ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МАМАСОЛИЕВ БАХТИЁР ЖУРАМИРЗАЕВИЧ

ИККИ СУЮҚЛИКЛИ БИР БОСИМЛИ МУҲИТДА НОЧИЗИҚЛИ БИР ЎЛЧАМЛИ ТЎЛҚИНЛАРНИ ТАРҚАЛИШ ЖАРАЁНЛАРИНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

УДК 519.957

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата дисертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

МАМАСОЛИЕВ БАХТИЁР ЖУРАМИРЗАЕВИЧ

ИККИ СУЮҚЛИКЛИ БИР БОСИМЛИ МУҲИТДА НОЧИЗИҚЛИ БИР ЎЛЧАМЛИ ТЎЛҚИНЛАРНИ ТАРҚАЛИШ ЖАРАЁНЛАРИНИ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ

05.01.07 – Математик моделлаштириш. Сонли усуллар ва дастурлар мажмуи (физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2020

Фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий Аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM90 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Имомназаров Холматжон Худайназарович** физика-математика фанлари доктори, (Россия, ҲМ ва МГ ИТИ)
Расмий оппонентлар:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Хўжаёров Бахтиёр физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «18» июнь соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (43 рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2020 йил «15» июнь куни тарқатилди.
(2020 йил 18-рақамли реестр баённомаси).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

А. Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

М.М.Арипов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда қўшсуюқликли муҳитларда тўлқин жараёнларнинг математик моделларини яратиш ва уларни амалиётга жорий этиш масалаларига келтирилади. Қўшсуюқликли муҳит ҳаракатлари математик физика, туташ муҳитлар механикаси, қўшсуюқликлар гидродинамикаси ва математик моделлаштириш каби соҳалардаги тадқиқотларнинг объектидир. Қўшсуюқликли умумий босимли диссипацияли муҳит ҳаракатининг термодинамик мосланган ва такомиллашган математик модели икки суюқликдан ташкил топган суюқликларнинг ҳаракатини тавсифлашда ишлатилади. Бундай ҳаракатлар одатда ночизиқли тенгламалар билан тавсифланади. Шу сабабли қўшсуюқликли муҳитларда тўлқин тарқалишининг ночизиқли математик моделлари учун сонли ҳисоблаш усуллари ва дастурий воситаларни ишлаб чиқиш мухим вазифалардан бири ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда турли оқимларни кўпсуюқлилик эффектларини ҳисобга олган ҳолда тадқиқ этиш ҳамда кузатилаётган жараёнларнинг адекват математик моделларини қуриш қўшсуюқликли гидродинамиканинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Қўшсуюқликли муҳитлар ҳаракатларини компоненталарнинг дастлабки тузилиши ва физикавий хоссаларини ҳисобга олган ҳолда аниқлаш, янги параметрларни киритиш ҳамда бир суюқли оқим тенгламаларига қараганда анча мураккаб бўлган тенгламаларни ечишни талаб этади. Умумий босимли қўшсуюқликли муҳитнинг математик модели учун спектрал таҳлилни амалга ошириш ва умумий босимли қўшсуюқликли муҳитнинг бир ўлчамли тенгламаларини сонли ечиш усулларини ишлаб чиқиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган қўшсуюқликли муҳитлар механикасини ўрганишни кучайтиришга алоҳида эътибор кучайтирилди, хусусан, қўшсуюқликли муҳит ҳаракатининг хоссалари ва қўшсуюқликли муҳитлар механикасининг математик моделларини қуришга алоҳида эътибор қаратилди. Бу борада мақсадли илмий-тадқиқотларни, шу жумладан, қўшсуюқликли муҳит ҳаракатларининг қонунлари ва ҳусусиятларини технологик жараёнлар ва саноатда ишлатиладиган қурилмалар ва асбоб-ускуналарни ишлаб чиқаришга кенг татбиқ этиш муҳим вазифалардан бири ҳисобланади. Бугунги кунда мамлакатимизда “Математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди.[1]. Қарор ижросини таминлашда

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

қўшсуюқликли бир босимли муҳитда ночизиқли тўлқинлар тарқалишининг математик моделини қуриш ва улар учун спектрал таҳлилни амалга ошириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Президенти Ш.М. Мирзиёевнинг 2019 йил 24 май куни Ўзбекистон Миллий университетида таълим ва илм-фан соҳаси вакиллари билан бўлиб ўтган учрашувидаги маърузаси ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Кўп компонентали муҳитни тавсифлаш учун математик моделларни ишлатиш тарихи Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц, И.Пригожин ва П.Мазур (суюқ гелий гидродинамикасига бағишланган ишлар), Ф.И.Франкль ва С.Г.Телетов (икки фазали муҳитларнинг гидродинамик тенгламаларини ўртачалаштириш методи ёрдамида олиш), С.С.Кутателадзе ва М.А.Стырикович (газ-суюқлик оқимларининг гидравликаси) олимларнинг ишларидан бошланади. Икки фазали муҳитни моделлаштиришда икки хил бир тезликли ва икки тезликли ёндошувларни эътироф этиш мумкин (Нигматулин, 1978). Биринчи ёндошувда гетероген хусусиятлар кинетик коэффициентлар ва термодинамик параметрлар қийматлари орқали ёхуд тенгламаларга бошқа фазаларнинг мавжудлигини ҳисобга олувчи қўшимча ҳадларнинг қўшилиши орқали ифодаланади. Иккинчи ёндошувда эса фазалар тезликларининг турли эканлигидан келиб чиқувчи механик ва термодинамик таъсирларни ҳисобга олиб, икки фазанинг биргаликдаги ҳаракатини ифодаловчи тенгламалар қаралади. Икки фазали муҳитни бир тезликли моделллар орқали ўрганишда зичлик, темпирутура, деформация ва тезликларнинг ўртача қиймати қаралади ва бундай ёндошув модел қуришнинг ва сонли усулларни қўллашнинг оддийлиги сабали кенг тарқалгандир.

Сақланиш қонунлари асосида математик моделлар қуришда фақат фундаментал физик тамойиллардан фойдаланилади: сақланиш қонунлари, термодинамик қонунлар ва тенгламаларнинг Галилей – инвариантлиги. Қайтмас жараёнларни ўрганишда энтопиянинг ҳосил бўлиши қайтмас жараёнларнинг чизиқли термодинамик назарияси ёрдамида тавсифланувчи диссипатив функция орқали ифодаланади. Икки фазали муҳитнинг масса, импульс, энергия қонунларига бўйсунувчи ва галилей алмаштиришларига нисбатан инвариант бўлган термодинамик мутаносиб назария P.H. Roberts, D.E. Loper ва В.Н. Доровский томонидан таклиф этилган. Годунов, Роменский ишларида ривожлантирилган оригинал ёндошув сақланиш қонунларини термодинамик мутаносиб тенгламаларнинг гиперболик системаси кўринишида ҳосил қилишга имкон беради. Бу ерда асосий ғоя сақланиш қонунларининг гиперболик системасини ҳосил қилувчи потенциал орқали ифодаланишидадир. Romensky (1998), Toro (2004), Romensky ва б.ш.қ (2007) ишларида икки фазали муҳитнинг бир босимли консерватив моделлари яратилган. Яратилган моделларнинг муҳим хусусиятлари шундаки, тескариланувчи тенгламалар системаси дивергент кўринишда ва натижада фазаларнинг нисбий ҳаракат тезликлари майдони потенциаллик хусусиятига эга.

Кўп компонентали муҳитлар назариясини ривожлантирган муаллифлар қаторига S. Chapman, T. Cowling, S. Truesdell, R. Toupin (1956), G. Carrier (1958), P. Cayley, G. Cliegel, A. Green, P. Naghdi (1961), G. Batchelor, G. Muller (1966), L. Wijngaarden (1971) каби олимларни киритиш мумкин. Бугунги кунда мазкур соҳани мувоффақиятли ривожлантираётган олимлар сифатида В. Н. Доровский, А. М. Блохин, Х. Х. Имомназаров, Н. М. Жабборов ва А. Э. Холмуродовларни эътироф этиш мумкин. Туташ муҳит механикаси тенгламаларининг инвариант (автомодел) ечимларини топиш ҳам катта амалий аҳамиятга эга. Бу соҳада Л. В. Овсянников, П. Ж. Олвер, С. В. Головин, А. А. Чесноков, А. В. Пановлар самарали илмий-изланишлар олиб бормоқдалар.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг MRU-OT-81/2017 рақамли “Математическое моделирование термодинамический согласованной математической модели двухфазных средств в диссипативном приближении с перекрестными эффектами” (2018-2019) Ўзбекистон-Россия лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади қўшсуюқликли бир босимли муҳитда ночизиқли тўлқинларни тарқалиш жараёнларини математик моделлаштириш ва диссипатив ҳолда Бюргерс типли тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

қўшсуюқликли бир босимли муҳитда ночизиқли тўлқинлар тарқалишининг математик моделини қуриш;

қўшсуюқликли бир босимли муҳитда ночизиқли тўлқин тарқалиш тенгламалар системасини бир ўлчамли ҳолда симметриклаштириш;

умумий босимли қўшсуюқликли муҳитнинг математик модели учун спектрал таҳлилни амалга ошириш;

умумий босимли кўшсуюкликли муҳитнинг бир ўлчамли тенгламаларини сонли ечиш дастурини яратиш;

Бюргерс типли бир ўлчамли тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечиш;

кўшсуюкликли умумий босимли муҳитнинг бир ўлчамли тенгламалар системасини группавий хоссаларини топиш;

инвариант ва қисман инвариант ечимлар учун оддий дифференциал тенгламалар системасини излаш.

Тадқиқотнинг объекти кўшсуюкликли муҳитдаги ночизиқли тўлқин жараёнларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети кўшсуюкликли муҳитнинг ночизиқли ҳаракатларини математик моделлаштиришда ишлатиладиган ночизиқли математик моделлар, сонли алгоритмлар ва дастурий воситалардан иборат.

Тадқиқот усуллари. Ночизиқли динамик жараёнларни текширишда математик моделлаштириш, номувозанат термодинамикаси, ҳисоблаш математикаси методлари, дастурлаш технологиялари ҳамда Ли группалари ва алгебралари методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги:

кўшсуюкликли умумий босимли муҳит ҳаракатининг математик модели такомиллаштирилган;

кўшсуюкликли умумий босимли муҳитнинг математик моделини ифодоловчи тенгламалар системасининг Фридрихс бўйича симметрик *t*-гиперболик кўриниши олинган;

кўшсуюкликли бир босимли муҳитнинг бир ўлчамли тенгламалар системасини сонли ечиш усули ишлаб чиқилган;

бир ўлчамли Бюргерс типли тенгламалар системаси учун Коши масаласининг ечими Вольтерранинг иккинчи тур ночизиқли системасининг ечимига келтирилган;

кўшсуюкликли босим бўйича мувозанатли муҳит бир ўлчамли тенгламалар системасининг группавий хоссалари топилган;

икки тезликли бир босимли гидродинамика тенгламалар системасининг асосий Ли алгебраси базисининг ядроси топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Тадқиқот натижалари амалиёт нуқтаи назаридан аҳамиятли:

икки компонентали умумий босимли диссипацияли муҳит ҳаракатининг термодинамик мосланган ва такомиллашган математик модели икки суюқликдан ташкил топган суюқликларнинг ҳаракатини тавсифлашда ишлатилиши мумкин;

қурилган математик модель билан тавсифланувчи кўшсуюкликли муҳитдаги жараёнларни сонли тадқиқ этишда диссертацияда ишлаб чиқилган сонли методдан фойдаланиш мумкин;

топилган инвариант ва қисман инвариант ечимлардан математик моделларни текшириш учун таклиф этилаётган сонли усулларни самаралилигини текширишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик моделнинг корректлиги, унинг термодинамика қонуниятлари билан мутаносиблиги, текширишнинг математик қатъий олиб борилганлиги, ечимни топишда математик асосланган методлардан фойдаланилганлиги, олинган ечимларнинг бир компонентали суюқлик учун мос аниқ ечим билан мутаносиблиги ҳамда сонли моделлаштириш натижаларини маълум моделли масалаларнинг ечимлари билан қиёсий таҳлилига асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Қўшкомпонентали муҳит ҳаракатининг такомиллашган математик модели математик моделлаштириш назариясида аҳамиятли. Қўшсуюқликли муҳит ҳаракатининг дивергент кўринишдаги тенгламалари мос масалаларни ечиш учун самарали сонли методлар қуришда ишлатилади. Инвариант (автомодель) ечимлар бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш учун сонли методларни синовдан ўтказишда фойдаланилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

Қўшсуюқли муҳитнинг диссертацияда таклиф этилган такомиллашган математик модели бўйича олинган илмий натижалар асосида: қўшсуюқли муҳитнинг такомиллашган математик модели №1.3.1.3. рақамли «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей Земли» (2016-2018 йиллар) лойиҳада тўғри масалаларни сонли моделлаштиришда фойдаланилган (Россия Фанлар академиясининг Сибир бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институтининг 2019 йил 6 ноябрдаги 15301/2-01-27-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши қўшсуюқликли муҳитнинг динамик моделининг группавий хоссаларини аниқлаш имконини берган;

қўшсуюқликли бир босимли муҳитнинг бир ўлчамли тенгламалар системасини сонли ечиш усули А-13-38 рақамли «Икки фазали муҳит ночизиқли тўлқин динамикаси учун тўғри ва тескари масалаларнинг назарий ва сонли тадқиқ қилиш» (2015-2017 йиллар) грант лойиҳасида ночизиқли бир ўлчамли Бюргерс типли тенгламалар системаси учун Коши масаласининг сонли ечиш схемасини қуришда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2019 йил 7 ноябрдаги 89-03-4328-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Бюргерс типли тенгламалар системаси учун Коши масаласини сонли ечиш ва натижаларни визуаллаштириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 11 та илмий-амалий анжуманларда, шу жумладан 5 та халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича 8 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация Комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 4 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловалардан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми – 109 бет.

ДИССЕРТАЦИЯ ИШИНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссератациянинг «**Қўшсуюқликли муҳитнинг термодинамик мутаносиб математик модели»** деб номланувчи биринчи боби қўшсуюқликли муҳитнинг ҳаракат тенгламаларини энергия диссипациясини ҳисобга олмаган ҳамда ҳисобга олган ҳолда келтириб чиқаришга бағишланган. Ҳаракат тенгламалари сақланиш қонунларини, термодинамика принципларини ва тенгламаларни Галилей алмаштиришларига нисбатан инвариантликлиги принципи ёрдамида тўлиқ келтириб чиқарилган.

Қуйидаги белгилашларни киритайлик:

t – вақт

V – ҳажм

$\rho_l\,(\rho_1),\ \rho_s\,(\rho_2)$ – суюқликлар зичликлари

$\rho=\rho_s+\rho_l$ – қўшсуюқликли муҳит зичлиги

E – ҳажм бирлигидаги энергия

e – масса бирлигидаги энергия

$E_0\ (e_0)$ – ҳажм (масса) бирлигидаги нисбий энергия

p – босим

T – температура

μ – химик потенциал

$S\ (s)$ – ҳажм (масса) бирлигидаги энтропия

$\mathbf{u},\mathbf{v}$ – суюқликлар тезликлари

$\mathbf{w}=\mathbf{u}-\mathbf{v}$ – нисбий тезлик

$\mathbf{j}$ – импульс зичлиги

$\mathbf{j}_0$ – нисбий импульс зичлиги

Π_{ik} – импульс оқими зичлиги тензорининг қайтар қисми

δ_{ik} – Кронекер символлари;

π_{ik} – импульс оқими зичлиги тензорининг қайтмас қисми

$\mathbf{Q}$ – энергия оқимининг қайтар қисми

$\mathbf{W}$ – энергия оқимининг қайтмас қисми

Иккитезликли гидродинамикада иккита локал тезлик ишлатилади. Бу муҳитнинг ҳар қандай заррачаси ҳаракат давомида ихтиёрий бир вақтда ва ихтиёрий бир жойда мавжуд ва ўзаро аралашувчи заррачалардан иборат. $\mathbf{v}$ тезликли заррачага боғланган саноқ системасига нисбатан термодинамика принципларини ифодалаймиз. Миқдорларнинг бу саноқ системасига нисбатан қийматларни "0" индекс билан белгилаймиз. Термодинамика қонунларидан

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + \left(\mathbf{u} - \mathbf{v},\ d\mathbf{j}_0\right). \tag{1.1}$$

Бу ерда $E_0, T, S, \mu, \rho -$ мос равишда бир ҳажм бирлигидаги нисбий энергия, темпратура, бир ҳажм бирлигидаги энтропия, химик потенциал ва муҳит зичлиги. Суюқликларнинг тезликлари $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ билан белгиланган. Суюқликларнинг зичликларини мос равишда ρ_s, ρ_l билан белгилаймиз. (1.1) формуладаги учинчи қўшилувчи нисбий тезлик энергиядан нисбий импульс бўйича олинган ҳосилага тенглигини англатади. (1.1) формулада $\mathbf{j}_0$ – нисбий импульс зичлиги. Қаралаётган саноқ системасида (l) суюқлик тинч, иккинчи (s) суюқлик эса $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ тезликка эга. Равшанки, бу ҳолда импульс зичлиги

$$\mathbf{j}_0 = \rho_s \left(\mathbf{u} - \mathbf{v}\right). \tag{1.2}$$

Лаборатория саноқ системаси билан боғланиш қуйидаги Галилей алмаштиришлари билан ифодаланади:

$$E = E_0 + \rho \mathbf{v}^2 / 2 + \left(\mathbf{v}, \mathbf{j}_0\right), \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \rho \mathbf{v},\ \rho = \rho_s + \rho_l\,. \tag{1.3}$$

Дастлаб ҳаракат тенгламалари механик энергиянинг диссипациясини ҳисобга олмаган ҳолда келтириб чиқарилади.

Масса, энтропия ва импульс сақланиш қонунларининг ўринли бўлишини талаб қиламиз:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{F} = 0, \\
\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \Pi_{ik} = 0.
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Бу тенгламаларда $\mathbf{j} -$ ҳажм бирлигидаги импульс, $\mathbf{F} -$ энтропия оқими, Π_{ik} – импульс оқими зичлигининг тензори – ҳозирча аниқланмаган.

Фараз қиламизки, (s) суюқлик ҳаракати тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлсин:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla\right) \mathbf{v} = \alpha \nabla \mu + \beta \nabla \mathrm{T}\,. \tag{1.5}$$

Бу ерда α ва β термодинамик миқдорлар S, ρ ларнинг функциялари бўлиб, улар аниқланиши лозим.

(1.4), (1.5) тенгламалар системасида $\mathbf{j}, \Pi_{ik}, \mathbf{F}$ (қайтар) оқимлар термодинамик миқдорлар ва тезликлар функциясидир. Уларни аниқлаш учун $\mathbf{j}, \Pi_{ik}, \mathbf{F}$ оқимлар қийматларини "0" индексли қийматлари билан Галилей алмаштиришлари билан боғлаймиз. Қуйидаги муносабатлар сақланиш қонунларини Галилей алмаштиришлари нисбатан инваринтлигини таъминлайди:

$$
\begin{gathered}
E = E_0 + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{v}, \mathbf{j}_0\right), \\
\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \rho \mathbf{v}, \\
\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + S\mathbf{v}, \\
\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{j}_0, \mathbf{v}\right) + E_0 \right)\mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\mathbf{j}_0 + \left(\Pi_0, \mathbf{v}\right), \\
\Pi_{ik} = \Pi_{0,ik} + \rho v_i v_k + v_i j_{0,k} + v_k j_{0,i}\,.
\end{gathered} \tag{1.6}
$$

(1.4) сақланиш қонунлари ва (1.5) тенгламалар натижа сифатида энергиянинг сақланиш қонуни айнан бажарилишини таъминлайди:

$$
\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{Q} = 0, \tag{1.7}
$$

бу ерда $\mathbf{Q} -$ (1.6) формулаларга кўра алмашинадиган энергия оқими.

Қўшсуюқлик бирсюқликли муҳитга айланганда одатдаги гидродинамика тенгламалари ҳосил бўлиши учун $\alpha = -1$, $\beta = -S/\rho$ деб қабул қилиш керак. Бундан кейин оқимларни ҳисоблаш учун қуйидаги формулаларни ҳосил қиламиз:

$$
\begin{gathered}
\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}\,,\ \mathbf{F} = \frac{\mathbf{j}}{\rho}, \\
\Pi_{i,k} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik}, \\
\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right)\mathbf{j} + \frac{TS}{\rho}\mathbf{j} + \mathbf{u}\left(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0\right).
\end{gathered} \tag{1.8}
$$

Ниҳоят, топилган тенгламаларни йиғиб, қўшсуюқли муҳит ҳаракат тенгламаларининг тўла системасини (қайтар гидродинамика) ёзамиз:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) = 0, \\
\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k\left(\rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik} \right) = 0, \\
\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla\right)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho}\nabla\left(\mathbf{u} - \mathbf{v}\right)^2, \\
E_0 = E_0\left(\rho, S, \mathbf{j}_0\right).
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

Бу ердаги сўнги тенглама муҳитнинг ҳолат тенгламаси деб аталади. Феноменологик назарияда ҳолат тенгламаси келтириб чиқарилмайди, у муҳитнинг тузилишига боғлиқ бўлади ва маълум даражада, тажрибаларда аниқланади.

Энди қайтмас ҳаракат тенгламаларини келтириб чиқарамиз, яъни механик энергиянинг диссипациясини ҳисобга оламиз. Ҳаракатнинг қайтмаслиги барча оқимларда қўшимча қайтмас қисмларни вужудга келишига сабаб бўлади. Табиийки, динамик тенгламаларда қўшимча ҳадларнинг пайдо бўлиши Галилей алмаштиришлари группаси билан мослашган бўлиши керак. Қайтар оқимлар тезликлар ва термодинамик параметрларнинг функцияларидан иборат. Қайтмас оқимлар ҳам тезлик ва термодинамик параметрларга боғлиқ бўлиб, улар энди фазовий градиентларга ҳам боғлиқ бўлиши мумкин.

Аввалгидек қўшсуюқлик зичлиги ташкил этувчи суюқликлар зичликларининг йиғиндисига тенг:

$$\rho = \rho_l + \rho_s. \tag{1.10}$$

Бу зичлик учун массанинг сақланиш қонуни ўринли бўлади

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}. \tag{1.11}$$

Импульснинг сақланиш қонунидаги $\prod_{ik}$ импульс оқимига кўриниши кейинчалик аниқланувчи қайтмас симметрик тензор π_{ik} ни қўшиш лозим

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left(\prod_{ik} + \pi_{ik} \right) = 0, \tag{1.12}$$

$$\prod_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l \upsilon_i \upsilon_k + p\delta_{ik}.$$

Энергиянинг сақланиш қонунидаги $\mathbf{Q}$ оқимга қайтмас оқим $\mathbf{W}$ қўшилади

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{Q} + \mathbf{W} \right) = 0, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{TS}{\rho} \mathbf{j} + \left(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0 \right) \mathbf{u}.$$

Навье-Стокс тенгламаларига мос ҳолда (1.5) қайтар тенгламаларнинг ўнг томонига энергия диссипацияси мавжуд бўлганда ишқаланиш кучи қўшилади

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(\mu + h \right) - \frac{S}{\rho} \nabla T + \mathbf{f}. \tag{1.14}$$

Бундан ташқари, градиент остига диссипатив табиатли h функция қўшилган.

Диссипатив жараённи ҳисобга олиш энтропиянинг ўсишига олиб келади. Натижада энтропиянинг кўчиш тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S \frac{\mathbf{j}}{\rho} + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{R}{T}, \tag{1.15}$$

бу ерда R-диссипатив функция. (1.10)-(1.15) тенгламалардаги $\pi_{ik}, \mathbf{W}, \mathbf{f}, h, q, R$ миқдорлар номаълум ва улар аниқланиши лозим. Энергиянинг сақланиш қонуни аввалгидек (1.10)-(1.15) тенгламалар системасидан келиб чиқиши керак.

Сақланиш қонунларидан қуйидаги муносабат топилади

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\mathbf{Q}+\mathbf{q}+(\pi,\mathbf{v})+h(\mathbf{j}-\rho\mathbf{v})\right)=\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)+$$
$$+h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\pi_{ik}\partial_k\upsilon_i+(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right)+$$
$$+T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{S}{\rho}\mathbf{j}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\right), \qquad (1.16)$$

бу ерда $(\pi,\mathbf{v})_i=\pi_{ik}\upsilon_k$. (1.16), (1.3.7) ва (1.13) муносабатларни таққослаймиз. Натижада энергия оқимининг қайтмас қисмини ҳамда диссипатив функцияни аниқлаймиз:

$$W_i=q_i+\pi_{ik}\upsilon_k+h(j_i-\rho u_i), \qquad (1.17)$$

$$R=-h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)-\pi_{ik}\partial_k\upsilon_i-$$
$$-(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right).$$

Бу муносабатлар (1.16) тенгликнинг ушбу $h,\mathbf{q},\pi_{ik},\ f_i+\rho_l^{-1}\partial_k\pi_{ik}$ қайтмас оқимларнинг ихтиёрий қийматларида айнан бажарилишини таъминлайди.

Бир тезликли муҳит ҳолида $(\mathbf{u}\to\mathbf{v})$ ҳозирги назария классик Навье-Стокс назариясига айланиши лозим. Кюри теорамасига кўра, изотроп муҳитда термодинамик оқимлар мос термодинамик кучларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлиши керак. Бундан ташқари, кинетик коэффициентларнинг симметриклик принципидан фойдаланиб, қуйидагиларни аниқлаймиз:

$$R=\zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v})^2+2\zeta_1\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{v}+\zeta_3\left(\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\right)^2+$$
$$+\frac{k}{T}(\nabla T)^2+2\bar{\lambda}(\nabla T,\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\bar{k}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})^2+$$
$$+\frac{\eta}{2}\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2. \qquad (1.18)$$

$$\pi_{ik}=A_{ik}+a\delta_{ik}, \qquad A_{ll}=0, \quad a=\frac{\pi_{ll}}{3}. \qquad (1.19)$$

$$a=-\zeta_1\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\zeta_2\operatorname{div}\mathbf{v},\ \ h=-\zeta_3\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\zeta_1\operatorname{div}\mathbf{v}. \qquad (1.20)$$

$$f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}=-\lambda\partial_i T-\bar{k}(j_i-\rho u_i),\ q_i=-k\partial_i T-\bar{\lambda}T(j_i-\rho u_i). \qquad (1.21)$$

$$A_{ik}=-\eta\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right), \qquad (1.22)$$

$$\zeta_1^2\le\zeta_2\zeta_3, \qquad \zeta_3\ge 0 \qquad (1.23)$$

$$\bar{\lambda}^2 \le \frac{k\bar{k}}{T}, \qquad k \ge 0. \tag{1.24}$$

$$\eta \ge 0 \tag{1.25}$$

Барча қайтмас оқимларни аниқлаб бўлгач, қўшсуюқли муҳитнинг қуйидаги тўла гидродинамик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}, \\
\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) u_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p - \frac{\rho_l}{2\rho}\partial_i \mathbf{w}^2 + \\
+\bar{\lambda}\frac{\rho_l}{\rho_s}\partial_i T + \bar{k}\frac{\rho_l}{\rho_s}(j_i - \rho u_i), \\
\frac{\partial v_i}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \frac{\rho_s}{2\rho}\partial_i \mathbf{w}^2 - \\
-\bar{\lambda}\partial_i T - \bar{k}(j_i - \rho u_i) + \frac{1}{\rho_l}\partial_k\left(\eta\left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\right) + \\
+\frac{1}{\rho_l}\partial_i\left(\zeta_1 div(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u}) + \zeta_2 \operatorname{div}\mathbf{v}\right), \\
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}S - \frac{k}{T}\nabla T - \bar{\lambda}(\mathbf{j} - \rho\mathbf{u})\right) = \frac{R}{T}, \\
\rho = \rho_s + \rho_l, \qquad E_0 = E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0).
\end{gathered} \tag{1.26}$$

Бу ерда диссипатив функция R (1.18) формула билан аниқланади, бундан ташқари термодинамик миқдорлар учун (1.1) ҳам ўринли, муҳитнинг ҳолат тенгламаси $E_0 = E_0(\rho, S, \mathbf{j}_0)$маълум деб ҳисобланади.

Диссертациянинг иккинчи боби «**Қўштезликли гидродинамика тенгламаларининг симметрик ва дивергент кўринишлари**» деб номланган. Бу боб қўшсуюқликли муҳит математик модели тенгламаларини симметриклаштириш ва дивергент кўринишга келтириш ҳамда бир ўлчовли қайтар тенгламалар системасини сонли ечиш масалаларига бағишланган.

Маълумки, баъзи ҳолларда туташ муҳитлар механикасининг математик моделларини тавсифловчи тенгламалар системаси Фридрихс маъносида *t*-гиперболик системага келтирилиши, яъни симметриклаштирилиши мумкин. Эслатайликки, ушбу

$$B_0(\mathbf{Q})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Q} + \sum_{K=1}^{3} B_k(\mathbf{Q})\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{2.1}$$

бунда $B_\alpha, \alpha = \overline{0,3}, -n$ тартибли квадрат матрицалар, $\mathbf{Q} = (q_1,...,q_n)^T$ номаълумлар устуни, квазичизиқли дифференциал тенгламалар системаси қуйидаги шартлар бажарилганда Фридирхс маъносида *t*-гиперболик система деб аталади:

$$\begin{cases} a) B_\alpha = B_\alpha^T, \\ b) B_\alpha > 0, \end{cases} \quad (\alpha = \overline{0,3}) \tag{2.2}$$

Бу ерда B_α^T – транспонерланган матрица. Тушунарлики, системанинг квазачизиқлилиги натижасида a, b шартлар (айниқса b шарт), одатда, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ силлиқ ечимларда текширилади.

Қўшсуюқликли муҳитнинг қайтар динамик тенгламаларини симметрик кўринишга келтирайлик.

(1.26) тенгламалар системаси бир ўлчамли ҳолда, ёпишқоқлик ва массавий кучларни ҳисобга олмаганда қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial (\sigma v)}{\partial x} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\sigma}{2\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\rho}{2\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2, \tag{2.6}$$

бу ерда $\rho = \rho_s$, $\sigma = \rho_l$, $\bar{\rho} = \rho + \sigma$ (белгилашлар ўзгарди).

(2.3) – (2.6) тенгламалар системасини $\{\rho, \sigma, u, v\}$ номаълумлардан $\{\rho, \sigma, w, j\}$ янги номаълумларга ушбу $w = u - v$, $j = \rho u + \sigma v$ формулаларга кўра ўтиб, симметрик (дивергент) кўринишга келтириш мумкинлиги исботланган.

Бу система қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho \dfrac{j + \sigma w}{\bar{\rho}}) = 0, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma \dfrac{j - \rho w}{\bar{\rho}}) = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(w \dfrac{j - \rho w}{\bar{\rho}}) = 0, \\ \dfrac{\partial j}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{j^2}{\bar{\rho}} + \dfrac{\rho \sigma w^2}{\bar{\rho}} + \mathrm{P}) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Теорема 1. (2.3) – (2.6) **ҳаракат тенгламалар системаси янги** $w = u - v$, $j = \rho u + \sigma v$ миқдорларни киритиш ёрдамида қуйидагича матрицавий кўринишда ёзилиши мумкин:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \tag{2.8}$$

бу ерда

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\\ w\\ j\end{pmatrix},\quad F(U)=\begin{pmatrix}\rho\dfrac{j+\sigma w}{\bar\rho}\\ \sigma\dfrac{j-\rho w}{\bar\rho}\\ w\dfrac{j-\rho w}{\bar\rho}\\ \dfrac{j^2}{\bar\rho}+\dfrac{\rho\sigma w^2}{\bar\rho}+P\end{pmatrix},$$

матрицали кўринишида ёзиш мумкин.

(2.8) тенгламани қуйидаги кўринишда ҳам ёзиш мумкин:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0,$$

бунда

$$A=\frac{1}{\bar\rho^2}\begin{pmatrix} j\sigma+w\sigma^2 & -j\rho+w\rho^2 & \bar\rho\rho & \bar\rho\rho\sigma\\ -j\sigma-w\sigma^2 & j\rho-w\rho^2 & \bar\rho\sigma & -\bar\rho\rho\sigma\\ -jw-w^2\sigma & -jw+w^2\rho & \bar\rho w & \bar\rho j-2\bar\rho w\rho\\ \bar\rho^2P_{\bar\rho}-j^2+w^2\sigma^2 & \bar\rho^2P_{\bar\rho}-j^2+w^2\rho^2 & 2\bar\rho j & 2\bar\rho^2P_{\bar w}w+2\bar\rho w\rho\sigma\end{pmatrix}.$$

Муҳитнинг ҳолат тенгламаси

$$P=P(\bar\rho)$$

кўринишда бўлган ҳол ўрганилган.

Бу ҳолда қуйидаги матрицали кўринишда ёзилган тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+B\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

бунда,

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\\ u\\ v\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} u & 0 & \rho & 0\\ 0 & v & 0 & \sigma\\ \dfrac{P_{\bar\rho}}{\bar\rho} & \dfrac{P_{\bar\rho}}{\bar\rho} & u-\dfrac{\sigma w}{\bar\rho} & \dfrac{\sigma w}{\bar\rho}\\ \dfrac{P_{\bar\rho}}{\bar\rho} & \dfrac{P_{\bar\rho}}{\bar\rho} & \dfrac{\rho w}{\bar\rho} & v-\dfrac{\rho w}{\bar\rho}\end{pmatrix}.$$

B матрицанинг хос сонлари унинг характеристик тенгламасидан топилади.

$$(v-\lambda)\Big[(u-\lambda)\Big\{(u-\lambda)^2-2w(u-\lambda)+\bar\rho^{-1}\sigma w^2-P_{\bar\rho}\Big\}+2\bar\rho^{-1}\rho P_{\bar\rho}w\Big]=0$$

Демак, $\lambda_1=v$ хос сон бошқа хос сонлар эса,

$$(u-\lambda)^3-2w(u-\lambda)^2+(u-\lambda)(\bar\rho^{-1}\sigma w^2-P_{\bar\rho})+2\bar\rho^{-1}\rho P_{\bar\rho}w=0.$$

куб тенгламани қаноатлантиради.

Ушбу

$$z=\frac{u-\lambda}{\sqrt{P_{\bar\rho}}},\ \alpha=\frac{w}{\sqrt{P_{\bar\rho}}}. \tag{2.9}$$

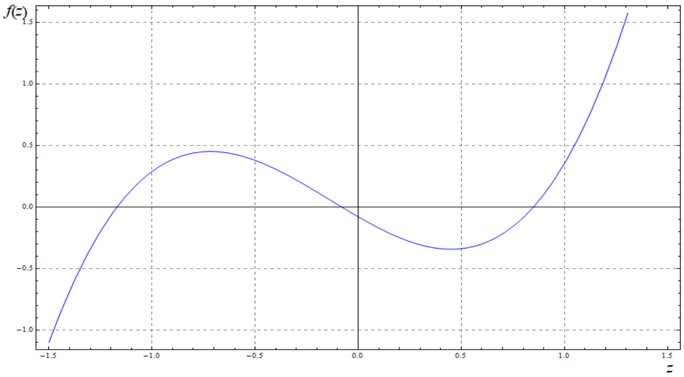
белгилашларни киритиб,

$$f(z)=z^3-2\alpha z^2-z(1-\bar\rho^{-1}\sigma\alpha^2)+2\bar\rho^{-1}\rho\alpha=0 \tag{2.10}$$

соддароқ тенгламани ҳосил қиламиз.

1-расмда $f(z)$ функциянинг $\frac{u}{\sqrt{P_{\bar\rho}}}=0.1,\ \frac{v}{\sqrt{P_{\bar\rho}}}=0.3,\ \frac{\rho}{\bar\rho}=0.2$ ва $\frac{\sigma}{\bar\rho}=0.8.$ қийматларидаги графиги келтирилган.

$f(z)$ функция 3 та ҳақиқий илдизга эга.



1-расм. $f(z)$ функция графиги.

α параметрнинг кичик қийматларида $f(z)$ функциянинг илдизларини $z(\alpha)$ ни α даражалари бўйлаб қаторга ёйиб топамиз.

Айтайлик,

$$z(\alpha)=z_0+\alpha\beta+\ldots \tag{2.11}$$

бўлсин.

(2.11)ни (2.10) тенгламага қўйиб, α етарлича кичик деб ҳисоблаб, қуйидаги тенгликка келамиз (иккита ҳад сақланган).

$$\alpha^0(z_0^3-z_0)+\alpha^1(3z_0^2\beta-2z_0^2-\beta+2\bar\rho^{-1}\rho)=0.$$

Бу айниятнинг бажарилиши учун α нинг даражалари олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши керак. Бундан

$$\lambda_1=v,\ \lambda_2=u-2\bar\rho^{-1}\rho w,\ \lambda_3=u-\sqrt{P_{\bar\rho}}-\bar\rho^{-1}\sigma w,$$

$$\lambda_4=u+\sqrt{P_{\bar\rho}}-\bar\rho^{-1}\sigma w.$$

B матрицанинг хос сонлари $P=P(\bar\rho)$ бўлганда алмаштириш аниқлигида (2.4) – (2.7) система A матрицасининг хос сонлари билан бир хил. Дивергент ўзгарувчилар терминида хос сонлар қуйидагича топилади:

$$\lambda_1=\frac{j-\rho w}{\bar\rho},\ \ \lambda_2=\frac{j+\sigma w-2\rho w}{\bar\rho},\ \lambda_3=\frac{j}{\bar\rho}-\sqrt{P_{\bar\rho}},\ \lambda_4=\frac{j}{\bar\rho}+\sqrt{P_{\bar\rho}}.$$

Юқорида келтирилган ҳисоблашлар (2.8) тенгламалар системасига HLL (Harten, Lax, Leer)-методини қўллашга имкон беради:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0,$$

$$U_i^{n+1}=U_i^n-\frac{\tau}{h}(\mathcal{F}_{i+1/2}^n-\mathcal{F}_{i-1/2}^n)=0,\ i=\overline{0,I},\ n=\overline{0,N}$$

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n=\frac{M_{i+1}^nF_i^n-m_i^nF_{i+1}^n+M_{i+1}^nm_i^n(U_{i+1}^n-U_i^n)}{M_{i+1}^n-m_i^n}$$

$$\mathcal{F}_{i-1/2}^n=\frac{M_i^nF_{i-1}^n-m_{i-1}^nF_i^n+M_i^nm_{i-1}^n(U_i^n-U_{i-1}^n)}{M_i^n-m_{i-1}^n}$$

$$M_i^n=\max(\lambda_{k,i+\frac{1}{2}}^n,0),\ k=\overline{1,4}\qquad m_i^n=\min(\lambda_{k,i+\frac{1}{2}}^n,0),\ k=\overline{1,4}$$

Муҳитнинг ҳолат тенгламаси

$$P=\overline{\rho}^3$$

кўринишда деб ҳисоблаймиз.

Хос сонлар қуйидаги формулаларга кўра ҳисобланади:

$$\lambda_{1,i+\frac{1}{2}}^n=\frac{j_{i+1/2}^n-\rho_{i+1/2}^nw_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^n},\qquad \lambda_{2,i+\frac{1}{2}}^n=\frac{j_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^nw_{i+1/2}^n-2\rho_{i+1/2}^nw_{i+1/2}^n}{\rho_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^n},$$

$$\lambda_{3,i+\frac{1}{2}}^n=\frac{j_{i+1/2}^n-\sqrt{3}(\rho_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^n)^2}{\rho_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^n},\ \lambda_{4,i+\frac{1}{2}}^n=\frac{j_{i+1/2}^n+\sqrt{3}(\rho_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^n)^2}{\rho_{i+1/2}^n+\sigma_{i+1/2}^n},$$

бу ерда

$$\rho_{i+1/2}^n=\frac{\rho_i^n+\rho_{i+1}^n}{2},\quad \sigma_{i+1/2}^n=\frac{\sigma_i^n+\sigma_{i+1}^n}{2},$$

$$w_{i+1/2}^n=\frac{w_i^n+w_{i+1}^n}{2},\quad j_{i+1/2}^n=\frac{j_i^n+j_{i+1}^n}{2}.$$

$i=0$ бўлганда

$$U_0^{n+1}=U_0^n-\frac{\tau}{h}(\mathcal{F}_{1/2}^n-\mathcal{F}_{-1/2}^n)=0,$$

$$\mathcal{F}_{1/2}^n=\frac{M_1^nF_i^n-m_0^nF_1^n+M_1^nm_0^n(U_1^n-U_0^n)}{M_1^n-m_0^n},$$

$$\mathcal{F}_{-1/2}^n=\frac{M_0^nF_{-1}^n-m_{-1}^nF_0^n+M_0^nm_{-1}^n(U_0^n-U_{-1}^n)}{M_0^n-m_{-1}^n}$$

−1 индексни 0 деб ҳисоблаймиз. У ҳолда

$$\mathcal{F}_{-1/2}^n=F_0^n,$$

$$U_0^{n+1}=U_0^n-\frac{\tau}{h}(\mathcal{F}_{1/2}^n-\mathrm{F}_0^n)=0.$$

$i=I$ бўлганда

$$U_I^{n+1}=U_I^n-\frac{\tau}{h}(\mathcal{F}_{I+1/2}^n-\mathcal{F}_{I-1/2}^n)=0,$$

$$\mathcal{F}_{I+1/2}^n=\frac{M_{I+1}^nF_i^n-m_I^nF_{I+1}^n+M_{I+1}^nm_I^n(U_{I+1}^n-U_I^n)}{M_{I+1}^n-m_I^n},$$

$$\mathcal{F}_{I-1/2}^{n} = \frac{M_I^n F_{I-1}^n - m_{I-1}^n F_I^n + M_I^n m_{I-1}^n (U_I^n - U_{I-1}^n)}{M_I^n - m_{I-1}^n}.$$

$I+1$ индексни I деб ҳисоблаймиз. У ҳолда

$$\mathcal{F}_{I+1/2}^{n} = F_I^n, \quad U_I^{n+1} = U_I^n - \frac{\tau}{h}(\mathcal{F}_I^n - \mathcal{F}_{I-1/2}^n) = 0,$$

$$\rho_{I+1/2}^n = \rho_I^n, \qquad \sigma_{I+1/2}^n = \sigma_I^n,$$

$$w_{I+1/2}^n = w_I^n, \qquad j_{I+1/2}^n = j_I^n.$$

Равшанки, зичликлар ва тезликлар ўзгармас бўлганда қўлланилган метод уларни қийматларини ўзгармас ҳолда сақлайди. Бу тасдиқ синов ҳисобида текшириб кўрилди.

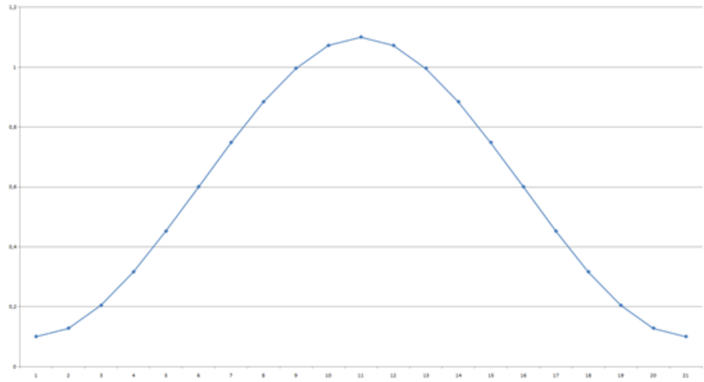
Сонли ҳисоблашлар қуйидаги бошланғич қийматларда амалга оширилди:

$$I = 21,\ N = 200,\ h = 0.1,$$

$$\rho_i^0 = 0.7\bar{\rho}_i^0,\ \sigma_i^0 = 0.3\bar{\rho}_i^0,\ u_i^0 = 0,\ v_i^0 = 0,$$

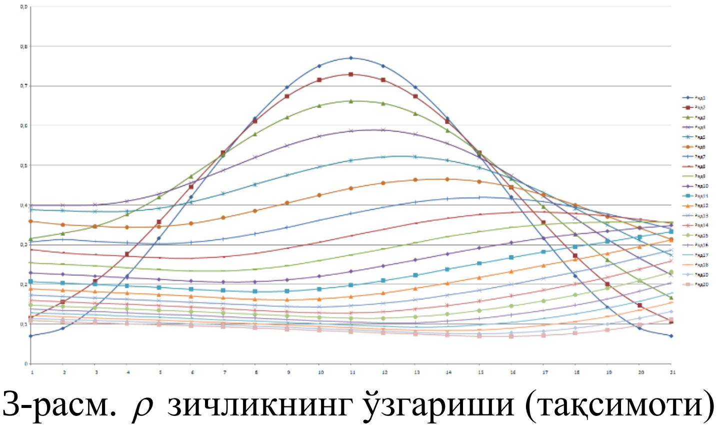
$$\bar{\rho}_i^0 = \begin{cases} -2(ih-1)^3 - 3(ih-1)^2 + 1.1,\ i < \dfrac{I}{2}, \\ 2(i - \dfrac{I}{2})^3 h^3 - 3(i - \dfrac{I}{2})^2 h^2 + 1.1,\ i \ge \dfrac{I}{2}, \end{cases}$$

$$\tau_i^n = 0.25h / M_{I+1}^n$$



2-расм. $\bar{\rho}^0$ зичлик тақсимоти.

3-расмда ρ зичликнинг турли пайтлардаги тақсимотлари келтирилган.



3-расм. ρ зичликнинг ўзгариши (тақсимоти).

Сиқилмайдиган суюқликлар учун бир ўлчамли Навье-Стокс тенгламасининг (босимнинг градиентини ҳисобга олмаганда) аналоги сифатида Бюргерс типли тенгламалар системасини қараш мумкин

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} - \tilde{b}(u-v), \tag{2.12}$$

$$v_t + vv_x = \tilde{\nu} v_{xx} + b(u-v), \tag{2.13}$$

бу ерда u ва v ларни ρ_1 ва ρ_2 зичликли суюқликлардан тузилган қўшсуюқликли муҳитнинг тезликлари деб ҳисоблаш мумкин; $\tilde{b} = (\rho_2/\rho_1)b$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$, $b-$ компонентлараро ишқаланиш коэффициенти (ғовак муҳитлар учун Дарси коэффициентининг аналоги); ν ва $\tilde{\nu}$ мусбат коэффициентлар компонентларнинг кинематик ёпишқоқликлари ролини ўйнайди. (2.12), (2.13) система қўштезликли диссипатив гидродинамика тенгламаларидан босимни иштирок этмаганлиги ва суюқликнинг сиқилмаслиги билан фарқ қилади. Шунинг учун бу ҳолни қўштезликли босимсиз гидродинамика тенгламалар системаси деб атаймиз.

(2.12), (2.13) систама учун $\Gamma_{[0,T]} = \{(t,x): 0 \le t \le T, -\infty < x < \infty\}$ полосада ушбу

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.14}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.15}$$

бошланғич шартли Коши масаласини қарайлик.

Бизни (2.12), (2.13) Бюргерс типли тенгламалар системаси учун қўйилган Коши масаласининг силлиқ ечимлари қизиқтиради. Бунда $u_0(x)$ ва $v_0(x)$ бошланғич функцияларни чексиз дифференциалланувчи ва компакт ташувчили (финит) деб ҳисоблаймиз.

Ушбу

$$\varphi = exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int u dx\right], \quad \psi = exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}\int v dx\right].$$

функцияларни қарайлик.

Бунда u ва v функциялар φ ва ψ функциялар орқали ушбу

$$u = -2\nu\frac{\varphi_x}{\varphi},\ v = -2\tilde{\nu}\frac{\psi_x}{\psi}.$$

формулалар орқали ифодаланади.

φ ва ψ функциялар терминида (2.12) ва (2.13) система қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x = \left(\nu\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_x - \frac{\tilde{b}}{\nu}\left(\ln\frac{\varphi^{\nu}}{\psi^{\tilde{\nu}}}\right)_x,\ \left(\frac{\psi_t}{\psi}\right)_x = \left(\tilde{\nu}\frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)_x + \frac{b}{\tilde{\nu}}\left(\ln\frac{\varphi^{\nu}}{\psi^{\tilde{\nu}}}\right)_x$$

Ушбу

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

бошланғич шартли Коши масаласи ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$\varphi(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}G^{\nu}(x,\xi,t)\varphi_0(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{\tilde{b}}{\nu}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G^{\nu}(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi,\tau)(\nu\ln\varphi(\xi,\tau)-\tilde{\nu}\ln\psi(\xi,\tau))d\xi d\tau,$$

$$\psi(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}G^{\tilde{\nu}}(x,\xi,t)\psi_0(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{b}{\tilde{\nu}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G^{\tilde{\nu}}(x,\xi,t-\tau)\psi(\xi,\tau)(\nu\ln\varphi(\xi,\tau)-\tilde{\nu}\ln\psi(\xi,\tau))d\xi d\tau,$$

бу ерда $G^{\nu}(x,\xi,t)-$ иссиқлик узатиш коэффициенти ν бўлган иссиқлик тарқатиш тенгламасининг фундаментал ечими. Қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 2. Айтайлик, $u_0(x)$ ва $v_0(x)$ бошланғич функциялар финит бўлсин. У ҳолда (2.12)-(2.15) Коши масаласи ечими учун қуйидаги формулалар ўринли:

$$u(t,x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F(u_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F(u_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}-$$

$$-\frac{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1+\frac{\tau}{t-\tau}}\left(u(t,x)-\frac{x-\xi}{t-\tau}\right)F_2(u,v,x,\xi,t,\tau)d\xi d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F(u_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi},\qquad(2.16)$$

$$v(t,x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F(v_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F(v_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}-$$

$$-\frac{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1+\frac{\tau}{t-\tau}}\left(v(t,x)-\frac{x-\xi}{t-\tau}\right)G_2(u,v,x,\xi,t,\tau)d\xi d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F(v_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi},\qquad(2.17)$$

бунда F, F_2 ва G_2 функциялар ушбу

$$F_2(u,v,x,\xi,t,\tau)=\frac{\tilde{b}}{2\nu}\left\{F_1(u,x,\xi,t,\tau)-F_1(v,x,\xi,t,\tau)\right\}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F_1(u,x,\xi,t,\tau)\right],$$

$$G_2(u,v,x,\xi,t,\tau)=\frac{b}{2\tilde{\nu}}\left\{F_1(v,x,\xi,t,\tau)-F_1(u,x,\xi,t,\tau)\right\}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F_1(u,x,\xi,t,\tau)\right],$$

$$F_1(u,x,y,t,\tau)=\frac{(x-y)^2}{2(t-\tau)}+\int\limits_{-\infty}^{y}u(\tau,\eta)d\eta\,,$$

$$F(u,x,y,t)=\frac{(x-y)^2}{2t}+\int\limits_{-\infty}^{y}u(t,\eta)d\eta\,.$$

формулалар билан аниқланган.

Учинчи боб «**Қўшсуюқликли муҳитн қайтар тенгламалар системасининг автомодель ечимлари**» деб аталади. Бу боб қўштезликли ҳолат тенгламасига нисбатан умумий бўлган муҳитнинг бир ўлчамли тенгламалар системасини Ли группалари ва алгебрлари назариясидан фойдаланиб текширишга ва автомодель ечимларини қуришга бағишланган.

(2.3) – (2.6) тенгламалар системасини ушбу

$$P=P(\bar{\rho},(u-v)^2).$$

ҳолат тенгламаси билан қарайлик.

Қулайлик учун қуйидаги белгилашларни киритайлик:

$$\bar{\rho}=\rho_s+\rho_l,\ \rho=\rho_s,\ \sigma=\rho_l,\ \bar{w}=w^2,\ w=u-v.$$

У ҳолда

$$\rho_t+\rho_x u+u_x\rho=0,\qquad \sigma_t+\sigma_x u+v_x\rho=0,$$

$$u_t+uu_x+\bar{\rho}^{-1}(\mathrm{P}_{\bar{\rho}}(\rho_x+\sigma_x)+w(u_x-v_x)(2\mathrm{P}_{\bar{w}}+\sigma))=0,$$

$$v_t+vv_x+\bar{\rho}^{-1}(\mathrm{P}_{\bar{\rho}}(\rho_x+\sigma_x)+w(u_x-v_x)(2\mathrm{P}_{\bar{w}}-\rho))=0.$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Ушбу

$$X_1=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\ X_2=\frac{\partial}{\partial t}\ ,\ X_3=\frac{\partial}{\partial x}\ ,\ X_4=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}$$

операторлар ҳосил қилган асосий Ли алгебрасининг ядроси учун базис қурилган. Асосий Ли алгебрасининг ядроси учун қисм алгебралар ўрганилган.

Берилган қисм группага нисбатан инвариант ечимни қуриш учун бу қисм группанинг функционал боғлиқ бўлмаган инвариантларининг тўла системасини топиш керак. Топилган инвариант ечимга мос группалар имкон берувчи чекли алмаштиришларни қўллаб умумийроқ кўп параметрли ечим ҳосил қиламиз.

Қаралаётган тенгламалар системасининг турли инвариант ечимлари топилган.

5.1.1.а. Ушбу

$$X_1+q_1X_4=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}+q_1t\frac{\partial}{\partial u}+q_1\frac{\partial}{\partial v}$$

оператор учун

$$\frac{\partial\rho_s u}{\partial y}-q_1\frac{\partial\rho_s}{\partial y}-\rho_s=0,\quad \frac{\partial\rho_l v}{\partial y}-q_1\frac{\partial\rho_l}{\partial y}-\rho_l=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u-q_1)-u=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\rho_l}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(v-q_1)-v=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right).$$

бу ерда $y=q_1\ln t-\frac{x}{t},$ автомодель ўзгарувчи q_1- аниқ сон.

Инвариант ечимлар P функциянинг берилишига кўра топилади.

5.1.1.б. Ушбу оператор учун

$$X_1=t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho_s u)}{\partial y}-y\frac{\partial\rho_s}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial(\rho_l v)}{\partial y}-y\frac{\partial\rho_l}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(u-y)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\rho_l}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(v-y)=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right).$$

бу ерда $y=\frac{x}{t},$ автомодель ўзгарувчи.

Инвариант ечимлар P функциянинг берилишига кўра топилади.

5.1.2.а. Ушбу оператор учун

$$X=X_2+q_2X_4=\frac{\partial}{\partial t}+q_2t\frac{\partial}{\partial x}+q_2\frac{\partial}{\partial u}+q_2\frac{\partial}{\partial v}$$

$$q_2-\frac{u\partial u}{\partial y}=\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{c_2u}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial(u-v)^2}{\partial y},$$
$$q_2-\frac{v\partial v}{\partial y}=\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{c_2v}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial(u-v)^2}{\partial y}.$$

бу ерда $y=q_2t^2/2-x$, автомодель ўзгарувчи.

Инвариант ечимлар P функциянинг берилишига кўра топилади.

5.1.2.б. Ушбу оператор учун

$$X_2=\partial/\partial t$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{c_2u}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2,$$
$$v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{vu}{c_1u+c_2v}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{c_2v}{2(c_1u+c_2v)}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2.$$

Инвариант ечимлар P функциянинг берилишига кўра топилади.

5.1.3. Ушбу оператор учун

$$X=\partial/\partial x$$

$$\rho_s=c_1,\quad \rho_l=c_2,\quad u=c_3,\quad v=c_4.$$

аҳамиятга эга эмас.

5.1.4. Ушбу оператор учун

$$X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

$$\rho_s = \frac{c_1}{t}, \qquad \rho_l = \frac{c_2}{t}, \qquad u = \frac{c_3}{t}, \qquad v = \frac{c_4}{t}.$$

Умумийроқ кўп параметрли инвариант ечим

$$\rho_s = \frac{c_1}{a_1 t + a_2}, \qquad \rho_l = \frac{c_2}{a_1 t + a_2},$$

$$u = \frac{c_3}{a_1 t + a_2}, \qquad v = \frac{c_4}{a_1 t + a_2}.$$

кўринишга эга.

Икки ва уч ўлчамли қисм алгебралар ва уларга мос инвариант ечимлар ҳам топилган. Тўрт ўлчамли

$$\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$$

қисм алгебра учун инвариант ечим йўқ.

ХУЛОСА

Диссертацияда икки суюқликли бир босимли муҳитда ночизиқли бир ўлчамли тўлқинларни тарқалиш жараёнларини математик моделлаштириш бўйича эришилган илмий натижалар асосида қуйидаги хулосалар олинган:

1. Қўшсуюқликли умумий босимли муҳит динамикасининг термодинамик мутаносиб такомиллашган математик модели қурилган.

2. Ҳосил қилинган дифференциал тенгламалар системаси бир ўлчамли ҳолда Фридрихс маъносида гиперболик эканлиги кўрсатилган.

3. Қўшсуюқликли бир босимли муҳитнинг бир ўлчамли динамик тенгламалар системаси учун спектрал анализ амалга оширилган.

4. HHL метод ёрдамида қўшсуюқликли муҳитнинг бир ўлчамли тенгламалар системаси сонли ечилган.

5. Икки тезликли гидродинамиканинг хусусий ҳоли сифатида Бюргерс типли тенгламалар системаси ҳосил қилинган.

6. Бир ўлчамли Бюгерс типли тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечиш иккинчи тур ночизиқли Вольтерра тенгламалари системасини ечишга келтирилган.

7. Қўшсуюқликли бир босимли муҳитнинг диссипациясиз динамикасини тавсифловчи хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг группавий анализи амалга оширилган.

8. Бир ўлчамли тенгламалар системасининг асосий Ли алмаштиришлар группасининг ядроси топилган.

9. Инвариант ва қисман инвариант ечимлар учун оддий дифференциал тенгламалар системаси топилган. Бир ўлчамли қисм алгебралар оптимал системасига нисбатан инвариант ечимлар қурилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02

ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

МАМАСОЛИЕВ БАХТИЁР ЖУРАМИРЗАЕВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ВОЛН В ДВУХЖИДКОСТНОЙ СРЕДЕ С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PHD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2020

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическем наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM90.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Имомназаров Холматжон Худайназарович** доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник (Россия, ИВМиМГ)
Официальные оппоненты:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Вычислительная математика и информационные системы» НУУз
	Хужаёров Бахтиёр доктор физико-математических наук, профессор зав. кафедры СамГУ
Ведущая организация:	**Институт математики им. В.И.Романосвкого АН РУз**

Защита диссертации состоится «18» июня 2020 года в 16^00 часов на заседании Научного совета Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 43). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «15» июня 2020 года.

(протокол рассылки № от 18 2020 года).

А. Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

М.М.Арипов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотации диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к задачам создания и исследования математических моделей волновых процессов в двухжидкостных средах. Движения двухжидкостных сред являются объектом исследования в таких областях как математическая физика, механика сплошных сред, двухжидкостная гидродинамика и математическое моделирование. Такие движения обычно описываются нелинейными уравнениями. Поэтому исследование нелинейных математических моделей распространения волн в двухжидкосных средах остаётся важной задачей в областях сейсморазведки и геофизики.

В настоящее время в мире исследование различного вида течений с учетом эффектов многожидкостности, а также построение адекватных математических моделей наблюдаемых при этом процессов считается одной из актуальных задач двухжидкостной гидродинамики. Изучение движения двухжидкостных сред с учетом исходной структуры среды и физических свойств компонентов (фаз) требует привлечения новых параметров и решения уравнений более сложных, чем те, которые записываются для однофазных течений. При этом детальное описание внутрикомпонентных и межкомпонентных взаимодействий в двухжидкостных средах порою чрезвычайно сложно, и для получения обозримых результатов и их понимания зачастую прибегают к рациональным схематизациям, приводящим к обозримым и решаемым уравнениям.

В нашей стране особое внимание уделяется направлениям фундаментальной науки, имеющим практические применения, в частности, отдельно уделено внимание изучению движения двухжидкостных сред. В этой связи, в том числе, получены весомые результаты по проведению ряда научных исследований, посвященных свойствам движения двухжидкостных сред, созданию математических моделей механики двухжидкостных сред.

В постановлении Кабинета Министров были обозначены «Основные задачи и направления ведения научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математического анализа, прикладной математики и математического моделирования»[1]. Для обеспечения исполнения постановления имеет важное значение развитие математического моделирования и численного исследования процессов в двухжидкостных средах.

Знание законов и особенностей двухжидкостного течения играет важную роль в разработке и совершенствовании технологических процессов, технических установок и устройств в ряде отраслей промышленности, что и

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

определяет актуальность проведенных исследований и их значимость для приложений. Проводимые в настоящее время научные исследования по вышеуказанному направлению научных исследований обосновывают актуальность темы данной диссертации.

Данная диссертация в определенной степени служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлении Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», а также других нормативно-правовых актов по данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. История использования математических моделей для описания различных неоднофазных сред восходит к работам Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица, И. Пригожина и П. Мазура (работы по гидродинамике жидкого гелия), Ф.И. Франкля и С.Г. Телетова (получение гидродинамических уравнений двухфазной среды методами осреднения), С.С. Кутателадзе и М.А. Стыриковича (гидравлика газожидкостных потоков). Также можно выделить авторов, развиваших теорию многокомпонентных сред, можно назвать S. Chapman, T. Cowling, S. Truesdell, R. Toupin (1956), G. Carrier (1958), P. Cayley, G. Cliegel, A. Green, P. Naghdi (1961), G. Batchelor, G. Muller (1966), L. Wijngaarden (1971).

Различают подходы к моделированию двухфазных сред, связанные с построением односкоростных и двухскоростных гидродинамических моделей [Нигматулин, 1978]. В первом случае гетерофазные свойства отражаются либо в значениях кинетических коэффициентов и термодинамических параметров среды либо в уточнении управляющих уравнений за счет добавления слагаемых, учитывающих наличие других фаз. Во втором случае предполагается моделирование двухфазных сред через рассмотрение совместного движения и деформирования обеих фаз с учетом механических и термодинамических эффектов, возникающих из-за несовпадения скоростей фаз. Односкоростные модели, в рамках которых двухфазные среды рассматриваются как однородные и характеризуются некоторыми средними значениями плотности, температуры, взаимной деформации и скорости, широко распространены в приложениях в связи с относительной простотой их построения и численной реализации. Основные идеи односкоростных моделей двухжидкостных смесей были сформулированы при исследовании ударных волн в пузырьковых средах на базе баротропного уравнения состояния [Taylor, 1954; Ляхов, 1959] и получили дальнейшее развитие, с привлечением более сложных многочленных уравнений состояния, для газожидкостных [Murray, 1964;

Кутателадзе, Стыриков, 1976; Накоряков и др., 1990; Суров,1998] и многожидкосных смесей [Wackers, Koren, 2005; Суров, 2008; Кучер, Прокудин, 2010].

Оригинальный подход, развитый в работах [Годунов, Роменский, 1998; Romensky, 2001], позволяет получить термодинамически согласованные системы уравнений, представимые в виде гиперболической системы законов сохранения. Основная идея состоит в том, чтобы представить систему гиперболических законов сохранения в терминах производящего потенциала. В работах [Romensky, 1998; Romenski, Toro, 2004; Romenski et al., 2007] были получены консервативные модели двухфазных сред с одним давлением, модели течений многофазных сред, в том числе и в деформируемых пористых средах [Роменский, 2011]. Особенностью полученных моделей является дивергентный вид обратимых уравнений и, как следствие, потенциальность поля относительных скоростей движения фаз.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательских работ НУУз в рамках совместного Узбекско-Российского проекта MRU-OT-81/2017 “Математическое моделирование термодинамически согласованной математичесокй модели двухфазных средств в диссипативном приближении с перекрестными эффектами” (2018-2019).

Целью исследования настоящей диссертационной работы является теоретическое и численное исследования одномерных динамических процессов распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде с общим давлением, а также получение формулы решения задачи Коши в диссипативном случае для системы уравнений типа Бюргерса. Нахождение инвариантных и частично инвариантных решений в случае, когда уравнение состояния является функцией плотности и относительной скорости.

Задачи исследования:

вывод математической модели распространения нелинейных волн в двухжидкостной среде с одним давлением.

симметризовать систему полученных дифференциальных уравнений в одномерном случае.

провести спектральный анализ одномерной системы уравнений двухжидкостной среды с общим давлением.

численно исследовать одномерную систему уравнений двухжидкостной среды с одним давлением, разработать соответствующую программу для вычислений на ЭВМ.

рассмотреть задачу Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса. Ее решение свести к решению системы нелинейных уравнений Вольтерра второго рода.

исследовать групповые свойства рассматриваемой одномерной системы уравнений двухжидкостной среды с одним давлением.

найти базис ядра основной алгебры Ли рассматриваемый одномерной системы уравнений.

поиск системы дифференциальных уравнений для инвариантных и частично инвариантных решений.

Объектом исследования является нелинейные волновые процессы в двухжидкостной среде.

Предметом исследования является нелинейные математические модели, численные алгоритмы и программные средства, используемые для моделирования нелинейных движений двухжидкостной среды.

Методы исследования. Для исследования нелинейных динамических процессов использованы методы математического моделирования, неравновесной термодинамики, вычислительной математики, технологии программирования, а также методы теории групп и алгебр Ли.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

усовершенствована математическая модель движения двухжидкостной среды с общим давлением с учетом термодинамических переменных.

получен симметрический t-гиперболический вид по Фридрихсу системы дифференциальных уравнений построенной математической модели двухжидкостной среды с одним давлением.

разработана численная схема решению одномерной системы уравнений двухжидкостной среды с одним давлением.

получены система нелинейные уравнения Вольтерра второго рода для решения задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса.

найдены групповые свойства одномерной системы уравнений двухжидкостной среды с равновесием по давлению.

найден базис ядра основной алгебры Ли одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики с общим давлением.

Практические результаты исследования. Результаты исследования являются практически значимыми:

созданная усовершенствованная термодинамически согласованная математическая модель движения двухкомпонентных сред с общим давлением с учетом диссипации энергии может быть использована при описании движения жидкостей, состоящих из двух компонентов.

Достоверность результатов исследования обосновывается корректностью математической модели, её согласованностью с законами термодинамики, строгостью математических выкладок, использованием математически обоснованных методов решения, совпадением полученных решений с точными решениями в аналогичных постановках для однофазных сред, а также сравнительным анализом результатов численного моделирования с решениями известных модельных задач.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Усовершенствованная математическая модель движения двухкомпонентных сред является значимой в теории математического моделирования. Дивергентный вид уравнений движения двухжидкостных сред могут быть использованы для построения эффективных числовых схем решения соответствующих задач. Инвариантные (автомодельные) решение могут быть использованы для тестирования численных схем решения начально-краевых задач.

Внедрение результатов исследования. Предложенная в работе усовершенствованная нелинейная математическая модель двухжидкостной среды использовалась при численном моделирование прямых задач по теме Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН за 2016-2018гг «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей Земли», № госрегистрации 1.3.1.3. и гранта РФФИ № 18-51-41002 "Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в диссипативном приближении с перекрестными эффектами", а также используя выше указанную математическую модель были исследованы групповые свойства динамической модели двухжидкостных сред (справка от 06.11.2019 №15301/2-01-27)

Результаты диссертации были использованы при выполнении научно-прикладного проекта А-13-38 «Теоретическое и численное исследования прямых и обратных задач для нелинейной волновой динамики двухфазных сред» (2015-2017) в Каршинском государственном университете. При этом была усовершенствована математическая модель распространения неленейных волн в двухжидкостной среде с одним давлением, а также появилась возможность решения задачи Коши для системы уравнени типа Бюргерса (справка от 07.11.2019 №89-03-4328 МВиССО РУз).

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 11 научно-практических конференциях, в том числе, на 5 международных и 6 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 8 научных статей, в том числе 4 в зарубежных и 4 в республиканских журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованной литературы, приложений. Объем диссертации составляет 109 страница.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность проведенного исследования, цель и задачи исследования, характеризуются объект и предмет, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики, излагаются научная новизна и практические результаты исследования, раскрываются научная и практическая значимость полученных результатов, внедрение в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

Первая глава диссертации, под называнием **«Термодинамически согласованная математическая модель динамики двувжидкостной среды»** посвящена выводу уравнений движения двухскоростных сред без учета диссипации энергии, а также с учетом диссипации. Предполагается, что сплошная среда состоит из двух жидкостей (компонентов, фаз). Уравнения движения выводятся используя законы сохранения, начала термодинамики и принцип инвариантности этих уравнений относительно преобразования Галилея.

Введем общепринятие обозначения:

t – время

V – объем

$\rho_l\,(\rho_1)\,,\rho_s\,(\rho_2)$ – плотности жидкостей

$\rho=\rho_s+\rho_l$ – плотность двухжидкостной среды

E – энергия единицы объема

e – энергия единицы массы

$E_0\;(e_0)$ – относительная энергия единицы объема (единицы массы)

p – давление

T – температура

μ – химический потенциал

$S\;(s)$ – энтропия единицы объема (единицы массы)

$\mathbf{u}\,,\mathbf{v}$ – скорости жидкостей

$\mathbf{w}=\mathbf{u}\text{ - }\mathbf{v}$ – относительная скорость

$\mathbf{j}$ – плотность импульса

$\mathbf{j}_0$ – плотность относительного импульса

Π_{ik} – обратимая составляющая тензора плотности потока импульса

δ_{ik} – символы Кронекера;

π_{ik} – необратимая составляющая тензора плотности потока импульса

$\mathbf{Q}$ – обратимая составляющая потока энергии

$\mathbf{W}$ – необратимая составляющая потока энергии

Двухскоростная гидродинамика вводит в рассмотрение две локально заданные скорости. Произвольная частица такой среды представляется локально сосуществующими взаимно проникающими частицами. Начала термодинамики сформулируем в системе отсчета, связанной с покоем одной из жидкой частицы. Пометим индексом "0" величины, относящиеся к указанной системе. Имеем из законов термодинамики

$$dE_0=TdS+\mu d\rho+\left(\mathbf{u}-\mathbf{v},\;d\mathbf{j}_0\right). \tag{1.1}$$

Здесь величины E_0,T,S,μ,ρ являются соответственно внутренней энергией единицы объема, температурой, энтропией единицы объема, химическим потенциалом, плотностью и характеризуют элемент континуума совокупной системы – двухжидкостную среду. Скорости жидкостей обозначены через $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Плотности жидкостей соответственно обозначим через ρ_s, ρ_l Третье слагаемое в (1.1) выражает тот факт, что относительная скорость есть производная энергии по относительному импульсу. В формуле (1.1) $\mathbf{j}_0$ - плотность относительного импульса. Находясь в системе отсчета, связанной с покоем жидкой частицы (l), мы наблюдаем движение второй жидкости (s) составляющей континуума со скоростью $\mathbf{u}-\mathbf{v}$. Очевидно в этом случае плотность импульса

$$\mathbf{j}_0 = \rho_s\left(\mathbf{u}-\mathbf{v}\right) \tag{1.2}$$

Связь с лабораторной системой отсчета выражается преобразованиями Галилея

$$E = E_0 + \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{v}, \mathbf{j}_0\right), \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \rho\mathbf{v},\ \rho = \rho_s + \rho_l . \tag{1.3}$$

Сначала выводятся уравнения движения рассматриваемой среды без учета диссипации механической энергии. Пусть выполняются законы сохранения массы, энтропии и импульса

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0,\\
\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{F} = 0,\\
\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k\Pi_{ik} = 0.
\end{gathered} \tag{1.4}$$

В уравнениях (1.4) пока не определены: Π_{ik}-тензор плотности потока импульса, $\mathbf{F}$-обратимый поток энтропии, $\mathbf{j}$-импульс единицы объема.

Следуя общей идеологии и также анализу условий термодинамического равновесия, сделаем основное предположение о характере уравнения движения одной из жидкости

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v},\nabla\right)\mathbf{v} = \alpha\nabla\mu + \beta\nabla\mathrm{T} . \tag{1.5}$$

Функции α и β термодинамических переменных S, ρ требуют своего определения.

В системе уравнений (1.4), (1.5) обратимые потоки $\mathbf{j}, \Pi_{ik}, \mathbf{F}$ могут быть лишь функциями скоростей и термодинамических переменных. Для их определения используем преобразования Галилея, которые связывают значения потоков j, Π_{ik}, F с соответствующими величинами в системе покоя одной из компоненты жидкой частицы. Следующие соотношения гарантируют инвариантность законов сохранения относительно преобразования Галилея

$$\begin{gathered}
E = E_0 + \frac{\rho\mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{v}, \mathbf{j}_0\right),\\
\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \rho\mathbf{v},\\
\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 + S\mathbf{v},
\end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 + \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \left(\mathbf{j}_0, \mathbf{v}\right) + E_0 \right) \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \mathbf{j}_0 + \left(\Pi_0, \mathbf{v}\right),$$

$$\Pi_{ik} = \Pi_{0,ik} + \rho v_i v_k + v_i j_{0,k} + v_k j_{0,i}\,.$$

Законы сохранения (1.4) и уравнения (1.5) в качестве следствия должны приводить к тождественному выполнению закона сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q} = 0, \tag{1.7}$$

в котором $\mathbf{Q}$-обратимый поток энергии, преобразующийся в соответствии с формулами (1.6).

Для того чтобы в пределе мы получили обычные уравнения гидродинамики следует выбрать $\alpha = -1$, $\beta = -S/\rho$. После этого найдём следующие формулы для вычисления обратимых гидродинамических потоков:

$$\mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}\,,\ \mathbf{F} = \frac{\mathbf{j}}{\rho},$$

$$\Pi_{i,k} = \rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik},$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{TS}{\rho} \mathbf{j} + \mathbf{u}\left(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0\right). \tag{1.8}$$

Наконец, собирая полученные уравнения, составляем полную систему уравнений двухскоростного континуума без учета диссипации энергии (обратимое гидродинамическое приближение).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S\,\frac{\mathbf{j}}{\rho} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left(\rho_s u_i u_k + \rho_l v_i v_k + p\delta_{ik} \right) = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla\right) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\rho_s}{2\rho} \nabla \left(\mathbf{u} - \mathbf{v}\right)^2,$$

$$E_0 = E_0\left(\rho, S, \mathbf{j}_0\right).$$

Последнее соотношение есть уравнение состояния. Оно содержит известный термодинамический произвол.

Теперь выведем уравнения необратимых движений, т.е. будем учитывать диссипацию механической энергии. Необратимость движения приводит к появлению во всех потоках дополнительных необратимых частей. Естественно, появление дополнительных членов в динамических уравнениях необходимо согласовать с группой преобразований Галилея. Обратимые потоки являются функциями скоростей и термодинамических переменных, характеризующих локальное состояние. Необратимые потоки также зависят от термодинамических переменных и скоростей, но в то же время могут зависеть от пространственных градиентов.

По-прежнему плотность равна сумме парциальных плотностей

$$\rho = \rho_l + \rho_s, \tag{1.10}$$

для которой выполняется закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \rho_s \mathbf{u} + \rho_l \mathbf{v}. \tag{1.11}$$

В закон сохранения импульса следует добавить к тензору плотности потока импульса $\prod_{ik}$ необратимый симметричный тензор π_{ik} вид, которого в дальнейшем будет определен

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left(\prod_{ik} + \pi_{ik} \right) = 0, \tag{1.12}$$

$$\prod_{ik} = \rho_s u_i u_k + \rho_l \upsilon_i \upsilon_k + p\delta_{ik}.$$

Потоку $\mathbf{Q}$ в законе сохранения энергии будет соответствовать необратимый поток $\mathbf{W}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\mathbf{Q} + \mathbf{W} \right) = 0, \tag{1.13}$$

$$\mathbf{Q} = \left(\mu + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \mathbf{j} + \frac{TS}{\rho} \mathbf{j} + \left(\mathbf{u}, \mathbf{j}_0 \right) \mathbf{u}.$$

В полном соответствии с уравнением Навье-Стокса следует считать, что в правой части обратимого уравнения (1.5) в условиях диссипации энергии появляется сила трения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla \left(\mu + h \right) - \frac{S}{\rho} \nabla T + \mathbf{f}. \tag{1.14}$$

Кроме того, под знак градиента включена функция h диссипативной природы.

Включение диссипативных процессов в системе сопровождается возрастанием энтропии, в силу чего возникает ее производство *R/T*. В условиях диссипации энергии уравнение переноса энтропии имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S \frac{\mathbf{j}}{\rho} + \frac{\mathbf{q}}{T} \right) = \frac{R}{T}, \tag{1.15}$$

где R-диссипативная функция. Величины $\pi_{ik}, \mathbf{W}, \mathbf{f}, h, q, R$ в уравнениях (1.10)-(1.15) неизвестны и подлежат определению. Закон сохранения энергии по-прежнему должен тождественно следовать из системы уравнений (1.10)-(1.15).

Из законов сохранения получаем соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}\Big(\mathbf{Q} + \mathbf{q} + \left(\pi, \mathbf{v} \right) + h\left(\mathbf{j} - \rho \mathbf{v} \right) \Big) = \frac{1}{T} \left(\mathbf{q}, \nabla T \right) +$$

$$+ h \operatorname{div}\left(\mathbf{j} - \rho \mathbf{u} \right) + \pi_{ik} \partial_k \upsilon_i + \left(j_i - \rho u_i \right) \left(f_i + \frac{1}{\rho_l} \partial_k \pi_{ik} \right) +$$

$$+T\left(\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{S}{\rho}\mathbf{j}+\frac{\mathbf{q}}{T}\right)\right), \tag{1.16}$$

где вектор $(\pi,\mathbf{v})_i=\pi_{ik}\upsilon_k$. Сравним выражения (1.16), (1.3.7) и (1.13). В результате·определим вектор необратимого потока энергии

$$W_i=q_i+\pi_{ik}\upsilon_k+h(j_i-\rho u_i) \tag{1.17}$$

и диссипативную функцию

$$R=-h\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\frac{1}{T}(\mathbf{q},\nabla T)-\pi_{ik}\partial_k\upsilon_i-$$
$$-(j_i-\rho u_i)\left(f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}\right).$$

Такой выбор позволяет условие (1.16) выполнить тождественно при произвольном значении необратимых потоков $h,\mathbf{q},\pi_{ik},\, f_i+\rho_l^{-1}\partial_k\pi_{ik}$.

Из условия, что при односкоростном приближении $\mathbf{u}\to\mathbf{v}$ теория должна переходить в теорию Навье-Стокса и используя теорему Кюри о том, что для изотропных тел термодинамические потоки пропорциональны соответствующим термодинамическим силам, а также учитывая принцип симметрии кинетических коэффициентов, определяем

$$R=\zeta_2(\operatorname{div}\mathbf{v})^2+2\zeta_1\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\operatorname{div}\mathbf{v}+\zeta_3(\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u}))^2+$$
$$+\frac{k}{T}(\nabla T)^2+2\bar{\lambda}(\nabla T,\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\bar{k}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})^2+$$
$$+\frac{\eta}{2}\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)^2. \tag{1.18}$$

$$\pi_{ik}=A_{ik}+a\delta_{ik},\qquad A_{ll}=0,\quad a=\frac{\pi_{ll}}{3}. \tag{1.19}$$

$$a=-\zeta_1\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\zeta_2\operatorname{div}\mathbf{v},\ \ h=-\zeta_3\operatorname{div}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})-\zeta_1\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{1.20}$$

$$f_i+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\pi_{ik}=-\lambda\partial_i T-\bar{k}(j_i-\rho u_i),\ q_i=-k\partial_i T-\bar{\lambda}T(j_i-\rho u_i). \tag{1.21}$$

$$A_{ik}=-\eta\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right), \tag{1.22}$$

$$\zeta_1^2\le\zeta_2\zeta_3,\qquad \zeta_3\ge 0 \tag{1.23}$$

$$\bar{\lambda}^2\le\frac{k\bar{k}}{T},\qquad k\ge 0. \tag{1.24}$$

$$\eta\ge 0 \tag{1.25}$$

Определив все необратимые потоки, получаем полную систему гидродинамических уравнений двухжидкостной среды

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0,\qquad \mathbf{j}=\rho_s\mathbf{u}+\rho_l\mathbf{v},$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_i}{\partial t}+(\mathbf{u},\nabla)u_i=-\frac{1}{\rho}\partial_i p-\frac{\rho_l}{2\rho}\partial_i\mathbf{w}^2+\\
+\bar{\lambda}\frac{\rho_l}{\rho_s}\partial_i T+\bar{k}\frac{\rho_l}{\rho_s}(j_i-\rho u_i),\\
\frac{\partial v_i}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)v_i=-\frac{1}{\rho}\partial_i p+\frac{\rho_s}{2\rho}\partial_i\mathbf{w}^2-\\
-\bar{\lambda}\partial_i T-\bar{k}(j_i-\rho u_i)+\frac{1}{\rho_l}\partial_k\left(\eta\left(\partial_k v_i+\partial_i v_k-\frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\right)+\\
+\frac{1}{\rho_l}\partial_i\left(\zeta_1 div(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})+\zeta_2\operatorname{div}\mathbf{v}\right),\\
\frac{\partial S}{\partial t}+\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{j}}{\rho}S-\frac{k}{T}\nabla T-\bar{\lambda}(\mathbf{j}-\rho\mathbf{u})\right)=\frac{R}{T},\\
\rho=\rho_s+\rho_l,\qquad E_0=E_0(\rho,S,\mathbf{j}_0).
\end{gathered}
\tag{1.26}
$$

Диссипативная функция R вычисляется согласно формуле (1.18). Уравнение состояния, включенное в систему (1.26), считается заданным.

Во второй главе диссертации, называемой «**Симметрический и дивергентный виды уравнений двухскоростной гидродинамики**» Данная глава посвящена исследованию вопросов симметризации уравнений математической модели двухжидкостной среды в обратимом гидродинамическом приближении, приведению их к дивергентному виду, а также численному исследованию одномерной системы уравнений двухжидкостной среды.

Известно, что в некоторых случаях квазилинейная система уравнений, описывающая ту или иную математическую модель механики сплошной среды, может быть записана в виде симметрической t гиперболической (по Фридрихсу) системы, т.е. может быть симметризована. Напомним, что квазилинейная система дифференциальных уравнений

$$
B_0(\mathbf{Q})\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Q}+\sum_{K=1}^{3}B_k(\mathbf{Q})\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{Q}=\mathbf{0},\tag{2.1}
$$

где $B_\alpha,\alpha=\overline{0,3}$ - квадратные матрицы порядка n, $\mathbf{Q}=(q_1,...,q_n)^T$ вектор-столбец неизвестных величин, называется симметрической t гиперболической (по Фридрихсу), если:

$$
\begin{cases}
a)B_\alpha=B_\alpha^T,\\
b)B_\alpha>0,
\end{cases}
(\alpha=\overline{0,3})\tag{2.2}
$$

Здесь B_α^T- транспонированная матрица B_α. Понятно, что в силу квазилинейности проверка условий a,b (особенно условия b), как правило, происходит на гладких решениях

$\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t,\mathbf{x})$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ системы (2.1).

Приведем динамические уравнения двухжидкостных сред в обратимом случае к симметрическому виду.

Система уравнений (1.26) в одномерном случае, без учета вязкости и массовой силы, в обратимом приближении принимает следующий вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial(\sigma v)}{\partial x}=0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\sigma}{2\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\rho}{2\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2, \tag{2.6}$$

Где $\rho=\rho_s,\ \sigma=\rho_l,\ \bar{\rho}=\rho+\sigma$ (несколько изменили обозначения).

Показано, что система (2.3) – (2.6) приводится к симметрическому (дивергентному) виду переходом от набора переменных $\{\rho,\sigma,u,v\}$ к $\{\rho,\sigma,w,j\}$ с помощью замены

$$w=u-v,\ j=\rho u+\sigma v\,.$$

Это система имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho\dfrac{j+\sigma w}{\bar{\rho}})=0, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\sigma\dfrac{j-\rho w}{\bar{\rho}})=0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(w\dfrac{j-\rho w}{\bar{\rho}})=0, \\ \dfrac{\partial j}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{j^2}{\bar{\rho}}+\dfrac{\rho\sigma w^2}{\bar{\rho}}+\mathrm{P})=0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Система (2.7) записывается в матричном виде. Доказана теорема.

Теорема 1. Система уравнений движения (2.3) – (2.6) путём введения неизвестных величин $w=u-v,\ j=\rho u+\sigma v$ может быть записана в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=0, \tag{2.8}$$

где

$$U=\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\\ w\\ j\end{pmatrix},\quad F(U)=\begin{pmatrix} \rho\dfrac{j+\sigma w}{\bar{\rho}} \\ \sigma\dfrac{j-\rho w}{\bar{\rho}} \\ w\dfrac{j-\rho w}{\bar{\rho}} \\ \dfrac{j^2}{\bar{\rho}}+\dfrac{\rho\sigma w^2}{\bar{\rho}}+P \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.8) также приводится к следующему матричному уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}=0,$$

где

$$A=\frac{1}{\bar{\rho}^2}\begin{pmatrix} j\sigma+w\sigma^2 & -j\rho+w\rho^2 & \bar{\rho}\rho & \bar{\rho}\rho\sigma \\ -j\sigma-w\sigma^2 & j\rho-w\rho^2 & \bar{\rho}\sigma & -\bar{\rho}\rho\sigma \\ -jw-w^2\sigma & -jw+w^2\rho & \bar{\rho}w & \bar{\rho}j-2\bar{\rho}w\rho \\ \bar{\rho}^2P_{\bar{\rho}}-j^2+w^2\sigma^2 & \bar{\rho}^2P_{\bar{\rho}}-j^2+w^2\rho^2 & 2\bar{\rho}j & 2\bar{\rho}^2P_{\bar{w}}w+2\bar{\rho}w\rho\sigma \end{pmatrix}.$$

Далее исследуется случай, когда уравнение состояния имеет вид:

$$P=P(\bar{\rho}).$$

В этом случае получаем следующую систему уравнений, записанную в матричной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+B\frac{\partial Q}{\partial x}=0,$$

где,

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \sigma\\ u\\ v\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} u & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & \sigma \\ \frac{P_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} & \frac{P_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} & u-\frac{\sigma w}{\bar{\rho}} & \frac{\sigma w}{\bar{\rho}} \\ \frac{P_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} & \frac{P_{\bar{\rho}}}{\bar{\rho}} & \frac{\rho w}{\bar{\rho}} & v-\frac{\rho w}{\bar{\rho}} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы B находятся из характеристического уравнения

$$(v-\lambda)\Big[(u-\lambda)\big\{(u-\lambda)^2-2w(u-\lambda)+\bar{\rho}^{-1}\sigma w^2-P_{\bar{\rho}}\big\}+2\bar{\rho}^{-1}\rho P_{\bar{\rho}}w\Big]=0$$

Таким образом, $\lambda_1=v$ собственное значение матрицы B остальные собственные значения удовлетворяют кубическому уравнению

$$(u-\lambda)^3-2w(u-\lambda)^2+(u-\lambda)(\bar{\rho}^{-1}\sigma w^2-P_{\bar{\rho}})+2\bar{\rho}^{-1}\rho P_{\bar{\rho}}w=0.$$

После обозначений

$$z=\frac{u-\lambda}{\sqrt{P_{\bar{\rho}}}},\quad \alpha=\frac{w}{\sqrt{P_{\bar{\rho}}}}. \tag{2.9}$$

получим уравнение

$$f(z)=z^3-2\alpha z^2-z(1-\bar{\rho}^{-1}\sigma\alpha^2)+2\bar{\rho}^{-1}\rho\alpha=0 \tag{2.10}$$

На рисунке 1 представлен график $f(\mathrm{z})$ для значений $\frac{u}{\sqrt{P_{\bar{\rho}}}}=0.1$, $\frac{v}{\sqrt{P_{\bar{\rho}}}}=0.3$, $\frac{\rho}{\bar{\rho}}=0.2$ и $\frac{\sigma}{\bar{\rho}}=0.8.$

Функция $f(\mathrm{z})$ имеет 3 вещественных корня.

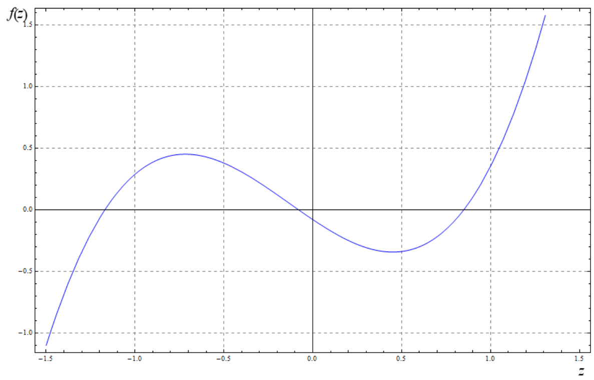


Рис.1. График функции $f(\mathrm{z})$.

Для малых значений α найдем корни уравнения $f(\mathrm{z})$ путем разложения $z(\alpha)$ в ряд по степеням α.

Пусть

$$z(\alpha) = \mathrm{z}_0 + \alpha\beta + \ldots \tag{2.11}$$

Подставляя выражение (2.11) в уравнение (2.10), считая α достаточно малым, придем к следующему уравнению (сохранены два члена).

$$\alpha^0(\mathrm{z}_0^3 - \mathrm{z}_0) + \alpha^1(3\mathrm{z}_0^2\beta - 2\mathrm{z}_0^2 - \beta + 2\bar{\rho}^{-1}\rho) = 0.$$

Тождество достигается в случае, если коэффициенты при степенях α равны нулю. Отсюда получаем

$$\lambda_1 = v,\ \lambda_2 = u - 2\bar{\rho}^{-1}\rho w,\ \lambda_3 = u - \sqrt{P_{\bar{\rho}}} - \bar{\rho}^{-1}\sigma w,$$

$$\lambda_4 = u + \sqrt{P_{\bar{\rho}}} - \bar{\rho}^{-1}\sigma w.$$

Собственные числа матрицы B с точностью до замены, при условии

$$P = P(\bar{\rho}),$$

являются собственными числами матрицы A, отвечающей матричному представлению уравнений (2.4) – (2.7) для более общего уравнения состояния. В терминах дивергентных переменных собственные значения представляются в виде

$$\lambda_1 = \frac{j - \rho w}{\bar{\rho}},\quad \lambda_2 = \frac{j + \sigma w - 2\rho w}{\bar{\rho}},\ \lambda_3 = \frac{j}{\bar{\rho}} - \sqrt{P_{\bar{\rho}}},\ \lambda_4 = \frac{j}{\bar{\rho}} + \sqrt{P_{\bar{\rho}}}.$$

Проведенные выше вычисления позволяют применить для численного решения системы уравнений (2.8) HLL (Harten, Lax, Leer)-метод:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0,$$

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\tau}{h}(\mathcal{F}_{i+1/2}^n - \mathcal{F}_{i-1/2}^n) = 0,\ i = \overline{0,I},\ n = \overline{0,N}$$

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n = \frac{M_{i+1}^n F_i^n - m_i^n F_{i+1}^n + M_{i+1}^n m_i^n (U_{i+1}^n - U_i^n)}{M_{i+1}^n - m_i^n}$$

$$\mathcal{F}_{i-1/2}^n = \frac{M_i^n F_{i-1}^n - m_{i-1}^n F_i^n + M_i^n m_{i-1}^n (U_i^n - U_{i-1}^n)}{M_i^n - m_{i-1}^n}$$

$$M_{i+1}^n = \max(\lambda_{k,i+\frac{1}{2}}^n, 0),\ k = \overline{1,4} \qquad m_i^n = \min(\lambda_{k,i+\frac{1}{2}}^n, 0),\ k = \overline{1,4}$$

Рассмотрим случай, когда уравнение состояния имеет следующие выражение:

$$P = \bar{\rho}^3.$$

Вычисление собственных значений производится согласно следующим формулам:

$$\lambda^n_{1,i+\frac{1}{2}} = \frac{j^n_{i+1/2} - \rho^n_{i+1/2} w^n_{i+1/2}}{\rho^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2}},$$

$$\lambda^n_{2,i+\frac{1}{2}} = \frac{j^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2} w^n_{i+1/2} - 2\rho^n_{i+1/2} w^n_{i+1/2}}{\rho^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2}},$$

$$\lambda^n_{3,i+\frac{1}{2}} = \frac{j^n_{i+1/2} - \sqrt{3}(\rho^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2})^2}{\rho^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2}},$$

$$\lambda^n_{4,i+\frac{1}{2}} = \frac{j^n_{i+1/2} + \sqrt{3}(\rho^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2})^2}{\rho^n_{i+1/2} + \sigma^n_{i+1/2}},$$

где

$$\rho^n_{i+1/2} = \frac{\rho^n_i + \rho^n_{i+1}}{2}, \quad \sigma^n_{i+1/2} = \frac{\sigma^n_i + \sigma^n_{i+1}}{2},$$

$$w^n_{i+1/2} = \frac{w^n_i + w^n_{i+1}}{2}, \quad j^n_{i+1/2} = \frac{j^n_i + j^n_{i+1}}{2}.$$

При значении $i = 0$:

$$U^{n+1}_0 = U^n_0 - \frac{\tau}{h}(\mathcal{F}^n_{1/2} - \mathcal{F}^n_{-1/2}) = 0,$$

$$\mathcal{F}^n_{1/2} = \frac{M^n_1 F^n_i - m^n_0 F^n_1 + M^n_1 m^n_0 (U^n_1 - U^n_0)}{M^n_1 - m^n_0},$$

$$\mathcal{F}^n_{-1/2} = \frac{M^n_0 F^n_{-1} - m^n_{-1} F^n_0 + M^n_0 m^n_{-1} (U^n_0 - U^n_{-1})}{M^n_0 - m^n_{-1}}.$$

Будем считать индекс $-1 = 0,$ тогда

$$\mathcal{F}^n_{-1/2} = F^n_0, \quad U^{n+1}_0 = U^n_0 - \frac{\tau}{h}(\mathcal{F}^n_{1/2} - \mathrm{F}^n_0) = 0.$$

При значении $i = I$:

$$U^{n+1}_I = U^n_I - \frac{\tau}{h}(\mathcal{F}^n_{I+1/2} - \mathcal{F}^n_{I-1/2}) = 0,$$

$$\mathcal{F}^n_{I+1/2} = \frac{M^n_{I+1} F^n_i - m^n_I F^n_{I+1} + M^n_{I+1} m^n_I (U^n_{I+1} - U^n_I)}{M^n_{I+1} - m^n_I},$$

$$\mathcal{F}^n_{I-1/2} = \frac{M^n_I F^n_{I-1} - m^n_{I-1} F^n_I + M^n_I m^n_{I-1} (U^n_I - U^n_{I-1})}{M^n_I - m^n_{I-1}}.$$

Будем считать индекс $I + 1 = I,$ тогда

$$\mathcal{F}^n_{I+1/2} = F^n_I, \quad U^{n+1}_I = U^n_I - \frac{\tau}{h}(\mathcal{F}^n_I - \mathcal{F}^n_{I-1/2}) = 0,$$

$$\rho_{I+1/2}^{n} = \rho_{I}^{n}, \qquad \sigma_{I+1/2}^{n} = \sigma_{I}^{n},$$
$$w_{I+1/2}^{n} = w_{I}^{n}, \qquad j_{I+1/2}^{n} = j_{I}^{n}.$$

Нетрудно убедиться, что для постоянных значений плотностей и скоростей, применение данного метода сохранит значения постоянными. Данный факт был проверен на тестовом расчете.

Был произведен численный расчет для следующих начальных данных

$$I = 21,\ N = 200,\ h = 0.1,$$
$$\rho_i^0 = 0.7\bar{\rho}_i^0,\ \sigma_i^0 = 0.3\bar{\rho}_i^0,\ u_i^0 = 0,\ v_i^0 = 0,$$
$$\bar{\rho}_i^0 = \begin{cases} -2(ih-1)^3 - 3(ih-1)^2 + 1.1,\ i < I/2, \\ 2(i-\dfrac{I}{2})^3 h^3 - 3(i-\dfrac{I}{2})^2 h^2 + 1.1,\ i \ge \dfrac{I}{2}, \end{cases}$$
$$\tau_i^n = 0.25h / M_{I+1}^n$$

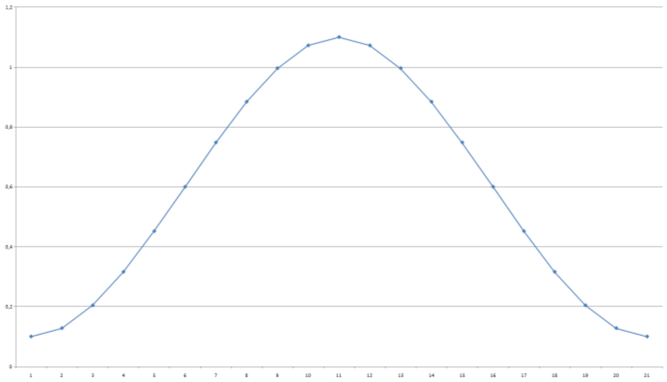


Рис.2. Плотность $\bar{\rho}^0$

На рисунке 3 изображен график, представляющий собой динамику изменения функции ρ на одном пространственном интервале

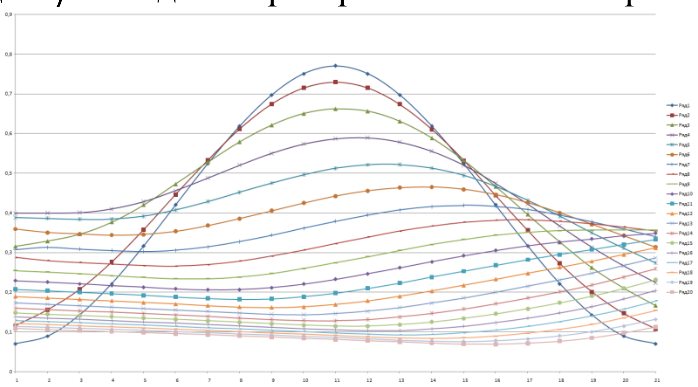


Рис.3. Изменение ρ.

Одномерным аналогом уравнений Навье-Стокса для сжимаемых жидкостей (без учета градиента давления) можно считать систему **уравнений типа Бюргерса**, которая представляет собой систему нелинейных уравнений конвекции-диффузии

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} - \tilde{b}(u - v), \tag{2.12}$$
$$v_t + vv_x = \tilde{\nu} v_{xx} + b(u - v), \tag{2.13}$$

где величины u и v можно рассматривать, как скорости подсистем, составляющих двухскоростной континуум с соответствующими парциальными плотностями ρ_1 и ρ_2, $\rho = \rho_1 + \rho_2$ - общая плотность континуума, $\tilde{b} = \frac{\rho_2}{\rho_1} b$, b-коэффициент межкомпонентного трения, который является аналогом коэффициента Дарси для пористых сред. Положительные константы ν и $\tilde{\nu}$ играют роль кинематических вязкостей подсистем. Система (2.12), (2.13) от системы уравнений двухскоростной гидродинамики в диссипативном приближении отсутствием давления и условиями несжимаемости. Поэтому этот случай будем называть двухскоростной гидродинамикой без давления.

Рассмотрим для системы (2.12), (2.13) в полосе $\Gamma_{[0,T]} = \{(t,x): 0 \le t \le T, -\infty < x < \infty\}$ задачу Коши со следующими начальными данными

$$u\big|_{t=0} = u_0(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.14}$$

$$v\big|_{t=0} = v_0(x), \qquad -\infty < x < \infty \tag{2.15}$$

Нас будут интересовать гладкие решения задачи Коши для системы уравнений типа Бюргерса (2.12), (2.13). При этом считаем, что начальные данные $u_0(x)$, $v_0(x)$ считаются бесконечно дифференцируемые с компактными носителями (финитными). Рассмотрим функции

$$\varphi = exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int u dx\right],$$

$$\psi = exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}\int v dx\right].$$

При этом функции u и v выражаются через функции φ и ψ по формулам

$$u = -2\nu\frac{\varphi_x}{\varphi},\ v = -2\tilde{\nu}\frac{\psi_x}{\psi}.$$

В терминах функции φ и ψ система динамических уравнений (2.12) и (2.13) примет вид

$$\left(\frac{\varphi_t}{\varphi}\right)_x = \left(\nu\frac{\varphi_{xx}}{\varphi}\right)_x - \frac{\tilde{b}}{\nu}\left(\ln\frac{\varphi^{\nu}}{\psi^{\tilde{\nu}}}\right)_x,\ \left(\frac{\psi_t}{\psi}\right)_x = \left(\tilde{\nu}\frac{\psi_{xx}}{\psi}\right)_x + \frac{b}{\tilde{\nu}}\left(\ln\frac{\varphi^{\nu}}{\psi^{\tilde{\nu}}}\right)_x$$

Решение задачи Коши для данной системы с начальными данными

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\psi\big|_{t=0} = \psi_0(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

имеет вид

$$\varphi(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} G^{\nu}(x,\xi,t)\varphi_0(\xi)d\xi - $$
$$-\frac{\tilde{b}}{\nu}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G^{\nu}(x,\xi,t-\tau)\varphi(\xi,\tau)(\nu\ln\varphi(\xi,\tau) - \tilde{\nu}\ln\psi(\xi,\tau))d\xi d\tau ,$$

$$\psi(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty} G^{\tilde{\nu}}(x,\xi,t)\psi_0(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{b}{\tilde{\nu}}\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G^{\tilde{\nu}}(x,\xi,t-\tau)\psi(\xi,\tau)(\nu\ln\varphi(\xi,\tau)-\tilde{\nu}\ln\psi(\xi,\tau))d\xi d\tau$$

где $G^{\nu}(x,\xi,t)-$ есть фундаментальное решение одномерного уравнения распростренения тепла с коэффициентом теплопроводности ν. Доказана теорема.

Теорема 2. Пусть начальные функции $u_0(x)$, $v_0(x)$ финитны. Тогда для решения задачи Коши (2.12)-(2.15) справедливы формулы

$$u(t,x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F(u_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F(u_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}-$$

$$-\frac{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1+\frac{\tau}{t-\tau}}\left(u(t,x)-\frac{x-\xi}{t-\tau}\right)F_2(u,v,x,\xi,t,\tau)d\xi d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F(u_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}, \qquad (2.16)$$

$$v(t,x)=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{t}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F(v_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F(v_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}-$$

$$-\frac{\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{1+\frac{\tau}{t-\tau}}\left(v(t,x)-\frac{x-\xi}{t-\tau}\right)G_2(u,v,x,\xi,t,\tau)d\xi d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F(v_0(\xi),x,\xi,t)\right]d\xi}, \qquad (2.17)$$

где функции F, F_2 и G_2 определены по следующими формулами [104]

$$F_2(u,v,x,\xi,t,\tau)=\frac{\tilde{b}}{2\nu}\{F_1(u,x,\xi,t,\tau)-F_1(v,x,\xi,t,\tau)\}exp\left[-\frac{1}{2\nu}F_1(u,x,\xi,t,\tau)\right],$$

$$G_2(u,v,x,\xi,t,\tau)=\frac{b}{2\tilde{\nu}}\{F_1(v,x,\xi,t,\tau)-F_1(u,x,\xi,t,\tau)\}exp\left[-\frac{1}{2\tilde{\nu}}F_1(u,x,\xi,t,\tau)\right],$$

$$F_1(u,x,y,t,\tau)=\frac{(x-y)^2}{2(t-\tau)}+\int_{-\infty}^{y}u(\tau,\eta)d\eta,$$

$$F(u,x,y,t)=\frac{(x-y)^2}{2t}+\int_{-\infty}^{y}u(t,\eta)d\eta.$$

Третья глава называется **«Автомодельные решения системы уравнений двухжидкостной среды в обратимом приближении».** Данная глава посвящена исследованию одномерной системы уравнений двухжидкостной среды с достаточно общим уравнением состояния с помощью теории групп Ли и алгебры Ли.

Рассмотрим систему уравнений (2.3) – (2.6) с уравнением состояния:

$$P = P(\bar{\rho}, (u-v)^2).$$

Для удобства введем обозначения

$$\bar{\rho} = \rho_s + \rho_l,\ \rho = \rho_s,\ \sigma = \rho_l,\ \bar{w} = w^2,\ w = u - v.$$

Тогда придём к система уравнений

$$\rho_t + \rho_x u + u_x \rho = 0, \qquad \sigma_t + \sigma_x u + v_x \rho = 0,$$
$$u_t + uu_x + \bar{\rho}^{-1}(\mathrm{P}_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + w(u_x - v_x)(2\mathrm{P}_{\bar{w}} + \sigma)) = 0,$$
$$v_t + vv_x + \bar{\rho}^{-1}(\mathrm{P}_{\bar{\rho}}(\rho_x + \sigma_x) + w(u_x - v_x)(2\mathrm{P}_{\bar{w}} - \rho)) = 0.$$

Построен базис ядра основной алгебры Ли одномерной системы уравнений двухжидкостной среды в обратимом приближении, образуемый операторами

$$X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial t},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x},\ X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}.$$

Изучены подалгебры ядра основной алгебры Ли.

Для построения решения, инвариантного относительно данной подгруппы, необходимо найти полный набор функционально независимых инвариантов этой подгруппы. Применяя к полученному инвариантному решению конечные преобразования, соответствующие допускаемым группам, получим более общее многопараметрическое решение.

Найдены различные инвариантные решения рассматриваемой системы уравнений.

5.1.1.а. Для оператора: $X_1 + q_1 X_4 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} + q_1 t\frac{\partial}{\partial u} + q_1\frac{\partial}{\partial v}$

$$\frac{\partial \rho_s u}{\partial y} - q_1\frac{\partial \rho_s}{\partial y} - \rho_s = 0, \quad \frac{\partial \rho_l v}{\partial y} - q_1\frac{\partial \rho_l}{\partial y} - \rho_l = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(u - q_1) - u = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho_l}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}(v - q_1) - v = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right).$$

Здесь $y = q_1 \ln t - \frac{x}{t},\ q_1$ – вполне определенное число.

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.1.б. Для оператора: $X_1 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x}$

$$\frac{\partial(\rho_s u)}{\partial y} - y\frac{\partial \rho_s}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_l v)}{\partial y} - y\frac{\partial \rho_l}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u-y) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho_l}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(v-y) = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\rho_s}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u-v)^2\right).$$

Здесь $y = \frac{x}{t}$, автомодельная переменная.

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.2.а. Для оператора: $X = X_2 + q_2 X_4 = \frac{\partial}{\partial t} + q_2 t\frac{\partial}{\partial x} + q_2\frac{\partial}{\partial u} + q_2\frac{\partial}{\partial v}$

$$q_2 - \frac{u\partial u}{\partial y} = \frac{vu}{c_1 u + c_2 v}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{c_2 u}{2(c_1 u + c_2 v)}\frac{\partial (u-v)^2}{\partial y},$$

$$q_2 - \frac{v\partial v}{\partial y} = \frac{vu}{c_1 u + c_2 v}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{c_2 v}{2(c_1 u + c_2 v)}\frac{\partial (u-v)^2}{\partial y}.$$

Здесь $y = \frac{q_2 t^2}{2} - x$, автомодельная переменная.

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.2.б. Для оператора: $X_2 = \frac{\partial}{\partial t}$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{vu}{c_1 u + c_2 v}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{c_2 u}{2(c_1 u + c_2 v)}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2,$$

$$v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{vu}{c_1 u + c_2 v}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{c_2 v}{2(c_1 u + c_2 v)}\frac{\partial}{\partial x}(u-v)^2.$$

Инвариантные решения находятся в зависимости от задания функции P.

5.1.3. Для оператора $X = \frac{\partial}{\partial x}$

$$\rho_s = c_1, \quad \rho_l = c_2, \quad u = c_3, \quad v = c_4.$$

Не представляет интереса

5.1.4. (Для оператора: $X_4 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$)

$$\rho_s = c_1/t, \quad \rho_l = c_2/t, \quad u = c_3/t, \quad v = c_4/t.$$

Более общее многопараметрическое решение представляется в виде

$$\rho_s = \frac{c_1}{a_1 t + a_2}, \qquad \rho_l = \frac{c_2}{a_1 t + a_2},$$

$$u = \frac{c_3}{a_1 t + a_2}, \qquad v = \frac{c_4}{a_1 t + a_2}.$$

Рассмотрены **также двумерные и трехмерные подалгебры и найдены советующие инвариантные решения.**

Для **четырехмерная подалгебры**

$$\langle X_1, X_2, X_3, X_4 \rangle$$

инвариантного решения нет.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе полученных в диссертации научных результатов приведены следующие выводы:

1. Усовершенствована термодинамически согласованная математическая модель динамики двухжидкостной среды с учетом равновесия фаз по давлению.
2. Показано, что полученная система дифференциальных уравнений в одномерном случае является гиперболической по Фридрихсу.
3. Проведен спектральный анализ одномерной системы динамических уравнений двухжидкостной среды с учетом равновесия фаз по давлению.
4.Численно решена система одномерных уравнений двухжидкостной среды на основе метода HHL.
5. Получена система уравнений типа Бюргерса, как частный случай двухскоростной гидродинамики. Данная система отличается от системы Навье-Стокса для двухжидкостной среды отсутствием давления и условиями несжимаемости.
6. Рассмотрена задача Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса. Ее решение сведена к решению системы нелинейных уравнений Вольтерра второго рода. Показано, что при исчезновении коэффициента межфазного трения, построенные решения для каждой из подсистем переходят к известному решению задачи Коши для уравнения Бюргерса.
7. Проведен групповой анализ системы уравнений в частных производных, описывающей динамику двухжидкостной среды в бездиссипативном приближении при условии равенства давления в фазах.
8. Найдено ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений движения двухжидкостной среды. Для данного ядра найдены оптимальные системы подалгебр.
9. Получены все системы обыкновенных дифференциальных уравнений для инвариантных и частично инвариантных решений. Найдены инвариантные решения системы уравнений относительно одномерных подалгебр из оптимальной системы.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

MAMASOLIYEV BAKHTIYOR JURAMIRZAYEVICH

MATHEMATICAL MODELING OF NON-LINEAR ONE-DIMENSIONAL WAVE PROPAGATION PROCESSES IN A SINGLE-PRESSURE TWO-FLUID MEDIUM

05.01.07 – Mathematical modelling. Numerical methods and complexes of applications (Physical and mathematical sciences)

CONTENT OF DISSERTATION ABSTRACT OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2020

The theme of the philosophy doctor (PhD) dissertation was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under № B2019.2.PhD/FM90.

Dissertation has been prepared at the National University of Uzbekistan.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and an the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor: **Imomnazarov Kholmatzon Khudaynazarovich**
doctor of physical and mathematical sciences,
chief Researcher professor (Russia, ICMMG)

Official opponents:
doctor of physical and mathematical sciences, professor
(Russia, RANEPA)

doctor of physical and mathematical sciences, professor

Leading organization: **Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies at the**

Defense will take place on "18" june 2020 at 16^{00} at the meeting of Scientific council number Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 at the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is possible to review in Information-resource centre at the National University of Uzbekistan (registered № 43) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "15" june 2020.
(mailing report № on 18 2020).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

A.R.Marakhimov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

M.M.Aripov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD thesis)

The aim of the research is a theoretical and numerical study of one-dimensional dynamic processes of nonlinear wave propagation in a two-fluid medium with a common pressure, as well as obtaining a formula for solving the Cauchy problem in the dissipative case for a system of equations of Burgers type also Finding invariant and partially invariant solutions in the case when the equation of state is a function of density and relative velocity.

The research objectives are

derivation of the mathematical model of the propagation of nonlinear waves in a two-fluid medium with one pressure.

to symmetry the system of obtained differential equations in the one-dimensional case.

conduct a spectral analysis of a one-dimensional system of equations of a two-fluid medium with a common pressure.

numerically investigate the one-dimensional system of equations of a two-fluid medium with one pressure.

consider the Cauchy problem for a one-dimensional system of equations of Burgers type. Reduce it to a system of nonlinear Voltrerra equations of the second kind.

to study the group properties of the considered one-dimensional system of equations of a two-fluid medium with one pressure.

find the basis of the core Lie algebra under consideration for a one-dimensional system of equations.

search for a system of differential equations for invariant and partially invariant solutions.

The scientific novelty of the resrach is as follows:

the mathematical model of the motion of a two-fluid medium with a common pressure has been improved.

the symmetric *t*-hyperbolic form of the system of differential equations of the constructed mathematical model of a two-fluid medium with one pressure is obtained.

numerical scheme for solving a one-dimensional system of equations of a two-fluid medium with one pressure.

the formula for a solution to the Cauchy problem for a one-dimensional system of equations of Burgers type in the form of a system of nonlinear Voltrerra equations of the second kind is obtained.

the group properties of a one-dimensional system of equations of a two-fluid medium with pressure equilibrium are found.

the basis of the core of the basic Lie algebra of the one-dimensional system of equations of two-speed hydrodynamics with common pressure are obtained.

Implementation of the research results. The nonlinear mathematical model of the two-fluid medium proposed in the work was used in numerical modeling of direct problems on the topic of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS for 2016-2018 “Methods of creating, researching and identifying mathematical models of the Earth”, state registration number 1.3.1.3. and RFBR grant No. 18-51-41002 "Mathematical modeling of a thermodynamically consistent mathematical model of two-phase media in the dissipative approximation with cross effects", as well as using the above mathematical model, the group properties of the dynamic model of two-fluid media were investigated.

The structure and volume of the research work. The dissertation work consists of introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 109 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I-бўлим (1 часть; part 1)

1. Мамасолиев Б.Ж., Васильев Г.С., Имомназаров Х.Х., Маматкулов М.М. Связь между системой уравнений Монжа-Ампера и ураненими двухскротной гидродинамики в случае постоянстве насыщенности фаз// Вестник НУУз, серия точные науки, 2015, № 2/1, С. 20-23.(01.00.00, №8)
2. B.J.Mamasoliyev, G.S.Vasiliev, Kh.Kh.Imomnazarov. On one system of the Burgers equations arising in the two-velocity hydrodynamics// Russian academy of sciences Siberian branch Bulletin of the Novosibirsk computing center Issue: 2015, №15, p.67-76. (01.00.00, №1)
3. Мамасолиев Б.Ж., Васильев Г.С., Имомназаров Х.Х., Султанов М.А. Од одной системе уравнений типа Бюргерса, Возникающей в двухскоростной гидродинамике// Доклады Академии наук РУз, серия математика технические науки, естествознание, 2016, № 5, С. 3-7. (01.00.00, №7)
4. B.J.Mamasoliyev, G.S.Vasiliev, Kh.Kh.Imomnazarov. On one system of the Burgers equations arising in the two-velocity hydrodynamics// J.Phys.: Conf.Ser. 2016, Vol. 697, 012024, P 1-8. (№ 3 Scopus IF=0.51)
5. Мамасолиев Б.Ж., Имомназаров Х.Х. Об одном частном решении системы типа Навье-Стокса// Узбекский математический журнал 2016, №4, С 68-72. (01.00.00, №6)
6. B.J.Mamasoliyev, G.S.Vasiliev, Kh.Kh.Imomnazarov, M.Kalimoldayev. Cauchy Problem for System of the Burgers Equations Arising in the Two-velocity Hydrodynamics// Math. Model. Nat. Phenom., 2017, Vol. 12, №3, P. 134–138 (№ 3 Scopus IF=1.21)
7. Мамасолиев Б.Ж. Групповые свойства системы уравнений двухжидкостной среды с одним давлением// Проблемы вычислительной и прикладной математики, 2018, №1(13), С.16-20 (01.00.00, №9)
8. Б.Ж.Мамасолиев, Г.С.Васильев, Жиан-Ган Тан Инвариантные подмодели системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению// Сибирские электронные математические известия, 2018, том 15, С.585-602 (№ 3 Scopus IF=0.38)

II бўлим (2 Часть; Part 2)

1. № DGU 07243 UZ. Численное решение системы уравнений распространения нелинейных одномерных волн ва двухжидкостной среде с одним давлением / Б.Ж.Мамасолиев. –№ DGU 2019 1482; Заяв. 18.11.2019.
2. Мамасолиев Б.Ж. Об одной смешанной задаче для гиперболического уравнения третьего порядка// Материалы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий-Аль-Хорезми-2014» 15-17 сентября 2014г., Самарканд, С. 53-54.
3. Мамасолиев Б.Ж., Имомназаров Х.Х. «Об одном частном решении системы типа Навье-Стокса// Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 15-17 апреля 2015 г., Ташкент, С 165-167.

4. Мамасолиев Б.Ж., Имомназаров Х.Х. Оценка устойчивости задачи Коши для одномерной системы уравнений типа Бюргерса// Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения» 15-17 апреля 2015 г., Ташкент, С 167-168.
5. Мамасолиев Б.Ж. Симметризация одномерной системы уравнений двухжидкостной системы с одном давлением// Toshkent shahridagi Turin politexnika Universiteti “Dinamik sistemalarning dolzarb muammolari va ularning tadbiqlari” Respublika ilmiy konferensiyasi (xorijiy olimlar ishtirokida) materiallari, 1 – 3 May, 2017 yil, 136-137 b.
6. Мамасолиев Б.Ж., Имомназаров Х.Х. Об одной системы типа Бюргерса возникающей в двухжидкостной среде// “Contemporary problems in mathematics and physics” Uzbek-Israel International conference, October 6-10, 2017, Tashkent, P. 170-171
7. Мамасолиев Б.Ж., Имомназаров Х.Х. Об одном частном решении системы уравнений возникающей двухжидкостной среде// “Contemporary problems in mathematics and physics” Uzbek-Israel International conference, October 6-10, 2017, Tashkent, P. 172-173
8. B.J.Mamasoliev, B.Kh.Imomnazarov, G.S.Vasiliev, Kh.Kh.Imomnazarov. A symmetric form of A one-dimensional system of equations for A two-fluid medium with phase equilibrium in terms of pressure// Abstracts of the VI International scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al Khorazmiy 2018” September 13-15, 2018, Tashkent P.149.
9. Б.Ж.Мамасолиев, Г.С.Васильев. Ядро основных групп Ли преобразований одномерной системы уравнений двухскоростной гидродинамики// Интерэкспо гео-сибирь XIV Международный научный конгресс «Дистанционные методы зондирования земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология» Т.1. Новосибирск СГУГиТ 2018г., С.188-194.
10. B.Mamasoliev, A.Kholmurodov, N.Dilmuradov. Symmetrization of one-dimensional system the two-speed hydrodynamics equations// «Актуальные проблемы и применения анализа» научной конференции 4-5 октября 2019 г. Карши С. 110-112.
11. Мамасолиев Б.Ж., Васильев Г.С., Имомназаров Ш.Х. Численное решение начально-краевой задачи для одномерной системы уравнений двухжидкостной среды// “Неклассические уравнения математической физики и их приложения” Узбекско-Российская научная конференция 24-26 октября 2019 г. Ташкент С. 284-285.
12. Мамасолиев Б.Ж., Холмуродов А.Э., Дилмуродов Н. Численное решение системы уравнений одномерного движения двухжидкостной сплошной среды общим давлением// “Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий” Международной конференции 14-15 ноября 2019 г. Ташкент С. 112-113.

Автореферат Ўзбекистон Миллий университетининг «ЎзМУ хабарлари» журнали таҳририятида 2020 йил ___ июнда ўтказилди.

Босишга рухсат этилди ___.06.2020. Ҳажми 4,0 босма табоқ.
Бичими 60x84 1/16. Адади 100 нусха. Буюртма 115.

М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди