**ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

НИШОНОВА ШАХНОЗАХОН ТОХИРЖОН ҚИЗИ

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИК ВА ЭЛЛИПТИКО- ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

**ФИЗИКА - МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD)
ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

ФАРҒОНА – 2020

УДК: 517.956

Физика – математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

**ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

ФАРҒОНА ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

НИШОНОВА ШАХНОЗАХОН ТОХИРЖОН ҚИЗИ

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИК ВА ЭЛЛИПТИКО- ПАРАБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОЛОКАЛ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика

ФИЗИКА - МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРФЕРАТИ

ФАРҒОНА – 2020

Физика - математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM220 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Фарғона Давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.fdu.uz.) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим тармоғида (www.ziyonet.uz.) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Мирсабуров Мирахмат** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Апаков Юсупжон Пулатович физика-математика фанлари доктори, доцент
Етакчи ташкилот:	Ўзбекистон Миллий университети

Диссертация ҳимояси Фарғона давлат университети хузуридаги PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «___»________ соат ____даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19-уй.Тел.:(+99873)244-44-02, факс: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz.)

Диссертация билан Фарғона давлат университетининг Ахборот - ресурс марказида танишиш мумкин (____рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 150100, Фарғона шаҳар, Мураббийлар кўчаси, 19- уй.Тел.:(0573)244-44-94.

Диссертация автореферати 2020 «__»________куни тарқатилди.
(2020 йил «__»_____ даги ______ рақамли реестр баённомаси).

А.К. Уринов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

И.У.Хайдаров
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Ш.Т.Каримов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Йигирманчи асрнинг ўрталаридан бошлаб, “аралаш типдаги тенгламалар” деб аталувчи ва газлар динамикаси, суюқликлар динамикаси, сиртларнинг чексиз кичик букилиш назарияси, математик биология ва бошқа фан тармоқларида кўплаб татбиқларга эга бўлган дифференциал тенгламалар жадал ўрганилмоқда. Аралаш типдаги тенгламалар назариясида дастлаб классик чегаравий масалалар, яъни соҳа чегарасининг тўлиқ ёки баъзи қисмларида функциянинг қиймати ёки ҳосиласининг (аниқ йўналишли) қиймати ёки уларнинг баъзи комбинацияси берилган масалалар тадқиқ қилинган. Кейинчалик эса бу назарияда (классик масалалар билан биргаликда) нолакал масалалар (яъни нолокал шартли масалалар), жумладан, Франкл масаласи, Бицадзе – Самарский масаласи, силжишли масалалар ва уларга ўхшаш масалалар ҳам ўрганила бошланди. Бундай масалаларда нолокал шарт изланаётган функциянинг ёки унинг ҳосиласининг тенглама қаралаётган соҳа чегарасининг турли нуқталаридаги қийматлари орасидаги боғланишни ёки соҳанинг ички ва чегарасида ётувчи нуқталаридаги қийматларини боғловчи муносабатни ифодалайди. Нолокал масалаларни ўрганишнинг муҳимлиги, авваламбор шундан иборатки, улардан хусусий ҳолда коррект қўйилган турли классик чегаравий масалалар келиб чиқади. Қолаверса, турли физик, химик, биологик, экологик жараёнларни математик моделлаштиришда нолокал шартлар келиб чиқади. Масалан, 1896 йилда В.А.Стеклов чекли ўлчамли жисмларнинг совуш жараёнини математик моделлаштиришда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун нолокал масалалар юзага келиб, бунда нолокал шартлар изланаётган ечимнинг соҳа чегарасининг турли нуқталаридаги қийматлари орасидаги чизиқли комбинацияларни ифодалашини кўрсатиб берган.

Ҳусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун нолокал масалаларнинг яна бир мухим синфи интеграл шартли масалалардир. Бундай масалалар, масалан, турбулент плазмада зарраларнинг дуффузиясини, юпқа қиздирилган стерженда иссиқлик тарқалиш жараёнини, капилляр – ғовак муҳитда намлик ўтказувчанлик жараёнини ва математик физиканинг бир қанча тескари масалаларини ўрганишда келиб чиқади.

Охирги вақтларда мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқга эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Шунингдек, математик фанларнинг устивор йўналишлари бўйича, айниқса, алгебра ва функционал анализ, дифференциал тенгламалар ва математик физика, динамик системалар назарияси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича халқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқотлар олиб бориш Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаси ва йўналиши этиб белгиланди[1].

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори.

Шу нуқтаи назардан келиб чиқиб, мамлакатимизда математиканинг турли соҳалари бўйича, жумладан, аралаш типдаги тенгламалар учун чегаравий ва спектрал масалалар тадқиқоти бўйича ҳалқаро тан олинган салмоқли натижаларга эришилди.

Мазкур диссертациянинг мавзуси ва тадқиқот объекти Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909 «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682 «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2019 йил 9 июндаги ПҚ-4387 «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисидаги» Қарорлари, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 24 январдаги Олий Мажлисга мурожаатномаси ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Франкл, Бицадзе – Самарский, силжишли ва интеграл шартли масалалар бўйича тадқиқотлар мос равишда 1956, 1969, 1962, 1963 йилларда бошланган. Аммо, нолокал шартларнинг умумий таърифи ва классификацияси А.М.Нахушев томонидан 1995 йилда берилган. Франкл шартининг моҳияти шундан иборатки, у изланаётган функциянинг тенглама қаралаётган соҳа чегарасининг эллиптик ва гиперболик қисмларида ётувчи нуқталаридаги қийматларини боғлайди. Франкл шартили масала биринчи бўлиб, Чаплигин тенгламаси учун Ф.И. Франкл томонидан қўйилган бўлиб, масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлигини Ю.В.Двингтал исботлаган. Бу масала ечимининг ягоналиги муаммоси билан А.В.Бицадзе, Н.Ю.Капустин ва К.Б.Сабитовлар ҳам шуғулланган. Лаврентьев – Бицадзе тенгламаси учун Франкл масаласини А.В.Бицадзе ўрганган. М.Мирсабуров сингуляр коэффициентли Чаплигин тенгламаси учун Франкл шартини умумлаштирувчи шартлар билан масала қўйган ва ўрганган, шунингдек, у бузилиш чизиғида ва чегаравий характеристикада Франкл шартига ўхшаш шарт берилган масалаларни ҳам тадқиқ қилган. Спектрал параметрли Лаврентьев – Бицадзе тенгламаси ва иккита сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик тенглама учун Франкл шартига ўхшаш шартли баъзи чегаравий ва спектрал масалалар мос равишда И.Т.Тожибоев ва К.Т.Каримов ишларида қаралган. Е.И. Моисеев ва Н.Аббаси бир махсус соҳада Лаврентьев – Бицадзе тенгламаси учун қўйилган Франкл масаласига ўхшаш масалалар хос функциялари системасининг тўлалиги ва базис ташкил қилишини текширган. Бундай муаммолар билан М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов, К.Б.Сабитовлар ҳам шуғулланганлар. Параболо – гиперболик тенгламалар учун Франкл шартига ўхшаш шартли турли масалаларни А.В.Псху, И.У.Хайдаров, Д.Базаров ва Х.Салтановлар ўрганганлар.

Бицадзе – Самарский шартили масала биринчи бўлиб, текис эллиптик тенглама учун А.В.Бицадзе ва А.А.Самарскийнинг ҳаммуаллифликдаги мақоласида баён қилинган. Бу масаланинг моҳияти шундан иборатки, изланаётган функциянинг соҳа чегарасидаги қиймати, соҳа ичидаги (бу функция тенгламани қаноатлантириши керак бўлган) нуқтада такрорланади. Бу ишдан сўнг тадқиқотчилар соҳа чегарасида ёки ичида бузилувчи эллиптик, гиперболик ва параболик тенгламалар учун ҳам, эллиптико-гиперболик ва параболо – гиперболик типдаги аралаш тенгламалар учун ҳам Бицадзе – Самарский шартига ўхшаш шартли турли масалалар баён қилдилар ва ўргандилар. Улар орасида Ш.А.Алимов, А.М.Нахушев, М.С.Салахитдинов, А.К.Уринов, М.Мирсабуров, Б.Исломов ва бошқаларнинг ишларини таъкидлаб ўтамиз. Силжишли шартли масалалар биринчи бўлиб, В.И.Жигалов ва А.М.Нахушев томонидан гиперболик ва аралаш типдаги тенгламаларга қўйилган ва тадқиқ қилинган. Силжишли шартларнинг аввалгилардан фарқи шундан иборатки, улар изланаётган функциянинг ёки ҳосиласининг (умуман олганда, каср тартибли) икки чегаравий характеристикалар нуқталарида ҳисобланган қийматлари орасидаги муносабатни беради. А.М.Нахушев кўрсатганки, силжишли шартли масалаларни қандай баён қилиш, қаралаётган тенглама умумий ечимининг тузилишига боғлиқ. Шу нуқтаи назардан келиб чиқиб, тадқиқотчилар гиперболик типдаги модел тенглама ва умумий чизиқли тенгламалар учун ҳам, бундай гиперболик тенгламаларни ўз ичига олувчи аралаш тенгламалар учун ҳам турли силжишли масалалар баён қилдилар ва ўргандилар. Бу йўналиш бўйича М.С.Салахитдиновнинг ўз шогирдлари А.К.Уринов, М.Мирсабуров, Б.Исломовлар билан чоп этган монографиялари ҳамда А.М.Нахушевнинг силжишли масалалар бўйича нашрдан чиққан илмий мақолаларининг таҳлили келтирилган монографиясини алоҳида таъкидлаб ўтиш лозим.

Интеграл шартли масалани дастлаб J.R.Canon ва Л.И.Каминин иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига баён қилган. Шундан сўнг параболик, гиперболик ва эллиптик тенгламалар учун турли интеграл шартли масалаларни текисликда, масалан, Н.И.Ионкин, Л.А.Муравей ва А.В.Филиновский, А.В.Голованчиков, И.Э.Симонова ва Б.М.Симонов, Л.С.Пулькина, А.Т.Асанова, З.А.Нахушева, Я.Т.Мегралиев, А.К.Уринов, кўп ўлчовли фазода, масалан, А.И.Кожанов, Л.С.Пулькина, Т.Ш.Кальменов ва Д.Сураган, хусусий ҳосилали тоқ тартибли дифференциал тенгламалар учун эса, масалан, О.С.Зикиров, А.Н.Кожанов баён қилганлар ва ўрганганлар.

К.Б.Сабитов ва Ю.К.Сабитова эса мос равишда параболо – гиперболик ва эллиптико – гиперболик тенгламалар учун тўртбурчакда интеграл шартли масалаларни тадқиқ қилганлар. А.К.Уринов ва Қ.С.Халилов параболо – гиперболик типдаги тенгламаларни тўртбурчак ва характеристик учбурчакдан иборат соҳада қараб, соҳанинг параболик қисмида интеграл шарт берилган турли масалаларни ўрганганлар. Ҳозирги вақтда иккита сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик тенгламалар учун ноанъанавий соҳаларда нолокал шартли масалалар, эллиптико – параболик тенгламалар учун эса тўғри тўртбурчак бўлмаган соҳаларда интеграл шартли масалалар кам ўрганилган бўлиб қолмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий – тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Фарғона давлат университети илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-59 «Чизиқли иккинчи тартибли хусусий ҳосилали сингуляр коэффициентли дифференциал тенгламалар учун бошланғич ва чегаравий масалалар» (2012-2016 йй) фундаментал лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик ва эллиптико – параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун нолокал масалалар қўйиш ва ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

иккита сингуляр коэффициентали эллиптико – гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун Франкл ва Бицадзе – Самарский шартларига ўхшаш шартли ҳамда силжишли шартли нолокал чегаравий ва спектрал масалалар қўйиш;

битта сингуляр коэффициентли эллиптико – параболик типдаги тенглама учун интеграл шартли нолокал чегаравий масалалар қўйиш;

қўйилган нолокал чегаравий масалалар ечимининг ягоналиги ва мавжудлигини исботлаш;

қўйилган спектрал масалалар хос сонлари ва хос функцияларини топиш.

Тадқиқотнинг объекти сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик ва эллиптико – параболик типдаги дифференциал тенгламалардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик ва эллиптико – параболик типдаги дифференциал тенгламалар учун нолокал чегаравий ва спектрал масалалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Қўйилган чегаравий масалалар ечимининг ягоналигини исботлашда энергия интеграллари ва экстремум принципи усулларидан, ечимнинг мавжудлигини исботлашда эса интеграл тенгламалар усулидан фойдаланилган. Қўйилган спектрал масалаларнинг хос функциялари ўзгарувчиларини ажратиш усули ёрдамида, хос қийматлари эса бессел ва гипергеометрик функциялар назариясидан фойдаланиб топилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги. Диссертациянинг асосий илмий натижалари янги ва қуйидагилардан иборат:

иккита сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун турли анъанавий бўлмаган аралаш соҳаларда Франкл, Бицадзе – Самарский шартларига ўхшаш шартли ҳамда силжишли шартли нолокал чегаравий масалалар баён қилинган;

битта сингуляр коэффициентли эллиптико – параболик типдаги тенглама учун тўғри тўртбурчак бўлмаган аралаш соҳада интеграл шартли нолокал чегаравий масалалар қўйилган;

аралаш соҳаларда қўйилган нолокал чегаравий масалалар ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган;

чорак доирада иккита сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун соҳа чегарасида изланаётган функция ва унинг каср тартибли ҳосиласини боғловчи нолокал шартли турли масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланган.

ярим доирада битта сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун интеграл шартли бир нолокал чегаравий масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган;

эллиптик ва эллиптико – гиперболик типдаги тенгламаларга қўйилган нолокал чегаравий масалаларга мос нолокал спектрал масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари олинган илмий натижаларни диссертацияда ўрганилган масалаларга келтирилувчи математик моделларнинг қиёсий хусусиятларини ўрганишга ва тақрибий ҳисоблашларга қўллаш мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламалар назариясининг усулларидан фойдаланиб, дедуктив хулосалар қабул қилинганлиги ҳамда теоремаларнинг қатъий ва тўлиқ исботланганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти уларни хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясини янада ривожлантириишда фойдаланилиши мумкинлигидан иборат. Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти сингуляр коэффициентли ҳусусий ҳосилали ва бузиладиган дифференциал тенгламалар ёрдамида тавсифланувчи амалий масалаларни тадқиқ қилишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ушбу диссертацияда олинган натижалар қуйидаги илмий – тадқиқот лойиҳаларида қўлланилган:

Сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик ва эллиптико – параболик типдаги тенгламалар учун нолокал масалалар тадқиқоти натижалари 1.7311.2017/8.9 рақамли “Дифференциал ва псевдодифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар тадқиқот усулларини ривожлантириш” (Белгород давлат миллий тадқиқот университети) халқаро лойиҳасида фойдаланилган. Олинган натижалар юқоридаги илмий лойиҳада дифференциал тенгламалар ечимлари кўринишидан фойдаланиш ва уларни амалий масалаларга қўллаш имконини берган.

Каср тартибли ҳосила ва интеграллар қўлланган эллиптико – гиперболик типдаги тенгламалар учун нолокал шартли чегаравий ва спектрал масалалар ҳамда эллиптико – параболик типдаги тенгламалар учун интеграл шартли масалаларнинг тадқиқоти натижалари математика ва компьютер моделлаштириш лабораторияси доирасида сингуляр коэффициентли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлашда қўлланилган (Витус Беринг номидаги Камчатка давлат университети). Олинган натижаларни қўллаш каср тартибли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар ечимини қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари **4** та ҳалқаро ва **2** та республика илмий ва илмий – амалий анжуманларида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами **14** та илмий иш чоп этилган бўлиб, улардан **8** таси илмий мақола, шундан, **1** таси хорижий ва **6** таси Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссияси эътироф этган республика журналларида нашр қилинган.

Диссертация тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, учта боб, хулоса ва адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Ҳар бир боб параграфларга, параграфлар эса бандларга бўлинган. Бунда учта рақамли номердан фойдаланилган: биринчи рақам боб номерини, иккинчи рақам параграф номерини, учинчи рақам эса банд номерини билдиради. Диссертациянинг умумий ҳажми 121 бет бўлиб, 9 бети адабиётлар рўйхатидан иборатдир. Адабиётлар рўйхати 91 та номни ўз ичига олади. Формула (теорема, лемма)лар иккита рақамлар билан номерланган: биринчи рақам боб номерини, иккинчи рақам эса формула номерини билдиради.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг, **«Эллиптико – гиперболик типдаги тенгламалар учун нолокал чегаравий масалалар»** деб номланган, биринчи боби бешта параграфлардан иборат бўлиб, бу параграфларда турли аралаш соҳаларда Франкл, Бицадзе – Самарский ва силжишли шартли нолокал чегаравий масалалар қўйилган ва ўрганилган.

§1.1 да xOy текисликнинг $\overline{\sigma} = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ ёй ва $\overline{EA} = \{(x,y):\ x - y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$, $\overline{EB} = \{(x,y): x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}$ кесмалар билан чегараланган, бир боғламли, чекли Ω соҳасида

$$sign x \cdot u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} + \left(2\beta / |x|\right) u_x + \left(2\beta / |y|\right) u_y = 0 \qquad (1)$$

тенглама қаралади, бу ерда $\beta \in (0, 1/2)$ - берилган ҳақиқий сон.

(1) тенглама Ω соҳада аралаш типга тегишли, яъни $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y): x > 0, y > 0\}$ соҳада эллиптик, $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y): y < 0, x + y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y): y < 0, x + y < 0\}$ соҳаларда гиперболик типга тегишлидир. $OD = \{(x,y): x + y = 0, 0 < x < (1/2)\}$ кесма тенгламанинг характеристикаси, $OA = \{(x,0): 0 < x < 1\}$ эса тип ўзгариш чизиғи ва тенглама коэффициентининг сингулярлик чизиғидир.

(1) тенгламанинг Ω соҳада регуляр ечими деб, шундай $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2)$ функция тушуниладики, у Ω_0, Ω_1, Ω_2 соҳаларда (1) тенгламани қаноатлантиради ва $\lim\limits_{y \to \pm 0} |y|^{2\beta} u_y(x,y)$, $x \in (0,1)$; $\lim\limits_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x,y)$, $y \in (-1,0) \cup (0,1)$ лимитлар мавжуд бўлиб, $u(z,0), u(0,\pm z) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$ ҳамда $\lim\limits_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x, \pm z)$, $\lim\limits_{y \to \pm 0} |y|^{2\beta} u_y(z,y) \in C^2(0,1)$ ва $z \to 0$, $z \to 1$ да $1 - 2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин.

$A^{(1)}$ **масала**. (1) тенгламанинг Ω соҳада регуляр шундай $u(x,y)$ ечими топилсинки, у қуйидаги улаш шарти

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1 \qquad (2)$$

ва чегаравий шартларни

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{\sigma}; \qquad (3)$$

$$u(0,-y) = -u(0,y) + f_1(y), \qquad 0 \leq y \leq 1; \qquad (4)$$

$$\lim_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x,-y) = -\lim_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x,y) + f_2(y), \quad 0 < y < 1; \qquad (5)$$

$$u[(x+1)/2, (x-1)/2] = u[(1-x)/2, -(1+x)/2] + f_3(x), \ 0 \leq x \leq 1 \qquad (6)$$

қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi(x,y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(x)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(1,0) + \varphi(0,1) = f_1(1) + f_3(1)$, $f_3(0) = 0$.

Шуни айтиш керакки, (4) ва (5) - Франкл шартларига ўхшаш шартлар, (6) – шарт эса А.М. Нахушев таклиф қилган силжишли шартга ўхшаш шарт бўлиб, (6) - $u(x,y)$ функциянинг $x - y = 1$ характеристиканинг $\overline{DA}$ ва $\overline{DE}$ кесмаларида ётувчи нуқталардаги қийматларини боғлайди. $A^{(1)}$ масаланинг қўйилишидан Ω соҳа чегарасининг ҳамма жойи чегаравий шарт билан бандлигини кўриш мумкин.

Бу параграфнинг 1.1.1 бандида қуйидаги ёрдамчи масала ўрганилган.

$E^{(1)}$ **масала**. Шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)\cap C^2(\Omega_0)$ функция топилсинки, у Ω_0 соҳада (1) тенгламани ва унинг чегарасида (4), $u(z,0)=-u(0,z)+g_1(z)$, $0\le z\le 1$; $\lim\limits_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(z,y)=\lim\limits_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,z)+g_2(z)$, $0<z<1$ шартларни қаноатлантирсин ҳамда $u(z,0)$, $u(0,z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ ва $\lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(z,y)$, $\lim\limits_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,z)\in C^2(0,1)$ бўлиб, $z\to0$ ва $z\to1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\varphi(x,y)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)=g_1(1)$.

Қуйидаги теореманинг ўринли эканлиги исботланган.

1.1 - теорема. Фараз қилайлик, а) $g_1(x)\in C^1[0,1]\cap C^3(0,1)$, $g_1(1)=0$ ва $g_1'(x)$ функция $g_1'(x)=x^{\gamma}\tilde g_1(x)$ кўринишига эга, бу ерда $\gamma\ge1$, $\tilde g_1(x)\in C^2[0,1]$; б) $g_2(x)\in C^2(0,1)$ ва $x\to0$, $x\to1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин; в) $\varphi(x,y)$ функция қуйидаги кўринишга эга:

$$\varphi(x,y)=(xy)^{\alpha}\varphi_0(x,y),\qquad \varphi_0(x,y)\in C(\overline{\sigma}),\qquad \alpha>1. \tag{7}$$

У ҳолда $E^{(1)}$ масала ягона ечимга эга.

$E^{(1)}$ масала ечимининг ягоналиги энергия интеграл усули билан, мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усули ёрдамида исботланган.

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат:

1.2 - теорема. Фараз қилайлик, а) $f_1(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$, $f_1(1)=0$ ва $f_1'(x)=-2xT'\left(x^2\right)+x^{\gamma}\tilde f_1(x)$, бу ерда $\gamma\ge1$, $\tilde f_1(x)\in C^2[0,1]$;

$$T(x)=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(1-x)^{-\beta}\int_0^x[(1-t)^{\beta}f_3(\sqrt{t})]_t'(1-t)^{\beta}(x-t)^{-\beta}dt; \tag{8}$$

б) $f_2(x)\in C^2(0,1)$ ва $x\to0$, $x\to1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин; в) $f_3(x)=x^{\delta}(1-x^2)^{\mu}\tilde f_3(x)$, $\delta\ge4$, $\mu\ge2-2\beta$, $\tilde f_3(x)\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$; г) $\varphi(x,y)$ функция (7) кўринишига эга.

У ҳолда $A^{(1)}$ масала ягона ечимга эга.

1.2 параграфда xOy текисликнинг $\overline{\sigma}=\{(x,y):x^2+y^2=1,\ x\ge0,\ y\ge0\}$ ёй ва $\overline{EA}=\{(x,y):x-y=1,\ 0\le x\le1\}$, $\overline{EO}=\{(x,y):x=0,-1\le y\le0\}$, $\overline{FO}=\{(x,y):y=0,-1\le x\le0\}$, $\overline{FB}=\{(x,y):y-x=1,0\le y\le1\}$ кесмалар билан чегараланган, бир боғламли, чекли Σ соҳасида (1) тенглама учун нолокал чегаравий масала баён қилинган ва ўрганилган.

(1) тенглама Σ соҳада аралаш типга тегишли, жумладан, $\Sigma_0=\Sigma\cap\{(x,y):x>0,y>0\}$ - соҳада эллиптик типга, $\Sigma_{1,j}=\Sigma\cap\{(x,y):y<0,$ $(-1)^j(x+y)<0\}$, $\Sigma_{2,j}=\Sigma\cap\{(x,y):x<0,(-1)^j(x+y)<0\}$, $j=\overline{1,2}$ соҳаларда

эса гиперболик типга тегишли. $OA=\{(x,0):0<x<1\}$ ва $OB=\{(0,y):0<y<1\}$ кесмалар тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи ва коэффициентларининг сингулярлик чизиқлари бўлиб, $OD_1=\{(x,y):y=-x,x\in(0,1/2)\}$ ва $OD_2=\{(x,y):y=-x,y\in(0,1/2)\}$ - тенгламанинг характеристикаларидир.

(1) тенгламанинг Ω соҳада регуляр ечими деб, шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\tilde{\Omega})$ функция тушуниладики, у $\tilde{\Omega}$ соҳада (1) тенгламани қаноатлантиради ва $\lim\limits_{y\to\pm0}|y|^{2\beta}u_y(x,y)$, $x\in(0,1)$; $\lim\limits_{x\to\pm0}|x|^{2\beta}u_x(x,y)$, $y\in(0,1)$; $\lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y)$, $x\in(-1,0)$; $\lim\limits_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,y)$, $y\in(-1,0)$ лимитлар мавжуд бўлиб, $u(\pm z,0)$, $u(0,\pm z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ ҳамда $\lim\limits_{y\to\pm0}|y|^{2\beta}u_y(z,y)$, $\lim\limits_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(-z,y)$, $\lim\limits_{x\to\pm0}|x|^{2\beta}u_x(x,z)$, $\lim\limits_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,-z)\in C^2(0,1)$ ва $z\to0$, $z\to1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин, бу ерда $\tilde{\Omega}=\Omega\setminus(OA\cup OB\cup OD_1\cup OD_2)$.

$A^{(2)}$ **масала**. (1) тенгламанинг Ω соҳада регуляр шундай $u(x,y)$ ечими топилсинки, у (2) ва

$$\lim_{x\to-0}(-x)^{2\beta}u_x(x,y)=\lim_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,y),\qquad 0<y<1 \tag{9}$$

улаш шартларини ҳамда (3), (4), (6),

$$\lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(-x,y)=-\lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y)+f_2(x),\qquad 0<x<1; \tag{10}$$

$$u\left[(y-1)/2,(y+1)/2\right]=u\left[-(1+y)/2,(1-y)/2\right]+f_4(y),\qquad 0\le y\le 1 \tag{11}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi(x,y)$, $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(y)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)=f_1(1)+f_3(1)$, $f_3(0)=f_4(0)=0$.

Таъкидлаш керакки, (4) ва (10) - Бицадзе – Самарский шартларига ўхшаш шартлар, (6) ва (11) – А. М. Нахушевнинг силжишли шартлари бўлиб, (11) $u(x,y)$ функциянинг $x-y=-1$ характеристиканинг $\overline{FD_2}$ ва $\overline{D_2B}$ кесмаларида ётувчи нуқталардаги қийматларини боғлайди.

$A^{(2)}$ масаланинг бир қийматли ечилиши 1.1 параграфда ўрганилган $E^{(1)}$ масалага эквивалент келтириш билан исботланган.

1.3 - теорема. Фараз қилайлик, а) $f_1(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$, $f_1(1)=0$ ва $f_1'(x)=-2xT'(x^2)+x^{\gamma}\tilde{f}_1(x)$, бу ерда $\gamma\ge1$, $\tilde{f}_1(x)\in C^2[0,1]$, $T(x)$ - (8) тенглик ёрдамида аниқланувчи функция; б) $f_2(x)\in C^2(0,1)$ ва $x\to0$, $x\to1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин;

в) $f_3(x)=x^{\delta}(1-x^2)^m\tilde{f}_3(x)$, $\delta\ge4$, $m\ge2-2\beta$, $\tilde{f}_3(x)\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$;

г) $f_4(y)=y^{l}(1-y^2)^n\tilde{f}_4(y)$, $l>2-2\beta$, $n>1-\beta$, $\tilde{f}_4(y)\in C^1[0,1]\cap C^3(0,1)$;

д) $\varphi(x,y)$ функция (7) кўринишига эга.

У ҳолда $A^{(2)}$ масала ягона ечимга эга.

Биринчи бобнинг охирги учта параграфида тенгламанинг сингулярлик чизиқлари кесмаларини ўз ичига олувчи аралаш соҳада Франкл шартига ўхшаш шартлар соҳанинг ичида, силжишли шартлар эса соҳа чегарасининг гиперболик қисмларида берилган нолокал масалалар қўйилган ва ўрганилган.

Фараз қилайлик, Δ - xOy текислигининг $x^2+y^2=1$ айлананинг $x\geq 0$, $y\geq 0$ даги $\bar{\sigma}$ ёйи, $x\geq 0$, $y\leq 0$ бўлганда $x-y=1$ тўғри чизиқ, $x\leq 0$, $y\geq 0$ бўлганда $y-x=1$ тўғри чизиқ ва $x\leq 0, y\leq 0$ бўлганда $x+y=-1$ тўғри чизиқ билан чегараланган бир боғламли, чекли соҳаси бўлсин. Яна қуйидаги белгилашларни киритайлик: $\Delta_0=\Delta\cap\{(x,y): x>0, y>0\}$, $\Delta_{1,k}=\Delta\cap\{(x,y): x>0, y<0, (-1)^k(x+y)<0\}$, $\Delta_{2,k}=\Delta\cap\{(x,y): x<0, y>0, (-1)^k(x+y)<0\}$, $\Delta_{3,k}=\Delta\cap\{(x,y): x<0, y<0, (-1)^k(x-y)<0\}$, $k=\overline{1,2}$, ҳамда A_1A_2 (OA_1), B_1B_2 (OB_1), Q_1Q_2 (OQ_1, OQ_2), A_2B_2 (A_2Q_0, B_2Q_0), A_2B_1 (A_2Q_2), B_2A_1 (B_2Q_1), OQ_0 лар эса мос равишда $y=0$, $x=0$, $x+y=0$, $x+y=-1$, $y-x=1$, $x-y=1$, $x=y$ тўғри чизиқлар кесмалари бўлсин, бу ерда $O(0,0)$, $A_1(1,0)$, $B_1(0,1)$, $A_2(-1,0)$, $B_2(0,-1)$, $Q_0(-1/2,-1/2)$, $Q_1(1/2,-1/2)$, $Q_2(-1/2,1/2)$, $\tilde{\Delta}=\Delta_0\cup\Delta_{1,1}\cup\Delta_{1,2}\cup\Delta_{1,3}\cup\Delta_{2,1}\cup\Delta_{2,2}\cup\Delta_{2,3}$.

Δ соҳада ушбу тенгламани қарайлик:

$$0=\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+(2\beta/x)u_x+(2\beta/y)u_y, & (x,y)\in\Delta_0;\\ u_{xx}-u_{yy}+(2\beta/x)u_x-(2\beta/y)u_y, & (x,y)\in\bigcup\limits_{j=1}^{3}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2}\Delta_{j,k}\right),\end{cases} \tag{12}$$

бу ерда β - берилган ҳақиқий сон бўлиб, $0<\beta<(1/2)$.

Δ соҳада (12) тенглама аралаш типга тегишли, яъни Δ_0 соҳада – эллиптик типга, $\Delta_{j,k}$, $j=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,2}$ соҳаларда эса гиперболик типга тегишли. A_1A_2 ва B_1B_2 кесмалар (12) тенгламанинг $u_x(x,y)$ ва $u_y(x,y)$ лар олдидаги коэффициентлари сингулярлик чизиқлари, OA_1, OB_1 - тенгламанинг тип ўзгариш чизиқлари, OQ_1, OQ_2 эса тенгламанинг характеристикаларидир.

(12) тенгламанинг Δ соҳада регуляр ечими деб, шундай $u(x,y)\in C(\bar{\Delta})\cap C^2(\tilde{\Delta})$ функция тушуниладики, у $\tilde{\Delta}$ соҳада бу тенгламани қаноатлантиради ва $\lim\limits_{y\to\pm 0}|y|^{2\beta}u_y(x,y)$, $x\in(-1,0)\cup(0,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm 0}|x|^{2\beta}u_x(x,y)$, $y\in(-1,0)\cup(0,1)$ лимитлар мавжуд бўлиб, $u(\pm z,0)$, $u(0,\pm z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ ҳамда $\lim\limits_{y\to\pm 0}|y|^{2\beta}u_y(\pm z,y)$, $\lim\limits_{x\to\pm 0}|x|^{2\beta}u_x(x,\pm z)\in C^2(0,1)$ ва $z\to 0$, $z\to 1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин.

1.3 - § да қуйидаги нолокал масала ўрганилган.

Γ_1 **масала**. (12) тенгламанинг D соҳада регуляр шундай $u(x,y)$ ечими топилсинки, у $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\bar{\sigma}$ ва

$$u[-(y+1)/2,(y-1)/2]-u[(y-1)/2,-(y+1)/2]=g_1(y),\ (-1)\le y\le 0; \quad (13)$$

$$u(x,0)-u(-x,0)=f_1(x),\ 0\le x\le 1;\ u(0,y)+u(0,-y)=f_2(y),\ 0\le y\le 1; \quad (14)$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=\lim_{y\to +0}y^{2\beta}u_y(x,y),\ \ x\in(-1,0)\cup(0,1); \quad (15)$$

$$\lim_{x\to -0}(-x)^{2\beta}u_x(x,y)=\lim_{x\to +0}x^{2\beta}u_x(x,y),\ \ y\in(-1,0)\cup(0,1) \quad (16)$$

шартларни қаноатлантирсин.

Бу ерда $\varphi(x,y)$, $g_1(t)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $f_1(0)=0$, $g_1(0)=0$, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)+g_2(-1)=f_1(1)+f_2(1)$.

Шуни таъкидлаш керакки, агар $y\in[-1,0]$ бўлса, $(-(y+1)/2,(y-1)/2)$ ва $((y-1)/2,-(y+1)/2)$ нуқталар мос равишда (12) тенгламанинг $x+y=-1$ характеристикасидаги $\overline{B_2Q_0}$ ва $\overline{A_2Q_0}$ кесмаларида ётади (Q_0 нуқтага нисбатан симметрик ҳолда). Шунинг учун (13) шарт изланаётган $u(x,y)$ функциянинг $\overline{B_2Q_0}$ ва $\overline{A_2Q_0}$ кесмалар нуқталаридаги қийматларини боғлайди. Бу масаланинг яна қизиқарли томони шуки, B_2A_1 ва A_2B_1 характеристикалар чегаравий шартлардан озод қилинган.

Қуйидаги теоремаларнинг тўғрилиги исботланган.

1.4 - теорема. Γ_1 масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

1.5 - теорема. Фараз қилайлик, а) $g_1(t)=|t|^{\delta}\left(1-t^2\right)^m \mathring{g}_1(t)$, $\delta\ge 4$, $m\ge 2-2\beta$, $\tilde{g}_1(t)\in C^2[-1,0]\cap C^4(-1,0)$; б) $f_j(t)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ ва $f_j'(t)$ $t\to 0$, $t\to 1$ да бирдан кичик тартибли махсусликка эга бўлиши мумкин, $j=\overline{1,2}$; в) $\varphi(x,y)=(xy)^{\alpha}\tilde{\varphi}(x,y)$, $\alpha>1$, $\tilde{\varphi}(x,y)\in C(\bar{\sigma})$; $f_2(0)=8\beta k_1\int_{\bar{\sigma}}(x\eta)^{2\beta}\varphi(x,\eta)ds$.

У ҳолда Γ_1 масаланинг ечими мавжуд.

1.4 параграфда қуйидаги нолокал масала ўрганилган.

Γ_2 **масала**. (12) тенгламанинг D соҳада регуляр шундай $u(x,y)$ ечими топилсинки, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин: $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\bar{\sigma}$; (14), (15), (16),

$$u[(y+1)/2,(y-1)/2]-u[(y-1)/2,(y+1)/2]=g_2(y),\ \ -1\le y\le 0, \quad (17)$$

бу ерда $\varphi(x,y)$, $g_2(y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $f_1(0)=0$, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)+g_2(-1)=f_1(1)+f_2(1)$.

Таъкидлаш керакки, агар $y\in[-1,0]$ бўлса, $((y+1)/2,(y-1)/2)$ ва $((y-1),(y+1)/2)$ нуқталар мос равишда (12) тенгламанинг $x-y=1$ ва $y-x=1$ характеристикаларининг $\overline{B_2Q_1}$ ва $\overline{A_2Q_2}$ кесмаларида ётади. Шунинг учун (17) шартда изланаётган $u(x,y)$ функциянинг $\overline{B_2Q_1}$ ва $\overline{A_2Q_2}$ кесмаларда ётган нуқталардаги қийматлари боғланади. Бу масалада A_2B_2 чегаравий характеристикада чегаравий шарт берилмаган.

Бу параграфнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат.

1.6 - теорема. Агар 1.3 теореманинг б), в) шартлари ва $g_2(y) \neq 0$, $(-1) \le y \le 0$ шарт бажарилса, у ҳолда Γ_2 масала ягона ечимга эга бўлади.

1.5 параграфда Γ_2 масаланинг (14) шартлари ушбу шартларга

$$\lim_{y\to 0}|y|^{2\beta}u_y(x,y) - \lim_{y\to 0}|y|^{2\beta}u_y(-x,y) = f_3(x), \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$\lim_{x\to 0}|x|^{2\beta}u_x(x,y) + \lim_{x\to 0}|x|^{2\beta}u_x(0,-y) = f_4(y), \qquad 0 < y < 1$$

алмаштиришдан ҳосил бўлган ва Γ_3 деб номланувчи масала ўрганилган, бу ерда $\varphi(x,y), g_2(y), f_3(x), f_4(y)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Қуйидаги теоремалар ўринли эканлиги исботланган.

1.7 - теорема. Γ_3 масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

1.8 -теорема. Фараз қилайлик, $\varphi(x,y) = (xy)^{\alpha}\tilde{\varphi}(x,y)$, $\alpha > 1$, $\tilde{\varphi}(x,y) \in C(\bar{\sigma})$; $f_3(x), f_4(x) \in C^2(0,1)$ ва $x \to 0$, $x \to 1$ да $1-2\beta$ дан кичик тартибли махсусликка эга бўлишлари мумкин; $g_2(y) \neq 0$, $(-1) \le y \le 0$.

У ҳолда Γ_3 масаланинг ечими мавжуд.

Γ_1, Γ_2, Γ_3 масалалар ечимининг ягоналиги энергия интеграллари усулидан фойдаланиб, мавжудлиги эса интеграл тенгламалар усулидан фойдаланиб исботланган.

Иккинчи боб **«Эллиптико – гиперболик типдаги тенгламалар учун нолокал спектрал масалалар»** деб номланган бўлиб, учта параграфдан иборат.

2.1 - § да қуйидаги тенглама учун

$$\operatorname{sign} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} + \left(2\beta / |x|\right)u_x + \left(2\beta / |y|\right)u_y + \lambda \operatorname{sign}(x+y)u = 0 \qquad (18)$$

1.1 - § да тавсифланган Ω соҳада ўрганилган $A^{(1)}$ масалага мос спектрал масала баён қилинган ва ўрганилган, бу ерда $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, 1/2)$ - берилган сон, λ - параметр.

$A_\lambda^{(1)}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, Ω соҳада (18) тенгламани ва $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in \bar{\sigma}$, (2) ҳамда

$$u(0,-y) = -u(0,y),\ 0 \le y \le 1; \quad \lim_{x\to +0} x^{2\beta}u_x(x,-y) = -\lim_{x\to +0} x^{2\beta}u_x(x,y),\ 0 < y < 1;$$

$$u(x, x-1) = u(1-x, -x), \qquad (1/2) \le x \le 1 \qquad (19)$$

шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$ функциялар мавжуд бўлсин.

$A_\lambda^{(1)}$ масала қуйидаги ёрдамчи масаладан фойдаланиб ўрганилган.

$E_\lambda^{(1)}$ **масала**. λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, Ω_0 соҳада (19) тенгламани ва (2) ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)$ функциялар мавжуд бўлсин:

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{\sigma},$$

$$u(z,0)=-u(0,z),\ 0\le z\le 1;\ \lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(z,y)=\lim_{x\to+0} x^{2\beta}u_x(x,z),\ 0<z<1.$$

Бу ерда ва кейинчалик ҳам у ёки бу спектрал масалада топилиши талаб қилинаётган λ параметрнинг қийматларини ва унга мос тривиал бўлмаган функцияларни бу масаланинг хос қийматлари ва хос функциялари деб аталади.

Ўзгарувчиларини ажратиш усули ёрдамида $A_\lambda^{(1)}$ ва $E_\lambda^{(1)}$ масалаларнинг саноқли сондаги хос қийматлари ва хос функциялари мавжудлиги исботланган.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида 1.2 - параграфда ўрганилган $A^{(2)}$ масалага мос бўлган спектрал масала ўрганилган.

$A_\lambda^{(2)}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари топилсинки, $\tilde{\Omega}$ соҳада (18) тенгламани ва (2), (9), (19) ҳамда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи тривиал бўлмаган $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ функциялар мавжуд бўлсин:

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{\sigma},\ u(0,-y)=-u(0,y),\ 0\le y\le 1,$$

$$\lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(-x,y)=-\lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(x,y),\ 0<x<1;$$

$$u(y-1,y)=u(-y,1-y),\ (1/2)\le y\le 1.$$

$A_\lambda^{(2)}$ масала учун саноқли сонда хос қийматлар ва хос функциялар мавжудлиги исботланган.

2.3 - § G_1 ва G_3 масалаларга мос спектрал масалаларни ўрганишга бағишланган бўлиб, Δ соҳада

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+(2\beta/x)u_x+(2\beta/y)u_y+\lambda u=0 & (x,y)\in\Delta_0, \\ u_{xx}-u_{yy}+(2\beta/x)u_x-(2\beta/y)u_y+\lambda\, sign\left(x^2-y^2\right)u=0, & (x,y)\in\left\{\bigcup_{j=1}^{3}\bigcup_{k=1}^{2}\Delta_{j,k}\right\} \end{cases} \quad (20)$$

тенглама қаралган, бу ерда $\beta,\lambda\in\mathbb{R}$, $\beta\in(0,1/2)$ - берилган сон, λ - параметр.

Равшанки, (20) тенгламадан $\lambda=0$ бўлганда (12) тенглама келиб чиқади.

2.3.1 ва 2.3.2 бандларда (20) тенглама учун Δ соҳада мос равишда қуйидаги спектрал масалалар баён қилинган ва ўрганилган.

$G_\lambda^{(1)}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари ва уларга мос тривиал бўлмаган шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Delta})$ функциялар топилсинки, бу функциялар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Delta})\cap C^2\left(\bigcup_{j=1}^{3}\bigcup_{k=1}^{2}\Delta_{j,k}\right)$, $|x|^{2\beta}u_x(x,y)\in C\left[(\Delta_0\cup\Delta_{2,1}\cup OB_1)\cup(\Delta_{1,2}\cup\Delta_{3,1}\cup B_2O)\right]$, $|y|^{2\beta}u_y(x,y)\in C\left[(\Delta_0\cup\Delta_{1,2}\cup OA_1)\cup(\Delta_{2,2}\cup\Delta_{3,2}\cup A_2O)\right]$ ҳамда (14) ва (15) улаш шартлари бажарилади;

2) Δ_0, $\Delta_{j,k}$, $j=\overline{3,1}$, $k=\overline{1,2}$ соҳаларда (20) тенгламанинг ечими бўлади;

3) $u(x,y)=0,(x,y)\in\overline{\sigma}$; $u(-1-y,y)=u(y,-1-y)$, $(-1)\le y\le(-1/2)$; $u(z,0)=u(-z,0)$, $u(0,z)=-u(0,-z)$, $0\le z\le 1$ тенгликлар бажарилади.

$\Gamma_\lambda^{(3)}$ **масала.** λ параметрнинг шундай қийматлари ва уларга мос тривиал бўлмаган шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Delta})$ функциялар топилсинки, бу функциялар $\Gamma_\lambda^{(1)}$ масаланинг 1), 2) шартларини ва қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$$u(x,y)=0,\ (x,y)\in\overline{\sigma};\ u(1+y,y)=u(y,1+y),\ -1\le y\le(-1/2);$$

$$\lim_{y\to 0}|y|^{2\beta}u_y(x,y)=\lim_{y\to 0}|y|^{2\beta}u_y(-x,y),\qquad 0<x<1,$$

$$\lim_{x\to 0}|x|^{2\beta}u_x(x,y)=-\lim_{x\to 0}|x|^{2\beta}u_x(x,-y),\quad 0<y<1.$$

Қутб координаталар системасига ўтиб, сўнгра ўзгарувчиларни ажратиш усулини қўллаб, $\Gamma_\lambda^{(1)}$ ва $\Gamma_\lambda^{(3)}$ масалаларнинг саноқли сондаги хос қийматлари ва хос функциялари мавжудлиги исботланган.

Учинчи боб **«Эллиптико - параболик типдаги тенглама учун нолокал чегаравий масалалар»** деб аталган. У иккита параграфдан иборат бўлиб, интеграл шартли масалалар қўйишга ва ўрганишга бағишланган.

$\Omega=\Omega_0\cup AB\cup\Omega_1$ бўлсин, бу ерда $\Omega_0=\{(x,y):x^2+y^2<1,\ y<0\}$, $AB=\{(x,y):-1<x<1,\ y=0\}$, $\Omega_1=\{(x,y):-1<x<1,\ 0<y<h\}$, $h=const>0$.

Ω соҳада эллиптико-параболик типга тегишли қуйидаги тенгламани қарайлик:

$$0=\begin{cases}Lu\equiv u_{xx}-u_y, & (x,y)\in\Omega_1;\\ Eu\equiv u_{xx}+u_{yy}+\dfrac{2\beta}{y}u_y, & (x,y)\in\Omega_0,\end{cases}\tag{21}$$

бу ерда $\beta\in(0,1/2)$ - берилган ҳақиқий сон.

Биринчи параграфда (21) тенглама учун Ω соҳанинг Ω_0 ва Ω_1 қисмларида иккинчи тур интеграл шартлар берилган нолокал масала баён қилинган ва текширилган.

3.1 - масала. Шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_0)$ функция топилсинки, у Ω_1 ва Ω_0 соҳаларда мос равишда $Lu=0$, $Eu=0$ тенгламаларни ва

$$u(-1,y)+\int_{-1}^{0}u(x,y)dx=\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le h;\tag{22}$$

$$u(1,y)+\int_0^1 u(x,y)dx=\varphi_2(y), \qquad 0\le y\le h; \qquad (23)$$

$$u(x,y)+\int_0^1 u(rx,ry)dr=f(x,y), \qquad (x,y)\in\sigma_0 \qquad (24)$$

интеграл шартларни ҳамда қуйидаги улаш шартини

$$\lim_{y\to+0}u_y(x,y)=a(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)+b(x), \qquad -1<x<1,$$

қаноатлантирсин, бу ерда $\sigma_0=\{(x,y):x^2+y^2=1, y\le 0\}$; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $f(x,y)$, $a(x)$, $b(x)$- берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $u(x,y)$ нинг ($(1,0)$ ва $(-1,0)$) нуқталарда узлуксизлигига асосан $\varphi_1(0)=f(-1,0)$, $\varphi_2(0)=f(1,0)$ келишув шартлари бажарилади:.

3.1 - масалани ўрганишда, Ω_0 соҳада (21) тенглама учун қуйилган ва мустақил қизиқишга эга бўлган қуйидаги масаладан фойдаланилган:

3.2 - масала. $E(u)=0$ тенгламанинг Ω_0 соҳада регуляр шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)$ ечими топилсинки, $u(x,0)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ ва $\forall x\in(-1,1)$ учун $\lim\limits_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)$ лимит мавжуд бўлиб, (2.4) ҳамда

$$u_{xx}(x,0)=a(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)+b(x), \qquad -1<x<1$$

шартлар бажарилсин, бу ерда $f(x,y), a(x)$, $b(x)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Қуйидаги теоремалар ўринлилиги исботланган.

3.1 - теорема. Фараз қилайлик, $\forall x\in(-1,1)$ учун $a(x)>0$ тенгсизлик ўринли бўлсин. У ҳолда, агар 3.2-масаланинг ечими мавжуд бўлса, у ягонадир.

3.2 - теорема. Фараз қилайлик, $f(x,y)\in C(\sigma_0)$,$a(x)\in C[-1,1]\cap$ $\cap C^1(-1,1)$,$b(x)\in C(-1,1)\cap L[-1,1]$,$a(x)>0$,$\forall x\in(-1,1)$ ва ушбу тенглик ўринли

$$a(x)=(1-x^2)^{\gamma}a_1(x), \qquad \gamma>1-2\beta, \qquad a_1(x)\in C^1[-1,1].$$

У ҳолда 3.2. масаланинг ечими мавжуд.

3.1.3 - бандда қуйидаги теореманинг ўринли эканлиги исботланган.

3.3- теорема. Фараз қилайлик,$\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)\in C[0,h]$ ва 3.2- теореманинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда 3.1 масала ягона ечимга эга бўлади.

3.2 -§ да Ω соҳада (21) тенглама учун қуйидаги масала ўрганилган.

3.3 - масала. Шундай $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_0)$ функцияси топилсинки, у 3.1 масаланинг (22) ва (23) шартларидан ташқари барча шартларини ва қуйидаги

$$\int_{-1}^0 u(x,y)dx=\varphi_3(y), \qquad \int_0^1 u(x,y)dx=\varphi_4(y), \quad 0\le y\le h$$

шартлар қаноатлантирсин, бу ерда $\varphi_3(y)$, $\varphi_4(y)$ - берилган узлуксиз функциялар.

Қуйидаги теорема исботланган.

3.4 - теорема. Фараз қилайлик, $\varphi_3(y)$ $\varphi_4(y)\in C^1[0,h]$ ва 3.2 - теореманинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда 3.3 масала ягона ечимга эга бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация сингуляр коэффициентли эллиптико - гиперболик ва эллиптико – параболик типдаги тенгламалар учун нолокал шартли чегаравий ва спектрал масалалар қўйиш ва ўрганишга бағишланган.

Диссертациянинг асосий илмий натижалари янги ва улар қуйидагилардан иборат:

1. Иккита сингуляр коэффициентли эллиптико – гиперболик типдаги дифференциал тенгламалар учун турли анъанавий бўлмаган аралаш соҳаларда Франкл, Бицадзе – Самарский шартларига ўхшаш шартли ҳамда силжишли шартли нолокал чегаравий масалалар баён қилинган;

2. Битта сингуляр коэффициентли эллиптико – параболик типдаги тенглама учун тўғри тўртбурчак бўлмаган аралаш соҳада интеграл шартли нолокал чегаравий масалалар қўйилган;

3. Аралаш соҳаларда қўйилган нолокал чегаравий масалалар ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган;

4. Чорак доирада иккита сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун соҳа чегарасида изланаётган функция ва унинг каср тартибли ҳосиласини боғловчи нолокал шартли турли масалаларнинг бир қийматли ечилиши исботланди.

5. Ярим доирада битта сингуляр коэффициентли эллиптик типдаги тенглама учун интеграл шартли бир нолокал чегаравий масала ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги исботланган;

6. Эллиптик ва эллиптико – гиперболик типдаги тенгламаларга қўйилган нолокал чегаравий масалаларга мос нолокал спектрал масалаларнинг хос қийматлари ва хос функциялари топилган.

Қўйилган чегаравий масалалар ечимининг ягоналигини исботлашда энергия интеграллари ва экстремум принципи усулларидан, ечимнинг мавжудлигини исботлашда эса интеграл тенгламалар усулидан фойдаланилган. Қўйилган спектрал масалаларнинг хос функциялари ўзгарувчиларини ажратиш усули ёрдамида, хос қийматлари эса бессел ва гипергеометрик функциялар назариясидан фойдаланиб топилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НИШОНОВА ШАХНОЗАХОН ТОХИРЖОН КИЗИ

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИКО - ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИКО- ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ФЕРГАНА – 2020

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2018.2.PhD/FM220.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz.)

Научный руководитель:	**Уринов Ахмаджон Кушакович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Мирсабуров Мирахмат** доктор физико-математических наук, профессор
	Апаков Юсупжон Пулатович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Национальный университет Узбекистана

Защита диссертации состоится «___»________________2020 года в _____ часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (0573)244-44-02, факс: (0573)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно – ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №___). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19).Тел.: (99873)244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «__»________2020года.
(протокол рассылки №__от «__»_____2020года).

А.К. Уринов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., профессор

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н.

Ш.Т.Каримов
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. С середины двадцатого века интенсивно исследуются, так называемые, уравнения смешанного типа, которые имеют многочисленные приложения в газодинамике, гидродинамике, теории бесконечно малых изгибаний поверхности, математической биологии и других разделов науки. Вначале в теории уравнений смешанного типа, в основном, исследовались классические краевые задачи, т.е. задачи, в которых на полной границе области рассмотрения или в её некоторой части дано значение искомой функции или её производной (определенного направления) или их некоторой комбинации. Позднее в этой теории начаты исследования (вместе с классическими задачами) нелокальных задач (т.е. задачи с нелокальными условиями), таких как задачи Франкля, задачи Бицадзе – Самарского и задачи со смещением. В таких задачах нелокальное условие дает связь между значениями искомой функции или её производной, вычисленной в различных точках границы области рассмотрения, или в точках, лежащих на границе и внутри области. Важность изучения нелокальных задач объясняется прежде всего тем, что из них следуют различные корректно поставленные локальные краевые задачи. Тем не менее, при математическом моделировании различных физических, химических, биологических, экологических процессов возникают нелокальные условия. Например, ещё в 1896 году В.А.Стекловым было показано, что математическое моделирование процессов охлаждения тел конечных размеров приводит к задаче для уравнения теплопроводности с нелокальным условием, представляющим собой линейную комбинацию значений искомого решения в различных точках границы области.

Ещё одним из важных классов нелокальных задач для уравнений в частных производных являются задачи с интегральным условием. Такие задачи возникают, например, при исследовании диффузии частиц в турбулентной плазме, процессов распространения тепла в тонком нагретом стержне, процесса влагопереноса в капиллярно - пористых средах, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

В последнее время в нашей стране уделяется особое внимание актуальным направлениям фундаментальных наук, которые имеют как научное, так и практическое применение. Более того, проведение на уровне международных стандартов научных исследований по дифференциальным уравнениям и математической физике, алгебре и функциональному анализу, теории вероятностей и математической статистики обозначено основной задачей и направлением в деятельности Института математики[2]. Исходя из этой точки зрения, значительные результаты получены по различным направлениям математической науки, в том числе, по изучению краевых и

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно – исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан»

спектральных задач для уравнений смешанного типа, которые получили международное признание.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находятся в русле задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года « О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлениях ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно – исследовательской деятельности», ПП-2009 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП-4389 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», в обращении Президента Республики Узбекистан 24 января 2020 года к Олий Мажлису, а также в других нормативно – правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Исследования задач с условиями Франкля, Бицадзе – Самарского, смещения и интегральным условием начато соответственно в 1956, 1969, 1962, 1963 годах. Однако, общее определение и классификации нелокальных условий даны в 1995 году А.М. Нахушевым. Особенность условия Франкля состоит в том, что оно связывает значения искомой функции в точках, лежащих на эллиптической и гиперболической частях границы области рассмотрения уравнения. Задача с условием Франкля впервые поставлена Ф.И.Франклем для уравнения Чаплыгина, а единственность и существование решения этой задачи доказаны Ю.В. Двингтелем. Проблемой единственности решения задачи Франкля также занимались А.В.Бицадзе, Н.Ю.Капустин и К.Б.Сабитов. Задача Франкля для уравнения Лаврентьева – Бицадзе решена А.В.Бицадзе. Для уравнения Чаплыгина с сингулярным коэффициентом М.Мирсабуровым сформулирована и изучена задача с условием, обобщающим условие Франкля, а также с условием Франкля на линии вырождения и на граничной характеристике. Некоторые краевые и спектральные задачи с условиями типа условия Франкля для уравнения Лаврентьева – Бицадзе со спектральным параметром рассмотрены в работах И.Т. Тожибоева, а для уравнения эллиптико – гиперболического типа с двумя сингулярными коэффициентами – в работах К.Т. Каримова. Моисеев Е.И и Аббаси Н. исследовали полноту и базисность системы собственных функций задач типа задачи Франкля для уравнения Лаврентьева – Бицадзе в одной специальной области. Этой проблемой занимались также М.С. Салахитдинов, А.К. Уринов, К.Б. Сабитов и В.В. Тихомиров. Краевые задачи с условиями типа условия Франкля для уравнений пароболо-гиперболического типа исследованы в работах А.В. Псху, И.У. Хайдарова, Д. Базарова и Х. Салтанова.

Задача с условием Бицадзе – Самарского впервые поставлена в совместной работе А.В. Бицадзе и А.А. Самарского для равномерно эллиптического уравнения. Своеобразие этой задачи состоит в том, что граничные значения искомого решения повторяются во внутренней точке области, где искомая функция должна удовлетворить уравнению. Вслед за этой работой исследователями поставлены и изучены многочисленные задачи с условиями типа условия Бицадзе – Самарского как для уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов, вырождающихся на границе или внутри области, так и для уравнений смешанного эллиптико – гиперболического и параболо – гиперболического типов. Среди них отметим работы Ш.А. Алимова, А.М. Нахушева, М.С. Салахитдинова, А.К.Уринова, М. Мирсабурова, Б. Исломова и др. Задачи с условиями смещения для уравнений гиперболического и эллиптико – гиперболического типов впервые поставлены и исследованы В.И. Жигаловым и А.М. Нахушевым. Отличие условий смещения от предыдущих заключается в том, что оно дает связь между значениями искомой функции или её производной (вообще говоря, дробного порядка), вычисленных в точках, лежащих в двух граничных характеристиках. А.М. Нахушевым показано, что постановка краевых задач с условиями смещения для гиперболических уравнений на плоскости существенно зависит от структуры его общего решения. Исходя из этой точки зрения, исследователями поставлены и изучены задачи со смещением как для модельных уравнений, так и общих линейных уравнений гиперболического типа, а также для уравнений смешанного типа, содержащих такие гиперболические уравнения. В этом направлении отметим монографии М.С.Салахитдинова, написанные совместно со своими учениками А.К. Уриновым, М.Мирсабуровым, Б.Исломовым, а также монографию А.М. Нахушева, где проведен обзор опубликованных работ по этому направлению.

Задача с интегральным условием впервые рассмотрена J.Canon и Л.И. Камыниным для уравнения теплопроводности. Вслед за этими работами вышли из печати многочисленные статьи, где И.И.Ионкиным, Л.А. Муравейем и А.В.Филиновским, А.В.Голованчиковым, И.Э.Симоновой и Б.В.Симоновым, Л.С.Пулькиной, А.Т.Асановой, З.А.Нахушевой, Я.Т.Мегралиевым, А.К.Уриновым и др. исследованы задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений второго порядка параболического, гиперболического, эллиптического типов на плоскости, а также в многомерном пространстве, например, А.И.Кожановым, Л.С.Пулькиной, Ш.Т.Кальменовым и Д.Сураганом, и для уравнений в частных производных нечетного порядка, например, О.С.Зикировым, А.И.Кожановым. В работах К.Б.Сабитова и Ю.К.Сабитовой в прямоугольной области рассмотрены задачи с интегральным условием для параболо – гиперболического и эллиптико – гиперболического уравнения соответственно. В работах А.К.Уринова и К.С.Халилова рассмотрены параболо - гиперболические уравнения в области, состоящей из прямоугольника и характеристического треугольника, и исследованы некоторые задачи с интегральным условием в области параболичности уравнения. В настоящее время малоизученными остаются задачи с нелокальными условиями для уравнений эллиптико – гиперболического типа с двумя сингулярными коэффициентами в нетрадиционных областях и с интегральным условием для эллиптико – параболических уравнений в непрямоугольных областях.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по фундаментальному проекту Ф-4-59 «Начальные и граничные задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами» (2012-2016г.г.) Ферганского государственного университета.

Целью исследования является постановка и исследование нелокальных задач для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического и эллиптико – параболического типов с сингулярными коэффициентами.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

постановка нелокальных краевых и спектральных задач с условиями типа условия Франкля, Бицадзе – Самарского и условием смещения для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического типа с двумя сингулярным коэффициентом;

постановка нелокальных краевых задач с интегральным условием для уравнения эллиптико – параболического типа с одним сингулярными коэффициентами;

доказательство существования и единственности решения поставленных нелокальных краевых задач;

нахождение собственных значений и собственных функций поставленных нелокальных спектральных задач.

Объектом исследования являются дифференциальные уравнения эллиптико – гиперболического и эллиптико – параболического типов с сингулярными коэффициентами.

Предметом исследования являются нелокальные краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического и эллиптико – параболического типов с сингулярными коэффициентами.

Методы исследований. При доказательстве единственности решения поставленных краевых задач использованы методы интегралов энергии и принципа экстремума, а при доказательстве существования решения – метод интегральных уравнений. Собственные функции найдены с помощью метода разделения переменных, а собственные значения – с использованием теории бесселевых и гипергеометрических функций.

Научная новизна исследования. Основные научные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

сформулированы нелокальные краевые и спектральные задачи с условиями типа условия Франкля, Бицадзе – Самарского и условием смещения для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического типа с двумя сингулярными коэффициентами в различных нетрадиционных смешанных областях;

поставлены нелокальные краевые задачи с интегральным условием для уравнения эллиптико – параболического типа с одним сингулярным коэффициентом в непрямоугольной смешанной области;

доказаны единственность и существование решения поставленных нелокальных краевых задач в смешанных областях;

установлена однозначная разрешимость некоторых нелокальных краевых задач с условиями, связывающими значения искомой функции и его производной дробного порядка, для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в четверти круга;

доказаны единственность и существование решения одной нелокальной краевой задачи с интегральным условием для эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом в полукруге;

найдены собственные значения и собственные функции нелокальных спектральных задач, соответствующих поставленным нелокальным краевым задачам для уравнений эллиптического и эллиптико – гиперболического типов.

Практические результаты исследования состоят из возможности применения полученных научных результатов при исследовании качественных особенностей процессов, приводимых к таким математическим моделям, и при численных вычислениях.

Достоверность результатов исследования обоснована принятыми математическими дедуктивными выводами с использованием методов теории дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений, а также строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории дифференциальных уравнений в частных производных. Практическое значение диссертационной работы определяется их приложением к практическим задачам, описываемым при помощи вырождающихся уравнений и уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные в настоящей диссертации, были внедрены в следующих научно – исследовательских проектах:

результаты по исследованию нелокальных задач для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического и эллиптико – параболического типов с сингулярными коэффициентами использованы в международном проекте под номером № 1.7311.2017/8.9 «Развитие методов исследования краевых задач для дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений» (Белгородский государственный национальный исследовательский университет). Применение результатов позволило использовать в тематике указанного проекта интегральные представления решений дифференциальных уравнений и их применения в прикладных задачах;

результаты по исследованию краевых и спектральных задач с нелокальными условиями для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического типа и задач с интегральными условиями для уравнения эллиптико – параболического типа, в которых были применены дробные интегралы и производные, использованы при доказательстве существования и единственности решения краевых задач для уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами в рамках лаборатории математического и компьютерного моделирования (КамГУ имени Витуса Беринга). Применение результатов дало возможность построения решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 6 научных и научно – практических конференциях, в том числе, на 4 международных и **2** республиканских научных и научно – практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано всего **14** научных работ, из них **8** научных статей, в том числе, опубликована одна в зарубежном и **6** в республиканском журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Каждая глава разбита на параграфы, а параграфы – на пункты. При этом использована тройная нумерация: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер параграфа, а третья – на номер пункта в нём. Общий объем диссертации 121 страниц, включая 9 страниц цитированной литературы. Список литературы содержит 91 наименований. Нумерация формул (теорем, леммы) двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая – на номер формулы (теоремы, леммы) в ней.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава, названная **«Нелокальные краевые задачи для уравнений эллиптико – гиперболического типа»**, состоит из пяти параграфов и посвящена постановке и исследованию нелокальных краевых задач с условиями типа условия Франкля, Бицадзе – Самарского и условием смещения в некоторых смешанных областях.

В §1.1 в конечной односвязной области Ω плоскости xOy, ограниченной дугой $\overline{\sigma} = \{(x,y): x^2 + y^2 = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ и отрезками $\overline{EA} = \{(x,y): x - y = 1, 0 \leq x \leq 1\}$, $\overline{EB} = \{(x,y): x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}$, рассмотрено уравнение

$$\operatorname{sign} x \cdot u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} + (2\beta / |x|) u_x + (2\beta / |y|) u_y = 0 \qquad (1)$$

где $\beta \in (0, 1/2)$ - заданное действительное число.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно: в области $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y): x > 0, y > 0\}$ – эллиптическому, а в областях $\Omega_1 = \Omega \cap \{(x,y): y < 0, x + y > 0\}$, $\Omega_2 = \Omega \cap \{(x,y): y < 0, x + y < 0\}$ – гиперболическому типу. Отрезок $OD = \{(x,y): x + y = 0,\ 0 < x < (1/2)\}$ является характеристикой уравнения, а $OA = \{(x,0): 0 < x < 1\}$ – линией изменения типа уравнения и линией сингулярности его коэффициента.

Ниже под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_2)$, удовлетворяющую его в областях Ω_0, Ω_1, Ω_2 и такую, что существуют пределы $\lim\limits_{y \to \pm 0} |y|^{2\beta} u_y(x,y)$, $x \in (0,1)$; $\lim\limits_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x,y)$, $y \in (-1,0) \cup (0,1)$, причем $u(z,0)$, $u(0, \pm z) \in C[0,1] \cap$ $\cap C^2(0,1)$, а $\lim\limits_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x, \pm z)$, $\lim\limits_{y \to \pm 0} |y|^{2\beta} u_y(z,y) \in C^2(0,1)$ и могут иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $z \to 0$ и $z \to 1$.

Задача $A^{(1)}$. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию склеивания

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x,y) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y(x,y), \quad 0 < x < 1 \qquad (2)$$

и краевым условиям

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \qquad (x,y) \in \overline{\sigma}; \qquad (3)$$

$$u(0,-y) = -u(0,y) + f_1(y), \qquad 0 \leq y \leq 1; \qquad (4)$$

$$\lim_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x,-y) = -\lim_{x \to +0} x^{2\beta} u_x(x,y) + f_2(y), \quad 0 < y < 1; \qquad (5)$$

$$u[(x+1)/2, (x-1)/2] = u[(1-x)/2, -(1+x)/2] + f_3(x),\ 0 \leq x \leq 1, \qquad (6)$$

где $\varphi(x,y)$, $f_1(y)$, $f_2(y)$, $f_3(x)$ - заданные непрерывные функции, причем $\varphi(1,0) + \varphi(0,1) = f_1(1) + f_3(1)$, $f_3(0) = 0$.

Отметим, что условия (4) и (5) являются условиями типа условия Франкля, а условие (6) – условием смещения типа условий, предложенных

А.М. Нахушевым, причем (6) связывает значения $u(x,y)$ в точках, лежащих на отрезках $\overline{DA}$ и $\overline{DE}$ характеристики $x-y=1$. Из постановки задачи $A^{(1)}$ видно, что вся граница области Ω занята краевыми условиями.

В пункте 1.1.1 параграфа 1.1 исследована следующая вспомогательная

Задача $E^{(1)}$. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)\cap C^2(\Omega_0)$, удовлетворяющую в области Ω_0 уравнению (1) и условиям (4), $u(z,0)=-u(0,z)+g_1(z)$, $0\le z\le 1$; $\lim\limits_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(z,y)=\lim\limits_{x\to+0} x^{2\beta}u_x(x,z)+g_2(z)$, $0<z<1$ и такую, что $u(z,0)$, $u(0,z)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, а $\lim\limits_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(z,y)$ $\lim\limits_{x\to+0} x^{2\beta}u_x(x,z)\in C^2(0,1)$ и могут имеет особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $z\to 0$ и $z\to 1$, где $\varphi(x,y)$, $g_1(z)$, $g_2(z)$ - заданные непрерывные функции, причем $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)=g_1(1)$.

Доказано, что справедлива

Теорема 1.1. Пусть а) $g_1(x)\in C^1[0,1]\cap C^3(0,1)$, $g_1(1)=0$ и $g_1'(x)$ представима в виде $g_1'(x)=x^{\gamma}\tilde{g}_1(x)$, где $\gamma\ge 1$, $\tilde{g}_1(x)\in C^2[0,1]$; б) $g_2(x)\in C^2(0,1)$ и может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0$ и $x\to 1$; в) функция $\varphi(x,y)$ представима в виде

$$\varphi(x,y)=(xy)^{\alpha}\varphi_0(x,y),\qquad \varphi_0(x,y)\in C(\overline{\sigma}),\qquad \alpha>1. \tag{7}$$

Тогда задача $E^{(1)}$ имеет единственное решение.

Единственность решения задачи $E^{(1)}$ доказана методом интегралов энергии, а существование решения - методом интегральных уравнений.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.2. Пусть а) $f_1(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$, $f_1(1)=0$ и $f_1'(x)$ представима в виде $f_1'(x)=-2xT'\left(x^2\right)+x^{\gamma}\tilde{f}_1(x)$, где $\gamma\ge 1$, $\tilde{f}_1(x)\in C^2[0,1]$, а

$$T(x)=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}(1-x)^{-\beta}\int\limits_0^x[(1-t)^{\beta}f_3(\sqrt{t})]_t'(1-t)^{\beta}(x-t)^{-\beta}dt; \tag{8}$$

б) $f_2(x)\in C^2(0,1)$ и может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0$ и $x\to 1$; в) $f_3(x)=x^{\delta}(1-x^2)^{\mu}\tilde{f}_3(x)$, $\delta\ge 4$, $\mu\ge 2-2\beta$, $\tilde{f}_3(x)\in C^2[0,1]\cap C^4(0,1)$; г) функция $\varphi(x,y)$ представима в виде (7).

Тогда задача $A^{(1)}$ имеет единственное решение.

В параграфе 1.2 сформулирована и исследована нелокальная краевая задача для уравнения (1) в конечной односвязной области S плоскости xOy, ограниченной дугой $\overline{\sigma}=\{(x,y): x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ и отрезками $\overline{EA}=\{(x,y): x-y=1,\ 0\le x\le 1\}$, $\overline{EO}=\{(x,y): x=0,\ -1\le y\le 0\}$, $\overline{FO}=\{(x,y): y=0,\ -1\le x\le 0\}$, $\overline{FB}=\{(x,y): y-x=1,\ 0\le y\le 1\}$.

В области Ω уравнение (1) принадлежит смешанному типу, а именно: в области $\Omega_0 = \Omega \cap \{(x,y): x > 0, y > 0\}$ - эллиптическому, а в областях $\Sigma_{1,j} = \Sigma \cap \{(x,y): y < 0, (-1)^j (x+y) < 0\}, \Sigma_{2,j} = \Sigma \cap \{(x,y): x < 0, (-1)^j (x+y) < 0\}$, $j = \overline{1,2}$ - гиперболическому типу. Отрезки $OA = \{(x,0): \ 0 < x < 1\}$ и $OB = \{(0,y): 0 < y < 1\}$ являются линиями изменения типа уравнения и линиями сингулярности его коэффициентов, а $OD_1 = \{(x,y): y = -x, x \in (0,1/2)\}$ и $OD_2 = \{(x,y): y = -x, y \in (0,1/2)\}$ - характеристиками.

Ниже под регулярным в области Ω решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\tilde{\Omega})$, удовлетворяющую его в области $\tilde{\Omega}$ и такую, что существуют пределы $\lim\limits_{y\to \pm 0} |y|^{2\beta} u_y(x,y)$, $x \in (0,1)$; $\lim\limits_{x\to \pm 0} |x|^{2\beta} u_x(x,y)$, $y \in (0,1)$; $\lim\limits_{y\to +0} y^{2\beta} u_y(x,y)$, $x \in (-1,0)$; $\lim\limits_{x\to +0} x^{2\beta} u_x(x,y)$, $y \in (-1,0)$, причем $u(\pm z,0)$, $u(0,\pm z) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, а $\lim\limits_{y\to \pm 0} |y|^{2\beta} u_y(z,y)$, $\lim\limits_{y\to +0} y^{2\beta} u_y(-z,y)$, $\lim\limits_{x\to \pm 0} |x|^{2\beta} u_x(x,z)$, $\lim\limits_{x\to +0} x^{2\beta} u_x(x,-z) \in C^2(0,1)$ и могут иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $z \to 0$ и $z \to 1$, здесь $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus (OA \cup OB \cup OD_1 \cup OD_2)$.

Задача $A^{(2)}$. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям склеивания (2),

$$\lim_{x\to -0} (-x)^{2\beta} u_x(x,y) = \lim_{x\to +0} x^{2\beta} u_x(x,y), \qquad 0 < y < 1 \qquad (9)$$

и краевым условиям (3), (4), (6),

$$\lim_{y\to +0} y^{2\beta} u_y(-x,y) = -\lim_{y\to +0} y^{2\beta} u_y(x,y) + f_2(x), \qquad 0 < x < 1; \quad (10)$$

$$u\left[(y-1)/2, (y+1)/2\right] = u\left[-(1+y)/2, (1-y)/2\right] + f_4(y), \qquad 0 \le y \le 1, \quad (11)$$

где $\varphi(x,y)$ и $f_1(y)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(y)$ - заданные непрерывные функции, причем $\varphi(1,0) + \varphi(0,1) = f_1(1) + f_3(1)$, $f_3(0) = f_4(0) = 0$.

Отметим, что (4) и (10) являются условиями типа условия Бицадзе – Самарского, а (6) и (11) – условиями смещения А. М. Нахушева, причем (11) связывает значения $u(x,y)$ в точках, лежащих на отрезках $\overline{FD_2}$ и $\overline{D_2B}$ характеристики $x - y = -1$.

Однозначная разрешимость задачи $A^{(2)}$ доказана эквивалентным сведением её к задаче $E^{(1)}$, изученной в параграфе 1.1.

Доказано, что справедлива

Теорема 1.3. Пусть а) $f_1(x) \in C[0,1] \cap C^3(0,1)$, $f_1(1) = 0$ и $f_1'(x)$ представима в виде $f_1'(x) = -2x\tau'(x^2) + x^{\gamma} \tilde{f}_1(x)$, где $\gamma \ge 1$, $\tilde{f}_1(x) \in C^2[0,1]$, а

$T(x)$ - функция, определяемая формулой (8); б) $f_2(x) \in C^2(0,1)$ и может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to 0$ и $x \to 1$;

в) $f_3(x) = x^{\delta}\left(1-x^2\right)^{\mu} \tilde{f}_3(x)$, $\delta \geq 4$, $\mu \geq 2-2\beta$, $\tilde{f}_3(x) \in C^2[0,1] \cap C^4(0,1)$;

г) $f_4(y) = y^{\lambda}\left(1-y^2\right)^{\nu} \tilde{f}_4(y)$, $\lambda > 2-2\beta$, $\nu > 1-\beta$, $\tilde{f}_4(y) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1)$;

д) функция $\varphi(x,y)$ представима в виде (7).

Тогда задача $A^{(2)}$ имеет единственное решение.

В последних трёх параграфах первой главы в смешанной области, содержащей отрезки линий сингулярности уравнения, части которых являются линиями изменения типа, поставлены и исследованы некоторые нелокальные задачи с условиями типа условия Франкля внутри области и с условиями смещения в гиперболический части границы области рассмотрения.

Пусть Δ - область плоскости xOy, ограниченная при $x \geq 0$, $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}$ окружности $x^2+y^2=1$, при $x \geq 0$, $y \leq 0$ прямой $x-y=1$, при $x \leq 0$, $y \geq 0$ прямой $y-x=1$, а при $x \leq 0$, $y \leq 0$ прямой $x+y=-1$. Пусть, далее, $\Delta_0 = \Delta \cap \{(x,y): x>0, y>0\}$, $\Delta_{1,k} = \Delta \cap \left\{(x,y): x>0, y<0, (-1)^k(x+y)<0\right\}$, $\Delta_{2,k} = \Delta \cap \left\{(x,y): x<0, y>0, (-1)^k(x+y)<0\right\}$, $\Delta_{3,k} = \Delta \cap \{(x,y): x<0, y<0, (-1)^k(x-y)<0\}$, $k=\overline{1,2}$, а A_1A_2 (OA_1), B_1B_2 (OB_1), Q_1Q_2 (OQ_1, OQ_2), A_2B_2 (A_2Q_0, B_2Q_0), A_2B_1 (A_2Q_2), B_2A_1 (B_2Q_1), OQ_0 - отрезки прямых $y=0$, $x=0$, $x+y=0$, $x+y=-1$, $y-x=1$, $x-y=1$, $x=y$ соответственно, где $O(0,0)$, $A_1(1,0)$, $B_1(0,1)$, $A_2(-1,0)$, $B_2(0,-1)$, $Q_0(-1/2,-1/2)$, $Q_1(1/2,-1/2)$, $Q_2(-1/2,1/2)$, $\tilde{\Delta} = \Delta_0 \cup \Delta_{1,1} \cup \Delta_{1,2} \cup \Delta_{3,1} \cup \Delta_{2,1} \cup \Delta_{2,2} \cup \Delta_{3,2}$.

В области Δ рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + (2\beta/x)u_x + (2\beta/y)u_y, & (x,y) \in \Delta_0; \\ u_{xx} - u_{yy} + (2\beta/x)u_x - (2\beta/y)u_y, & (x,y) \in \bigcup\limits_{j=1}^{3}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2} \Delta_{j,k}\right), \end{cases} \tag{12}$$

где β - заданное действительное число, причем $0 < \beta < (1/2)$.

В области Δ уравнение (12) принадлежит смешанному типу, а именно: в области Δ_0 – эллиптическому, а в областях $\Delta_{j,k}$, $j=\overline{1,3}$, $k=\overline{1,2}$ – гиперболическому типу. Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 являются линиями сингулярности коэффициентов уравнения (12) при $u_x(x,y)$ и $u_y(x,y)$, а их части OA_1, OB_1 - линиями изменения типа этого уравнения; OQ_1, OQ_2 - есть характеристики уравнения (12).

Под регулярным в области Δ решением уравнения (12) будем понимать функцию $u(x,y) \in C(\bar{\Delta}) \cap C^2(\tilde{\Delta})$, удовлетворяющую его в области $\tilde{\Delta}$ и такую, что существуют пределы $\lim\limits_{y\to\pm 0}|y|^{2\beta}u_y(x,y)$, $x\in(-1,0)\cup(0,1)$, $\lim\limits_{x\to\pm 0}|x|^{2\beta}u_x(x,y)$, $y\in(-1,0)\cup(0,1)$, причем $u(\pm\zeta,0)$, $u(0,\pm\zeta)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, а $\lim\limits_{y\to\pm 0}|y|^{2\beta}u_y(\pm\zeta,y)$, $\lim\limits_{x\to\pm 0}|x|^{2\beta}u_x(x,\pm\zeta)\in C^2(0,1)$ и могут иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $\zeta\to 0$ и $\zeta\to 1$.

В §1.3 исследована следующая нелокальная задача.

Задача Γ_1. Найти регулярное в области Δ решение $u(x,y)$ уравнения (12), удовлетворяющее условиям $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\bar\sigma$ и

$$u[-(y+1)/2,(y-1)/2]-u[(y-1)/2,-(y+1)/2]=g_1(y),\ (-1)\le y\le 0; \quad (13)$$

$$u(x,0)-u(-x,0)=f_1(x),\ 0\le x\le 1;\ u(0,y)+u(0,-y)=f_2(y), 0\le y\le 1; \quad (14)$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=\lim_{y\to +0}y^{2\beta}u_y(x,y),\ x\in(-1,0)\cup(0,1); \quad (15)$$

$$\lim_{x\to -0}(-x)^{2\beta}u_x(x,y)=\lim_{x\to +0}x^{2\beta}u_x(x,y),\ y\in(-1,0)\cup(0,1). \quad (16)$$

Здесь $\varphi(x,y)$, $g_1(t)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ - заданные непрерывные функции, причем $f_1(0)=0$, $g_1(0)=0$, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)+g_2(-1)=f_1(1)+f_2(1)$.

Отметим, что если $y\in[-1,0]$, то точки $(-(y+1)/2,(y-1)/2)$ и $((y-1)/2,-(y+1)/2)$ соответственно лежат на отрезках $\overline{B_2Q_0}$ и $\overline{A_2Q_0}$ характеристики $x+y=-1$ уравнения (12) (симметрично относительно точки Q_0). Поэтому условие (13) связывает значения искомой функции в точках, лежащих на $\overline{B_2Q_0}$ и $\overline{A_2Q_0}$. Эта задача интересна еще и тем, что граничные характеристики B_2A_1 и A_2B_1 свободны от краевых условий.

Доказано, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.4. Задача Γ_1 не может иметь более одного решения.

Теорема 1.5. Пусть а) $g_1(y)=|y|^{\delta}\left(1-y^2\right)^{\mu}\overset{\circ}{g}_1(y)$, $\delta\ge 4$, $\mu\ge 2-2\beta$, $\tilde g_1(y)\in C^2[-1,0]\cap C^4(-1,0)$; б) $f_1(t), f_2(t)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ и $f_1'(t)$, $f_2'(t)$ могут иметь особенность порядка меньше единицы при $t\to 0$ и $t\to 1$; в) $\varphi(x,y)=(xy)^{\alpha}\tilde\varphi(x,y)$, $\alpha>1$, $\tilde\varphi(x,y)\in C(\bar\sigma)$; $f_2(0)=8\beta k_1\int\limits_{\bar\sigma}(x\eta)^{2\beta}\varphi(x,\eta)ds$.

Тогда решение задачи Γ_1 существует.

В параграфе 1.4 исследована следующая нелокальная

Задача Γ_2. Найти регулярное в области Δ решение $u(x,y)$ уравнения (12), удовлетворяющее условиям $u(x,y)=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in\bar\sigma$; (14), (15), (16) и

$$u[(y+1)/2,(y-1)/2]-u[(y-1)/2,(y+1)/2]=g_2(y),\quad -1\le y\le 0, \quad (17)$$

где $\varphi(x,y)$, $g_2(y)$, $f_1(x)$, $f_2(y)$ - заданные непрерывные функции, причем $f_1(0)=0$, $\varphi(1,0)+\varphi(0,1)+g_2(-1)=f_1(1)+f_2(1)$.

Отметим, что если $y \in [-1,0]$, то точки $\left((y+1)/2,(y-1)/2\right)$ и $\left((y-1),(y+1)/2\right)$ соответственно лежат на отрезках $\overline{B_2Q_1}$ и $\overline{A_2Q_2}$ характеристик $x - y = 1$ и $y - x = 1$ уравнения (12). Поэтому условие (17) связывает значения искомой функции в точках, лежащих на $\overline{B_2Q_1}$ и $\overline{A_2Q_2}$. В этой задаче на граничной характеристике A_2B_2 краевое условие не задано.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1.6. Пусть выполнены условия б) и в) теоремы 1.5 и $g_2(y) \equiv 0$, $(-1) \le y \le 0$. Тогда задача Γ_2 имеет единственное решение.

В параграфе 1.5. исследована задача, названная задачей Γ_3, в которой условия (14) задачи Γ_2 заменены условиями

$$\lim_{y\to 0}|y|^{2\beta} u_y(x,y) - \lim_{y\to 0}|y|^{2\beta} u_y(-x,y) = f_3(x), \qquad 0 \le x \le 1;$$

$$\lim_{x\to 0}|x|^{2\beta} u_x(x,y) + \lim_{x\to 0}|x|^{2\beta} u_x(0,-y) = f_4(y), \qquad 0 < y < 1,$$

где $\varphi(x,y), g_2(y), f_3(x), f_4(y)$ - заданные непрерывные функции.

Доказано, что справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.7. Задача Γ_3 не может иметь более одного решения.

Теорема 1.8. Пусть $\varphi(x,y) = (xy)^{\alpha}\tilde{\varphi}(x,y)$, $\alpha > 1$, $\tilde{\varphi}(x,y) \in C(\bar{\sigma})$; $f_3(x)$, $f_4(x) \in C^2(0,1)$ и могут иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \to 0$ и $x \to 1$; $g_2(y) \equiv 0$, $(-1) \le y \le 0$.

Тогда решение задачи Γ_3 существует.

При доказательстве единственности решений задач Γ_1, Γ_2, Γ_3 использован метод интегралов энергии, а при доказательство существования решения - метод интегральных уравнений.

Вторая глава, названная **«Нелокальные спектральные задачи для уравнений эллиптико – гиперболического типа»**, состоит из трёх параграфов.

В § 2.1 в области Ω, описанной в § 1.1, сформулирована и изучена спектральная задача, соответствующая задаче $A^{(1)}$, для уравнения

$$sign x \cdot u_{xx} + \mathrm{sign}\, y \cdot u_{yy} + \left(2\beta/|x|\right)u_x + \left(2\beta/|y|\right)u_y + \lambda\, sign(x+y)u = 0, \quad (18)$$

где $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$, причем $\beta \in (0, 1/2)$ - заданное число, а λ - параметр.

Задача $A_{\lambda}^{(1)}$**.** Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющие в области $\Omega \setminus (OA \cup OD)$ уравнению (18) и условиям $u(x,y) = 0$, $(x,y) \in \bar{\sigma}$; (2),

$$u(0,-y) = -u(0,y), 0 \le y \le 1; \lim_{x\to +0} x^{2\beta}u_x(x,-y) = -\lim_{x\to +0} x^{2\beta}u_x(x,y), 0 < y < 1;$$

$$u(x,x-1) = u(1-x,-x), \qquad (1/2) \le x \le 1. \qquad (19)$$

При исследовании задачи $A_\lambda^{(1)}$ используется следующая вспомогательная

Задача $E_\lambda^{(1)}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y)\in C\left(\overline{\Omega_0}\right)$, удовлетворяющие в области Ω_0 уравнению (18) и условиям $u(x,y)=0$, $(x,y)\in\overline{\sigma}$;

$$u(z,0)=-u(0,z),\quad 0\le z\le 1;\quad \lim_{y\to+0} y^{2\beta}u_y(z,y)=\lim_{x\to+0}x^{2\beta}u_x(x,z),\quad 0<z<1.$$

Здесь и далее, те значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции, которые требуется найти в той или иной спектральной задаче, называются соответственно собственными значениями и собственными функциями этой задачи.

Методом разделения переменных, доказано, что существует счетное число собственных значений и собственные функции задач $A_\lambda^{(1)}$ и $E_\lambda^{(1)}$.

Во втором параграфе в области Σ, описанной в параграфе 1.2., исследована следующая спектральная задача для уравнения (18), соответствующая задаче $A^{(2)}$.

Задача $A_\lambda^{(2)}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y)\in C(\overline{\Sigma})$, удовлетворяющие в области $\tilde{\Sigma}$ уравнению (18) и условиям $u(x,y)=0$, $(x,y)\in\overline{\sigma}$; (2), (9), (19),

$$u(0,-y)=-u(0,y),\quad 0\le y\le 1,\quad \lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(-x,y)=-\lim_{y\to+0}y^{2\beta}u_y(x,y),$$

$$0<x<1;\quad u(y-1,y)=u(-y,1-y),\ (1/2)\le y\le 1.$$

Доказано, что для задачи $A_\lambda^{(2)}$ существует счетное число собственных значений и собственные функции.

§2.3 посвящен исследованию спектральных задач, соответствующих задачам Γ_1 и Γ_3. При этом в области Δ рассмотрено уравнение

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}+(2\beta/x)u_x+(2\beta/y)u_y+\lambda u=0 & (x,y)\in\Delta_0,\\ u_{xx}-u_{yy}+(2\beta/x)u_x-(2\beta/y)u_y+\lambda\, sign\left(x^2-y^2\right)u=0, & (x,y)\in\bigcup\limits_{j=1}^{3}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2}\Delta_{j,k}\right),\end{cases}\tag{20}$$

где $\beta,\lambda\in\mathbb{R}$, причем $\beta\in(0,1/2)$ - заданное число, а λ - параметр.

Очевидно, что из уравнения (20) при $\lambda=0$ следует уравнение (12).

В пунктах 2.3.1 и 2.3.2 соответственно в области Δ сформулированы и исследованы следующие спектральные задачи для уравнения (20) в области Δ.

Задача $\Gamma_\lambda^{(1)}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y)\in C(\overline{\Delta})$, удовлетворяющие условиям

1) $u(x,y)\in C(\overline{\Delta})\cap C^2\left(\bigcup\limits_{j=1}^{3}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2}\Delta_{j,k}\right)\right)$, $|x|^{2\beta}u_x(x,y)\in C\left[\Delta_0\cup\Delta_{2,1}\cup OB_1\right)\cup$

$И(D_{1,2}\ И\ D_{3,1}\ И\ B_2O)\underset{ь}{ц}$, $|y|^{2b}\ u_y(x,y)\ О\ C\ \underset{л}{й}(D_0\ И\ D_{1,2}\ И\ OA_1)\ И\ (D_{2,2}\ И\ D_{3,2}\ И\ A_2O)\underset{ь}{ц}$, причем справедливы условия склеивания (15) и (16);

2) в областях $D_0, D_{j,k}$, $j = \overline{1,3}$, $k = \overline{1,2}$ является решением уравнения (20);

3) выполняются равенства $u(x,y) = 0, (x,y)\ О\ \overline{s}$; $u(-1-y,y) = u(y,-1-y)$, $(-1)\ J\ y\ J\ (-1/2)$; $u(z,0) = u(-z,0)$, $u(0,z) = -u(0,-z)$, $0\ J\ z\ J\ 1$.

Задача $G_l^{(3)}$**.** Найти значения параметра l и соответствующие им нетривиальные функции $u(x,y)\ О\ C(\overline{D})$, удовлетворяющие условиям 1), 2) задачи $G_l^{(1)}$ и $u(x,y) = 0$, $(x,y)\ О\ \overline{s}$; $u(1+y,y) = u(y,1+y)$, $-1\ J\ y\ J\ (-1/2)$;

$$\lim_{y® 0}|y|^{2b}\ u_y(x,y) = \lim_{y® 0}|y|^{2b}\ u_y(-x,y), \qquad 0 < x < 1,$$

$$\lim_{x® 0}|x|^{2b}\ u_x(x,y) = -\lim_{x® 0}|x|^{2b}\ u_x(x,-y), \quad 0 < y < 1.$$

Переходя к полярным координатам, а затем применяя метод разделения переменных, доказано, что существует счетное число собственных значений и собственные функции задач $G_l^{(1)}$ и $G_l^{(3)}$.

Третья глава, названная «**Нелокальные краевые задачи для уравнения эллиптико-параболического типа»**, состоит из двух параграфов и посвящена постановке и исследованию задач с интегральными условиями.

Пусть $\Omega = \Omega_0 \cup AB \cup \Omega_1$, где $\Omega_0 = \{(x,y): x^2 + y^2 < 1,\ y < 0\}$, $AB = \{(x,y): -1 < x < 1,\ y = 0\}$, $\Omega_1 = \{(x,y): -1 < x < 1,\ 0 < y < h\}$, $h = const > 0$.

В области Ω рассмотрим следующее смешанное уравнение

$$0 = \begin{cases} Lu \equiv u_{xx} - u_y, & (x,y) \in \Omega_1; \\ Eu \equiv u_{xx} + u_{yy} + \dfrac{2\beta}{y} u_y, & (x,y) \in \Omega_0 \end{cases} \tag{21}$$

эллиптико-параболического типа, где $\beta \in$ и $\beta \in (0,1/2)$ - заданное число.

В первом параграфе в области Ω для уравнения (21) сформулирована и исследована нелокальная задача с интегральными условиями второго рода как в области эллиптичности уравнения, так и в области параболичности.

Задача 3.1. Найти функцию $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{2,2}(\Omega_0)$, удовлетворяющую уравнению $Lu = 0$, $Eu = 0$ соответственно в областях Ω_1, Ω_0 и нелокальным интегральным условиям

$$u(-1,y) + \int_{-1}^{0} u(x,y)dx = \varphi_1(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{22}$$

$$u(1,y) + \int_{0}^{1} u(x,y)dx = \varphi_2(y), \qquad 0 \le y \le h, \tag{23}$$

$$u(x,y)+\int_0^1 u(rx,ry)dr = f(x,y), \qquad (x,y)\in\sigma_0, \qquad (24)$$

а также условию склеивания в виде

$$\lim_{y\to+0} u_y(x,y) = a(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)+b(x), \qquad -1<x<1,$$

где $\sigma_0=\{(x,y): x^2+y^2=1, y\le 0\}$, а $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $f(x,y)$, $a(x)$, $b(x)$- заданные непрерывные функции, причем (в силу непрерывности искомого решения $u(x,y)$ в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$) выполняются следующие условия согласования: $\varphi_1(0)=f(-1,0)$, $\varphi_2(0)=f(1,0)$.

При исследовании задачи 3.1 использована следующая задача для уравнения (21) в области Ω_0, которая представляет самостоятельной интерес.

Задача 3.2. Найти регулярное в области Ω_0 решение $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_0)$ уравнения $E(u)=0$, в котором $u(x,0)\in C[-1,1]\cap C^2(-1,1)$ для $\forall x\in(-1,1)$ существует предел $\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)$ и удовлетворяет условиям (2.4) и

$$u_{xx}(x,0)=a(x)\lim_{y\to-0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)+b(x), \qquad -1<x<1,$$

где $f(x,y)$, $a(x)$, $b(x)$ - заданные непрерывные функции.

В п.3.1.2 доказано, что справедливы следующие теоремы

Теорема 3.1. Пусть для $\forall x\in(-1,1)$ справедливо неравенство $a(x)>0$. Тогда, если существует решение задачи 3.2, то оно единственно.

Теорема 3.2. Пусть $f(x,y)\in C(\sigma_0)$, $a(x)\in C[-1,1]\cap C^1(-1,1)$, $b(x)\in C(-1,1)\cap L[-1,1]$, $a(x)>0$ для $\forall x\in(-1,1)$ и имеет место равенство

$$a(x)=(1-x^2)^{\gamma}a_1(x), \qquad \gamma>1-2\beta, \qquad a_1(x)\in C^1[-1,1].$$

Тогда решение задачи 3.2 существует.

В п.3.1.3 доказано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)\in C[0,h]$ и выполнены все условия теоремы 3.2. Тогда задача 3.1 имеет единственное решение.

Во втором параграфе в области Ω для уравнения (21) изучена

Задача 3.3. Найти функцию $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_0)$, удовлетворяющую условиям задачи 3.1, в которой условия (22) и (23) заменены на

$$\int_{-1}^{0} u(x,y)dx=\varphi_3(y), \qquad \int_0^1 u(x,y)dx=\varphi_4(y), \quad 0\le y\le h,$$

где $\varphi_3(y)$, $\varphi_4(y)$ - заданные непрерывные функции.

Доказано, что справедлива следующая

Теорема 3.4. Пусть $\varphi_3(y)$, $\varphi_4(y)\in C^1[0,h]$ и выполнены все условия теоремы 3.2. Тогда задача 3.3 имеет единственное решение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена постановке и исследованию краевых и спектральных задач с нелокальными условиями для уравнений эллиптико – гиперболического и эллиптико- параболического типов с сингулярными коэффициентами.

Основные научные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Сформулированы нелокальные краевые и спектральные задачи с условиями типа условия Франкля, Бицадзе – Самарского и условием смещения для дифференциальных уравнений эллиптико – гиперболического типа с двумя сингулярными коэффициентами в различных нетрадиционных смешанных областях;

2. Поставлены нелокальные краевые задачи с интегральным условием для уравнения эллиптико – параболического типа с одним сингулярным коэффициентом в непрямоугольной смешанной области;

3. Доказаны единственность и существование решения поставленных нелокальных краевых задач в смешанных областях;

4. Установлена однозначная разрешимость некоторых нелокальных краевых задач с условиями, связывающими значения искомой функции и её производной дробного порядка, для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в четверти круга;

5. Доказаны единственность и существование решения одной нелокальной краевой задачи с интегральным условием для эллиптического уравнения с одним сингулярным коэффициентом в полукруге;

6. Найдены собственные значения и собственные функции нелокальных спектральных задач, соответствующих поставленным нелокальным краевым задачам для уравнений эллиптического и эллиптико – гиперболического типов.

При доказательстве единственности решения поставленных краевых задач использованы методы интегралов энергии и принципа экстремума, а при доказательстве существования решения – метод интегральных уравнений. Собственные функции найдены с помощью метода разделения переменных, а собственные значения – с использованием теории бесселевых и гипергеометрических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

FERGANA STATE UNIVERSITY

NISHONOVA SHAKHNOZAKHON TOKHIRZHON KIZI

NONLOCAL PROBLEMS FOR ELLIPTIC – HYPERBOLIC AND ELLIPTIC – PARABOLIC TYPE EQUATIONS WITH SINGULAR COEFFICIENTS

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

FERGANA – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM220.

Dissertation has been prepared at Fergana State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors:	**Urinov Akhmadjon Kushakovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Mirsaburov Miraxmat** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
	Apakov Yusufjon Pulatovich PhD on physical and mathematical sciences
Leading organization:	National University of Uzbekistan

Defense will take place «____» _____________2020 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz.).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered №_____). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2020 year.

(Mailing report №___________ on «____» _______________2020 year).

A.К. Urinov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees,D.Ph.M.S.,Professor

I.U.Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S

Sh.T.Karimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to set and investigate nonlocal problems for an elliptic-hyperbolic and elliptic-parabolic equations with singular coefficients.

The object of the research work is differential equations of elliptic-hyperbolic and elliptic-parabolic type with singular coefficients.

The scientific novelty of the research work. The main results of the research are new and consists of the following:

nonlocal boundary and spectral problems with Frankl, Bitsadze-Samarskiy type conditions and also conditions with shift have been formulated for elliptic-hyperbolic and elliptic-parabolic equations with two singular coefficients in non-standard domains;

nonlocal problems with integral conditions for elliptic-parabolic equation with singular coefficients in nonrectangular mixed domains have been formulated and studied;

the uniqueness and existence of the solution for considered nonlocal problems in mixed domains were proved;

the unique solvability of some nonlocal boundary value problems with conditions connecting the values of the desired function and its fractional derivative for an elliptic equation with two singular coefficients in a quarter of the circle have been correctly formulated;

the uniqueness and existence of the solution for nonlocal boundary value problem with an integral condition for an elliptic equation with one singular coefficient in a semicircle has been proved;

eigenvalues and eigenfunctions of certain nonlocal spectral problems corresponding to the formulated nonlocal boundary value problems for equations of elliptic and elliptic-hyperbolic types, were found in an explicit form.

Implementations of the research results. The results obtained in this dissertation were implemented in the following research projects:

The results of the study of nonlocal problems for differential equations of elliptic-hyperbolic and elliptic-parabolic types with singular coefficients were used in the international project No 1.7311.2017 / 8.9 "Development of the methods for studying boundary value problems for differential and pseudo-differential equations" (Belgorod National Research State University). The application of the results made it possible to use integral representations of solutions of differential equations and their application in applied problems in the subject matter of this project;

results on the study of boundary and spectral problems with nonlocal conditions for differential equations of elliptic-hyperbolic type and problems with integral conditions for equations of elliptic-parabolic type in which fractional integrals and derivatives were applied to prove the existence and uniqueness of the solution of boundary value problems for partial differential equations with singular coefficients in the laboratory of mathematical and computer modeling (Kamus State University named after Vitus Bering). Application of the results made it possible to construct a solution of the boundary value problems for fractional differential equations.

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works

I бўлим (I часть; part I)

1. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Некоторые краевые задачи для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. – Ташкент. 2011. № 4. – С. 186-193.
2. Нишонова Ш.Т. Собственные значения и собственные функции одной задачи типа задачи Франкля для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Доклады АН РУз. – Ташкент. 2011. № 3. – С. 16-19.
3. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Об одной задаче типа задачи Франкля для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Узбекский математический журнал. – Ташкент. 2012. №1. – С.139-150.
4. Нишонова Ш.Т. Нелокальные задачи для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами // Доклады АН РУз. – Ташкент. 2012. № 4. – С. 15-18.
5. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Нелокальные задачи с интегральными условиями для эллиптико – параболического уравнения // Доклады АН РУз. – Ташкент. 2015. №4. -С.11-13.
6. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Задачи с интегральными условиями для эллиптико - параболического уравнения // Математические заметки. 2017. Т. 102. № 1. - С. 81-95. (№1. Web of Science : IF=0.626).
Urinov A.K., Nishonova Sh.T. A Problem with Integral Conditions for an Elliptic – Parabolic Equation // Mathematical Notes. 2017. Vol.102.№1.pp.68-80.
7. Нишонова Ш.Т. Нелокальная задача с интегральными условиями первого и второго родов для одного эллиптико – параболического уравнения // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2019. №6. - С. 40-46.

II бўлим (II часть; part II)

8. Нишонова Ш.Т. Об одной спектральной задаче с нелокальными условиями для уравнения смешанного типа // Научный вестник ФерГУ. 2011. №4. - С. 5-9.
9. Нишонова Ш.Т. Задача типа задачи Франкля для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами // Материалы VI Ферганской конференции «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения», посвященной памяти академика С.Х. Сираждинова, г. Фергана, 10-12 мая 2011г. – Ташкент. 2011. – С. 235-238.
10. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Об одной нелокальной задаче на собственные значения // Тезисы докладов Международной конференции “Spectral theory and differential equations”(STDE – 2012). – Kharkiv. 2012. – С. 78-79.

11. Нишонова Ш.Т. Об одной спектральной задаче с нелокальными условиями для уравнения смешанного типа // Материалы второго Международного Российско - Узбекского симпозиума "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики". - Нальчик: Издательство КБНЦ РАН. 2012. – С. 207-210.
12. Нишонова Ш.Т. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа // Материалы Республиканской научно – практической конференции "Новые теоремы молодых математиков -2013". Т.2. №2. - Наманган. 2013. - С. 98-101.
13. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Задача с интегральным условием для уравнения эллиптического типа // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского.Том 49. Материалы Международной научной конференции «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций - 2014». 29 сентября – 1 октября 2014 г. – Казань. 2014. -С. 317-318.
14. Уринов А.К., Нишонова Ш.Т. Нелокальные задачи с интегральными условиями для эллиптико-параболического уравнения // Тезисы докладов IV международной конференции «Математическая физика и ее приложения». 25 августа – 1 сентября 2014 г. – Самара. 2014. -С.363-364.

Автореферат Фарғона давлат университети «FarDU Ilmiy xabarlar – Научный вестник ФерГУ» илмий – методик журнал таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.