ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ТУРСУНОВ БАЙРАМАЛИ АКБАРОВИЧ

НОМАНФИЙ ЭГРИЛИКЛИ КЎПХИЛЛИКЛАРДА РИМАН СУБМЕРСИЯЛАРИНИНГ ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ–2020

УДК: 514.763.2

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ТУРСУНОВ БАЙРАМАЛИ АКБАРОВИЧ

НОМАНФИЙ ЭГРИЛИКЛИ КЎПХИЛЛИКЛАРДА РИМАН СУБМЕРСИЯЛАРИНИНГ ГЕОМЕТРИЯСИ

01.01.04 – Геометрия ва топология

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ТОШКЕНТ–2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM502 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон миллий университетида ва Қарши давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (www.ik-fizmat.nuu.uz) ва «Ziyonet» ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Нарманов Абдигаппар Якубович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Заитов Адилбек Атаханович** физика-математика фанлари доктори
	Каипназарова Гулжахон Хожаназаровна физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Тошкент давлат транстпорт университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «4» август соат 10^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университстининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (53 рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2020 йил «28» июль куни тарқатилди.
(2020 йил «27» июль даги 1 рақамли реестр баённомаси).

А. Садуллаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор,
академик

Н.К. Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Б.Бешимов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д.

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида фундаментал ва амалий фанлар соҳасида олиб борилаётган кўпгина илмий ва амалий тадқиқотлар геометрик методлардан, жумладан қатламалар назарияси методлари ва натижаларидан фойдаланади. Қатламалар назарияси геометриянинг нисбатан янги бўлимларидан бўлиб, француз олимлари томонидан фундаментал асослари қурилган. Улар қатламалар назарияси соҳасида фундаментал натижаларга эришдилар, бу эса ушбу назариянинг фан ва техниканинг бошқа соҳаларида аҳамиятини тушунишга имкон берди. Хусусан, француз математиклари қатламалар голономияси группалари, қатламалар учун Эресман боғланиши, қатламларнинг лимит тўпламлари ўргандилар, ҳамда бу тушунчалардан фойдаланиб қатламанинг локал ва глобал турғунлиги ҳақидаги теоремаларни исботладилар. Кейинчалик бу назария АҚШ, Япония, Полша ва Россияда ривожланди. Америкалик математиклар Эресман боғланиши киритилган қатламалар, хусусан тўла геодезик ва риман қатламалари геометрияси бўйича муҳим натижаларни олишган, Токио университети математиклари қатламанинг топологик хоссаларини ўрганишган. Россиялик олимлар коўлчами бирга тенг қатламалар геометрияси бўйича фундаментал натижаларга эришдилар.

Ҳозирги вақтда дунёда замонавий геометрия актуал муаммоларидан бири субмерсия сатҳ сиртлари ҳосил қилган қатламалар геометриясини ўрганишдан иборат. Субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометриясининг амалий фанларнинг кўплаб соҳаларида, хусусан физикада турли хил тадбиқлари мавжуд. Қатламалар геометрияси натижаларини фаннинг бошқа соҳаларида, хусусан механика, динамик системалар назарияси масалаларини ечиш учун қўллаш актуал илмий йўналиш ҳисобланади.

Мамлакатимизда табиий фанларни, хусусан математиканинг фундаментал ва амалий йўналишларини ривожлантиришга катта эътибор қаратилмоқда. Геометрия замонавий математиканинг қадимий ва муҳим таркибий қисми сифатида замонавий математикани тадқиқ қилишда кучли восита бўлиб хизмат қилади. Дунёнинг кўплаб мамлакатларида жадал ривожланаётган қатламалар назариясини ўрганишга, хусусан, субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар геометриясини ўрганишга, вектор майдонлар орбиталари ҳосил қилган сингуляр қатламалар геометрияси ва топологиясини ўрганишга, қатламали кўпхилликлар изометриялари группасини ўрганишга алоҳида этибор қаратилди. Математика фанларининг устувор йўналишлари ҳисобланган "алгебра, динамик тизимлар назарияси, геометрия ва топология ва шу каби" ихтисосликлар бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш фундаментал тадқиқотларнинг асосий вазифаси сифатида қаралади[1]. Ушбу қарорнинг бажарилишида қатламалар назариясининг ривожланиши ва бошқа фан тармоқларига тадбиқи муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантриш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида” ги ПФ-4947 Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-Қарори ва 2019 йил 9 июлдаги “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4387-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқот мавзуси ва объекти, мавзу юзасидан ўрганилган муаммолар муайян даражада ҳисса қўшади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Максимал рангли дифференциалланувчи акслантиришлар математиканинг турли бўлимларида, хусусан Риман геометриясида муҳим аҳамиятга эга. У иккита синф – ботиришлар ва субмерсиялар синфидан ташкил топган. Максимал рангли дифференциалланувчи акслантиришларнинг муҳим синфларидан бири ботиришдир. Риман геометрияси пойдо бўлгандан бери ботириш жадал ўрганилмоқда. Уч ўлчамли Евклид фазосига жойлаштирилган сиртлар риман кўпхиллигига содда мисол бўлади. Шунинг учун изометрик ботиришлар ва жойлаштиришлар дифференциал геометрияси яхши ўрганилган ва дифференциал геометриядан кўплаб ўқув адабиётларида етарлича акс эттирилган. Ботириш тушунчасига қўшма субмерсия тушунчаси йигирманчи асрнинг иккинчи ярмида шаклланди. Субмерсиянинг дифференциал геометрияси биринчи марта R. Hermann ва B. O'Neil ишларида баён қилинган.

Субмерсиялар геометриясини, хусусан, риман субмерсиялари геометриясини ўрганиш замонавий риман геометриясининг барча бўлимларида риман субмерсияларининг қўлланилиши туфайли жуда самарали бўлди. Худди фундаментал тенгламалар каби Риман субмерсияларининг фундаментал хоссалари, эгрилик хоссалари J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschap лар томонидан олинган. Риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламалар геометрияси ва риман субмерсиялари учун геодезик чизиқнинг сақланиши хоссаси R. Escobales, B.L. Reinhart ишларида ўрганилган. Ҳозирда субмерсия тушунчаси ва субмерсиялар геометриясини ўрганишда асосий тушунчалар риман геометрияси дарсликларига киритилган, улар нафақат геометрияда балки механика, назарий физика, нисбийлик назарияси каби барча тегишли фанларда қўлланилади. Риман субмерсиясининг физика ва механикага тадбиқлари италиялик математиклар M. Falcitelli, A.M. Pastore, S.Ianus ишларида ўрганилган.

Республикамиз олимлари профессор А.Я. Нарманов ва унинг шогирдлари А.Байтураев, Г.Каипназарова изланишларида риман субмерсиялари ҳосил қилган евклид фазосидаги қатламаларнинг тўлиқ классификацияси ва қатламнинг секцион эгрилиги билан боғлиқ геометрик характеристикалари олинган, А.С. Шариповнинг ишларида субмерсиялар ҳосил қилган қатламалар изометриялари группаси ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг Ф4-04 “Қатламали кўпхилликларнинг геометрияси ва топологияси” (2012-2016 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади эгрилиги номанфий кўпхилликларда риман субмерсиялари геометриясини ўрганишдан ва риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламалар геометриясини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилар:

номанфий эгриликли кўпхилликда берилган метрик функциялар сатҳ сиртлари ҳосил қилган қатламалар секцион эгрилигини топиш;

ҳар бир компонентаси метрик функция бўладиган субмерсиялар ҳосил қилган қатлама секцион эгрилигини топиш;

Киллинг вектор майдонлари орбиталари устида риман субмерсияларини қуриш ва улар ҳосил қилган қатлама қатламлари бош эгриликлари локал ўзгармаслигини исботлаш.

Тадқиқот объекти риман субмерсияи, қатламали кўпхилликлар, изопараметрик қатламалар, Киллинг вектор майдонлари, вектор майдонлар орбитасидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети риман субмерсиялари геометрияси, Киллинг вектор майдонлари орбиталари хоссаларини, риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламали кўпхиллик ва қатлам эгриликлари орасидаги боғланишни тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация тадқиқот ишида дифференциал геометрия, дифференциал топология, риман геометрияси ва қатламалар назарияси методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Секцион эгрилиги ўзгармас номанфий кўпхилликда берилган компоненталари метрик функциялардан иборат субмерсия ҳосил қилган қатламанинг ҳар бир қатлами номанфий (мусбат) секцион эгриликли кўпхиллик бўлиши исботланган;

Уч ўлчамли торда икки ўлчамли сферадаги Киллинг вектор майдонлар орбитаси устида қурилган риман субмерсиясининг бир ўлчамли риман қатлама ҳосил қилиши исботланган;

Киллинг вектор майдонлари орбитасида шу орбита устида қурилган субмерсия риман субмерсияси бўладиган риман метрикаси мавжудлиги исботланган.

Риман субмерсиясини ҳосил қилган Киллинг вектор майдонлари орбитаси номанфий эгриликли кўпхиллик бўлиши исботланган;

Киллинг вектор майдонлари орбитаси ёрдамида ҳосил қилинган риман субмерсияси изопараметрик қатлама ҳосил қилиши исботланган;

Киллинг вектор майдонлари орбитаси устида қурилган риман субмерсияси ҳосил қилган икки ва ундан катта ўлчамли қатламанинг эгрилиги нолга тенглиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари риман субмерсиялари геометрияси тадқиқоти натижалари қатлама қатламлари ва қатламали кўпхиллик секцион эгриликлари орасидаги боғланишни топиш учун, ҳамда дифференциал геометриянинг турли масалалари учун қўлланилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Риман геометрияси, дифференциал топология ва дифференциал геометрия методлари, ҳамда математик фикрлашнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, метрик функция сатҳ сиртларидан иборат қатламанинг секцион эгриликлари номанфий эканлиги, Киллинг вектор майдонлари орбитаси устида қурилган риман субмерсиялари изопараметрик қатламалар ҳосил қилиши исботланган.

Диссертациянинг амалий аҳамияти риман субмерсияларининг геометрияси қатлам ва қатламали кўпхилликлар секцион эгриликлари орасидаги боғланишни топишда, сатҳ сиртлари геометриясини ўрганишда, бундан ташқари “тўла” дифференциал геометриянинг масалаларини ўрганиш учун асос бўлиб хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Номанфий эгриликли кўпхилликларда риман субмерсиялари геометрияси бўйича олинган диссертация натижалари қуйидаги илмий-тадқиқот лойиҳасида қўлланилган:

Қатламали кўпхиллик ва қатлама қатламларининг секцион эгриликлари орасидаги боғланишдан “MRU-10/2017 Бошқарув назарияси ва дифференциал ўйинлар масалаларидан геометрик ва аналитик методларни ривожлантириш” илмий тадқиқот лойиҳасида қатламали кўпхиллик геометрик ва топологик хоссалари ҳақидаги масалаларни ечишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта таълим вазирлигининг 2020 йил 25 июндаги № 89-03-2265 сонли маълумотномаси). Бу илмий натижаларнинг қўлланилиши, хусусан, қатлам геометриясининг қатламали кўпхиллик эгрилигига боғлиқлиги қатламали кўпхиллик геометрияси ва топологиясини аниқлаш имконини берган.

Вектор майдонлари оиласи орбиталари ва ҳолатлар фазоси секцион эгриликлари орасидаги боғланишдан Удмуртия давлат университетининг «№ 18-51-41005 Бошқарув назарияси ва дифференциал ўйинлар масалаларидан геометрик ва аналитик методларни ривожлантириш» номли лойиҳасида динамик системалар ва дифференциал ўйинлар масалларини ечишда фойдаланилган (Удмуртия давлат университети, Россия, маълумотнома № 7873-5526/31, 12 май 2020 йил). Бу натижалар дифференциал ўйинлар эришувчанлик тўплами геометриясини ўрганишга ёрдам берган. Хусусан, орбита эгрилиги ҳолатлар фазоси эгрилига боғликлиги фазо эгрилиги номанфий бўлганда эришувчанлик тўпламининг эгрилиги ҳам номанфий бўлишини исботлашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 8 та Халқаро ва 6 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 22 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 98 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат.

Кириш қисмида диссертация мавзусига оид долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг Ўзбекистон Республикаси фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мувофиқлиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «Номанфий эгриликли кўпхилликлар геометрияси» деб номланувчи биринчи боби учта параграфдан иборат. Ушбу бобда диссертацияда ишлатиладиган асосий тушунча ва ёрдамчи фактлар келтирилган.

Биринчи бобнинг биринчи ва иккинчи параграфида дифференциалланувчи акслантиришлар назарияси қисқача баён этилган, дифференциалланувчи акслантиришларга боғлиқ зарур таърифлар ва ёрдамчи теоремалар баён қилинган, киритилган тушунчаларга доир мисоллар келтирилган.

Ўлчами n га тенг M силлиқ кўпхиллик учун TM - уринма қатлама, $\pi : TM \to M$ -проекция бўлсин.

Таъриф 1.2.9. Агар $X : M \to TM$ акслантириш $\pi(X(x)) = x$ тенгликни қаноатлантирса, у M да аниқланган вектор майдон дейилади.

Вектор майдон ҳар бир $x \in M$ нуқтага бирор $X_x \in T_x M$ уринма векторни мос қўяди.

Кўпхилликдаги ҳар икки $X, Y \in V(M)$ вектор майдонга f силлиқ функцияга

$$[X,Y]_x f = X_x Y(f) - Y_x(Xf)$$

қоида билан, ёки локал координаталарда

$$[X,Y]_x f=(X^j\partial_j Y^i-Y^j\partial_j X^i)_x\partial_i f$$

қоида билан таъсир қилувчи янги вектор майдон $[X,Y]$ ни мос қўямиз. Бу вектор майдон X,Y вектор майдонларнинг Ли қавси дейилади.

Агар ҳар бир уринма фазо T_xM да x нуқтага силлиқ боғланган скаляр кўпайтма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ аниқланган бўлса, у ҳолда M силлиқ кўпхилликда риман структураси (метрикаси) берилган дейилади.

Риман структураси аниқланган боғланишли силлиқ кўпхиллик M риман кўпхиллиги дейилади.

Мос равишда ўлчами n ва m бўлган M ва N кўпхилликлар берилган бўлсин.

Таъриф 1.2.16. Максимал рангли дифференциалланувчи $f:M\to N$ акслантириш $n>m$ бўлганда субмерсия дейилади.

“Эгрилиги номанфий кўпхилликлар геометрияси” деб номланувчи биринчи бобнинг учинчи параграфида секцион эгрилик, қатлам ва қатламали кўпхиллик секцион эгриликлари орасидаги боғланиш, субмерсия сатҳ сиртининг гаусс эгрилигини ҳисоблаш ўрганилган.

Берилган M кўпхилликдаги силлиқ вектор майдонлар тўпламини $V(M)$ орқали белгилаб, қуйидаги акслантиришни қарайлик

$$\nabla:V(M)\times V(M)\to V(M)$$
$$(u,X)\to\nabla_u X \qquad (1)$$

у E^n да (U,h) локал координаталарда ушбу тенглик билан аниқланган бўлсин

$$\left(\nabla_u X\right)_p=\left(u^i\frac{\partial\overline{X}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p=\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}u^i\frac{\partial\overline{X}^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p.$$

Таъриф 1.3.1. Юқоридаги (1) акслантириш қуйидаги хоссаларни қаноатлантиради ва боғланиш деб аталади:

а) $\nabla_{au+bv}X=a\nabla_u X+b\nabla_v X$,

б) $\nabla_u(aX+bY)=a\nabla_u X+b\nabla_u Y$,

с) $\nabla_u(f\,X)=(uf)X_x+f(x)\nabla_u X$.

Бу ерда uf - f функциядан u вектор йўналиши бўйича ҳосила. $\nabla_u X$ ифода X вектор майдоннинг u вектор йўналиши бўйича ковариант ҳосиласи дейилади.

Таъриф 1.3.2. Кўпхилликдаги ҳар қандай силлиқ вектор майдон X, Y лар учун

$$\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X,Y]$$

муносабат бажарилса, ∇ боғланиш симметрик (ёки буралишга эга бўлмаган боғланиш) дейилади.

Таъриф 1.3.3. Кўпхилликдаги ҳар қандай силлиқ вектор майдон X, Y, Z лар учун

$$X\left\langle Y,Z\right\rangle = \left\langle \nabla_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \nabla_X Z\right\rangle$$

тенглик бажарилса, ∇ боғланиш риман боғланиши, ёки Леви-Чивита риман боғланиши дейилади. Бу тенглик Риччи айнияти деб аталади.

Ҳар бир $p \in M$ нуқта ва ихтиёрий $u,v \in T_p M$ векторлар учун

$$R(u,v)w = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

қоида билан таъсир қилувчи $R(u,v): T_p M \to T_p M$ акслантириш эгрилик алмаштириши дейилади, бунда X,Y,Z – $X_p = u$, $Y_p = v$, $Z_p = w$ шартни қаноатлантирувчи силлиқ вектор майдонлар.

Таъриф 1.3.4. Қуйидаги қоида

$$k(u,v) := \left\langle R(u,v)v, u\right\rangle$$

билан аниқланган

$$k : T_p M \times T_p M \to R$$

функция риман эгрилиги деб аталади.

Бизга $\sigma \subset T_p M$ текислик берилган бўлиб, u,v векторлар унинг базиси бўлса, бу текисликка K_σ ҳақиқий сонни мос қўямиз:

$$K_\sigma = \frac{\left\langle R(u,v)v,u\right\rangle}{|u|^2 |v|^2 - \left\langle u,v\right\rangle^2}. \qquad (2)$$

бунда $\left\langle u,v\right\rangle$ – g риман метрикаси ёрдамида аниқланган скаляр кўпайтма. K_σ катталик σ текислик йўналишидаги секцион эгрилик ёки икки ўлчамли йўналишдаги эгрилик дейилади.

Бизга $f : M \to R$ функция берилган бўлсин. $Z = \mathrm{grad}\, f$ орқали унинг градиентини белгилаймиз. $p \in R$ нуқта учун $L_p = f^{-1}(p) = \{q : f(q) = p\}$ бўлсин. $T_q L_p$ орқали L_q кўпхилликнинг q нуқтасидаги уринма фазосини белгилаймиз. Бизга $\sigma \subset T_q L_p$ текислик берилиб, унинг ортонормал базис векторлари u, v бўлсин. У ҳолда L_p ва M кўпхилликларнинг σ текислик йўналишидаги секцион эгриликлари k_σ ва $\tilde{k}_\sigma$ қуйидаги

$$k_\sigma = \tilde{k}_\sigma + \frac{1}{(\mathrm{grad}\, f)^2} \det\begin{pmatrix} h_f(u,u) & h_f(u,v) \\ h_f(u,v) & h_f(v,v) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

формула орқали боғланади, бунда $h_f(u,v)=\left\langle \nabla_u Z, v\right\rangle$.

Биз (0,1) типли тензор майдон

$$X \to \nabla^{\tau}_X Z$$

ни қарайлик, бунда X – L_p кўпхилликка уринувчи вектор майдон, $\nabla^{\tau}_X Z$ – $\nabla_X Z$ векторнинг уринма ташкил этувчиси. Бу тензор майдон f функциянинг Гесси матрицаси деб номланган A матрица ёрдамида берилади.

Озод ҳади $(-1)^n \det A$ бўлган A матрицанинг характеристик кўпҳадини $\chi(\lambda)$ билан белгилаб, бу кўпҳад ёрдамида $\rho(\lambda)$ кўпҳадни қуйидаги айният билан аниқлаймиз:

$$\lambda\rho(\lambda)=\det A-(-1)^n \chi(\lambda).$$

Маълум айният $\chi(A)=0$ дан $A\rho(A)=\det A\cdot E$ га эга бўламиз. Ҳар қандай базисда $A^c=\rho(A)$ матрицанинг элементлари A матрицанинг мос элементлари алгебраик тўлдирувчилари бўлади.

Қисм кўпхиллик L_p нинг гаусс эгрилиги

$$G=\frac{1}{\|\nabla f\|^{n+1}}\left\langle A^c \nabla f, \nabla f\right\rangle \tag{4}$$

формула билан ҳисобланади.

Гаусс ва секцион эгриликлар R^3 фазода тенг эканлигини инобатга олсак, бу ҳолда (4) формула секцион эгриликни ҳисоблашнинг қулай усули бўлади.

Диссертациянинг “Номанфий эгриликли кўпхилликларда риман субмерсияларининг геометрияси” деб номланган иккинчи боби учта параграфдан иборат. Диссертациянинг бу бобида риман субмерсиялари ҳосил қилган қатламалар геометрияси тадқиқ қилинган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида $f:M\to R$ метрик функциянинг сатҳ сиртлари геометрияси ўрганилган.

Субмерсия, яъни максимал рангли дифференциалланувчи акслантириш $f:M\to B$ берилган бўлсин, бунда M,B –ўлчами мос ҳолда $n,m,\ n>m$ бўлган силлиқ кўпхилликлар. У ҳолда 1.2.1 теоремага асосан M кўпхилликда қатламлари $L_p=\left\{q\in M: f(q)=p\right\}$ тўпламларнинг боғланишлилик компоненталаридан иборат $k=n-m$ ўлчамли қатлама ҳосил бўлади.

Қатлам L_p нинг q нуқтасидаги уринма фазони T_qF орқали, T_qF қисм фазо ортогонал тўлдирувчисини H_qF орқали белгиласак, натижада уринма қатлама $TM=\{T_qM\}$ нинг қисм қатламалари $TF=\{T_qF\}$, $HF=\{H_qF\}$ ҳосил бўлиб, $TM=TF\oplus HF$ ортогонал йиғиндига эга бўламиз. Натижада ҳар бир X вектор майдон $X=X^v+X^h$ кўринишда тасвирланади, бунда $X^v\in TF$, $X^h\in HF$. Агар $X^h=0$ (мос ҳолда $X^v=0$) бўлса, у ҳолда X вектор майдонга вертикал (мос ҳолда горизонтал) вектор майдон дейилади.

Субмерсия $f: M \to B$ берилган бўлсин. Ҳар қандай $u \in T_p B$ вектор ва ихтиёрий $q \in L_p$ нуқта учун шундай $h \in H_q F$ вектор мавжудки $df_p(h) = u$ бўлади. h вектор u векторнинг q нуқтадаги горизонтал кўтарилиши дейилади. B даги X вектор майдон учун ҳар бир q нуқтадаги қиймати $X_{f(q)}$ векторнинг горизонтал кўтарилиши бўладиган M даги $\bar{X}$ вектор майдон X вектор майдоннинг горизонтал кўтарилиши дейилади.

Таъриф 2.1.1. Берилган $f: M \to R$ субмерсия дифференциали df горизонтал вектор узунлигини сақласа, у риман субмерсияси дейилади.

Таъриф 2.1.2. Критик нуқтага эга бўлмаган $f: M \to R$ дифференциалланувчи функция берилиб, ҳар бир вертикал вектор майдон X учун $X\left(|gradf|^2\right) = 0$ шарт бажарилса, яъни градиент вектор майдон узунлиги ҳар бир сатҳ сиртида ўзгармас бўлса, у метрик функция дейилади.

Биринчи параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

Теорема 2.1.1. Агар $f: M \to R$ метрик функция бўлса, у ҳолда R да шундай риман метрикаси g^* мавжудки, бу метрикага нисбатан берилган функция риман субмерсияси бўлади.

“Риман субмерсиялари сатҳ сиртларининг эгрилиги” деб номланган иккинчи параграфда номанфий секцион эгриликли кўпхилликда берилган метрик функция сатҳ сиртлари номанфий секцион эгриликли қисм кўпхиллик бўлиши исботланган.

Субмерсия геометриясини B кўпхиллик бир ўлчамли бўлган ҳолда ўрганамиз.

Қуйидаги теорема M кўпхиллик ва f функция сатҳ сирти секцион эгриликлари орасидаги боғланишни кўрсатади.

Теорема 2.2.1. Номанфий (мусбат) секцион эгриликли кўпхиллик M, критик нуқтага эга бўлмаган дифференциалланувчи функция $f: M \to R$ берилган ва ҳар бир X вертикал вектор майдон учун $X\left(|gradf|^2\right) = 0$ бўлсин. У ҳолда F қатламанинг ҳар бир қатлами (f функциянинг сатҳ сирти) номанфий (мусбат) секцион эгриликли қисм кўпхиллик бўлади.

Теорема 2.2.1. нинг исботидан фойдаланиб қуйидаги натижа олинган:

Қуйидаги субмерсияни қарайлик

$$f: M \to R^k, \quad f(q) = \{f_1(q), f_2(q), \cdots, f_k(q)\}.$$

Бунда субмерсия M да $n-k$ ўлчамли F қатламани ҳосил қилади.

Қуйидаги теорема f субмерсия ёрдамида ҳосил қилинган F қатлама қатлами ва M кўпхиллик секцион эгриликлари орасидаги боғланишни кўрсатади.

Теорема 2.2.2. Ўзгармас номанфий (мусбат) секцион эгриликли M кўпхиллик ва $f: M \to R^k$ субмерсия берилган бўлсин, бунда

$$f(q) = \{f_1(q), f_2(q), \cdots, f_k(q)\}.$$

Ҳар бир X вертикал вектор майдон учун $X\left(\left|gradf_i\right|^2\right)=0$ бўлсин деб фараз қилайлик. У ҳолда F қатламанинг ҳар бир қатлами номанфий (мусбат) секцион эгриликли қисм кўпхиллик бўлади.

Изоҳ. Сиртнинг секцион эгрилиги ўзгармас бўлиши шарт эмас.

“Номанфий эгриликли кўпхилликларда субмерсиялар геометрияси” деб номланган учинчи параграфда икки ўлчамли сферада берилган Киллинг вектор майдонлари орбитаси устида риман субмерсияси қурилган, бунда майдонлар орбитаси сфера билан мос келади ва субмерсия уч ўлчамли торда бир ўлчамли қатлама ҳосил қилади.

Берилган кўпхилликда бирор $D\subset V(M)$ тўпламни қарайлик.

Вектор майдон X нинг $t=0$ да $x\in M$ нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғини $t\to X^t(x)$ орқали белгилаймиз. $t\to X^t(x)$ акслантириш бирор $I(x)\subset R$ соҳада аниқланган бўлиб, умумий ҳолда X майдонга ва бошланғич x нуқтага боғлиқ. Бундан кейинги барча $X^t(x)$ кўринишдаги формулаларда $t\in I(x)$ деб ҳисоблаймиз.

Таъриф 2.3.2. Берилган M кўпхилликнинг

$$y=X_k^{t_k}\left(X_{k-1}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x)\right)...\right)\right)$$

тенгликни қаноатлантирувчи y нуқталар тўплами Dвектор майдонлар оиласининг x нуқтадан ўтувчи орбитаси дейилади ва $L(x)$ кўринишда белгиланади, бунда $X_1,X_2,...,X_k$ - D даги вектор майдонлар, $t_1,t_2,...,t_k$-ҳақиқий сонлар, k-ихтиёрий натурал сон.

Америкалик профессор Г.Суссманн ва Буюк Британиялик математик П.Стефан силлиқ вектор майдонлар оиласининг Суссманн топологияси киритилган ҳар бир орбитаси C^r, $r\geq 1$ дифференциал структурага эга бўлиб, M кўпхилликка ботирилган қисм кўпхиллик бўлишини кўрсатдилар.

А.Нарманов, С.Саитованинг[2] ишларида Киллинг вектор майдонлари орбиталари геометрияси ўрганилган. Эслатиб ўтамиз, M даги X вектор майдон ёрдамида ҳосил қилинган локал алмаштириш $x\to X^t(x)$ лар группаси изометриялардан иборат бўлса, X вектор майдон Киллинг вектор майдони дейилади.

Сфера S^2 да берилган

$$X_1=\{-y,x,0\},\ X_2=\{-z,0,x\}.$$

Киллинг вектор майдонларидан иборат D оилани қарайлик. Бу оилани ўз ичига олувчи минимал Ли алгебрасини $A(D)$кўринишда белгилаймиз. Бу вектор майдонларнинг Ли қавси $X_3=\{0,z,-y\}$ га тенг. X_1, X_2, X_3 вектор майдонлар минимал алгебра $A(D)$ нинг базиси бўлади. Ҳар бир нуқта учун оила орбитаси S^2 билан устма-уст тушади.

Қуйидаги тенглик ёрдамида

---

[2] Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014, том 50, №12, с.1582-1589.

$$\pi(t_1,t_2,t_3)=X_3^{t_3}\left(X_2^{t_2}\left(X_1^{t_1}(p)\right)\right),$$

$\pi : R^3 \to S^2$ акслантиришни ҳосил қиламиз, бунда $p(1,0,0)\in S^2$. X_1, X_2, X_3 вектор майдонлар оқимлари сферадаги айлантиришлардан иборат бўлгани учун бу акслантиришни уч ўлчамли тор $T^3=S^1\times S^1\times S^1$ да қарашимиз мумкин.

Теорема 2.3.3. Тор T^3 да шундай риман метрикаси g мавжудки

$$\pi : T^3 \to S^2$$

акслантириш T^3 да риман қатламасини ҳосил қилади.

Диссертациянинг “Киллинг вектор майдонлари орбиталари устидаги субмерсиялар геометрияси” деб номланган учинчи бобида Киллинг вектор майдонлари геометриясини ўрганиш натижасида юзага келган баъзи субмерсиялар геометрияси ўрганилган.

Бу бобнинг биринчи параграфида R^3 фазода учта Киллинг вектор майдонлари оиласи D қаралган:

$$X=\frac{\partial}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial}{\partial y},\quad Z=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Минимал қисм алгебра $A(D)$ нинг базис векторлари қуйидагича:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\ X_2=\frac{\partial}{\partial z},\ X_3=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z},\ X_4=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Маълумки, $\dim A_p(D)=3$ ва $\dim A_p(D)\le \dim L(p)$ бўлганидан, ҳар бир орбита $L(p)$ уч ўлчамли кўпхиллик бўлади.

Натижада $\pi(t_1,t_2,t_3,t_4)=X_2^{t_2}(X_3^{t_3}(X_4^{t_4}(X_1^{t_1}(O))))$ формула бўйича дифференциалланувчи $\pi : R^4 \to R^3$ акслантиришни ҳосил қиламиз, бунда O - R^3 фазода координата боши.

Теорема 3.1.4. Евклид фазоси R^3 да шундай риман метрикаси $\tilde{g}$ мавжудки, бу метрикага нисбатан

1. $\pi : R^4 \to R^3$ акслантириш риман субмерсияси бўлади;
2. Кўпхиллик $(R^3,\tilde{g})$ номанфий эгриликли кўпхиллик бўлади.

Берилган мисоллар ёрдамида $(R^3,\tilde{g})$ кўпхилликнинг баъзи икки ўлчамли йўналишдаги секцион эгрилилари қатъий нолдан катталиги кўрсатилган.

Кейин R^4 фазода Киллинг вектор майдонлари

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ Y_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\ Y_3=-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\ Y_4=-x_4\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

дан иборат D оила қаралган. Мини-мал қисм алгебра $A(D)$ нинг базис векторлари $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,2,3,4$, $X_5 = Y_3$, $X_6 = Y_4$ лардан иборат, шунинг учун ҳар бир $p \in R^4$ нуқтанинг орбитаси $L(p)$ - R^4 фазо билан устма-уст тушади.

Бу орбита ёрдамида $\pi : R^6 \to R^4$ субмерсияни

$$\pi\left(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6\right) = X_6^{t_4}\left(X_4^{t_6}\left(X_2^{t_2}\left(X_5^{t_3}\left(X_3^{t_5}\left(X_1^{t_1}\left(O\right)\right)\right)\right)\right)\right),$$

формула билан аниқлаймиз, бунда O - R^4 фазо координата боши.

Теорема 3.1.5. Евклид фазоси R^4 да шундай риман метрикаси $\tilde{g}$ мавжудки, бу риман метрикасига нисбатан $\pi : R^6 \to R^4$ акслантириш риман субмерсияси бўлиб, $\tilde{g}$ риман метрикасига нисбатан $(R^4, \tilde{g})$ кўпхиллик номанфий эгриликли кўпхиллик бўлади.

Шу бобнинг “Номанфий эгриликли изопараметрик қатламалари геометрияси” деб номланган иккинчи параграфида биринчи параграфда қурилган субмерсия изопараметрик қатлама ҳосил қилиши исботланган.

Ушбу $S(X,U) = \nabla_X^v U$ формула билан берилган

$$S : V(F) \times H(F) \to V(F)$$

акслантиришга иккинчи асосий тензор дейилади, бунда $\nabla_X^v U$ – $\nabla_X U$ вектор майдоннинг вертикал ташкил этувчиси, $V(F)$, $H(F)$-мос ҳолда барча вертикал ва горизонтал вектор майдонлар.

Фиксирланган нормал майдон $U \in H(F)$ учун $S(X,U)$ тензор (1,1) типли S_U тензор майдонга айланади:

$$S(X,U) = S_U X = \nabla_X^v U .$$

Тензор майдон S_U бичизиқли форма l_U ни аниқлайди:

$$l_U(X,Y) = \left\langle S_U X, Y \right\rangle .$$

Нормал вектор майдон U га нисбатан S_U га иккинчи асосий тензор, $l_U(X,Y)$ га эса иккинчи асосий форма дейилади.

Тензор майдон S_U чизиқли акслантириш бўлади, шунинг учун у матрица ёрдамида берилади: $S(X,U) = AX$.

Горизонтал вектор майдон U берилганда ҳар бир $Y \in V(F)$ майдон учун $[Y,U]$ майдон ҳам вертикал бўлса, U га қатламланувчи дейилади. Агар U қатламланувчи бўлса, у ҳолда A матрицанинг хос сонларига F қатламанинг бош эгриликлари дейилади. Агар бош эгриликлар қатлам бўйича локал ўзгармас бўлса, у ҳолда F қатламага изопараметрик дейилади.

Теорема 3.2.1. Теорема 3.1.4 да берилган $\pi : R^4 \to R^3$ риман субмерсияси R^4 да изопараметрик қатлама ҳосил қилади.

Теорема 3.2.2. Теорема 3.1.5 да берилган риман субмерсияси эгрилиги нолга тенг изопараметрик қатлама ҳосил қилади.

Учинчи бобнинг “Киллинг вектор майдонлари орбиталари устидаги субмерсиялар геометрияси” деб номланган учинчи параграфида R^n да k таси буриш ва $n-k$ таси параллел кўчиришлардан иборат n та Киллинг вектор майдонларининг оиласи D қаралган, бунда $n = 2k + l$:

$$Y_i = \begin{cases} -x_i \dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_{i-1} \dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{агар } i \text{ жуфт ва } 1 < i \le 2k \text{ бўлса,} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{акс холда.} \end{cases}$$

$A(D)$ минимал алгебранинг базис векторлари $n+k$ та вектор майдон

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X_{n+s} = -x_{2s} \frac{\partial}{\partial x_{2s-1}} + x_{2s-1} \frac{\partial}{\partial x_{2s}},$$

лардан иборатлиги кўрсатилган, бунда $j = 1, 2, ..., n$ ва $s = 1, 2, ..., k.$

Теорема 3.1.1. га асосан ҳар бир нуқта учун D оиланинг орбитаси R^n фазо билан устма-уст тушади. Шунинг учун биз қуйидаги формула билан $\pi : R^{n+k} \to R^n$ субмерсияни аниқлаймиз:

$$\pi(t_1, t_2, ..., t_{n+k}) = X_{n+k}^{t_{n+k}}(...(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)...)),$$

бунда O - R^n фазо коордитана боши. Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3.3.1. R^n да шундай риман метрикаси $\tilde{g}$ мавжуд бўлиб,

1) $\pi : R^{n+k} \to R^n$ акслантириш риман субмерсияси бўлади ва риман қатламасини ҳосил қилади;

2) $\pi : R^{n+k} \to R^n$ субмерсия R^n фазода изопараметрик қатлама ҳосил қилади;

3) $(R^n, \tilde{g})$ фазо номанфий эгриликли кўпхиллик бўлади;

Агар $k \ge 2$ бўлса, у ҳолда

4) $\pi : R^{n+k} \to R^n$ субмерсия R^{n+k} фазода эгрилиги нолга тенг қатлама ҳосил қилади.

ХУЛОСА

Диссертация эгрилиги номанфий кўпхилликларда Риман субмерсиялари геометриясига бағишланган. Диссертация ишида олинган асосий натижалар қуйидагилардан иборат:

1. Секцион эгрилиги ўзгармас номанфий кўпхилликда берилган компоненталари метрик функциялардан иборат субмерсия ҳосил қилган қатламанинг ҳар бир қатлами номанфий (мусбат) секцион эгриликли кўпхиллик бўлиши исботланган;
2. Уч ўлчамли торда икки ўлчамли сферадаги Киллинг вектор майдонлар орбитаси устида қурилган риман субмерсиясининг бир ўлчамли риман қатлама ҳосил қилиши исботланган;
3. Киллинг вектор майдонлари орбитасида шу орбита устида қурилган субмерсия риман субмерсияси бўладиган риман метрикаси мавжудлиги исботланган.
4. Риман субмерсиясини ҳосил қилган Киллинг вектор майдонлари орбитаси номанфий эгриликли кўпхиллик бўлиши исботланган.
5. Киллинг вектор майдонлари орбитаси ёрдамида ҳосил қилинган риман субмерсияси изопараметрик қатлама ҳосил қилиши исботланган;
6. Киллинг вектор майдонлари орбитаси устида қурилган риман субмерсияси ҳосил қилган икки ва ундан катта ўлчамли қатламанинг эгрилиги нолга тенглиги исботланган.

Диссертация ишидаги барча натижалар янги ҳисобланади ва улардан вектор майдонлар назариясида, қатламалар назариясида, риман субмерсиялари геометриясида ва замонавий геометриянинг бошқа бўлимларида олиб бориладиган тадқиқотларда фойдаланиш мумкин.

Муаллиф илмий раҳбари профессор Абдигаппар Якубович Нармановга муаммоларнинг қўйилиши ва уларни муҳокама қилишда доимий фойдали маслаҳатлари ва кўрсатмалари учун ўзининг чуқур миннатдорлигини билдиради.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ТУРСУНОВ БАЙРАМАЛИ АКБАРОВИЧ

ГЕОМЕТРИЯ РИМАНОВЫХ СУБМЕРСИЙ МНОГООБРАЗИЙ НЕОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2020 год

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2020.2.PhD/FM502.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени М. Улугбека и в Каршинском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat@nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Нарманов Абдиганпар Якубович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Заитов Адилбек Атаханович**
доктор физико-математических наук

Каипназарова Гулжахон Хожаназаровна
кандидат физико-математических наук

Ведущая организация: **Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится «4» августа 2020 года в 10^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №53). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «28» июля 2020 года.
(протокол рассылки №1 от «27» июля 2020 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор, академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, Ph.D.

Р.Б.Бешимов
Председатель научного семинара при Научном совете
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимых в области фундаментальных и прикладных наук в мире, используют геометрические методы, в том числе методы и результаты теории слоений, порождённых римановыми субмерсиями. Теория слоений является относительно новым разделом геометрии, фундаментальные основы которого созданы французскими учёными. Ими получены фундаментальные результаты по теории слоений, которые позволили понять важность этой теории в других областях науки и техники. В частности, французские математики ввели и изучили такие понятия как группы голономии слоений, связность Эресмана для слоений, предельные множества слоев слоения, и используя эти понятия они доказали теоремы о локальной и глобальной стабильности слоений. В дальнейшем эта теория развивалась в США, Японии, Польше и в России. Американскими математиками получены важные результаты по слоениям со связностью Эресмана, в частности по геометрии вполне геодезических и римановых слоений, японские математики университета Токио изучили топологические свойства слоений. Российские учёные получили фундаментальные результаты по геометрии слоений коразмерности один.

В настоящее время, в мире, одной из актуальных проблем современной геометрии является изучение геометрии слоений, порожденных поверхностями уровня субмерсий. Геометрия слоений, порожденных субмерсиями находят различные приложения во многих областях прикладных наук, в частности в физике. Применение результатов по геометрии слоений в других областях науки, в частности для решений задач механики, теории динамических систем являются актуальными научными направлениями.

В нашей стране большое е внимание уделяется развитию естественных наук, в частности развитию фундаментальных и прикладных направлений математики. Геометрия как древняя и важная составляющая современной математики является мощным инструментов в исследованиях по современные математики. Особое внимание было уделено изучению теории слоений, которая является интенсивно развивается во многих странах мира, в частности изучению геометрии слоений, порожденных субмерсиями, геометрии и топологии сингулярных слоений, порожденных орбитами векторных полей, изучению группы изометрий слоеных многообразий. Проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук на уровне международных стандартов по важным направлениям специальности «Алгебра, теория динамических систем, геометрия и топология и т.д.» рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[1].[3] Развитие

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

теории слоений и приложений в других отраслях науки играют важную роль при исполнении этого постановления.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Дифференцируемые отображения максимального ранга играют важную роль в различных разделах математики, в частности в римановой геометрии. Оно состоит из двух классов - погружения и субмерсий. Одним из важных классов дифференцируемых отображений максимального ранга состоит из погружений. Погружения интенсивно изучались с самого зарождения римановой геометрии. Простыми примерами римановых многообразий являются поверхности, вложенные в трехмерное евклидово пространство. Поэтому дифференциальная геометрия изометричных погружений и вложений хорошо изучена и достаточно представлена во многих учебниках по дифференциальной геометрии. Двойственное понятие субмерсии сформировалось относительно недавно, во второй половине двадцатого века. Дифференциальная геометрия субмерсий впервые изложена в работах R. Hermann и B. O'Neil.

Изучение геометрии субмерсий, в частности римановых субмерсий оказалось очень плодотворным в силу того, что римановы субмерсии имеют приложения во всех разделах современной римановой геометрии. Фундаментальные свойства римановых субмерсий, такие как фундаментальные уравнения, свойства кривизны были получены J. Cheeger, D. Gromoll, R. Hermann, B. O'Neil, G. Walschap. Свойства сохранения геодезических для римановых субмерсий и геометрия слоений, порожденных римановыми субмерсиями были изучены в работах R. Escobales, B. L. Reinhart. В настоящее время понятие субмерсии и основные результаты по изучении геометрии субмерсий вошли в учебники по римановой геометрии, они используются не только в геометрии, но во всех смежных науках, таких, как механика, теоретическая физика, теория относительности. Приложения римановых субмерсий в физике и механике изучены в работах итальянских математиков M. Falcitelli, A. M. Pastore, S. Ianus.

В исследованиях наших ученых профессора А. Я. Нарманова и его учеников А. Байтураева, Г. Каипназаровой получены полная классификация слоений евклидова пространства, порожденных римановыми субмерсиями и геометрические характеристики, связанные с секционной кривизной слоев, в работах А. С. Шарипова изучены группы изометрий слоений, порожденных субмерсиями.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследовательского проекта Ф4-04 «Геометрия и топология слоёных многообразий», Национального университета Узбекистана (2012-2016 гг.).

Целью исследования является изучение геометрии римановых субмерсий на многообразиях неотрицательной кривизны и исследование геометрии слоений, порождённых римановыми субмерсиями.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

нахождение секционных кривизн слоения, порожденного поверхностями уровня метрической функции;

нахождение секционных кривизн слоев слоения, порождённого субмерсией, каждая из компонент является метрической функцией;

построение римановой субмерсии над орбитой векторных полей Киллинга и доказательство локальной постоянности главных кривизн вдоль слоёв.

Объект исследования – риманова субмерсия, слоеное многообразие, изопараметрические слоения, векторное поле Киллинга, орбита векторных полей.

Предмет исследования – геометрия римановых субмерсий, свойства орбит векторных полей Киллинга, связь между кривизнами слоеного многообразия и слоев, порожденных римановой субмерсией.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы дифференциальной геометрии, дифференциальной топологии, римановой геометрии и теории слоений.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Доказано, что субмерсия, компоненты которой являются метрическими функциями, заданная на многообразии постоянной неотрицательной (положительной) секционной кривизны, порождает слоение, каждый слой которого является многообразием неотрицательной (положительной) секционной кривизны.

Доказано, что субмерсия на трёхмерном торе, которая построена над орбитой векторных полей Киллинга на двумерной сфере, порождает риманово расслоение.

Доказано, что существует такая риманова метрика на орбите векторных полей Киллинга, что субмерсия, построенная над этой орбитой является римановой,

Доказано, что орбита векторных полей Киллинга, порождающих риманову субмерсию, является многообразием неотрицательной кривизны.

Доказано, что риманова субмерсия, порождёнными векторными полями Киллинга, порождает изопараметрическое слоение.

Доказано, что слоение размерности больше или равной двум, порожденное римановой субмерсией над орбитой векторных полей Киллинга, имеет нулевую кривизну.

Практические результаты исследования – результаты исследования геометрии римановых субмерсий применяются для нахождения связей между секционными кривизнами слоев слоения и слоеного многообразия, а также для различных задач дифференциальной геометрии.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов римановой геометрии, дифференциальной топологии и дифференциальной геометрии, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что доказано неотрицательность секционных кривизн слоения, порожденного поверхностями уровня метрической функции, заданной на многообразии неотрицательной кривизны и показано, что риманова субмерсия над орбитой векторных полей Киллинга порождает изопараметрическое слоение.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что изучение геометрии римановых субмерсий является практической основой для нахождения связей между секционными кривизнами слоев слоения и слоеного многообразия, для изучения геометрии поверхностей уровня, а также для задач дифференциальной геометрии в «целом».

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты по геометрии субмерсий на многообразиях неотрицательной кривизны были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Связи между секционными кривизнами слоев слоения и слоеного многообразия использованы в исследованиях проекта «MRU-10/2017 Развитие геометрических и аналитических методов в задачах теории управления и дифференциальных играх» при решении задач о топологических и геометрических свойствах слоеных многообразий (Справка Министерства высшего и среднеспециального образования Республики Узбекистан от 25 июня 2020 года № 89-03-2265). Применение этих научных результатов позволило определить геометрию и топологию слоеных многообразий, в частности зависимость геометрии слоев от кривизны слоеного многообразия.

Связи между секционными кривизнами орбит семейства векторных полей и фазового пространства были использованы в научно-исследовательском проекте Удмуртского государственного университета «№-18-51-41005 Развитие геометрических и аналитических методов в задачах теории управления и дифференциальных играх» при решении задач динамических систем и дифференциальных игр (Удмуртский государственный университет, Россия, Справка № 7873-5526/31 от 12 мая 2020 года). Применение этих научных результатов позволило изучить геометрии множества достижимости дифференциальных игр. В частности, полученная связь геометрии орбит векторных полей от кривизны фазового пространства, дала возможность установить, что если фазовое пространство является многообразием неотрицательной секционной кривизны, то множества достижимости являются подмногообразиями неотрицательной секционной кривизны.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 8 международных и 6 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 22 научных работ, из них 8 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертации на степень доктора философии по физико-математическим наукам, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 96 страницу.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и список использованной литературы.

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы и связь с научным направлением Национального университета Узбекистан, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрений результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «Геометрия многообразий неотрицательной кривизны», состоит из трёх параграфов. В этой главе диссертации приведены необходимые понятия и факты для изложения работы.

В первом и во втором параграфах первой главы кратко изложена теория дифференцируемых отображений, приведены необходимые определения и вспомогательные факты, относящиеся к дифференцируемым отображением, приведены примеры введенных понятий.

Пусть M–гладкое многообразие размерности n, TM–касательное расслоение, $\pi: TM \to M$–проекция.

Определение 1.2.9. Отображение $X: M \to TM$, при котором $\pi(X(x)) = x$, называется векторным полем на M.

На многообразии M задано векторное поле X, если каждой точке $x \in M$ сопоставлен некоторый вектор $X_x \in T_x M$.

Каждым двум векторным полям $X, Y \in V(M)$ на M сопоставляется новое векторное поле $[X, Y]$, действующий на гладкие функции по правилу

$$[X,Y]_x f = X_x Y(f) - Y_x(Xf)$$

или в локальных координатах

$$[X,Y]_x f = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)_x \partial_i f.$$

Его называют скобкой Ли векторных полей X и Y.

Говорят, что на гладком многообразии M задана риманова структура (метрика), если в каждом касательном пространстве $T_x M$ определено скалярное произведение $\langle , \rangle$, гладко зависящее от точки x.

Римановым многообразием будем называть связное гладкое многообразие M, на котором задана риманова структура.

Пусть M–многообразие размерности n, N–многообразие размерности m.

Определение 1.2.16. Отображение $f: M \to N$ максимального ранга при $n > m$ называется субмерсией.

В третьем параграфе первой главы названная «Геометрия многообразий неотрицательной кривизны» изучены секционная кривизна, связь между секционной кривизной слоев и обьемляющего многообразия, вычисление гауссовой кривизны поверхности уровня субмерсии.

Рассмотрим отображение

$$\nabla: V(M) \times V(M) \to V(M)$$

$$(u, X) \to \nabla_u X \qquad (1)$$

определённой равенством в локальных координатах (U, h) на E^n

$$\left(\nabla_u X\right)_p = \left(u^i \frac{\partial \overline{X}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial \overline{X}^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p.$$

Определение 1.3.1. Отображение (1) обладает следующими свойствами,

а) $\nabla_{au+bv} X = a\nabla_u X + b\nabla_v X$,

б) $\nabla_u (aX + bY) = a\nabla_u X + b\nabla_u Y$,

с) $\nabla_u (f X) = (uf) X_x + f(x) \nabla_u X$

и называется связностью.

Здесь uf-производная функции f в направлении вектора u. $\nabla_u X$ называют ковариантной производной векторного поля X в направлении вектора u.

Определение 1.3.2. Связность ∇ называют симметричной (или связностью без кручения), если для любых гладких векторных полей X,Y на M

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y].$$

Определение 1.3.3. Связность ∇ называется римановой, или просто римановой связностью Леви-Чивита, если для любых гладких векторных полей X , Y, Z на M выполняется равенство

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Это равенство принято называть тождеством Риччи.

Для каждой точки $p \in M$ и любых векторов $u,v \in T_pM$ преобразованием кривизны называют отображение $R(u,v): T_pM \to T_pM$, действующее по правилу

$$R(u,v)w = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

где X,Y,Z – любые гладкие векторные поля на M, удовлетворяющие условию $X_p = u, Y_p = v, Z_p = w.$

Определение 1.3.4. Кривизной Римана называют функцию

$$k: T_pM \times T_pM \to R,$$

определенную формуле

$$k(u,v) := \langle R(u,v)v, u\rangle.$$

Пусть u,v-линейно независимые векторные поля, σ-двумерная плоскость, порождённая парой u,v. Плоскости σ сопоставим действительное число K_σ:

$$K_\sigma = \frac{\langle R(u,v)v,u\rangle}{|u|^2|v|^2 - \langle u,v\rangle^2}, \tag{2}$$

где $\langle u,v\rangle$-скалярное произведение, определённое римановой метрикой g. Величина K_σ называется секционной кривизной по отношению к плоскости или кривизной в двумерном направлению σ.

Пусть дана функция $f: M \to R$, обозначим через $Z = \operatorname{grad} f$ градиент этой функции. Для точки $p \in R$ обозначим через $L_p = f^{-1}(p) = \{q : f(q) = p\}$. Для точки $q \in L_q$ обозначим через T_qL_p касательное пространство слоя L_q в точке q. Берём $\sigma \subset T_qL_p$ плоскость, для которого векторы u, v является ортонормированным базисом. Тогда для секционных кривизн $k_\sigma, \tilde{k}_\sigma$ соответственно многообразий L_p и M связаны формулой

$$k_\sigma = \tilde{k}_\sigma + \frac{1}{(\operatorname{grad} f)^2}\det\begin{pmatrix} h_f(u,u) & h_f(u,v) \\ h_f(u,v) & h_f(v,v)\end{pmatrix} \tag{3}$$

где, $h_f(u,v) = \langle \nabla_u Z, v\rangle$.

Рассмотрим тензорное поле типа (0,1)

$$X \to \nabla_X^\tau Z$$

где, X-векторное поле, касательное к многообразию L_p, $\nabla^{\tau}_X Z$-касательная компонента вектора $\nabla_X Z$. Это тензорное поле задаётся матрицей A, которая называется матрицей Гессиана функции f.

Пусть $\chi(\lambda)$ - характеристический полином матрицы A со свободным членом $(-1)^n \det A$. Определим полином $\rho(\lambda)$ тождеством

$$\lambda\rho(\lambda) = \det A - (-1)^n \chi(\lambda).$$

В силу известного тождества $\chi(A) = 0$ имеем $A\rho(A) = \det A \cdot \mathrm{E}$. В любом базисе матрица $A^c = \rho(A)$ изображается матрицей, элементы которой суть алгебраические дополнения к соответствующим элементам матрицы A.

Гауссова кривизна подмногообразия L_p вычисляется по формуле

$$G = \frac{1}{\|\nabla f\|^{n+1}} \left\langle A^c \nabla f, \nabla f \right\rangle. \tag{4}$$

Поскольку для поверхностей в R^3 гауссова и секционная кривизны совпадают, формула (4) оказывается в этом случае удобным средством вычисления секционной кривизны.

Вторая глава диссертации, названная «Геометрия римановых субмерсий многообразий неотрицательной кривизны», состоит из трёх параграфов. В этой главе диссертации исследованы геометрия слоений, порождённых римановыми субмерсиями.

В первом параграфе второй главы изучены геометрия поверхностей уровня метрической функции $f: M \to R$.

Пусть $f: M \to B$ субмерсия, т.е. дифференцируемое отображение максимального ранга, где M, B-гладкие многообразия размерности n, m соответственно, $n > m$. Тогда по теореме 1.2.1 на многообразии M возникает слоение размерности $k = n - m$, слоями которого являются компоненты связности подмногообразий $L_p = \left\{q \in M : f\left(q\right) = p\right\}$.

Обозначим через T_qF-касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, через H_qF-ортогональное дополнение подпространства T_qF, то в результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $HF = \{H_qF\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus HF$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in HF$. Если X^h=0 (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

Пусть дана субмерсия $f: M \to B$. Для любого вектора $u \in T_pB$ и любой точки $q \in L_p$ существует единственный вектор $h \in H_qF$ такой, что $df_p(h) = u$. Вектор h называют горизонтальным поднятием вектора u в точку q. Для векторного поля X на B векторное поле $\bar{X}$ на M, значение которого в каждой точке q является горизонтальным подъёмом вектора $X_{f(q)}$ называется горизонтальным поднятием векторного поля X.

Определение 2.1.1. Если дифференциал df субмерсии $f:M\to B$ сохраняет длину горизонтальных векторов, то она называется римановой субмерсией.

Определение 2.1.2. Дифференцируемая функция $f:M\to R$ без критических точек называется метрической функцией если для каждого вертикального векторного поля X выполнено условие $X\left(|gradf|^2\right)=0$, т.е. когда длина градиентного векторного поля постоянна на каждой поверхности уровня.

Основным результатом первого параграфа является следующая

Теорема 2.1.1. Пусть $f:M\to R$ метрическая функция. Тогда на R существует такая риманова метрика g^*, относительно которой данная функция является римановой субмерсией.

Во втором параграфе, названная «Кривизна поверхностей уровня римановых субмерсий», доказано, что поверхности уровня метрической функции, заданной на многообразии неотрицательной секционной кривизны, являются подмногообразиями неотрицательной секционной кривизны.

Изучается связь между секционными кривизнами слоеного многообразия M и слоя этого слоения.

Перейдём к изучению геометрии субмерсий, когда многообразие B одномерно.

Следующая теорема показывает связь между секционными кривизнами многообразия M и поверхности уровня функции f.

Теорема 2.2.1. Пусть M-многообразие неотрицательной (положительной) секционной кривизны, $f:M\to R$-дифференцируемая функция без критических точек и $X\left(|gradf|^2\right)=0$ для каждого вертикального векторного поля X. Тогда каждый слой слоения F (поверхность уровня функции f) является подмногообразием неотрицательной (положительной) секционной кривизны.

Используя доказательство теоремы-2.2.1 получен следующий результат:

Рассмотрим субмерсию

$$f:M\to R^k,\qquad f(q)=\{f_1(q),f_2(q),\cdots,f_k(q)\}.$$

В этом случае субмерсия порождает $n-k$ мерное слоение F на многообразии M.

Следующая теорема показывает связь между секционными кривизнами многообразия M и слоя слоения F, порождённого субмерсией f.

Теорема 2.2.2. Пусть M-многообразие постоянной неотрицательной (положительной) секционной кривизны, $f:M\to R^k$ субмерсия, где

$$f(q)=\{f_1(q),f_2(q),\cdots,f_k(q)\}.$$

Предположим, что $X\left(\left|gradf_i\right|^2\right)=0$ для каждого вертикального векторного поля X. Тогда каждый слой слоения F является подмногообразием неотрицательной (положительной) секционной кривизны.

Замечание. Секционные кривизны поверхности не обязаны быть постоянными.

В третьем параграфе, названная «Геометрия субмерсий многообразий неотрицательной кривизны», построены римановы субмерсии над орбитой векторных полей Киллинга на двумерной сфере, орбита которых совпадает со сферой. Используя этот факт построена риманова субмерсия над орбитой векторных полей Киллинга, которая порождает одномерное расслоение на трёхмерном торе.

Рассмотрим некоторое множество $D\subset V(M)$, которое содержит конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Для точки $x\in M$ через $t\to X^t(x)$ обозначим интегральную кривую векторного поля X, проходящую через точку x при $t=0$. Отображение $t\to X^t(x)$ определено в некоторой области $I(x)\subset R$, которая в общем случае зависит от поля X, и от начальной точки x. В дальнейшем, всюду в формулах вида $X^t(x)$ будем считать, что $t\in I(x)$.

Определение 2.3.2. Орбита $L(x)$ семейства D векторных полей, проходящая через точку x, определяется как множество таких точек y из M для которых существуют действительные числа $t_1,t_2,...,t_k$ и векторные поля $X_1,X_2,...,X_k$ из D (где k-произвольное натуральное число) такие, что

$$y=X_k^{t_k}\left(X_{k-1}^{t_{k-1}}\left(...\left(X_1^{t_1}(x)\right)...\right)\right).$$

В работах Американский профессор Г. Суссманна и британский математик П. Стивена доказано, что каждая орбита семейства векторных полей класса C^r, $r\geq 1$ с топологией Суссмана обладает дифференциальной структурой класса C^r погруженного подмногообразия M при $r\geq 1$.

В работе А. Нарманова, С. Саитовой[24] изучается геометрия орбит векторных полей Киллинга. Напомним, что векторное поле X на M называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований $x\to X^t(x)$, порождённая полем X, состоит из изометрий.

Рассмотрим семейство D, состоящее из векторных полей Киллинга, на двумерной сфере S^2:

$$X_1=\{-y,x,0\},\ \ X_2=\{-z,0,x\}.$$

Скобка Ли этих векторных полей равна полю $X_3=\{0,z,-y\}$. Векторные поля X_1, X_2, X_3 составляет базис минимальной алгебры $A(D)$, содержащей множество D. Для каждой точки орбита семейства совпадает с S^2.

Полагая

---

[2] Нарманов А.Я., Саитова С.С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014, том 50, №12, с.1582-1589.

$$\pi\left(t_1,t_2,t_3\right)=X_3^{t_3}\left(X_2^{t_2}\left(X_1^{t_1}\left(p\right)\right)\right)$$

получим отображение $\pi: R^3 \to S^2$, где $p(1,0,0)\in S^2$. Так как векторные поля X_1, X_2, X_3 порождают вращения сферы мы можем рассмотреть это отображение на трёхмерном торе $T^3 = S^1\times S^1\times S^1$.

Теорема 2.3.3. Существует такая риманова метрика g на T^3, что отображение

$$\pi: T^3 \to S^2,$$

порождает риманово расслоение на T^3.

В третьей главе диссертации, названной «Геометрия субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга» изучаются геометрии некоторых субмерсий, которые возникают при изучении геометрии векторных полей Киллинга.

В первом параграфе этой главы рассматривается семейство D, состоящее из трех векторных полей Киллинга на R^3:

$$X=\frac{\partial}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial}{\partial y},\quad Z=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z}.$$

Базисом минимальной подалгебры $A(D)$ являются векторные поля

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x},\ X_2=\frac{\partial}{\partial z},\ X_3=-z\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial z},\ X_4=\frac{\partial}{\partial y}.$$

Так как $\dim A_p(D)=3$ и $\dim A_p(D)\le \dim L(p)$, каждая орбита $L(p)$ является трёхмерным многообразием.

В результате полагая $\pi(t_1,t_2,t_3,t_4)=X_2^{t_2}(X_3^{t_3}(X_4^{t_4}(X_1^{t_1}(O))))$ получим следующее дифференцируемое отображение $\pi: R^4\to R^3$, где $O-$начало координат в R^3.

Теорема 3.1.4. Существует такая риманова метрика $\tilde{g}$ на R^3, что относительно этой римановой метрики

1. Отображение $\pi: R^4 \to R^3$ является римановой субмерсией;
2. Многообразие $(R^3,\tilde{g})$ является многообразием неотрицательной кривизны.

Показано, что секционная кривизна многообразия $(R^3,\tilde{g})$ по некоторым двумерным направлениям строго положительна.

Далее рассматривается семейство D, состоящее из векторных полей Киллинга

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial x_1},\ Y_2=\frac{\partial}{\partial x_2},\ Y_3=-x_3\frac{\partial}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial}{\partial x_3},\ Y_4=-x_4\frac{\partial}{\partial x_2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_4}$$

в четырехмерном пространстве R^4. Базисом минимальной подалгебры $A(D)$ являются следующие векторные поля $X_i=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1,2,3,4,$ $X_5=Y_3$, $X_6=Y_4$, и поэтому орбита $L(p)$ для каждой точки $p \in R^4$ совпадает со всем пространством R^4.

С помощью этой орбитой определим следующее субмерсия $\pi : R^6 \to R^4$ с формулой

$$\pi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) = X_6^{t_4}\left(X_4^{t_6}\left(X_2^{t_2}\left(X_5^{t_3}\left(X_3^{t_5}\left(X_1^{t_1}(O)\right)\right)\right)\right)\right),$$

где $O-$начало координат в R^4. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1.5. Существует такая риманова метрика $\tilde{g}$ на R^4, что отображение $\pi : R^6 \to R^4$ является римановой субмерсией и относительно римановой метрики $\tilde{g}$ многообразие $(R^4, \tilde{g})$ является многообразием неотрицательной кривизны.

Во втором параграфе этой главы, названная «Геометрия изопараметрических слоений неотрицательной кривизны», доказаны, что построенные в первом параграфе субмерсии порождают изопараметрические слоения.

Отображения

$$S : V(F) \times H(F) \to V(F),$$

заданное формулой $S(X,U) = \nabla_X^v U$ называется вторым основным тензором, где $\nabla_X^v U$-вертикальная компонента векторного поля $\nabla_X U$, $V(F), H(F)$-множество всех вертикальных и горизонтальных векторных полей соответственно.

При фиксированным поле нормалей $U \in H(F)$ отображение $S(X,U)$ обращается в тензорное поле S_U типа (1,1):

$$S(X,U) = S_U X = \nabla_X^v U.$$

Тензорное поле S_U-определяет билинейную форму l_U:

$$l_U(X,Y) = \langle S_U X, Y \rangle.$$

Тензорное поле S_U называется вторым основным тензором, форма $l_U(X,Y)$ второй основной формой по отношению к нормальному векторному полю U.

Тензорное поле S_U является линейным отображением и поэтому задаётся матрицей $S(X,U) = AX$.

Горизонтально векторное поле U называется слоёным, если для каждого поля $Y \in V(F)$, поле $[Y,U]$ также является вертикальным. В случае, когда поле U является слоёным, собственные значения матрицы A называется главными кривизнами слоения F. Если главные кривизны локально постоянны вдоль слоёв, то слоение F называется изопараметрическим.

Теорема 3.2.1. Риманова субмерсия $\pi : R^4 \to R^3$ из теоремы 3.1.4 порождает на R^4 изопараметрическое слоение.

Теорема 3.2.2 Риманова субмерсия из теоремы-3.1.5 порождает изопараметрическое слоение нулевой кривизны.

В третьем параграфе третьей главы, названная «Геометрия субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга», рассматривается семейство D состоящий из n векторных полей Киллинга в R^n, из которых k вращений, $n-k$ параллельных переносов, где $n=2k+l$:

$$Y_i=\begin{cases} -x_i\dfrac{\partial}{\partial x_{i-1}}+x_{i-1}\dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{если } i \text{ четно и } 1<i\le 2k,\\ \dfrac{\partial}{\partial x_i}, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Показано, что базис минимальной алгебры $A(D)$ состоит из $n+k$ векторных полей

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j},\quad X_{n+s}=-x_{2s}\frac{\partial}{\partial x_{2s-1}}+x_{2s-1}\frac{\partial}{\partial x_{2s}},$$

где $j=1,2,...,n$ и $s=1,2,...,k.$

По теореме 3.1.1 орбита семейства D для каждой точки совпадает со всем пространством R^n. Поэтому мы можем определить следующую субмерсию $\pi:R^{n+k}\to R^n$ формулой:

$$\pi(t_1,t_2,...,t_{n+k})=X_{n+k}^{t_{n+k}}(...(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)...)),$$

где O-начало координат в R^n. Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3.1. Существует такая риманова метрика $\tilde{g}$ на R^n, что

1) Отображение $\pi:R^{n+k}\to R^n$ является римановой субмерсией и порождает риманово слоение;

2) Субмерсия $\pi:R^{n+k}\to R^n$ порождает на R^{n+k} изопараметрическое слоение;

3) $(R^n,\tilde{g})$ является многообразием неотрицательной кривизны;

Если $k\ge 2$, то

4) Субмерсия $\pi:R^{n+k}\to R^n$ порождает на R^{n+k} слоение нулевой кривизны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению геометрии римановых субмерсий на многообразиях неотрицательной кривизны. Основными результатами диссертации являются следующие:

1. Доказано, что субмерсия, компоненты которой являются метрическими функциями, заданная на многообразии постоянной неотрицательной (положительной) секционной кривизны, порождает слоение, каждый слой которого является многообразием неотрицательной (положительной) секционной кривизны.

2. Доказано, что субмерсия на трёхмерном торе, которая построена над орбитой векторных полей Киллинга на двумерной сфере, порождает риманово расслоение.

3. Доказано, что существует такая риманова метрика на орбите векторных полей Киллинга, что субмерсия, построенная над этой орбитой является римановой,

4. Доказано, что орбита векторных полей Киллинга, порождающих риманову субмерсию, является многообразием неотрицательной кривизны.

5. Доказано, что риманова субмерсия, порождёнными векторными полями Киллинга, порождает изопараметрическое слоение.

6. Доказано, что слоение размерности больше или равной двум, порожденное римановой субмерсией над орбитой векторных полей Киллинга, имеет нулевую кривизну.

Все результаты диссертационной работы являются новыми и могут быть использованы при дальнейших исследованиях по теории векторных полей, по теории слоений, по геометрии римановых субмерсий, и в других разделах современной геометрии.

Автор приносит свою глубокую признательность научному руководителю профессору Нарманову Якубовичу Нарманову за постановку задач, ценные советы и полезные консультации при подготовке диссертации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TURSUNOV BAYRAMALI AKBAROVICH

GEOMETRY OF RIEMANNIAN SUBMERSIONS MANIFOLDS OF NONNEGATIVE CURVATURE

01.01.04 – Geometry and topology

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.2.PhD/FM502.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan and Karshi State university

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor: **Narmanov Abdigappar Yakubovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Zaitov Adilbek Atakhanovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Kaipnazarova Guljakhon
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent

Leading organization: **Tashkent state transport university**

Defense will take place «4» august 2020 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №53) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «28» july 2020 year
(Mailing report № 1 on «27» july 2020 year)

A. Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliyev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

R.B.Beshimov
Chairman of scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Dotsent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the geometry of Riemannian submersions on manifolds of non-negative curvature and to study the geometry of the foliations generated by Riemannian submersions.

The object of the research work is Riemannian submersion, foliated manifold, isoparametric foliations, Killing vector field, orbit of vector fields.

Scientific novelty of the research work is as follows:

It is proved that a submersion, whose components are metric functions, defined on a manifold of constant nonnegative (positive) sectional curvature, generates a foliation, each fiber of which is a manifold of nonnegative (positive) sectional curvature.

It is proved that the submersion on the three-dimensional torus, which is constructed over the orbit of Killing vector fields on the two-dimensional sphere, generates a Riemannian bundle.

It is proved that there exists a Riemannian metric on the orbit of Killing vector fields such that the submersion constructed over this orbit is Riemannian,

It is proved that the orbit of the Killing vector fields generating the Riemannian submersion is a manifold of non-negative curvature.

It is proved that the Riemannian submersion generated by Killing vector fields generates an isoparametric foliation.

It is proved that the foliation of dimension greater than or equal to two, generated by the Riemannian submersion over the orbit of Killing vector fields, has zero curvature.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation on the geometry of submersions on manifolds of non-negative curvature were used in the following research projects:

The connections between the sectional curvatures of the leaves of the foliation and the foliated manifold were used in the of the project “The development of geometric and analytical methods in problems of control theory and differential games " in solving problems on the topological and geometric properties of foliated manifolds (Certificate of the Ministry of Higher and Secondary Education of Republic of Uzbekistan dated June 25, 2020 No. 89-03-2265). The application of these scientific results allowed to study the geometry and topology of foliated manifolds;

The connections between the sectional curvatures of the orbits of a family of vector fields and phase space were used in the project of Udmurt State University "No. 18-51-41005 Development of geometric and analytical methods in problems of control theory and differential games" in solving problems of dynamical systems and dif-ferential games (Udmurt State University, Russia, Certificate No. 7873-5526 / 31 of May 12, 2020). The application of these scientific results allowed us to study the geometry of the reachability set of differential games. In particular, the connection between the geometry of the orbits of vector fields and the curvature of the phase space.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introducetion, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 96 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей киллинга. Узбекский математический журнал, 2017, №2, Тошкент, с.76-83 (01.00.00; №6).
2. Tursunov B.A. Geometry of submersions generated by Killing vector fields. International journal of physics and mathematical sciences. 2016, vol. 6 (1), India, 6-10. (01.00.00; Осиё №6)
3. Tursunov B.A. On the geometry of riemannian submersions over orbit of killing vector fields. Bulletin of mathematics and statistics research. Vol.4.Issue.2.2016 (April-June), India, 102-107 (№6. GIF. IF=0.458).
4. Narmanov A.Ya., Tursunov B.A. Geometry of submersions on manifolds of nonnegative curvature. Mathematica Aeterna, Vol. 5, 2015, Bulgaria, 169-174 (№23. SJIF. IF=0.46).
5. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. Геометрия слоений неотрицательной кривизны. Ўзбекистон Республикаси фанлар академияси маърузалари, Тошкент, 2015, № 1, 11-12 (01.00.00; №7).
6. Зойидов А.Н., Турсунов Б.А. О геометрии субмерсий на многообразиях неотрицательной кривизны. Узбекский математический журнал, 2015, № 2, Тошкент 27-34 (01.00.00; №6).
7. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии слоений неотрицательной кривизны. Узбекский математический журнал, 2013, №3, Тошкент, 78-84 (01.00.00; №6).
8. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии слоений неотрицательной кривизны. УЗМУ хабарлари, 2013, №4/1, Декабрь, Ташкент, 215-217 (01.00.00; №8).

II бўлим (2 часть; part 2)

9. Нарманов А. Я., Турсунов Б. А. О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга. International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis», May 31-June 5, 2017 Odessa, Ukraine. 129-130.
10. Tursunov B.A., Annaev N. Killing vector fields and geometry of submersions. Problems of modern topology and its applications: Abstracts of the conference, 11-12 May 2017. Tashkent. pp. 103-105.
11. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии римановых субмерсий. Проблемы современной топологии и её приложения: Материалы научной конференции, 11-12 Май 2017. Ташкент. стр. 231-233.

12. Tursunov B.A., Annaev N. On the dynamics of Killing vector fields. Modern problems of dynamical systems and their applications: Abstracts of the Republic conference. May 1-3, 2017. Turin Polyrechnic University in Tashkent. 237-239.
13. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга. Труды международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль-Хорезми 2016" (9-10 ноябрь, 2016 г.), Бухарский ГУ, стр.291-293.
14. Турсунов Б.А. Векторные поля Киллинга и геометрия субмерсий. Международная конференция по алгебре, анализу и геометрии (*Казань 26 июня – 2 июля 2016 года*), 2016.06.26-07.02. Казань, 338-339.
15. Tursunov B.A. On the method of construction of riemannian submersions, Проблемы современной топологии и ее приложения, 2016. 05.5-6. Tashkent (TDPU Nizomiy), 105-106.
16. Tursunov B.A. Geometry of submersions and Killing vector fields. Актуальные вопросы анализа**,** 2016.04.22-23. Qarshi,
17. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии множеств достижимости. «Теория управления и математическое моделирование» посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. 2015.06. 9-11. г.Ижевск, Удмуртский государственный университет, 188-189.
18. Зойидов А.Н., Турсунов Б.А. О геометрии расслоений на многообразиях неотрицательной кривизны. «Теория управления и математическое моделирование» посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. 2015.06. 9-11, г.Ижевск, Удмуртский государственный университет, 329-331.
19. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии многообразий неотрицательной кривизны. Геометрия в Одессе – 2014, Украина. 43
20. Нарманов А.Я., Турсунов Б.А. О геометрии многообразий неотрицательной кривизны. Modern problems of applied mathematics and information technology al-Khorezmiy 2014, Самарқанд, 55.
21. Турсунов Б.А., О кривизне подмногообразий. Актуальные вопросы геометрии и её приложения, 27-28.10. 2014, ЎзМУ, Тошкент, 227-229.
22. Нарманов А.Я., Косимов О.Ю., Турсунов Б.А. Сингулярные римановы слоения сфер малой размерности. Амалий математика ва информацион технологияларнинг долзарб муаммолари – ал-Хоразмий-12 (конференция материлаллари), 2012 декабр, ЎзМУ, Тошкент, 88-89.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«ЎзМУ хабарлари» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 24.07.2020 йил