В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАСУЛОВ МИРОЖИДДИН СОБИРЖОНОВИЧ

ПАРАБОЛИК ВА ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОМАЪЛУМ ЧЕГАРАЛИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

УДК: 517.956/.3/.4

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Расулов Мирожиддин Собиржонович
Параболик ва гиперболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалалар.. 3

Расулов Мирожиддин Собиржонович
Задачи со свободной границей для параболических и гиперболических уравнений………………………………………………. 23

Rasulov Mirojiddin Sobirjonovich
Free boundary problems for parabolic and hyperbolic equations…… 43

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works 46

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

РАСУЛОВ МИРОЖИДДИН СОБИРЖОНОВИЧ

ПАРАБОЛИК ВА ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМАЛАР УЧУН НОМАЪЛУМ ЧЕГАРАЛИ МАСАЛАЛАР

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.4.PhD/FM152 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация ЎзР ФА қошидаги В.И. Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (http://kengash.mathinst.uz/) ва «ZiyonNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Тахиров Жозил Останович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ашуров Равшан Раджабович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Кадиркулов Бахтияр Жалилович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Самарқанд давлат университети**

Диссертация ҳимояси ЎзР ФА қошидаги В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «____» _________ соат_____даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек тумани, Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (99871) 262-75-44, факс: (99871) 224-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Диссертация билан ЎзР ФА қошидаги В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100170, Тошкент ш., Мирзо Улуғбек кўчаси, 81-уй. Тел.: (99871) 262-75-44.

Диссертация автореферати 2020 йил «__» ________куни тарқатилди.
(2020 йил «__» ________ даги____рақамли реестр баённомаси).

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

А.А. Азамов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда номаълум чегарали масалаларни тадқиқ этишга, яъни фазалар алмашиши муаммоларини ўрганишга келтирилади. Ўз навбатида номаълум чегарали масалалар муҳитларда фазалар алмашинуви билан кечувчи кўплаб табиий жараёнларнинг математик моделларини яратишда кенг қўлланилади.

Ҳозирги кунда инновацион характердаги тадқиқотлар устувор ҳисобланади. Математик моделлаштириш эса илмий тадқиқотларда ва фан-техниканинг турли соҳаларидаги амалий муаммоларни ҳал қилишда кенг қўлланилади. Бунда чизиқсиз реакция-диффузия системалари учун номаълум чегарали масалалардан кенг фойдаланилмоқда. Чунки улар кенг динамик характерни ва мустақил тартиблашишнинг турли усулларини намоён этади. Диффузияли муҳитда кимёвий реакцияларнинг бўлиши имконияти фазонинг ҳар бир нуқтасида энергия манбаси мавжудлигини англатади. Бундай тизимлар одатда фаол муҳитлар деб аталади. Уларнинг характери оддий физик муҳитдагидан тубдан фарқланади. Маълумки, биологик муаммоларни математик моделлаштириш мураккаб математик масаладир. Биринчидан, бундай муаммоларнинг аксарияти учун “биринчи қоида” етарли эмас. Натижада биологияда математик моделлаштириш аксарият ҳолларда эвристик таҳлил асосида яратилади. Иккинчидан, бундай моделларни таҳлил қилиш учун аксарият ҳолларда чекланган маълумотлар мавжуд. Шундай қилиб, табиий жараёнларни янада аниқроқ тасвирлайдиган реакция-диффузия типидаги параболик тенгламалар ва параболик тенгламалар системалари учун номаълум чегарали математик моделлар пайдо бўлди. Бугунги кунда ушбу илмий йўналиш амалий математиканинг жадал ривожланаётган соҳасига айланди.

Мамлакатимизда фундаментал ва амалий тадқиқотларга жиддий эътибор қаратилмоқда. Илм-фан олдига фундаментал тадқиқотларни амалиётга яқинлаштириш вазифалари қўйилди. Ушбу вазифани бажаришда параболик ва гиперболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалалар назариясигаалоҳида роль ажратилган. Математик фанларнинг устувор йўналишлари бўйича, айниқса, дифференциал тенгламалар ва математик физика, амалий математика ва математик моделлаштириш бўйича ҳалқаро стандартлар даражасидаги илмий тадқиқот ишларини олиб бориш Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги математика институти фаолиятининг аосий вазифаси ва йўналиши этиб белгиланган[1]. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва номаълум чегарали масалалар назарияларини ривожлантириш ушбу қарорни амалга оширишда муҳим аҳамиятга эга.

---

[1]Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон қарори “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И. Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги №ПФ-4947 “Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисида”ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги №ПҚ-2789 “Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида”ги, 2017 йил 20 апрелдаги №ПҚ-2909 “Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги ва 2018 йил 27 апрелдаги №ПҚ-3682 “Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги, 2019 йил 9 июлдаги №ПҚ-4387 “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологияларни ривожлантиришнинг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот иши республика фан ва технологияларни ривожлантиришнинг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Фазалар алмашинуви динамикасини назарий жиҳатдан ўрганиш Стефан масаласининг турли хил кўринишларига олиб келади. Классик Стефан масаласи ўтган асрда эриш ва қотиш кўринишидаги фаза алмашиш жараёнларини тасвирлаш учун қўлланилган бўлиб, бу қаттиқ ва суюқ фазаларни ажратиб турувчи номаълум ҳаракатланувчи чегара билан ажратилган соҳада аниқланган иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасига келади. Фазалар оралиғидаги чегарада Стефан шарти бажарилади.

Номаълум чегарали масалалар назарияси асослари A.Friedman, L.Rubinstein, J.Cannon, J.Hill, W.Kyner (USA), A.Fasano, M.Primecerio, A.Tarzia (Italy), А.Мейрманов, И.Данилюк (Россия) ва бошқаларнинг илмий ишларида ишлаб чиқилган ва ривожлантирилган. Бир ўлчовли классик Стефан масаласи деярли батафсил ўрганилган. Кўрсатилган муаллифларнинг мақолаларида классик ечимларнинг глобал мавжудлиги исботланган. Масалан, J.Cannon ва унинг шогирдлари илмий ишларида ечимнинг хоссалари ва номаълум чегаранинг асимптотик табиати батафсил ўрганилган. Кўп ўлчовли Стефан масаласига доир ишлар чизиқли бўлмаган параболик тенгламалар учун умумлашган ечимларни ўрганишга бағишланган. Бу ерда О.Олейник, С.Каменомосткая, И.Данилюк, А.Мейрманов, A.Friedman, L.Caffarelli, L.Evans, E.Hanzawa, G.Duvant, A.Visintin ва бошқаларнинг натижаларини таъкидлаш керак. 80-йилларнинг ўрталарига келиб, гиперболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалалар пайдо бўлди. Бундай масалаларнинг газодинамикада қўлланилишидан ташқари, релаксацион хоссага эга бўлган муҳитларда иссиқлик тарқалиш жараёнларини тавсифлаши асосланди. Гиперболик тенгламаси учун номаълум чегарали масалаларга доир асосий натижалар A.Friedman, B.Hu, X.Chen, J.D.Greenberg, C.D.Hill, R.E.Showalter, A.D.Solomon, V.Alexiades ва бошқалар томонидан олинган. Табиатига кўра номаълум чегарали масалалар чизиқли тенгламалар учун қўйилган бўлса ҳам умумий масала чизиқсиздир. Шунинг учун тадқиқотларда чизиқсиз параболик ва гиперболик тенгламалар назарияси кенг қўлланилади. Бу ерда A.Friedman, C.V.Pao, О.А.Ладыженская, О.А.Олейник, С.Н.Кружков, Н.В.Крылов, Б.Л.Рождественский ва бошқаларнинг илмий ишларини таъкидлаш керак.

Ҳозирги кунда дунёнинг кўплаб илмий марказларида (АҚШ, Европа, Хитой) чизиқсиз тенгламалар ва реакция-диффузия типидаги системалар бўйича кенг қамровли изланишлар олиб борилмоқда ва улар турли хил биологик, тиббий-биологик ва шунга ўхшаш жараёнларни математик моделлаштиришга қўлланилмоқда. Бу ерда A.Friedman, C.Pao, Y. Du, X.Chen, Z. Lin, C. Li ва бошқаларнинг илмий натижаларини кўрсатиш лозимдир. Шу жумладан биз ҳам ушбу оқимга қўшилдик.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти ФА Математика институти илмий-тадқиқот ишлари режасидаги А-5-12 “Саноатлашган ҳудудлар экологик ҳолати мониторинги ва уни башоратлашнинг математик таъминотини ишлаб чиқиш” (2015-2017 йиллар) амалий ва ОТ-Ф4-85 “Биология ва экологиянинг замонавий муаммоларини тадқиқ этиш учун чизиқсиз математик моделларни ва самарадор ҳисоблаш алгоритмларни ишлаб чиқиш” (2017-2020 йиллар) фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади параболик тенгламалар ва реакция-диффузия типидаги тенгламалар системалари, шунингдек биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системалари учун номаълум чегарали масалалар назариясини қуриш ва ривожлантиришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

тиббий-биологик (wound healing) муаммо математик моделини такомиллаштириш ва уни тадқиқ этиш;

ўзаро таъсирлашувчи турларнинг икки компонентали параболик моделини тадқиқ этиш;

параболик тенглама учун икки номаълум чегарали масалани тадқиқ этиш;

реакция-диффузия-адвекция типидаги моделни тадқиқ этиш;

гиперболик иссиқлик ўтказувчанлик моделини тадқиқ этиш;

газ таъсири остида ҳаракатланувчи поршень ҳақидаги икки фазали газодинамика масаласини тадқиқ этиш.

Моделни (масалани) тадқиқ этиш деганда масалаларни ечиш усулларини ишлаб чиқиш, ечимлар учун Гёльдер нормасида априор баҳолар ўрнатиш, чекли ва етарлича катта вақтлар оралиғида номаълум чегара табиатини ўрганиш, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги теоремаларини исботлаш назарда тутилади.

Тадқиқот объекти биомедицина, биология, экология ва релаксацион ҳусусиятга эга мухитлардаги газ-гидродинамиканинг номаълум чегарали турли моделларидан иборат.

Тадқиқот предмети априор баҳолар ўрнатиш усуллари, ечимнинг ягоналик ва мавжудлик теоремаларининг исботи, шунингдек қидирилаётган функцияларнинг сифат хоссаларидан иборат.

Тадқиқоднинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва математик физика, математик моделлаштириш усулларидан фойдаланилди.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

квазичизиқли параболик тенгламалар системаси ва реакция-диффузия типидаги тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалалар ечимларининг Гёльдер фазоларидаги априор баҳоларини олиш усуллари ишлаб чиқилган;

квазичизиқли параболик тенгламалар системаси ва реакция-диффузия типидаги тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалалар ечимларининг Гёльдер фазоларида олинган априор баҳолари асосида ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

квазичизиқли параболик тенгламалар учун бир ва икки номаълум чегарали масалалар ечимларига Шаудер типидаги априор баҳолар ўрнатиш усуллари қурилган, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган, вақтнинг чексиз ўсиши даврида ечимнинг асиптотик баҳоси ўрнатилган;

релаксацион хусусиятга эга мухитлардаги табиий жараёнларнинг математик моделлари ҳисобланмиш биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали Стефан типидаги масалалар ечилган, ечимлар учун априор баҳолар олинган ва уларнинг глобал мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Квазичизиқли параболик тенгламалар ва системалар учун номаълум чегарали масалалар кўринишдаги такомиллаштирилган математик моделлар, шунингдек таклиф қилинган усуллар турли биотиббий жараёнларни ўрганишда қўлланилиши мумкин.

Гиперболик типдаги номаълум чегарали масалалар релаксацион хусусиятига эга бўлган муҳитларда иссиқлик-масса узатиш ва газо-гидродинамика муаммоларини тадқиқ этишда қўлланилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги дифференциал тенгламалар ва математик физика, математик моделлаштириш усуллари ва янги натижаларни қўллаш ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ҳусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва математик физика, номаълум чегарали масалалар назарияларини ривожлантиришда ва турли табий жараёнларнинг математик моделларини яратишда қўлланиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти турли тиббий-биологик, физик, кимёвий ва экологик жараёнлар моделларини яратишда ва ўрганишда қўлланилишимумкинлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Параболик ва гиперболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалаларга оид олинган натижалар асосида:

параболик ва гиперболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалаларга оид илмий натижалар “Фрактал ҳисоб ва унинг тадбиқи” (Витус Беринг номидаги Камчатка давлат университетининг 2019 йил 11 ноябрдаги №728-22 рақамли маълумотномаси) лабораториясининг математик физиканинг ноклассик масалаларини ечиш ва уларга фрактал ҳисоб масалаларини тадбиқ этишда қўлланилган. Илмий натижалардан фойдаланиш қидирилаётган функцияларни баҳолаш ва дифференциаллашнинг каср кўрсаткичи оралиғини аниқлашга имкон берган;

параболик ва гиперболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалалар ечимлари учун Гёлдерь фазосида априор баҳолар олиш усуллари “Экстремал жараёнларнинг аралаш типдаги нолокал дифференциал тенгламалар кўринишидаги математик моделлари” (РФА Кабардин-Балқар илмий марказининг Амалий математика ва автоматлаштириш институти, №0213-2014-0002) номли тадқиқотлар доирасидаги аралаш параболо-гиперболик ва юкланган гиперболик типдаги тенгламалар учун локал ва нолокал чегаравий масалаларни тадқиқ этишга тадбиқ этилган. Илмий натижалардан фойдаланиш номаълум функцияларни баҳолаш ва масала ечилувчанлигини кўрсатиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий натижалари 8 та ҳалқаро ва 2 та республика миқёсидаги илмий анжуманларда муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган бўлиб, шулардан, 5 таси Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари (PhD) асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда, жумладан 1 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулосалар ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 110 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Ишнинг **кириш** қисмида мавзунинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялар ривожланишининг устувор йўналишларига мувофиқлиги асосланган, диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотларнинг таҳлили берилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси ёритилган, тадқиқотнинг мақсад ва вазифалари, объекти ва предмети кўрсатилган, тадқиқот натижаларининг илмий янгилиги очиб берилган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти кўрсатилган, тадқиқот натижаларининг татбиқи, шунингдек нашр этилган илмий ишлар ва диссертациянинг структураси ҳақидаги маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Ёрдамчи маълумотлар”** деб номланган биринчи бобида диссертация натижаларини ўрганишда зарур бўлган бир қатор маълум фактлар келтирилган.

Барча номаълум чегарали масалалар чизиқсиз бўлганлиги учун илмий тадқиқотимизнинг асосий мақсади – ечимлар учун априор баҳолар ўрнатиш, улар асосида чегаравий масалаларнинг бир қийматли ечилувчанлигини исботлаш ва номаълум чегаралар табиатини ўрганишдир.

Диссертацияда (С.Н.Кружков, Тр. ММО. 1967, №16; А. Фридман, Уравнения с частными производными параболического типа, М.: Мир, 1968) ишларнинг натижалари ва белгилашларидан фойдаланамиз.

Диссертациянинг **“Параболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалалар”** деб номланган иккинчи боби реакция-диффузия типидаги мураккаб икки компонентали системаларнинг математик моделларини ўрганишга бағишланган.

Биринчи параграфда медико-биологик жараён – яранинг тузалиши (wound healing)нинг математик модели ҳисобланмиш аралаш икки фазали соҳада нолокал шартли номаълум чегарали масала ўрганилади.

Қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$ функциялар топилсин:

$$u_t = \left(a_1(u,v)u_x\right)_x + f_1(u,v), \quad D = \left\{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\right\}, \tag{1}$$

$$v_t = \left(a_2(u,v)v_x\right)_x + f_2(u,v), \quad Q = \left\{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < l\right\}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0) < l, \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$v(t,0) = m_1 v(t,x_1), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x_1 < x_2 < l, \tag{6}$$

$$v(t,l) = m_2 v(t,x_2), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_1 < x_2 < l, \tag{7}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$u(t,x) = 0, \quad s(t) \le x \le l, \tag{9}$$

$$s'(t) = -a_1(0,v)u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

бу ерда $x = s(t)$ – номаълум чегаранинг тарқалиш фронтини ифодалайди ва $u(t,x)$, $v(t,x)$ функциялар билан бирга аниқланади; $u(t,x)$ – яра ташқарисидаги соғлом хужайралар зичлиги, $v(t,x)$ – кимёвий-биологик препаратлар концентрацияси.

Қуйидаги шартлар бажарилсин деб фараз қиламиз:

a) $a_i(u,v)\ge a_{i0}>0$, a_{i0}, m_i, $x_i-const,\ 0<m_i<1,\ i=1,2;$

b) агар $0\le u(t,x)\le M_1(|u_0|,|f_1(0,0)|),\ 0\le v(t,x)\le M_2(|v_0|,|f_2(0,0)|)$ бўлса (1-леммага қаранг), у ҳолда $\Omega=\{(u,v):0\le u(t,x)\le M_1, 0\le v(t,x)\le M_2\}$ тўплам аниқланади; бундан ташқари $0<M_2\le M_1$, $a_i(u,v)\in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $0<\alpha<1$, $a_{iu}(u,v)\le 0$, $f_{iu}(u,v)\le 0$, $f_{iv}(u,v)\le 0,\ i=1,2;$

c) ихтиёрий $v(t,x)$ учун агар $u(t,x)\le 0$ бўлса $f_1(u,v)\in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $f_1(u,v)>0$,

агар $u(t,x)\ge M_1$ бўлса $f_1(u,v)\le 0$ бўлсин;

d) ихтиёрий $u(t,x)$ учун агар $v(t,x)\le 0$ бўлса $f_2(u,v)\in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $f_2(u,v)\ge 0$,

агар $v(t,x)\ge M_2$ бўлса $f_2(u,v)\le 0$ бўлсин;

e) $u_0(x)\in C^{2+\alpha}$, $0<u_0(x)<M_1,\ 0\le x\le s_0,\ u_0'(0)=0,\ u_0(s_0)=0,\ u_0'(s_0)<0,$
$v_0(x)\in C^{2+\alpha}[0,l],\ 0\le v_0(x)\le M_2,\ v_0(0)=m_1v_0(x_1),\ v_0(l)=m_2v_0(x_2).$

1-лемма. Агар $(s(t),u(t,x),v(t,x))$ функциялар (1)-(10) масаланинг ечимлари бўлса, у ҳолда T га боғлиқ бўлмаган шундай M_1, M_2 мусбат ўзгармас сонлар мавжуд бўлиб, қуйидаги тенгсизликларни қаноатлантиради

$$0\le u(t,x)\le M_1(|u_0|,|f_1(0,0)|),\quad (t,x)\in D, \tag{11}$$

$$0\le v(t,x)\le M_2(|v_0|,|f_2(0,0)|),\quad (t,x)\in Q, \tag{12}$$

$$0<s'(t),\quad 0\le t\le T. \tag{13}$$

Энди системанинг ҳар бир тенгламаси учун тегишли масалани алоҳида қараймиз:

$$\begin{cases} a_1(u,v)u_{xx}+b_1(u,v,u_x,v_x)-u_t=0, & (t,x)\in D,\\ u(0,x)=u_0(x), & 0\le x\le s_0,\\ u_x(t,0)=0, & 0\le t\le T,\\ u(t,s(t))=0, & 0\le t\le T,\\ s'(t)=-a_1(0,v)u_x(t,s(t)), & 0\le t\le T, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_2(u,v)v_{xx}+b_2(u,v,u_x,v_x)-v_t=0, & (t,x)\in Q,\\ v(0,x)=0, & 0\le x\le l,\\ v(t,0)=m_1v(t,x_1), & 0\le t\le T,\\ v(t,l)=m_2v(t,x_2), & 0\le t\le T,\quad 0<x_1<x_2<l, \end{cases} \tag{15}$$

бу ерда $b_1(u,v,u_x,v_x)=a_{1u}u_x^2+a_{1v}v_xu_x+f_1(u,v),\ b_2(u,v,u_x,v_x)=a_{2v}v_x^2+a_{2u}u_xv_x+f_2(u,v).$

2-теорема. Узлуксиз $v(t,x)$ функция $\overline{Q}$ соҳада (15) масаланинг шартларини қаноатлантирсин ва $a_2(u,v)$, $b_2(u,v,u_x,v_x)$ узлуксиз функциялар

$(t,x)\in\bar{Q}$, $|u|\le M_1$, $|v|\le M_2$ ва ихтиёрий u_x, v_x учун қуйидаги шартни бажарсин:

$$\frac{|b_2(x,u,v,u_x,v_x)|}{a_2(u,v)}\le K_2\left(u_x^2+v_x^2+1\right),\ K_2>0.$$

У ҳолда

$$|v_x(t,x)|\le P_{02}(M_2,a_{20},K_2,\delta),\ (t,x)\in Q^{\delta}. \tag{16}$$

Агарда $\{(t,x)\in\bar{Q},|u|\le M_1,|v|\le M_2,|v_x|\le P_{02}\}$ соҳада $a_2(u,v)\le a_{22}$ бўлса, у ҳолда $|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^{2\delta}}\le C(M_2,a_{20},K_2,\delta)$.

Бундан ташқари, $v(t,x)$ функция $\bar{Q}$ соҳада v_{tx}, v_{xx} ҳосилалари квадрати билан жамланувчи бўлса, у ҳолда

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^{2\delta}}\le C(M_2,a_{20},a_{22},P_0,K_2,\delta),\quad 0<\gamma<1, \tag{17}$$

$$|v|_{2+\beta}^{Q^{4\delta}}\le C(M_2,a_{20},a_{22},P_0,K_2,\delta),\quad 0<\beta<1, \tag{18}$$

бу ерда $Q^{\delta}=\{(t,x):0\le t\le T,\delta\le x\le l-\delta\}$, $a_{22}=\max\limits_{Q}a_2(u,v)$.

Агар $4\delta<x_1<x_2<l-4\delta$ бўлса, у ҳолда (16)-(18) баҳолар $\bar{Q}$ соҳада ўринлидир.

3-лемма. 1-лемма ва 2-теореманинг барча фаразлари ва шу билан бирга $\frac{d}{dx}a_1(u,v)\ge 0$, $N\ge\max\limits_{x}\frac{u_0(x)}{s_0-x}$ ўринли бўлсин. У ҳолда $s'(t)\le M_3$ бўлади, бу ерда M_3 фақат масаланинг берилган маълумотларига боғлиқ бўлиб, T вақтга боғлиқ эмас.

(14) масала учун априор баҳолар қуйидагича қурилади. 6-теореманинг барча шартлари (14) масала учун бажарилсин деб фараз қиламиз. $\tau=t$, $y=\frac{x}{s(t)}$ алмаштириш киритилса, D соҳа мос $\Omega_1=\{(\tau,y):0<\tau\le T,0<y<1\}$ соҳага ўтади. $U(\tau,y)=u(\tau,ys(\tau))$ функция эса ўнг қисми ва коэффициентлари Гёльдер бўйича узлуксиз бўлган тенгламанинг ечими бўлади. Ўнг чегарага жуфт давом эттириш усулини қўллаган ҳолда $|w_y|$, $|w|_{1+\gamma}$ функциялар учун $y=1$ гача баҳоларни ўрнатамиз. Юқори тартибли ҳосилалар учун баҳолар чизиқли тенгламалар натижалари бўйича олинади.

4-теорема. 1-лемма ва 2-теоремаларнинг барча фаразлари ўринли бўлсин.$u(t,x)$ узлуксиз функция $\bar{D}$ соҳада (14) масала шартларини қаноатлантирсин. Фараз қилайлик узлуксиз $a_1(u,v)$, $b_1(u,v,u_x,v_x)$ функциялар $(t,x)\in\bar{D}$, $|u|\le M_1$, $|v|\le M_2$ ва ихтиёрий u_x, v_x учун қуйидаги шартларни қаноатлантирсин

$$\frac{\left|b_1\left(x,u,v,u_x,v_x\right)\right|}{a_1(u,v)} \le K_1\left(u_x^2+v_x^2+1\right),\ K_1>0.$$

У ҳода

$$|u_x(t,x)| \le P_{01}\left(M_1,a_{10},K_1,\delta\right), \quad (t,x)\in D^{\delta} \tag{19}$$

баҳо ўринлидир.

Агарда $\left\{(t,x)\in \bar{D}, |u|\le M_1, |v|\le M_2, |u_x|\le P_{01}\right\}$ соҳада $a_1(u,v)\le a_{11}$ бўлса, у ҳолда $|u|_{\frac{2}{3}}^{D^{2\delta}} \le C(M_1,a_{10},K_1,\delta)$ бўлади.

Бундан ташқари $u(t,x)$ функция $\bar{D}$ соҳада u_{xx} ва u_{tx} ҳосилалари квадрати билан жамланувчи бўлса, у ҳолда

$$|u|_{1+\alpha}^{D^{2\delta}} \le C(M_2,a_{10},a_{11},P_{01},K_1,\delta), \quad 0<\alpha<1, \tag{20}$$

бўлади, бу ерда $a_{11}=\max\limits_{D} a_1(u,v)$.

Агар $u\big|_{\Gamma(x=0,t=0,x=s(t))}=0$ бўлса, у ҳолда (19), (20) баҳолар $\bar{D}$ соҳада ўринлидир.

Юқори тартибли баҳолар $|u|_{2+\alpha}^{\bar{D}}\le C,\ |v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}}\le C$ чизиқли тенгламалар учун олинган натижалар каби ўрнатилади.

Энди номаълум чегара t бўйича монотон ўсувчи ва бирор $t=T^*$ да $x=l$ ўнг чегарани кесишини исботлаймиз.

5-лемма. T га боғлиқ бўлмаган шундай мусбат сон $\varepsilon>0$ мавжуд бўлиб, қуйидаги

$$s'(t)\ge\varepsilon>0, \quad 0\le t\le T$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

(1)-(10) масала ечимининг ягоналиги (11)-(13) баҳолар ёрдамида исботланади.

6-теорема. 2- теорема ва 3-лемманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда $D\cup Q$ соҳада (1)-(10) масаланинг $u(t,x)\in C^{2+\alpha}\left(\bar{D}\right)$, $v(t,x)\in C^{2+\beta}\left(\bar{Q}\right)$, $s(t)\in C^{1+\gamma}\left(0\le t\le T^*\right)$ ечими мавжуд, T^*нинг қиймати $\lim\limits_{t\to T^*}s(t)=l$ шартдан аниқланади.

Иккинчи бобнинг **иккинчи параграфида** икки рақобатлашувчи турлар популяцион динамикасини ифадаловчи реакция-диффузия типидаги параболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масала қаралади

$$u_t-d_1u_{xx}+m_1u_x=u\left(a_1-b_1u-c_1v\right), \quad (t,x)\in D, \tag{21}$$

$$v_t-d_2v_{xx}+m_2v_x=v\left(a_2-b_2u-c_2v\right), \quad (t,x)\in D, \tag{22}$$

$$u(0,x)=u_0(x), \quad v(0,x)=v_0(x), \quad 0\le x\le s(0)=s_0, \tag{23}$$

$$u_x(t,0)=0, \quad v_x(t,0)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{24}$$

$$u\left(t,s(t)\right)=0, \quad v\left(t,s(t)\right)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{25}$$

$$s'(t)=-\mu\left[u_x\left(t,s(t)\right)+\rho v_x\left(t,s(t)\right)\right], \quad 0\le t\le T, \tag{26}$$

бу ерда $u(t,x), v(t,x)-$турларнинг зичлиги, $x=s(t)-$ номаълум чегара бўлиб,$u(t,x)$, $v(t,x)$ билан бирга аниқланади; d_i, m_i, a_i, b_i, c_i, ρ, $\mu-$мусбат ўзгармаслар, $i=1,2$.

7-теорема. Агар $u(t,x), v(t,x), s(t)$ функциялар (21)-(26) масаланинг ечими бўлса, қуйидаги баҳолар ўринлидир

$$0<u(t,x)\le M_1\equiv\frac{a_1}{b_1},\qquad (t,x)\in\bar{D}, \tag{27}$$

$$0<v(t,x)\le M_2\equiv\frac{a_2}{c_2},\qquad (t,x)\in\bar{D}, \tag{28}$$

$$0<s'(t)\le M_3\equiv\mu\left(N_1+\rho N_2\right),\qquad 0<t\le T. \tag{29}$$

Априор баҳолар ўрнатиш учун қуйидагича $t=t$, $y=\dfrac{x}{s(t)}$ алмаштириш киритамиз. У ҳолда D соҳа $Q=\{(t,y):0<t<T,\ 0<y<1\}$ соҳага ўтади, $U(t,y)=u(t,x)$, $V(t,y)=v(t,x)$ чегараланган функциялар эса

$$\begin{cases}U_t-A_1U_{yy}+B_1U_y=U\left(a_1-b_1U-c_1V\right), & (t,y)\in Q,\\ V_t-A_2V_{yy}+B_2V_y=V\left(a_2-b_1U-c_2V\right), & (t,y)\in Q,\\ U(0,y)=U_0(y),\quad V(0,y)=V_0(y), & 0\le y\le 1,\\ U_y(t,0)=0,\quad V_y(t,0)=0, & 0\le t\le T,\\ U(t,1)=0,\quad V(t,1)=0, & 0\le t\le T,\end{cases}$$

масаланинг ечимлари бўлади; бунда $U_0(y)=u_0(ys_0)$, $V_0(y)=v_0(ys_0)$, $s'(t)=-\mu\left[U_y(t,1)+\rho V_y(t,1)\right]$, $A_i\left(s(t)\right)=\dfrac{d_i}{s^2(t)}$, $B_i\left(t,y,s(t),s'(t)\right)=\dfrac{ys'(t)+m_i}{s(t)}$, $i=1,2$.

Бундан ташқари системанинг ҳар бир тенгламаси учун мос алоҳида масала қараймиз:

$$\begin{cases}U_t=A_1\left(s(t)\right)U_{yy}+F_1\left(U,V,U_y\right), & (t,y)\in Q,\\ U(0,y)=U_0(y), & 0\le y\le 1,\\ U_y(t,0)=0, & 0\le t\le T,\\ U(t,1)=0, & 0\le t\le T,\end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases}V_t=A_2\left(s(t)\right)V_{yy}+F_2\left(U,V,V_y\right), & (t,y)\in Q,\\ V(0,y)=V_0(y), & 0\le y\le 1,\\ V_y(t,0)=0, & 0\le t\le T,\\ V(t,1)=0, & 0\le t\le T,\end{cases}$$

бунда $F_1\left(U,V,U_y\right)=U\left(a_1-b_1U-c_1V\right)-B_1U_y$, $F_2\left(U,V,V_y\right)=V\left(a_2-b_2U-c_2V\right)-B_2V_y$.

8-теорема. $U(t,y)$ функция $\bar{Q}$ соҳада U_y ҳосиласи билан биргаликда узлуксиз бўлсин ва (30) масала ечими бўлсин. Бундан ташқари $\sup\limits_{\bar{Q}} |U_{yy}| < +\infty$ бўлсин. У ҳолда

$$\left|U_y(t,y)\right| \le M_4(M_1, M_2, A_{10}, \delta), \quad (t,y) \in Q^\delta.$$

Агар $U\big|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$ бўлса, у ҳолда $(t,y) \in \bar{Q}$ учун

$$\left|U_y(t,y)\right| \le M_4(M_1, M_2, A_{10}), \tag{31}$$

бўлади, бу ерда $Q^\delta = \{(t,y): 0 < \delta \le t \le T,\ 0 < \delta \le y \le 1-\delta\}$, $A_{10} = \min\limits_{\bar{Q}} A_1$, $\Gamma(t=0,\ y=0,\ y=1)$ – параболик чегара.

9-теорема. $\bar{Q}$ соҳада узлуксиз $U(t,y)$ функция (30) масаланинг барча шартларини қаноатлантирсин. Фараз қилайлик узлуксиз $A_1(s(t))$, $F_1(U,V,U_y)$ функциялар $(t,y) \in \bar{Q}$, $|U| \le M_1$, $|V| \le M_2$ ва ихтиёрий U_y учун

$$\frac{\left|F_1(U,V,U_y)\right|}{A_1(s(t))} \le K_1(U_y^2 + 1), \quad K_1 > 0.$$

шартни қаноатлантирсин. Шу билан бирга $\{(t,y) \in \bar{Q}, |U| \le M_1, |V| \le M_2, |U_y| \le M_4\}$ соҳада $A_1(s(t)) \le A_{11}$ бўлса, у ҳолда

$$|U|_{\frac{2}{3}}^{Q^\delta} \le M_5(M_1, M_2, A_{11}, K_1, \delta) \tag{32}$$

бўлади. Бундан ташқари $U(t,y)$ функция $\bar{Q}$ соҳада U_{ty}, U_{yy} ҳосилалари квадрати билан жамланувчи бўлсин. У ҳолда

$$|U|_{1+\gamma}^{Q^\delta} \le M_6(M_1, M_2, A_{11}, A_{21}, K_1, \delta), \quad 0 < \gamma < 1, \tag{33}$$

бўлади; бу ерда $A_{11} = \max\limits_{\bar{Q}} A_1$, $A_{21} = \max\limits_{\bar{Q}} A_2$.

Агар $U\big|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$ бўлса, (31)-(33) баҳолар $\bar{Q}$ соҳада ўринлидир.

Чизиқли параболик тенгламалар назариясига таяниб

$$|U|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} \le M_7 \tag{34}$$

баҳони оламиз.

$V(t,y)$ функция учун ҳам (31)-(34) типидаги баҳолар ўринлидир.

(21)-(26) масаланинг ягоналиги (27)-(29) баҳолар асосида исботланади.

10-теорема. 7- ва 9- теоремаларнинг шартлари бажарилсин. У ҳолда (21)-(26) масаланинг $u(t,x) \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $v(t,x) \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$ ечими мавжуд.

11-теорема. Агар $s_\infty < +\infty$ бўлса, у ҳолда $s_\infty < s^*$ ва $\lim\limits_{t\to+\infty} \left\|u(t,x), v(t,x)\right\|_{C[0,s(t)]} = 0$ бўлади. Бу ерда $s_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$, $s_\infty < s^*$ - масала параметрлари ёрдамида топилади.

Учинчи боб параболик тенгламалар учун номаълум чегарали масалаларни ўрганишга бағишланган.

Биринчи параграфда $D=\{(t,x):0<t\le T,0<x<s(t)\}$ қуйидаги масала қаралади

$$u_t-du_{xx}-cu_x=u(a-bu),\ (t,x)\in D, \tag{35}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ \ 0\le x\le s(0)=s_0, \tag{36}$$

$$u_x(t,0)=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{37}$$

$$u(t,s(t))=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{38}$$

$$s'(t)=-\mu u_x(t,s(t)),\ 0\le t\le T, \tag{39}$$

буерда $u(t,x)-$биологик турнинг зичлиги, $x=s(t)-$номаълум чегара популяция тарқалиш фронтини ифодалайди ва (35) тенгламанинг ечими билан бирга аниқланади, a, b, d, c, $\mu-$мусбат ўзгармаслар,

12-теорема. Агар $(s(t),u(t,x))$ функциялар жуфтлиги D соҳада (35)-(39) масаланинг ечими бўлиб ва шундай N мусбат сон топилиб, $N\ge\max\left\{\frac{a^2}{bc},\max_x\frac{u_0(x)}{s_0-x}\right\}$ бўлсин. У ҳолда T га боғлиқ бўлмаган M_1, M_2 мусбат ўзгармаслар мавжуд ва қуйидаги

$$0<u(t,x)\le M_1,\qquad (t,x)\in\bar D \tag{40}$$

$$0<s'(t)\le M_2,\qquad 0\le t\le T \tag{41}$$

тенгсизликлар ўринли бўлади.

Шундан кейин юқоридаги каби $\left|u_x^{\bar D}(t,x)\right|\le M_3$, $|u|_{1+\gamma}^{\bar D}\le M_4$, $|u|_{2+\gamma}^{\bar D}\le M_5$ априор баҳолар ўрнатилади.

Ўрнатилган априор баҳолар (35)-(39) масала ечимининг мавжудлик теоремасини исботлашга имкон беради.

(35)-(39) масала ечимининг ягоналиги 12-теорема фаразлари асосида исботланади.

Қуйидаги $\lim_{t\to\infty}s(t)=s_\infty\in(0,+\infty]$ белгилашни киритамиз.

13-теорема. Агар $s_\infty<\infty$ бўлса, у ҳолда $s_\infty\le\frac{\pi}{2}\left(a-\frac{c^2}{2d}\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{d}$ ва $\lim_{t\to+\infty}\|u(t,x)\|_{C[0,s(t)]}=0$ бўлади.

14-теорема. Агар $s_\infty=+\infty$ бўлса, у ҳолда $[0,\infty)$ соҳанинг ихтиёрий чегараланган қисм тўпламида $\lim_{t\to+\infty}u(t,x)=\frac{a}{b}$ бўлади.

Иккинчи параграфда квазичизиқли параболик тенглама учун икки номаълум чегарали масала қаралади: $D=\{(t,x):0<t\le T,h(t)<x<s(t)\}$ соҳада қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи

$$a(u)u_t = u_{xx}, \quad (t,x)\in D, \tag{42}$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \le x \le s_0, \tag{43}$$
$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{44}$$
$$u(t,h(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{45}$$
$$s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{46}$$
$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{47}$$

$h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ функциялар топилсин; бу ерда $x = h(t)$ ва $x = s(t)-$номаълум чегаралар бўлиб, $u(t,x)$ функция билан бирга аниқланади, $a(u)$ ва $a'(u)$ функциялар аргументнинг ихтиёрий қийматида аниқланган ва аргументнинг барча ёпиқ тўпламида чегараланган, бундан ташқари $a(u) \ge a_0 > 0;$ s_0, μ мусбат ўзгармаслар;

15-теорема. Агар $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ функциялар (42)-(47) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда T га боғлиқ бўлмаган шундай M_1, M_2, M_3 мусбат ўзгармаслар учун

$$0 < u(t,x) \le M_1, \quad (t,x)\in \bar{D}, \tag{48}$$
$$0 < s'(t) \le M_2, \quad 0 \le t \le T. \tag{49}$$
$$0 < -h'(t) \le M_3, \quad 0 \le t \le T. \tag{50}$$

баҳолар ўринлидир.

$|u_x(t,x)|$ ни баҳолаш учун $t = t,\ \ y = \dfrac{2s_0 x}{s(t)-h(t)} - \dfrac{s(t)+h(t)}{s(t)-h(t)} s_0$ алмаштириш киритамиз. У ҳолда D соҳа $Q = \{(t,y): 0 < t < T, -s_0 < y < s_0\}$ соҳага ўтади, $v(t,y) = u(t,x)$ чегараланган функция эса қуйидаги масаланинг ечими бўлади:

$$v_t = A(t,y,s,h,v)v_{yy} + B(t,y,s,h,s',h',v_y), \quad (t,y)\in Q, \tag{51}$$
$$v(0,y) = v_0(y), \quad -s_0 \le y \le s_0, \tag{52}$$
$$v(t,s_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{53}$$
$$v(t,-s_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{54}$$

бу ерда $s'(t) = -\dfrac{2s_0\mu}{s(t)-h(t)} v_y(t,s_0)$, $h'(t) = -\dfrac{2s_0\mu}{s(t)-h(t)} v_y(t,-s_0)$,

$$A = \frac{1}{a(v(t,y))}\frac{4s_0^2}{(s(t)-h(t))^2}, \quad B = \left(\frac{s'(t)-h'(t)}{s(t)-h(t)} y + \frac{s'(t)+h'(t)}{s(t)-h(t)} s_0\right) v_y.$$

Энди эса (48)-(50) баҳолардан фойдаланган ҳолда (51)-(54) масала ечими учун қуйидаги априор баҳолар ўрнатилади

$$\left|v_y^{\bar{Q}}(t,y)\right| \le M_4, \ |v|_{1+\gamma}^{\bar{Q}} \le M_6, \ |v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} \le M_7.$$

Ўрнатилган баҳоларни эътиборга олган ҳолда

$$|u|_{2+\gamma}^{\bar{D}} \le M_8 \tag{55}$$

эга бўламиз.

16-теорема. Агар (48)-(50) ва (55) баҳолар ўринли бўлса, у ҳолда (42)-(47) масаланинг ечими ягонадир.

17-теорема. 15-теореманинг шартлари бажарилсин. У ҳолда (42)-(47) масаланинг $u(t,x) \in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $s(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$, $h(t) \in C^{1+\gamma}([0,T])$ ечими мавжуд.

Тўртинчи боб биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалаларни ўрганишга бағишланган.

Биринчи параграфда номаълум чегарали масала қаралади: Шундай $T(t,x)$, $q(t,x)$, $s(t)$ функциялар топилсинки, бунда $s(t)$ икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ва $s(0)=s_0>0$, $|s'(t)|<\sqrt{a_1a_2}$ бўлсин; $T(t,x)$, $q(t,x)$ функциялар эса $D=\{(t,x): 0<x<s(t),\, t>0\}$ соҳада қуйидаги тенгламалар системаси ва шартларни қаноатлантиради

$$T_t(t,x)+a_1q_x(t,x)+b_1T(t,x)+c_1q(t,x)=0,\ (t,x)\in D, \tag{56}$$

$$q_t(t,x)+a_2T_x(t,x)+c_2q(t,x)=0,\ (t,x)\in D \tag{57}$$

$$T(0,x)=T_0(x),\ q(0,x)=q_0(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{58}$$

$$T(t,0)=f(t),\ t\ge 0, \tag{59}$$

$$s'(t)\big(1+T(t,s(t))\big)=a_1q(t,s(t)),\ t\ge 0, \tag{60}$$

$$s'(t)q(t,s(t))=a_2T(t,s(t)),\ t\ge 0, \tag{61}$$

бу ерда $a_i, b_1, c_i, i=1,2,-$ маълум ўзгармас сонлар.

Янги функциялар киритамиз:

$$u(t,x)=T(t,x)+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}q(t,x),\ v(t,x)=T(t,x)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}q(t,x).$$

У ҳолда қуйидаги масалани оламиз

$$u_t+\sqrt{a_1a_2}u_x+b_3u-c_3v=0,\quad (t,x)\in D \tag{62}$$

$$v_t-\sqrt{a_1a_2}v_x-b_4u+c_4v=0,\quad (t,x)\in D \tag{63}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ 0\le x\le s_0, \tag{64}$$

$$v(0,x)=v_0(x),\ 0\le x\le s_0, \tag{65}$$

$$u(t,0)+v(t,0)=2f(t),\quad t\ge 0, \tag{66}$$

$$v(t,s(t))=-\frac{u(t,s(t))}{1+2u(t,s(t))},\quad t\ge 0, \tag{67}$$

$$s'(t)=\sqrt{a_1a_2}\frac{u(t,s(t))}{1+u(t,s(t))},\ t\ge 0. \tag{68}$$

Масала ечимлари учун априор баҳолар. D соҳани (62), (63) системанинг (0,0) ва $(s_0,0)$ нуқталардан чиқувчи $x-\alpha t=0$, $x+\alpha t=s_0$,

$\alpha = \sqrt{a_1 a_2}$ характеристикалари ёрдамида тўртта $D_i,\ i = \overline{1,4}$, соҳаларга бўламиз.

(63) ни $x + \alpha t = const$ характеристика бўйлаб интеграллаб $D_1 \cup D_2$ соҳада ечимни топамиз

$$v(t,x) = v(0, x + \alpha t) e^{-c_4 t} + \int_0^t b_4 u(\eta, x + \alpha(t - \eta)) e^{-c_4(t-\eta)} d\eta,$$

$D_3 \cup D_4$ соҳада эса ечим

$$v(t,x) = v(\eta_0, s(\eta_0)) e^{-c_4(t - \eta_0(t,x))} + \int_{\eta_0(t,x)}^t b_4 u(\eta, x + \alpha(t - \eta)) e^{-c_4(t-\eta)} d\eta,$$

бу ерда $\eta = \eta_0(t,x) -$ функция $\xi + \alpha\eta = x + \alpha t$ характеристика ва $\xi = s(\eta)$ чизиқнинг кесишиш ординатаси. Шу каби (62) дан фойдаланиб, $D_1 \cup D_3$ соҳада

$$u(t,x) = u(0, x - \alpha t) e^{-b_3 t} + \int_0^t c_3 v(\eta, x - \alpha(t - \eta)) e^{-b_3(t-\eta)} d\eta,$$

ва $D_2 \cup D_4$ соҳада эса

$$u(t,x) = u\left(t - \frac{x}{\alpha}, 0\right) e^{-b_3 \frac{x}{\alpha}} + \int_{t - \frac{x}{\alpha}}^t c_3 v(\eta, x - \alpha(t - \eta)) e^{-b_3(t-\eta)} d\eta$$

ечимларни оламиз.

18-лемма. u, v, s функциялар (62)-(68) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда

$$u(t,x) > -\frac{1}{2},\ v(t,x) > -\frac{1}{2},\ 0 \le x < s(t),$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

19-лемма. 18-лемма фаразлари ўринли бўлсин ва $s(t) \le M$, $0 \le t \le t_1$. У ҳолда шундай $m > 0$ мавжуд ва

$$u(t, s(t)) \ge -\frac{1}{2} + m,\ 0 \le t \le t_1$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ерда m ўзгармас мусбат сон.

20-лемма. 19-лемма фаразлари ўринли бўлсин ва бирор $t_1 > 0$, $m > 0$ учун $u(t, s(t)) \ge -\frac{1}{2} + m,\ 0 \le t \le t_1$. У ҳолда $\{(x,t) : 0 \le x \le s(t),\ 0 \le t \le t_1\}$ соҳада

$$|u(t,x)| \le N,\ |v(t,x)| \le N$$

тенгсизлик бажарилади.

21-лемма. 18-лемма фаразлари ва $\frac{s_0^2}{2} + \int_0^{s_0} x T_0(x) dx + a_1 e^{-c_2 t} \int_0^{s_0} q_0(x) dx + a_1 c_2 \int_0^t f(r) e^{-c_2(t-r)} dr > 0$ ўринли бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $t_1 > 0$ учун $0 < s(t) \le M_2$, $0 \le t \le t_1$ баҳо ўринли.

22-лемма. u,v,s функциялар (62)-(68) масаланинг ечими бўлсин ва $\left|s'(t)\right| \le \alpha(1-\delta)$, $\left|u(t,x)\right| \le N$, $\left|v(t,x)\right| \le N$, $\left|\varphi_{1x}(x)\right| \le N_0$, $\left|\varphi_{2x}(x)\right| \le N_0$, $0 \le t < t_1$. У ҳолда $|u_x|,|v_x|,|u_t|,|v_t| \le C$ тенгсизлик ўринлидир; бу ерда C ўзгармас масаланинг параметрларига боғлиқ.

23-теорема. (62)-(68) масаланинг ечими $u,v,s \in C^1$, $t>0$ ягонадир.

24-теорема. Агар $\left|s'(t)\right| \le \alpha(1-\delta)$ бўлса, у ҳолда (62)-(68) масаланинг $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ ечими мавжуддир.

Иккинчи параграфда қуйидагича масала қаралади: Шундай $\sigma_i(t,x)$, $\eta_i(t,x)$, $i=1,2$, $s(t)$ функциялар топилсинки, бунда $s(t)$ икки марта узлуксиз дифференциалланувчи ва $t \ge 0$, $s(0)=s_0$, $s'(0)=s_0$ бўлсин; $\sigma_i(t,x)$, $\eta_i(t,x)$ функциялар эса D_i, $i=1,2$ соҳада қуйидаги тенгламалар системасини ва шартларни қаноатлантирсин

$$\sigma_{1t}(t,x)+a_1\eta_{1x}(t,x)=0,\ (t,x)\in D_1, \tag{69}$$

$$\eta_{1t}(t,x)+b_1\sigma_{1x}(t,x)=0,\ (t,x)\in D_1, \tag{70}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_1(0,x)=f_1(x),\eta_1(0,x)=g_1(x),-\infty<x\le 0,\\ k_1\eta_1\left(t,s(t)\right)=s'(t),\quad t\ge 0,\end{array}\right\} \tag{71}$$

$$\sigma_{2t}(t,x)+a_2\eta_{2x}(t,x)=0,\ (x,t)\in D_2, \tag{72}$$

$$\eta_{2t}(t,x)+b_2\sigma_{2x}(t,x)=0,\ (x,t)\in D_2, \tag{73}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_2(0,x)=f_2(x),\eta_2(0,x)=g_2(x),0\le x<\infty,\\ k_2\eta_2\left(t,s(t)\right)=s'(t),\quad t\ge 0,\end{array}\right\} \tag{74}$$

$$ms''(t)=\sigma_1\left(,t,s(t)\right)-\sigma_2\left(,t,s(t)\right),\quad t\ge 0, \tag{75}$$

бу ерда $D_1=\left\{(t,x):-\infty<x<s(t),\,t\ge 0\right\}$, $D_2=\left\{(t,x):s(t)<x<\infty,t\ge 0\right\}$, a_i, b_i, k_i, m_i, $i=1,2$ ўзгармас сонлар ва $a_ib_i>0$.

Маълумки (69), (70), (72), (73) системаларнинг характеристикалари $\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{a_ib_i}$, $i=1,2$ дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқларидир.

Янги функциялар киритамиз

$$u_i(t,x)=\sigma_i(t,x)+\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\eta_i(t,x),\ v_i(t,x)=\sigma_i(t,x)-\sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\eta_i(t,x),\ i=1,2.$$

У ҳолда қуйидаги масалани оламиз

$$u_{1t}(t,x)+\sqrt{a_1b_1}u_{1x}(t,x)=0,\ (t,x)\in D_1 \tag{76}$$

$$v_{1t}(t,x)-\sqrt{a_1b_1}v_{1x}(t,x)=0,\ (t,x)\in D_1 \tag{77}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1(0,x)=\varphi_1(x),\ \ v_1(0,x)=\psi_1(x),\ \ -\infty<x\le 0 \\ \dfrac{k_1}{2}\sqrt{\dfrac{a_1}{b_1}}\left[u_1(t,s(t))-v_1(t,s(t))\right]=s'(t),\ t\ge 0. \end{array}\right\} \qquad (78)$$

$$u_{2t}(t,x)+\sqrt{a_2b_2}\,u_{2x}(t,x)=0,\ (t,x)\in D_2, \qquad (79)$$

$$v_{2t}(t,x)-\sqrt{a_2b_2}\,v_{2x}(t,x)=0,\ (t,x)\in D_2, \qquad (80)$$

$$\left.\begin{array}{l} u_2(0,x)=\varphi_2(x),\ v_2(0,x)=\psi_2(x),\ 0\le x<\infty \\ \dfrac{k_2}{2}\sqrt{\dfrac{b_2}{a_2}}\left[u_2(t,s(t))-v_2(t,s(t))\right]=s'(t),t\ge 0 \end{array}\right\} \qquad (81)$$

$$ms''(t)+c\,s'(t)=u_1(t,s(t))-v_2(t,s(t)), \qquad (82)$$

Қуйидагича белгилаш киритамиз: $\Omega=\{(t,x):-\alpha t<x<\alpha t,\ t\ge 0\}$, бу ерда $\alpha=\min\left\{\sqrt{a_1b_1},\sqrt{a_2b_2}\right\}$.

25-теорема. Агар $u_i(t,x)$, $v_i(t,x)$, $s(t)$ функциялар (76)-(82) масаланинг ечими ва $0\le\delta<1$, $|s_0|<\alpha(1-\delta)$ бўлса, у ҳолда $|s'(t)|\le\alpha$, $t\ge 0$ баҳо ўринлидир.

26-теорема. 25-теореманинг шартлари ўринли бўлсин. У ҳолда (76)-(82) масаланинг ечими мавжуддир.

27-теорема. 26-теорема шартлари асосида (76)-(82) масаланиг ечими ягона бўлади.

Ечимнинг $t\to\infty$ даги табиатини ўрганамиз.

Белгилаш киритамиз: $R(t_0)=\left\{\sup\limits_{-\infty<x<-\sqrt{a_1b_1}t_0}|\phi_1|+\sup\limits_{\sqrt{a_2b_2}t_0<x<\infty}|\psi_2|\right\}$, $t_0\ge 0$.

28-теорема. Фараз қилайлик $\int\limits_0^\infty R(t)\,dt<\infty$ бўлсин. У ҳолда $\lim\limits_{t\to\infty}s(t)$ мавжуд ва чегараланган бўлади.

Ихтиёрий $[x_1,x_2]$ қараймиз ва $\omega(t)=\max\left\{\begin{array}{l}\sup\limits_{x_1\le x\le s(t)}|u_1(t,x)|,\ \sup\limits_{x_1\le x\le s(t)}|v_1(t,x)|,\\ \sup\limits_{s(t)\le x\le x_2}|u_2(t,x)|,\ \sup\limits_{s(t)\le x\le x_2}|v_2(t,x)|.\end{array}\right\}$ бўлсин.

29-теорема. Агар $x\to-\infty$ да $f_1,g_1\to 0$ ва $x\to\infty$ да $f_2,g_2\to 0$ бўлса, у ҳолда $t\to\infty$ да $\omega(t)\to 0$ бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши параболик тенгламалар ва реакция-диффузия типидаги параболик тенгламалар системаси, шунингдек гиперболик типдаги биринчи тартибли тенгламалар системаси учун номаълум чегарали масалаларни тадқиқ этишга бағишланган.

Ҳозиргача бўлган изланишларда мажуд назария асосан тенгламалар сонининг ортиши ва жараёнларнинг тобора мураккаб тавсифи билан ривожланиб борди. Соҳаларнинг шакли эса содда бўлиб қолаверди. Аммо табиатда бундай шакллар жуда кам учрайди. Мазкур диссертацияда эса масалалар ҳаракатланувчи ва номаълум чегарали соҳаларда қаралади.

Иккинчи бобда квачизиқли параболик реакция-диффузия типидаги тенгламалар системаси учун номаълум чегарали локаль ва нолокаль масалалар ечимларининг Гёльдер фазоси нормаларида априор баҳолар олиш усуллари таклиф қилинган. Олинган баҳолар асосида ҳар бир масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш усули ишлаб чиқилган. Номаълум чегара табиати ўрганилган.

Учинчи бобда квазичизиқли параболик тенгламалар учун бир ва икки номаълум чегарали масалалар тадқиқ этилган. Ечим учун Шаудер типидаги априор баҳолар олиш усуллари таклиф қилинган. Масала ечими ягоналигининг исботлаш усули ривожлантирилган. Турларнинг тарқалиш ва камайиш мезони кўрсатилган яъни, етарлича катта вақтлар оралиғида масала ечимининг асимтотик баҳолари олинган.

Тўртинчи бобда биринчи тартибли гиперболик тенгламалар системаси учун Стефан типидаги масалалар назарияси ривожлантирилган. Ушбу масалалар релаксацион хоссага эга бўлган муҳитлардаги жараёнларнинг математик моделлари ҳисобланади. Масалалар корректлиги учун зарурий априор баҳолар ўрнатилган ҳамда ечимнинг глобаль мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Тадқиқод ишининг амалий аҳамяти олинган илмий натижаларнинг фаза алмашиниши билан боғлиқ физик, тиббий-биологик ва кимёвий жараёнларни ўрганишда қўлланилиши билан белгиланади.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

РАСУЛОВ МИРОЖИДДИН СОБИРЖОНОВИЧ

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2020 г.

Тема диссертации доктора философии (DoctorofPhilosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за №B2017.4.PhD/FM152.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz/ и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу www.ziyonet.uz

Научный руководитель:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Кадиркулов Бахтияр Жалилович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» ___________ 2020 года в ____ часов на заседании Научного совета Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте математикиим. В.И.Романовского АН РУз (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81.Тел.: (+99871)262-75-44, факс: (+99871) 224-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики им. В.И.Романовского АН РУз (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100170, г. Ташкент, Мирзо Улугбекский район, ул. Мирзо Улугбекская, 81.Тел.: (+99871) 262-75-44).

Автореферат диссертации разослан «___» __________2020 года.
(протокол рассылки № ___ от «___» _________ 2020 года).

У.А. Розиков
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К. Адашев
Научный секретарь научного совета по присуждению научных степеней, к.ф.-м.н.

А.А. Азамов
Председателя научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, во многих случаях приводятся к исследованию задач со свободной границей - проблеме о фазовом переходе. Задачи со свободной границей широко применяются при построении математических моделей многих природных процессов, сопровождающихся фазовыми превращениями среды.

В настоящее время приоритетными являются исследования инновационного характера. А математическое моделирование широко применяется в научных исследованиях и при решении прикладных проблем в различных областях науки и техники. В этом процессе часто стали применять задач со свободной границей. Потому что, они демонстрируют огромное богатство динамического поведения и различных видов самоорганизации. Возможность протекания химических реакций в среде с диффузией означает наличие источника энергии в каждой точке пространства. Такие системы принято называть активными средами. Их поведение может фантастически отличаться от поведения обычных физических сред. Известно, что математическое моделирование биологических проблем является сложной математической задачей. Во-первых, для большинства таких проблем не хватает «первого принципа». В результате большинство математические модели в биологии создаются на основе эвристического анализа. Во-вторых, существуют очень ограниченные эмпирические данные для проверки таких моделей. Следовательно, появились математические модели со свободной границей для параболических уравнений и систем параболических уравнений типа реакция-диффузия, которые более адекватно описывают природные процессы. На сегодняшный день это научное направление превратилось в бурно развивающийся раздел прикладной математики.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам. Перед наукой ставится задача сближения фундаментальных исследований с практикой. В решении поставленной проблемытеория задач со свободной границей, в частности уравнений параболического и гиперболического типа, призвана играть ведущую роль. Проведение на уровне международных стандартов научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, а именно по дифференциальным уравнениям и математической физике, по прикладной математике и математическому моделированию, является основной задачей и направлением деятельности Института математики[1]. Развитие теории дифференциальных уравнений в частных производных и теории задач со свободной границей играет важную роль при исполнении этого постановления.

[1]Постановление Президента Республики Узбекистан от 09 июля 2019 года №ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования» и №ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполненов соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теоретическое рассмотрение динамики фазовых превращений приводит к различным вариантам задачи Стефана. Классический вариант задачи Стефана, сформулированный ещё в прошлом веке для фазовых переходов типа плавления или затвердевания, сводится к уравнению теплопроводности в области с заранее неизвестной подвижной границей, которая разделяет твердую и жидкую фазы. На межфазной границе выполняется так называемое условие Стефана.

Основы теории задач со свободной границей были разработаны и развиты в трудах A.Friedman, L.Rubinstein, J.Cannon, J.Hill, W.Kyner (USA), A.Fasano, M.Primecerio, A.Tarzia (Italy), А.Мейрманова, И.Данилюка (Россия) и других. Одномерная задача Стефана в классической постановке почти подробна изучена. В работах указанных авторов доказано существование классического решения в целом по времени. Например, в работах J.Cannon и его учеников детально исследовались свойства решения и асимптотического поведения свободной границы. Большое число работ по многомерной задаче Стефана посвящено изучению обобщенных решений для нелинейных параболических уравнений. Здесь надо отметить результаты О.Олейника, С.Каменомосткой, И.Данилюка, А.Мейрманова, A.Friedman, L.Caffarelli, L.Evans, E.Hanzawa, G.Duvant, A.Visintin и других. К середине 1980-х годов появились работы, в которых исследованы гиперболические задачи со свободной границей. Наряду с приложениями к газодинамике обнаружено, что эти задачи описывают процессы распространения тепла в среде, обладающей релаксационными свойствами. Основные результаты в теории гиперболических задач со свободной границей были получены в работах A.Friedman, B.Hu, X.Chen, J.D.Greenberg, C.D.Hill, R.E.Showalter, A.D.Solomon, V.Alexiades и других. По своей природе, задачи со свободной границей нелинейны и в том случае, когда их постановка относится к линейным уравнениям. Поэтому при исследованиях широко применяется теория нелинейных параболических и гиперболических уравнений. Здесь необходимо указать на работы A.Friedman, C.V.Pao, О.А.Ладыженской, О.А.Олейника, С.Н.Кружкова, Н.В.Крылова, Б.Л.Рождественского и других.

В настоящее время во многих научных центрах мира (США, Европа, Китай) активно ведутся научные исследования по нелинейным параболическим уравнениям и системам типа реакция-диффузии и они широко применяются при математическом моделировании различных биологических, медико-биологических и сходных с ними процессов. Здесь необходимо указать на результаты A.Friedman, C.Pao, Y. Du, X.Chen, Z. Lin, C. Li и других. В том числе и мы присоединились к этому бурному течению.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работавыполнена в соответствии с планом научных исследований по прикладному проекту А-5-12 «Разработка математического обеспечения мониторинга и прогнозирования экологического состояния промышленных регионов» (2015-2017 гг.**)** и фундаментальному проекту ОТ-Ф-4-85 «Разработка нелинейных математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов для исследования современных проблем биологии и экологии» (2017-2020 гг.) Института математики АН РУз.

Целью исследования являются построение и развитие теории задач со свободной границей для параболических уравнений и систем параболических уравнений типа реакция-диффузия, а также для систем гиперболических уравнений первого порядка.

Задачи исследования:

исследование математической модели одной медико-биологической проблемы – (wound healing);

исследование двухкомпонентной параболической модели взаимодействующих видов;

исследование задачи для параболического уравнения с двумя неизвестными границами;

исследование модели типа реакция-диффузия-адвекция;

исследование гиперболической модели теплопроводности;

исследование двухфазной задачи газодинамики о движении поршня под действием газа.

Под исследованием модели (задачи) понимаются разработка методов решения задач, установление априорных оценок норм Гельдера, изучение поведение свободной границы в ограниченном и неограниченном промежутках времени, доказательство теорем единственности и существование решения.

Объектом исследования являются различные математические модели со свободной границей биомедицины, биологии, экологии и газо-гидродинамики в средах с релаксационными свойствами.

Предметом исследования являются вопросы установления априорных оценок, доказательство теорем единственности и существования решения, а также исследование качественных свойств искомых функций.

Методы исследования. В диссертации использованы элементы математического анализа, методы дифференциальных уравнений с частными производными и математической физики, методы математического моделирования.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

разработаны способы получения априорных оценок в нормах пространств Гельдера для решений задач со свободной границей для систем квазилинейных параболических уравнений и уравнений типа реакция-диффузия;

на основе полученных априорных оценок в нормах пространств Гельдера для решений задач со свободной границей для систем квазилинейных параболических уравнений и уравнений типа реакция-диффузия доказана единственность и существование решения задач;

построены способы получения априорных оценок типа Шаудера для решений задач с одной или двумя свободными границами для квазилинейных параболических уравнений, доказаны теоремы существование и единственность решения, установлены асимптотические оценки для решения задачи при неограниченном возрастании времени;

решены задачи со свободной границей типа Стефана для гиперболических систем уравнений первого порядка, которые описывают математические модели природных процессов в средах с релаксационными свойствами и установлены априорные оценки для искомых функций и доказана глобальное существование и единственность решения.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

Модифицированные математические модели в виде задач со свободной границей для квазилинейных параболических уравнений и систем, а также предложенные методы исследования могут быть применены при изучении различных медико-биологических процессов.

Гиперболические задачи со свободной границей могут быть использованы при изучении тепло-массопереноса в средах с релаксационными свойствами и в проблемах газо-гидродинамики.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений с применением методов дифференциальных уравнений и математической физики, методов математического моделирования и новых результатов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений с частными производными и математической физике, в теории задач со свободной границей и при построении математических моделей различных природных процессов.

Практическая значимость результатов обосновывается возможностью применения при построении и исследовании моделей медико-биологических, физических, химических и экологических процессов.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по задачам со свободной границей для параболических и гиперболических уравнений были внедрены в практику по следующим направлениям:

результаты исследования по задачам со свободной границей для параболических и гиперболических уравнений были использованы в работах научно-исследовательской лаборатории «Дробное исчисления и его применение» (Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, справка от 11 ноября 2019 года под номером №728-22) в рамках исследования неклассических краевых задач математической физики и возможности применения к ним дробного исчисления. Используя полученные результаты, были оценены искомые функции и определены интервалы показателей дробного дифференцирования;

способы получения априорных оценок в пространствах Гельдера для решения задач со свободной границей для систем параболических и гиперболических уравнений были использованы при выполнении научно-исследовательских работ в рамках темы «Нелокальные дифференциальные уравнения смешанного типа математических моделей экстремальных процессов» (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, № 0213-2014-0002) применены при решении класса локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа, а также нагруженных гиперболических уравнений. Применение результатов дала возможность установить априорные оценки для искомых функций и доказать разрешимость рассматриваемых задач.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 8 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 статей опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соисканий ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 1 статья опубликована в зарубежном издании, 4 – в Узбекском математическом журнале.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 110 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, отмечено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, дан обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, описана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, указаны объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приведеныне которые известные факты, которые будут использованы при изложении результатов диссертации.

Так как все рассматриваемые задачи со свободной границей являются нелинейными, то основная цель работы – получение априорных оценок, доказательство (на их основе) теорем об однозначной разрешимости в целом (по времени) краевых задач и изучения поведения свободных границ.

Будем придерживатся обозначений, принятых в (С.Н. Кружков. Тр.ММО. 1967, №16; Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа, М.: Мир, 1968) и воспользуемся результатами этих работ.

Вторая глава диссертации названная **«Задачи со свободной границей для систем параболических уравнений»,** посвящена изучению математических моделей сложных двухкомпонентных систем типа реакция-диффузия.

В первом параграфе исследуется задача со свободной границей с нелокальными граничными условиями в смешанно двухфазной области, которая описывает медико-биологический процесс – заживления раны (wound healing). Требуется найти функции $s(t)$, $u(t,x)$, $v(t,x)$, удовлетворяющие условиям

$$u_t = \left(a_1(u,v)u_x\right)_x + f_1(u,v), \quad D = \left\{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < s(t)\right\}, \tag{1}$$

$$v_t = \left(a_2(u,v)v_x\right)_x + f_2(u,v), \quad Q = \left\{(t,x): 0 < t \le T, 0 < x < l\right\}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \le x \le s_0 = s(0) < l, \tag{3}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{4}$$

$$u_x(t,0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

$$v(t,0) = m_1 v(t,x_1), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x_1 < x_2 < l, \tag{6}$$

$$v(t,l) = m_2 v(t,x_2), \quad 0 \le t \le T, \quad 0 < x_1 < x_2 < l, \tag{7}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$u(t,x) = 0, \quad s(t) \le x \le l, \tag{9}$$

$$s'(t) = -a_1(0,v)u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{10}$$

где $x = s(t)-$свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения раны и определяется вместе с функциями $u(t,x)$, $v(t,x)$.

Здесь $u(t,x)$ – плотность здоровых тканей вне раны, $v(t,x)$ – концентрация химико-биологических препаратов.

Относительно данных задачи предполагаются выполненными следующие условия:

a) $a_i(u,v) \ge a_{i0} > 0$, a_{i0}, m_i, $x_i - const$, $0 < m_i < 1$, $i = 1,2$;

b) если $0 \le u(t,x) \le M_1\left(|u_0|, \left|f_1(0,0)\right|\right)$, $0 \le v(t,x) \le M_2\left(|v_0|, \left|f_2(0,0)\right|\right)$ (см. Лемма 1), то определим множество $\Omega = \left\{(u,v) : 0 \le u(t,x) \le M_1, 0 \le v(t,x) \le M_2\right\}$, причем $0 < M_2 \le M_1$, $a_i(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $0 < \alpha < 1$, $a_{iu}(u,v) \le 0$, $f_{iu}(u,v) \le 0$, $f_{iv}(u,v) \le 0$, $i = 1,2$;

c) $f_1(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $f_1(u,v) > 0$ если $u(t,x) \le 0$,
$f_1(u,v) \le 0$ если $u(t,x) \ge M_1$ при любом $v(t,x)$;

d) $f_2(u,v) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$, $f_2(u,v) \ge 0$ если $v(t,x) \le 0$,
$f_2(u,v) \le 0$ если $v(t,x) \ge M_2$ при любом $u(t,x)$;

e) $u_0(x) \in C^{2+\alpha}$, $0 < u_0(x) < M_1$, $0 \le x \le s_0$,
$u_0'(0) = 0$, $u_0(s_0) = 0$, $u_0'(s_0) < 0$, $v_0(x) \in C^{2+\alpha}[0,l]$, $0 \le v_0(x) \le M_2$,
$v_0(0) = m_1 v_0(x_1)$, $v_0(l) = m_2 v_0(x_2)$.

Априорные оценки

Лемма 1. Пусть функции $\left(s(t), u(t,x), v(t,x)\right)$ являются решением задачи (1)-(10). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, не зависящие от T, для которых справедливы оценки

$$0 \le u(t,x) \le M_1\left(|u_0|, \left|f_1(0,0)\right|\right), \quad (t,x) \in D, \tag{11}$$

$$0 \le v(t,x) \le M_2\left(|v_0|, \left|f_2(0,0)\right|\right), \quad (t,x) \in Q, \tag{12}$$

$$0 < s'(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{13}$$

Теперь для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} a_1(u,v)u_{xx} + b_1(u,v,u_x,v_x) - u_t = 0, & (t,x) \in D, \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 \le x \le s_0, \\ u_x(t,0) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(t,s(t)) = 0, & 0 \le t \le T, \\ s'(t) = -a_1(0,v)u_x(t,s(t)), & 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} a_2(u,v)v_{xx} + b_2(u,v,u_x,v_x) - v_t = 0, & (t,x) \in Q, \\ v(0,x) = 0, & 0 \le x \le l, \\ v(t,0) = m_1 v(t,x_1), & 0 \le t \le T, \\ v(t,l) = m_2 v(t,x_2), & 0 \le t \le T, \quad 0 < x_1 < x_2 < l \end{cases} \tag{15}$$

где $b_1(u,v,u_x,v_x)=a_{1u}u_x^2+a_{1v}v_xu_x+f_1(u,v)$, $b_2(u,v,u_x,v_x)=a_{2v}v_x^2+a_{2u}u_xv_x+f_2(u,v)$.

Теорема 2. Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $v(t,x)$ удовлетворяет условиям задачи (15). Предположим, что непрерывные функции $a_2(u,v)$, $b_2(u,v,u_x,v_x)$ для $(t,x)\in\bar{Q}$, $|u|\le M_1$, $|v|\le M_2$ и произвольных u_x, v_x удовлетворяют условиям

$$\frac{|b_2(x,u,v,u_x,v_x)|}{a_2(u,v)}\le K_2\left(u_x^2+v_x^2+1\right),\ K_2>0.$$

Тогда

$$|v_x(t,x)|\le P_{02}(M_2,a_{20},K_2,\delta),\ (t,x)\in Q^\delta. \tag{16}$$

Кроме того, если $a_2(u,v)\le a_{22}$ в области $\left\{(t,x)\in\bar{Q},|u|\le M_1,|v|\le M_2,|v_x|\le P_{02}\right\}$ то $|v|_{\frac{2}{3}}^{Q^{2\delta}}\le C(M_2,a_{20},K_2,\delta)$.

И если еще известно, что $v(t,x)$ обладает в $\bar{Q}$ суммируемыми с квадратом обобщенными производными v_{tx}, v_{xx}, то

$$|v|_{1+\gamma}^{Q^{2\delta}}\le C(M_2,a_{20},a_{22},P_0,K_2,\delta),\quad 0<\gamma<1, \tag{17}$$

$$|v|_{2+\beta}^{Q^{4\delta}}\le C(M_2,a_{20},a_{22},P_0,K_2,\delta),\quad 0<\beta<1, \tag{18}$$

где $Q^\delta=\left\{(t,x):0\le t\le T,\delta\le x\le l-\delta\right\}$, $a_{22}=\max\limits_{Q}a_2(u,v)$.

Если $4\delta<x_1<x_2<l-4\delta$, то оценки (16)-(18) справедливы и в $\bar{Q}$.

Лемма 3. Пусть выполнены все предположения леммы 1 и теоремы 2, и кроме того $\frac{d}{dx}a_1(u,v)\ge 0$, $N\ge\max\limits_{x}\frac{u_0(x)}{s_0-x}$. Тогда $s'(t)\le M_3$, где M_3 зависит только от данных задачи и не зависит от T.

В случае задачи (14) априорные оценки строятся следующим образом. Предполагается выполненными условия теоремы 2. Произведя замену $\tau=t$, $y=\frac{x}{s(t)}$, распрямляем границу. Тогда области D соответствует область $\Omega_1=\left\{(\tau,y):0<\tau\le T,0<y<1\right\}$, а для функции $U(\tau,y)=u(\tau,ys(\tau))$ получается задача для уравнении с непрерывными по Гельдеру коэффициентами и правой частью. Применяя метод четного продолжения через правую границу, установим оценки для $|w_y|$, $|w|_{1+\gamma}$ вплоть до $y=1$. А оценки для старших производных получим по результатам для линейных уравнений.

Теорема 4. Пусть выполнены все предположения леммы 1 и теоремы 2. Пусть непрерывная в $\bar{D}$ функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям задачи (14).

Предположим, что непрерывные функции $a_1(u,v)$, $b_1(u,v,u_x,v_x)$ для $(t,x)\in\bar{D},\ |u|\le M_1$, $|v|\le M_2$ и произвольных u_x, v_x удовлетворяют условиям

$$\frac{|b_1(x,u,v,u_x,v_x)|}{a_1(u,v)}\le K_1\left(u_x^2+v_x^2+1\right),\ K_1>0.$$

Тогда

$$|u_x(t,x)|\le P_{01}(M_1,a_{10},K_1,\delta),\quad (t,x)\in D^{\delta}. \tag{19}$$

Кроме того, если $a_1(u,v)\le a_{11}$ в области $\{(t,x)\in\bar{D},|u|\le M_1,|v|\le M_2,|u_x|\le P_{01}\}$, то

$$|u|_{\frac{2}{3}}^{D^{2\delta}}\le C(M_1,a_{10},K_1,\delta).$$

И если еще известно, что $u(t,x)$ обладает в $\bar{D}$ суммируемыми с квадратом обобщенными производными u_{tx}, u_{xx}, то

$$|u|_{1+\alpha}^{D^{2\delta}}\le C(M_2,a_{10},a_{11},P_{01},K_1,\delta),\quad 0<\alpha<1, \tag{20}$$

где $a_{11}=\max\limits_{D} a_1(u,v)$.

Если $u|_{\Gamma(x=0,t=0,x=s(t))}=0$, то оценки (19), (20) справедливы и в $\bar{D}$.

Оценки старших производных $|u|_{2+\alpha}^{\bar{D}}\le C,\ |v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}}\le C,$ устанавливаются при помощи результатов для линейных уравнений.

Теперь докажем, что неизвестная кривая монотонно возрастает по t и пересекает правую границу $x=l$ при некотором $t=T^*$.

Лемма 5. Существует положительная постоянная $\varepsilon>0$, не зависящая от T такая, что

$$s'(t)\ge\varepsilon>0,\quad 0\le t\le T.$$

Единственность решения задачи (1)-(10) доказывается при помощи оценок (11)-(13).

Теорема 6. Пусть выполнены условия теоремы 2 и леммы 3. Тогда существует в $D\cup Q$ решение $u(t,x)\in C^{2+\alpha}(\bar{D})$, $v(t,x)\in C^{2+\beta}(\bar{Q})$, $s(t)\in C^{1+\gamma}(0\le t\le T^*)$ задачи (1)-(10), причем значение T^* определяется из условия $\lim\limits_{t\to T^*}s(t)=l.$

Во втором параграфе второй главы рассматривается задача со свободной границей для системы параболических уравнений типа реакция-диффузия, описывающих динамики численности двух конкурирующих популяций: требуется найти функции $u(t,x),v(t,x),s(t)$, удовлетворяющие условиям

$$u_t-d_1u_{xx}+m_1u_x=u(a_1-b_1u-c_1v),\quad (t,x)\in D, \tag{21}$$

$$v_t-d_2v_{xx}+m_2v_x=v(a_2-b_2u-c_2v),\quad (t,x)\in D, \tag{22}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\quad v(0,x)=v_0(x),\quad 0\le x\le s(0)=s_0, \tag{23}$$

$$u_x(t,0)=0, \quad v_x(t,0)=0, \quad 0\le t\le T, \tag{24}$$

$$u(t,s(t))=0, \quad v(t,s(t))=0, \quad 0\le t\le T, \tag{25}$$

$$s'(t)=-\mu\left[u_x(t,s(t))+\rho v_x(t,s(t))\right], \quad 0\le t\le T, \tag{26}$$

где $D=\{(t,x):0<t\le T, 0<x<s(t)\}$; $u(t,x)$, $v(t,x)-$плотности популяции в момент времени t в точке x; $x=s(t)-$ свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения, определяется вместе с функциями $u(t,x)$, $v(t,x)$, d_i, m_i, a_i, b_i, c_i, ρ, $\mu-$ положительные постоянные, $i=1,2$.

Теорема 7. Если функции $u(t,x),v(t,x),s(t)-$ являются решением задачи (21)-(26), то справедливы оценки

$$0<u(t,x)\le M_1\equiv\frac{a_1}{b_1}, \qquad (t,x)\in\bar{D}, \tag{27}$$

$$0<v(t,x)\le M_2\equiv\frac{a_2}{c_2}, \qquad (t,x)\in\bar{D}, \tag{28}$$

$$0<s'(t)\le M_3\equiv\mu(N_1+\rho N_2), \qquad 0<t\le T, \tag{29}$$

Произведем преобразование $t=t$, $y=\dfrac{x}{s(t)}$. Тогда области D соответствует область $Q=\{(t,y):0<t<T,\ 0<y<1\}$, а ограниченная функция $U(t,y)=u(t,x)$, $V(t,y)=v(t,x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} U_t-A_1U_{yy}+B_1U_y=U(a_1-b_1U-c_1V), & (t,y)\in Q,\\ V_t-A_2V_{yy}+B_2V_y=V(a_2-b_1U-c_2V), & (t,y)\in Q,\\ U(0,y)=U_0(y), \quad V(0,y)=V_0(y), & 0\le y\le 1,\\ U_y(t,0)=0, \quad V_y(t,0)=0, & 0\le t\le T,\\ U(t,1)=0, \quad V(t,1)=0, & 0\le t\le T, \end{cases}$$

где $U_0(y)=u_0(ys_0)$, $V_0(y)=v_0(ys_0)$, $s'(t)=-\mu\left[U_y(t,1)+\rho V_y(t,1)\right]$,

$A_i(s(t))=\dfrac{d_i}{s^2(t)}$, $B_i(t,y,s(t),s'(t))=\dfrac{ys'(t)+m_i}{s(t)}$, $i=1,2.$

Далее для каждого уравнения системы отдельно сформулируем соответствующую задачу:

$$\begin{cases} U_t=A_1(s(t))U_{yy}+F_1(U,V,U_y), & (t,y)\in Q,\\ U(0,y)=U_0(y), & 0\le y\le 1,\\ U_y(t,0)=0, & 0\le t\le T,\\ U(t,1)=0, & 0\le t\le T, \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} V_t = A_2(s(t))V_{yy} + F_2(U,V,V_y), & (t,y)\in Q, \\ V(0,y) = V_0(y), & 0\le y\le 1, \\ V_y(t,0) = 0, & 0\le t\le T, \\ V(t,1) = 0, & 0\le t\le T, \end{cases}$$

где $F_1(U,V,U_y) = U(a_1 - b_1U - c_1V) - B_1U_y$, $F_2(U,V,V_y) = V(a_2 - b_2U - c_2V) - B_2V_y$.

Теорема 8. Пусть функция $U(t,y)$ непрерывна в $\bar{Q}$ вместе с U_y и удовлетворяет условиям задачи (30) в Q. А также, предположим, что $\sup\limits_{\bar{Q}} |U_{yy}| < +\infty$. Тогда

$$|U_y(t,y)| \le M_4(M_1, M_2, A_{10}, \delta), \quad (t,y)\in Q^{\delta}.$$

Если $U\big|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$, то для $(t,y)\in\bar{Q}$

$$|U_y(t,y)| \le M_4(M_1, M_2, A_{10}), \tag{31}$$

где $Q^{\delta} = \{(t,y): 0<\delta\le t\le T,\ 0<\delta\le y\le 1-\delta\}$, $A_{10} = \min\limits_{\bar{Q}} A_1$, $\Gamma(t=0,\ y=0,\ y=1)$ – параболическая граница.

Теорема 9. Пусть непрерывная в $\bar{Q}$ функция $U(t,y)$ удовлетворяет условиям задачи (30). Предположим, что непрерывные функции $A_1(s(t))$, $F_1(U,V,U_y)$ для $(t,y)\in\bar{Q}$, $|U|\le M_1$, $|V|\le M_2$ и произвольных U_y удовлетворяют условиям

$$\frac{|F_1(U,V,U_y)|}{A_1(s(t))} \le K_1(U_y^2 + 1), \quad K_1 > 0.$$

Кроме того, если $A_1(s(t)) \le A_{11}$ в области $\{(t,y)\in\bar{Q}, |U|\le M_1, |V|\le M_2, |U_y|\le M_4\}$ то

$$|U|_{\frac{2}{3}}^{Q^{\delta}} \le M_5(M_1, M_2, A_{11}, K_1, \delta). \tag{32}$$

И если еще известно, что $U(t,y)$ обладает в $\bar{Q}$ суммируемыми с квадратом обобщенными производными U_{ty}, U_{yy}, то

$$|U|_{1+\gamma}^{Q^{\delta}} \le M_6(M_1, M_2, A_{11}, A_{21}, K_1, \delta), \quad 0<\gamma<1, \tag{33}$$

где $A_{11} = \max\limits_{\bar{Q}} A_1$, $A_{21} = \max\limits_{\bar{Q}} A_2$.

Если $U\big|_{\Gamma(t=0,y=0,y=1)} = 0$, то оценки (32)-(33) справедливы и в $\bar{Q}$.

Далее, применяя результаты теории линейных параболических уравнений получим

$$|U|_{2+\gamma}^{\bar{Q}} \le M_7. \tag{34}$$

Рассуждая, как и выше, для $V(t,y)$, получим оценки типа (31)-(34).

При оценках (27)-(29) доказывается единственность решения задачи (21)-(26).

Теорема 10. Пусть выполнены условия теорем 7 и 9. Тогда существует решение $u(t,x)\in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $v(t,x)\in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $s(t)\in C^{1+\gamma}([0,T])$ задачи (21)-(26).

Теорема 11. Если $s_\infty<+\infty$, то $s_\infty<s^*$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|u(t,x),v(t,x)\right\|_{C[0,s(t)]}=0$. Здесь $s_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}s(t)$ а $s_\infty<s^*-$ определяется при помощи данных задачи.

Третья глава посвящена исследованию задач со свободной границей для параболических уравнений.

В первом параграфе рассматривается задача: требуется найти пару функций $s(t)$, $u(t,x)$ в области $D=\{(t,x):0<t\le T,0<x<s(t)\}$, удовлетворяющих условиям

$$u_t-du_{xx}-cu_x=u(a-bu),\ (t,x)\in D, \tag{35}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ 0\le x\le s(0)=s_0, \tag{36}$$

$$u_x(t,0)=0,\quad 0\le t\le T, \tag{37}$$

$$u(t,s(t))=0,\quad 0\le t\le T, \tag{38}$$

$$s'(t)=-\mu u_x(t,s(t)),\ 0\le t\le T, \tag{39}$$

где $u(t,x)-$плотность биологической популяции, а $x=s(t)-$свободная (неизвестная) граница, которая представляет фронт распространения популяций и определяется вместе с решением уравнения (35).

Задача (35)-(39) возникает при моделировании распространения нового вида популяции. Коэффициент a представляет собой собственную скорость роста вида, b измеряет его внутривидовую конкуренцию, а $d-$коэффициент диффузии, a, b, d, c, $\mu-$ положительные постоянные.

Теорема 12. Пусть пара $(s(t),u(t,x))$ является решением задачи (35)-(39) в области D и существует постоянная N такая, что $N\ge\max\left\{\frac{a^2}{bc},\max\limits_x\frac{u_0(x)}{s_0-x}\right\}$. Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, независящие от T для которых справедливы неравенства

$$0<u(t,x)\le M_1,\qquad (t,x)\in\bar{D} \tag{40}$$

$$0<s'(t)\le M_2,\qquad 0\le t\le T \tag{41}$$

Далее, как и выше устанавливаются априорные оценки $\left|u_x^{\bar{D}}(t,x)\right|\le M_3$, $|u|_{1+\gamma}^{\bar{D}}\le M_4$, $|u|_{2+\gamma}^{\bar{D}}\le M_5$.

Установленные априорные оценки позволяют доказать теоремы существование и единственности решения задачи (35)-(39).

Обозначением $\lim\limits_{t\to\infty}s(t)=s_\infty\in[0,+\infty)$.

Теорема 13. Если $s_\infty < \infty$ то $s_\infty \le \frac{\pi}{2}\left(a - \frac{c^2}{2d}\right)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{d}$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\left\|u(t,x)\right\|_{C[0,s(t)]} = 0.$

Теорема 14. Если $s_\infty = +\infty$, то $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t,x) = \frac{a}{b}$ равномерно на любом ограниченном подмножестве области $[0,\infty)$.

Во втором параграфе рассматривается задача с двумя неизвестными границами: требуется найти функции $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ в области $D = \{(t,x) : 0 < t \le T, h(t) < x < s(t)\}$, удовлетворяющие условиям

$$a(u)u_t = u_{xx}, \quad (t,x) \in D, \tag{42}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad -s_0 \le x \le s_0, \tag{43}$$

$$u(t,s(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{44}$$

$$u(t,h(t)) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{45}$$

$$s'(t) = -\mu u_x(t,s(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{46}$$

$$h'(t) = -\mu u_x(t,h(t)), \quad 0 \le t \le T, \tag{47}$$

где $x = h(t)$ и $x = s(t)$ – свободные (неизвестные) границы, которые определяются вместе с функцией $u(t,x)$, функции $a(u)$ и $a'(u)$ определены для любого значения аргумента и ограничены на любом замкнутом множестве аргумента, причем $a(u) \ge a_0 > 0$; s_0, μ положительные постоянные.

Теорема 15. Пусть функции $h(t)$, $s(t)$, $u(t,x)$ являются решением задачи (42)-(47). Тогда существуют положительные постоянные M_1, M_2, M_3, не зависящие от T, для которых справедливы оценки

$$0 < u(t,x) \le M_1, \quad (t,x) \in \bar{D}, \tag{48}$$

$$0 < s'(t) \le M_2, \quad 0 \le t \le T. \tag{49}$$

$$0 < -h'(t) \le M_3, \quad 0 \le t \le T. \tag{50}$$

Чтобы оценить $|u_x(t,x)|$ преобразуем независимые переменные

$$t = t, \quad y = \frac{2s_0 x}{s(t) - h(t)} - \frac{s(t) + h(t)}{s(t) - h(t)} s_0.$$

Тогда области D соответствует область $Q = \{(t,y) : 0 < t < T, -s_0 < y < s_0\}$, а ограниченная функция $v(t,y) = u(t,x)$ является решением задачи

$$v_t = A(t,y,s,h,v)v_{yy} + B(t,y,s,h,s',h',v_y), \quad (t,y) \in Q, \tag{51}$$

$$v(0,y) = v_0(y), \quad -s_0 \le y \le s_0, \tag{52}$$

$$v(t,s_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{53}$$

$$v(t,-s_0) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{54}$$

где $v=v_0(y)\equiv u_0(y)$, $s'(t)=-\dfrac{2s_0\mu}{s(t)-h(t)}v_y(t,s_0)$, $h'(t)=-\dfrac{2s_0\mu}{s(t)-h(t)}v_y(t,-s_0)$,

$A=\dfrac{1}{a(v(t,y))}\dfrac{4s_0^2}{(s(t)-h(t))^2}$, $B=\left(\dfrac{s'(t)-h'(t)}{s(t)-h(t)}y+\dfrac{s'(t)+h'(t)}{s(t)-h(t)}s_0\right)v_y.$

Теперь используя оценки (48)-(50), устанавливаем следующие априорные оценки для решения задачи (51)-(54):

$$\left|v_y(t,y)\right|\le M_4,\ |v|_{1+\gamma}^{\bar{Q}}\le M_5,\ |v|_{2+\gamma}^{\bar{Q}}\le M_6.$$

В силу установленных оценок можем заключить, что

$$|u|_{2+\gamma}^{\bar{D}}\le M_7. \tag{55}$$

Теорема 16. Если справедливы оценки (48)-(50) и (55). Тогда решение задачи (42)-(47) единственно.

Теорема 17. Пусть выполнены условия теоремы 15. Тогда существует в D решение $u(t,x)\in C^{2+\gamma}(\bar{D})$, $s(t)\in C^{1+\gamma}([0,T])$, $h(t)\in C^{1+\gamma}([0,T])$ задачи (42)-(47).

Четвертая глава посвящена исследованию задач со свободной границей для систем гиперболических уравнений первого порядка.

В первом параграфе рассматривается следующая краевая задача с неизвестной границей: требуется найти функции $T(t,x)$, $q(t,x)$, $s(t)$ такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена при $t\ge 0$, $s(0)=s_0>0$, $|s'(t)|<\sqrt{a_1a_2}$, а функции $T(t,x)$, $q(t,x)$ в области $D=\{(t,x):0<x<s(t),t>0\}$ удовлетворяют системе уравнений и условиям

$$T_t(t,x)+a_1q_x(t,x)+b_1T(t,x)+c_1q(t,x)=0,\ (t,x)\in D, \tag{56}$$

$$q_t(t,x)+a_2T_x(t,x)+c_2q(t,x)=0,\ (t,x)\in D \tag{57}$$

$$T(0,x)=T_0(x),\ q(0,x)=q_0(x),\quad 0\le x\le s_0, \tag{58}$$

$$T(t,0)=f(t),\ t\ge 0, \tag{59}$$

$$s'(t)\big(1+T(t,s(t))\big)=a_1q(t,s(t)),\ t\ge 0, \tag{60}$$

$$s'(t)q(t,s(t))=a_2T(t,s(t)),\ t\ge 0, \tag{61}$$

здесь коэффициенты a_i, b_1, c_i, $i=1,2-$ известные постоянные.

Введем новые функции

$$u(t,x)=T(t,x)+\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}q(t,x),\ v(t,x)=T(t,x)-\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}q(t,x).$$

Тогда задача (56)-(61) примет вид

$$u_t+\sqrt{a_1a_2}u_x+b_3u-c_3v=0,\quad (t,x)\in D \tag{62}$$

$$v_t-\sqrt{a_1a_2}v_x-b_4u+c_4v=0,\quad (t,x)\in D \tag{63}$$

$$u(0,x)=u_0(x),\ 0\le x\le s_0, \tag{64}$$

$$v(0,x)=v_0(x),\ 0\le x\le s_0, \tag{65}$$

$$u(t,0)+v(t,0)=2f(t),\ t\ge 0, \tag{66}$$

$$v(t,s(t))=-\frac{u(t,s(t))}{1+2u(t,s(t))},\ t\ge 0, \tag{67}$$

$$s'(t)=\sqrt{a_1a_2}\,\frac{u(t,s(t))}{1+u(t,s(t))},\ t\ge 0. \tag{68}$$

Некоторые оценки для решения задачи. Область D разделим на четыре части D_i, $i=\overline{1,4}$, с помощью характеристик $x-\alpha t=0$, $x+\alpha t=s_0$, $\alpha=\sqrt{a_1a_2}$ системы (62), (63), выходящихсоответственно из точек $(0,0)$ и $(s_0,0)$.

В области $D_1\cup D_2$ выполняя интегрирование вдоль характеристики $x+\alpha t=const$, из (63) находим

$$v(t,x)=v(0,x+\alpha t)e^{-c_4t}+\int_0^t b_4u(\eta,x+\alpha(t-\eta))e^{-c_4(t-\eta)}d\eta,$$

а в области $D_3\cup D_4$

$$v(t,x)=v(\eta_0,s(\eta_0))e^{-c_4(t-\eta_0(t,x))}+\int_{\eta_0(t,x)}^t b_4u(\eta,x+\alpha(t-\eta))e^{-c_4(t-\eta)}d\eta,$$

где $\eta=\eta_0(t,x)-$ордината точки пересечения характеристики$\xi+\alpha\eta=x+\alpha t$ с $\xi=s(\eta)$. Точно так же в области $D_1\cup D_3$, из (62) находим

$$u(t,x)=u(0,x-\alpha t)e^{-b_3t}+\int_0^t c_3v(\eta,x-\alpha(t-\eta))e^{-b_3(t-\eta)}d\eta,$$

а в области $D_2\cup D_4$ имеем

$$u(t,x)=u\left(t-\frac{x}{\alpha},0\right)e^{-b_3\frac{x}{\alpha}}+\int_{t-\frac{x}{\alpha}}^t c_3v(\eta,x-\alpha(t-\eta))e^{-b_3(t-\eta)}d\eta.$$

Лемма 18. Пусть функции u,v,s являются решением задачи (62)-(68). Тогда справедливы неравенства $u(t,x)>-\frac{1}{2},\ v(t,x)>-\frac{1}{2},\ 0\le x<s(t),\ t\ge 0$.

Лемма 19. Пусть выполнены предположения леммы 18 и $s(t)\le M$, $0\le t\le t_1$. Тогда существует постоянная $m>0$ такая, что

$$u(t,s(t))\ge -\frac{1}{2}+m,\ 0\le t\le t_1,$$

m зависит от коэффициентов системы ε, M, t_1.

Лемма 20. Пусть предположения леммы 19 выполняются и $u(t,s(t))\ge -\frac{1}{2}+m,\ 0\le t\le t_1$ для некоторого $t_1>0$ и $m>0$. Тогда в области

$\{(x,t): 0 \le x \le s(t),\ 0 \le t \le t_1\}$ выполняются неравенства $|u(t,x)| \le N$, $|v(t,x)| \le N$, где N зависит от t_1.

Лемма 21. Пусть выполнены предположения леммы 18 и $\frac{s_0^2}{2} + \int_0^{s_0} xT_0(x)dx + a_1e^{-c_2t}\int_0^{s_0} q_0(x)dx + a_1c_2\int_0^t f(r)e^{-c_2(t-r)}dr > 0$. Тогда для произвольного $t_1 > 0$ существует такая постоянная $M_2 > 0$, что $0 < s(t) \le M_2$, $0 \le t \le t_1$.

Лемма 22. Пусть функции u, v, s являются решением задачи (62)-(68) и $|s'(t)| \le \alpha(1-\delta)$, $|u(t,x)| \le N$, $|v(t,x)| \le N$, $|\varphi_{1x}(x)| \le N_0$, $|\varphi_{2x}(x)| \le N_0$, $0 \le t_1 \le t$. Тогда $|u_x|, |v_x|, |u_t|, |v_t| \le C$, где через C здесь и далее, обозначим постоянную, зависящую от данных задачи.

Теорема 23. Для любых положительных $t > 0$ решение $u, v, s \in C^1$ задачи (62)-(68) единственно.

Теорема 24. Пусть $|s'(t)| \le \alpha(1-\delta)$. Тогда существует решение $u(t,x)$, $v(t,x)$, $s(t)$ задачи (62)-(68).

Во втором параграфе рассмотрена задача: требуется найти функции $\sigma_i(t,x)$, $\eta_i(t,x)$, $i = 1,2$, $s(t)$ такие, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $s(t)$ определена при $t \ge 0$, $s(0) = s_0$, $s'(0) = s_0$, а функции $\sigma_i(t,x)$, $\eta_i(t,x)$ в области D_i, где

$$D_1 = \{(t,x): -\infty < x < s(t),\ t \ge 0\},\ D_2 = \{(t,x): s(t) < x < \infty,\ t \ge 0\},$$

удовлетворяет следующим системам уравнений и условиям

$$\sigma_{1t}(t,x) + a_1\eta_{1x}(t,x) = 0,\ (t,x) \in D_1, \tag{69}$$

$$\eta_{1t}(t,x) + b_1\sigma_{1x}(t,x) = 0,\ (t,x) \in D_1, \tag{70}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_1(0,x) = f_1(x), \eta_1(0,x) = g_1(x), -\infty < x \le 0, \\ &k_1\eta_1(t, s(t)) = s'(t), \quad t \ge 0, \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

$$\sigma_{2t}(t,x) + a_2\eta_{2x}(t,x) = 0,\ (x,t) \in D_2, \tag{72}$$

$$\eta_{2t}(t,x) + b_2\sigma_{2x}(t,x) = 0\ ,(x,t) \in D_2, \tag{73}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_2(0,x) = f_2(x), \eta_2(0,x) = g_2(x), 0 \le x < \infty, \\ &k_2\eta_2(t, s(t)) = s'(t), \quad t \ge 0, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

$$ms''(t) = \sigma_1(,t,s(t)) - \sigma_2(,t,s(t)), \quad t \ge 0. \tag{75}$$

Предполагаются выполненными следующие условия:

a) Функции $f_i(x), g_i(x)$, $i = 1,2$ непрерывно дифференцируемы,

b) Выполнено условие согласование: $k_1g_1(0) = k_2g_2(0)$,

c) Коэффициенты a_i, b_i, k_i, m_i, $i = 1,2$ постоянные, причем $a_ib_i > 0$.

Характеристики для систем (69), (70), (72), (73) определяются как интегральные линии следующих дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{a_i b_i}\ , \ i = 1,2 .$$

Введем новые функции

$$u_i(t,x) = \sigma_i(t,x) + \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\eta_i(t,x),\ v_i(t,x) = \sigma_i(t,x) - \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\eta_i(t,x),\ i = 1,2 .$$

Тогда задача (75)-(81) примет вид

$$u_{1t}(t,x) + \sqrt{a_1 b_1} u_{1x}(t,x) = 0,\ (t,x) \in D_1 \tag{76}$$

$$v_{1t}(t,x) - \sqrt{a_1 b_1} v_{1x}(t,x) = 0,\ (t,x) \in D_1 \tag{77}$$

$$\left.\begin{aligned} & u_1(0,x) = \varphi_1(x),\ \ v_1(0,x) = \psi_1(x),\ -\infty < x \le 0 \\ & \frac{k_1}{2}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}}\left[u_1(t,s(t)) - v_1(t,s(t))\right] = s'(t),\ t \ge 0. \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

$$u_{2t}(t,x) + \sqrt{a_2 b_2} u_{2x}(t,x) = 0,\ (t,x) \in D_2 , \tag{79}$$

$$v_{2t}(t,x) - \sqrt{a_2 b_2} v_{2x}(t,x) = 0,\ (t,x) \in D_2 , \tag{80}$$

$$\left.\begin{aligned} & u_2(0,x) = \varphi_2(x),\ v_2(0,x) = \psi_2(x),\ 0 \le x < \infty \\ & \frac{k_2}{2}\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}\left[u_2(t,s(t)) - v_2(t,s(t))\right] = s'(t), t \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

$$ms''(t) + c\,s'(t) = u_1(t,s(t)) - v_2(t,s(t)), \tag{82}$$

Обозначим $\Omega = \{(t,x) : t \ge 0, -\alpha t < x < \alpha t\}$, здесь $\alpha = \min\left\{\sqrt{a_1 b_1}, \sqrt{a_2 b_2}\right\}$.

Теорема 25. Пусть $u_i(t,x)$, $v_i(t,x)$, $s(t)$ являются решением задачи (76)-(82) и выполнены неравенства $0 \le \delta < 1$, $|s_0| < \alpha(1-\delta)$. Тогда $|s'(t)| \le \alpha$, $t \ge 0$.

Теорема 26. Пусть выполнены предположения a), b) и условия теоремы 25. Тогда решение задачи (76)-(82) существует.

Теорема 27. При условиях теоремы 26 решение задачи (76)-(82) единственно.

Поведение решения при $t \to \infty$. Пусть

$$R(t_0) = \left\{ \sup_{-\infty < x < -\sqrt{a_1 b_1} t_0} |\phi_1| + \sup_{\sqrt{a_2 b_2} t_0 < x < \infty} |\psi_2| \right\}, t_0 \ge 0 .$$

Теорема 28. Предположим, что $\int\limits_0^\infty R(t)\,dt < \infty$. Тогда $\lim\limits_{t\to\infty} s(t)$ существует и конечен.

Рассмотрим произвольный промежуток $[x_1, x_2]$ и пусть

$$\omega(t) = \max \left\{ \begin{aligned} &\sup_{x_1 \le x \le s(t)} |u_1(t,x)|, \sup_{x_1 \le x \le s(t)} |v_1(t,x)|, \\ &\sup_{s(t) \le x \le x_2} |u_2(t,x)|, \sup_{s(t) \le x \le x_2} |v_2(t,x)|. \end{aligned} \right\}$$

Теорема 29. Если $f_1, g_1 \to 0$ при $x \to -\infty$, $f_2, g_2 \to 0$ при $x \to \infty$, то $\omega(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию задач со свободной границей для параболических уравнений и систем параболических уравнений типа реакция-диффузия, а также для систем гиперболических уравнений первого порядка.

До сих пор исследования, в основном развивались по пути как увеличения числа уравнений, так и по пути все более усложненного описания процессов. Форма областей же оставались простыми и примитивными. Но в окружающей нас природе эти формы встречаются крайне редко. А в настоящей работе задачи рассматриваются в областях с подвижными и неизвестными границами.

Во второй главе предложены способы получения априорных оценок в нормах пространств Гельдера для решений локальных и нелокальных задач со свободной границей систем квазилинейных параболических уравнений и уравнений типа реакция-диффузии. На основе этих оценок предложено метод доказательство единственности и существование решения задач. Изучено поведение неизвестной границы.

В третьей главе предложены способы получения априорных оценок типа Шаудера для решений задач с одной или двумя свободными границами для квазилинейных параболических уравнений и дается доказательства существование и единственности решения. Установлены критерий распространения или уменьшения биологических типов, то есть получены асимптотические оценки для решения задачи при неограниченном возрастании времени.

В четвертой главе развивается теория гиперболических задач типа Стефана для систем уравнений первого порядка. Эти задачи описывают математические модели природных процессов в средах с релаксационными свойствами. Установлены априорные оценки необходимые для корректности задач. Доказаны глобальное существование и единственность решения.

Практическое значение диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов в изучении физических, медико-биологических, химических процессов с фазовыми превращениями.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 UNDER INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I.ROMANOVSKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

RASULOV MIROJIDDIN SOBIRJONOVICH

FREE BOUNDARY PROBLEMS FOR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATIONS

01.01.02 – “Differential equations and Mathematical physics”

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministersof the Republic of Uzbekistan under number №B2017.4.PhD/FM152.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky AS RUz.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (http://kengash.mathinst.uz/) and in the webside of "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Kadirkulov Bakhtiyar Jalilovich Doktor of physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Samarkand state university**

Defense will take place __________ 2020 at ____ at the meeting of Scientific Council number Dsc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky AS RUz (Address:Mirzo Ulugbek str., 81, Tashkent, Uzbekistan, 100170. Phone: (99871) 262-75-44, fax: (99871) 262-73-57, e-mail: nauka@mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at at Institute of Mathematics named after V.I.Romanosky AS RUz (is registered №_____). Address:Mirzo Ulugbek str., 81, Tashkent, Uzbekistan, 100170. Phone: (99871) 262-75-44.

Abstract of dissertation sent out on «____» ___________2020 year.
(Mailing report № «____» on__________2020 year).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K. Adashev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, PhD.

A.A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Sc., Academician

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the study is to construct and develop a theory for the problems with a free boundary for parabolic equations, for the systems of parabolic equations of the reaction-diffusion type and for the systems of first-order hyperbolic equations.

The objects of the study are various mathematical models with a free boundary used in biomedicine, biology, ecology and gas-hydrodynamics in media with relaxation properties.

Scientific novelty of the research work consists in the following:

methods for obtaining a priori estimates in the norms of Hölder spaces for solutions of problems with a free boundary for systems of quasilinear parabolic equations and reaction-diffusion equations are developed;

on the basis of a priori estimates in the norms of Hölder spaces for solutions of problems with a free boundary for systems of quasilinear parabolic equations and equations of the reaction-diffusion type, the uniqueness and existence of solutions to the problems are proved;

methods for obtaining a priori estimates of the Schauder type for solving problems with one or two free boundaries for quasilinear parabolic equations are constructed, and proof is given for the existence and uniqueness of the solution. A criterion for the spread or reduction of biological types is established, that is, asymptotic estimates are obtained for solving the problem with an unlimited growth in time;

the theory of Stephan-type hyperbolic problems for systems of first-order equations is developed. These problems describe mathematical models of natural processes in environments with relaxation properties. A priori estimates are established for the correctness of the problems. The global existence and uniqueness of the solution are proved.

Implementations of the research results. The obtained results for the problems with a free boundary for parabolic and hyperbolic equations were implemented in the following areas:

The results of the study on free boundary problems for parabolic and hyperbolic equations were used in the research laboratory “Fractional calculus and its application” (Kamchatka State University named after Vitus Bering, certificate dated November 11, 2019, No. 728-22) in studies of non-classical boundary value problems of mathematical physics and the possibility of applying fractional calculus to them;

the methods for obtaining a priori estimates in Holder spaces for solving problems with a free boundary for the systems of parabolic and hyperbolic equations were used in conducting research work titled “Nonlocal differential equations of mixed type of mathematical models of extreme processes” (Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardino-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, No. 0213-2014-0002) to solve the class of local and nonlocal boundary value problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type and for loaded hyperbolic equations.

ЭЪЛОНҚИЛИНГАНИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I, Part I)

1. Тахиров Ж.О., Расулов М.С. О гиперболической задаче со свободной границей // Узбекский математический журнал. 2013, №4. С. 116-121. (01.00.00, № 6).

2. Тахиров Ж.О., Расулов М.С. Задача со свободной границей для систем уравнений типа реакция-диффузия // Украинский математический журнал. 2017, Том 69, №12. С. 1690-1700 (№3. Scopus: 0,43).

3. Расулов М.С. Задача со свободной границей в экологии // Узбекский математический журнал. 2017, № 2. С. 120-129 (01.00.00, № 6).

4. Rasulov M. S. On a free boundary problem for semilinear parabolic system // Uzbek Mathematical Journal, 2018, №1, pp.137-145 (01.00.00,№ 6).

5. Rasulov M. S. Problem for a quasilinear parabolic equation with two free boundaries // Uzbek Mathematical Journal. 2019, № 2, pp. 89-102 (01.00.00,№ 6).

II бўлим (Часть II, Part II)

6. Тахиров Ж.О., Расулов М. С. Об одной гиперболический задаче со свободной границей // Труды международной научной конференции «Современные проблемы естественных наук: Мататтематика, механика и информатика» Том.1(2), г. Харьков. 2014. С.165-168.

7. Тахиров Ж.О., Расулов М.С. Об одной двухфазной задаче газодинамики // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы» г.Ташкент, 12-14 сентября, 2012. С.212-213.

8. Тахиров Ж.О., Расулов М.С. О гиперболической модели теплопроводности // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий» г.Ташкент. 2012. С.37-38.

9. Тахиров Ж.О., Расулов М.С. О краевых задачах для локально-неравновесных моделей процессов переноса // Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий» г. Самарканд, 15-17 сентября, 2014. С. 60.

10. Тахиров Ж.О., Расулов М.С. Задача со свободной границей для систем квазилинейных параболических уравнений // Тезисы международной конференции «Нелинейный анализ и его приложения» г. Самарканд, 19-21 сентября, 2016. С. 108-109.

11. Расулов М.С. Задача со свободной границей для систем параболических уравнений типа реакция-диффузия // Тезисы докладов научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуалные проблемы дифференциалных уравнений и их приложения» г. Ташкент, 15-17 декабря, 2017. С.62-63.

12. Расулов М.С. Диффузионная логистическая модель со свободной границей // Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» г. Нальчик, Россия, 17-21 мая, 2017. С. 174-175.

13. Расулов М. С. Задача со свободной границей для параболических систем // Материалы международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные проблемы» г. Стерлитамак, Россия, 25-29 июня, 2018. С.116-117.

14. Rasulov M. S. Two free boundaries problem for a quasilinear parabolic equation // Proceedings of V International scientific conference “Non-local boundary value problems related problems of mathematical biology, informatics and physics” Nalchik, Russia, 4-7 December, 2018, pp. 240.

15. Расулов М.С. Задача со свободными границами для квазилинейного параболического уравнения типа реакция-диффузия // Материалы XI всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» г. Самара, Россия, 27-30 мая, 2019. С.72-73.