В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АРЗИҚУЛОВ ҒОЛИБЖОН ПАРДАЕВИЧ

ЯДРОСИ УЧ ЎЗГАРУВЧИЛИ ХУСУСИЙ ИНТЕГРАЛ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Тошкент – 2020

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АРЗИҚУЛОВ ҒОЛИБЖОН ПАРДАЕВИЧ

ЯДРОСИ УЧ ЎЗГАРУВЧИЛИ ХУСУСИЙ ИНТЕГРАЛ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ СПЕКТРАЛ ХОССАЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
А В Т О Р Е Ф Е Р А Т И

Тошкент – 2020

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM204 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz/) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар: **Эшкабилов Юсуп Халбаевич**
физика-математика фанлари доктори, профессор

Расмий оппонентлар: **Жамилов Уйғун Умурович**
физика-математика фанлари доктори

Муминов Захриддин Эшкобилович
физика-математика фанлари номзоди, доцент

Етакчи ташкилот: **Урганч давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «23» октябрь соат 9:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871) 262-75-44, факс: (+99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (107-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871) 262-75-44).

Диссертация автореферати 2020 йил «16» октябрь куни тарқатилди.
(2020 йил «16» октябрь даги 2- рақамли реестр баённомаси).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

У.А. Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К. Адашев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби,ф.-м.ф.н.,
катта илмий ходим

У.У. Жамилов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси,ф.-м.ф.д

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда чизиқли ўз-ўзига қўшма операторларнинг спектрал назарияси масалаларига келтирилади. Шредингер операторларининг спектрал назарияси математик физика, квант механикаси ва статистик физика каби соҳалардаги тадқиқотларнинг асосий объекти ҳисобланади. Дискрет Шредингер операторларининг спектрини ўрганиш Шредингер операторлари назариясида янги йўналиш сифатида ривожланмоқда. Кўп заррачали квант тизимларига мос келадиган дискрет Шредингер оператори чизиқли ўз-ўзига қўшма Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг хоссалари билан чамбарчас боғлиқ, чунки дискрет Шредингер операторларининг импульс кўриниши Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторлар билан ифодаланади. Шунинг учун чизиқли ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг спектрал хоссаларини тадқиқ қилиш чизиқли операторларнинг спектрал назарияси ва дискрет Шредингер операторлар назариясининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда. Ҳозирги кунда жаҳонда панжарадаги кўп заррачали система дискрет Шредингер операторларини ифодаловчи Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг муҳим спектрлари структураларини тадқиқ қилиш, муҳим спектр қуйи чегарасини аниқлаш ва хос қийматларнинг чекли ва чексизлигини тадқиқ қилиш долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Шу муносабат билан, муҳим спектр жойлашиши ва муҳим спектр структурасини таҳлил қилиш, муҳим спектр қуйи чегарасини аниқлаш, дискрет спектр хос қийматларининг мавжудлиги ва сонини тадқиқ қилиш операторларнинг спектрал назариясида мақсадли илмий йўналишлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган статистик физика ва квант механиканинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан Шредингер операторларининг спектрал назарияси масалаларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Дискрет Шредингер операторларнинг импульс кўриниши L_2 Гильберт фазосида чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторлар билан ифодаланадиган масалаларга оид салмоқли натижаларга эришилди.

Функционал анализ, математик физика, квант механикаси ва статистик физика фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторлар муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ этишни ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш,

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сонли қарори.

бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2017 йил 20 апрелдаги «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2909-сон Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Муҳим спектр ифодаси ва муҳим спектр ташқарисидаги хос қийматлар сонини тадқиқ қилиш Шредингер операторлар назариясида муҳим аҳамият касб этмоқда. Л.М.Лихтарников, Л.З.Витова, А.С.Калитвин ва П.П.Забрейколарнинг ишларида мультипликаторсиз бўлган ҳолда ядроси икки ўзгарувчили Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг спектрал хоссалари ўрганилган. Ю.Аппель, А.С.Калитвин ва П.П.Забрейколарнинг ишларида айрим функционал фазоларда хусусий интеграл операторлар хоссалари тадқиқ қилинган ва бир қатор татбиқлари келтирилган.

С.Альбеверио, С.Н.Лакаев ва З.И.Мўминовлар томонидан панжарадаги уч заррачали системага мос келувчи, мультипликатори Гёлъдер синфига тегишли бўлган ядраси ажралувчи Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг дискрет спектрининг чекли ва чексиз бўлиш шартлари олинган. Юқорида айтиб ўтилган ишда, хусусий интеграл операторлар муҳим спектрининг қуйи чегараси нолга тенг бўлиб, муҳим спектри мультипликатор спектрига мос келади. Кейинчалик, Т.Х.Расуловнинг ишида кинетик функцияни ифодаловчи маълум бир ҳақиқий аналитик функция учун уч ўлчамли $\mathbb{Z}^3$ панжарадаги уч заррачали системага мос келувчи дискрет Шредингер операторининг Ефимов эффектининг мавжудлигини исботлади. Бу ишда ҳам, хусусий интеграл операторлар муҳим спектрининг қуйи чегараси нолга тенг бўлиб, муҳим спектри мультипликатор спектрига мос келади.

Ю.Х.Эшкабилов томонидан биринчи бор ядроси уч ўзгарувчили функция бўлган ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторлар спектри ўрганилган бўлиб, Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторлар муҳим спектри ва дискрет спектри ҳақидаги теоремалар исботланган. Номанфий мультипликатор ва икки ўзгарувчили номанфий ядроли Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторлар муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмида жойлашган хос қийматлар сони чеклита бўлиши учун етарли шарт олинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университетининг «Операторлар алгебралари ва комутатив бўлмаган модуллар назарияси» (2015-2020) ва ЁОТ–ФТЕХ-2018-154 «$\mathbb{Z}^d$ панжараларида ва Γ^k Кэли дарахтларида гамильтонианлар спектрлари ва Гиббс ўлчовлари» (2018-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқотлар лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл оператор муҳим спектрининг жойлашувини ва дискрет спектрини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

ядроси ажралувчи хусусий интеграл операторларнинг муҳим спектрларини тавсифлаш;

хусусий интеграл операторлар йиғиндиси муҳим спектрининг структурасини тадқиқ қилиш;

хусусий интеграл операторлар йиғиндиси дискрет спектрининг мавжудлигини ўрганиш;

ядроси уч ўзгарувчили Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторнинг муҳим ва дискрет спектрларини тавсифлаш;

ядроси ажралувчи хусусий интеграл операторларнинг муҳим спектрларининг қуйи чегарасини аниқлаш;

ядроси уч ўзгарувчили Фредгольм типидаги хусусий интеграл оператор манфий хос қийматлар сонини баҳоловчи тенгсизликни топиш.

Тадқиқотнинг объекти L_2 Гильберт фазосидаги хусусий интеграл операторлар ва Фредгольм типидаги интеграл операторлар назариясидан иборатдир.

Тадқиқотнинг предмети Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг спектрал хоссалари, ўз-ўзига қўшма операторлар, Шредингер операторлари ва Фридрихс моделидаги операторлардир.

Тадқиқотнинг усуллари: Диссертация ишида функционал анализ, Фредгольм назарияси ва минимакс принципи усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

хусусий интеграл операторлар йиғиндиси муҳим спектрининг тузулиши топилган ва хос қийматлари мавжудлиги ҳақидаги етарлилик шарти олинган;

ядроси уч ўзгарувчили Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторнинг муҳим ва дискрет спектрлари ҳақидаги теоремалар исботланган;

ядроси ажралувчи хусусий интеграл операторларнинг муҳим спектрларининг қуйи чегараси аниқланган;

ядроси уч ўзгарувчили Фредгольм типидаги хусусий интеграл оператор муҳим спектрининг структураси топилган, ҳамда манфий хос қийматлар сонини баҳоловчи теорема исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Қаттиқ жисмлар физикасида экспериментал кузатувларни ўрганишда ва Шредингер операторларнинг боғланган ҳолатларини ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма H хусусий интеграл операторнинг муҳим ва дискрет спектри тўғрисидаги натижаларни қўллашдан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, чизиқли операторлар спектрал назарияси, қўзғалиш назарияси усулларидан, Фредгольм назарияси ва минимакс принципидан фойдаланилган. Олинган натижалар қатъий математик тарзда исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ гильберт фазосида ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг спектрал назарияси бўйича бир қатор янги натижалар олинган. Диссертация ишида келтирилган натижалар ва усуллардан, чизиқли операторларнинг спектрал хоссаларини, квант механикасидаги гамильтонианлар, Шредингер операторлар назариясини ўрганишда, шунингдек математик физика ва механика масалаларидаги тенгламаларнинг ечимларини ўрганиш учун фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг муҳим ва дискрет спектрларига оид олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда жорий қилинган:

Ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг чекли хос қийматлари мавжудлигидан, ҳамда ядроси уч ўзгарувчили ўз-ўзига қўшма Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг муҳим ва дискрет спектрларидан ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 рақамли лойиҳада айрим ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторлар хос қийматлари ҳақидаги масалаларни тадқиқ қилишда ва ажралувчи ядроли ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг муҳим спектри ва дискрет Шредингер операторларининг муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмидаги хос қийматлар сонини топишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги, 2020 йил 5 июндаги №89-03-1923 сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторларнинг хос қийматлари биттадан ошмаслиги, муҳим спектри тузулишини ифодалашда ва дискрет спектри бўш тўплам бўлмаслиги ҳақидаги масалаларни ҳал этиш имконини берган.

Ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма операторнинг муҳим спектри жойлашувидан MRU–OT–1/2017 рақамли лойиҳада юқори тартибли, хусусан учинчи тартибли хусусий ҳосилали ва тузилмали тенгламалар учун нолокал масалалар ечимларини топишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги, 2020 йил 5 июндаги №89-03-1923 сонли маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши учинчи тартибли ва тузилмали тенгламалар учун нолокал масалаларнинг ечимларининг хоссаларини ўрганишида фойдаланилган ва бу натижалар ёрдамида псевдодифференциал тенгламалар боғланган жараёнларни оптимал чегаравий шартларини ҳал қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 2 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 5 та илмий иш чоп этилган, уларнинг барчаси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари (PhD) асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 82 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторлар**» деб номланувчи биринчи бобида Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторлар спектрал хоссалари ҳақида умумий маълумотлар келтирилган. Хусусий интеграл операторларнинг хос қийматлар, хоссалари ва спектрларини тавсифлаш ҳақидаги теоремалар берилган. Ўз-ўзига қўшма Фредгольм типидаги хусусий интеграл операторлар муҳим ва дискрет спектрлари ҳақида теоремалар келтириб ўтилган.

Фараз қилайлик, $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{\nu_1}$ ва $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{\nu_2}$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$, $\mu_1(\Omega_1)$ ва $\mu_2(\Omega_2)$ лар мусбат Лебег ўлчовли компакт тўпламлар бўлсин.

$L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ фазода қуйидаги формула билан аниқланган ўз-ўзига қўшма чегараланган H операторни қараймиз:

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{1}$$

бу ерда H_0, T_1 ва T_2 операторлар мос равишда

$$H_0 f(x,y) = k_0(x,y) f(x,y), \quad f(x,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s), \quad f(s,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \tag{2}$$

$$T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t), \quad f(x,t) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \tag{3}$$

формулалар билан аниқланган бўлиб, бунда $k_0(x,y)$ – ҳақиқий қийматли $\Omega_1 \times \Omega_2$ тўпламда узлуксиз функция, $k_1(x,s,y)$ ва $k_2(x,t,y)$ функциялар мос равишда $\Omega_1^2 \times \Omega_2$, $\Omega_1 \times \Omega_2^2$ тўпламларда узлуксиз ҳамда $k_1(x,s,y) = \overline{k_1(s,x,y)}$, $k_2(x,t,y) = \overline{k_2(x,y,t)}$ шартларни бажарилиши талаб қилинсин. Бу ерда интеграл Лебег маъносида тушунилади. (1) кўринишдаги оператор Фредгольм типидаги хусусий интеграл оператор (ХИО) деб аталади. H (1) хусусий интеграл оператор $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ фазода чизиқли ўз-ўзига қўшма оператор бўлади.

1.1 параграфда T_1 ва T_2 хусусий интеграл операторлар хос қийматларининг хоссалари ва спектрларининг тавсифи берилган.

Тасдиқ 1. T_1 оператор (T_2 оператор)нинг барча λ хос қийматлари чексиз карралидир.

Тасдиқ 2. Ноль сони T_1 оператор (T_2 оператор)нинг муҳим спектрига тегишлидир.

$s(T_1)$ орқали T_1 хусусий интеграл операторнинг барча сингуляр қийматлар тўпламини белгилаймиз.

Теорема 1. Агар T_1 хусусий интеграл операторнинг ядроси $k_1(x,s,y)$, $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ тўпламда узлуксиз функция бўлса, у ҳолда $\sigma(T_1) = \{0\} \cup s(T_1)^{-1}$.

1.2 параграфда ўз-ўзига қўшма $T = T_1 + T_2$ хусусий интеграл операторнинг муҳим ва дискрет спектри ҳақидаги теоремалар келтирилган.

$r(T_1)$ ва $r(T_2)$ орқали мос равишда, T_1 ва T_2 операторларнинг барча регуляр қийматлар тўпламини белгилаймиз.

Қуйидаги $D(T) = \{\tau \in r(T_1) \cap r(T_2) : \Delta_1(\tau) = 0\}$ белгилаш киритамиз.

Теорема 2. T хусусий интеграл операторнинг спектри учун қуйидаги формула ўринли

$$\sigma(T) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) \cup D(T)^{-1}.$$

Теорема 3. $T_1 + T_2$ хусусий интеграл операторнинг дискрет спектри $D(T)^{-1}$ тўпламга мос келади, яъни $\sigma_{disc}(T_1 + T_2) = D(T)^{-1}$.

1.3 параграфда $H = H_0 - T$ кўринишидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторнинг муҳим ва дискрет спектри ҳақидаги маълум бўлган натижалар берилган.

$L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ фазода қуйидаги операторларни аниқлаймиз: $W_1 = H_0 - T_1$ ва $W_2 = H_0 - T_2$.

Равшанки, $\sigma_0 = Ran(k_0) = \sigma(H_0)$, бу ерда $Ran(k_0)$, $k_0(x,y)$ функциянинг қийматлар соҳасидир.

Ҳар қандай $\lambda \in \rho(H_0)$ учун $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ да $B_1(\lambda)$ ва $B_2(\lambda)$ хусусий интеграл операторларни қуйидаги формулалар билан аниқлаймиз:

$$B_1(\lambda)f(x,y)=\int_{\Omega_1}\frac{k_1(x,s,y)}{k_0(s,y)-\lambda}f(s,y)d\mu_1(s)\,,\ f\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2)\,,$$

$$B_2(\lambda)f(x,y)=\int_{\Omega_2}\frac{k_2(x,t,y)}{k_0(x,t)-\lambda}f(x,t)d\mu_2(t)\,,\ f\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2)\,.$$

Айтайлик, $\tilde{D}_1(y;\lambda)$ ва $\tilde{D}_2(x;\lambda)$ мос равишда $E-B_1(\lambda)$ ва $E-B_2(\lambda)$ операторларнинг детерминантлари бўлсин.

Қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз

$$\sigma_1=\sigma_1(W_1)=\{\lambda\in\rho(H_0):\ \ \tilde{D}_1(y_0;\lambda)=0,\ \text{бирор}\ y_0\in\Omega_2\},$$

$$\sigma_2=\sigma_2(W_2)=\{\lambda\in\rho(H_0):\ \ \tilde{D}_2(x_0;\lambda)=0,\ \text{бирор}\ x_0\in\Omega_1\}.$$

Теорема 4. W_1 операторнинг спектри σ_0 ва σ_1 тўпламлар бирлашмасидан иборат бўлади, яъни $\sigma(W_1)=\sigma_0\cup\sigma_1$.

Қулайлик учун ушбу белгилаш киритамиз:

$$D_0(H)=\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\sigma_0\cup\sigma_1\cup\sigma_2):\Delta(\lambda)=0\}.$$

Теорема 5. H хусусий интеграл операторнинг спектри учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\sigma(H)=\sigma_0\cup\sigma_1\cup\sigma_2\cup D_0(H).$$

Теорема 6. H хусусий интеграл операторнинг дискрет спектри $D_0(H)$ тўпламга мос келади, яъни

$$\sigma_{disc}(H)=D_0(H)=\{\lambda\in\mathbb{C}\setminus(\sigma_0\cup\sigma_1\cup\sigma_2):\Delta(\lambda)=0\}.$$

Айтайлик, $\Omega_1=[a,b]^{\nu_1}$ ва $\Omega_2=[c,d]^{\nu_2}$ бўлсин. $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ Гильберт фазосида қуйидаги ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторни қараймиз:

$$H=H_0-(T_1+T_2)\,. \tag{4}$$

Бунда H_0, T_1 ва T_2 операторлар таъсир этиши қуйидаги формулалар билан аниқланган:

$$H_0f(x,y)=k_0(x,y)f(x,y),\quad f(x,y)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2),$$

$$T_1f(x,y)=\int_{\Omega_1}\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)}\varphi(y)f(s,y)d\mu_1(s),\quad f(s,y)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2),$$

$$T_2f(x,y)=\int_{\Omega_1}\psi(x)\overline{\varphi_2(t)}\varphi_2(y)f(x,t)d\mu_2(t),\quad f(x,t)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2).$$

Бу ерда $k_0(x,y)$ – $\Omega_1\times\Omega_2$ тўпламда аниқланган узлуксиз ва номанфий функция, $\psi(x)$ ва $\varphi(y)$ функциялар мос равишда Ω_1 ва Ω_2 тўпламларда узлуксиз, $\varphi_j(\cdot)$ эса Ω_j тўпламда узлуксиз функция бўлиб,

$$\int_{\Omega_j} \left|\varphi_j(\xi)\right|^2 d\mu_j(\xi) = 1,$$

шартни қаноатлантиради ва $\mu_j(\cdot) -\ \Omega_j$ тўпламдаги Лебег ўлчови, $j = 1, 2.$

Икки ва уч заррачали дискрет Шредингер операторлар назариясида (4) кўринишдаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторлар кўп учрайди. Диссертация ишида ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги (1) хусусий интеграл операторларнинг муҳим ва дискрет спектрлари,

$$k_0(x, y) = u(x) \cdot v(y),$$

бўлган ҳол учун ўрганилган, бу ерда $u(x)$ ва $v(y)$, $u(x^{\min}) = 0,\ x^{\min} \in \Omega_1$, $v(y^{\min}) = 0,\ y^{\min} \in \Omega_2$ шартни қаноатлантирувчи ва мос равишда Ω_1 ва Ω_2 тўпламларда узлуксиз номанфий функциялар.

Шунингдек, диссертацияда Шредингер операторлар назариясида модель оператор сифатида (4) гамильтониан спектри ўрганилган.

Диссертациянинг «**Ядроси ажралувчи** $T_1 + T_2$ **хусусий интеграл операторнинг спектрлари**» деб номланувчи иккинчи боби ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма $T = T_1 + T_2$ хусусий интеграл оператор муҳим спектрининг структураси ва дискрет спектрининг мавжудлигини тадқиқ қилишга бағишланган.

Фараз қилайлик, $\varphi(x) \in L_2(\Omega_1),\ \|\varphi(x)\| = 1,\ \psi(y) \in L_2(\Omega_2),\ \|\psi(y)\| = 1$ ва $\beta(x) \in C(\Omega_1),\ \alpha(y) \in C(\Omega_2)$ бўлсин.

2.1 параграфда $k_1(x, s, y) = \varphi(x)\overline{\varphi(s)}\alpha(y)$, $k_2(x, t, y) = \beta(x)\overline{\psi(t)}\psi(y)$ ҳоллар учун $T = T_1 + T_2$ хусусий интеграл операторнинг муҳим спектри ўрганилган ва ядроси уч ўзгарувчили $T = T_1 + T_2$ хусусий интеграл операторнинг хос қийматлари мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган.

Айтайлик, $\alpha(y) \ge 0,\ y \in \Omega_2$ и $\beta(x) \ge 0,\ x \in \Omega_1$ бўлсин. $\Pi_1 = \mathbb{R} \setminus Ran\left(\beta(x)\right)$ ва $\Pi_2 = \mathbb{R} \setminus Ran\left(\alpha(y)\right)$ тўпламларда $F_1(\lambda)$ ва $F_2(\lambda)$ функцияларни мос равишда қуйидагича аниқлаймиз:

$$F_1(\lambda) = \int_{\Omega_1} \frac{\beta(s)\left|\varphi(s)\right|^2 ds}{\lambda - \beta(s)}, \qquad F_2(\lambda) = \int_{\Omega_1} \frac{\alpha(t)\left|\psi(t)\right|^2 dt}{\lambda - \alpha(t)}.$$

$F_1(\lambda)$ ва $F_2(\lambda)$ функцияларнинг монотонлигидан қуйидаги лимит мавжуд:

$$I_0 = \lim_{\lambda \to \beta_{\max}+0} F_1(\lambda) \cdot \lim_{\lambda \to \beta_{\max}+0} F_2(\lambda) > 0\,.$$

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 7. T хусусий интеграл операторнинг муҳим спектри учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \{0\} \cup \text{Ran}\left(\alpha(y)\right) \cup \text{Ran}\left(\beta(x)\right).$$

Қуйидаги теоремада T оператор учун хос қийматнинг мавжудлиги ҳақидаги етарлилик шарти олинган.

Теорема 8. а) агар $I_0 > 1$ бўлса, у ҳолда T операторнинг дискрет спектри ягона λ_0 хос қийматдан ташкил топган бўлиб бунда, $\lambda_0 > \beta_{\max}$ ва λ_0 T операторнинг оддий хос қиймати бўлади.

б) агар $I_0 \le 1$ бўлса, у ҳолда T оператор муҳим спектрдан ташқарида хос қийматларга эга бўлмайди.

Натижа 1. Айтайлик, $\beta(x) \equiv \beta_0 = const > 0$ ва $\alpha(y) \equiv \alpha_0 = const > 0$ бўлсин, у ҳолда T операторнинг дискрет спектри ягона $\lambda_0 = \alpha_0 + \beta_0$ хос қийматдан иборат бўлади.

2.2 параграфда ядроси ажралувчи T_1 ва T_2 хусусий интеграл операторларнинг спектрал хоссалари тадқиқ қилинган.

Айтайлик $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ ва $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{m}$ мос равишда $L_2[a,b]$ ва $L_2[c,d]$ даги ортонормалланган функциялар системаси ва $\{h_k(y)\}_{k=1}^{n}$ ва $\{p_j(x)\}_{j=1}^{m}$ мос равишда $[c,d]$ ва $[a,b]$ даги муҳим чегараланган ҳақиқий функциялар системаси бўлсин.

$[a,b]^2 \times [c,d]$ тўпламда $k_1(x,s,y)$ ва $[a,b] \times [c,d]^2$ тўпламда $k_2(x,t,y)$ ўлчовли функцияларни қуйидаги қоида билан аниқлаймиз:

$$k_1(x,s,y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}h_k(y) \quad \text{ва} \quad k_2(x,t,y) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\overline{\psi_j(t)}\psi_j(y).$$

Бу ҳолда $k_1(x,s,y)$ ядроли T_1 ва $k_2(x,t,y)$ ядроли T_2 хусусий интеграл операторлар $L_2([a,b]\times[c,d])$ фазода ўз-ўзига қўшма чизиқли чегараланган операторлардир.

Агарда, барча $\varepsilon > 0$ учун

$$\mu(\{\xi \in \Omega : \lambda - \varepsilon < \varphi(\xi) < \lambda + \varepsilon\}) > 0,$$

бўлса, $\lambda \in \mathbb{R}$ сони $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nu}$ тўпламда чегараланган ўлчовли φ функциянинг муҳим қиймати дейилади.

$Essran(\varphi)$ орқали φ функциянинг барча муҳим чегараланган қийматлар тўпламини белгилаймиз.

Қуйидаги теорема T_1 операторнинг спектри учун исботланган.

Теорема 9. Ядроси ажралувчи T_1 хусусий интеграл оператор спектри учун қуйидаги формула ўринли:

$$\sigma(T_1) = \{0\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} Essran\left(h_k(y)\right) \right).$$

Худди шундай T_2 хусусий интеграл оператор учун теорема исботланган.

Тасдиқ 3. а) Ноль T_1 операторнинг чексиз каррали хос қийматидир;

б) $\lambda_0 \ne 0$ сони T_1 операторнинг хос қиймати бўлади фақат ва фақат шундаки, агар шундай $1 \le j_0 \le n$ мавжуд бўлиб, $\mu_2(h_{j_0}^{-1}(\lambda_0)) > 0$ бўлса.

Тасдиқ 4. T_1 хусусий интеграл операторнинг ихтиёрий хос қиймати чексиз карралидир.

Натижа 2. Агар ҳар бир h_k, $k \in \{1,...,n\}$ функция $[c,d]$ кесмада узлуксиз ва қатъий монотон бўлса, у ҳолда T_1 хусусий интеграл операторнинг нолдан бошқа хос қиймати йўқ.

2.3 параграфда ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги $T = T_1 + T_2$ хусусий интеграл операторнинг муҳим ва дискрет спектрлари ҳақидаги теоремалар берилган. Айтайлик, $\tau \neq 0$ ва $\tau^{-1} \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$ бўлсин. $\Delta_1(\tau)$ ва $\Delta_2(\tau)$ орқали мос равишда $E - \tau^2 W_1(\tau)$ ва $E - \tau^2 W_2(\tau)$ операторларнинг Фредгольм детерминантини белгилаймиз.

$\mathbb{C}$ тўпламдан қуйидаги қисм тўпламни аниқлаймиз:

$$\mathfrak{D}_k = \left\{ \tau = \mathbb{C} \setminus \{0\} : \tau^{-1} \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2) \ \text{ и } \ \Delta_k(\tau) = 0 \right\}, \qquad k = 1,2.$$

Бундан, $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ тенгликни текшириш мумкин. $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}_1$ ва $\mathfrak{D}_0(T) = \left\{ \xi : \xi = \dfrac{1}{\tau}, \ \tau \in \mathfrak{D}(T) \right\}$ белгилашларни киритамиз.

$T_1 + T_2$ хусусий интеграл оператор учун қуйидаги натижа олинган.

Теорема 10. Қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

(i) $\sigma_{ess}(T_1 + T_2) = \{0\} \cup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} Essran\big(h_k(y)\big) \right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} Essran\big(p_j(x)\big) \right);$

(ii) $\sigma_{disc}(T_1 + T_2) = \mathfrak{D}_0(T).$

Диссертациянинг «$H_0 - (T_1 + T_2)$ **хусусий интеграл операторларнинг муҳим ва дискрет спектрлари**» деб номланувчи учинчии боби ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг муҳим ва дискрет спектрларини ўрганишга бағишланган.

3.1 параграфда $k_0(x,y) = u(x) \cdot v(y)$, $k_1(x,s,y) = \varphi(y)$, $k_2(x,t,y) = \psi(x)$ бу ерда, $u(x)$, $v(y)$, $\varphi(y)$ ва $\psi(x)$ – номанфий ва узлуксиз функциялар бўлган ҳоллар учун $W = H_0 - (T_1 + T_2)$ хусусий интеграл операторнинг муҳим спектри тадқиқ қилинган. W операторнинг муҳим ва дискрет спектри ҳақидаги теорема исботланган.

Ω_j тўпламда қуйидаги номанфий ва узлуксиз функцияларни аниқлаймиз:

$$\pi_j(\zeta) = \inf_{\|h\|=1} \big(H_k(\zeta) h, h \big), \ \ \zeta \in \Omega_j, \ \ j \neq k, \ \ j = 1,2, \ \ k = 1,2,$$

бу ерда $H_1(\xi)$ ва $H_2(\eta)$ Фридрихс моделидаги ўз-ўзига қўшма операторлар $L_2(\Omega_j)$ фазода қуйидаги тенгликлар билан берилган:

$$H_1(\xi) h(x) = v(\xi) u(x) h(x) - \varphi(\xi) \int_{\Omega_1} h(s) ds,$$

$$H_2(\eta) g(y) = u(\eta) v(y) g(y) - \psi(\eta) \int_{\Omega_2} g(t) dt.$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\pi_j^{\max} = \max_{\zeta \in \Omega_k} \pi_j(\zeta), \quad j \neq k, \quad j = 1,2, \quad k = 1,2.$$

$L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ фазода ўз-ўзига қўшма қуйидаги операторларни қараймиз:

$$W_1 = H_0 - T_1 \quad \text{ва} \quad W_2 = H_0 - T_2 \,.$$

Теорема 11. Қуйидаги тенгликлар ўринлидир:

а) $\sigma_{ess}(W_1) = [-\varphi_{\max}, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}];$

б) $\sigma_{ess}(W_2) = [-\psi_{\max}, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}].$

$\Omega_2 \setminus \{y^{\min}\}$ ва $\Omega_1 \setminus \{x^{\min}\}$ тўпламларда $f_1(y)$ ва $f_2(x)$ функцияларни қуйидаги кўринишларда аниқлаймиз:

$$f_1(y) = 1 - \varphi(y)\Phi_1(y), \quad \text{бу ерда} \quad \Phi_1(y) = \lim_{\lambda \to 0-} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{v(y)u(s) - \lambda},$$

$$f_2(x) = 1 - \psi(x)\Phi_2(x), \quad \text{бу ерда} \quad \Phi_2(x) = \lim_{\lambda \to 0-} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{u(x)v(t) - \lambda}.$$

Қуйидаги теорема 3.1 параграфнинг асосий натижасидир.

Теорема 12.

а) агар $f_1^{\max} < 0$ ва $f_2^{\max} < 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sigma_{ess}(W) = [-\varphi_{\max}, \pi_1^{\max}] \cup [-\psi_{\max}, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}];$$

б) агар $f_1^{\max} < 0$ ва $f_2^{\max} \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sigma_{ess}(W) = [-\varphi_{\max}, \pi_1^{\max}] \cup [-\psi_{\max}, u_{\max} \cdot v_{\max}];$$

в) агар $f_1^{\max} \geq 0$ ва $f_2^{\max} < 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sigma_{ess}(W) = [-\psi_{\max}, \pi_2^{\max}] \cup [-\varphi_{\max}, u_{\max} \cdot v_{\max}];$$

г) агар $f_1^{\max} \geq 0$ ва $f_2^{\max} \geq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\sigma_{ess}(W) = [-\max\{\varphi_{\max}, \psi_{\max}\}, u_{\max} \cdot v_{\max}].$$

Учинчи бобнинг иккинчи параграфда Фредгольм типидаги W хусусий интеграл операторнинг хос қийматларининг мавжудлиги ҳақида етарлилик шарти олинган ва муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмидаги манфий хос қийматлар сонини баҳоловчи тенгсизлик олинган.

Қуйидаги белгилаш киритамиз:

$$\xi_0 = \int_{\Omega_1} u(x)dx \cdot \int_{\Omega_2} v(y)dy.$$

Теорема 13. Айтайлик, $\varphi_{\max} \geq \psi_{\max}$ $\left(\varphi_{\max} \leq \psi_{\max}\right)$ бўлсин. Агар $\xi_0 < \psi_{\min} + (\varphi_{\min} - \varphi_{\max})$ $\left(\xi_0 < \varphi_{\min} + (\psi_{\min} - \psi_{\max})\right)$ бўлса, у ҳолда W оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмида жойлашган манфий хос қийматларга эга бўлади.

$N_0(H)$ орқали Фредгольм типидаги H хусусий интеграл оператор муҳим спектри қуйи чегараси қуйи қисмидаги барча хос қийматлар (каррасини инобатга олган ҳолда) сонини белгилаймиз, яъни

$$N_0(H) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_{disc}(H) \\ \lambda < E_{\min}(H)}} n_H(\lambda),$$

бу ерда $n_H(\lambda)$ – H оператор λ хос қийматининг карраси.

Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 14. W оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмидаги хос қийматлар сони биттадан кўп эмас, яъни $N_0(W) \leq 1$.

3.3 параграфда ядроси уч ўзгарувчили H (1) хусусий интеграл операторнинг муҳим спектрининг структураси ҳақидаги теорема исботланган.

Айтайлик $\{\varphi_k(x),\ k = \overline{1,n}\}$ ва $\{\psi_j(y),\ j = \overline{1,m}\}$ мос равишда $L_2(\Omega_1)$ ва $L_2(\Omega_2)$ даги ортонормалланган узлуксиз функциялар системаси бўлсин. $k_1\left(x,s,y\right),\ k_2\left(x,t,y\right)$ ядроларни қуйидагича аниқлаймиз:

$$k_1\left(x,s,y\right) = \varphi(y)q_1(x,s),\quad k_1\left(x,t,y\right) = \psi(x)q_2(y,t),$$

бу ерда, $q_1(x,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)},\ \ q_2(y,t) = \sum_{j=1}^{m} b_j\psi_j(y)\overline{\psi_j(t)}$ ва $a_k > 0,\ b_j > 0.$

Қуйидаги белгилашни киритамиз, $a_{\max} = \max\{a_1,...,a_n\},\ \ b_{\max} = \max\{b_1,...,b_m\}$.

$L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ гильберт фазосида чизиқли чегараланган ўз-ўзига қўшма операторни аниқлаймиз:

$$H = H_0 - (T_1 + T_2)\,. \tag{5}$$

Бунда H_0, T_1 ва T_2 операторлар таъсир этиши қуйидаги формулалар билан аниқланган:

$$H_0 f(x,y) = u(x)v(y)f(x,y),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y)f(s,y)d\mu_1(s),\quad T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y)f(x,t)d\mu_2(t).$$

Қуйидаги теоремада H оператор муҳим спектрининг тўлик ифодаси олинган.

Теорема 15. H (5) операторнинг муҳим спектри учун қуйидаги тенглик ўринли:

$$\sigma_{ess}\left(H\right) = \left[-\varphi_{\max}\cdot a_{\max}, \pi_1^{\max}\right] \cup \left[-\psi_{\max}\cdot b_{\max}, \pi_2^{\max}\right] \cup \left[0, u_{\max}\cdot v_{\max}\right].$$

3.4 параграфда H хусусий интеграл оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмида жойлашган хос қийматлар мавжуд бўлиши учун етарли шарт олинган. Манфий хос қийматлар сонини баҳоловчи тенгсизлик олинган.

$\xi_{i,j}$ мусбат элементлардан тузилган $m\times n$ ўлчовли Λ матрицани аниқлаймиз,

$$\xi_{i,j}:\quad \xi_{i,j}=\int_{\Omega_1}u(x)\left|\varphi_i(x)\right|^2dx\cdot\int_{\Omega_2}v(y)\left|\psi_j(y)\right|^2dy.$$

Теорема 16. а) Айтайлик, $\varphi_{\max}\cdot a_{\max}\ge\psi_{\max}\cdot b_{\max}$ бўлсин. Агар Λ матрицанинг бирор $\xi_{i,j}$ элементи учун

$$\xi_{i,j}<\psi_{\min}\cdot b_j+\left(\varphi_{\min}\cdot a_i-\varphi_{\max}\cdot a_{\max}\right)$$

шарт бажарилса, у ҳолда H (5) оператор муҳим спектри қуйи қисмининг қуйида манфий хос қийматларга эга бўлади.

б) Айтайлик, $\varphi_{\max}\cdot a_{\max}\le\psi_{\max}\cdot b_{\max}$ бўлсин. Агар Λ матрицанинг бирор $\xi_{i,j}$ элементи учун

$$\xi_{i,j}<\varphi_{\min}\cdot a_i+\left(\psi_{\min}\cdot b_j-\psi_{\max}\cdot b_{\max}\right),$$

шарт бажарилса, у ҳолда H (5) оператор муҳим спектри қуйи қисмининг қуйида манфий хос қийматларга эга бўлади.

Теорема 17. H (5) модель оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмидаги хос қийматлар сони $n\cdot m$ тадан кўп эмас яъни, $N_0(H)\le n\cdot m.$

ХУЛОСА

Диссертация иши ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг муҳим ва дискрет спектрларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Ядроси ажралувчи T_1 ва T_2 хусусий интеграл операторлар спектрларининг структураси тадқиқ қилинган;

2. Ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма T_1+T_2 хусусий интеграл оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмида хос қийматлар мавжуд бўлиши учун етарли шарт олинган;

3. Ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл операторларнинг муҳим спектри структураси ҳақидаги теорема исботланган;

4. Ядроси уч ўзгарувчили Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмидаги манфий хос қийматлар сонини баҳоловчи тенгсизлик олинган;

5. Ядроси ажралувчи хусусий интеграл оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмида хос қийматлар мавжуд бўлиши учун етарли шарт олинган;

6. Ядроси ажралувчи Фредгольм типидаги ўз-ўзига қўшма хусусий интеграл оператор муҳим спектри қуйи чегарасининг қуйи қисмидаги манфий хос қийматлари сони $n \cdot m$ тадан кўп эмаслиги исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

АРЗИКУЛОВ ГАЛИБЖОН ПАРДАЕВИЧ

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНО ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

01.01.01 – Математический анализ

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент-2020

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2018.2.PhD/FM204.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Жамилов Уйгун Умурович** доктор физико-математических наук
	Муминов Захриддин Эшкобилович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «23» октября 2020 года в 9:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Института математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871) 262-75-44, факс: (+99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института математики имени В.И. Романовского (регистрационный номер № 107). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871) 262-75-44).

Автореферат диссертации разослан «16» октября 2020 года.
(протокол рассылки № 2 от «16» октября 2020 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.,профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, к.ф.-м.н., старший научный сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Решения проблем, возникающих в результате научно-прикладных исследований на мировом уровне, очень часто сводятся к задачам спектральной теории линейных самосопряженных операторов. Спектральная теория операторов Шредингера является основным объектом исследования в таких сферах как математическая физика, квантовая механика и статистическая физика. Исследование спектра дискретных операторов Шредингера, развивается как новое направление в теории операторов Шредингера. Дискретный оператор Шредигнера, соответствующий многочастичным квантовым системам тесно связан со свойством линейных самосопряженных частично интегральных операторов типа Фредгольма, так как импульсное представление дискретных операторов Шредингера является частично интегральным оператором типа Фредгольма. Поэтому исследование спектральных свойств линейных самосопряженных частично интегральных операторов является одной из важных задач как в теории операторов Шредингера, так и в общей теории интегральных операторов. В настоящее время в мире актуальными проблемами дискретного оператора Шредингера многочастичной системы на решетке, представляемой в виде частично интегрального оператора (ЧИО) типа Фредгольма, являются исследование структуры существенного спектра, определение нижней грани существенного спектра, исследование конечности и бесконечности количества собственных значений в дискретном спектре. В связи с этим, анализ местоположения и структуры существенного спектра, определение нижней грани существенного спектра, исследование существования и количества собственных значений дискретного спектра является актуальным направлением в спектральной теории операторов.

В нашей стране уделяется особое внимание актуальным аспектам статистической физики и квантовой механики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В том числе, особое внимание уделяется изучению задач спектральной теории операторов Шредингера. Значительные результаты здесь были достигнуты в отношении задач, в которых импульсные представления дискретных операторов Шредингера представляются как линейные ограниченные самосопряженные частично интегральные операторы в гильбертовом пространстве L_2.

Проведение научных исследований на международном уровне по таким важным направлениям как функциональный анализ, математическая физика, квантовая механика и статистическая физика рассматриваются как основная задача фундаментальных исследований[1]. Проведение исследований по существенным и дискретным спектрам частично интегральных операторов типа Фредгольма играют важную роль при исполнении этого постановления.

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № УП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Один из важных вопросов в теории операторов Шредингера – описание существенного спектра и изучение количества собственных значений (связанных состояний), лежащих вне существенного спектра. Многие видные математики 20-го века работали в рамках данной тематики, среди них Л.М. Лихтарников, Л.З. Витова, А.С. Калитвин и П.П. Забрейко изучили спектральные свойства ЧИО типа Фредгольма, когда мультипликатор отсутствовал в модели и ядра ЧИО являются функциями от двух переменных. В монографии Ю.Аппеля, А.С. Калитвина и П.П. Забрейко исследованы свойства ЧИО в некоторых функциональных пространствах и дается ряд приложений этих исследовании.

В работе С.Альбеверио, С.Н.Лакаева и З.И.Муминова получены достаточные условия конечности и бесконечности дискретного спектра для ЧИО типа Фредгольма с мультипликатором из класса Гельдера и с вырожденным ядром соответствующим системе трех частиц на решетке. В упомянутых работах нижняя грань существенного спектра ЧИО равняется нулю и существенный спектр ЧИО совпадает со спектром мультипликатора. Затем, в работе Т.Х.Расулова доказано существование эффекта Ефимова дискретного оператора Шредингера, ассоциированного с системой из трех частиц на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ для конкретной заданной вещественно-аналитической функции в описании кинетической функции. В данной работе также нижняя грань существенного спектра ЧИО равняется нулю и существенный спектр ЧИО совпадает со спектром мультипликатора.

Самосопряженные ЧИО с ядрами функций от трех переменных были впервые изучены в работах Ю.Х. Эшкабилова. Доказана теорема о существенном и дискретном спектрах самосопряженных частично интегральных операторов типа Фредгольма. В работе Ю.Х.Эшкабилова получено достаточное условие для конечности количества собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра ЧИО типа Фредгольма, когда мультипликатор неотрицателен и ядра являются неотрицательными функциями двух переменных.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования по темам «Теория операторных алгебры и некоммутативные модули» (2015-2020 гг.) и ЁОТ–ФТЕХ-2018-154 «Меры Гиббса и спектры гамильтонианов на решетках $\mathbb{Z}^d$ и на деревьях Кэли Γ^k» Национальный университет Узбекистана (2018-2019 гг.).

Целью исследования является изучение местоположения существенного спектра и исследование дискретного спектра самосопряженного частично интегрального оператора типа Фредгольма с вырожденными ядрами.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

описать существенные спектры частично интегральных операторов с вырожденными ядрами;

исследовать структуру существенного спектра суммы частично интегральных операторов;

изучить существование дискретного спектра суммы частично интегральных операторов;

описать существенный и дискретный спектры самосопряженного частично интегрального оператора типа Фредгольма с ядрами трех переменных;

определить нижнюю границу для существенных спектров частично интегральных операторов с вырожденными ядрами;

получить верхнюю оценку для количества отрицательных собственных значений частично интегрального оператора типа Фредгольма с ядрами трех переменных.

Объектом исследования являются частично интегральные операторы в гильбертовом пространстве L_2 и теория интегральных операторов типа Фредгольма.

Предметом исследования являются спектральные свойства частично интегральных операторов типа Фредгольма, самосопряжённые операторы, операторы Шредингера, операторы в модели Фридрихса.

Методы исследования: В диссертации использованы методы функционального анализа, теории Фредгольма, принцип минимакса.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получена структура существенного спектра и доказана теорема о существовании собственного значения суммы частично интегральных операторов;

доказаны теоремы о существенном и дискретном спектрах самосопряженного частично интегрального оператора типа Фредгольма с ядрами трех переменных;

определена нижняя граница существенных спектров частично интегральных операторов с вырожденными ядрами;

получена структура существенного спектра, а также доказана теорема, оценивающая количество отрицательных собственных значений частично интегральных операторов типа Фредгольма с вырожденными ядрами.

Практические результаты исследования. Состоят в применении результатов о существенном и дискретном спектре ЧИО типа Фредгольма H с вырожденными ядрами при исследовании связанных состояний дискретных операторов Шредингера и проведении экспериментальных наблюдений в физике твердого тела.

Достоверность результатов исследования. Обоснована использованием методов функционального анализа, спектральной теории линейных операторов, теории возмущений, теории Фредгольма и принципа минимакса. Полученные результаты доказаны математически корректно.

Научная и практическая значимость результатов исследования. В работе получен ряд новых результатов по спектральной теории самосопряжённых частично интегральных операторов типа Фредгольма с вырожденными ядрами в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Результаты и методы, представленные в работе, могут быть использованы при исследовании спектральных свойств линейных операторов, гамильтонианов в квантовой механике, теории операторов Шредингера, а также при изучение разрешимости уравнений в задачах математической физики и механики.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты для существенного и дискретного спектра частично интегрального оператора типа Фредгольма с вырожденным ядром были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты о существовании конечного числа собственных значений для самосопряжённых частичных интегральных операторов, а также существенные и дискретные спектры самосопряженных частных интегральных операторов типа Фредгольма с тремя переменными ядрами, использованы в рамках проекта ЁОТ–ФТЕХ–2О18–154, при изучении задач о количестве собственных значений для самосопряжённых частичных интегральных операторов, а также при нахождении собственных значений лежащих ниже нижней грани существенного спектра дискретного оператора Шредингера и существенного спектра частично интегрального оператора с вырожденным ядром (Справка № 89-03-1923, Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, от 05.06.2020 г.). Применение научного результата позволило решить такие задачи, что количество собственных значений частичных интегральных операторов типа Фредгольма с вырожденным ядром не более чем один, об описании структуры существенного спектра частных интегральных операторов типа

Фредгольма, а также и для доказательства не пустоты дискретного спектра таких операторов.

Результаты о структуре существенного спектра самосопряженного частично интегрального оператора типа Фредгольма с вырожденным ядром были использованы в рамках проекта MRU– OT–1/2017 для нахождения решений нелокальных задач для уравнений с производными высшего, в частности для структурных уравнений с частными производными третьего порядка (Справка № 89-03-1923, Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, от 05.06.2020 г.). Полученные научные результаты применены для изучения свойств решений нелокальных задач для структурных уравнений с частными производными третьего порядка и с помощью этих результатов решены оптимальные граничные условия псевдодифференциальных уравнений в фундаментальном проекте.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 2 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов. По теме диссертации опубликовано 5 научных работ, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии по физико-математическом науке, в том числе 2 из них опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 82 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **«Частично интегральные операторы типа Фредгольма»** содержит необходимые сведения о спектральных свойствах частично интегральных операторов типа Фредгольма. Даны свойства собственных значений частично интегральных операторов и дано теоремы об описание их спектров. Приведены теоремы о существенных и дискретных спектрах самосопряжённых ЧИО типа Фредгольма.

Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{\nu_1}$, и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{\nu_2}$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ – компактные множества с положительными лебеговыми мерами $\mu_1(\Omega_1)$ и $\mu_2(\Omega_2)$. В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим ограниченный самосопряженный оператор H, действующий по формуле:

$$H = H_0 - (T_1 + T_2) \tag{1}$$

где операторы H_0, T_1 и T_2 определены, соответственно, равенствами:

$$H_0 f(x,y) = k_0(x,y) f(x,y), \quad f(x,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s), \;\; f(s,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \tag{2}$$

$$T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t), \;\; f(x,t) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2), \tag{3}$$

$k_0(x,y)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$ $k_1(x,s,y)$ и $k_2(x,t,y)$ – непрерывные функции на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ и $\Omega_1 \times \Omega_2^2$ соответственно, и предполагается выполнение условий: $k_1(x,s,y) = \overline{k_1(s,x,y)}$, $k_2(x,t,y) = \overline{k_2(x,y,t)}$. Здесь интегралы понимаются в смысле Лебега. Оператор вида (1) называется частично интегральным оператором типа Фредгольма. Нетрудно проверить, что ЧИО H (1) является самосопряжённым линейным оператором в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

В параграфе 1.1 даны свойства собственных значений ЧИОв T_1 и T_2, и дано описание их спектров.

Предложение 1. Всякое собственное значение λ ЧИО T_1 (ЧИО T_2) является бесконечнократным.

Предложение 2. Число нуль принадлежит существенному спектру оператора T_1 (оператора T_2).

Обозначать через $s(T_1)$ множество всех сингулярных чисел ЧИО T_1.

Теорема 1. Если ядро $k_1(x,s,y)$ ЧИО T_1 непрерывно на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$, то $\sigma(T_1) = \{0\} \cup s(T_1)^{-1}$.

В параграфе 1.2 приведены теоремы о существенном и дискретном спектрах самосопряжённого ЧИО $T = T_1 + T_2$.

Через $r\left(T_1\right)$ и $r\left(T_2\right)$ обозначим множества всех регулярных значений операторов T_1 и T_2 соответственно.

Введем обозначения $D(T) = \{\tau \in r(T_1) \cap r(T_2) : \Delta_1(\tau) = 0\}$.

Теорема 2. Для спектра ЧИО T справедлива формула

$$\sigma(T_1 + T_2) = \sigma(T_1) \cup \sigma(T_2) \cup D(T)^{-1}.$$

Теорема 3. Дискретный спектр ЧИО $T_1 + T_2$ совпадает с множеством $D(T)^{-1}$, т.е. $\sigma_{disc}(T_1 + T_2) = D(T)^{-1}$.

В параграфе 1.3 приведены уже известные результаты о существенных и дискретных спектрах самосопряжённых ЧИО вида $H = H_0 - T$.

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим следующие операторы

$$W_1 = H_0 - T_1 \text{ и } W_2 = H_0 - T_2 .$$

Очевидно, что $\sigma_0 = Ran(k_0) = \sigma(H_0)$, где $Ran(k_0)$ область значений функции $k_0(x,y)$.

Для каждого $\lambda \in \rho(H_0)$ определим ЧИО $B_1(\lambda)$ и $B_2(\lambda)$, действующие в $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ по формулам:

$$B_1(\lambda) f(x,y) = \int_{\Omega_1} \frac{k_1(x,s,y)}{k_0(s,y)-\lambda} f(s,y) d\mu_1(s), \; f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$B_2(\lambda) f(x,y) = \int_{\Omega_2} \frac{k_2(x,t,y)}{k_0(x,t)-\lambda} f(x,t) d\mu_2(t), \; f \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2).$$

Пусть $\tilde{D}_1(y;\lambda)$ и $\tilde{D}_2(x;\lambda)$ детерминанты операторов $E - B_1(\lambda)$ и $E - B_2(\lambda)$ соответственно.

Определим множества

$$\sigma_1 = \sigma_1(W_1) = \{\lambda \in \rho(H_0): \; \tilde{D}_1(y_0;\lambda) = 0 \; \text{ для некоторого } y_0 \in \Omega_2\},$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(W_2) = \{\lambda \in \rho(H_0): \; \tilde{D}_2(x_0;\lambda) = 0 \; \text{ для некоторого } x_0 \in \Omega_1\}.$$

Теорема 4. Спектр оператора W_1 состоит из объединения множеств σ_0 и σ_1, т. е. $\sigma(W_1) = \sigma_0 \cup \sigma_1$.

Положим, $D_0(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2) : \Delta(\lambda) = 0\}$.

Теорема 5. Для спектра ЧИО H имеет место равенство

$$\sigma(H) = \sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup D_0(H).$$

Теорема 6. Дискретный спектр оператора H совпадает с множеством $D_0(H)$, т.е.

$$\sigma_{disc}(H) = D_0(H) = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2) : \Delta(\lambda) = 0\}.$$

Пусть $\Omega_1 = [a,b]^{\nu_1}$ и $\Omega_2 = [c,d]^{\nu_2}$. В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим следующий самосопряженный частично интегральный оператор типа Фредгольма с вырожденным ядром:

$$H = H_0 - (T_1 + T_2) . \tag{4}$$

Здесь действия операторов H_0, T_1 и T_2 определяются по формулам

$$H_0 f(x,y) = k_0(x,y) f(x,y), \quad f(x,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} \varphi_1(x)\overline{\varphi_1(s)}\varphi(y) f(s,y) d\mu_1(s), \quad f(s,y) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2),$$

$$T_2 f(x,y)=\int_{\Omega_1}\psi(x)\overline{\varphi_2(t)}\varphi_2(y)f(x,t)d\mu_2(t),\quad f(x,t)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2).$$

где $k_0(x,y)$ – неотрицательная непрерывная функция на $\Omega_1\times\Omega_2$, $\psi(x)$ и $\varphi(y)$ непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2 соответственно, функция $\varphi_j(\cdot)$ – непрерывная на Ω_j,

$$\int_{\Omega_j}\left|\varphi_j(\xi)\right|^2 d\mu_j(\xi)=1,$$

и $\mu_j(\cdot)$ – мера Лебега на Ω_j, $j=1,2$.

Самосопряженный ЧИО вида (4) часто возникает в теории двух и трехчастичных дискретных операторов Шредингера.

Диссертационная работа посвящена изучению существенного и дискретного спектров ЧИО типа Фредгольма H (1) с вырожденным ядром в случае

$$k_0(x,y)=u(x)\cdot v(y),$$

где $u(x)$ и $v(y)$–неотрицательные непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2, соответственно, и удовлетворяющие следующие свойства

$$u(x^{\min})=0,\ \ x^{\min}\in\Omega_1,\ \ v(y^{\min})=0,\ \ y^{\min}\in\Omega_2.$$

В диссертации, также исследован спектр гамильтониана (4), как модельный оператор в теории операторов Шредингера.

Вторая глава диссертации, названная **«Спектры частично интегрального оператора T_1+T_2 с вырожденными ядрами»** посвящена исследованию структуры существенного спектра и существование дискретного спектра самосопряженных ЧИО типа Фредгольма $T=T_1+T_2$ с вырожденными ядрами.

Пусть $\varphi(x)\in L_2(\Omega_1)$, $\|\varphi(x)\|=1$, $\psi(y)\in L_2(\Omega_2)$, $\|\psi(y)\|=1$ и $\beta(x)\in C(\Omega_1)$, $\alpha(y)\in C(\Omega_2)$.

В параграфе 2.1 изучен существенный спектр ЧИО $T=T_1+T_2$, в случае $k_1(x,s,y)=\varphi(x)\overline{\varphi(s)}\alpha(y)$, $k_2(x,t,y)=\beta(x)\overline{\psi(t)}\psi(y)$ и доказана теорема существования собственного значения ЧИО $T=T_1+T_2$ с ядрами трех переменных.

Предположим, что $\alpha(y)\geq 0,\ y\in\Omega_2$ и $\beta(x)\geq 0,\ x\in\Omega_1$. Определим функции $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ на множестве $\Pi_1=\mathbb{R}\setminus Ran\big(\beta(x)\big)$ и $\Pi_2=\mathbb{R}\setminus Ran\big(\alpha(y)\big)$ соответственно:

$$F_1(\lambda)=\int_{\Omega_1}\frac{\beta(s)\left|\varphi(s)\right|^2 ds}{\lambda-\beta(s)},\qquad F_2(\lambda)=\int_{\Omega_1}\frac{\alpha(t)\left|\psi(t)\right|^2 dt}{\lambda-\alpha(t)}.$$

Из монотонности функций $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ следует существование предела:

$$I_0 = \lim_{\lambda \to \beta_{\max}+0} F_1(\lambda) \cdot \lim_{\lambda \to \beta_{\max}+0} F_2(\lambda) > 0 .$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 7. Для существенного спектра ЧИО T имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(T) = \{0\} \cup \operatorname{Ran}\big(\alpha(y)\big) \cup \operatorname{Ran}\big(\beta(x)\big) .$$

В следующей теореме получены достаточные условия существования собственного значения для оператора T.

Теорема 8. а) если $I_0 > 1$, то дискретный спектр оператора T состоит из единственного собственного значения λ_0 и при этом $\lambda_0 > \beta_{\max}$ и λ_0 является простым собственным значением оператора T;

б) если $I_0 \le 1$, то вне существенного спектра оператора T отсутствует собственное значение.

Следствие 1. Пусть $\beta(x) \equiv \beta_0 = const > 0$ и $\alpha(y) \equiv \alpha_0 = const > 0$. Тогда дискретный спектр оператора T состоит из единственного собственного значения $\lambda_0 = \alpha_0 + \beta_0$.

В параграфе 2.2 исследованы спектральные свойства ЧИО T_1 и T_2 с вырожденными ядрами.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$ и $\{\psi_j(y)\}_{j=1}^{m}$ ортонормированная система функции из $L_2[a,b]$ и $L_2[c,d]$ соответственно и пусть $\{h_k(y)\}_{k=1}^{n}$ и $\{p_j(x)\}_{j=1}^{m}$ система существенно ограниченных вещественных функций на $[c,d]$ и $[a,b]$ соответственно.

Определим измеримую функции $k_1(x,s,y)$ на $[a,b]^2 \times [c,d]$ и $k_2(x,t,y)$ на $[a,b] \times [c,d]^2$ с помощью следующего правила:

$$k_1(x,s,y) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)} h_k(y) \qquad \text{и} \qquad k_2(x,t,y) = \sum_{j=1}^{m} p_j(x)\overline{\psi_j(t)}\psi_j(y).$$

Тогда ЧИО T_1 с ядром $k_1(x,s,y)$ и T_2 с ядром $k_2(x,t,y)$ является самосопряженным ограниченным линейным оператором на $L_2([a,b]\times[c,d])$.

Для измеримой функции φ на множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{\nu}$ число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется существенным значением функции φ, если

$$\mu(\{\xi \in \Omega : \lambda - \varepsilon < \varphi(\xi) < \lambda + \varepsilon\}) > 0 \;\; \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

Обозначим через $Essran(\varphi)$ множество всех существенных значений функция φ.

Доказана следующая теорема для спектров оператора T_1.

Теорема 9. Для спектра ЧИО T_1 с вырожденным ядром k_1 справедлива следующая формула

$$\sigma(T_1)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n} Essran\big(h_k(y)\big)\right).$$

Аналогично теорема даказана для ЧИО T_2.

Предложение 3. а) Нуль является собственным значением T_1 бесконечной кратности.

б) Число $\lambda_0 \neq 0$ является собственным значением T_1 тогда и только тогда, когда существует $1\leq j_0 \leq n$ такой, что $\mu_2(h_{j_0}^{-1}(\lambda_0))>0$.

Предложение 4. Любое собственное значение ЧИО T_1 бесконечно кратное.

Следствие 2. Если каждая функция h_k, $k\in\{1,...,n\}$ непрерывна и строго монотонна на $[c,d]$ то у ЧИО T_1 отсутствует собственное значение, отличное от нуля.

В параграфе 2.3 приведены теоремы о существенном и дискретном спектре частично интегрального оператора типа Фредгольма $T=T_1+T_2$ с вырожденными ядрами.

Пусть $\tau\neq 0$ и $\tau^{-1}\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)$. Обозначим через $\Delta_1(\tau)$ и $\Delta_2(\tau)$ определители Фредгольма операторов $E-\tau^2W_1(\tau)$ и $E-\tau^2W_2(\tau)$ соответственно. Определим, в $\mathbb{C}$ следующие подмножества

$$\mathfrak{D}_k=\left\{\tau=\mathbb{C}\setminus\{0\}:\tau^{-1}\in\rho(T_1)\cap\rho(T_2)\ \text{ и }\ \Delta_k(\tau)=0\right\},\qquad k=1,2.$$

Имеем $\mathfrak{D}_1=\mathfrak{D}_2$. Положим, $\mathfrak{D}(T)=\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_0(T)=\left\{\xi:\xi=\dfrac{1}{\tau},\ \ \tau\in\mathfrak{D}(T)\right\}$.

Получены следующие результаты для ЧИО T_1+T_2.

Теорема 10. Справедливы следующие равенства:

(i) $\sigma_{ess}(T_1+T_2)=\{0\}\cup\left(\bigcup_{k=1}^{n} Essran\big(h_k(y)\big)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m} Essran\big(p_j(x)\big)\right);$

(ii) $\sigma_{disc}(T_1+T_2)=\mathfrak{D}_0(T).$

В третьей главе диссертации, названной **«Существенный и дискретный спектры частично интегрального операторова $H_0-\left(T_1+T_2\right)$»**, изучены существенный и дискретный спектры самосопряжённых частично интегральных операторов типа Фредгольма с вырожденными ядрами.

В параграфе 3.1 изучен существенный спектр ЧИО $W=H_0-(T_1+T_2)$ в случае $k_0(x,y)=u(x)\cdot v(y)$, $k_1(x,s,y)=\varphi(y)$, $k_2(x,t,y)=\psi(x)$ где $u(x)$, $v(y)$ и $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ – неотрицательные непрерывные функции. Доказана теорема о существенном и дискретном спектрах оператора W.

Определим неположительные и непрерывные функции на Ω_j:

$$\pi_j(\zeta)=\inf_{\|h\|=1}\big(H_k(\zeta)h,h\big),\ \ \zeta\in\Omega_j,\ \ j\neq k,\ \ j=1,2,\ \ k=1,2,$$

где операторы $H_1(\xi)$ и $H_2(\eta)$ (самосопряженных операторов в модели Фридрихса) заданы в пространстве $L_2(\Omega_j)$, следующими равенствами

$$H_1(\xi)h(x) = v(\xi)u(x)h(x) - \varphi(\xi)\int_{\Omega_1} h(s)ds\,,$$
$$H_2(\eta)g(y) = u(\eta)v(y)g(y) - \psi(\eta)\int_{\Omega_2} g(t)dt.$$

Обозначим через

$$u_{\max} = \max_{x\in\Omega_1} u(x),\ \ v_{\max} = \max_{y\in\Omega_2} v(y),\ \ \pi_j^{\max} = \max_{\zeta\in\Omega_k} \pi_j(\zeta),\quad j \ne k,\quad j = 1,2,\quad k = 1,2.$$

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим самосопряженные операторы:

$$W_1 = H_0 - T_1 \quad \text{и} \quad W_2 = H_0 - T_2\,.$$

Теорема 11. Справедливы следующие равенства:

а) $\sigma_{ess}(W_1) = [-\varphi_{\max}, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}]$;

б) $\sigma_{ess}(W_2) = [-\psi_{\max}, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}]$.

На множествах $\Omega_2 \setminus \{y^{\min}\}$ и $\Omega_1 \setminus \{x^{\min}\}$ определим функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ следующим образом:

$$f_1(y) = 1 - \varphi(y)\Phi_1(y), \quad \text{где} \quad \Phi_1(y) = \lim_{\lambda\to 0-} \int_{\Omega_1} \frac{ds}{v(y)u(s) - \lambda},$$
$$f_2(x) = 1 - \psi(x)\Phi_2(x), \quad \text{где} \quad \Phi_2(x) = \lim_{\lambda\to 0-} \int_{\Omega_2} \frac{dt}{u(x)v(t) - \lambda}.$$

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая теорема.

Теорема 12.

а) если $f_1^{\max} < 0$ и $f_2^{\max} < 0$, то

$$\sigma_{ess}(W) = [-\varphi_{\max}, \pi_1^{\max}] \cup [-\psi_{\max}, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}];$$

б) если $f_1^{\max} < 0$ и $f_2^{\max} \ge 0$, то

$$\sigma_{ess}(W) = [-\varphi_{\max}, \pi_1^{\max}] \cup [-\psi_{\max}, u_{\max} \cdot v_{\max}];$$

в) если $f_1^{\max} \ge 0$ и $f_2^{\max} < 0$, то

$$\sigma_{ess}(W) = [-\psi_{\max}, \pi_2^{\max}] \cup [-\varphi_{\max}, u_{\max} \cdot v_{\max}];$$

г) если $f_1^{\max} \ge 0$ и $f_2^{\max} \ge 0$, то

$$\sigma_{ess}(W) = [-\max\{\varphi_{\max}, \psi_{\max}\}, u_{\max} \cdot v_{\max}].$$

Во втором параграфе получено достаточное условие для существования собственного значения и получена оценка для количества отрицательных собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра частично интегрального оператора типа Фредгольма W.

Обозначим, $$\xi_0 = \int_{\Omega_1} u(x)dx \cdot \int_{\Omega_2} v(y)dy.$$

Теорема 13. Пусть, выполняется $\varphi_{\max} \geq \psi_{\max}$ $\left(\varphi_{\max} \leq \psi_{\max}\right)$.

Если $\xi_0 < \psi_{\min} + (\varphi_{\min} - \varphi_{\max})$ $\left(\xi_0 < \varphi_{\min} + (\psi_{\min} - \psi_{\max})\right)$, то оператор W имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева от нижней грани существенного спектра.

Обозначим через $N_0(H)$ – количество всех собственных значений (с учетом кратности) лежащих ниже нижней грани существенного спектра ЧИО H типа Фредгольма т.е.

$$N_0(H) = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_{disc}(H) \\ \lambda < E_{\min}(H)}} n_H(\lambda),$$

где $n_H(\lambda)$ – кратность собственного значения λ оператора H.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 14. Количество собственных значений орератора W, лежащих ниже нижней грани существенного спектра, не более чем одно, т.е. $N_0(W) \leq 1$.

В параграфе 3.3 доказана теорема о структуре существенного спектра частично интегрального оператора H (1) с ядрами трех переменных.

Пусть $\{\varphi_k(x),\ k = \overline{1,n}\}$ и $\{\psi_j(y),\ j = \overline{1,m}\}$ – ортонормированная система непрерывных функций из $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$ соответственно.

Определим ядра $k_1(x,s,y),\ k_2(x,t,y)$:

$$k_1(x,s,y) = \varphi(y)q_1(x,s), \quad k_2(x,t,y) = \psi(x)q_2(y,t),$$

здесь, $q_1(x,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)\overline{\varphi_k(s)}, \quad q_2(y,t) = \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j(y)\overline{\psi_j(t)},$ где $a_k > 0,\ b_j > 0.$

Положим, $a_{\max} = \max\{a_1,...,a_n\}, \qquad b_{\max} = \max\{b_1,...,b_m\}.$

В гильбертовом пространстве $L_2\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right)$ определим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{5}$$

здесь действия операторов H_0, T_1 и T_2 заданы по формулам

$$H_0 f(x,y) = u(x)v(y) f(x,y),$$

$$T_1 f(x,y) = \int_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s), \qquad T_2 f(x,y) = \int_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t).$$

В следующей теореме получено полное описание существенного спектра оператора H.

Теорема 15. Для существенного спектра оператора H (5) имеет место равенство

$$\sigma_{ess}(H) = \left[-\varphi_{\max} \cdot a_{\max}, \pi_1^{\max}\right] \cup \left[-\psi_{\max} \cdot b_{\max}, \pi_2^{\max}\right] \cup \left[0, u_{\max} \cdot v_{\max}\right].$$

В параграфе 3.4 получено достаточное условие для существования собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра ЧИО H. Получена верхняя оценка для количества отрицательных собственных значений.

Определим матрицу Λ порядка $m \times n$ с положительными элементами

$$\xi_{i,j}: \ \ \xi_{i,j} = \int_{\Omega_1} u(x)\left|\varphi_i(x)\right|^2 dx \cdot \int_{\Omega_2} v(y)\left|\psi_j(y)\right|^2 dy.$$

Теорема 16. а) Пусть $\varphi_{\max} \cdot a_{\max} \geq \psi_{\max} \cdot b_{\max}$. Если для некоторого элемента $\xi_{i,j}$ матрицы Λ выполнено условие

$$\xi_{i,j} < \psi_{\min} \cdot b_j + \left(\varphi_{\min} \cdot a_i - \varphi_{\max} \cdot a_{\max}\right),$$

то оператор H (5) имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева от нижней грани существенного спектра.

б) Пусть $\varphi_{\max} \cdot a_{\max} \leq \psi_{\max} \cdot b_{\max}$. Если для некоторого элемента $\xi_{i,j}$ матрицы Λ выполнено условие

$$\xi_{i,j} < \varphi_{\min} \cdot a_i + \left(\psi_{\min} \cdot b_j - \psi_{\max} \cdot b_{\max}\right),$$

то оператор H (5) имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева от нижней грани существенного спектра.

Теорема 17. Количество собственных значений в модели (5), лежащих ниже нижней грани существенного спектра не более чем $n \cdot m.$, т.е. $N_0(H) \leq n \cdot m.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению существенных и дискретных спектров самосопряженных ЧИО типа Фредгольма с вырожденным ядром.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Исследованы структуры спектров частично интегральных операторов T_1 и T_2 с вырожденными ядрами;

2. Получено достаточное условие для существования собственных значений ЧИОв типа Фредгольма $T_1 + T_2$ с вырожденными ядрами;

3. Доказана теорема о структуре существенных спектров самосопряженных частично интегральных операторов типа Фредгольма с вырожденными ядрами;

4. Получена оценка для количества отрицательных собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра

самосопряженных частично интегральных операторов типа Фредгольма с ядрами трех переменных;

5. Получены достаточные условия для существования собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра в ЧИО с вырожденными ядрами;

6. Доказано, что количество отрицательных собственных значений лежащих ниже нижнего края существенного спектра самосопряженных частично интегральных операторов типа Фредгольма с вырожденными ядрами не более, чем $n \cdot m$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.2/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

ARZIKULOV GOLIBJON PARDAYEVICH

SPECTRAL PROPERTIES OF PARTIAL INTEGRAL OPERATORS WITH THREE VARIABLES KERNELS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM204.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz/ and in the website «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Eshkabilov Yusup Khalbaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Jamilov Uygun Umurovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Muminov Zahriddin Eshkobilovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urgench State University**

Defense will take place «23» october 2020 at 9:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy. (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 262-75-44, fax: (+99871) 262-73-57, e-mail: kengash@mathinst.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered № 107) (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871) 262-75-44.)

Abstract of dissertation sent out on «16» october 2020 year
(Mailing report № 2 on «16» october 2020 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI FANLAR AKADEMIYASI V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, PhD,
senior researcher

U. U.Jamilov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.Sc

INTRODUCTON (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is the study of the location and structure of the essential and discrete spectra of a self-adjoint partially integral operator (PIO) of Fredholm type with a degenerate kernel.

The object of the research work are partially integral operators in a Hilbert space L_2 and the theory of integral operators of Fredholm type.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the structure of the essential spectrum is obtained and the existence theorem for the eigenvalue of the sum of partially integral operators is proved;

theorems on the essential and discrete spectra of a self-adjoint partially integral operator of Fredholm type with kernels of three variables are proved;

the lower bound of the essential spectra of partially integral operators with degenerate kernels is determined;

the structure of the essential spectrum is obtained, and also a theorem is proved that estimates the number of negative eigenvalues of partially integral operators of Fredholm type with degenerate kernels;

Implementation of the research results. The results obtained for the essential and discrete spectrum of a partially integral operator of Fredholm type with a degenerate kernel were used in the following research projects:

The results on the existence of a finite number of eigenvalues for self-adjoint partial integral operators, as well as essential and discrete spectra of self-adjoint partial integral operators of Fredholm type with three variable kernels, were used within the framework of the grant ЁОТ–ФТЕХ–2О18–154 when studying the number of eigenvalues lying below the lower faces of the essential spectrum of a discrete Schrödinger operator and the essential spectrum of a partially integral operator with degenerate kernel (Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan on 05.06.2020). The application of the scientific result made it possible to solve the problem of describing the structure of the essential spectrum of partial integral operators of Fredholm type, as well as the number of eigenvalues of partial integral operators of Fredholm type with a degenerate kernel at most one, and to prove that the discrete spectrum of such operators is not empty.

The results on the structure of the essential spectrum of a self-adjoint partially integral operator of Fredholm type with a degenerate kernel were used in the framework of the MRU–OT–1/2017 grant to study the solution in partial derivatives of higher orders, in particular, nonlocal structure equations in partial derivatives of the third order(Reference Ministry of the higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan on 05.06.2020). The obtained scientific results are applied to study the properties of solutions of nonlocal structural partial differential equations of the third order and, using these results, the optimal boundary conditions of pseudodifferential equations in the fundamental project are solved

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 82 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Арзикулов Г. П., Существование собственного значения ЧИОв с ядрами трех переменных // Вестник НУУЗ. – 2013. № 4/1. стр. 157-161. (01.00.00; № 8).

2. Арзикулов Г. П., Жабборов Д. Т., О существенном спектре одного частично интегрального оператора типа Фредгольма // Вестник НУУз. – 2014. № 2/1. стр. 70-77. (01.00.00; № 8).

3. G. P. Arzikulov and Yu. K. Eshkabilov., On the essential and the discrete spectra of a Fredholm type partial integral operator // Siberian Advances in Mathematics. – 2015. Vol. 25, No. 4, pp. 231-242. (40. ResearchGate IF: 0.29).

4. Eshkabilov Yu. Kh. and Arzikulov G. P., On the spectra of partial integral operators // Uzbek Mathematical Journal. – 2015. № 2. pp. 148-159. (01.00.00; №6).

5. Арзикулов Г. П., Эшкабилов Ю. Х., О спектральных свойствах одного трехчастичного модельного оператора // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2020. том №5. стр. 3-10. (3. Scopus IF: 0.388).

II бўлим (II часть; part II)

6. Эшкабилов Ю. Х., Арзикулов Г. П., Спектр частных интегральных операторов с вырожденным ядром // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». Ташкент, 12–14 сентября 2012 года. стр. 259-261.

7. Арзикулов Г. П., О собственном значении ЧИО с ядрами трех переменных // Республиканской научной конференции. «Актуальные вопросы комплексного анализа». Ташкент, 19-21 сентября 2013 года. стр. 50-52.

8. Eshkabilov Yu. X., Arzikulov G. P., Spectrum of partial integral operators with degenerate kernels. // Международной конференции «Проблемы современной топологии и ее приложения». Ташкент, 20-24 май 2013 года. стр. 36-37.

9. Г. П. Арзикулов, Ю. Х. Эшкабилов., О спектральных свойствах одного трехчастичного модельного оператора // Труды математического центра имени Н.И.Лобачевского. Материалы четырнадцатой международной Казанской научной школы конференции. «Теории функций, ее приложения и смежные вопросы». Казань, 7-12 сентября, 2019 года. стр. 36-39.