ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НУРАЛИЕВ ФАРХОД АБДУҒАНИЕВИЧ

СОБОЛЕВ ФАЗОСИДА ЭРМИТ ТИПИДАГИ ОПТИМАЛ ПАНЖАРАЛИ КУБАТУР ВА ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

УДК: 519.652, 519.644

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of the doctoral (DSc) dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

НУРАЛИЕВ ФАРХОД АБДУҒАНИЕВИЧ

СОБОЛЕВ ФАЗОСИДА ЭРМИТ ТИПИДАГИ ОПТИМАЛ ПАНЖАРАЛИ КУБАТУР ВА ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020

Фан доктори (Doctor of Science) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.3.DSc/FM87 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертация Ўзбекистон Республикаси фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» ахборот таълим тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Бакоев Матёкуб Тешаевич физика-математика фанлари доктори, профессор
	Аллаков Исмоил физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Қарақалпоқ давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_________ 2020 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (87 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» ноябрь куни тарқатилди.
(2020 йил 3 ноябрдаги 20 рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Р.Д.Алоев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида оптимал квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларга бағишланган изланишлар долзарб ва муҳим бўлиб, илм-фаннинг кўплаб соҳаларида кенг татбиққа эгадир. Интегралларни тақрибий ҳисоблаш ва функционалларни яқинлаштириш методлари интеграл ва дифференциал тенгламаларни сонли ечиш алгоритмларининг асосини ташкил қилади. Ҳисоблаш математикасининг асосий мақсади бу математик масалаларни ечишнинг энг яхши, тез ва арзон усулларини яратиш ҳамда ҳисоблаш алгоритмларини оптималлаштиришдир. Бу жараён турли фазоларда квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар мисолида яхши намоён бўлади. Шунинг учун оптимал квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларни қуриш ҳисоблаш математикасининг долзарб вазифаларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда Соболев фазоларида интегралларни тақрибий ҳисоблаш ва функцияларни яқинлаштириш учун оптимал кубатур, интерполяцион формулалар ва сплайнлар қуриш муҳим аҳамият касб этади. Олинган формулалар табиий жараёнлар учун катта аниқликдаги математик моделлар сифатида қаралади. Шунинг учун қуйидаги йўналишлар бўйича мақсадли илмий изланишларни амалга ошириш бош масалалардан бири ҳисобланади: асимптотик оптимал ва тартиб бўйича оптимал кубатур формулалар қуриш; эҳтимоллар назарияси усулларига асосланган кубатур формулалар ишлаб чиқиш; оптимал кубатур, интерполяцион формулалар қуриш ва уларнинг хатоликларини баҳолаш; турли гильберт ва банах фазоларида натурал сплайнларни қуриш. Бу соҳаларда олиб борилаётган илмий изланишлар диссертация тадқиқотининг муҳимлигини изоҳлайди.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган квадратур ва интерполяцион формулаларни ўрганишни кучайтиришга катта эътибор қаратилмоқда, хусусан, Эрмит типидаги янги оптимал квадратур формулалар ва интерполяцион сплайнлар қуришга алоҳида эътибор қаратилди. Бу борада ҳисоблаш математикаси йўналишида олиб борилаётган илмий изланишлар ҳам дифференциал тенгламалар назарияси, математик ва функционал анализ, алгебра, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика ҳамда математик моделлаштиришдек устувор йўналишлар бўйича ҳалкаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади[1]. Қарор ижросини таъминлаш мақсадида Эрмит типидаги квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар куриш ва тадқиқ этиш муҳим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги №292 «Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947 «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича харакатлар стратегияси тўғрисидаги» Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789 «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909 «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682 «Иннавацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2019 йил 9 июлдаги №ПҚ-4387 “Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида” ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив –ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. “Математика, механика ва информатика” устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи. Кубатур ва интерполяцион формулалар ва уларнинг хатоликларини баҳолаш бўйича илмий изланишлар дунёнинг етакчи илмий марказлари ва олий ўқув юртлари, жумладан, Россия фанлар акдемияси Сибирь бўлими С.Л. Соболев номидаги Математика институти (Россия), Россия фанлар акдемияси Сибирь бўлими Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти (Россия), Россия фанлар Академиясининг Н.В. Келдыш номидаги Амалий математика институти (Россия), Россия фанлар акдемияси В.Л.Стеклов номидаги Математика институти (Россия), Россия фанлар акдемияси Г.И.Марчук номидаги Ҳисоблаш математикаси институти (Россия), Москва, Санкт-Петербург, Новосибирск давлат университетлари ва Сибирь федерал университети (Россия), Уфа илмий марказининг ҳисоблаш марказли Математика институти (Россия), Babeş-Bolyai University (Руминия), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Сербия), Katholieke Universiteit (Бельгия), Korean Institute of Science and Technology (Жанубий Корея), University of Meryland, Kettering University, Columbia University, Harvard University, Purdue University, Venderbild University (АҚШ), University of Oslo (Норвегия), Universidad de Zaragoza, Universidad Pública de Navarra, University of Satiago de Compostela (Испания), Technische Universität Braunschweig (Германия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Италия), Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (Франция) да олиб борилмоқда.

Дунё миқёсида квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар бўйича илмий изланишлар доирасида қуйидаги муҳим натижалар олинди: биринчи тартибли ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи функциялар фазосида (АҚШ) ва иккинчи тартибли ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи функциялар фазосида (Руминия) бир-биридан тенг масофада жойлашган тугун нуқтали оптимал квадратур формулалар қурилган; иккинчи тартибли ҳосиласи квадрати билан йиғилувчи функциялар фазосида Эрмит типидаги оптимал квадратур формулалар қурилган (Руминия); Соболевнинг вазнли фазоларида Квази Монте-Карло ва Монте-Карло методлари асосида қурилган оптимал кубатур формуланинг хатолиги баҳолари олинган (Institute of mathematics of Jena University (Германия), Columbia University (АҚШ)); φ - функциялар ва сплайн функциялар методлари асосида турли гильберт фазоларида Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қурилган (Columbia University, University of Maryland, University of Wisconsin-Madison (АҚШ)), Technische Universität Braunschweig (Германия), Babeş-Bolyai University (Руминия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza (Италия)); функционал анализ методларини қўллаб турли гильберт фазоларида D^m - сплайнлар, L - сплайнлар ва абстракт сплайнларнинг мавжудлик ва ягоналиги исботланган ва уларни қуриш назарияси ишлаб чиқилган (University of Wisconsin-Madison, Harvard University, Purdue University, Vanderbilt University (АҚШ), University of Oslo (Норвегия), Université Joseph Fourier (Франция), Ҳисоблаш математикаси ва математик геофизика институти (Россия)); регуляр ва кучли тебранувчи интеграллар учун Гаусс типидаги квадратур формулалар қурилган (Mathematical institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts); $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ фазосида панжарали оптимал кубатур формуланинг коэффициентлари учун Винер-Хопф типидаги система олинган ва бу система ечими мавжудлиги ва ягоналиги исботланган (Россия фанлар Акдемияси Сибирь бўлими С.Л.Соболев номидаги Математика институти, Новосибирск давлат университети (Россия), ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти.

Бугунги кунда ҳисоблаш математикасининг қуйидаги устувор йўналишларида илмий изланишлар олиб борилмоқда: квадратур, кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнлар қуриш; қурилган формулаларнинг хатоликларини баҳолаш ва уларни турли муҳим амалий масалаларга қўллаш, аниқ гильберт фазоларида Эрмит типидаги оптимал квадратур, кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнларнинг экстремал функцияларини топиш; топилган экстремал фунциялар ёрдамида мос формулалар ва сплайнларнинг хатолик функционаллари нормаларини ҳисоблаш; Эрмит типидаги оптимал квадратур, кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнларнинг мавжудлиги ва ягоналигини ўрганиш; чизиқли дифференциал операторнинг дискрет аналогидан фойдаланиб Эйлер-Маклорен типидаги оптимал кубатур формулалар ва интерполяцион сплайнлар қуришнинг янги алгоритмларини ишлаб чиқиш, шунингдек оптимал коэффициентларнинг аналитик кўринишларини топиш.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Функционал анализ методлари асосида турли типдаги квадратур формулаларни қуриш ва уларнинг яқинлашишларини ўрганиш бўйича оптималлаштириш масалалари дастлаб А. Сард ва С.М. Никольскийларнинг илмий изланишларида келтирилган. Кубатур формулалар учун шунга ўхшаш оптималлаштириш масалаларини ўрганиш С.Л. Соболев томонидан бошланган. Кейинчалик энг яхши квадратур формулаларни қуриш ва уларнинг хатоликларини баҳолаш бўйича С.М. Никольский, Н.П. Корнейчук, Т.Н. Бусарова, Б. Боянов, Т.А.Гранкина, А.А. Женсыкбаев, Н.Е. Лушпай, А.А. Лигун, В.П. Моторний, К.И.Оскольков ва М.А.Чахкиев каби муаллифлар томонидан илмий изланишлар олиб борилган. Асимптотик оптимал, тартиб бўйича оптимал ва инвариант кубатур формулалар қуриш С.Л.Соболев, О.В.Бесов, Н.И.Блинов, В.Л.Васкевич, М.И.Исраилов, Г.П.Исматуллаев, С.И.Коняев, Н.М.Коробов, В.И.Лебедев, И.П.Мысовских, М.В.Носков, В.И.Половинкин, М.Д.Рамазанов, Г.Н.Салихов, Т.И.Хаитов, М.Ш.Шабозов, Э.Шамсиев, Т.Х.Шарипов, И.Ф.Шарыгин, Ц.Б.Шойнжуров, Б.Эшдавлатов, З.Эшкуватов, R.Cools, P.J.Davis, P.Rabinovitz, Y.G.Shi, S.B.Stoyanova, A.H.Stroud, A.Babos, A.M.Acu ларнинг илмий ишларида ўрганилган. Квази Монте-Карло ва Монте-Карло методлари асосида интегралларни тақрибий ҳисоблаш формулаларини қуриш Н.С.Бахвалов, С.М.Ермаков, И.М.Соболь, Н.Н.Ченцов, Г.А.Михайлов, А.С.Расулов, М.Т.Бакоев, Г.Раимова, E.Novak ва H.Wozniakovski ларнинг илмий ишларида ўрганилган.

Оптимал квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар қуришда сплайн метод, φ - функциялар методи ва Соболев методи қўлланилади. Бунда тугун нуқталар фиксирланган ҳолда хатолик функционалининг нормасини минималлаштириш ҳисобига оптимал формулалар олинади. Соболевнинг фактор фазоларида турли хил оптимал квадратур фомулалар A.Sard, L.F.Meyers, G.Coman, I.J.Schoenberg, S.D.Silliman, P.Kohler ларинг ишларида сплайн методаларига асосланиб, A.Ghizzetti и A.Ossicini, F.Lanzara, T.Catinaş ва G.Coman ларнинг ишларида эса φ - функциялар методига асосланиб қурилган. Соболев методи асосида оптимал кубатур формулаларни қуришда С.Л.Соболевнинг оптимал квадратур формулаларнинг коэффициентларини топиш бўйича натижалари сплайн методи асосида олинган юқорида эслатилган натижаларни умумлаштирди. С.Л.Соболев томонидан таклиф қилинган методнинг турли гильберт фазоларидаги ривожи З.Ж.Жамалов, Ф.Я.Загирова, Х.М.Шадиметов, А.Р.Хаётов, Н.Х.Маматова, Д.М.Ахмедов, С.С.Азамов, Н.Д.Болтаев ва бошқаларнинг илмий изланишларида ўз аксини топган.

Вариацион методларга асосланган сплайнлар назарияси Д.Ж. Алберг, Э. Нильсон ва Дж. Уолш, П.Ж.Лоран, I.Schoenberg, C. de Boor, J.Duchon R.Arcangeli, M.C.Lopez de Silanes, J.J.Torres, В.А. Василенко, M.Attea, A.Barlinet, C.Tomas-Agnan, L.L.Schumaker, T.Lyche, B.Bojanov, С.Б.Стечкин, Ю.Н.Субботин, Ю.С.Завьялов, Б.И.Квасов, В.Л.Мирошниченко, М.И.Игнатев, А.Б.Певный, G.Nurnberger, А.Ю.Бежаев, G.V.Milovanovic, Х.М.Шадиметов, А.Р.Ҳаётов ва С.С.Бабаев ларнинг илмий ишларида ўрганилган ва ривожлантирилган.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Метематика институтининг Ф4-ФА-Ф013 “Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари” (2012-2016), ЁФ4-ОТ-010509-ЁФ4-5 “$W_2^{P_m}(0,1)$ гильберт фазосида Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуриш” (2014-2015), Ўзбекистон Республикаси фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтининг ОТ-Ф4-86 “Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишнинг оптимал методларини ишлаб чиқиш” (2017-2020) мавзулардаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади Соболев фазоларида Эрмит ва Эйлер-Маклорен типидаги оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларни қуриш ва уларнинг оптимал хатолик функционаллари нормаларини ҳисоблашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари. Соболевнинг $L_2^{(m)}$ фактор фазосида:

Эрмит типидаги квадратур формула экстремал функциясини қўллаб шу квадратур формула хатолик функционали нормаси ифодасини ҳосил қилиш;

Кўп ўзгарувчили функциянинг шартли экстремумларини топиш усули ёрдамида Эрмит типидаги оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари учун чизиқли алгебраик тенгламалар системасини олиш ва унинг ечими учун мавжудлик ва ягоналик шартларини топиш;

Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулалар коэффициентлари учун аналитик ифодаларни топиш ва мос оптимал хатолик функционали нормасини ҳисоблаш;

Ҳосилали оптимал интерполяцион формула коэффициентлари учун Винер-Хопф типидаги чизиқли тенгламалар системасини олиш;

$2m$ - тартибли дифференциал оператор дискрет аналогидан фойдаланиб ҳосилали оптимал интерполяцион формула коэффициентларини ошкор кўринишини ҳосил қилиш;

Соболевнинг икки ўзгарувчили даврий функциялар фазосида Эрмит типидаги оптимал панжарали кубатур формулаларни қуриш ва уларнинг яқинлашиш тартибини топиш.

Тадқиқотнинг объекти Соболевнинг даврий ва даврий бўлмаган функциялар фазоларида квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар.

Тадқиқотнинг предмети панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларнинг оптимал коэффициентлари учун системалар, оптимал формулаларнинг хатолик функционали нормаси, Соболевнинг даврий ва даврий бўлмаган функциялар фазоларида Эрмит типидаги оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари тадқиқот ишида ҳисоблаш математикаси, математик анализ, функционал анализ ва дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги:

$L_2^{(m)}(0,1)$ Соболев фазосида Эрмит типидаги оптимал квадратур формуланинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

Соболев фазосида Эрмит типидаги квадратур формулаларнинг экстремал функцияси ноллари ҳақидаги И. Бабушка теоремасининг аналоги исботланган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида биринчи тартибли ҳосилали оптимал квадратур формулалар қурилган ҳамда исталган $m \geq 2$ учун ушбу оптимал квадратур формулалар коэффициентларининг аналитик ифодалари олинган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида исталган $m \geq 2$ учун биринчи тартибли ҳосилали оптимал квадратур формулаларнинг учун хатолик функционали нормаси ҳисобланган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулалар ва Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формулаларнинг коэффициентлари учун чизиқли алгебраик тенгламалар системалари олинган;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Соболев фазосида $[\frac{m}{2}] \geq s \geq 1$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий m натурал сон учун Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулалар қурилган, ундан ташқари шу квадратур формулаларнинг коэффициентлари учун ошкор формулалар ва уларнинг хатолик функционали нормаси ҳисобланган.

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $m = 2,3,4$ бўлганда Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формулалар қурилган;

Икки ўзгарувчили даврий функциялар $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосида Эрмит типидаги оптимал кубатур формулаларнинг коэффициентлари учун ошкор ифодалар олинган ва уларнинг хатолик функционали нормаси ҳисобланган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси аниқ интегралларни юқори аниқликда тақрибий ҳисоблашга имкон берадиган Эрмит типидаги оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар қуришдан иборатдир. Бундан ташқари, улар интеграл ва дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишда қўлланилиши мумкин. Қурилган оптимал формулаларнинг коэффициентлари учун олинган аналитик ифодалар муайян амалий масалаларни ечишда ишлатилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги ҳисоблаш математикаси, математик анализ, функционал анализ ва дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Диссертация иши натижаларининг илмий аҳамияти Соболев фазоларида Эрмит типидаги оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар қуриш алгоритми ишлаб чиқилгани билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти унда қурилган оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулаларнинг амалий фанлар масалаларини ечиш учун кенг кўламли қўлланилиши билан ифодаланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Эрмит типидаги оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар қуриш ва уларнинг хатоликларини бахолаш бўйича олинган натижалар асосида: Соболев фазосида қурилган ҳосилали оптимал интерполяцион формулалар №АААА-А20-120021190003-1, №АААА-А20-120021190004-8 рақамли грант лойиҳасида каср тартибли оддий дифференциал тенгламаларни ечиш учун ҳисоблаш усулларини ишлаб чиқишда фойдаланилган (Витус Беринг номидаги Камчатка давлат университетининг (Россия) 2020 йил 11 сентябрдаги 433-01-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши каср тартибли осцилляторлар учун нолокал ошкор чекли-айирмали схемаларнинг турғунлик ва яқинлашувчанлик теоремаларини исботлашга имкон берган;

Соболев фазосидаги Эрмит типидаги оптимал панжарали кубатур ва интерполяцион формулалар Ф2-ФА-0-83921/Ф2-ФА-Ф0383 рақамли “Ўтказгичлар ва магнит материалларида кучли ўзаро боғлиқлик ва уларнинг критик параметрларини ҳисоблаш” грант лойиҳасида кубик ва ромбоэдрик кучсиз ферромагнитларда мавжуд фазавий ўтиш назарияси бўйича олинган тажриба натижаларини интерпритация қилишда ва кучсиз ферромагнитларда спонтан магнит моментининг температуравий боғланишини баҳолашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 9 сентябрдаги 89-03-3182-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши поляризатор-намуна-анализатор системадан ўтган ёруғлик интенсивлигининг кучсиз ферромагнитларда енгил магнитланиш текисликдаги магнит майдони ориентациясига боғлиқлигини оптимал яқинлаштириш имконини берган.

Ҳосилали оптимал квадратур формулалар қуриш ва уларнинг Соболев фазосида хатоликларини баҳолаш усулларидан хорижий илмий журналларда турли Гильберт фазоларида Сард ва Никольский маъноларида оптимал квадратур формулаларни қуришда ва уларнинг аниқлигини баҳолашда фойдаланилган (Applied Mathematics and Information Sciences, Volume 9, no 3, Pages 1231-1238, 2015; Applied Mathematics and Computation, Volume 276, 5 March 2016, Pages 340-355; Journal of Siberian Federal University- Mathematics and Physics, Volume 11 (6), Pages 764–775, 2018; Filomat, Volume 33, Issue 17, Pages 5661-5675, 2019). Илмий натижаларнинг қўлланилиши Соболев фазосида Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулалар ва Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формулаларни қуриш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур диссертация тадқиқот натижалари 12 та илмий-амалий анжуманларда, шу жумладан 8 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 34 та илмий иш чоп этилган, шуладан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 21 та мақола, шу жумладан, 5 таси хорижий ва 16 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса фойдаланилган адабиётлар рўйхати ва иловадан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 188 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эрмит типидаги оптимал квадратур формулалар»** деб номланувчи биринчи боби умумий кўринишдаги Эрмит типидаги оптимал квадратур формулаларни ўрганишга бағишланган. Бу ерда $L_2^{(m)}(0,1)-[0,1]$ кесмада $m-$тартибли умумлашган ҳосиласи квадрати билан интегралланувчи функциялар фазоси. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эрмит типидаги оптимал квадратур формулаларнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган; Эрмит типидаги квадратур формулалар экстремал функциясининг ноллари ҳақидаги И.Бабушка теоремасининг анологи олинган; биринчи тартибли ҳосилали оптимал квадратур формулалар қурилган ҳамда ушбу оптимал квадратур формулаларнинг коэффициенлари учун аналитик ифодалар олинган ва исталган $m\geq 2$ учун биринчи тартибли ҳосилали оптимал квадратур формулалар хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.

Энди биз биринчи боб натижалари ҳақида батафсил маълумот берамиз.

Биз бирор B банах фазосида Эрмит типидаги қуйидаги умумий квадратур формулани қараймиз

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t} C_\beta^{(\upsilon)}\varphi^{(\upsilon)}(x_\beta)\,(1)$$

унинг хатолик функционали қуйидагича

$$\ell_N^t(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)p(x) - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t}(-1)^\upsilon C_\beta^{(\upsilon)}\delta^{(\upsilon)}(x-x_\beta). \qquad (2)$$

Бу ерда $C_\beta^{(\upsilon)}$ – квадратур формуланинг коэффициентлари ва x_β - квадратур формуланинг тугун нуқталари, N – натурал сон, $p(x)$ – вазн функцияси бўлиб у учун $\int_0^1 p(x)dx < \infty$ шарт ўринли, $\varepsilon_{[0,1]}(x) - [0,1]$ кесманинг характеристик функцияси, $\delta(x)$ – Диракнинг дельта-функцияси, φ – B банах фазосининг элементи, $\beta = 0,1,...,N,\ \upsilon = 0,1,...,t,\ 0 \le t \le m-1.$

Ушбу

$$\left(\ell_N^t,\varphi\right) = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t} C_\beta^{(\upsilon)}\varphi^{(\upsilon)}(x_\beta) = \int_R \ell_N^t(x)\varphi(x)dx, \qquad (3)$$

айирмага (1) квадратур формуланинг хатолиги дейилади.

Коши-Шварцнинг

$$|(\ell_N^t,\varphi)| \le \|\varphi\,|\,B\| \cdot \|\ell_N^t\,|\,B^*\|$$

тенгсизлигига асосан (3) айирманинг абсолют қийматини қўшма банах фазоси B^* да (2) хатолик функционалининг нормаси

$$\left\|\ell_N^t\,|\,B^*\right\| = \sup_{\|\varphi|B\|=1} |(\ell_N^t,\varphi)|$$

ёрдамида баҳолаймиз.

Шундай қилиб, функцияларнинг B банах фазосида (1) квадратур формуланинг (3) хатолигининг юқоридан баҳоси B^* қўшма фазода ℓ_N^t хатолик функционалининг нормасини топишга олиб келинади.

(2) дан кўринадики, (1) квадратур формуланинг ℓ_N^t хатолик функционалининг нормаси тугун нуқталар ва коэффициентлар билан ифодаланган. ℓ_N^t хатолик функционалининг нормасини тугун нуқталар ва коэффициентлар буйича минимумини топиш масаласи *С.М.Никольский масаласи дейилади* ва олинган квадратур формулага *Никольский маъносидаги оптимал квадратур формула дейилади*. Бу масала дастлаб С.М.Никольский томонидан қаралган ва кўп олимлар бу масалани давом эттириб изланишлар олиб боришган, масалан, Н.П.Корнейчук, Т.Н.Бусарова, Б.Боянов, Т.А.Гранкина, А.А.Женсыкбаев, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигун, В.П.Моторный, К.И.Оскольков, Alina Babos, Ana Maria Acu, P.Blaga, B.Bojanov, T.Catinas, Gh.Coman. ℓ_N^t хатолик функционалининг нормасини тугун нуқталарни фиксирлаб коэффициентлар бўйича минималлаштириш масаласи *Сард*

масаласи дейилади. Олинган формулага *Сард маъносидаги оптимал квадратур формула* дейилади. Бу массалани биринчи бўлиб Сард ўрганган.

Бу бобдаги натижалар ҳам Сард масаласи билан боғлиқ. Шунинг учун бу ерда биз, бизнинг ишимиз билан узвий боғлиқ бўлган бир нечта олдинги Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар натижаларини мухокама қиламиз.

$W_{L_p}^m$ фазо $[0,1]$ кесмада $(m-1)$- тартибли ҳосиласи абсолют узлуксиз ва $\| f^{(m)} \|_p \leq 1$ шартни бажарувчи f функциялар синфи, бу ерда $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_p(0,1)}$. А.А.Женсыкбаевнинг ишида $p(x)=1$ бўлганда (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар орасида $W_{L_p}^m$ фазосида Эйлер-Маклорен квадратур формуласи оптимал эканлигини исботлаган. Х.М.Шадиметов эса $L_2^{(m)}$ фазосида Эйлер-Маклорен типидаги панжарали кубатур формула оптимал эканлигини исботлаган.

T. Catinas ва Gh. Coman ларнинг ишида $\varphi-$ функциялар усулидан фойдаланиб $L_2^{(2)}(0,1)$ фазосида Эйлер-Маклорен формуласининг оптималлиги исботланган ва ушбу формуланинг хатолиги ҳисобланган. Худди шундай ушбу методни қўллаб F. Lanzara нинг ишида чизикли дифференциал операторларнинг ечимига аниқ бўладиган ва Сард маъносида оптимал бўлган (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар қуришнинг процедураси муҳокама қилинган.

Шуни ҳам таъкидлаш лозимки, амалиётда (1) формула t параметрнинг кичик қийматлари учун қизиқиш уйғотади. $t=0$ ҳол учун Сард маъносидаги оптимал формулалар аллақачон кўплаб муаллифлар томонидан, асосан $L_2^{(m)}$ фазосида муҳокама қилинган.

Эрмит типида (1) кўринишдаги квадратур формулаларнинг қуришнинг асосий муаммоларидан бири бу $1 \leq t \leq m-2$ ҳоллар учун оптимал квадратур формула қуришдан иборатдир.

Диссертацияда параграф 1.2 ёрдамчи бўлиб унда таърифлар, ушбу ишнинг асосий натижаларини исботлашда ишлатиладиган баъзи маълум формулалар ва натижалар келтирилган.

Параграф 1.3 да $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода Эрмит типидаги (1) оптимал квадратур формулаларнинг мавжудлиги ва ягоналиги масаласи ўрганилган. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (2) кўринишдаги ℓ_N^t хатолик функционали аниқланган, ва унга

$$\left(\ell_N^t, x^\alpha\right) = 0, \qquad \alpha = 0,1,...,m-1 \tag{4}$$

шартлар қўйилган.

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (2) хатолик функционалли (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулани қуриш масаласи бу

$$\left\| \mathring{\ell}_N^t \middle| L_2^{(m)*}(0,1) \right\|^2 = \inf_{C_\beta^{(\upsilon)}} \left| \left(\ell_N^t, \psi_{\ell_N^t} \right) \right| \tag{5}$$

катталикни x_β тугун нуқталар фиксирланаган ҳолда топишдан иборат. (5) формулада $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (1) квадратур формуланинг $\psi_\ell(x)-$экстремал функциясидир.

Бу функция учун Соболевнинг қуйидаги теоремаси ўринли.

Теорема 1. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида ℓ_N^t хатолик функционалининг экстремал функцияси қуйидаги кўринишга эга

$$\psi_{\ell_N^t}(x) = (-1)^m \ell_N^t(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x), \tag{6}$$

бу ерда $G_m(x)$ бу d^{2m}/dx^{2m} операторнинг Грин функцияси ва

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} signx}{2(2m-1)!}, \tag{7}$$

$P_{m-1}(x)$ бирор $(m-1)$ даражали кўпҳад.

ℓ_N^t хатолик функционали нормасининг квадрати (6) экстремаль функциядан фойдаланиб ҳисобланади. Кейин, ℓ_N^t хатолик функционали нормасининг квадратига (4)- шартларда экстремум берадиган $C_\beta^{(\upsilon)}$ коэффициентлар учун қуйидаги система олинган

$$\sum_{\beta'=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t} C_\beta^{(\upsilon)} G_m^{(\upsilon+\upsilon')}(x_{\beta'} - x_\beta) + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k x_\beta^{k-\upsilon'} = f_\beta^{(\upsilon')},\ \upsilon' = \overline{0,t},\ \beta = \overline{0,N} \tag{8}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t} \frac{k!}{(k-\upsilon)!} C_\beta^{(\upsilon)} \theta(k-\upsilon) x_\beta^{k-\upsilon} = g_k,\ \ k = 0,1,\ldots,m-1, \tag{9}$$

бу ерда

$$f_\beta^{(\upsilon')} = \int_0^1 p(x) G_m^{(\upsilon')}(x - x_\beta)dx,\ \ g_k = \int_0^1 p(x)x^k dx,\ \ \theta(k-\upsilon) = \begin{cases} 1, \text{ если } & k-\upsilon \ge 0, \\ 0, \text{ если } & k-\upsilon < 0. \end{cases}$$

(8), (9) система ечимининг ягоналиги ўрганилган. Бунда ушбу системанинг ечими (4)- системанинг ечимлар тўпламида $\left\|\ell_N^t\right\|^2$ га локал минимум бериши исботланган.

Натижада қуйидаги теорема тўғридан тўғри келиб чиқади.

Теорема 2. Фараз қилайлик, (1) кўринишдаги квадратур формулаларнинг $\ell_N^t(x)$ хатолик функционали $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода аниқланган бўлсин, яъни унинг барча $(m-1)$-даражали кўрҳадлардаги қийматлари нолга тенг бўлсин, ва фараз қилайлик бу функционал оптимал бўлсин, яъни бериган x_β тугун нуқтали (2)- кўринишдаги барча функционаллар орасида у $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида энг кичик нормага эга бўлсин.

У ҳолда

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\psi_{\ell_N^t}(x)=(-1)^m\ell_N^t(x)$$

тенгламанинг υ $\left(\upsilon=0,1,2,...,t;\ t=0,1,2,...,m-1\right)$тартибли ҳосиласи билан x_β тугун нуқталарда нолга айланадиган $\psi_{\ell_N^t}$ ечими мавжуд, яъни $\psi_{\ell_N^t}^{(\upsilon)}(x_\beta)=0$ ва у $L_2^{(m)}(0,1)$ фазога тегишли.

Теорема 2 И.Бабушканинг оптимал квадратур формуланинг экстремаль функциясининг ноллари ҳақидаги теоремасини умумлаштиради.

1.4-1.8 параграфларда $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида ихтиёрий $m\geq 2$ лар учун $t=1$, $p(x)=1$ бўлганда Сард маъносида (1) кўринишдаги оптимал квадратур формулалар қурилган ва уларнинг хатолиги ўрганилган. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида исталган $m\geq 2$ учун ушбу

$$\int_0^1\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\varphi(h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\varphi'(h\beta) \qquad (10)$$

квадратур формулани

$$\ell_N^1(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\delta(x-h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\delta'(x-h\beta) \qquad (11)$$

хатолик функционали билан бирга қараймиз. Бу ерда

$C_0[\beta]=\begin{cases}h/2, & \beta=0,N,\\ h, & \beta=\overline{1,N-1},\end{cases}$ - маълум коэффициентлар ва $C_1[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ - номаълум коэффициентлар $h=1/N$, $N-$ натурал сон.

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида аниқланган (11) хатолик функционали учун

$$(\ell_N^1,x^\alpha)=0,\quad \alpha=0,1,2,...,m-1$$

шартлар қўйилади.

Бу ердан аёнки, (10) кўринишдаги квадратур формуланинг мавжуд бўлиши учун $N\geq m-1$ тенгсизлик бажарилиши шарт.

Масала 1. Ушбу

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_1[\beta]}\left\|\ell_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи $C_1[\beta]$ оптимал коэффициентларни топиш ва $\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^1\right\|$ ни ҳисоблаш.

Бу ерда масала 1 тўла ечилган. Бунда (10) кўринишдаги опимал квадратур формулалар $C_1[\beta]$ коэффициентлари учун қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинаган

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma]G_m^{"}(h\beta-h\gamma)+P_{m-2}(h\beta)=f_{m,1}(h\beta),\beta=\overline{0,N}, \qquad (12)$$

$$\alpha\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta](h\beta)^{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha+1}-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)^{\alpha},\ \alpha=\overline{0,m-1}, \tag{13}$$

бунда $G_m(x)$ функция (7) формула билан аниқланган, $P_{m-2}(h\beta)$ бу $(m-2)$ даражали номаълум кўпҳад ва

$$f_{m,1}(h\beta)=\sum_{i=0}^{2m-3}\frac{(h\beta)^{2m-3-i}}{(2m-3-i)!\cdot i!}\left[\frac{(-1)^{2m-3-i}}{2(i+1)(i+2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{h^{i+2}B_{i+2}}{(i+1)(i+2)}-\frac{1}{2(i+1)}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\gamma](-h\gamma)^{i+1}\right],$$

B_{i+2} − Бернулли сони.

(12)-(13) системада $C_1[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ коэффициентлар ва $(m-2)$− даражали $P_{m-2}(h\beta)$ кўпҳад номалумлардир. (15)-(16) система ягона ечимга эга ва бу ечим $\left\|\ell_N^1\middle|L_2^{(m)*}\right\|^2$ ифодага минимум беради. Бу система ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботи (8)-(9) система ечими мавжудлиги ва ягоналиги исботидан келиб чиқади. Бу бобнинг асосий натижалари $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (10)- кўринишдаги оптимал квадратур формулалар коэффициенлари ва бу оптимал квадратур формуларнинг хатолиги ҳақидаги теоремалардир.

Теорема 3. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (11) хатолик функционалли (10) кўринишда квадратур формулалар орасида коэффициентлари қуйидаги формулалар билан аниқланадиган ягона оптимал квадратур формула мавжуд

$$\overset{\circ}{C}_0[0]=\overset{\circ}{C}_0[N]=h/2,$$
$$\overset{\circ}{C}_0[\beta]=h,\ \beta=\overline{1,N-1},$$
$$\overset{\circ}{C}_1[0]=h^2\left(\frac{1}{12}-\sum_{k=1}^{m-2}d_k\frac{q_k^N+q_k}{1-q_k}\right),$$
$$\overset{\circ}{C}_1[\beta]=h^2\sum_{k=1}^{m-2}d_k\left(q_k^{\beta}-q_k^{N-\beta}\right),\beta=\overline{1,N-1},$$
$$\overset{\circ}{C}_1[N]=-h^2\left(\frac{1}{12}-\sum_{k=1}^{m-2}d_k\frac{q_k^N+q_k}{1-q_k}\right),$$

бу ерда d_k қуйидаги чизиқли $(m-2)$ та тенгламалар системасини қаноатлантиради

$$\sum_{k=1}^{m-2}d_k\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{q_k^{N+i}+(-1)^i q_k}{(1-q_k)^{i+1}}\Delta^i 0^{\alpha}=\frac{B_{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\ \alpha=\overline{1,m-2},$$

$B_\alpha -$Бернулли сонлари, $\Delta^i \gamma^\alpha$ эса γ^jдан i тартибли чекли айирма, $\Delta^i 0^\alpha = \sum\limits_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^\alpha$, $q_k -$ $(2m-4)$ даражали Эйлер-Фробениус кўпҳаднинг илдизлари ва $|q_k|<1$.

Теорема 4. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (10) кўринишдаги оптимал квадратур формуланинг (11) хатолик функционали нормасининг квадрати учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^1 \,|\, L_2^{(m)*}(0,1) \right\|^2 = (-1)^{m+1} \left[\frac{B_{2m} h^{2m}}{(2m)!} + h^{2m+1} \sum_{k=1}^{m-2} \sum_{i=0}^{2m-2} \sum_{\alpha=1}^{2m-3-i} \frac{B_{i+2} \theta_\alpha (q_k) \Delta^\alpha 0^{2m-3-i}}{(i+2)!(2m-3-i)!} \right],$$

бу ерда $\theta_\alpha (q_k) = \dfrac{2d_k (q_k^{N+\alpha} + (-1)^\alpha q_k)}{(1-q_k)^{\alpha+1}}$, d_k- теорема 3 да аниқланган, $B_\alpha -$Бернулли сонлари, $q_k -$ $(2m-4)$ даражали Эйлер-Фробениус кўпҳаднинг илдизи ва $|q_k|<1$.

Хусусий ҳолда, теорема 3 ва теорема 4 дан $m=2,3$ бўлганда классик Эйлер-Маклорен формуласининг оптималлигини тасдиқловчи натижаларни оламиз.

Кейин, параграф 1.9 да ушбу бобнинг назарий натижаларини тасдиқловчи сонли натижалар келтирилган.

Диссертациянинг **«Соболев фазосида Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулалар»** деб номланувчи иккинчи боби, $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида квадратур йиғиндиси интеграл остидаги функциянинг тугун нуқталардаги қийматлари ва ушбу функция ҳосилаларининг интеграллаш интервали охирларидаги қийматларидан иборат Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуришга бағишланган.

Бу бобда $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида қуйидаги

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(h\beta) + \sum_{n=1}^{s} A_n (\varphi^{(2n-1)}(0) - \varphi^{(2n-1)}(1)) \qquad (14)$$

Эйлер-Маклорен типидаги квадратур формула

$$\ell_N^{2s-1}(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-h\beta) + \sum_{n=1}^{s} A_n (\delta^{(2n-1)}(x) - \delta^{(2n-1)}(x-1)) \qquad (15)$$

хатолик функционали билан қаралган.

Бу ерда $C[\beta]$, $\beta = \overline{0,N}$ ва A_n, $n=\overline{1,s}$ лар (14) формуланинг коэффициентлари, $1 \le s \le [m/2]$, $h=1/N$, $N-$ натурал сон, $\varepsilon_{[0,1]}(x)-$ $[0,1]$ кесманинг характеристик функцияси, $\delta -$Диракнинг дельта -функцияси.

(14) формуланинг хатолиги

$$(\ell_N^{2s-1}, \varphi) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx =$$

$$=\int_0^1 \varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta]-\sum_{n=1}^{s} A_n\left(\varphi^{(2n-1)}(0)-\varphi^{(2n-1)}(1)\right).$$

(15) хатолик функционали, квадратур формулаларнинг $(m-1)-$ даражали кўпҳадларига аниқлигини билдирувчи, қуйидаги ортогоналлик шартини қаноатлантиради

$$(\ell_N^{2s-1}, x^{\alpha})=0, \quad \alpha=0,1,2,...,m-1. \tag{16}$$

Бу ердан кўриниб турибдики, (14) кўринишдаги квадратур формулалар мавжуд бўлиши учун $N+s\geq m-1$ тенгсизлик бажарилиши керак.

Қаралаётган ҳолда (15) хатолик функционалининг нормаси $C[\beta]$ ва A_n коэффициентларга боғлиқ. Бу бобда биз ушбу нормани $C[\beta]$ ва A_n коэффициенлар бўйича минимумини топиш масаласини ўрганамиз, яъни биз қуйидаги катталикни топамиз

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^{2s-1} \mid L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C[\beta],A_n} \left\| \ell_N^{2s-1} \mid L_2^{(m)*} \right\|. \tag{17}$$

Шундай қилиб, биз (14) кўринишдаги Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар қуриш учун қуйидаги масалани ечамиз.

Масала 2. (17)- тенгликни қаноатлантирувчи $C[\beta]$ ва A_n коэффициентларни топинг, ҳамда $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (14)- оптимал квадратур формуланинг (15) хатолик функционали нормасининг квадратини ҳисобланг.

Бу бобнинг 2.2 параграфида ℓ_N^{2s-1} хатолик функционалига мос келувчи экстремал функция аниқланган ва (15) хатолик функционали нормасининг ифодаси ҳисобланган. Параграф 2.3 да $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (14) кўринишдаги оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари учун чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинган. Қолган параграфлар $\left\|\ell_N^{2s-1}\right\|^2$ нормани $C[\beta]$ ва A_n коэффициентларга нисбатан минималлаштиришга бағишланган. Бобнинг охирида (14) кўринишдаги оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари учун ошкор формулалар топилган. Ҳамда (14) оптимал квадратур формуланинг (15) хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган ва бу оптимал квадратур формуланинг яқинлашиш тартиби $O(h^m)$ га тенглиги кўрсатилган.

Ундан ташқари, олинган назарий натижаларни тасдиқловчи сонли натижалар намйиш қилинган.

Иккинчи бобнинг асосий натижаларини келтирамиз.

(16) шартни бажарувчи (17) тенгликни қаноатлантирувчи $C[\beta]$ ва A_n оптимал коэффициентлар учун қуйидаги система олинган

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C[\gamma]\frac{\left|h\beta-h\gamma\right|^{2m-1}}{2(2m-1)!}-\sum_{k=1}^{s} A_k\frac{((h\beta)^{2m-2k}+(1-h\beta)^{2m-2k})}{2(2m-2k)!}+$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{m-1}\lambda_\alpha (h\beta)^\alpha = f_m(h\beta),\ \beta=\overline{0,N}, \tag{18}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\frac{((h\beta)^{2m-2k}+(1-h\beta)^{2m-2k})}{2(2m-2k)!}-\sum_{n=1}^{s}\frac{A_n}{(2m-2n-2k+1)!}+$$

$$+\sum_{\alpha=2k}^{m-1}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-2k+2)\cdot\lambda_\alpha=\frac{1}{(2m-2k+1)!},\ k=\overline{1,s}, \tag{19}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta](h\beta)^\alpha=\frac{1}{\alpha+1}+\sum_{n=1}^{s}A_n\frac{\alpha!\cdot\theta(\alpha-2n+1)}{(\alpha-2n+1)!},\ \alpha=\overline{0,m-1}, \tag{20}$$

бу ерда $f_m(h\beta)=\int_0^1\frac{|x-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!}dx$ ва $\theta(\alpha-2n+1)=\begin{cases}1, & \alpha-2n+1\ge 0,\\ 0, & \alpha-2n+1<0.\end{cases}$

(18)- (20)- системанинг ечими бўладиган оптимал коэффициентлар учун қуйидаги теорема исботланган.

Теорема 5. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (15) хатолик функционалли (14) кўринишдаги квадратур формулалар орасида $1\le s\le[m/2]$ да коэффициентлари қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланган ягона оптимал квадратур формула мавжуд

$$\overset{\circ}{C}[0]=h\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}d_k\frac{q_k^N-q_k}{1-q_k}\right), \tag{21}$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta]=h\left(1+\sum_{k=1}^{m-1}d_k(q_k^\beta+q_k^{N-\beta})\right),\ \beta=\overline{1,N-1}, \tag{22}$$

$$\overset{\circ}{C}[N]=h\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{m-1}d_k\frac{q_k^N-q_k}{1-q_k}\right), \tag{23}$$

$$\overset{\circ}{A}_n=\frac{h^{2n}B_{2n}}{(2n)!}-\frac{h^{2n}}{(2n-1)!}\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{2n-1}d_k\frac{q_k+q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i 0^{2n-1},\qquad n=\overline{1,s}, \tag{24}$$

бу ерда d_k - $(m-1)$ та чизиқли тенгламалар системасини қаноатлантиради

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{j}d_k\frac{q_k+q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i 0^j=\frac{B_{j+1}}{j+1},\ j=\overline{2s,m-1}, \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{2m-2j}d_k\frac{q_k+q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i 0^{2m-2j}=0,\quad j=\overline{1,s}, \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{2j}d_k\frac{q_k+q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i 0^{2j}=0,\quad j=\overline{1,s-1}. \tag{27}$$

B_α –Бернулли сонлари, $\Delta^i\gamma^j$ бу γ^j дан i тартибли чекли айирма, $\Delta^i 0^j=\sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}C_i^l l^j$, q_k лар $(2m-2)-$ даражали Эйлер- Фробениус кўпҳадининг илдизлари ва $|q_k|<1$.

Теорема 6. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $1 \le s \le [\frac{m}{2}]$ бўлганда (14) кўринишдаги оптимал квадратур формуланинг (15) хатолик функционали нормасининг квадрати учун қуйидаги тенглик ўринли

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^{2s-1} \middle| L_2^{(m)*} \right\|^2 = (-1)^{m+1}\left[\frac{B_{2m}h^{2m}}{(2m)!} - \frac{2h^{2m+1}}{(2m)!}\sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=0}^{2m} \frac{q_k + q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}}\Delta^i 0^{2m} \right],$$

Бу ерда d_k – (25)-(27) системадан аниқланади, B_{2m} – Бернулли сонлари, $\Delta^i 0^{2m} = \sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}C_i^l l^{2m}$, q_k- $(2m-2)$– даражали Эйлер- Фробениус кўпҳадининг илдизлари ва $|q_k| < 1$.

Хусусан, $s = [m/2]$ ҳолда, (25)- (27) системадан

$$d_k = 0,\ k = \overline{1, m-1}$$

тенгликларни оламиз.

У ҳолда охирги тенгликларни ҳисобга олиб (25)-(27) ифодаларда ва теорема 5 дан классик Эйлер-Маклорен квадратур формулаларнинг оптималлигини оламиз.

Диссертациянинг **«Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формулалар»** номланувчи учинчи бобида Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формула қуриш масаласи қаралган. 3.1-3.5 параграфларда функцияни тугун нуқталардаги қийматлари чизиқли комбинацияси ва бу функция ҳосиласининг [0,1] кесма чегараларидаги қийматларидан иборат оптимал интерполяцион формулалар қуриш масаласи ўрганилган. 3.6 параграфда функциянинг тугун нуқталардаги қийматлари чизиқли комбинацияси ва бу функциянинг $(2s-1)$- тартиблигача ҳосилаларини интерполяциялаш оралиғи чегарасидаги қийматларидан ташкил топган оптимал интерполяцион формулалар қуришга боғишланган.

3.1-3.5 параграфларда $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $m \ge 2$ бўлганда φ функция бошқа оддий P_φ функция орқали яқинлаштириш қуйидаги кўринишда қаралган

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(h\beta) + A(z)\varphi'(0) + B(z)\varphi'(1), \tag{28}$$

бу ерда $C_\beta(z)$, $\beta = 0,1,...,N$, $A(z)$ ва $B(z)$ коэффициентлар. Бунда φ функциянинг $\varphi(h\beta)$, $\beta = 0,1,...,N$ жадвал қийматлари ҳамда $\varphi'(0)$ ва $\varphi'(1)$ лар берилган бўлсин деб фараз қиламиз.

Коши-Шварц тенгсизлигига асосан (28) интерполяцион формула хатолиги

$$(\ell_N^1, \varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z)$$

нинг абсолют қийматини қуйидагича баҳоланади

$$|(\ell_N^1,\varphi)|\le \|\varphi|L_2^{(m)}\|\cdot\|\ell_N^1|L_2^{(m)*}\|,$$

бу ерда

$$\ell_N^1(x,z)=\delta\left(x-z\right)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-h\beta)+A(z)\delta'(x)+B(z)\delta'(x-1) \qquad (29)$$

(28) интерполяцион формуланинг хатолик функционали.

Маълумки, ℓ_N^1 хатолик функционалининг нормаси $C_\beta(z),\beta=0,1,...,N$, $A(z)$ ва $B(z)$ коэффициентларга боғлиқ. Биз $\|\ell_N^1\|$ катталикни $C_\beta(z),\ \beta=0,1,...,N,\ \ A(z)$ ва $B(z)$ коэффициентлар бўйича минимумини топиш масаласини қараймиз. Бунда

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^1|L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_\beta(z),A(z),B(z)}\left\|\ell_N^1|L_2^{(m)*}\right\| \qquad (30)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_\beta(z),\beta=0,1,...,N,\ \overset{\circ}{A}(z)$ ва $\overset{\circ}{B}(z)$ (агар мавжуд бўлса) коэффициентлар *оптимал коэффициентлар* дейилади, унга мос келувчи $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (28) кўриишдаги

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}_\beta(z)\varphi(h\beta)+\overset{\circ}{A}(z)\varphi'(0)+\ \overset{\circ}{B}(z)\varphi'(1)$$

формулага оптимал интерполяцион формула дейилади.

$L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида (28) кўринишдаги оптимал интерполяцион формула қуриш учун биз қуйидаги масалага эга бўламиз.

Масала 3. (30) тенгликни қаноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_\beta(z),\beta=0,1,...,N,\ \ \overset{\circ}{A}(z)$ ва $\overset{\circ}{B}(z)$ коэффициентларни топиш.

Шуни эслатамизки, биринчи бўлиб С.Л. Соболев $W_2^{(m)}$ фазосида $P_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta\varphi(h\beta)$ кўринишидаги интерполяцион формуланинг экстремал функциясини топиш масаласини қўйган ва уни ечган. Ҳосилали интерполяцион формулалар ва классик Эйлер-Маклорен квадратур формулалар орасидаги боғлиқлик Шёнбергнинг ишларида ўрганилган.

3.2-3.3 параграфларда интерполяцион формуланинг экстремал функциясидан фойдаланиб (29) хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган. (29) хатолик функционалининг нормасини $\left(\ell,x^\alpha\right)=0,$ $\alpha=0,1,2,...,m-1$, шартлар асосида минимумини топишда алгебраик тенгламалар системаси олинган.

3.4 параграфда $m=2$ ва $m=3$ бўлганда, олинган системани ечиб (28) оптимал интерполяцион формуланинг $\overset{\circ}{C}_\beta(z),\ \ \beta=0,1,...,N,\ \ \overset{\circ}{A}(z)$ ва $\overset{\circ}{B}(z)$ коэффициентлари учун ошкор формулалар олинган.

Қуйидаги теоремалар исботланган

Теорема 7. $L_2^{(2)}(0,1)$ фазода (28) оптимал интерполяцион формуланинг $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $\overset{\circ}{A}(z)$ ва $\overset{\circ}{B}(z)$ коэффициентлари мос равишда қуйидаги формулалар билан ифодаланади

$$\overset{\circ}{C}_0(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^\gamma\,|z-h\gamma|^3+|z-h|^3+h^3-z^3(4+3\sqrt{3})+$$
$$+3z^2h(1-\sqrt{3})+q^N N_1(z)\Big],$$
$$\overset{\circ}{C}_\beta(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{|\beta-\gamma|}\,|z-h\gamma|^3+|z-h(\beta-1)|^3-8|z-h\beta|^3+$$
$$+|z-h(\beta+1)|^3+q^\beta M_1(z)+q^{N-\beta}N_1(z)\Big],\ \beta=1,2,...,N-1,$$
$$\overset{\circ}{C}_N(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{N-\gamma}\,|z-h\gamma|^3+|z-h(N-1)|^3+h^3-$$
$$-(1-z)^3(4+3\sqrt{3})+3h(1-z)^2(1-\sqrt{3})+q^N M_1(z)\Big],$$
$$\overset{\circ}{A}(z)=\frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},\ \overset{\circ}{B}(z)=\frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$

бу ерда

$$M_1(z)=3z(z+h)(z-h-\sqrt{3}z)+6h^2\frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},$$
$$N_1(z)=3(1-z)(1-z+h)(1-z-h-\sqrt{3}+\sqrt{3}z)-6h^2\frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$
$$f_1(z)=\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{\gamma+1}+q^{2N+1-\gamma})\,|z-h\gamma|^3+h^2zq(1-q^{2N})+$$
$$+hz^2(2q+1)(1+q^{2N})+z^3(q+1)+z^3q^{2N}(3q+1)+$$
$$+2h(1-z)^2(2q+1)q^N+(1-z)^3q^N(4q+2)\Big],$$
$$f_2(z)=-\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{N-\gamma+1}+q^{N+1+\gamma})\,|z-h\gamma|^3+$$
$$+h^2(1-z)q(1-q^{2N})+h(1-z)^2(2q+1)(1+q^{2N})+(1-z)^3(q+1)+$$
$$+(1-z)^3q^{2N}(3q+1)+2hz^2(2q+1)q^N+z^3q^N(4q+2)\Big],$$
$$q=\sqrt{3}-2.$$

Теорема 8. $L_2^{(3)}(0,1)$ фазода (28) оптимал интерполяцион формуланинг $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$ коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга

$$\overset{\circ}{C}_0(z)=\frac{1}{2h^5}\Big[-32z^5+|z-h|^5+(z+h)^5-10A(z)h^4+240(\lambda_1(z)+2\lambda_2(z))h^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^\gamma\,|z-h\gamma|^5+M_k(z)+q_k^N N_k(z)\right)\Big],$$
$$\overset{\circ}{C}_\beta(z)=\frac{1}{2h^5}\Big[|z-h(\beta-1)|^5-32|z-h\beta|^5+|z-h(\beta+1)|^5+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{|\beta-\gamma|}\,|z-h\gamma|^5+q_k^{\beta}M_k(z)+q_k^{N-\beta}N_k(z)\right)],\ \ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$\overset{\circ}{C}_N(z)=\frac{1}{2h^5}[-32(1-z)^5+|z-h(N-1)|^5+(h+1-z)^5+10B(z)h^4-$$

$$-240h^2\lambda_1(z)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{N-\gamma}\,|z-h\gamma|^5+q_k^{N}M_k(z)+N_k(z)\right)],$$

бу ерда

$$A_k=\frac{(1-q_k)^7}{q_k^5+57q_k^4+302q_k^3+302q_k^2+57q_k+1},$$

$$M_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^{\gamma}\left((z+h\gamma)^5-10\ \overset{\circ}{A}(z)(h\gamma)^4+240\left(\overset{\circ}{\lambda}_1(z)+2\overset{\circ}{\lambda}_2(z)\right)(h\gamma)^2\right),$$

$$N_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^5+10\ \overset{\circ}{B}(z)(h\gamma)^4-240\overset{\circ}{\lambda}_1(z)(h\gamma)^2\right),\quad k=1,2,$$

$\overset{\circ}{A}(z)$, $\overset{\circ}{B}(z)$ коэффициентлар ва $\overset{\circ}{\lambda}_1(z)$, $\overset{\circ}{\lambda}_2(z)$ лар маълум катталиклар.

Параграф 3.6 қуйидаги кўринишдаги оптимал интерполяцион формула қуришга бағишланган

$$\varphi(z)\cong P_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(x_\beta)+\sum_{\alpha=1}^{s}(A_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0)+B_\alpha(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1))\qquad(31)$$

Бу ерда $C_\beta(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $m=2s,\ s=1,2,3,...$, ва $x_\beta\in[0,1]$ — (31) формуланинг коэффициентлари ва тугун нуқталари, φ функция Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосига тегишли.

(31) кўринишдаги оптимал интерполяцион формулани қуриш масаласи қуйидагича шакллантирилади.

Масала 4. (31) формуланинг

$$\ell_N^{2s-1}(x,z)=\delta(x-z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-h\beta)+\sum_{\alpha=1}^{s}(A_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x)+B_\alpha(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x-1))$$

хатолик функционали учун x_β тугун нуқталар фиксирланган ҳолатда

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^{2s-1}\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_\beta(z),A_\alpha(z),B_\alpha(z)}\left\|\ell_N^{2s-1}\,|\,L_2^{(m)*}\right\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи $\overset{\circ}{C}_\beta(z),\ \beta=\overline{0,N},\ \ \overset{\circ}{A}_\alpha(z),\overset{\circ}{B}_\alpha(z),\ \ \alpha=\overline{1,s}$ коэффициентларни топинг.

Бу параграфда (31) кўринишдаги оптимал интерполяцион формуланинг коэффициентлари учун чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинган ва $m=4$ да $L_2^{(4)}(0,1)$ фазода $C_\beta(z),\ \beta=0,1,...,N,\ A_\alpha(z),$ $B_\alpha(z),\ \alpha=1,2$ оптимал коэффициентларнинг ошкор кўриниши олинган.

Ушбу парагрифнинг асосий натижаси.

Теорема 9. $L_2^{(4)}(0,1)$ фазода (31) кўринишдаги оптимал интерполяцион формуланинг $C_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $A_\alpha(z)$, $B_\alpha(z)$, $\alpha=1,2$ коэффициентлари қуйидаги формула билан ифодаланади.

$$\overset{\circ}{C}_0(z)=\frac{1}{2h^7}[-128z^7+|z-h|^7+(z+h)^7-14h^6A_1(z)-420h^4A_2(z)+$$

$$+10080(\lambda_1(z)+2\lambda_2(z))h^2+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^\gamma|z-h\gamma|^7+M_k(z)+q_k^N N_k(z)\right)],$$

$$\overset{\circ}{C}_\beta(z)=\frac{1}{2h^7}[|z-h(\beta-1)|^7-128|z-h\beta|^7+|z-h(\beta+1)|^7+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^7+q_k^\beta M_k(z)+q_k^{N-\beta}N_k(z)\right)],\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_N(z)=\frac{1}{2h^7}[-128(1-z)^7+|z-h(N-1)|^7+(h+1-z)^7+14h^6B_1(z)+420h^4B_2(z)-$$

$$-10080h^2\lambda_1(z)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{N-\gamma}|z-h\gamma|^7+q_k^N M_k(z)+N_k(z)\right)],$$

бу ерда

$$M_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^\gamma\Big((z+h\gamma)^7-14(h\gamma)^6A_1(z)-420(h\gamma)^4A_2(z)+$$

$$+10080\left(\lambda_1(z)+2(h\gamma)^2\lambda_2(z)\right)\Big),$$

$$N_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^\gamma\left((h\gamma+1-z)^7+14(h\gamma)^6B_1(z)+420(h\gamma)^4B_1(z)-10080(h\gamma)^2\lambda_1(z)\right),$$

$k=1,2,3,$ $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$, $\lambda_1(z)$ ва $\lambda_2(z)$ -маълум катталиклар.

Диссертациянинг **«Икки ўзгарувчили даврий функциялар фазосида Эрмит типидаги оптимал кубатур формулалар»** деб номланувчи тўртинчи бобида $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ даврий функциялар фазосида биринчи тартибли ҳосилали оптимал панжарали кубатур формула, яъни Эрмит типидаги кубатур формула қуриш қаралган. Бу ерда қаралаётган кубатур формуланинг экстремал функцияси олинган ва $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ қўшма фазосида унинг хатолик функционали нормасининг квадрати ҳисобланган. Бу норма коэффициентлар бўйича минималлаштирилиб чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинган. Системанинг ечими мавжуд ва ягоналиги исботланган. Ундан ташқари, бу системанинг ечими топилган яъни ҳосилали оптимал кубатур формула коэффициентлари ошкор ҳолда топилган ва оптимал хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.

Соболевнинг $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ даврий функциялар таърифини эслатамиз. Фараз қилайлик, $\varphi(x_1,x_2)$ функция R^2да $m-$тартиблигача локаль йиғилувчи ҳосилаларга эга бўлсин, ҳамда ихтиёрий чегараланган Ω_0 соҳага

$\int\limits_{\Omega_0}\sum\limits_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}(D^\alpha\varphi(x))^2dx$ интеграл мос келсин, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2),\ \alpha!=\alpha_1!\cdot\alpha_2!$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2,\ D^\alpha\varphi=\dfrac{\partial^m\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$. Фараз қилайлик, $m>1$ бўлсин $\varphi(x)$ функция эса даврларнинг H матрицаси билан даврий бўлсин: $\varphi(x+H\gamma)=\varphi(x)$, бунда $\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$- ихтиёрий бутун қийматли устун вектор, $\gamma_i\in Z, i=1,2$. H матрицага унинг фундаменталь параллелепипеди Ω_0ни қуйидагича деб мос қўямиз $\Omega_0=\{x\in R^2,\quad x=Hy,$ где $0\le y_i<1, i=1,2\}$. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазонинг элементлари бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилувчи функциялар. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазода норма қуйидаги кўринишга эга

$$\|\varphi\,|\,\widetilde{L_2^{(m)}}(H)\|^2=\int\limits_{\Omega_0}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\cdot(m-k)!}\left(\frac{\partial^m\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{m-k}\partial x_2^k}\right)^2dx_1dx_2.$$

Ушбу кўринишдаги

$$\int\limits_{\Omega_0}\varphi(x)dx\cong\sum_{k=1}^{N}\left(C_k\varphi(x^{(k)})+C_k^{(')}D\varphi(x_k)\right)\qquad(32)$$

кубатур формулани қараймиз, бу ерда $x^{(k)}\in\Omega_0$ нуқталар ва $C_k, C_k^{(')}$ параметрлар мос равишда кубатур формуланинг тугун нуқталари ва коэффициентлари дейилади. (32) кубатур формуланинг хатолиги қуйидагича ифодаланади

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_{\Omega_0}\varphi(x)dx-\sum_{k=1}^{N}\left(C_k\varphi(x^{(k)})+C_k^{(')}D\varphi(x_k)\right),$$

бу ерда $\ell(x)=\left(\mathcal{X}_{\Omega_0}(x)-\sum\limits_{k=1}^{N}\left(C_k\delta(x-x^{(k)})-C_k^{(')}\delta'(x-x^{(k)})\right)\right)*\Phi_0(H^{-1}x)$

$-$ кубатур формуланинг хатолик функционали, $\mathcal{X}_{\Omega_0}(x)=\begin{cases}1, & \text{агар}\quad x\in\Omega_0,\\ 0, & \text{агар}\quad x\notin\Omega_0,\end{cases}$

$\delta(x)-$Диракнинг дельта функцияси, $\Phi_0(H^{-1}x)=\sum\limits_{\beta}\delta(x-H\beta),\quad \beta=(\beta_1,\beta_2)$, β_i- бутун сонлар, яъни $\beta_i\in Z$.

Берилган N тугун нуқталар сони учун $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ фазосида энг кичик хатоликга эга бўладиган кубатур формулага оптимал кубатур формула дейилади.

(32) кубатур формуланинг экстремаль функцияси учун қуйидаги исботланган.

Теорема 10. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосида (32) кубатур формуланинг экстремаль функцияси

$$\psi_\ell(x) = -\sum_{k=1}^{N}(C_k B_{2m}(x-x^{(k)}) - C_k^{(')} B'_{2m}(x-x^{(k)})) - d_0 \qquad (33)$$

кўринишга эга. Бу ерда

$$B_{2m}(x-x^{(k)}) = \sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}}, \qquad B'_{2m}(x-x^{(k)}) = -\sum_{\beta\neq 0}\frac{2\pi i H^{*-1}\beta e^{-2\pi i H^{*-1}\beta(x-x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1}\beta|^{2m}},$$

d_0 -номаълум.

(32) кўринишдаги оптимал кубатур формуланинг коэффициентлари қуйидаги системанинг ечими бўлиши кўрсатилган

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} + \overset{\circ}{\lambda} +$$

$$+\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{(2\pi i\beta^* H^{-1})e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} = 0, \quad hHk'\in\Omega_0,$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{(2\pi i\beta^* H^{-1})e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}|^{2m}} -$$

$$-\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{(2\pi\beta^* H^{-1})^2 e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}} = 0, \quad hHk'\in\Omega_0,$$

$$\sum_{hH\beta\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}[\beta] = 1.$$

Охирги тенгламалар системаси ечилиб бу бобнинг қуйидаги асосий натижалари олинган.

Теорема 11. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ даврий функциялар фазосида (32) кўринишдаги оптимал кубатур формуланинг коэффициентлари куйидаги кўринишга эга

$$\overset{\circ}{C}[\gamma] = h^2, \qquad \overset{\circ}{C}{}^{(')}[\gamma] = 0, \qquad hH\gamma\in\Omega_0.$$

(42) кўринишдаги оптимал панжарали кубатур формуланинг хатолиги учун қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 12. $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ фазосидаги ҳосилали оптимал панжарали кубатур формуланинг хатолик функционалининг нормаси қуйидагича ифодаланади:

$$\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2 = \frac{h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\gamma\neq 0}\frac{1}{|H^{*-1}\gamma|^{2m}}.$$

ХУЛОСА

Диссертация иши Соболев фазоларида оптимал квадратур, кубатур ва оптимал интерполяцион формулалар қуришга, ҳамда уларнинг хатоликлари баҳоларини ҳисоблашга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилар.

1. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эрмит типидаги оптимал кавдратур формулаларнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.
2. Соболев фазосида Эрмит типидаги квадратур формулалар экстремаль функциясининг ноллари ҳақидаги И.Бабушка теоремасининг аналоги исботланган.
3. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида биринчи тартибли ҳосилали оптимал квадратур формулалар қурилган, ҳамда ихтиёрий $m \geq 2$ учун бу оптимал квадратур формулалар коэффициентларининг аналитик ифодалари олинган.
4. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида ихтиёрий $m \geq 2$ учун биринчи тартибли ҳосилали оптимал квадратур формулалар хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.
5. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулаларнинг ва Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формулаларнинг коэффициентлари учун чизиқли алгебраик тенгламалар системаси олинган.
6. Соболевнинг $L_2^{(m)}(0,1)$ фазосида $[\frac{m}{2}] \geq s \geq 1$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий m натурал сон учун Эйлер-Маклорен типидаги оптимал квадратур формулалар қурилган, ҳамда бу квадратур формулаларнинг коэффициентлари учун ошкор формулалар топилган ва уларнинг хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган. Хусусан, Соболев фазосида классик Эйлер-Маклорен квадратур формуласининг оптималлиги олинган.
7. $L_2^{(m)}(0,1)$ фазода m=2,3,4 бўлганда Эрмит типидаги оптимал интерполяцион формулалар қурилган.
8. Соболевнинг $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ икки ўзгарувчили даврий функциялар фазосида Эрмит типидаги оптимал кубатур формулалар қурилган ҳамда уларнинг коэффициентлари учун ошкор ифодалар олинган.
9. Соболевнинг $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ икки ўзгарувчили даврий функциялар фазосида оптимал кубатур формулалар хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

НУРАЛИЕВ ФАРХОД АБДУГАНИЕВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ КУБАТУРНЫЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ЭРМИТА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
(физико-математические науки)

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Ташкент – 2020

Тема докторской (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.3.DSc/FM87.

Докторская диссертация выполнена в Институте математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Бакоев Матёкуб Тешаевич доктор физико-математических наук, профессор
	Аллаков Исмоил доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Каракалпакский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2020 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 87). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» ноября 2020 года.
(протокол рассылки № 20 от 3 ноября 2020 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Мировые исследования, посвященные оптимальным квадратурным, кубатурным и интерполяционным формулам, являются актуальными и востребованными и имеют широкое применение в различных областях знаний. Приближенные вычисления интегралов и приближение функционалов лежат на основе численного решения интегральных и дифференциальных уравнений. Важной практической целью вычислительной математики является создание наилучших, т.е. кратчайших, наиболее быстрых и дешевых способов решения математических задач, т.е. оптимизация вычислительных алгоритмов. Это хорошо демонстрируется на примерах кубатурных и интерполяционных формул в различных функциональных пространствах. Поэтому построение оптимальных кубатурных и интерполяционных формул является актуальной задачей вычислительной математики.

В данный момент важное значение имеет получение оптимальных кубатурных, интерполяционных формул и сплайнов в Соболевских пространствах для приближенного вычисления интегралов и приближения функций. Полученные формулы рассматриваются как высокоточные математические модели для естественных процессов. Поэтому реализация целевых научных исследований, в следующих направлениях является одной из главных проблем: получение асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку кубатурных формул; разработка кубатурных формул, основанных на методах теории вероятности; построение оптимальных кубатурных, интерполяционных формул и оценки их погрешностей; построение натуральных сплайнов в различных гильбертовых и банаховых пространствах. Научные изучения, проводимые в этих областях, обосновывает важность темы диссертации.

В нашей стране большое внимание уделяется изучению квадратурных и интерполяционных формул, имеющих научное и практическое применение фундаментальных науках, в частности, особое внимание уделяется построению новых оптимальных квадратурных и интерполяционных сплайнов типа Эрмита. Научные исследования, проводимые в направлении вычислительной математики также обозначены в качестве основных задач и направлений введения научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям как теория дифференциальных уравнений, математического и функционального анализа, алгебры, теория вероятностей и математической статистики и математического моделирования в деятельности Института математики АН РУз[2]. Для обеспечения выполнения постановления важно построить и изучить квадратурные, кубатурные и интерполяционные формулы типа Эрмита.

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

Настоящая диссертационная работа предназначена для решения задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-4387 от 09 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан», № ПП-4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» и в других нормативно-правовых актах, относящихся или касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV - «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Научные исследования по получении кубатурных и интерполяционных формул и по оценкам их погрешностей ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в Институте математики им. С.Л.Соболева СО РАН (Россия), Институте вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (Россия), Институте прикладной математики им. Н.В.Келдыша РАН, Математическом институте им. В.Л.Стеклова РАН, Институте вычислительной математики им. Г.И.Марчука РАН, Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском, Сибирском федеральных университетах, Институте математики с вычислительным центром Уфимского научного центра, Babes-Bolyai University (Румыния), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Сербия), Katholieke Universiteit (Бельгия), Korean Institute of Science and Technology (Республика Корея), University of Meryland, Kettering University, Columbia University, Harvard University, Purdue University, Venderbild University (США), University of Oslo (Норвегия), Universidad de Zaragoza, Universidad Pública de Navarra, University of Satiago de Compostela (Испания), Technische Universität Braunschweig (Германия), Universita degli Studi di Roma La Sapienza, Universita della Basilicata (Италия), Katholieke Universiteit, Leuven (Бельгия), Universite de Toulouse, Université Joseph Fourier (Франция).

В рамках исследований по квадратурным, кубатурным и интерполяционным формулам на мировом уровне получены следующие важные результаты: построены оптимальные квадратурные формулы с равноотстоящими узлами в пространствах функций производных первого порядка, интегрируемых с квадратом (США), и в пространствах функций производных второго порядка, интегрируемых с квадратом (Румыния). Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита построены в пространстве функций производных второго порядка, суммируемых с квадратом (Румыния); получены оценки погрешности кубатурных формул, построенных на основе методов Квази Монте-Карло и Монте-Карло на весовых пространствах Соболева (Institute of mathematics of Jena University (Германия), Columbia University (США)); на основе методов $\varphi-$функций и сплайн-функций в различных гильбертовых пространствах построены оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда (Columbia University, University of Maryland, University of Wisconsin-Madison (США)), Technische Universität Braunschweig (Германия), Babeş-Bolyai University (Румыния), Universita degli Studi di Roma La Sapienza (Италия)); с использованием методов функционального анализа доказаны существование и единственность и разработаны теории построения D^m - сплайнов, L - сплайнов и абстрактных сплайнов в различных гильбертовых пространствах (University of Wisconsin-Madison, Harvard University, Purdue University, Vanderbilt University (США), University of Oslo (Норвегия), Université Joseph Fourier (Франция), Институт вычислительной математики и математической геофизики (Россия)); построены квадратурные формулы типа Гаусса для регулярных и сильно осциллирующих интегралов (Mathematical institute of the Serbian Academy of Sciences and Arts); для коэффициентов оптимальных решетчатых кубатурных формул над пространством $L_2^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ получена система типа Винера-Хопфа, доказаны существование и единственность решения этой системы (Институт математики имени С.Л.Соболева Сибирского отделения РАН, Новосибирский государственный университет (Россия), Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз.

В эти дни активно ведутся научно-исследовательские работы в следующих приоритетных направлениях вычислительной математики: построение квадратурных, кубатурных формул и интерполяционных сплайнов; оценка погрешностей построенных формул и их применение в различных важных практических задачах, а именно: нахождение экстремальных функций квадратурных, кубатурных формул и интерполяционных сплайнов типа Эрмита в гильбертовых пространствах; вычисление норм функционалов погрешностей соответствующих формул и сплайнов с использованием найденных экстремальных функций; исследование существования и единственности оптимальных квадратурных, кубатурных формул и интерполяционных сплайнов типа Эрмита; разработка новых алгоритмов построения оптимальных кубатурных формул и интерполяционных сплайнов типа Эйлера-Маклорена с помощью дискретных аналогов линейных дифференциальных операторов, а также нахождение аналитических форм оптимальных коэффициентов.

Степень изученности проблемы. Оптимизационные задачи по построению квадратурных формул различного типа и изучение их сходимостей, на основе методов функционального анализа, первоначально были приведены в научных работах А.Сарда и С.М.Никольского. Изучение аналогичных оптимизационных задач для кубатурных формул было начато С.Л.Соболевым. Дальнейшие исследования по построению наилучших квадратурных формул и оценке их погрешностей были проведены такими авторами, как С.М.Никольский, Н.П.Корнейчук, Т.Н.Бусарова, Б.Боянов, Т.А.Гранкина, А.А.Женсыкбаев, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигун, В.П.Моторный, К.И.Оскольков, М.А.Чахкиев. Построение асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку и инвариантных кубатурных формул было изучено в работах С.Л.Соболева, О.В.Бесова, Н.И.Блинова, В.Л.Васкевича, М.И.Исраилова, Г.П.Исматуллаева, С.И.Коняева, Н.М.Коробова, В.И.Лебедева, И.П.Мысовских, М.В.Носкова, В.И.Половинкина, М.Д.Рамазанова, Г.Н.Салихова, Т.И.Хаитова, М.Ш.Шабозова, Э.Шамсиева, Т.Х.Шарипова, И.Ф.Шарыгина, Ц.Б.Шойнжурова, Б.Эшдавлатова, З.Эшкуватова, R.Cools, P.J.Davis и P.Rabinovitz, Y.G.Shi, S.B.Stoyanova, A.H.Stroud, A.Babos и A.M.Acu. Задача построения формул приближенного вычисления интегралов, основанных на методах Монте-Карло и Квази Монте-Карло, изучена, например, в работах Н.С.Бахвалова, С.М.Ермакова, И.М.Соболь, Н.Н.Ченцова, Г.А.Михайлова, А.С.Расулова, М.Т.Бакоева, Г.Раимовой, E.Novak и H.Wozniakovski.

При построении оптимальных квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул используются сплайн-метод, метод $\varphi-$функций и метод Соболева. При этом оптимальные формулы получаются за счет минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам при фиксированных узлах. Оптимальные квадратурные формулы различного типа в Соболевском фактор-пространстве построены в работах A.Sard, L.F.Meyers, G.Coman, I.J.Schoenberg, S.D.Silliman, P.Kohler, основываясь на методе сплайнов, а в работах A.Ghizzetti и A.Ossicini, F.Lanzara, T.Catinaş и G.Coman - с использованием метода $\varphi-$функций. При построении оптимальных кубатурных формул по методу Соболева результаты С.Л.Соболева по нахождению коэффициентов оптимальных квадратурных формул обобщили выше упомянутые исследования, в которых применен метод сплайнов. Дальнейшее развитие алгоритма, предложенного С.Л.Соболевым в различных гильбертовых пространствах, отражается в научных исследованиях З.Ж.Жамалова, Ф.Я.Загировой, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова, Н.Х.Маматовой, Д.М.Ахмедова, С.С.Азамова, Н.Д.Болтаева и др.

Теория сплайнов, основанная на вариационных методах, изучалась и развивалась в работах Д.ж. Алберга, Э. Нильсона и Дж. Уолша, П.Ж.Лорана, I.Schoenberg, C. de Boor, J.Duchon R.Arcangeli, M.C.Lopez de Silanes и

J.J.Torres, В.А. Василенко, M.Attea, A.Barlinet и C.Tomas-Agnan, L.L.Schumaker, T.Lyche, B.Bojanov, С.Б.Стечкина и Ю.Н.Субботина, Ю.С.Завьялова, Б.И.Квасова и В.Л.Мирошниченко М.И.Игнатева и А.Б.Певного, G.Nurnberger, А.Ю.Бежаева, G.V.Milovanovic, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова, а также С.С.Бабаева.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» (2012-2016) Института математики при Национальном университете Узбекистана, ЁФ4-ОТ-010509-ЁФ4-5 «Построение оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в гилбертовых пространствах $W_2^{P_m}(0,1)$» (2014-2015) Института математики при Национальном университете Узбекистана, ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов для приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в гильбертовых пространствах» (2017-2020) Института математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Целью исследования являются построение оптимальных решетчатых квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул типа Эйлера-Маклорена и Эрмита в пространствах Соболева и вычисление норм их оптимальных функционалов погрешностей.

Задачи исследования. В фактор пространстве Соболева $L_2^{(m)}$:

получить выражений для квадрата нормы функционала погрешности квадратурной формулы используя экстремальной функции этой квадратурной формулы;

используя метод нахождения условных экстремумов многопеременных функций получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита и найти условия существования и единственности решения этой системы;

найти аналитические выражения для коэффициентов оптимальных квадратурных формул типа Эйлера-Маклорена и вычислить норму оптимального функционала погрешности;

получить систему линейных уравнений типа Винера-Хопфа для коэффициентов оптимальных интерполяционных формул с производными;

используя дискретный аналог дифференциального оператора $2m$-го порядка найти явные формы коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы с производными;

построить решетчатых оптимальных кубатурных формул типа Эрмита и изучить порядка их сходимости в пространстве Соболева периодических двух переменных функций.

Объект исследования: квадратурные, кубатурные и интерполяционные формулы в пространствах Соболева периодических и непериодических функций.

Предмет исследования: системы для оптимальных коэффициентов решетчатых квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул, норма функционала погрешностей оптимальных формул, оптимальные решетчатые квадратурные, кубатурные и интерполяционные формулы типа Эрмита в пространствах Соболева периодических и непериодических функций.

Методы исследования. В диссертации использованы методы вычислительной математики, математического анализа, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказаны существование и единственность оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

доказан аналог теоремы И. Бабушки о нулях экстремальной функции квадратурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева;

построены оптимальные квадратурные формулы с производными первого порядка в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, а также получены аналитические выражения коэффициентов этих оптимальных квадратурных формул для любого $m \geq 2$;

вычислена норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул с производными первого порядка в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

получены системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул типа Эйлера-Маклорена и оптимальных интерполяционных формул типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$;

построены оптимальные квадратурные формулы типа Эйлера-Маклорена в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого натурального m, удовлетворяющего условию $[\frac{m}{2}] \geq s \geq 1$, при этом найдены явные формулы для коэффициентов этих квадратурных формул и вычислена их норма функционала погрешности.

построены оптимальные интерполяционные формулы типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ при m=2,3,4;

получены явные выражения для коэффициентов оптимальных кубатурных формул типа Эрмита в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических двух переменных функций и вычислена их норма функционала погрешности.

Практические результаты исследования заключаются в построении оптимальных решетчатых квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул типа Эрмита, позволяющих с высокой точностью приближенно вычислить определенные интегралы. Кроме того, они могут быть применены для приближенного решения интегральных и дифференциальных уравнений. Полученные аналитические выражения для коэффициентов построенных оптимальных формул могут быть эффективно применены при решении конкретных прикладных задач.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов вычислительной математики, математического анализа, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических выкладок.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в том, что в пространствах Соболева разработан алгоритм построения оптимальных решетчатых квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул типа Эрмита.

Практическая значимость определяется широким диапазоном применения построенных решетчатых оптимальных квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул для решения задач прикладной науки.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов по построению оптимальных решетчатых квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул типа Эрмита и оценке их погрешностей:

Оптимальные интерполяционные формулы с производными построенные в пространстве Соболева были использованы при разработке численных методов решения обикновенных дифференциальных уравнений дробного порядка в гранте №АААА-А20-120021190003-1 и №АААА-А20-120021190004-8 (Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга (Россия), справка № 433-01, от 11 сентября 2020 года). Применение научного результата позволило доказать теоремы устойчивости и сходимости нелокальных явных раностных-схем для осцилляторов дробного порядка.

Оптимальные решетчатые кубатурные и интерполяционные формулы типа Эрмита использованы для интерпретация экспериментальных результатов по теории фазовых переходов в кубических и ромбоэдрических слабых ферромагнитах, для оценки температурной зависимости спонтанного магнитного момента на слабых ферромагнитах в гранте №Ф2-ФА-0-83921/Ф2-ФА-Ф0383-«Сильная взаимосвязь в проводниках и магнитных материалах и расчет их критических параметров» (Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, справка № 89-03-3182 от 9 сентября 2020 года). Применение научных результатов позволили оптимально аппроксимировать зависимости интенсивности света проходящий через системы поляризатор-образец-анализатор с ориентацией магнитного поля слабо намагниченной плоскости в слабих ферромагнитах.

Методы построения оптимальных квадратурных формул с производными и их оценка погрешностей в пространстве Соболева были использованы в построении оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда и Никольского и оценки ин точностей в различных гильбертовых пространствах в зарубежных научных журналах (Applied Mathematics and

Information Sciences, Volume 9, no 3, Pages 1231-1238, 2015; Applied Mathematics and Computation, Volume 276, 5 March 2016, Pages 340-355; Journal of Siberian Federal University- Mathematics and Physics, Volume 11 (6), Pages 764–775, 2018; Filomat, Volume 33, Issue 17, Pages 5661-5675, 2019). Применение научного результата позволил получить оптимальные квадратурные формулы типа Эйлера-Маклорена и оптимальные интерполяционные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 12 научно-практических конференциях, в том числе, на 8 зарубежных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 34 научные работы, из них 21 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 5 опубликованы в зарубежных журналах и 16 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 188 страниц и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации **«Оптимальные квадратурные формулы типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$»** посвящена исследованию оптимальных квадратурных формул общего вида типа Эрмита. Здесь $L_2^{(m)}(0,1)$ – пространство функций, m-е обобщенное производное которых суммируется с квадратом на отрезке [0,1]. В пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ доказаны существование и единственность оптимальных квадратурных формул типа Эрмита; получен аналог теоремы И.Бабушки о нулях экстремальной функции квадратурных формул типа Эрмита; построены оптимальные квадратурные формулы с производными первого порядка, а также получены аналитические выражения коэффициентов этих оптимальных квадратурных формул и вычислена норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул с производными первого порядка для любого $m \geq 2$;

Далее, подробно приведем результаты первой главы.

Рассмотрим следующую общую квадратурную формулу типа Эрмита:

$$\int_0^1 p(x)\varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t} C_\beta^{(\upsilon)}\varphi^{(\upsilon)}(x_\beta) \qquad (1)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^t(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x)p(x) - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t}(-1)^\upsilon C_\beta^{(\upsilon)}\delta^{(\upsilon)}(x-x_\beta) \qquad (2)$$

в некотором пространстве Банаха B. Здесь $C_\beta^{(\upsilon)}$ – коэффициенты и x_β - узлы квадратурной формулы (1), N – натуральное число, $p(x)$ – весовая функция, у которой $\int_0^1 p(x)dx < \infty$, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – индикатор отрезка [0,1], $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, φ – элемент пространства Банаха B, $\beta = 0,1,...,N$, $\upsilon = 0,1,...,t$, $0 \leq t \leq m-1$.

Разность

$$\left(\ell_N^t,\varphi\right) = \int_0^1 p(x)\varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\upsilon=0}^{t} C_\beta^{(\upsilon)}\varphi^{(\upsilon)}(x_\beta) = \int_R \ell_N^t(x)\varphi(x)dx \qquad (3)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1).

По неравенству Коши-Шварца

$$|(\ell_N^t,\varphi)| \leq \|\varphi \,|\, B\| \cdot \|\ell_N^t \,|\, B^*\|$$

абсолютное значение разности (3) оценивается с помощью нормы функционала погрешности (2)

$$\left\|\ell_N^t \,|\, B^*\right\| = \sup_{\|\varphi|B\|=1} |(\ell_N^t,\varphi)|$$

в сопряженном пространстве B^*.

Таким образом, верхняя оценка погрешности (3) квадратурной формулы (1) на функциях пространства B соответствует нахождению нормы функционала погрешности ℓ_N^t в сопряженном пространстве B^*.

Из (2) видно, что норма функционала погрешности ℓ_N^t выражается с помощью коэффициентов и узлов квадратурной формулы (1). Задача нахождения минимума нормы функционала погрешности ℓ_N^t по коэффициентам и узлам называется *задачей С.М.Никольского*, а полученная квадратурная формула назвается *оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского*. Эта задача впервые рассмотрена С.М.Никольским, а ее исследование продолжено многими авторами: Н.П.Корнейчуком, Т.Н.Бусаровой, Б.Бояновым, Т.А.Гранкиной, А.А.Женсыкбаевым, Н.Е.Лушпай, А.А.Лигун, В.П.Моторным, К.И.Оскольковым, A.Babos, A.M. Acu, P. Blaga, B. Bojanov, T. Catinas, Gh. Coman. Минимизация нормы функционала погрешности ℓ_N^t по коэффициентам при фиксированных узлах называется *задачей Сарда*. Полученная формула называется *оптимальной квадратурной формулой в смысле Сарда.* Впервые эта задача исследована А.Сардом.

Результаты этой главы связаны с задачей Сарда. Поэтому здесь мы обсудим некоторые прежние результаты касательно оптимальных квадратурных формулах в смысле Сарда, которые тесно связаны с нашими результатами.

Пусть $W_{L_p}^m$ ($m=1,2,...,\ 1\le p\le\infty$) – класс функций f, имеющий на [0,1] $(m-1)$ абсолютно непрерывную производную и $\|f^{(m)}\|_p\le 1$, где $\|\cdot\|_p=\|\cdot\|_{L_p(0,1)}$. В работе А.А.Женсыкбаева доказано, что среди оптимальных квадратурных формул (1) при $p(x)=1$ квадратурная формула Эйлера-Маклорена является оптимальной в пространстве $W_{L_p}^m$. В работе Х.М.Шадиметова доказана оптимальность решетчатой кубатурной формулы типа Эйлера-Маклорена в пространстве $L_2^{(m)}$.

В работе T. Catinas и Gh. Coman с использованием метода $\varphi-$функций доказана оптимальность квадратурной формулы Эйлера-Маклорена и вычислена погрешность этой формулы в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$. Также с использованием этого метод в работе F. Lanzara обсуждена процедура построения оптимальных квадратурных формул вида (1), которые точны для решения линейных дифференциальных операторов и являются оптимальными в смысле Сарда.

Следует отметить, что в приложениях формула (1) представляет интерес для малых значений параметра t. Оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда для случая $t=0$ уже обсуждались многими авторами, в основном в пространстве $L_2^{(m)}$.

Одной из основных проблем квадратурных формул типа Эрмита вида (1) является построение оптимальных квадратурных формул в случаях $1\le t\le m-2$.

В диссертационной работе параграф 1.2 является вспомогательным, включающим определения, некоторые известные формулы и результаты, которые используются в доказательствах основных результатов данной работы.

В параграфе 1.3 исследуется задача существования и единственности оптимальных квадратурных формул (1) типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Функционал ℓ_N^t вида (2) определен в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ и на него налагаются условия

$$\left(\ell_N^t, x^\alpha\right)=0 \quad \text{при} \qquad \alpha=0,1,...,m-1. \tag{4}$$

Задача построения оптимальной квадратурной формулы вида (1) с функционалом погрешности (2) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ заключается в нахождении величины

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^t \left| L_2^{(m)*}(0,1) \right. \right\|^2 = \inf_{C_\beta^{(\upsilon)}} \left| \left(\ell_N^t, \psi_{\ell_N^t} \right) \right| \qquad (5)$$

при фиксированных узлах x_β. В формуле (5) $\psi_\ell(x)-$ экстремальная функция квадратурных формул (1) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Для неё имеет место следующая теорема Соболева.

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности ℓ_N^t в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеет вид

$$\psi_{\ell_N^t}(x) = (-1)^m \ell_N^t(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x), \qquad (6)$$

где $G_m(x)$ - функция Грина оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$:

$$G_m(x) = \frac{x^{2m-1} sign x}{2(2m-1)!}; \qquad (7)$$

$P_{m-1}(x)-$некоторый многочлен степени $m-1$.

С использованием экстремальной функции (6) вычислен квадрат нормы функционала погрешности ℓ_N^t. Далее, для коэффициентов $C_\beta^{(\upsilon)}$, которые достигают экстремума квадрата нормы ℓ_N^t функционала погрешности при условиях (4), получена система

$$\sum_{\beta'=0}^{N} \sum_{\upsilon=0}^{t} C_\beta^{(\upsilon)} G_m^{(\upsilon+\upsilon')}(x_{\beta'} - x_\beta) + \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k x_\beta^{k-\upsilon'} = f_\beta^{(\upsilon')}, \ \upsilon' = \overline{0,t}, \ \beta = \overline{0,N}, \qquad (8)$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} \sum_{\upsilon=0}^{t} \frac{k!}{(k-\upsilon)!} C_\beta^{(\upsilon)} \theta(k-\upsilon) x_\beta^{k-\upsilon} = g_k, \ \ k = 0,1,...,m-1, \qquad (9)$$

где $f_\beta^{(\upsilon')} = \int_0^1 p(x) G_m^{(\upsilon')}(x - x_\beta) dx, \ \ g_k = \int_0^1 p(x) x^k dx, \ \ \theta(k-\upsilon) = \begin{cases} 1, \text{ если } & k-\upsilon \ge 0, \\ 0, \text{ если } & k-\upsilon < 0. \end{cases}$

Исследована единственность решения системы (8)-(9). При этом доказано, что решение этой системы доставляет локальный минимум $\left\| \ell_N^t \right\|^2$ на множестве решений системы (4).

В результате непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функционал погрешности ℓ_N^t квадратурных формул вида (1) определен на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, т.е. его значения для всех многочленов степени $\le m-1$ равны нулю, и пусть этот функционал оптимален, т.е. среди всех функционалов вида (2) с заданным узлом x_β он имеет наименьшую норму в $L_2^{(m)}(0,1)$. Тогда существует решение $\psi_{\ell_N^t}$

уравнения $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\psi_{\ell_N^t}(x)=(-1)^m\ell_N^t(x)$, которое обращается в нуль со своими производными порядка υ $\left(\upsilon=0,1,2,...,t;\ t=0,1,2,...,m-1\right)$ в узлах x_β, т.е. $\psi_{\ell_N^t}^{(\upsilon)}(x_\beta)=0$, и она принадлежит в пространству $L_2^{(m)}(0,1)$.

Теорема 2 обобщает теорему И. Бабушки о нулях экстремальной функции оптимальных квадратурных формул.

В параграфах 1.4-1.8 построены оптимальные квадратурные формулы вида (1) в смысле Сарда и исследованы их погрешности для случая $t=1$ при $p(x)=1$ для любого $m\geq 2$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\varphi(h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\varphi'(h\beta) \tag{10}$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^1(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\delta(x-h\beta)+\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\delta'(x-h\beta) \tag{11}$$

в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ для $m\geq 2$. При этом $C_0[\beta]=\begin{cases}h/2, & \beta=0,N,\\ h, & \beta=\overline{1,N-1},\end{cases}$ - известные коэффициенты и $C_1[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ - неизвестные коэффициенты $h=1/N$, $N-$ натуральное число.

Для функционала погрешности (11), определенного на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, налагаются условия

$$(\ell_N^1,x^\alpha)=0,\quad \alpha=0,1,2,...,m-1.$$

Отсюда ясно, что для существования квадратурной формулы вида (10) должно быть выполнено условие $N\geq m-1$.

Задача 1. Найти оптимальные коэффициенты $C_1[\beta]$, которые удовлетворяют равенству

$$\left\|\mathring{\ell}_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_1[\beta]}\left\|\ell_N^1\,|\,L_2^{(m)*}\right\|,$$

и вычислить $\left\|\mathring{\ell}_N^1\right\|$.

Здесь задача 1 решена полностью. При этом сначала для коэффициентов $C_1[\beta]$ оптимальных квадратурных формул вида (10) получена система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma]G_m''(h\beta-h\gamma)+P_{m-2}(h\beta)=\ f_{m,1}(h\beta),\beta=\overline{0,N}, \tag{12}$$

$$\alpha\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta](h\beta)^{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha+1}-\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta](h\beta)^{\alpha},\ \alpha=\overline{0,m-1}, \tag{13}$$

где $G_m(x)$ определяется по формуле (7), $P_{m-2}(h\beta)$ является неизвестным многочленом степени $m-2$ и

$$f_{m,1}(h\beta)=\sum_{i=0}^{2m-3}\frac{(h\beta)^{2m-3-i}}{(2m-3-i)!\cdot i!}\left[\frac{(-1)^{2m-3-i}}{2(i+1)(i+2)}+\frac{h^{i+2}B_{i+2}}{(i+1)(i+2)}-\frac{1}{2(i+1)}\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\gamma](-h\gamma)^{i+1}\right],$$

здесь B_{i+2} – число Бернулли.

В системе (12)-(13) неизвестными являются коэффициенты $C_1[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ и многочлен $P_{m-2}(h\beta)$. Система (12)-(13) имеет единственное решение, которое дает минимум норме $\left\|\ell_N^1 \middle| L_2^{(m)*}\right\|^2$. Доказательство существования и единственности решения этой системы получается из доказательства существования и единственности решения дискретной системы (8)-(9).

Основными результатами этой главы являются следующие теоремы о коэффициентах оптимальных квадратурных формул вида (10) и о погрешности этих оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Теорема 3. Среди квадратурных формул вида (10) с функционалом погрешности (11) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ существует единственная квадратурная формула, коэффициенты которой определяются формулами

$$\overset{\circ}{C}_0[0]=\overset{\circ}{C}_0[N]=h/2,$$

$$\overset{\circ}{C}_0[\beta]=h,\ \ \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_1[0]=h^2\left(\frac{1}{12}-\sum_{k=1}^{m-2}d_k\frac{q_k^N+q_k}{1-q_k}\right),$$

$$\overset{\circ}{C}_1[\beta]=h^2\sum_{k=1}^{m-2}d_k\left(q_k^{\beta}-q_k^{N-\beta}\right),\ \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_1[N]=-h^2\left(\frac{1}{12}-\sum_{k=1}^{m-2}d_k\frac{q_k^N+q_k}{1-q_k}\right),$$

где d_k удовлетворяют следующей системе $(m-2)$ линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m-2}d_k\sum_{i=1}^{\alpha}\frac{q_k^{N+i}+(-1)^i q_k}{(1-q_k)^{i+1}}\Delta^i 0^{\alpha}=\frac{B_{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)},\ \alpha=\overline{1,m-2};$$

здесь B_α – числа Бернулли, $\Delta^i\gamma^\alpha$ – конечная разность порядка i от γ^j, $\Delta^i 0^\alpha=\sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}C_i^l l^\alpha$, q_k – корни многочлена Эйлера-Фробениуса степени $(2m-4)$, $|q_k|<1$.

Теорема 4. Для квадрата нормы функционала погрешности (11) оптимальной квадратурной формулы вида (10) на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ справедливо следующее:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^1 \mid L_2^{(m)*}(0,1) \right\|^2 = (-1)^{m+1}\left[\frac{B_{2m}h^{2m}}{(2m)!} + h^{2m+1}\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{i=0}^{2m-2}\sum_{\alpha=1}^{2m-3-i} \frac{B_{i+2}\theta_\alpha(q_k)\Delta^\alpha 0^{2m-3-i}}{(i+2)!(2m-3-i)!} \right],$$

где $\theta_\alpha(q_k) = \dfrac{2d_k(q_k^{N+\alpha} + (-1)^\alpha q_k)}{(1-q_k)^{\alpha+1}}$, d_k - определены в теореме 3, B_α - числа Бернулли, $\Delta^i 0^{2m} = \sum_{l=1}^{i}(-1)^{i-l}C_i^l l^{2m}$, q_k - корни многочлена Эйлера- Фробениуса степени $(2m-4)$ и $|q_k|<1$.

В частности, из теорем 3 и 4 для случаев $m=2,3$ нами получены результаты, подтверждающие оптимальность классической квадратурной формулы Эйлера-Маклорена.

Далее, в параграфе 1.9 приведены численные результаты, подтверждающие теоретические результаты данной главы.

Вторая глава диссертации **«Оптимальные квадратурные формулы типа Эйлера-Маклорена в пространстве Соболева»**, посвящена построению оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, квадратурная сумма в котором состоит из значений подынтегральной функции в узлах и значений производных этой функции на концах интервала интегрирования.

Рассмотрена следующая квадратурная формула типа Эйлера-Маклорена:

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(h\beta) + \sum_{n=1}^{s} A_n(\varphi^{(2n-1)}(0) - \varphi^{(2n-1)}(1)) \qquad (14)$$

с функционалом погрешности

$$\ell_N^{2s-1}(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x-h\beta) + \sum_{n=1}^{s} A_n(\delta^{(2n-1)}(x) - \delta^{(2n-1)}(x-1)) \qquad (15)$$

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. Здесь $C[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ и A_n, $n=\overline{1,s}$, - коэффициенты формулы (14), $1 \le s \le [m/2]$, $h=1/N$, $N-$ натуральное число, $\varepsilon_{[0,1]}(x)-$характеристическая функция интервала [0,1], $\delta-$дельта - функция Дирака.

Погрешность квадратурной формулы (14) имеет вид

$$(\ell_N^{2s-1},\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi[\beta] - \sum_{n=1}^{s} A_n\left(\varphi^{(2n-1)}(0) - \varphi^{(2n-1)}(1)\right).$$

Функционал погрешности (15) удовлетворяет следующим условиям ортогональности, означающим точность квадратурных формул многочленов степени $\le m-1$:

$$(\ell_N^{2s-1}, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0,1,2,...,m-1. \tag{16}$$

Отсюда видно, что для существования квадратурных формул вида (14) должно выполняться условие $N + s \geq m - 1$.

В рассматриваемом случае норма функционала погрешности (15) зависит от коэффициентов $C[\beta]$ и A_n. В данной главе исследуется задача минимизации этой нормы по коэффициентам $C[\beta]$ и A_n, т.е. нами найдена следующая величина:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^{2s-1} \,|\, L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C[\beta], A_n} \left\| \ell_N^{2s-1} \,|\, L_2^{(m)*} \right\|. \tag{17}$$

Таким образом, чтобы построить оптимальные квадратурные формулы вида (14) в смысле Сарда, мы решаем следующие задачи.

Задача 2. Найти коэффициенты $C[\beta]$ и A_n, которые удовлетворяют равенству (17), а также вычислить квадрат нормы функционала погрешности (15) оптимальных квадратурных формул (14) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Далее, в этой главе в параграфе 2.2 определяется экстремальная функция, которая соответствует функционалу погрешности ℓ_N^{2s-1}, и вычислено выражение нормы функционала погрешности (15). В параграфе 2.3 получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул (14) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Остальные параграфы посвящены минимизации нормы $\left\|\ell_N^{2s-1}\right\|^2$ относительно коэффициентов $C[\beta]$ и A_n. В конце главы найдены явные формулы для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы вида (14). Также вычислена норма функционала погрешности (15) оптимальной квадратурной формулы (14), которая указывает на то, что порядок сходимости этой оптимальной квадратурной формулы равен $O(h^m)$. Кроме того, представлены численные результаты, которые подтверждают полученные теоретические результаты.

Приведем основные результаты второй главы.

Для оптимальных коэффициентов $C[\beta]$ и A_n, удовлетворяющих (17) с учетом условий (16), получена следующая система:

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} - \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{((h\beta)^{2m-2k} + (1-h\beta)^{2m-2k})}{2(2m-2k)!} +$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{m-1} \lambda_\alpha (h\beta)^\alpha = f_m(h\beta), \qquad \beta = \overline{0,N}, \tag{18}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta] \frac{((h\beta)^{2m-2k} + (1-h\beta)^{2m-2k})}{2(2m-2k)!} - \sum_{n=1}^{s} \frac{A_n}{(2m-2n-2k+1)!} +$$

$$+\sum_{\alpha=2k}^{m-1} \alpha(\alpha-1)...(\alpha-2k+2)\cdot\lambda_\alpha = \frac{1}{(2m-2k+1)!}, \quad k = \overline{1,s}, \tag{19}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta](h\beta)^{\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} + \sum_{n=1}^{s} A_n \frac{\alpha! \cdot \theta(\alpha-2n+1)}{(\alpha-2n+1)!}, \ \alpha = \overline{0, m-1}, \tag{20}$$

где $f_m(h\beta) = \int_0^1 \frac{|x-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!}\,dx$ и $\theta(\alpha-2n+1) = \begin{cases} 1, & \alpha-2n+1 \geq 0, \\ 0, & \alpha-2n+1 < 0. \end{cases}$

Для оптимальных коэффициентов, которые является решением системы (18)-(20) доказана следующая теорема.

Теорема 5. Среди квадратурных формул вида (14) с функционалом погрешности (15) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, $1 \leq s \leq [m/2]$, существует единственная оптимальная квадратурная формула, коэффициенты которой определяются с помощью формул

$$\overset{\circ}{C}[0] = h\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \frac{q_k^N - q_k}{1-q_k}\right), \tag{21}$$

$$\overset{\circ}{C}[\beta] = h\left(1 + \sum_{k=1}^{m-1} d_k (q_k^{\beta} + q_k^{N-\beta})\right), \ \beta = \overline{1, N-1}, \tag{22}$$

$$\overset{\circ}{C}[N] = h\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k \frac{q_k^N - q_k}{1-q_k}\right), \tag{23}$$

$$\overset{\circ}{A}_n = \frac{h^{2n} B_{2n}}{(2n)!} - \frac{h^{2n}}{(2n-1)!} \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{2n-1} d_k \frac{q_k + q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^{2n-1}, \qquad n = \overline{1, s}, \tag{24}$$

где d_k удовлетворяют системе $(m-1)$ линейных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{j} d_k \frac{q_k + q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^j = \frac{B_{j+1}}{j+1}, \ j = \overline{2s, m-1}, \tag{25}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{2m-2j} d_k \frac{q_k + q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^{2m-2j} = 0, \quad j = \overline{1, s}, \tag{26}$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i=0}^{2j} d_k \frac{q_k + q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^{2j} = 0, \quad j = \overline{1, s-1}. \tag{27}$$

Здесь B_{α} – числа Бернулли, $\Delta^i \gamma^j$ – конечная разность порядка i от γ^j, $\Delta^i 0^j = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^j$, q_k- корни многочлена Эйлера-Фробениуса степени $2m-2$, удовлетворяющие условию $|q_k| < 1$.

Теорема 6. Для квадрата нормы функционала погрешности (15) оптимальной квадратурной формулы вида (14) на пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, $1 \leq s \leq [\frac{m}{2}]$ имеет место следующее равенство:

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}_N^{2s-1} \middle| L_2^{(m)*} \right\|^2 = (-1)^{m+1} \left[\frac{B_{2m} h^{2m}}{(2m)!} - \frac{2h^{2m+1}}{(2m)!} \sum_{k=1}^{m-1} d_k \sum_{i=0}^{2m} \frac{q_k + q_k^{N+i}(-1)^{i+1}}{(q_k-1)^{i+1}} \Delta^i 0^{2m} \right],$$

где $d_k -$ определены из системы (25)-(27), $B_{2m} -$ числа Бернулли, $\Delta^i 0^{2m} = \sum_{l=1}^{i} (-1)^{i-l} C_i^l l^{2m}$, q_k - корни многочлена Эйлера-Фробениуса степени $2m-2$, удовлетворяющие условию $\left|q_k\right| < 1$.

В частности, в случае $s=[m/2]$ из системы (25)-(27) получаем

$$d_k = 0,\ k = \overline{1, m-1}.$$

Тогда, учитывая последние равенства из выражений (25)-(27) и теоремы 5, получаем оптимальность классической формулы Эйлера-Маклорена в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

В третьей главе диссертации «**Оптимальные интерполяционные формулы типа Эрмита в пространстве Соболева** $L_2^{(m)}(0,1)$» рассматривается задача построения оптимальных интерполяционных формул типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$. В параграфах 3.1-3.5 исследуется задача построения оптимальных интерполяционных формул, которая состоит из линейной комбинации значений функции в узлах и значений первой производной этой функции в конечных точках интервала [0,1]. В параграфе 3.6 изучаются оптимальные интерполяционные формулы, которые состоят из линейной комбинации значений функций в узлах и значений производной до порядка $(2s-1)$ в концевых точках интервала интерполирования.

В параграфах 3.1-3.5 рассмотрено приближение функции φ из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ при $m \geq 2$ с другой, более простой, функцией P_φ следующим образом:

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(h\beta) + A(z)\varphi'(0) + B(z)\varphi'(1), \tag{28}$$

где $C_\beta(z)$, $\beta = 0,1,...,N$, $A(z)$ и $B(z)$ - коэффициенты формулы (28). При этом предполагаем, что нам дана таблица значений $\varphi(h\beta)$, $\beta = 0,1,...,N$, $h = 1/N$, N - натуральное число, а также $\varphi'(0)$ и $\varphi'(1)$.

По неравенству Коши-Шварца абсолютное значение погрешности

$$(\ell_N^1, \varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z)$$

интерполяционной формулы (28) оценивается следующим образом:

$$|(\ell_N^1, \varphi)| \leq \|\varphi \mid L_2^{(m)}\| \cdot \|\ell_N^1 \mid L_2^{(m)*}\|,$$

где

$$\ell_N^1(x,z) = \delta\left(x-z\right) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-h\beta) + A(z)\delta'(x) + B(z)\delta'(x-1) \tag{29}$$

является функционалом погрешности формулы (28).

Понятно, что норма функционала погрешности ℓ_N^1 зависит от коэффициентов $C_\beta(z), \beta = 0,1,...,N$, $A(z)$ и $B(z)$. Рассмотрим задачу минимизации величины $\|\ell_N^1\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$, $\beta = 0,1,...,N$, $A(z)$ и

$B(z)$. Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z), \beta=0,1,...,N,$ $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ (если существуют), удовлетворяющие равенству

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}{}^1_N \mid L_2^{(m)*} \right\| = \inf_{C_\beta(z), A(z), B(z)} \left\| \ell^1_N \mid L_2^{(m)*} \right\|, \tag{30}$$

называются оптимальными коэффициентами, соответствующая интерполяционная формула

$$\overset{\circ}{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} \overset{\circ}{C}_\beta(z)\varphi(h\beta) + \overset{\circ}{A}(z)\varphi'(0) + \overset{\circ}{B}(z)\varphi'(1)$$

- оптимальной интерполяционной формулой вида (28) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Для построения оптимальной интерполяционной формулы вида (28) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ имеем следующую задачу.

Задача 3. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z), \beta=0,1,...,N,$ $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$, которые удовлетворяют равенству (30).

Следует отметить, что впервые такая задача для интерполяционной формулы $P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \varphi(h\beta)$ была поставлена и исследована С.Л. Соболевым в $W_2^{(m)}$, где найдена экстремальная функция интерполяционной формулы. Связь между интерполяционными формулами с производными и классическими квадратурными формулами Эйлера-Маклорена изучена например в работах I.J.Schoenberg.

Далее, в параграфах 3.2-3.3 вычислена норма функционала погрешности (29) с использованием экстремальной функции интерполяционной формулы. Для минимума нормы функционала погрешности (29) при условиях $\left(\ell, x^\alpha\right) = 0,$ $\alpha = 0,1,2,...,m-1,$ получена система линейных алгебраических уравнений.

В параграфе 3.4 при $m=2$ и $m=3,$ решая полученную систему найдены явные формулы для коэффициентов $\overset{\circ}{C}_\beta(z),$ $.\beta=0,1,...,N,$ $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ оптимальной интерполяционной формулы (28).

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 7. Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $\overset{\circ}{A}(z)$ и $\overset{\circ}{B}(z)$ оптимальной интерполяционной формулы (28) в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$ выражаются формулами

$$\overset{\circ}{C}_0(z) = \frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N} q^\gamma \mid z-h\gamma\mid^3 + \mid z-h\mid^3 + h^3 - z^3(4+3\sqrt{3}) +$$
$$+3z^2h(1-\sqrt{3}) + q^N N_1(z)\Big],$$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{|\beta-\gamma|}\,|z-h\gamma|^3+|z-h(\beta-1)|^3-8|z-h\beta|^3+$$
$$+|z-h(\beta+1)|^3+q^{\beta}M_1(z)+q^{N-\beta}N_1(z)\Big],\ \ \beta=1,2,...,N-1,$$
$$\overset{\circ}{C}_{N}(z)=\frac{1}{2h^3}\Big[6\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}q^{N-\gamma}\,|z-h\gamma|^3+|z-h(N-1)|^3+h^3-$$
$$-(1-z)^3(4+3\sqrt{3})+3h(1-z)^2(1-\sqrt{3})+q^N M_1(z)\Big],$$
$$\overset{\circ}{A}(z)=\frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},\overset{\circ}{B}(z)=\frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$
где
$$M_1(z)=3z(z+h)(z-h-\sqrt{3}z)+6h^2\frac{f_1(z)}{q(1-q^{2N})},$$
$$N_1(z)=3(1-z)(1-z+h)(1-z-h-\sqrt{3}+\sqrt{3}z)-6h^2\frac{f_2(z)}{q(1-q^{2N})},$$
$$f_1(z)=\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{\gamma+1}+q^{2N+1-\gamma})\,|z-h\gamma|^3+h^2zq(1-q^{2N})+hz^2(2q+1)(1+q^{2N})+$$
$$+z^3(q+1)+z^3q^{2N}(3q+1)+2h(1-z)^2(2q+1)q^N+(1-z)^3q^N(4q+2)\Big],$$
$$f_2(z)=-\frac{1}{2h^2}\Big[2\sqrt{3}\sum_{\gamma=0}^{N}(q^{N-\gamma+1}+q^{N+1+\gamma})\,|z-h\gamma|^3+$$
$$+h^2(1-z)q(1-q^{2N})+h(1-z)^2(2q+1)(1+q^{2N})+(1-z)^3(q+1)+$$
$$+(1-z)^3q^{2N}(3q+1)+2hz^2(2q+1)q^N+z^3q^N(4q+2)\Big],$$
$$q=\sqrt{3}-2.$$

Теорема 8. Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)$, $\beta=0,1,...,N$ оптимальной интерполяционной формулы (28) в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ имеют следующие формы:

$$\overset{\circ}{C}_{0}(z)=\frac{1}{2h^5}\Big[-32z^5+|z-h|^5+(z+h)^5-10A(z)h^4+240(\lambda_1(z)+2\lambda_2(z))h^2+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{\gamma}\,|z-h\gamma|^5+M_k(z)+q_k^N N_k(z)\right)\Big],$$
$$\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)=\frac{1}{2h^5}\Big[|z-h(\beta-1)|^5-32|z-h\beta|^5+|z-h(\beta+1)|^5+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{|\beta-\gamma|}\,|z-h\gamma|^5+q_k^{\beta}M_k(z)+q_k^{N-\beta}N_k(z)\right)\Big],\ \ \beta=1,2,...,N-1,$$
$$\overset{\circ}{C}_{N}(z)=\frac{1}{2h^5}\Big[-32(1-z)^5+|z-h(N-1)|^5+(h+1-z)^5+10B(z)h^4-$$
$$-240h^2\lambda_1(z)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{N-\gamma}\,|z-h\gamma|^5+q_k^N M_k(z)+N_k(z)\right)\Big],$$

где $$A_k=\frac{(1-q_k)^7}{q_k^5+57q_k^4+302q_k^3+302q_k^2+57q_k+1},$$

$$M_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^{\gamma}\left((z+h\gamma)^5-10\overset{\circ}{A}(z)(h\gamma)^4+240\left(\overset{\circ}{\lambda}_1(z)+2\overset{\circ}{\lambda}_2(z)\right)(h\gamma)^2\right),$$

$$N_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^5+10\overset{\circ}{B}(z)(h\gamma)^4-240\overset{\circ}{\lambda}_1(z)(h\gamma)^2\right),\ k=1,2,$$

коэффициенты $\overset{\circ}{A}(z)$, $\overset{\circ}{B}(z)$ и $\overset{\circ}{\lambda}_1(z)$, $\overset{\circ}{\lambda}_2(z)$ - известные величины.

В параграфе 3.6 рассматривается построение оптимальной интерполяционной формулы вида

$$\varphi(z)\cong P_{\varphi}(z)=\sum_{\beta=0}^{N}C_{\beta}(z)\varphi(x_{\beta})+\sum_{\alpha=1}^{s}(A_{\alpha}(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(0)+B_{\alpha}(z)\varphi^{(2\alpha-1)}(1)). \qquad (31)$$

Здесь $C_{\beta}(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $A_{\alpha}(z)$, $B_{\alpha}(z)$, $m=2s$, $s=1,2,3,...$, и $x_{\beta}\in[0,1]$ — коэффициенты и узлы интерполяционной формулы (31). При этом предполагается, что функции φ принадлежат пространству Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$.

Задача построения оптимальной интерполяционной формулы вида (31) формулируется следующим образом.

Задача 4. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)$, $\beta=\overline{0,N}$, $\overset{\circ}{A}_{\alpha}(z),\overset{\circ}{B}_{\alpha}(z)$, $\alpha=\overline{1,s}$, удовлетворяющие равенству $$\left\|\overset{\circ}{\ell}{}_N^{2s-1}\mid L_2^{(m)*}\right\|=\inf_{C_{\beta}(z),A_{\alpha}(z),B_{\alpha}(z)}\left\|\ell_N^{2s-1}\mid L_2^{(m)*}\right\|$$

при фиксированных узлах x_{β} для функицонала погрешности

$$\ell_N^{2s-1}(x,z)=\delta(x-z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_{\beta}(z)\delta(x-h\beta)+\sum_{\alpha=1}^{s}(A_{\alpha}(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x)+B_{\alpha}(z)\delta^{(2\alpha-1)}(x-1))$$

формулы (31).

В продолжение этого параграфа получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы вида (31), а для случая $m=4$ найдены явные формулы для оптимальных коэффициентов $C_{\beta}(z),\ \beta=0,1,...,N,\ A_{\alpha}(z),$ $B_{\alpha}(z),\ \alpha=1,2$ в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая теорема.

Теорема 9. Коэффициенты $C_{\beta}(z)$, $\beta=0,1,...,N$, $A_{\alpha}(z)$, $B_{\alpha}(z)$, $\alpha=1,2$ оптимальной интерполяционной формулы вида (31) в пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$ выражаются следующими формулами:

$$\overset{\circ}{C}_0(z)=\frac{1}{2h^7}[-128z^7+|z-h|^7+(z+h)^7-14h^6A_1(z)-420h^4A_2(z)+$$
$$+10080(\lambda_1(z)+2\lambda_2(z))h^2+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{\gamma}|z-h\gamma|^7+M_k(z)+q_k^NN_k(z)\right)],$$

$$\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)=\frac{1}{2h^7}[|z-h(\beta-1)|^7-128|z-h\beta|^7+|z-h(\beta+1)|^7+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{|\beta-\gamma|}|z-h\gamma|^7+q_k^{\beta}M_k(z)+q_k^{N-\beta}N_k(z)\right)],\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

$$\overset{\circ}{C}_{N}(z)=\frac{1}{2h^7}[-128(1-z)^7+|z-h(N-1)|^7+(h+1-z)^7+14h^6B_1(z)+420h^4B_2(z)-$$

$$-10080h^2\lambda_1(z)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k}{q_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}q_k^{N-\gamma}|z-h\gamma|^7+q_k^{N}M_k(z)+N_k(z)\right)],$$

где

$$M_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^{\gamma}\left((z+h\gamma)^7-14(h\gamma)^6A_1(z)-420(h\gamma)^4A_2(z)+10080\left(\lambda_1(z)+2(h\gamma)^2\lambda_2(z)\right)\right),$$

$$N_k(z)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}q_k^{\gamma}\left((h\gamma+1-z)^7+14(h\gamma)^6B_1(z)+420(h\gamma)^4B_1(z)-10080(h\gamma)^2\lambda_1(z)\right),$$

$k=1,2,3,$ $A_1(z)$, $A_2(z)$, $B_1(z)$, $B_2(z)$, $\lambda_1(z)$ и $\lambda_2(z)$ - известные величины.

Наконец, в последней главе диссертации «**Оптимальные кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве периодических функций двух переменных**» в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций рассмотрено построение оптимальной решетчатой кубатурной формулы с производными первого порядка, т.е. кубатурная формула типа Эрмита. Здесь получена экстремальная функция, вычислен квадрат нормы функционала погрешности рассматриваемой кубатурной формулы в сопряженном пространстве $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$. Путем минимизации этой нормы по коэффициентам получена система линейных алгебраических уравнений, доказаны существование и единственность решения этой системы. Кроме того, найдено решение этой системы, т.е. явно найдены коэффициенты оптимальной кубатурной формулы с производными и вычислена оптимальная норма функционала погрешности.

Напомним определения периодического пространства Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций пусть функция $\varphi(x_1,x_2)$ имеет в $\mathbb{R}^2$ локально суммируемые производные до порядка m, причем любой ограниченной области Ω_0 соответствует интеграл $\int\limits_{\Omega_0}\sum\limits_{|\alpha|=m}\frac{m!}{\alpha!}(D^{\alpha}\varphi(x))^2dx$, где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\alpha!=\alpha_1!\cdot\alpha_2!$, $m=|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2$, $D^{\alpha}\varphi=\dfrac{\partial^m\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}}$. Предположим, что $m>1$, а функция $\varphi(x)$ периодична с матрицей периодов H: $\varphi(x+H\gamma)=\varphi(x)$, где $\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$- произвольный целочисленный векторстолбец, $\gamma_i \in Z, i=1,2$. Матрице H сопоставим ее фундаментальный параллелепипед Ω_0, положив

$$\Omega_0 = \{x \in R^2, \quad x = Hy, \text{ где } \quad 0 \le y_i < 1, i = 1,2\}.$$

Элементами пространства $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ служат функции, отличающиеся друг от друга на постоянное слагаемое. Норма в $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ имеет вид

$$\| \varphi | \widetilde{L_2^{(m)}}(H) \|^2 = \int_{\Omega_0} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} \left(\frac{\partial^m \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{m-k} \partial x_2^k} \right)^2 dx_1 dx_2.$$

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{\Omega_0} \varphi(x) dx \cong \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right), \tag{32}$$

где точки $x^{(k)} \in \Omega_0$ и параметры $C_k, C_k^{(')}$ называются соответственно узлами и коэффициентами кубатурной формулы. Погрешность кубатурной формулы (32) выражается следующим образом:

$$(\ell, \varphi) = \int_{\Omega_0} \varphi(x) dx - \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \varphi(x^{(k)}) + C_k^{(')} D\varphi(x_k) \right),$$

где $\quad \ell(x) = \left(\mathcal{X}_{\Omega_0}(x) - \sum_{k=1}^{N} \left(C_k \delta(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} \delta'(x - x^{(k)}) \right) \right) * \Phi_0(H^{-1}x)$

– функционал погрешности кубатурной формулы, $\mathcal{X}_{\Omega_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \Omega_0, \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \Omega_0, \end{cases}$

$\delta(x)$ – известная дельта-функция Дирака, $\Phi_0(H^{-1}x) = \sum_{\beta} \delta(x - H\beta)$,

$\beta = (\beta_1, \beta_2)$, β_i – целые числа, т.е. $\beta_i \in Z$.

Оптимальной кубатурной формулой называют такую кубатурную формулу, погрешность которой при заданном числе узлов N имеет наименьшую норму в $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$.

Для экстремальной функции кубатурной формулы (32) доказана следующая теорема.

Теорема 10. Экстремальная функция кубатурной формулы (32) в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ имеет вид

$$\psi_\ell(x) = -\sum_{k=1}^{N} (C_k B_{2m}(x - x^{(k)}) - C_k^{(')} B'_{2m}(x - x^{(k)})) - d_0,$$

где

$$B_{2m}(x - x^{(k)}) = \sum_{\beta \ne 0} \frac{e^{-2\pi i H^{*-1} \beta (x - x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1} \beta|^{2m}}, \qquad B'_{2m}(x - x^{(k)}) = -\sum_{\beta \ne 0} \frac{2\pi i H^{*-1} \beta e^{-2\pi i H^{*-1} \beta (x - x^{(k)})}}{|2\pi H^{*-1} \beta|^{2m}},$$

d_0 - неизвестная.

Показано, что коэффициенты оптимальной кубатурной формулы вида (32) являются решением системы

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}}+\overset{\circ}{\lambda}+\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{(2\pi i\beta^* H^{-1})e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}}=0, hHk'\in\Omega_0,$$

$$\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{(2\pi i\beta^* H^{-1})e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}|^{2m}}-\sum_{hHk\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}{}^{(1)}[k]\sum_{\beta\neq 0}\frac{(2\pi\beta^* H^{-1})^2 e^{-2\pi i\beta^* h(k'-k)}}{|2\pi H^{*^{-1}}\beta|^{2m}}=0,$$

$$hHk'\in\Omega_0,$$

$$\sum_{hH\beta\in\Omega_0}\overset{\circ}{C}[\beta]=1.$$

При решении последней системы получены следующие основные результаты этой главы.

Теорема 11. Коэффициенты оптимальной кубатурной формулы вида (32) в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических функций имеют вид

$$\overset{\circ}{C}[\gamma]=h^2, \qquad \overset{\circ}{C}{}^{()}[\gamma]=0 \quad \text{при} \quad hH\gamma\in\Omega_0.$$

Для погрешности оптимальной решетчатой кубатурной формулы вида (32) имеет место следующая теорема.

Теорема 12. Норма функционала погрешности оптимальных решетчатых кубатурных формул с производными в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ выражается следующим образом:

$$\|\ell\,|\,\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)\|^2=\frac{h^{2m}}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\gamma\neq 0}\frac{1}{|H^{*-1}\gamma|^{2m}}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных, кубатурных и оптимальных интерполяционных формул, а также вычислению оценки их погрешностей в пространствах Соболева.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Доказаны существование и единственность оптимальных квадратурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$.

2. Доказан аналог теоремы И. Бабушки о нулях экстремальной функции квадратурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева.

3. Построены оптимальные квадратурные формулы с производными первого порядка в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, а также получены аналитические выражения коэффициентов этих оптимальных квадратурных формул для любого $m \geq 2$.

4. Вычислена норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул с производными первого порядка в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$.

5. Получены системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных квадратурных формул типа Эйлера-Маклорена и оптимальных интерполяционных формул типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

6. Построены оптимальные квадратурные формулы типа Эйлера-Маклорена в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ для любого натурального m, удовлетворяющего условию $[\frac{m}{2}] \geq s \geq 1$, при этом найдены явные формулы для коэффициентов этих квадратурных формул и вычислена их норма функционала погрешности. В частности, получена оптимальность классической квадратурной формулы Эйлера-Маклорена в пространстве Соболева.

7. Построены оптимальные интерполяционные формулы типа Эрмита в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ при m=2,3,4.

8. Построены оптимальные кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических двух переменных функций, при этом получены явные выражения для их коэффициентов.

9. Вычислена норма функционала погрешности оптимальных кубатурных формул в пространстве Соболева $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ периодических двух переменных функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

NURALIEV FARKHOD ABDUGANIEVICH

OPTIMAL LATTICE CUBATURE AND INTERPOLATION FORMULAS OF HERMITE TYPE IN SOBOLEV SPACE

01.01.03 – Computational and discrete mathematics
(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCIES

Tashkent – 2020

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number B2017.3.DSc/FM87.

Doctoral dissertation is carried out at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and on the website of "ZiyoNet" information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific adviser:	**Shadimetov Kholmatvay Makhkambaevich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Aloev Rakhmatillo Djuraevich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Bakoev Matyokub Teshaevich Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Allakov Ismoil Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Karakalpak State University**

Defense will take place «____» _____________2020 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № 87) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4.Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» November 2020 year
(Mailing report № 20 on 3 November 2020 year)

A.R. Marakhimov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degree,
D.T.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degree, D.F.M.S.

R.D. Aloev
Chairman of Scientific Seminar under Scientific
Council on award of scientific degrees,
D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (Absstract of DSc thesis)

The urgency and relevance of the topic. An important practical goal of computational mathematics is to create the shortest, fastest and cheapest ways to solve mathematical problems, i.e. optimization of computational algorithms. This is well demonstrated by examples of cubature and interpolation formulas in various function spaces. Therefore, construction of optimal cubature and interpolation formulas is an urgent problem in computational mathematics.

It is important to obtain optimal cubature, interpolation formulas and splines in Sobolev spaces for the approximate calculation of integrals and approximation of functions. The obtained formulas are considered as high-precision mathematical models for natural processes. Therefore, the implementation of targeted scientific research in the following areas is one of the main problems: obtaining asymptotically optimal and optimal in order of cubature formulas; development of cubature formulas based on the methods of probability theory; construction of optimal cubature, interpolation formulas and estimation of their errors; construction of natural splines in various Hilbert and Banach spaces. Scientific studies carried out in these areas substantiate the importance of the topic of the dissertation.

The aim of the study is construction of optimal lattice quadrature, cubature and interpolation formulas of the Euler-Maclaurin and Hermite type in Sobolev spaces and calculation of the norms of their optimal error functionals.

The tasks of research work are: In the Sobolev factor space $L_2^{(m)}$: to obtain expressions for the square of the norm of the error functional of the quadrature formula using the extremal function of this quadrature formula; to find analytical expressions for the coefficients of the optimal quadrature formulas of the Euler-Maclaurin type and calculate the norm of the optimal error functional; to get the explicit forms of the coefficients of the optimal interpolation formula with derivatives; to construct lattice optimal cubature formulas of Hermite type and study the order of their convergence in the Sobolev space of periodic two variable functions.

The object of research is quadrature, cubature and interpolation formulas in Sobolev spaces of periodic and non-periodic functions.

The scientific novelty of the study is as follows: the existence and uniqueness of an optimal quadrature formula of Hermite type in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ are proved; an analogue of I.Babushka's theorem on the zeros of the extremal function of Hermite-type quadrature formulas in the Sobolev space is proved; optimal quadrature formulas with derivatives of the first order in space $L_2^{(m)}(0,1)$ are constructed for any $m \geq 2$; optimal quadrature formulas of the Euler-Maclaurin type are constructed in the Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ for any natural m satisfying the condition $[\frac{m}{2}] \geq s \geq 1$; optimal interpolation formulas of the Hermite type are constructed in the space $L_2^{(m)}$ for $m = 2,3,4$; explicit expressions are obtained for the coefficients of optimal cubature formulas of the Hermite type in the space $\widetilde{L_2^{(m)}}(H)$ of periodic two-variable functions and norm of their error functional is calculated.

The outline of the thesis. The dissertation work is devoted to the construction of optimal quadrature, cubature formulas and optimal interpolation formulas, as well as the calculation of the estimates of their errors in various spaces of differentiable functions.

In the Sobolev space the existence and uniqueness of optimal quadrature formulas of the Hermite type are proved; an analogue of Babushka's theorem on the zeros of the extremal function of quadrature formulas of Hermite type is proved, optimal quadrature formulas with first-order derivatives are constructed and the norm of the error functional for the obtained optimal quadrature formulas is calculated.

There are constructed optimal quadrature formulas in the sense of Sard in the space $L_2^{(m)}$, where the quadrature sum consists of the values of the integrand at the nodes and the values of the derivatives of this function at the ends of the integration interval; a system of linear algebraic equations for the coefficients of the considered optimal quadrature formulas is obtained; explicit formulas for the coefficients of the considered optimal quadrature formulas are found; the norm of the error functional of this optimal quadrature formulas is calculated.

The problem of construction of optimal interpolation formulas of the Hermite type in the Sobolev space is studied; explicit formulas for the coefficients of optimal interpolation formulas in the Sobolev space are found.

Finally, the problem of construction of optimal lattice cubature formulas with first-order derivative is studied in the Sobolev space $\widetilde{L_2^{(m)*}}(H)$ of periodic, two variables functions. By minimizing the norm of the error functional with respect to the coefficients a system of linear algebraic equations is obtained, and the existence and uniqueness of a solution to this system are proved. In addition, a solution to this system is found, i.e. the optimal coefficients of the cubature formula with derivatives are explicitly found, and the optimal norm of the error functional is calculated.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Нуралиев Ф.А. Оптимальная интерполяционная формула типа Эрмита // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. -№ 4. -С. 158-164. (01.00.00; № 6).

2. Нуралиев Ф.А. Дискретная система Винера-Хопфа для квадратурной формулы типа Эрмита // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2012. - № 4. - С. 59-65. (01.00.00; № 6).

3. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. On an optimal quadrature formula in the Sobolev space // Journal of Comp. Appl. Math. – 2013. – 243. – pp. 91-112. (3. Scopus. IF=2.037)

4. Нуралиев Ф.А. Существование и единственность решения системы для оптимальных коэффициентов квадратурной формулы типа Эрмита // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2013. -№ 1. - С. 91-98. (01.00.00; № 6).

5. Нуралиев Ф.А. Норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве Соболева // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2014. -№ 2. С.112-120. (01.00.00; № 6).

6. Нуралиев Ф.А. Построение оптимальных решетчатых квадратурных формул типа Эрмита в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2014. - № 3. - С. 89-94. (01.00.00; № 6).

7. Нуралиев Ф.А. Формула численного интегрирования с производными // Доклады АН РУз. – Ташкент, 2015. - № 2. - С. 6-9. (01.00.00; № 7).

8. Nuraliev F.A. Minimisation of the error functional norm of the Hermitian type quadrature formula // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2015. - № 1. - С. 53-63. (01.00.00; № 6).

9. Нуралиев Ф.А. Оценка погрешности одной оптимальной квадратурной формулы типа Эрмита // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2015. - № 2. - С. 94-101. (01.00.00; № 6).

10. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. Optimization of quadrature formulas with derivatives // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2015. - № 1. - С. 61-70. (01.00.00; № 9).

11. Nuraliev F.A. Optimal formulas for numerical integration with derivatives in Sobolev spase // Доклады АН РУз. – Ташкент, 2016. - № 1. - С. 3-6. (01.00.00; № 7).

12. Нуралиев Ф.А. Эрмитого оптимальная интерполяционная формула // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2016. - № 2. - С. 87-92. (01.00.00; № 6).

13. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. Optimal quadrature formulas of Euler Maclaurin type // Applied Mathematics and Computation. – 2016. – 276. – pp. 340-355. (3. Scopus. IF=3.882)

14. Нуралиев Ф.А. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул с производными в пространстве Соболева // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2017. - № 1. - С. 106-113. (01.00.00; № 6).

15. Нуралиев Ф.А. Кубатурные формулы по квадрату // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2017. - № 2. - С. 84-87. (01.00.00; № 6).

16. Nuraliev F.A. Optimal interpolation formula with derivative in the space $L_2^{(3)}(0,1)$ // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2017. - № 3. - С. 76-83. (01.00.00; № 6).

17. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. Optimal formulas of numerical integration with derivatives in Sobolev space // Journal of Siberian Federal Universiti. Mathematics & Physics. – 2018.- 11(6). - pp. 383-396. (3. Scopus. IF=0.5)

18. Nuraliev F.A. Optimal interpolation formulas in the space $L_2^{(4)}(0,1)$ //Uzbek mathematical journal. - Tashkent, 2018. - № 1. - pp. 128-136. (01.00.00; № 6).

19. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. Construction of optimal interpolation formulas in the Sobolev space // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. – 2018. - 64, № 4. – pp. 723-735. (3. Scopus. IF=0.407)

20. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Nuraliev F.A. Optimal interpolation formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ // Filomat. - 2019. - 33:17. - pp. 5661-5675. (3. Scopus. IF=0.887)

21. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. Composite quadrature formulas of Hermite type // Uzbek mathematical journal. - Tashkent, 2019. - № 4. -pp. 143-149. (01.00.00; № 6).

II бўлим (Часть II; Part II)

22. Hayotov A.R., Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A. Optimal quadrature formulas with derivative in the space $L_2^{(m)}(0,1)$ // American Journal of Numerical Analysis. - 2014. - vol.2, № 4. - pp. 115-128.

23. Нуралиев Ф.А. Норма функционала погрешности одной интерполяционной формулы с производными // Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения: Материалы Международной конференции. 4-7 июля 2011. - Красноярск, 2011. -С. 83-86.

24. Nuraliev F.A. On an optimal quadrature formula in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ // Операторные алгебры и смежные проблемы: Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 12-14 сентября 2012. – Ташкент, 2012. – С. 48-50.

25. Hayotov A.R., Nuraliev F.A. Coefficients of the hermitian type optimal quadrature formula // Алгебра, Анализ и Квантовая Вероятность: Материалы Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 10-12 сентября 2015. – Ташкент, 2015.

26. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А. Оптимальные интерполяционные формулы с производными в пространстве Соболева // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль - Хорезмий 2016: Материалы Международной научной конференции. 9-10 ноября 2016. - Бухара, 2016.

27. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул пятой степени // Abstracts of the Uzbek –Israel international scientific conference. October 6-10, 2017. - Tashkent, 2017. - pp. 218-220.

28. Nuraliev F.A. Optimal interpolation formulas with derivatives in the Sobolev space $L_2^{(m)}$ // Новые результаты математики и их приложения: Тез. докл. Респ. науч. конф. 14-15 мая 2018. - Самарканд, 2018. - С. 117.

29. Nuraliev F.A. Optimal quadrature formulas with derivative in the Sobolev space // Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018: The VI international scientific conference. NUU. September 13-15, 2018. - Tashkent, 2018. – pp. 129.

30. Nuraliev F.A., Mirzaqobilov R.N. One optimal interpolation formulas with derivatives in Sobolev space // Uzbek-Israel joint international conference. May 13, 2019. - Bukhara-Samarkand-Tashkent, 2019. - pp. 113-114.

31. Нуралиев Ф.А. Оптимальные решетчатые кубатурные формулы с производными в пространстве Соболева периодических функций // Обратные и некорректные задачи: Материалы Международной конференции. 2-4 октября 2019. - Самарканд, 2019. - С. 105.

32. Нуралиев Ф.А. Коэффициенты решетчатых оптимальных кубатурных формул в периодическом пространстве Соболева // Неклассические уравнения математической физики и их приложения: Тез. докл. Узбекско-Российской науч. конф. 24-26 октября 2019. - Ташкент, 2019. - С. 288.

33. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Маматова Н.Х. Кубатурные формулы типа Эрмита в пространстве периодических функций двух переменных // Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики: Тез. докл. Междун. научн. конф. 12-13 марта 2020. - Фергана, 2020. - С. 252-254.

34. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А. Экстремальная функция кубатурной формулы типа Эрмита// Computational models and technologies: Uzbekistan-Malaysia international online conference. August 24-25, 2020. - Tashkent, 2020. – pp. 63.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари “Ўзбекистон математика журнали” таҳририятида таҳрир қилинди.

Бичими 60x84 1/16. Ризограф босма усули. Times гарнитураси.

Шартли босма табоғи: 4. Адади 100. Буюртма № 25.
Баҳоси келишилган нархда.

«ЎзР Фанлар Академияси Асосий кутубхонаси» босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100170, Тошкент ш., Зиёлилар кўчаси, 13-уй.