергент ночизиқли тенгламалар системаси учун Коши масаласининг чекли тезликли тарқалиш хусусияти ўрганилган.

Секин ва тез диффузия ҳоллари учун автомодел ечимларнинг асимптотик ҳолати таҳлил қилинган. Асимптотиканинг бош ҳади коэффициентлари ночизиқли алгебраик тенгламалар системасини қаноатлантириши кўрсатилган.

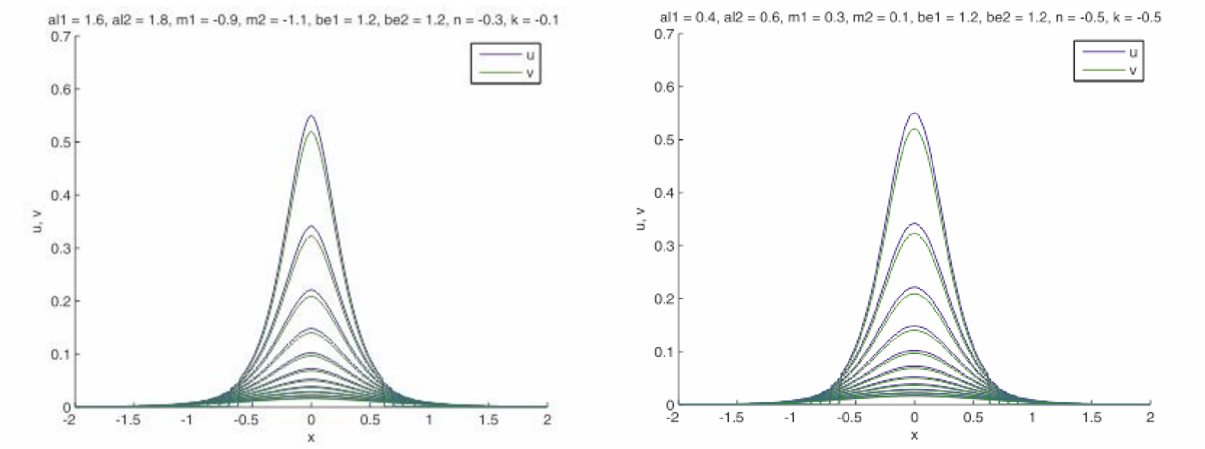
Сонли параметр қийматлари турли бўлганда сонли тажриба айрим натижалари келтирилган. Сонли тажриба натижалари ва уларнинг графиклари автомодел ечимларнинг бошланғич яқинлашиш сифатида олиниши яхши натижа беришини кўрсатади.

3-расмда (30) - (31) масаланинг компакт юритувчили ечимлари кўрсатилган.

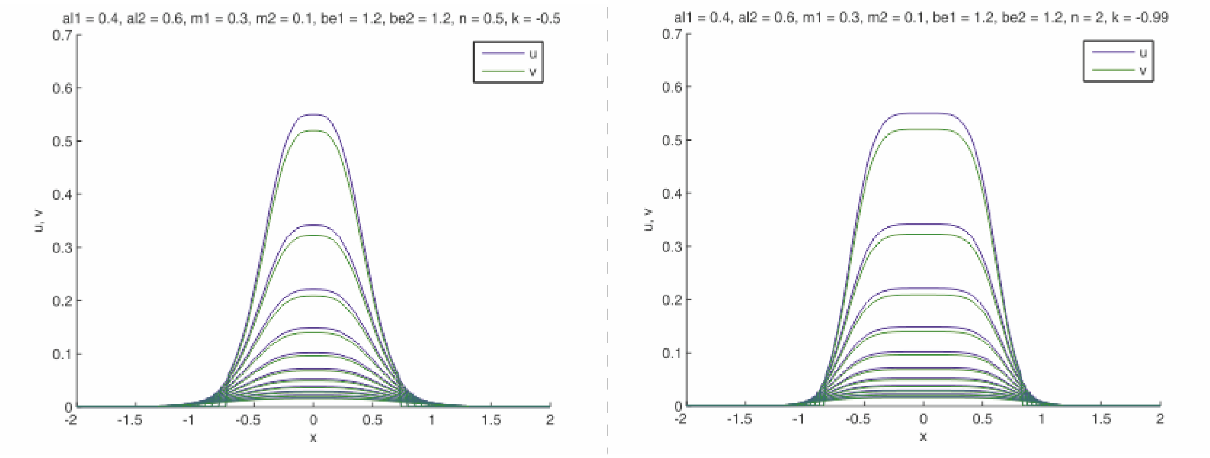
4- ва 5-расмларда (30) - (31) масаланинг чексизликда сўнувчи ечимлари кўрсатилган.



3-расм. Секин диффузия ҳоли. $p_i>0$, $i=1,2$: $n<0$, $k<0$ ва $n>0$, $k<0$.



4-расм. Тез диффузия ҳоли. $p_i>0$, i=1,2: $n-k<0$ ва $n-k=0$.



5-расм. Тез диффузия ҳоли. $p_i<0$, i=1,2: $n-k=1$ ва $n-k>1$.

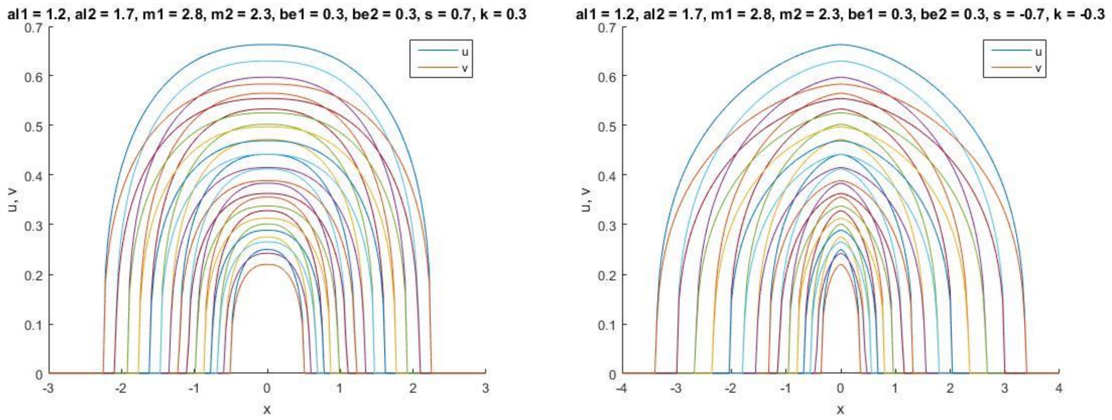
§4.3 (30)-(31) масалани қуйидаги чегаравий масала билан

$$\begin{cases} u(t,0)=\phi_{11}(t)>0,\ u(t,b)=\phi_{12}(t)=0 \\ v(t,0)=\phi_{21}(t)>0,\ v(t,b)=\phi_{22}(t)=0 \end{cases} \quad t\in[0,T]. \qquad (32)$$

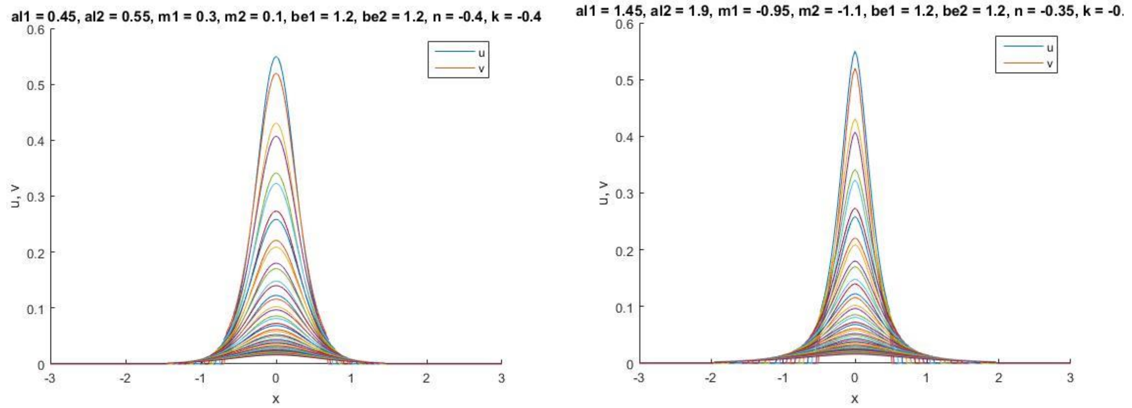
сонли моделлаштиришга бағишланади.

(30)-(32) масала учун сонли схемалар қурилган, ечиш алгоритми ва дастурлар мажмуи яратилган. Дастур коди MatLab муҳитида яратилган (диссертация иловасида келтирилган).

Сонли тажрибалар айрим натижалари келтирилган. Тўр қадами h=0.05, тугун нуқталар сони N=1000 ва итерация аниқлиги $\varepsilon=10^{-3}$. Ҳисоблашлар $\tau=0.02$ қадам билан t=2 гача олиб борилди.



6-расм. (30)-(32) масалани сонли ечиш натижалари. $\alpha_1 = 1.2,\ \ \alpha_2 = 1.7,$ $m_1 = 2.8,\ \ m_2 = 2.3,\ \ \beta_1 = 0.3,\ \beta_2 = 0.3,$ ҳоллари: $s = 0.7,\ k = 0.3$ ва $s = -0.7,\ k = -0.3$.



7-расм. (30)-(32) масалани сонли ечиш натижалари. $\alpha_1 = 0.45,\ \ \alpha_2 = 0.55,$ $m_1 = 0.3,\ \ m_2 = 0.1,\ \ \beta_1 = 1.2,\ \beta_2 = 1.2,\ \ s = -0.4,\ k = -0.4$ ва $\alpha_1 = 1.45,\ \ \alpha_2 = 1.9,$ $m_1 = -0.95,\ \ m_2 = -1.1,\ \ \beta_1 = 1.2,\ \beta_2 = 1.2,\ \ s = -0.35,\ k = -0.4$.

6-расмда (30)-(32) масаланинг $\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \dfrac{m_1 - 1}{1-\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{1-\beta_1} + \dfrac{m_2 - 1}{1-\beta_2}$ ва $m_{3-i} > \alpha_i + 1$ шартлар бажарилгандаги сонли ечиш натижалари келтирилган, бу ҳол секин диффузия ҳолига мос келади.

7-расмда (30)-(32) масаланинг $\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \dfrac{m_1 - 1}{1-\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{1-\beta_1} + \dfrac{m_2 - 1}{1-\beta_2}$ ва $p_i > 0$ шартлар бажарилгандаги сонли ечиш натижалари келтирилган, бу ҳол тез диффузия ҳолига мос келади

Олинган натижалар эркин чегара учун қуйидаги баҳо ўринли эканлигини кўрсатади $|x(t)| \le \left[\dfrac{a}{k}\right]^{\frac{1}{n+2}} (T + t)^{\frac{k}{n+2}}$, бу ерда $k = \dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \dfrac{m_1 - 1}{1-\beta_1} + 1.$

ХУЛОСА

«Параболик типдаги нодивергент ночизиқли системалар билан ифодаланувчи жараёнларни сонли моделлаштириш» мавзусидаги докторлик диссертацияси бўйича олиб борилган тадқиқотлар натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Ўзгарувчан зичликли муҳитда параболик типдаги нодивергент ночизиқли тенгламалар системаси билан ифодаланадиган биологик тур диффузияси ночизиқли модели учун вақт бўйича глобал ва глобал бўлмаган ечимларга эга бўлиш шартлари аниқланган.
2. Ўзгарувчан зичликли муҳитда биологик тур диффузияси ночизиқли модели умумлашган ечимлари учун қуйи ва юқори баҳолар олинган.
3. Секин диффузия ҳолида ўзгарувчан зичликли муҳитда биологик тур диффузияси икки карра ночизиқли модели ечими учун тарқалиш тезлигининг чеклилиги ва фазовий локаллашиш хусусиятлари аниқланган.
4. Эталон тенгламалар усули ёрдамида параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси учун Коши масаласининг турли автомодель ечимлар асимптотикалари олинган.
5. Манба ёки ютилишга эга ўзгарувчан зичликли муҳитда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси (crosswise) учун Коши масаласининг компакт юритувчили ечимлари асимптотикалари исботланган.
6. Манба ёки ютилишга эга бир жинсли муҳитда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси (crosswise) учун Коши масаласининг чексизликда сўнувчи ечимлари асимптотикалари исботланган.
7. Манба ёки ютилишга эга ўзгарувчан зичликли муҳитда параболик типдаги нодивергент тенгламалар системаси (crosswise) учун Коши масаласининг вақт бўйича глобал ва глобал бўлмаган ечимларга эга бўлиш шартлари аниқланган.
8. Ўзгарувчан зичликли биологик тур диффузияси ночизиқли математик моделларининг сифат хоссаларини ўрганиш учун тез яқинлашувчи ҳисоблаш схемалари қурилган.
9. Биологик тур диффузияси ночизиқли жараёнларини сонли моделлаштириш учун алгоритмлар ишлаб чиқилган ва дастурий воситалар комплекси Matlab муҳитида ва Delphi дастурлаш тилида яратилган ва ночизиқли масалаларнинг ечимлари визуаллаштирилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА по ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

МАТЯКУБОВ АЛИШЕР САМАНДАРОВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В НЕДИВЕРГЕНТНОМ ВИДЕ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
докторской (DSc) диссертации по физико-математическим наукам

Ташкент – 2020

Тема докторской (DSc) диссертации по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2017.2.DSc/FM78.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Арипов Мирсаид Мирсидикович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Маматов Алишер Зулунович** доктор технических наук, профессор
	Полатов Асхад Мухамеджонович доктор физико-математических наук, профессор
	Холмуродов Абдулхамид Эркинович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится «18» июня 2020 года в 14^{00} часов на заседании Научного совета DSc.27.06.2017.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 44). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «15» июня 2020 года.
(протокол рассылки № от 17 2020 года).

А. Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

Б.Ф.Абдурахимов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской (DSc) диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. На протяжении последних тридцатилетий большое число исследователей различных стран мира активно занимаются изучением нелинейных математических моделей, встречающихся в физике, механике, технике, биологии, биофизике, экологии, медицине и других областях. Большинство таких моделей составляют нелинейные уравнения и системы уравнений параболического типа. Однако к настоящему времени разработанные методы научными школами А.А.Самарского, С.П.Курдюмова, В.А. Галактионова, J.Vazguez, Junger и М.М.Арипова, изучающая приближённо-автомодельные решения, подтвержденная экспериментами и адекватным математическим моделированием регулярно изучаются, в настоящее время отсутствует достаточно обоснованных теорий для различных нелинейных математических моделей.

В годы независимости Республики Узбекистан исследованы нелинейные математические модели, которые выражают процессы фильтрации политропного газа в пористом грунте в механике, движения крови в мелких кровеносных сосудах в медицине, распространение выбросов отрицательной плавучести в экологии, роста и миграции биологических популяций в биологии и ряда других. С этой точки зрения, ведутся научно-исследовательские работы над рядом математическими моделями, которые усовершенствуют и обобщают существующие методы исследования.

В настоящее время исследование нелинейных математических моделей, описываемых параболическими системами уравнениями недивергентного вида и практическому применению таких систем уравнений являются одним из важных задач, которые ведутся в нижеследующих направлениях: разработка методов изучения качественных свойств решения нелинейных параболических систем недивергентного вида; нахождение асимптотики решений в различных пространствах; определение оценки решений; создание комплекса программ для изучения математических моделей нелинейных процессов; визуализация и контроль динамики нелинейного процесса по времени. Научные исследования, которые ведутся во всех вышеперечисленных направлениях, указывают актуальность темы данной диссертации.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных Указами Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлениями Президента Республики Узбекистан №ПП-1730 от 21 марта 2012 года «О мерах по дальнейшему внедрению и развитию современных информационно-коммуникационных технологий», №ПП–1442 от 15 декабря 2010 года «О приоритетах развития промышленности Республики Узбекистан в 2011-2015 годах», № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и Постановлением Кабинета Министров Республики Узбекистан №24 от 1 февраля 2012 года «О мерах по созданию условий для дальнейшего развития компьютеризации и информационно коммуникационных технологий на местах», а также в других нормативно-правовых документах, принятых в данной сфере.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Настоящая диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[2].

Научные исследования, направленные исследованию качественных свойств автомодельных решений различных нелинейных математических моделей, проводятся в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, Institute for Calculus Applications (Италия), Mathematisches Institut, RWTH Aachen University (Германия), Universidad Carlos III de Madrid (Испания), National Taiwan Normal University (Тайвань), Zhongshan University, Jilin University, Southeast University, Nantong University, Central South University (Китай), Purdue University (США), University of Oxford (Великобритания), Paris Mathematics Center, Université Paris-Dauphine (Франция), Viena University (Австрия), Bath mathematical center (Великобритания), в Московском государственном университете (Россия), в институте прикладной математики РАН, в институтах Сибирского отделения АН России, в Казахском национальном университете (Казахстан), в Национальном университете Узбекистана, в Самаркандском государственном университете, в Ургенчском государственном университете (Узбекистан).

В результате исследований, проведенных в мире по изучению параболических уравнений и систем уравнений недивергентного вида, получены ряд научных результатов, в том числе: было найдено условие существования и единственности решения, изучены некоторые свойства решения по времени задачи Коши (Institute for Calculus Applications, Mathematisches Institut, RWTH Aachen University, Purdue University), найдены условие существования и скорость распространения blow-up решения для нелинейного уравнения диффузии и нелокальной параболической системы с нелокальными граничными условиями (Universidad Carlos III de Madrid, National Taiwan Normal University, Southeast University, Nantong University,

[2] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе следуюших источников: Universal Journal of Computional Mathematics, International Mathematical Journals: Nonlinear Analysis, Applied Mathematical Modelling, Computational Mathematics and Mathematical Physics, http://www.springer.com/mathematics; http://www.sciencedirect.com/science/jrnlallbooks /sub/mathematics.

Jiangsu University, Сибирское отделение АН России) доказано, что решения начально-краевой задачи обладают свойством локализации и получена оценка решений (Zhongshan University, Jilin University), найдены значения критической экспоненты существования глобального решения (Central South University).

В мире при численном моделировании нелинейных процессов по ряду приоритетных направлений проводятся исследования, в том числе: нахождение условий существования глобального решения в нелинейных задачах; определение конечной скорости распространения возмущений; нахождение автомодельных решений; изучение асимптотического поведения решений; предложить и обосновать эффективные численные схемы; разработка комплекса программ, для визуализации нелинейного процесса.

Степень изученности проблемы. Исследования свойств решений нелинейных уравнений недивергентного вида начались с работ Фридмана и Маклеода. В это время в научных исследованиях большое внимание уделялось, прежде всего, изучению существования глобальных решений, рассматривались некоторые свойства неограниченных решений за конечное время. Также применены результаты изучаемых математических моделей в нелинейные процессы, встречающихся в разных отраслях, и найдены новые эффекты, несвойственные дивергентным уравнениям в нелинейной среде с источником или поглощением получены ряд важных результатов. В том числе, в работах H. Fujita, M.Bertsch, M.Wiegner, T.Tsutsumi, P. Markovich, M.Ishiwata, M.Wang, S.Zhou, О.А.Олейник, А.С.Калашников, Ю.А.Дубинский, А.И.Кожанов и др. обнаружены неограниченность решений, эффект конечной скорости распространения и пространственная локализация возмущений, конечное время существования возмущений в нелинейной среде при наличии источника и поглощения.

Изучением глобальных и обобщенных решений уравнений недивергентного вида занимались A.Friedman, J.Mcleod, M.Bertsch, M.Wiegner, T.Tsutsumi, M.Ishiwata, M.Wang, S.Zhou; изучением асимптотического поведения решений занимались Gage E., Angenent S., Wiegner M., Winkler M., Jin Ch., Yin J., Yunzhu Gao,Qiu Meng, Yingjia Guo, Zhi-wen Duan, Li Zhou; определением свойств математических моделей описиваемых краевой задачой Дирихле для вырождающихся параболических квазилинейных уравнений и систем уравнений недивергентного вида занимались W.Du, J.Yin, Y.Wang, M.X.Wang, Z.Xiang, M.Yongsheng, S.N.Zheng, M.Winkler,; исследованием условий blow-up решений, о глобальной разрешимости и не разрешимости решений по времени задачи Коши для нелинейных уравнений и систем уравнений недивергентного вида занимались Deng W., Li Y., Xie Ch., Lu H., Duan Z., Zhou L., Wang M., Wei Y., Sun Y., Shi Y., Wu M., Huiling Li, Yang Zhang, Koichi Anadaa, Tetsuya Ishiwatab, Ferreira R., de Pablo A., Rossi J.D.

В Узбекистане нелинейными задачами диффузии занимались Н.Муҳитдинов, Б.М.Хужаяров, А.С.Расулов, М.Арипов, А.Хасанов, Г.Уразбаев, Н.Равшанов, Ж.Тохиров и их ученики. Их основные работы посвящены численным изучениям свойств решений задач нелинейной диффузии для дивергентных уравнений и систем уравнений, которые можно применить к задачам моделирования процессов диффузии, фильтрации, теплопроводности. Для недивергентных уравнений и систем уравнений посвящены работы М.Арипова, Ш.Садуллаевой, Д.Мухаммадиевой, Ж.Раимбекова, М.Хожимуродовой, в которых на основе автомодельного анализа исследованы качественные свойства решений нелинейных задач, моделирующие процессы, встречающихся в различных разделах естествознания.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научно-исследовательских проектов Национального Университета Узбекистана на темы А-5-44 – «Численное моделирование нелинейных систем биологической популяции типа Колмогорова-Фишера» (2015-2017 гг.),
ОТ-Ф4-30 – «Исследование качественных свойств решений кросс систем с двумя нелинейностями, конвективным переносом, переменной плотностью, источником или поглощением» (2017-2019 гг).

Целью исследования является численное и аналитическое исследование качественных свойств нелинейных математических моделей, описывающиеся квазилинейными параболическими системами недивергентного вида (crosswise) в однородной и в среде с переменной плотностью с источником или поглощением, разработка комплекса программ для численного исследования нелинейных краевых задач.

Задачи исследования:

доказать глобальную разрешимость и неразрешимость по времени решений нелинейной модели диффузии биологических видов в неоднородной среде;

определить свойства конечной скорости распространения возмущения и пространственную локализацию для математической модели политропической фильтрации с недивергентным видом и с переменной плотностью в случае медленной диффузии;

исследовать асимптотику обобщенных решений с компактным носителем задачи Коши и краевой задачи для вырождающегося систем уравнения недивергентного вида с источником и с переменной плотностью;

определить условие глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений нелинейной математической модели для систем диффузии биологических видов с источником и с переменной плотностью;

построить решение типа Зельдовича-Баренблатта для параболической системы недивергентного вида с источником и конвективным переносом и доказать свойства конечной скорости распространения возмущения КСРВ и пространственной локализации;

построить численные схемы для исследования качественных нелинейных свойств математических моделей диффузии биологических видов с переменной плотностью и с источником и разработать вычислительные схемы, алгоритмы и комплекс программ для численного решения нелинейных задач и визуализировать решения.

Объектом исследования являются нелинейные процессы диффузии для биологических видов, распространение тепла в двухкомпонентных нелинейных средах, фильтрационные процессы в газах и жидкостях, описываемые вырождающимися параболическими системами недивергентного вида.

Предмет исследования составляют построение теории и практики численно-аналитического исследования нелинейных задач с недивергентностью и с двойной нелинейностью с учетом однородности и неоднородности среды и их влияние на изучаемые нелинейные процессы.

Методы исследования. В работе использовались автомодельные и приближенно автомодельные методы, аппарат теоремы сравнения решений для построения и анализа различных типов решений, методы эталонных уравнений для решения нелинейных обыкновенных дифференциальных систем уравнений, методы оценки решений, разностные методы для построения численных схем, методы итерации и прогонки.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

определены условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решений нелинейной модели диффузии биологических видов в неоднородной среде без источника и с источником;

определено влияние плотности в неоднородных двухкомпонентных средах на условия глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений нелинейных задач;

построены верхние и нижние оценки обобщенных решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида в однородной и неоднородной среде;

получены асимптотики различных автомодельных решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида путем применения метода эталонных уравнений;

определены решения типа Зельдовича-Баренблатта и на их основе изучены свойства КСРВ для параболической системы недивергентного вида с источником и без источника;

построены вычислительные схемы для изучения качественных свойств нелинейных математических моделей диффузии биологических видов с переменной плотностью, разработаны алгоритмы, комплексы программ в среде Matlab и визуализированы решения нелинейных задач.

Практические результаты исследования. Построены асимптотические формулы при решении нелинейных задач, возникающих в различных приложениях, построены консервативные разностные схемы, итерационные процессы и разработан программный комплекс.

Достоверность результатов исследований. Полученные результаты и утверждения строго доказаны и подтверждаются результатами численных расчетов. Используя полученные оценки решений, приведен численный анализ решений, результаты которого подтверждают правильность и эффективность предложенной в работе методики расчета с применением метода эталонных уравнений и автомодельного анализа с сохранением нелинейного эффекта.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что при решении аналогичных задач могут быть применены существование глобальной разрещимости задачи Коши для нелинейных математических моделей, а также полученные результаты могут быть применены в исследовании задач нелинейной диффузии биологических видов, задач биологической популяции типа Колмогорова-Фишера, в распространении инфекционных заболеваний, в резистивных диффузионных явлений в бессиловых магнитных полей.

Практическая значимость работы заключается в конструировании итерационных процессов, разработка численных схем и программного обеспечения, которые позволяют произвести разумные вычислительные эксперименты в нелинейных задачах диффузии, фильтрации, реакции-диффузии, теплопроводности в различных нелинейных двухкомпонентных средах для случая медленной и быстрой диффузии, а также служить для выявления новых эффектов - явления конечной скорости и локализации решения для класса рассматриваемых задач.

Внедрение результатов исследования. По результатам изучения процессов диффузии биологических видов, описываемые вырождающимися параболическими системами недивергентного вида внедрены:

полученные условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решений нелинейной модели, описывающиеся квазилинейными параболическими системами недивергентного вида в неоднородной среде были использованы для доказательства решений прямых и обратных задач в рамках проекта гранта РФФИ №18-51-41002 «Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами» (Справка Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Россия) №15301/09-324 от 12 сентября 2019 г.). Применение этих научных результатов дало возможность учёта априорной информации;

обоснование асимптотики решений (главные члены асимптотики) как начальных данных при численном решении задачи Коши для параболических систем недивергентного вида, описывающие модели процессов биологической популяции и распространения тепла в неоднородной среде были использованы для доказательства решения прямых и обратных задач в рамках проекта гранта РФФИ №18-51-41002 «Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами» (Справка Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Россия) №15301/09-324 от 12 сентября 2019 г.). Применение этих научных результатов позволило обосновать новые численные алгоритмы решения обратных задач теплофизики и биологических процессов;

полученные верхние и нижние оценки обобщенных решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида в однородной и неоднородной среде, были использованы для доказательства существования глобальных решений задачи Коши в рамках проекта гранта МК-1152.2018.1 «Исследование широкого класса фрактальных осцилляторов» (Справка Камчатского государственного университета (Россия) №18-22 от 16 января 2020 г.). Применение научных результатов служили для визуализации нелинейных процессов и позволили доказать существование глобальных решений задачи Коши;

разработанные алгоритмы и комплексы программ были использованы для изучения нелинейных математических моделей в рамках проекта гранта «Пористость и воздухопроницаемость текстильных тканей» (Справка университета западной Аттики (Греция) от 27 июля 2018 г.). Применение научных результатов служили для визуализации процесса воздухопроницаемости текстильных тканей;

предложенные вычислительные схемы для изучения качественных свойств нелинейных математических моделей диффузии биологических видов с переменной плотностью, были использованы для изучения нелинейных математических моделей в рамках проекта гранта МК-1152.2018.1 «Исследование широкого класса фрактальных осцилляторов» (Справка Камчатского государственного университета (Россия) №18-22 от 16 января 2020 г.). Применение научных результатов служили для визуализации нелинейных процессов биологической популяции.

Апробация результатов исследований. Основные результаты диссертационной работы обсуждались на 22 международных и 9 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 49 научных работ, из них 14 научных статей в журналах рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, в том числе 8 в республиканских и 6 в зарубежных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы и приложений. Объем диссертации составляет 194 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии исследованиям приоритетных направлений развития науки и технологий Республики Узбекистан, формулируются цель и задачи, а также объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыты теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены перечень внедрений в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

Первая глава диссертации **«Математическое моделирование процессов диффузии биологических видов с двойной нелинейностью»** изложены результаты исследований асимптотики автомодельных решений задачи Коши для систем уравнения диффузии в однородной среде без источника.

В первом параграфе излагается свойств математической модели нелинейной диффузии с источником и результаты международных обзоров.

Во втором параграфе приводятся основные определения и вспомогательные утверждения.

Параграф 1.3 посвящен исследованию асимптотики автомодельных решений задачи Коши для параболической системы уравнения, моделирующего диффузию в нелинейных средах

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = v^{m_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ &\frac{\partial v}{\partial t} = u^{m_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned} \qquad (t,x)\in Q, \qquad (1)$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ v(0,x)=v_0(x), \qquad x\in R, \qquad (2)$$

где $Q = R^{+}\times R$, $p,\ m_1, m_2$ - положительные вещественные числа, $u=u(t,x)\geq 0, v=v(t,x)\geq 0$ - искомые решения, $u_0(x),\ v_0(x)$ - ограниченные, непрерывные, неотрицательные функции.

Хорошо известно, что вследствие вырождения система уравнение (1) при $u=0,\ v=0$ или $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|=0, \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|=0$ может не иметь классического решения. Поэтому его решение естественно понимать в обобщенном смысле из класса $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x},\ \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x} \in C\left(R_{+}^{N}\times(0,+\infty)\right), u\geq 0,\ v\geq 0$ и решение удовлетворяет систему уравнений (1) в интегральном смысле.

Рассмотрим следующее автомодельное решение

$$u(t,x)=(T+t)^{-\alpha_1}w(\tau,x),\ v(t,x)=(T+t)^{-\alpha_2}\psi(\tau,x),$$
$$w(\tau,x)=f(\xi),\ \psi(\tau,x)=\phi(\xi),$$

где $\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}}{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}, & \text{при } 1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1>0,\\ \ln(T+t), & \text{при } 1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1=0,\\ -\dfrac{(T+t)^{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}}{1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1}, & \text{при } 1-\alpha_1(p-2)-\alpha_2 m_1<0.\end{cases}$

$$\xi=\begin{cases}x\tau^{-\frac{1}{p}}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)\neq 0,\\ x-\tau, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)=0.\end{cases}$$

Функции $f(\xi)$, $\phi(\xi)$ являются решением следующей автомодельной задачи

$$\begin{gathered}Lf\equiv\frac{1}{p}\xi\frac{df}{d\xi}+\phi^{m_1}\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{df}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\varepsilon\alpha_1}{1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)}f=0,\\ L\phi\equiv\frac{1}{p}\xi\frac{d\phi}{d\xi}+f^{m_2}\frac{d}{d\xi}\left(\left|\frac{d\phi}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\varepsilon\alpha_2}{1-\alpha_1 m_2-\alpha_2(p-2)}\phi=0,\end{gathered}, \qquad (3)$$

$$f(0)=M_1>0,\ \phi(0)=M_2>0,\ f(d_1)=\phi(d_2)=0,\ 0<d_1<\infty,\ \ 0<d_2<\infty. \qquad (4)$$

Медленная диффузия (случай $p-2-m>0,\ m=\max\{m_1,m_2\}$):

Отметим, что функции

$$\bar f(\xi)=\begin{cases}A\left(a-\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_1}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)\neq 0,\\ M_1\exp(-\xi), & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)=0,\end{cases}$$

$$\bar\phi(\xi)=\begin{cases}B\left(a-\xi^{\gamma}\right)_+^{\gamma_2}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)\neq 0,\\ M_2\exp(-\xi), & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)=0,\end{cases}$$

где $\gamma=\dfrac{p}{p-1},\ \gamma_1=\dfrac{(p-1)(p-2-m_1)}{(p-2)^2-m_1m_2},\ \gamma_2=\dfrac{(p-1)(p-2-m_2)}{(p-2)^2-m_1m_2},\quad b_+=\max(0,b),$

$a^{\gamma_1}A=M_1,\ a^{\gamma_2}B=M_2$ при $\xi<a^{(p-1)/p}$ удовлетворяют условию (4).

Введем обозначение:

$$C_i=\begin{cases}\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i-\alpha_i(p-2)}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)>0,\\ -\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i-\alpha_i(p-2)}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1-\alpha_1(p-2)<0,\ i=1,2.\end{cases}$$

Справедливы теоремы.

Теорема 1. Пусть $p-2-m>0,\ m=\max\{m_1,m_2\}$,

$$-\frac{\gamma_i}{p(\gamma_i-1)(p-1)}+C_i\leq 0,\ \ i=1,2,$$

$$A^{p-2}B^{m_1}\gamma\left(\gamma_1 - m_1\gamma_2\right)|\gamma\gamma_1|^{p-2} = \frac{1}{p},$$

$$A^{m_2}B^{p-2}\gamma\left(\gamma_2 - m_2\gamma_1\right)|\gamma\gamma_2|^{p-2} = \frac{1}{p},$$

$$u_+(0,x) \ge u_0(x),\ v_+(0,x) \ge v_0(x),\ x \in R.$$

Тогда для задачи (1)-(2) существует глобальное решение в Q и для него справедлива оценка $u_+(t,x) \ge u(t,x),\ v_+(t,x) \ge v(t,x),\ x \in R,$

где $u_+(t,x) = (T+t)^{-\alpha_1}\bar{f}(\xi),\ v_+(t,x) = (T+t)^{-\alpha_2}\bar{\phi}(\xi).$

Пусть выполняется равенство $\alpha_2 m_1 + \alpha_1(p-2) = \alpha_1 m_2 + \alpha_2(p-2)$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Пусть $1-\alpha_2 m_1 - \alpha_1(p-2) \ne 0$. Тогда финитное решение задачи (3), (4) при $\xi \to a^{\frac{p-1}{p}}$ имеет асимптотику

$$f(\xi) = c_1\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_1)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},\ \phi(\xi) = c_2\left(a - \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_2)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},$$

где коэффициенты c_i (i=1,2) являются корнями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_1^{p-2}c_2^{m_1} = b_{11},$$
$$c_2^{p-2}c_1^{m_2} = b_{12}.$$

Быстрая диффузия (случай $1 < p < 2-m,\ m = \max\{m_1, m_2\}$):

Пусть для систем уравнений (3) выполняется условия

$$f'(0) = 0,\ \phi'(0) = 0,\ f(\infty) = 0,\ \phi(\infty) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что функции

$$\bar{f}(\xi) = A\left(a + \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{-\frac{(p-1)(2+m_1-p)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},\quad \bar{\phi}(\xi) = B\left(a + \xi^{\frac{p}{p-1}}\right)_+^{-\frac{(p-1)(2+m_2-p)}{(p-2)^2 - m_1 m_2}},$$

где $A > 0,\ B > 0,\ a > 0,\ b_+ = \max(0, b)$ удовлетворяют условию (5).

Введем обозначение:

$$C_i = \begin{cases} \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i - \alpha_i(p-2)}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1 - \alpha_1(p-2) > 0, \\ -\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{3-i}m_i - \alpha_i(p-2)}, & \text{при } 1-\alpha_2 m_1 - \alpha_1(p-2) < 0,\ i = 1,2. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $1 < p < 2-m,\ m = \max\{m_1, m_2\}$,

$$\frac{\gamma_i}{p(p-1)(1-\gamma_i)} + C_i \ge 0,\ i = 1,2,$$

$$A^{p-2}B^{m_1}\gamma\left(m_1\gamma_2-\gamma_1\right)|\gamma\gamma_1|^{p-2}=\frac{1}{p},$$
$$A^{m_2}B^{p-2}\gamma\left(m_2\gamma_1-\gamma_2\right)|\gamma\gamma_2|^{p-2}=\frac{1}{p},$$
$$u_0\left(x\right)\ge u_-\left(0,x\right),\ v_0\left(x\right)\ge v_-\left(0,x\right),\ x\in R.$$

Тогда для задачи (1)-(2) существует глобальное решение в Q и для него справедлива оценка $u\left(t,x\right)\ge u_-\left(t,x\right),\ v\left(t,x\right)\ge v_-\left(t,x\right),\ x\in R,$

где $u_-\left(t,x\right)=\left(T+t\right)^{-\alpha_1}\bar{f}\left(\xi\right),\ v_-\left(t,x\right)=\left(T+t\right)^{-\alpha_2}\bar{\phi}\left(\xi\right).$

Дальше в этом параграфе рассмотрены исчезающие на бесконечности решения задачи (1), (2).

Введем обозначения:

$$b_{i3}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p}\left(\frac{2+m_i-p}{\left(p-2\right)^2-m_1m_2}-C_i\right),\ b_{i5}=\left(1-\frac{1}{p}\right)^{p}\frac{2\left(2+m_i-p\right)}{\left(p-2\right)^2-m_1m_2},$$

$$b_{i4}=\left(p-1\right)^{-p-1}\left|\frac{\left(p-2\right)^2-m_1m_2}{2+m_i-p}\right|^{p-1}\left(\frac{2+m_i-p}{\left(p-2\right)^2-m_1m_2}+\frac{1}{p}\right)^{-1},\ i=1,2.$$

Теорема 4. Пусть $1-\alpha_2m_1-\alpha_1\left(p-2\right)\neq 0$. Тогда исчезающие на бесконечности решения задачи (3), (5) при $\xi\to\infty$ имеют асимптотику

$$f\left(\xi\right)=c_1\left(a+\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{(p-1)(2+m_1-p)}{(p-2)^2-m_1m_2}},\ \phi\left(\xi\right)=c_2\left(a+\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{(p-1)(2+m_2-p)}{(p-2)^2-m_1m_2}},$$

где коэффициенты c_i (i=1,2) являются корнями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_1^{p-2}c_2^{m_1}=b_{13}\,b_{14},$$
$$c_2^{p-2}c_1^{m_2}=b_{23}\,b_{24}.$$

Следствие 1. Обобщенное решение задачи (1)-(2) имеет асимптотику при $x\to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$ следующего вида

$$u_A\left(t,x\right)=c_1\left(T+t\right)^{-\alpha_1}\left(a-\left(x\tau^{-1/p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_1)}{(p-2)^2-m_1m_2}},$$

$$v_A\left(t,x\right)=c_2\left(T+t\right)^{-\alpha_2}\left(a-\left(x\tau^{-1/p}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{(p-1)(p-2-m_2)}{(p-2)^2-m_1m_2}}.$$

Параграф 1.4 посвящен изучению асимптотического поведения автомодельных решений задачи Коши для квазилинейной параболической системы уравнений недивергентного вида, моделирующего процесс диффузии для биологических видов

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right),\ \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right),\ t>0,\ x\in R^N, \qquad (6)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x)\ge 0,\ \ v|_{t=0} = v_0(x)\ge 0,\ x\in R^N, \qquad (7)$$

где, $\nabla(\cdot)=grad_x(\cdot)$, $m_1,\ m_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ - заданные вещественные числа, $N\ge 1$– размер пространства, $u=u(t,x)\ge 0,\ v=v(t,x)\ge 0$ - искомые решения.

Известно, что в зависимости от значения числовых параметров система (6) описывает различные физические процессы такие, как процесс диффузии для биологических видов, резистивных диффузионных явлений в бессиловых магнитных полей, кривая потока укорочения, распространение инфекционных заболеваний и в ряде других областях.

Кроме того, система уравнений (6) при $\alpha_1=0,\ \alpha_2=0$ известна, как система уравнений пористой среды, нелинейной теплопроводности или нелинейной диффузии.

Применяя метод сравнения решений и метод эталонных уравнений для решения задачи (6)-(7), получены оценки решения.

Доказывается, что приведенные выше теоремы 1-4 имеют место и в этом случае.

В параграфе 1.5 рассматривается в области $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ задача Коши для параболической системы уравнений недивергентного вида с двойной нелинейностью

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= v^{m_1}\nabla\left(\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u^l\right),\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= u^{m_2}\nabla\left(\left|\nabla v^k\right|^{p-2}\nabla v^l\right),\end{aligned} \qquad (8)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x)\ge 0,\ \ v|_{t=0} = v_0(x)\ge 0,\ \forall x\in R^N \qquad (9)$$

где $p,\ m_1,\ m_2,\ k,\ l$ - положительные вещественные числа, $u=u(t,x)\ge 0$, $v=v(t,x)\ge 0$ - искомые решения.

Построены асимптотические представления автомодельных решений задачи (8)-(9), в зависимости от значений числовых параметров, найдены необходимые и достаточные признаки их существования.

Автомодельное решение системы (8) ищется в виде

$$u(t,x)=(T+t)^{-\alpha_1}w(\tau,x),\ \ w(\tau,x)=f(\xi),$$

$$v(t,x)=(T+t)^{-\alpha_2}\varphi(\tau,x),\ \ \varphi(\tau,x)=\phi(\xi),$$

где

$$\tau(t)=\begin{cases}\dfrac{(T+t)^{1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1}}{1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1}, & \text{при } 1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1>0,\\ \ln(T+t), & \text{при } 1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1=0,\\ -\dfrac{(T+t)^{1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1}}{1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1}, & \text{при } 1-\alpha_1(k(p-2)+l-1)-\alpha_2 m_1<0.\end{cases}$$

$$\xi=\begin{cases}|x|\tau^{-\frac{1}{p}}, & \text{при } 1-\alpha_i(k(p-2)+l-1)-\alpha_{3-i}m_i\neq 0,\\ \sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i x_i-\tau, & \text{при } 1-\alpha_i(k(p-2)+l-1)-\alpha_{3-i}m_i=0\ \ (i=1,2),\end{cases}$$

После преобразования система (8) примет следующий вид

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\xi\frac{df}{d\xi}+\phi^{m_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{df^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{df^l}{d\xi}\right)+c_1 f=0,\\ &\frac{1}{p}\xi\frac{d\phi}{d\xi}+f^{m_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\left|\frac{d\phi^k}{d\xi}\right|^{p-2}\frac{d\phi^l}{d\xi}\right)+c_1\phi=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Введем обозначения:

$$c_{i1}=-\frac{(p-1)^p A_{3-i}^{-\gamma_i}A_i^{2-p}a^{-\frac{p-1}{p}}}{(p+\gamma_i-2)p^p\varphi_i},\quad c_{i2}=\frac{|p-1|^p(1-\gamma_i)}{|p+\gamma_i-2|},\quad c_{i3}=-\frac{(p-1)^p A_{3-i}^{-\gamma_i}A_i^{1+q_i-p}\psi_i}{p^p\varphi_i a},$$

Пусть выполняется равенство $(q_1-1)(p-2-\gamma_1)=(q_2-1)(p-2-\gamma_2)$. Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 5. Пусть $1-n_1(p-2)-n_2\gamma_1>0$. Тогда решение с компактным носителем системы уравнения (10) при $\xi\to a^{\frac{p-1}{p}}$ имеет следующий вид

$$f_i(\xi)=A_i\left(a-\xi^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p+\gamma_i-2}}\left(y_i^0+o(1)\right)$$

где y_i^0 (i=1,2) являются, соответственно, корнями z_i (i=1,2) системы нелинейных алгебраических уравнений

1. $c_{i1}+c_{i2}z_i^{p-2}z_{3-i}^{\gamma_i}+c_{i3}z_i^{q_i-1}=0$ при $\gamma_1=\gamma_2$ и $b_{i2}=0$ (i=1,2).
2. $c_{i1}+c_{i2}z_i^{p-2}z_{3-i}^{\gamma_i}=0$ при $\gamma_1=\gamma_2$ и $b_{i2}>0$ (i=1,2).
3. $c_{i2}z_i^{p-1}z_{3-i}^{\gamma_i}+c_{i3}z_i^{q_i-1}=0$ при $b_{i1}>0$ и $b_{i2}=0$ (i=1,2).

Следовательно, обобщенное решение системы уравнений (8) имеет асимптотику при $|x|\to a^{\frac{p-1}{p}}\tau^{\frac{1}{p}}$ и имеет следующий вид

$$u_{iA}(t,x)=A_i^2(T+t)^{-\frac{1}{1-q_i}}\left(a-\left(\frac{|x|}{\tau^{1/p}}\right)^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p+\gamma_i-2}}\left(y_i^0+o(1)\right)\qquad i=1,2.$$

Вторая глава диссертации **«Математическое моделирование процессов диффузии биологических видов с двойной нелинейностью с источником или поглощением»** посвящена изучению условия глобальной разрешимости и неразрешимости по времени решения нелинейной математической модели диффузии с источником, получению асимптотики автомодельных решений.

В параграфе 2.1 исследуются в области $Q=\{(t,x):\ 0<t<\infty,\ \ x\in R^1\}$ качественные свойства решений следующих двух квазилинейных уравнений недивергентного вида, описывающие диффузию двухкомпонентных биологических видов

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=u^{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\varepsilon v^{q_1},\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=v^{\gamma_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{\sigma}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\varepsilon u^{q_2},\end{aligned}\tag{11}$$

где $\sigma,\ \gamma_i,\ q_i\ (i=1,2)$ - положительные вещественные числа, $\varepsilon=\pm1$, $u=u(t,x)\ge0,\ \ v=v(t,x)\ge0$ - искомые решения.

Система уравнений (11) описывает многие физические явления. В частности, при $q=\gamma+1,\ 0<\gamma<1$ для одного уравнения в (11), соответствует частному случаю известному уравнению пористой среды, при $q=2$ явлению в физике плазмы.

В работах Chen H., Wang Ch., Yin J. задача Коши для одного уравнения исследована при $q=\gamma+1, \sigma=0$ в (11), доказано существование глобального решения, изучены асимптотические свойства решений. В работах Zhou W., Yao Z., Wiegner M. задача Коши для одного уравнения исследована при $q=0,\ \sigma=0$ в (11), доказано существование единственного вязкого решения, изучены некоторые свойства асимптотических решений. В работах Wiegner M., Wang S., Wang M.X., Xie C.H. задача Коши для одного уравнения исследована при $\sigma=0$ в (11), изучены свойства blow-up и асимптотическое поведение решений. В работе Ж.Р.Раимбекова задача Коши для одного уравнения исследована при $q=0$ в (11), изучено асимптотическое поведение решений, исследованы случаи быстрой и медленной диффузии.

Для изучения асимптотики решений автомодельных уравнений для системы (11), преобразуем исходную систему к относительно легко поддающемуся исследованию виду. Для получения такой вспомогательной системы уравнений применим к (11) следующее преобразование

$$u(t,x)=\bar{u}(t)w_1(\tau,x),\ \ w_1(\tau,x)=f_1(\xi),\ \ f_1(\xi)=\bar{f}_1(\xi)y_1(\eta),$$
$$v(t,x)=\bar{v}(t)w_2(\tau,x),\ \ w_2(\tau,x)=f_2(\xi),\ \ f_2(\xi)=\bar{f}_2(\xi)y_2(\eta),$$
где
$$\bar{u}(t)=A_1(T+\varepsilon t)^{\varepsilon n_1},\ \ \bar{v}(t)=A_2(T+\varepsilon t)^{\varepsilon n_2},\qquad \tau(t)=A_1^{\gamma_1+\sigma}\frac{(T+\varepsilon t)^{\varepsilon n_1(\gamma_1+\sigma)+1}}{\varepsilon n_1(\gamma_1+\sigma)+1},$$
$$\xi=x\tau^{-\frac{1}{\sigma+2}},\ \eta=-\ln\left(a-b\xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right),\ \bar{f}_i(\xi)=\left(a-b\xi^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}},\quad (i=1,2),\ a>0,\ b>0.$$
После преобразования система (11) примет следующий вид
$$\begin{gathered}y_i^{\gamma_i}\frac{d}{d\eta}\left(\left|\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right|^{\sigma}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right)\right)+a_{i2}(\eta)\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right)+\\+a_{i1}(\eta)y_i^{\gamma_i}\left(\left|\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right|^{\sigma}\left(\frac{dy_i}{d\eta}+a_{i0}(\eta)y_i\right)\right)+a_{i3}(\eta)y_{3-i}^{q_i}+a_{i4}(\eta)y_i=0\end{gathered}\tag{12}$$
В которой $a_{ij}(\eta)$ определенные функции.

Введем обозначения:
$$c_{i1}=\frac{1}{(\sigma+2)^{\sigma+2}(\sigma+\gamma_i)b^{\sigma+1}},\ \ c_{i2}=\frac{\gamma_i-1}{(\sigma+\gamma_i)^{\sigma+2}},\ \ c_{i3}=-\frac{\psi_i}{ab^{\sigma+1}(\sigma+2)}\quad (i=1,2).$$
Доказана следующая теорема:

Теорема 6. Пусть $(1+q_1)(\gamma_1+\sigma)=(1+q_2)(\gamma_2+\sigma)$. Тогда для существования решений системы (12) $(y_1(\eta),y_2(\eta))$, вида $y_i(\eta)=y_i^0+o(1),\ \eta\to+\infty$, где $0<y_i^0<+\infty$ (i=1,2), необходимо, чтобы соблюдалось одно из следующих условий:

1. $s_i=0$ и y_i^0 (i=1,2) являются соответственно решениями z_i (i=1,2) системы нелинейных алгебраических уравнений $c_{i1}+c_{i2}z_i^{\sigma+\gamma_i}+c_{i3}z_iz_{3-i}^{q_i}=0$ (i=1,2).
2. $s_i>0$ и y_i^0 (i=1,2) являются соответственно решениями z_i (i=1,2) системы нелинейных алгебраических уравнений $c_{i1}+c_{i2}z_i^{\sigma+\gamma_i}=0$ (i=1,2).
3. $s_1=0, s_2>0$ и y_i^0 (i=1,2) являются соответственно решениями z_i (i=1,2) системы нелинейных алгебраических уравнений $\begin{array}{l}c_{11}+c_{12}z_1^{\sigma+\gamma_1}+c_{13}z_1z_2^{q_1}=0,\\ c_{21}+c_{22}z_2^{\sigma+\gamma_2}=0\end{array}$
4. $s_1>0, s_2=0$ и y_i^0 (i=1,2) являются соответственно решениями z_i (i=1,2) системы нелинейных алгебраических уравнений $\begin{array}{l}c_{21}+c_{22}z_2^{\sigma+\gamma_2}+c_{23}z_2z_1^{q_2}=0,\\ c_{11}+c_{12}z_1^{\sigma+\gamma_1}=0.\end{array}$

Параграф 2.2 посвящен исследованию в области $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ качественных свойств решений следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right)+\varepsilon u^{\beta_1},\ \frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right)+\varepsilon v^{\beta_2}, \quad (13)$$

$$u|_{t=0}=u_0(x)\ge 0,\ \ v|_{t=0}=v_0(x)\ge 0,\ \ \forall x\in R^N \quad (14)$$

где $m_1,\ m_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\beta_1,\beta_2$ - положительные вещественные числа, $\varepsilon=\pm 1$, $u=u(t,x)\ge 0,\ v=v(t,x)\ge 0$ - искомые решения.

Обсуждается глобальная разрешимость обобщенного решения для нелинейной системы, в зависимости от значения численных параметров.

Автомодельная система построена с помощью алгоритма нелинейного расщепления:

$$\begin{gathered}\phi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2b_1}\frac{df}{d\xi}+d_1\left(f^{\beta_1}-f\right)=0,\\ f^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\phi^{m_2-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{\xi}{2b_2}\frac{d\phi}{d\xi}+d_2\left(\phi^{\beta_2}-\phi\right)=0,\end{gathered} \quad (15)$$

$$f(0)=M_1>0,\ \phi(0)=M_2>0,\ f(s_1)=\phi(s_2)=0,\ 0<s_1<\infty,\ \ 0<s_2<\infty, \quad (16)$$

Пусть выполняется равенство $n_1(m_1-1)+n_2\alpha_1=n_2(m_2-1)+n_1\alpha_2$. Тогда справедлива:

Теорема 7. Пусть $\varepsilon=+1,\ \ 1+\varepsilon\alpha_1 n_2+\varepsilon n_1(m_1-1)>0,\ \beta_i<1,\ \ i=1,2.$ Тогда, для того чтобы решение с компактным носителем задачи (15), (16) при $\xi\to\sqrt{a}$ имела асимптотику следующего вида

$$f(\xi)=z_1\left(a-\xi^2\right)^{p_1}\left(1+o(1)\right),\ \phi(\xi)=z_2\left(a-\xi^2\right)^{p_2}\left(1+o(1)\right),$$

необходимо, чтобы соблюдалось одно из следующих условий:

1. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2=\dfrac{1}{1-\beta_2}$ и $z_1,\ z_2$ - являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{\beta_i-1}+c_{i2}z_i^{m_i-1}z_{3-i}^{\alpha_i}+c_{i3}=0,\ \ i=1,2.$$

2. $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i},\ \ m_i p_i<1,\ \ \ i=1,2$ и $z_1,\ z_2$ - являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}z_i^{\beta_i-m_i}+c_{i2}z_{3-i}^{\alpha_i}=0,\ \ i=1,2.$$

3. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1},\ p_2<\dfrac{1}{1-\beta_2},\ \ m_2 p_2<1$ и $z_1,\ z_2$ - являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}c_{11}z_1^{\beta_1-1}+c_{12}z_1^{m_1-1}z_2^{\alpha_1}+c_{13}=0,\\ c_{21}z_2^{\beta_2-m_2}+c_{22}z_1^{\alpha_2}=0.\end{cases}$$

4. $p_1 < \dfrac{1}{1-\beta_1}$, $p_2 = \dfrac{1}{1-\beta_2}$, $m_1 p_1 < 1$ и z_1, z_2 - являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} c_{11} z_1^{\beta_1 - m_1} + c_{12} z_2^{\alpha_1} = 0, \\ c_{21} z_2^{\beta_2 - 1} + c_{22} z_2^{m_2 - 1} z_1^{\alpha_2} + c_{23} = 0. \end{cases}$$

Следствие 2. Обобщенное решение задачи (13)-(14) имеет асимптотику при $|x| \to a^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{1}{2}}$, $\varepsilon = +1$, $1 + \varepsilon \alpha_1 n_2 + \varepsilon n_1 (m_1 - 1) > 0$, $\beta_i < 1$, $i = 1,2$ и имеет следующий вид

$$u_A(t,x) = A(T+t)^{n_1} \left(a - \left(|x| \tau^{-1/2} \right)^2 \right)^{p_1} (1 + o(1)),$$

$$v_A(t,x) = B(T+t)^{n_2} \left(a - \left(|x| \tau^{-1/2} \right)^2 \right)^{p_2} (1 + o(1)),$$

где $A = z_1 A_1$, $B = z_2 A_2$ и n_1, n_2, p_1, p_2 − определенные выше константы.

В параграфе 2.3 рассмотрена математическая модель, описывающая процесс диффузии в нелинейных средах, при исследовании проблем течения жидкостей через пористые пласты, в задачах динамики биологических популяций, политропической фильтрации и в ряде других областях.

В области $Q = \{(t,x):\ t > 0,\ x \in R^N\}$ рассматривается параболическая система двух квазилинейных уравнений недивергентного вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_i^{\gamma_i} \nabla \left(|\nabla u_i|^{\sigma} \nabla u_i \right) + \varepsilon u_{3-i}^{q_i}, \qquad (17)$$

где σ, γ_i, q_i $(i = 1,2)$ - положительные вещественные числа, $\varepsilon = \pm 1$, $u_i = u_i(t,x) \ge 0$ - искомые решения. Члены $\varepsilon u_{3-i}^{q_i}$ соответствуют наличию источников $(\varepsilon = +1)$ или стоков $(\varepsilon = -1)$, мощности которых равны $u_{3-i}^{q_i}$. Построены асимптотические представления автомодельных решений системы (17) при $\varepsilon = -1$, в зависимости от значения числовых параметров, найдены необходимые и достаточные признаки их существования.

Введем обозначения:

$$c_{i1} = -\frac{1}{(\sigma+2)^{\sigma+2} (\sigma+\gamma_i) b^{\sigma+1} \varphi_i}, \quad c_{i2} = \frac{1-\gamma_i}{(\sigma+\gamma_i)^{\sigma+2}}, \quad c_{i3} = -\frac{\psi_i}{a b^{\sigma+1} (\sigma+2)^{\sigma+2} \varphi_i},$$

$$c_{i4} = \frac{1-\gamma_i}{(\sigma+\gamma_i)^{\sigma+1}}, \quad c_{i5} = -\frac{(\sigma+1)\mu^{-1}\varphi_i^{-1}}{(\sigma+2)^{\sigma+1} b^{\sigma+\frac{1}{\sigma+2}} a^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}} \quad (i = 1,2).$$

Тогда справедлива:

Теорема 8. Пусть $(1+q_1)(\gamma_1+\sigma)=(1+q_2)(\gamma_2+\sigma)$, $s_i=0$ и $-n_i(\sigma+\gamma_i)+1>0$. Тогда, исчезающие на бесконечности решения системы уравнения (17) имеет асимптотику при $x\left(A_1^{\gamma_1+\sigma}\dfrac{(T+t)^{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}}{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}\to\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}$

$$u_i(t,x)=A_i(T+t)^{-n_i}\left(a-b\left(x\left(A_1^{\gamma_1+\sigma}\frac{(T+t)^{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}}{-n_1(\gamma_1+\sigma)+1}\right)^{-\frac{1}{\sigma+2}}\right)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}}y_i(\eta),$$

$y_i(\eta)=y_i^0+o(1)$, где $0<y_i^0<+\infty$ (i=1,2) и y_i^0 (i=1,2) являются соответственно корнями z_i (i=1,2) системы нелинейных алгебраических уравнений

$$c_{i1}+c_{i2}z_i^{\sigma+\gamma_i}+c_{i3}z_i^{-1}z_{3-i}^{q_i}=0 \quad (i=1,2).$$

В §2.4 рассматривается в области $Q=\{(t,x):\ t>0,\ x\in R^N\}$ параболическая система двух квазилинейных уравнений недивергентного вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=u_i^{\gamma_i}\nabla\left(\left|\nabla u_i\right|^{\sigma}\nabla u_i\right)-\prod_{j=1}^{2}u_j^{q_{ij}}\ \ (i=1,2). \qquad (18)$$

где $\sigma,\ \gamma_i,\ q_{i1},\ q_{i2}\ (i=1,2)$ - положительные вещественные числа, $u_i=u_i(t,x)\ge 0$ - искомые решения.

Изучена асимптотика решений автомодельных уравнений для системы (18). Доказывается, что приведенная выше теорема 8 имеет место и в этом случае.

Следствие 3. Обобщенное решение системы уравнений (18) имеет асимптотику следующего вида

$$u_i(t,x)=A_i(T+t)^{-n_i}\left(a-b\left(\frac{x}{\tau^{\frac{1}{\sigma+2}}}\right)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}}\left(y_i^0+o(1)\right),\quad i=1,2$$

при $|x|\to\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}\tau^{\frac{1}{\sigma+2}}$,

$$u_i(t,x)=A_i(T+t)^{-n_i}\left(a-b\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i-\tau\right)^{\frac{\sigma+2}{\sigma+1}}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+\gamma_i}}\left(y_i^0+o(1)\right),\quad i=1,2$$

при $\sum_{i=1}^{N}\mu_i x_i \to \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} + \tau$.

Третья глава диссертации **«Математическое моделирование процессов диффузии биологических видов с переменной плотностью»** посвящена исследованию качественных свойств решений нелинейной модели диффузии в неоднородной среде с переменной плотностью с источником или поглощением, численному моделированию процесса нелинейной диффузии. Построены верхние и нижние решения на основе метода эталонных уравнений, получено условие глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени.

В §3.1 рассматривается следующая задача

$$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right),\ |x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_2-1}\nabla v\right), \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \ge 0,\ \ v|_{t=0} = v_0(x) \ge 0,\ \ \forall x \in R^N \tag{20}$$

где $m_1,\ m_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ - положительные вещественные числа, $n \ne -2,\ \ u = u(t,x) \ge 0$, $v = v(t,x) \ge 0$ - искомое решение.

Нелинейные уравнения и системы уравнений в недивергентной форме (19) часто используются для описания различных физических явлений под воздействием переменной плотности ($|x|^n$), таких, как процесс диффузии для биологических видов, резистивных диффузионных явлений в бессиловых магнитных полях, кривая потока укорочения, распространение инфекционных заболеваний и так далее.

В этом параграфе построена автомодельная система, найдено её точное частное решение, изучается влияние переменной плотности на процесс на основе автомодельного подхода.

Система уравнения (19) при выполнении следующих условий

$$1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1) > 0,\quad (m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2 \ne 0,$$

$$\alpha_1 k_2 + k_1\left(m_1-1\right) = \alpha_2 k_1 + k_2\left(m_2-1\right),\ k_1 > 0,\ k_2 > 0,$$

имеет следующее точное решение

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A_1(T+t)^{-k_1}\left(a-\left(1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1)\right)|x|^{n+2}(T+t)^{\alpha_1 k_2 + k_1(m_1-1)-1}\right)_+^{p_1}, \\ v(t,x) &= A_2(T+t)^{-k_2}\left(a-\left(1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1)\right)|x|^{n+2}(T+t)^{\alpha_1 k_2 + k_1(m_1-1)-1}\right)_+^{p_2}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $A_1,\ A_2,\ p_1,\ p_2, k_1, k_2 -$ определенные выше константы.

Далее показано, что точное решение системы (21), будут асимптотикой решений системы (19).

Следствие 4. Обобщенное решение задачи (19)-(20) имеет асимптотику при $|x| \to a^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{n+2}},\ \ 1-\alpha_1 k_2 - k_1(m_1-1) > 0,\ \ (n+2)(p_i m_i - 1) > 0,\ i = 1,2$ следующего вида

$$u_A(t,x)=A(T+t)^{-k_1}\left(a-\left(|x|\tau^{-1/(n+2)}\right)^2\right)^{p_1}(1+o(1)),$$

$$v_A(t,x)=B(T+t)^{-k_2}\left(a-\left(|x|\tau^{-1/(n+2)}\right)^2\right)^{p_2}(1+o(1)).$$

В §3.2 для параболической системы

$$|x|^n\frac{\partial u}{\partial t}=v^{\alpha_1}\nabla\left(u^{m_1-1}\nabla u\right)+|x|^n u^{\beta_1},\quad |x|^n\frac{\partial v}{\partial t}=u^{\alpha_2}\nabla\left(v^{m_1-1}\nabla v\right)+|x|^n v^{\beta_2},\qquad (22)$$

с начальным условием

$$u(0,x)=u_0(x)\ge 0,\ v(0,x)=v_0(x)\ge 0,\quad x\in R^N,\qquad (23)$$

где $n,\ m_1,m_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2$ числовые параметры, устанавливаются следующие качественные свойства решений в случае медленной диффузии: оценка решения, конечная скорость распространение возмущения (КСРВ), асимптотическое поведение решений с компактным носителем автомодельной системы, в зависимости от значения числовых параметров. Показана существования следующих автомодельных решений системы

$$u(t,x)=A_1(T+t)^{1/(1-\beta_1)}f(\xi),\ v(t,x)=A_2(T+t)^{1/(1-\beta_2)}\phi(\xi),\quad \xi=|x|\tau^{-\frac{1}{n+2}}\qquad (24)$$

где $\tau(t)=\begin{cases}\int(T+t)^{\frac{\alpha_1}{1-\beta_2}+\frac{m_1-1}{1-\beta_1}}dt=\int(T+t)^{\frac{\alpha_2}{1-\beta_1}+\frac{m_2-1}{1-\beta_2}}dt & \text{при } \dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+\dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+1\ne 0\\ \ln(T+t)\quad \text{при } \dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+\dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+1=0, & \end{cases}$

$$b_i=\frac{1}{1-\beta_i}\cdot\frac{1}{\dfrac{\alpha_i}{1-\beta_{3-i}}+\dfrac{m_i-1}{1-\beta_i}+1},\ d_i=(1-\beta_i)^{\frac{m_i-1}{1-\beta_i}}(1-\beta_{3-i})^{\frac{\alpha_i}{1-\beta_{3-i}}},\ i=1,2,$$

и выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}&\phi^{\alpha_1}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}f^{m_1-1}\frac{df}{d\xi}\right)+\frac{1}{d_1(n+2)}\xi^{n+1}\frac{df}{d\xi}+\frac{b_1}{d_1}\xi^n\left(f^{\beta_1}-f\right)=0,\\ &f^{\alpha_2}\xi^{1-N}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^{N-1}\phi^{m_2-1}\frac{d\phi}{d\xi}\right)+\frac{1}{d_2(n+2)}\xi^{n+1}\frac{d\phi}{d\xi}+\frac{b_2}{d_2}\xi^n\left(\phi^{\beta_2}-\phi\right)=0.\end{aligned}\qquad (25)$$

Мы будем рассматривать неотрицательные решения системы уравнений (25) удовлетворяющих следующим условиям:

$$\begin{aligned}&f(0)=M_1,\ \phi(0)=M_2,\ M_1\in R^+,M_2\in R^+,\\ &f(d_1)=\phi(d_2)=0,\ 0<d_1<\infty,\ \ 0<d_2<\infty.\end{aligned}\qquad (26)$$

Применяя метод сравнения решений и метод стандартных уравнений для решения задачи (25)-(26), получаем оценку решения задачи (22)-(23).

Введем обозначения: $p_i=\dfrac{m_{3-i}-\alpha_i-1}{(m_1-1)(m_2-1)-\alpha_1\alpha_2}$, $i=1,2$.

Теорема 9. Пусть $m_{3-i}>1+\alpha_i$, $M_i^{\beta_i-1}\le 1+\dfrac{N+n}{n+2}\,\dfrac{p_i}{b_i(p_im_i-1)}$,

$$M_i^{m_i-1}M_{3-i}^{\alpha_i}=\frac{a}{d_i(p_im_i-1)(n+2)^2},\ i=1,2,$$

$$u_+(0,x)\ge u_0(x),\ v_+(0,x)\ge v_0(x),\ x\in R^N.$$

Тогда существует глобальное решение задачи (22)-(23) в Q и для него справедлива следующая оценка $u(t,x)\le u_+(t,x), v(t,x)\le v_+(t,x)$, где

$$u_+(t,x)=A(T+t)^{1/(1-\beta_1)}\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_1},\ v_+(t,x)=B(T+t)^{1/(1-\beta_2)}\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_2} \quad (27)$$

В теореме 9 доказано, что верхнее решение задачи (22)-(23) имеет вид (27). Далее показано, что функции $\bar f(\xi)=A\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_1}$, $\bar\phi(\xi)=B\left(a-\xi^{n+2}\right)_+^{p_2}$ будут асимптотикой решений задачи (25)-(26) при $\xi\to a^{1/(n+2)}$.

Введем обозначения:

$$b_{i1}=p_i(p_im_i-1),\ b_{i2}=-\frac{p_i}{d_i(n+2)^2},\ b_{i3}=\frac{b_i}{d_i(n+2)^2a},\ \ i=1,2.$$

Теорема 10. Пусть $\dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2}+\dfrac{m_1-1}{1-\beta_1}+1>0$. Тогда решение с компактным носителем задачи (25)-(26) при $\xi\to a^{1/(n+2)}$ имеет асимптотику следующего вида $f(\xi)=c_1\left(a-\xi^{n+2}\right)^{p_1}(1+o(1))$, $\phi(\xi)=c_2\left(a-\xi^{n+2}\right)^{p_2}(1+o(1))$, если выполняется одно из следующих условий:

1. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1}, p_2=\dfrac{1}{1-\beta_2}$ и коэффициенты c_i (i=1,2) являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$b_{i1}c_i^{m_i-1}c_{3-i}^{\alpha_i}+b_{i2}+b_{i3}c_i^{\beta_i-1}=0,\ i=1,2.$$

2. $p_i<\dfrac{1}{1-\beta_i}$, $p_im_i>1$, $i=1,2$ и коэффициенты c_i (i=1,2) являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$b_{i1}c_i^{m_i-1}c_{3-i}^{\alpha_i}+b_{i2}=0,\ i=1,2.$$

3. $p_1=\dfrac{1}{1-\beta_1}$, $p_2<\dfrac{1}{1-\beta_2}$, $p_2m_2>1$ и коэффициенты c_i (i=1,2) являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_{11}c_1^{m_1-1}c_2^{\alpha_1}+b_{12}+b_{13}c_1^{\beta_1-1}=0,\\ b_{21}c_2^{m_2-1}c_1^{\alpha_2}+b_{22}=0.\end{cases}$$

4. $p_1 < \dfrac{1}{1-\beta_1}$, $p_2 = \dfrac{1}{1-\beta_2}$, $p_1 m_1 > 1$ и коэффициенты c_i (i=1,2) являются соответственно решениями системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} b_{11} c_1^{m_1-1} c_2^{\alpha_1} + b_{12} = 0, \\ b_{21} c_2^{m_2-1} c_1^{\alpha_2} + b_{22} + b_{23} c_2^{\beta_2 - 1} = 0. \end{cases}$$

Теорема 9 даёт возможность получить следующую оценку для свободной границы $|x(t)| \le \left[\dfrac{a}{k}\right]^{\frac{1}{n+2}} (T+t)^{\frac{k}{n+2}}$, где $k = \dfrac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \dfrac{m_1 - 1}{1-\beta_1} + 1.$

Теорема 10 показывает, что свободная граница имеет асимптотику $|x(t)| \sim \left[\dfrac{a}{k}\right]^{\frac{1}{n+2}} (T+t)^{\frac{k}{n+2}}$.

Полученные качественные результаты дают возможность для численного решения задачи Коши для системы уравнений (22).

Приведены некоторые результаты численных экспериментов для разных значений числовых параметров.

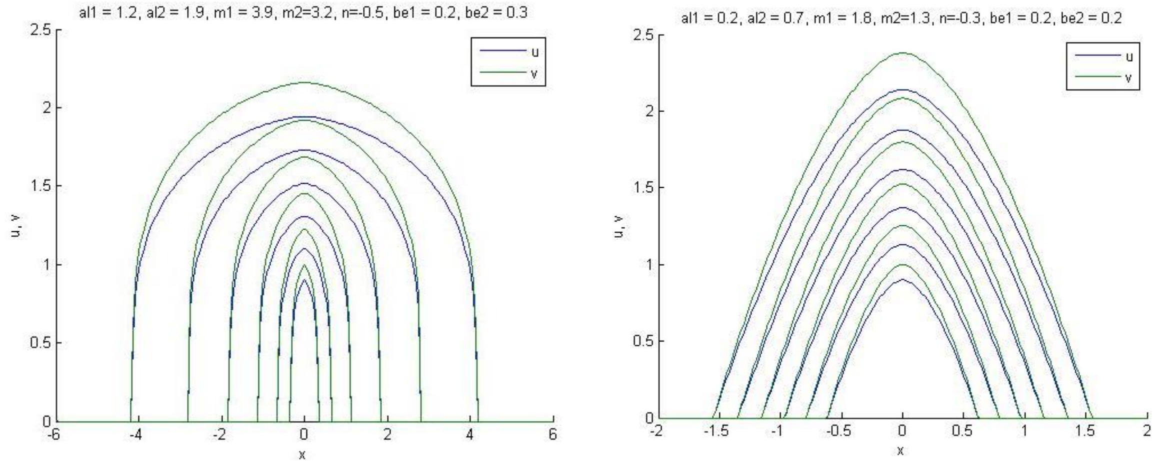


Рисунок 1. Медленная диффузия. Случай $n<0$: $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ и $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$.

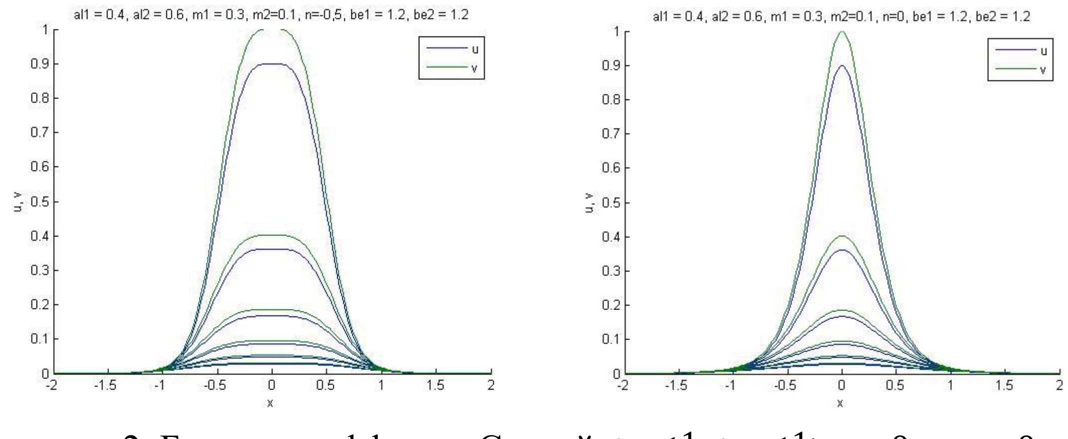


Рисунок 2. Быстрая диффузия. Случай $\alpha_1 < 1, \alpha_2 < 1$: $n < 0$ и $n = 0$.

На рисунке 1 показано решение с компактным носителем задачи (22)-(23). На рисунке 2 показано решение задачи (22)-(23), исчезающей на бесконечности.

В §3.3 рассматривается задача Коши для нелинейной системы уравнений параболического типа недивергентного вида с источником описывающая процессы диффузии биологических видов. Построены решения типа Зельдович-Баренблатта для систем недивергентного вида, с помощью метода сравнения решений устанавливается свойство конечной скорости распространения возмущения задачи Коши; изучается случай медленной и быстрой диффузии. Обсуждается глобальная разрешимость обобщенного решения для нелинейной системы, в зависимости от значения численных параметров для которых доказаны справедливость теорем 9-10.

§3.4 и §3.5 посвящены исследованию асимптотики автомодельных решений задачи

$$|x|^n \frac{\partial u}{\partial t} = u^{\gamma_1}\nabla\left(\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\right) + \varepsilon |x|^n v^{q_1},$$
$$|x|^n \frac{\partial v}{\partial t} = v^{\gamma_2}\nabla\left(\left|\nabla v\right|^{p-2}\nabla v\right) + \varepsilon |x|^n u^{q_2}, \quad (28)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x) \ge 0,\ v|_{t=0} = v_0(x) \ge 0,\ \forall x \in R^N \quad (29)$$

В работах Wang M., Xie C.H. исследовано существование и единственность классического решения задачи Коши (28)-(29) при $p=2,\ n=0$. Доказано локальное существование положительных классических решений: при $\{a,\ b\} \le \lambda_1$ существуют положительные классические решения, при $\min\ \{a,\ b\} > \lambda_1$ не существуют положительные классические решения, a, b – параметры, λ_1 является первым собственным значением $-\Delta$ в Ω с однородным граничным условием Дирихле.

В работах Wang M., Wei Y. рассмотрена вырожденная параболическая система (28) с нелинейным локализованным источником при $p=2,\ n=0$, доказано, что система имеет единственное положительное классическое решение, оценили скорость обострения и blow-up решения. Изучено установление blow-up решения и скорость обострения по отношению к радиальной переменной blow-up решения, когда область имеет вид шара.

При $n=2$ выше приведенная система с однородной граничным условием Дирихле исследована в работах Deng W., Li Y., Xie Ch. Найдены необходимые и достаточные условия существования глобального решения, изучены blow-up решения.

Доказаны свойства глобальной разрешимости обобщённых решений системы (28), используя принцип сравнения решений. Изучено асимптотическое поведение автомодельных решений системы (28).

Четвертая глава диссертационной работы **«Математическое моделирование процессов диффузии биологических видов с переменной плотностью. Многомерный случай»** посвящена на основе автомодельного анализа и метода эталонных уравнений, изучению свойств нелинейной модели диффузии. Исследуются свойства решений нелинейной системы параболических уравнений диффузии в неоднородной среде. Доказано, что при определенных значениях числовых параметров, нелинейные системы параболических уравнений недивергентной формы, могут не иметь глобальных решений по времени. С использованием теоремы сравнения решений получены верхние и нижние оценки глобальных решений, численно моделирован процесс нелинейной диффузии.

Параграфы §4.1 и §4.2 этой главы посвящены задаче Коши для нелинейной системы уравнений параболического типа недивергентного вида с источником.

$$\begin{aligned} |x|^n \frac{\partial u}{\partial t} &= v^{\alpha_1} \nabla\left(|x|^k u^{m_1-1} \nabla u\right) + |x|^n u^{\beta_{11}} v^{\beta_{12}}, \\ |x|^n \frac{\partial v}{\partial t} &= u^{\alpha_2} \nabla\left(|x|^k v^{m_1-1} \nabla v\right) + |x|^n u^{\beta_{21}} v^{\beta_{22}}. \end{aligned} \quad t \in (0,T),\ x \in R^N, \tag{30}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in R^N, \tag{31}$$

Получено решение типа Зельдовича-Баренблатта для диффузионной системы (30). Свойства конечной скорости задачи Коши для кросс-диффузионной параболической системы с источником изучены методом сравнения решений. Проанализировано асимптотическое поведение автомодельных решений как для случаев медленной, так и быстрой диффузии. Показано, что коэффициенты в главном члене асимптотики решения удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений.

Представлены результаты численного эксперимента для различных числовых значений параметров. Результаты численных экспериментов и графики показывают, что автомодельные решения являются очень подходящими приближениями. На рис. 3 показано решение с компактным носителем задачи Коши (30)-(31). На рис. 4 и 5 показаны свойства решений задачи Коши (30)-(31), исчезающие на бесконечности.

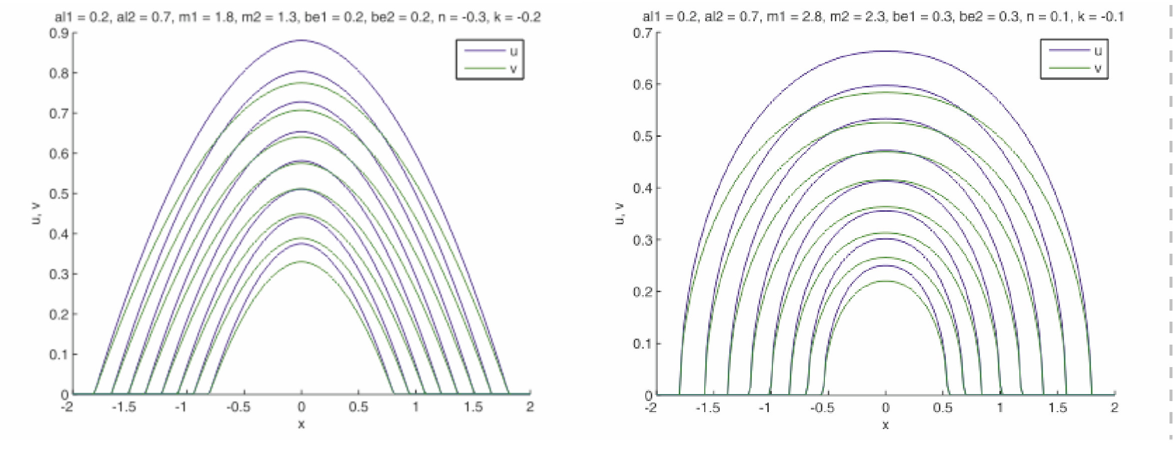


Рисунок 3. Медленная диффузия. Случай при $p_i>0$, $i=1,2$: $n<0$, $k<0$ и $n>0$, $k<0$.

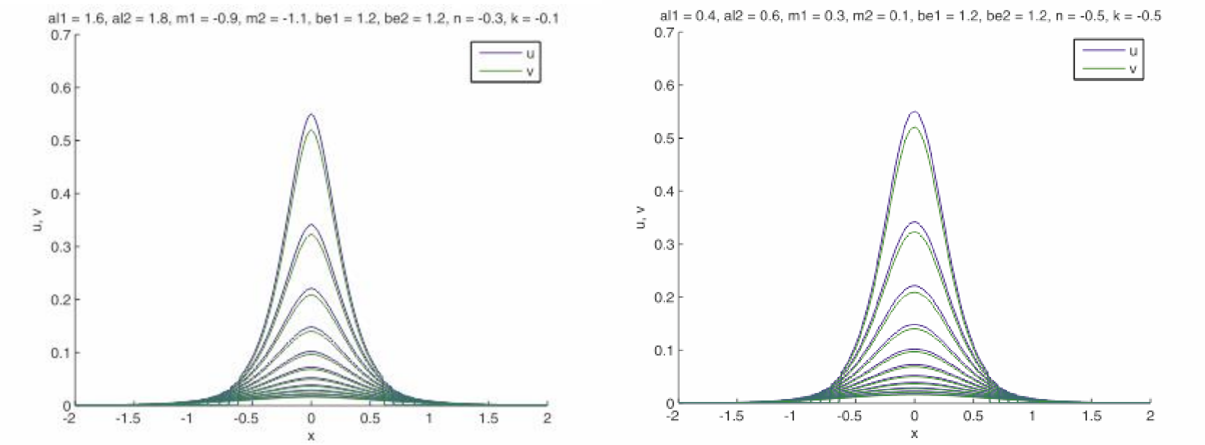


Рисунок 4. Быстрая диффузия. Случай при $p_i>0$, i=1,2: n−k < 0 и n−k = 0.

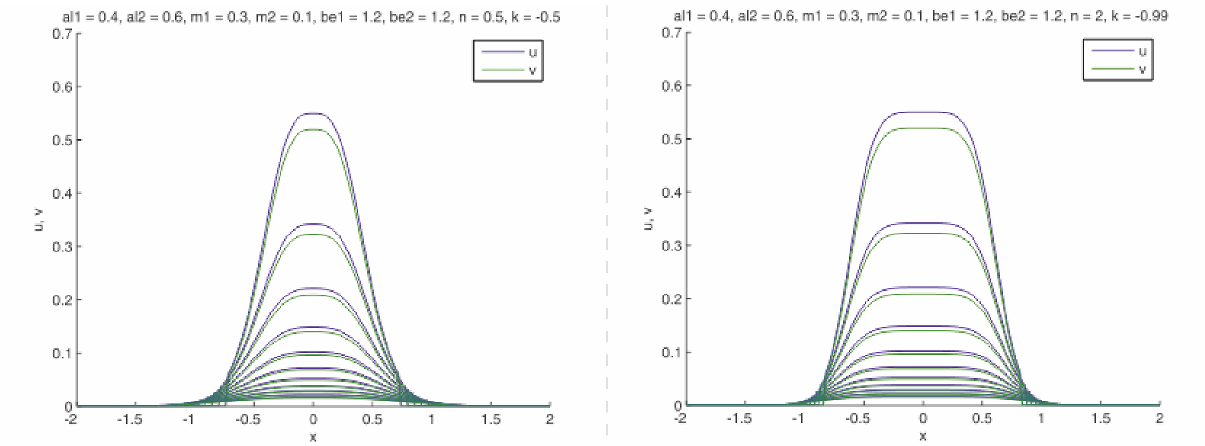


Рисунок 5. Быстрая диффузия. Случай при $p_i<0$, i=1,2: n−k = 1 и n−k > 1.

Параграф §4.3 посвящен численному моделированию системы (30)-(31) с краевыми условиями

$$\begin{cases} u(t,0)=\phi_{11}(t)>0,\ u(t,b)=\phi_{12}(t)=0 \\ v(t,0)=\phi_{21}(t)>0,\ v(t,b)=\phi_{22}(t)=0 \end{cases} \quad t\in[0,T]\,. \qquad (32)$$

Построены численные схемы для задачи (30)-(32), разработаны алгоритмы и комплекс программ. Оболочка и код программы для численного решения разработаны на языке MatLab (приведены в приложении диссертации).

Приведем некоторые результаты численных экспериментов. Шаг сетки достаточно мелкий h=0.05, число узлов N=1000 и точность итерации задается $\varepsilon=10^{-3}$. Счет проводился до t=2 с шагом $\tau=0.02$.

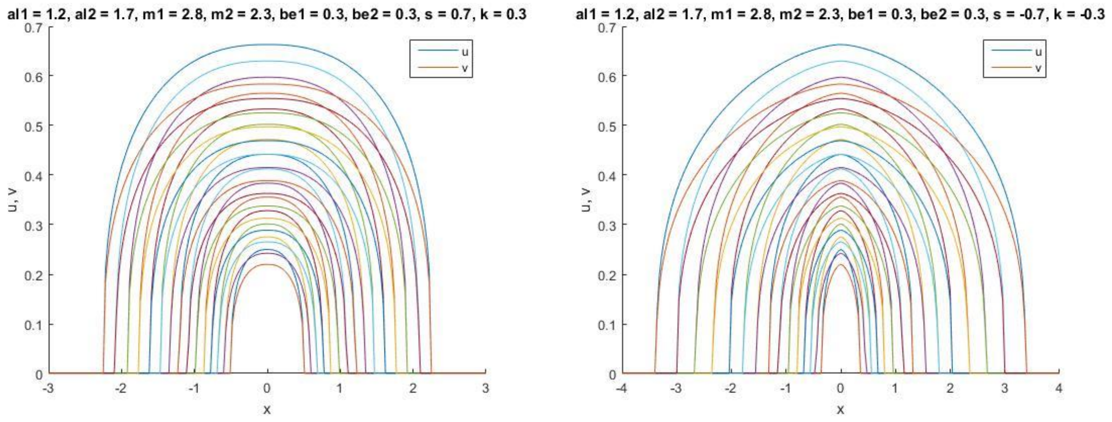


Рисунок 6. Численное решение задачи (30)-(32) при $s = 0.7,\ k = 0.3$ и $s = -0.7,\ k = -0.3$: $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_2 = 1.7$, $m_1 = 2.8$, $m_2 = 2.3$, $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.3$,

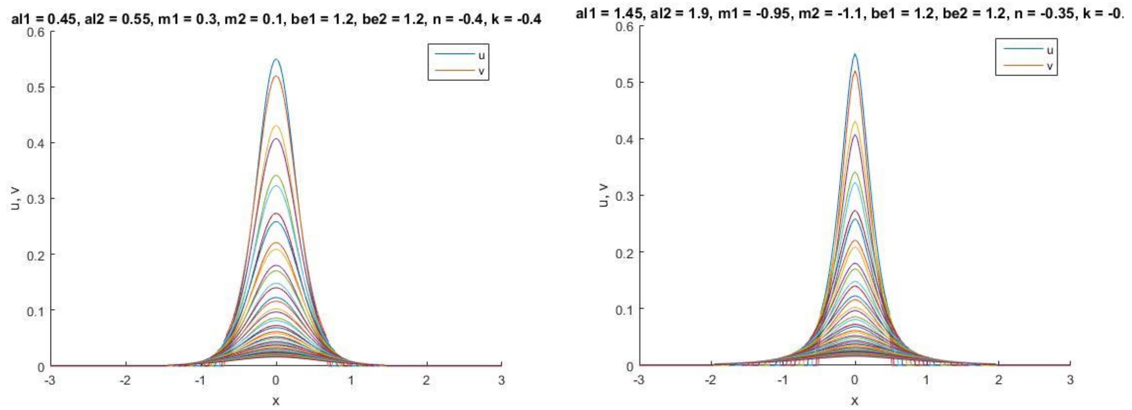


Рисунок 7. Численное решение задачи (30)-(32) при $\alpha_1 = 0.45$, $\alpha_2 = 0.55$, $m_1 = 0.3$, $m_2 = 0.1$, $\beta_1 = 1.2$, $\beta_2 = 1.2$, $s = -0.4,\ k = -0.4$ и $\alpha_1 = 1.45$, $\alpha_2 = 1.9$, $m_1 = -0.95$, $m_2 = -1.1$, $\beta_1 = 1.2$, $\beta_2 = 1.2$, $s = -0.35,\ k = -0.4$.

На рисунке 6 приведены результаты численного решения задачи (30)-(32) при $\frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1 - 1}{1-\beta_1} = \frac{\alpha_2}{1-\beta_1} + \frac{m_2 - 1}{1-\beta_2}$, когда $m_{3-i} > \alpha_i + 1$, соответствующие случаю медленной диффузии.

На рисунке 7 приведены результаты численного решения задачи (30)-(32) при $\frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1 - 1}{1-\beta_1} = \frac{\alpha_2}{1-\beta_1} + \frac{m_2 - 1}{1-\beta_2}$, когда $p_i > 0$, соответствующие случаю быстрой диффузии.

Результаты дают возможность получить следующую оценку для свободной границы $|x(t)| \le \left[\frac{a}{b}\right]^{\frac{1}{n+2}} (T+t)^{\frac{b}{n+2}}$, где $b = \frac{\alpha_1}{1-\beta_2} + \frac{m_1 - 1}{1-\beta_1} + 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенных исследований по докторской диссертации «Численное моделирование процессов, описываемых нелинейными системами параболического типа в недивергентном виде» представлены следующие выводы:

1. Для нелинейной математической модели процессов диффузии биологических видов, описывающихся нелинейными параболическими системами в недивергентной форме с переменной плотностью, изучены условия глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений.
2. Получены верхние и нижние оценки обобщенных решений для нелинейной математической модели диффузии биологических видов с переменной плотностью.
3. Установлена свойства конечной скорости распространения возмущений и пространственной локализации решения для математической модели процессов диффузии биологических видов с двойной нелинейностью и с переменной плотностью в случае медленной диффузии.
4. Получены асимптотики различных автомодельных решений задачи Коши для параболических систем недивергентного вида путем применения метода эталонных уравнений.
5. Доказано асимптотическое поведение решений с компактным носителем задачи Коши для вырождающейся системы уравнения (crosswise) диффузии в неоднородной среде с источником или поглощением и с переменной плотностью.
6. Доказано асимптотическое поведение исчезающие на бесконечности решения задачи Коши для вырождающейся системы уравнения (crosswise) диффузии в однородной среде с источником или поглощением.
7. Доказаны условия глобальной разрешимости и неразрешимости в целом по времени решений и асимптотическое представление решений систем уравнений для задачи Коши нелинейной параболической системы недивергентной формы (crosswise) с источником или поглощением и с переменной плотностью.
8. Построены быстро приближающиеся вычислительные для исследования качественных нелинейных свойств математических моделей процессов диффузии биологических видов с переменной плотностью.
9. Разработаны вычислительные схемы, алгоритмы и программные комплексы в среде Matlab и Delphi для численного моделирования нелинейных задач процессов диффузии биологических видов и визуализации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

MATYAKUBOV ALISHER SAMANDAROVICH

NUMERICAL MODELING OF PROCESSES DESCRIBED BY NONLINEAR SYSTEMS OF A PARABOLIC TYPE IN A NON-DIVERGENT FORM

05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications (physical and mathematical sciences)

CONTENT OF DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES (DSc)

TASHKENT – 2020

The subject of the doctor of sciences dissertation is registered by the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan B2017.2.DSc/FM78.

Dissertation has been prepared at the National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Aripov Mirsaid Mirsidikovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Mamatov Alisher Zulunovich** doctor of technical sciences, professor
	Polatov Asxad Muxamedjonovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Kholmurodov Abdulhamid Erkinovich doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Termez state university**

Defense will take place on "18" june 2020 at 14^00 at the meeting of Scientific council number DSc.27.06.2017.FM.01.02 at the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is possible to review in Information-resource centre at the National University of Uzbekistan (registered № 44) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "15" june 2020.
(mailing report № on 17 2020).

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

B.F.Abdurakhimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (Doctor of Science's Thesis Annotation (DSc)

The aim of the research is a numerical and analytical study of the qualitative properties of nonlinear mathematical models described by quasilinear parabolic systems of a non-divergent form in a homogeneous and in a medium with variable density with a source or absorption, development of a set of programs for the numerical study of nonlinear boundary value problems.

Research tasks include:

to prove the global solvability and time insolubility of solutions of a nonlinear model of diffusion of biological species in an inhomogeneous environment;

to determine the properties of the final velocity of perturbation propagation and spatial localization for a mathematical model of polytropic filtering with a non-divergent form and with a variable density in the case of slow diffusion;

to study the asymptotics of generalized solutions with a compact support of the Cauchy problem and the boundary value problem for a degenerate system of equations of a non-divergent form with a source and with a variable density;

to determine the condition of global solvability and insolubility as a whole over time of solutions of a nonlinear mathematical model for diffusion systems of biological species with a source and with variable density;

to construct a solution of the Zeldovich-Barenblatt type for a parabolic system of a non-divergent form with a source and convective transport, and to prove the properties of the finite propagation velocity of the perturbation coefficient of spatial expansion and spatial localization;

build numerical schemes for studying the qualitative nonlinear properties of mathematical models of diffusion of biological species with variable density and with a source and develop computational schemes, an algorithm and a set of programs for numerically solving nonlinear problems and visualize solutions.

The object of the research.

Nonlinear diffusion processes for biological species described by degenerate parabolic systems of a non-divergent form.

Scientific novelty of the research work:

conditions for global solvability and time insolubility of solutions of a nonlinear model of diffusion of biological species in an inhomogeneous environment without a source and with a source are determined;

the influence of medium heterogeneity under conditions of global solvability and unsolvability as a whole over the time of solving non-linear problems is determined;

upper and lower bounds for generalized solutions of the Cauchy problem for parabolic systems of a non-divergent form in a homogeneous and inhomogeneous medium are constructed;

the main asymptotic terms of various self-similar solutions of the Cauchy problem for parabolic systems of a non-divergent form are obtained by applying the method of standard equations;

solutions of the Zeldovich-Barenblatt type are determined and, on their basis, the properties of CSWS for a parabolic system of a non-divergent form with and without a source are studied;

computational schemes were built to study the qualitative properties of nonlinear mathematical models of diffusion of biological species with variable density, developed algorithms, software complexes in the Matlab environment and visualized solutions to nonlinear problems.

Implementation of the research results:

According to the results of studying the processes of diffusion of biological species described by degenerate parabolic systems of a non-divergent species, the following were introduced:

obtained by the conditions of global solvability and time insolubility of solutions of a nonlinear model described by quasilinear parabolic systems of a non-divergent form in an inhomogeneous medium were used to prove solutions of direct and inverse problems in the framework of the RFBR grant project No. 18-51-41002 "Mathematical modeling of a thermodynamically consistent mathematical model of two-phase media in the dissipative approximation with cross effects "(Reference of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Russia) No. 1501/09-324 of September 12, 2019). The application of these scientific results made it possible to take into account a priori information;

substantiation of the asymptotic behavior of the solutions (the main terms of the asymptotic behavior) as the initial data for the numerical solution of the Cauchy problem for non-divergent parabolic systems that describe models of the processes of biological population and heat distribution in an inhomogeneous medium were used to prove the solution of direct and inverse problems in the framework of the RFBR grant project No. 18 -51-41002 "Mathematical modeling of a thermodynamically consistent mathematical model of two-phase media in the dissipative approximation with cross effects" (Reference of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (Russia) No. 1501/09-324 of September 12, 2019). The application of these scientific results made it possible to substantiate new numerical algorithms for solving inverse problems of thermophysics and biological processes;

the upper and lower bounds for the generalized solutions of the Cauchy problem for parabolic systems of a non-divergent form in a homogeneous and inhomogeneous medium were used to prove the existence of global solutions of the Cauchy problem in the framework of grant project MK-1152.2018.1 "Study of a wide class of fractal oscillators" (Reference of Kamchatka State University (Russia) No. 18-22 of January 16, 2020). The application of scientific results served to visualize nonlinear processes and made it possible to prove the existence of global solutions to the Cauchy problem;

the developed algorithms and software complexes were used to study nonlinear mathematical models in the framework of the grant project "Porosity and breathability of textile fabrics" (University of Western Attica (Greece) certificate dated July 27, 2018). The application of scientific results served to visualize the process of breathability of textile fabrics;

the proposed computational schemes for studying the qualitative properties of non-linear mathematical models of diffusion of biological species with variable density were used to study non-linear mathematical models in the framework of the grant project MK-1152.2018.1 “Study of a wide class of fractal oscillators” (Reference of Kamchatka State University (Russia) No. 18 -22 dated January 16, 2020). The application of scientific results served to visualize non-linear processes of a biological population.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of introduction, 4 chapters, conclusion, list of used literature and appendices. The total volume of the dissertation is 194 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Арипов М., Матякубов А.С. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических систем уравнений недивергентного вида // «Вычислительные технологии», 2015, том 20, часть II, С. 275-282, (01.00.00; СНГ №18; Web of Science).
2. Арипов М., Матякубов А.С. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических систем с двойной нелинейностью недивергентного вида // ЎзМУ хабарлари, № 2/1, 2016, С. 120-128. (01.00.00; №8).
3. Матякубов А.С. Точное решение об одной модели кросс-диффузионных систем недивергентного вида с неоднородной плотностью // СамДУ Илмий ахборотномаси, 2016, № 3(97), С. 57-61, (01.00.00; №2).
4. Арипов М., Матякубов А.С. Эффект конечной скорости распространения возмущения для модели кросс-диффузионных систем недивергентного вида // ЎзМУ хабарлари, № 2/2, 2016, С. 94-101, (01.00.00; №8).
5. Aripov M., Matyakubov A.S. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form // International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology, Vol. 3, Issue 8, 2016, P. 533–537, (Scientific Journal Impact Factor (2015) = 4.332).
6. Aripov M., Matyakubov A.S. To the Properties of the Solutions of a Cross-diffusion Parabolic System not in Divergence Form // Universal Journal of Computational Mathematics, 5(1), 2017, P. 1–7, (01.00.00; США №20).
7. Aripov M., Matyakubov A.S. Self-similar solutions of a cross-diffusion parabolic system with variable density: explicit estimates and asymptotic behaviour // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 8 (1), 2017, P. 5–12, (01.00.00; СНГ №5; Web of Science).
8. Матякубов А.С. Асимптотическое поведение решений кросс-диффузионной системы не дивергентного вида с источником // СамДУ Илмий ахборотномаси, № 1(101), 2017, С. 20-26, (01.00.00; №2).
9. Арипов М., Матякубов А.С. Эффект конечной скорости распространения возмущения для одной модели кросс-диффузионной системы недивергентного вида с источником \\ Ўзбекистон математика журнали, 2017, №1, С. 27-35, (01.00.00; №6).
10. Матякубов А.С. Об асимптотическом поведении решений параболических систем уравнений недивергентного вида // ЎзМУ хабарлари, № 2/1, 2017, С. 123-132, (01.00.00; №8).

11. Матякубов А.С. Разностная схема для нелинейной системы недивергентного вида с кросс-диффузией // ЎзМУ хабарлари, № 2/1, 2017, С. 133-140, (01.00.00; №8).
12. Matyakubov A.S. Finite speed of the perturbation distribution and asymptotic behavior of the solutions of a parabolic system not in divergence form // Universal Journal of Computational Mathematics, 5(3), 2017, P. 57–67, (01.00.00; США №20).
13. Aripov M., Matyakubov A.S. To the qualitative properties of solution of system equations not in divergence form of polytrophic filtration in variable density // Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 8 (3), 2017, P. 317-322, (01.00.00; СНГ №5; Web of Science).
14. Матякубов А.С. Асимптотическое поведение решений одной параболической системы не дивергентной форме с источником и переменной плотностью // Доклады Академии наук Республики Узбекистан, 2017, С. 133-140 (01.00.00; №7).

II бўлим (Часть II; Part II)

15. Aripov M., Matyakubov A. Blow-up analysis of the diffusion system of the Fujite type. Book of Abstract of the ECSM-5, 2003, 19 (Greece)
16. Aripov M., Matyakubov A. Blow-up analysis of the Fujite type reaction diffusion system. Book of Abstract of the GAMM 2003, 8 (Italy)
17. Aripov M., Matyakubov A. To the Properties of the Solutions of Mutual Nonlinear Reaction-Diffusion System. Book of Abstract of the GAMM 2005, 21(Luxemburg).
18. Арипов М., Каландаров А., Матякубов А. К численному моделированию нелинейных систем типа реакции-диффузии недивергентного вида. Труды международной конференции «Современные проблемы математической физики и информационных технологий», Ташкент, Университет, том №2, 2005, 127-130.
19. Арипов М., Матякубов А.С., Назирова Д., Хожиев Т. Численное моделирование системы взаимной диффузии-реакции. Материалы международной конференции «Новые направления в теории динамических систем и некорректных задач», Самарканд, 2007, 12-14.
20. Матякубов А.С. Асимптотическое поведение автомодельных решений нелинейных систем параболического типа недивергентного вида. Труды международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – аль-Хорезми 2014», Самарканд, 2014, Том № 1, с. 193-196
21. Матякубов А.С. Асимптотическое поведение blow-up решений нелинейных систем параболического типа недивергентного вида. Тезисы докладов республиканской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Ташкент, 2014, с. 324-326.

22. Матякубов А.С. К асимптотическому поведению решений нелинейных параболических уравнений с двойной нелинейностью недивергентного вида. Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». Ташкент, 2015, с. 181-183.
23. Матякубов А.С., Рахимов У. Асимптотическое поведение решений параболических систем двух квазилинейных уравнений недивергентного вида. Республика илмий-техник анжуманининг маърузалар тўплами, 2-қисм, Нукус, 2015, 243-247 б.
24. Арипов М., Матякубов А.С. Асимптотическое поведение автомодельных решений нелинейных параболических систем недивергентного вида. Тезисы докладов международной научной конференции «Компьютерные и информационные технологии в науке, технике и образовании». Алмати, 2015, с. 188-189.
25. Матякубов А.С., Рахимов У. Точное решение об одной нелинейной системы параболического типа недивергентного вида. Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Математическая физика и родственные проблемы современного анализа". г. Бухара, 26 - 27 ноября 2015 года, с. 56-58.
26. Арипов М., Матякубов А., Рахимов У. Точное решение об одной системы параболического типа недивергентного вида с нелинейной кросс-диффузией. “Анализнинг долзарб муаммолари” Илмий конференция материаллари, Қарши, 2016 йил, 22-23 апрель. 74-76 б.
27. Арипов М., Матякубов А.С. Глобальное существование и асимптотика решений кросс-диффузионных параболических систем недивергентного вида. “Zamonaviy topologiya muammolari va tadbiqlari” ilmiy-amaliy konferensiya tezislari to’plami, Toshkent, 2016, 5-6 may, 128-130 b.
28. Aripov M., Matyakubov A.S. Finite speed of a perturbation of distribution and asymptotic behavior of a solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form. 10th International Conference on Applied Mathematics, Simulation, Modelling, April 15-17, 2016, Istanbul, pp.67-73.
29. Aripov M., Matyakubov A.S. Finite speed of a perturbation of distribution and asymptotic behavior of a solutions of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form with a source and a variable density. 4th International Conference on Applied, Numerical and Computational Mathematics, Ischia, Italy, June 17-19, 2016, pp.81-85.
30. Матякубов А.С., Турмухамедов Н.К. Асимптотическое поведение автомодельных решений нелинейных систем типа реакции-диффузии. X Международная мультидисциплинарная конференция «Актуальные проблемы науки XXI века», 3 июня 2016 года, Москва, Россия, с.70-75.
31. Aripov M., Matyakubov A.S. On global existence and asymptotic behavior of solutions to cross-diffusion parabolic system not in divergence form. 5th International Conference on Applied and Computational Mathematics,

Mallorca, Spain, August 19-21, 2016, pp.42-46.
32. Matyakubov A.S. Cauchy problem for a nonlinear degenerate parabolic system not in divergence form. International Conference on Analysis and Applied Mathematics, Almaty, Kazakhstan, September 7-10, 2016, pp.53-54.
33. Matyakubov A.S. On global existence of solutions to cross-diffusion parabolic system not in divergence form. Международная научная конференция "Актуальные проблемы прикладной математики и информатики", Кабардино-Балкарская Республика, Россия, 17-22 октября 2016 г., с.1-3.
34. Арипов М., Матякубов А.С. Асимптотическое поведение решений нелинейной параболической системы недивергентного вида с источником. “Алгебра, амалий математика ва ахборот технологиялари масалалари” номли илмий конференция, Наманган, 2016 йил 20-21 декабрь.
35. Матякубов А.С. Об асимптотическом поведении решений нелинейных параболических систем недивергентного вида. «Dinamik sistemalarning dolzarb muammolari va ularning tadbiqlari” Respublika ilmiy konferensiyasi materiallari, Toshkent, 1-3-may, 2017, 137-139.
36. M. Aripov, A.S. Matyakubov. Asymptotic behavior of self-similar solutions for a degenerate parabolic system not in divergence form. Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», Кабардино-Балкарская Республика, Россия, 17-21 мая 2017 г., с.233-235.
37. Арипов М., Матякубов А.С. Об асимптотическом поведении решений параболических систем уравнений недивергентного вида. Ташкент, “Кубатурные формулы и их приложения”, 2017.
38. Aripov M., Matyakubov A. Estimates and asymptotic of self-similar solutions for a nonlinear parabolic system not in divergence form with variable density. Халқаро илмий конференция "Математика ва физиканинг долзарб масалалари", 7-10 октябрь, 2017 й., Тошкент.
39. Matyakubov A.S. Cauchy problem for a nonlinear cross-diffusion parabolic system not in divergence form. The Second USA-Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics, August 08-12, 2017, URGENCH, Uzbekistan, pp. 69-70.
40. Matyakubov A. Self-Similar Solutions for a Degenerate Parabolic System Not in Divergence Form. The IV International AMMCS Interdisciplinary Conference, Waterloo, Ontario, Canada, August 20-25, 2017, p. 400.
41. Матякубов А., Раупов Д. Асимптотическое поведение blow-up решений нелинейных параболических систем. Сборник статей X Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные научные исследования: актуальные

вопросы, достижения и инновации», г. Пенза, Россия. 12 марта 2018. с. 23-27.

42. Matyakubov A.S., Khaydarov A.T. Asymptotic behavior of self-similar solutions for a parabolic system not in divergence form. VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmy 2018”. 13-15 september 2018. p. 114.
43. Matyakubov A.S., Raupov D.R. On the qualitative properties of blow-up solutions for a quasilinear system of equations of parabolic type. VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmy 2018”. 13-15 september 2018. p. 223.
44. Aripov M., Matyakubov A.S. To the localization solution of Cauchy problem to a diffusion parabolic system not in divergent form. Международная конференция "Математический анализ и его приложение к современной математической физике" Самарканд. 17-20 Сентябрь 2018. p. 105.
45. Matyakubov A.S., Raupov D.R. Estimates of the blow-up solution of a cross-diffusion parabolic system not in divergence form. STEMM: Abstracts of the Joint International Conference. Tashkent. May 16–17, 2019. p. 106.
46. А.С.Матякубов, Д.Р.Раупов. Оценка для глобального решения нелинейной системы параболических уравнений недивергентного вида с кросс-диффузией. Материалы республиканской научно-практической конференции “Современные проблемы математики и информатики”, Фергана. 22-23 мая 2019 года. с. 66-67.
47. Матякубов А.С. Программа для численного решения задачи Коши для системы уравнений параболического типа недивергентного вида с источником. № DGU 03896, 28.07.2016.
48. Матякубов А.С. Программа для численного решения задачи Коши для нелинейной кросс-диффузионной системы уравнений параболического типа недивергентного вида. № DGU 03991, 29.09.2016.
49. Хайдаров А., Арипов М., Матякубов А.С. Программа для численного исследования процесса нелинейной теплопроводности в недивергентном случае в двухкомпонентной среде. № DGU 060609, 08.02.2019.