ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ
НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
НАМАНГАН МУҲАНДИСЛИК-ҚУРИЛИШ ИНСТИТУТИ

**В.Р. ХОДЖИБАЕВ**

# ОММАВИЙ ХИЗМАТ КЎРСАТИШ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

Тошкент–2020

УЎК 519.111.3+519.2(073)
КБК 22.171+22.141я7
**Х-82**

**Ходжибаев В.Р.**
Оммавий хизмат кўрсатиш назарияси элементлари. Ўқув қўлланма./
В.Р Ходжибаев. Тошкент: Lesson press, 2020. -80 б.

**Тақризчилар**:
Машраббаев А. – физика-математика фанлари номзоди, доцент;
Гафаров И.А. – физика-математика фанлари номзоди, доцент.

Мазкур ўқув қўлланма олий ўқув юртларида бакалавриатнинг “математика” ва “амалий математика ва информатика” йўналишлари ҳамда “математика (эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика)” магистратура мутахассислиги бўйича таълим олаётган талабаларга танлов (махсус) фан курсини ташкил қилиш учун мўлжалланган. Унда оммавий хизмат кўрсатиш тизимлари турлари ва уларнинг асосий характеристикалари баён қилинган. Ўқув қўлланмадан талабалар, магистрлар ва ўқитувчилар фойдаланишлари мумкин.

УЎК 519.111.3+519.2(073)
КБК 22.171+22.141я7

Наманган давлат университети Кенгаши томонидан ўқув қўлланма сифатида нашр этишга тавсия қилинган (2020 йил, 30 июнь, 13-баённома)

Наманган муҳандислик-қурилиш институти Кенгаши томонидан ўқув қўлланма сифатида нашр этишга тавсия қилинган (2020 йил, 13 июль, 12- баённома)

ISBN 978-9943-6764-2-3

# Сўз боши

Оммавий хизмат кўрсатиш назарияси амалий математиканинг эҳтимолликлар назарияси, хусусан, тасодифий жараёнлар назарияси усулларидан кенг фойдаланадиган соҳаси ҳисобланади. У университетларнинг математика бакалавриат йуналишлари ва эҳтимолликлар назарияси ва математик статистика магистратура мутахассислиги талабаларига танлов фан сифатида тавсия этилган фанлар қаторига киради. Оммавий хизмат кўрсатиш назарияси фанини ўрганиш учун талабалардан математик анализнинг умумий, эҳтимолликлар назарияси ва математик статистиканинг тўла курслари бўйича билимларга, маълум даражада математик фанларни ўрганиш тажрибасига эга бўлишлари талаб этилади.

Ушбу ўқув қўлланмани ёзишда муаллифнинг бир неча йиллар мобайнида Наманган давлат университети талабаларига ўқиган маърузалари асос қилиб олинди ва Т.Л.Саати [1], Б.В.Гнеденко, И.Н.Коваленко [2], Л.Клейнрок [3], Х.Таха [4], К.А. Джафаров, А.А. Могульский [5] китобларидан кенг фойдаланилди. Хусусан, келтирилган мисол ва масалалар, асосан, кўрсатилган адабиётлардан олинди.

Китоб Кириш ва 9 та параграфдан иборат бўлиб, ҳар бир параграфда формула ва тасдиқларнинг номерлари мустақилдир. Параграф ичида формула ва тасдиқларга мурожаат қилишда фақат уларнинг номерлари , параграф ташқарисида эса, параграф номери ҳам кўрсатилади.

# Кириш

Инсоннинг барча амалий фаолияти ҳар хил турдаги оммавий хизмат кўрсатиш тизимлари билан боғликдир. Бундай тизимларга шаҳар транспорти, ошхона, ресторанлар, почта, сартарошхона, дўконлар, поликлиникалар ва ҳоказо хизмат тизимларини мисол сифатида келтириш мумкин. Ҳар қандай оммавий хизмат кўрсатиш тизимлари эса, кутиш жараёнлари ва навбат тушунчалари билан чамбарчас боғлик. Агар мижозлар хизмат кўрсатиш қурилмасига келганда у банд бўлиб, хизмат кўрсатиш бошлангунча кутишга тўғри келса, навбат пайдо бўлади. Масалан, бемор шифокор қабулига кириши учун унинг кабинети олдида навбат ҳосил килиб кутади. Инглиз тилидаги адабиётларда “Оммавий хизмат кўрсатиш назарияси” “Queuing theory”, яъни сўзма-сўз таржима қилганда “Навбатлар назарияси” деб аталади. Ҳақиқатан ҳам, оммавий хизмат кўрсатиш назарияси, асосан, ҳар хил тизимларда вужудга келадиган навбатларни ўрганишга бағишланган назариядир. Ушбу фан XX аср бошларида телефон иши, физика, биология, иктисод (чипта сотиш кассаларида, дўконларда ва ҳ.к оммавий хизмат кўрсатишни оқилона ташкил этиш) соҳаларининг амалий масалаларини ҳал этиш билан боғлиқ ҳолда шиддат билан ривожлана бошлади.

Ҳар қандай оммавий хизмат кўрсатиш тизими қуйидаги элементларни ўз ичига олади:

1. *Талабларнинг кириш оқими*. Одатда оммавий хизмат кўрсатиш тизимига келган мижозлар сонини тизимга тушган мурожаатлар сони, ёки талаблар сони, деб юритилади. Талабларнинг кириш оқими асосий элемент бўлиб, уни ўрганиш ҳар қандай оммавий хизмат кўрсатиш тизимини ташкил этишда зарур ва муҳимдир. Бунда асосий характеристика талаблар кириш оқимининг интенсивлиги (тезлиги), яъни вақт бирлиги оралиғида тизимга келадиган мижозларнинг ўртача сони ҳисобланади.

*2. Навбат*. Оммавий хизмат кўрсатиш тизимига келиб тушган талаб дарҳол қаноатлантирилиши мумкин бўлмаган ҳолларда навбат ҳосил бўлади. Бундай ҳолларда навбат узунлиги (навбатда турган талаблар сони), кутаётган талабларнинг хизмат кўрсатишга йўллаш тартиби (навбат тартиби, интизоми), кутиш вақти каби тушунчалар қизиқиш уйғотади ва бу жараёнларда вақт асосий параметр бўлади. Оммавий хизмат кўрсатиш тизимларида навбат тартиби, интизоми ҳар хил бўлиши мумкин. Одатда “аввал келганга аввал хизмат кўрсатилади” тамойилига амал қилинади. Баъзи ҳолларда бу қоида бузилиши мумкин (масалан, пенсионерларга навбатсиз хизмат кўрсатадиган тизимда). Навбат барча оммавий хизмат кўрсатиш тизимларига тегишли эмас. Шундай тизимлар борки, уларда навбатга йўл қўйилмайди ва талаб тушган пайтда тизим банд бўлса, бу талабга хизмат кўрсатилмайди (рад қилинади).

3.*Хизмат кўрсатувчи қурилма*. (Мослама, прибор). Бу элемент ҳар қандай оммавий хизмат кўрсатиш тизимида мавжуд бўлади. У тизимнинг хусусиятига қараб, битта ёки бир нечта бўлиши мумкин (ёнилғи қуйиш шохобчасида битта ёки бир нечта колонка, магазинда битта ёки бир нечта касса).

Хизмат кўрсатувчи қурилмаларнинг ташкил этилишига нафақат битта талабга хизмат кўрсатиш учун зарур бўлган вақт, балки навбат узунлиги ва кутиш вақти ҳам боғлиқ бўлади. Агар тизимда хизмат кўрсатувчи қурилмалар катта сонда бўлса, бу тизимда навбат узунлиги кичик бўлади. Лекин ҳар бир қурилмани (мосламани) ташкил этиш учун маблағ талаб қилинади.

4.*Хизмат кўрсатилган талабларнинг чиқиш оқими*. Хизмат кўрсатилган талабларнинг чиқиш оқими бошқа бир оммавий хизмат кўрсатиш тизими учун кириш оқими бўлганда бу элемент муҳим аҳамията эга бўлади. Масалан, поезддан тушган йўловчиларнинг кўпчилиги такси тўхташ жойига йўл олади.

Аксарият ҳолларда қандайдир вақт оралиғида оммавий хизмат кўрсатиш тизимига келиб тушган талаблар сони, тушган талабнинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутган вақти (бу навбат билан боғлиқ), битта талабга (мижозга) хизмат кўрсатиш учун кетадиган вақт ва бошқалар тасодифий миқдорлар бўлади. Улар бир-бирига боғлиқ бўлиши мумкин. Демак, оммавий хизмат кўрсатиш тизимининг фаолият кўрсатиши тасодифий жараёндан иборат бўлади ва бу жараёнда вақт асосий параметр бўлади. Айнан шундай тизимларни ўрганиш билан оммавий хизмат кўрсатиш назарияси шуғулланади.

Айтилганлардан келиб чиқадики, оммавий хизмат кўрсатиш назариясини ўрганиш ҳар хил тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларини, улар орасидаги муносабатларни, тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикаларини топиш билан боғлиқ экан. Шунинг учун биринчи параграфда эҳтимолликлар назариясининг баъзи асосий тушунчалари ва асосий тақсимот қонунлари хақида қисқача маълумотларни келтирамиз.

Ушбу қўлланмада оммавий хизмат кўрсатишнинг энг содда модели ўрганилади ва бу моделни бир хизмат кўрсатиш станцияси (айтайлик, автомобилларни таъмирлаш хизмати) орқали осон тасвирлаш мумкин. Станцияга мижозлар *энг содда оқим* (§2) бўйича, яъни биттадан келади ва келиш моментлари орасидаги вақт кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлади. Станцияда бир нечта бир хил мосламалар (қурилмалар) бўлиб, улар мижозларга уларнинг келиш тартибида хизмат кўрсатади (битта мослама битта мижозга хизмат кўрсатади). Мосламалардан бирида хизмат кўрсатиб бўлинган мижоз тизимни, яъни станцияни дарҳол тарк этади. Агар мижоз келган пайтда станциядаги барча мосламалар ундан аввал келган мижозларга хизмат кўрсатиш билан банд бўлса, бу мижоз навбатга туради ва бирор мослама бўшашини кутади.

Биз навбатнинг ўртача узунлиги (навбатда турган мижозлар сонининг математик кутилмаси), мижознинг хизмат кўрсатиш бошлангунча ўртача кутиш вақти, станцияда ўтказилган ўртача вақт каби станциянинг характеристикаларини ўрганамиз. Табиийки, қўйилган масалаларни қарашда мижозларнинг станцияга келиш лаҳзалари қандай қонунга бўйсиниши (кириш оқими), битта мосламанинг бир мижозга хизмат кўрсатиш вақтининг тақсимоти, станцияга келган мижозлар қандай тартибга бўйсиниши (хизмат кўрсатиш тартиби) эътиборга олинади. Бунда оммавий хизмат кўрсатиш назариясидаги асосий моделлардан бири бўлган “Туғилиш ва нобуд бўлиш” жараёнидан (§3) кенг фойдаланамиз.

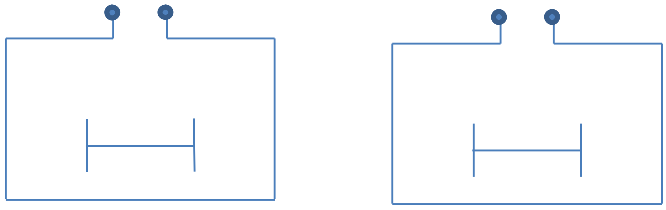
Оммавий хизмат кўрсатиш назариясининг ўзига хос муҳим томонларидан бири унда қаралаётган тасодифий миқдорларнинг вақтга боғлиқ равишда ўзгариб туришидир. Масалан, дўконга кирадиган харидорлар сонининг тақсимоти магазин янги очилган биринчи кунларда ва бир неча ой ўтгандан кейин бир хил бўлмайди. Агар оммавий хизмат кўрсатиш тизими узоқ муддат давомида фаолият кўрсатса, баъзи ҳолларда, ундаги тасодифий миқдорларнинг вақтга боғлиқлиги сусая боради ва бора-бора вақтга боғлиқ бўлмай қолади (тизим ўзининг доимий мижозларига эга бўлиб қолади). Тизимнинг бундай ҳолатига *стационар ҳолат* дейилади. Агар битта мижозга хизмат кўрсатиш вақти мижозлар келиш вақтлари оралиғидан катта бўлса, бу тизим стационар ҳолатга эга бўла олмайди. Тизимнинг стационар ҳолатида тасодифийлик йўқолмайди, балки ундаги тасодифий миқдорларнинг тақсимоти бирор фиксирланган моментда қандай бўлса, бошқа ихтиёрий моментда ҳам шундай бўлади. Амалиётда тизимнинг стационар ҳолатини ўрганиш муҳим ахамиятга эга ва ушбу қўлланмада кўриладиган барча турдаги тизимлар учун уларнинг стационар ҳолати ҳақида фикр юритилади (§§ 4-8).

Оммавий хизмат кўрсатиш назарияси шуғулланадиган масалаларга мисол тариқасида [5] да қаралган қуйидаги масаланинг қўйилишини қатъий бўлмаган ҳолда келтирамиз ва ушбу курс давомида унга аниқликлар киритиб, ҳал қиламиз.

### ***Денгиз портини лойиҳалаш масаласи***

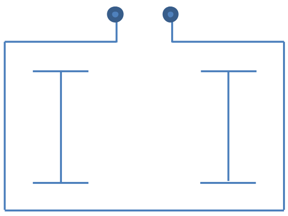
Денгиз портининг бир хил маблағ ҳисобига қуриладиган учта қурилиш лойиҳасини қараймиз.

I. Порт иккита бир-бирига боғлиқсиз бўлган терминалдан (юкларни тушириш ва юклаш жойи) иборат ва улар бир хил самарадорликка эга бўлиб, кемаларнинг кириш оқими тахминан тенг бўлган икки қисмга ажратилади. (1-расм)



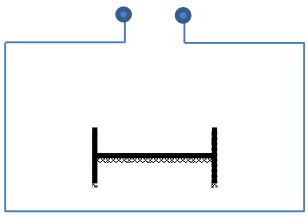
1-расм.

II. Порт битта терминалдан иборат бўлиб, унда иккита бир хил қувватли юклаш ва тушириш жойлари мавжуд (2-расм)



2-расм.

III. Порт битта терминалдан иборат бўлиб, унда самарадорлиги I ва II лойиҳалардагига нисбатан икки марта юқори бўлган битта юклаш ва тушириш жойидан иборат (3-расм)



3-расм.

Масала қайси лойиҳа қулайлигини (яхшилигини) аниқлашдан иборат бўлиб, бунда қуйидаги характеристикалар солиштирилиши талаб қилинади:

1) битта кема портга келгандан кейин унга хизмат кўрсатиш бошлангунча ўртача кутиш вақти;
2) битта кеманинг портда ўтказган ўртача вақти (яъни, кутиш вақти билан хизмат кўрсатиш вақти йиғиндиси)

## §1. Эҳтимолликлар назариясидан баъзи маълумотлар

Ушбу параграфда эҳтимолликлар назариясининг келгусида бизга зарур бўлган баъзи тушунчалари ва формулаларини келтирамиз. *Тасодифий ҳодиса* деганда, тажрибанинг элементар ҳодисалар фазоси $\Omega$ даги элементар ҳодисалардан тузилган тўплам тушунилади. Яъни, тасодифий ҳодиса элементар ҳодисалар фазоси $\Omega$ нинг қисм тўпламидан иборат бўлади. $A$ ва $B$ ҳодисалардан бирортаси (камида биттаси) рўй беришидан иборат бўлган ҳодиса $A \cup B$ , $A$ ва $B$ ҳодисаларнинг иккаласининг рўй беришидан иборат бўлган ҳодиса $A \cap B$ кўринишида ифодаланади. $A$ ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган ҳодиса, $A$ га *тескари* (қарама-қарши) *ҳодиса* дейилади ва $\overline{A}$ кўринишида белгиланади.

$\Omega$ муқаррар ҳодиса бўлса, $\overline{\Omega} = \varnothing$ рўй бермайдиган ҳодиса бўлади. $A$ ҳодиса рўй беришидан $B$ ҳодисанинг ҳам рўй бериши келиб чиқса, $A \subset B$ каби белгиланади ва *$A$ ҳодиса $B$ ҳодисани эргаштиради,* деб айтилади. Табиийки, тўпламларнинг бирлашмаси ва кесишмасининг барча хоссалари ҳодисалар устида таърифланган амаллар учун ҳам ўринлидир.

$P(A)$ *эҳтимоллик*, бу тасодифий ҳодисанинг функцияси бўлиб, ҳодисанинг рўй беришлари нисбий частотасининг кутилаётган қийматига тенг катталикдир ва у тасодифий ҳодисанинг рўй бериш имкониятини кўрсатади. Ҳодисанинг эҳтимоллиги қуйидаги асосий хоссалара эга:

1) ихтиёрий $A$ ҳодиса учун $0 \le P(A) \le 1$;

2) $P(\varnothing) = 0, \quad \mathrm{P}(\Omega) = 1$;

3) $i \ne j$ бўлганда $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i, j = 1, 2, ...$ бўлса ,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$$

тенглик ўринли бўлади.

$A$ ҳодисанинг $B$ ҳодиса рўй берганлиги шарти (яъни $B$ ҳодисанинг рўй берганлиги аниқ бўлса) остидаги *шартли эҳтимоллиги*

$$P_B(A) \equiv P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

формула орқали таърифланади.

$B$ ҳодисанинг рўй берган ёки рўй бермаганлиги $A$ ҳодисанинг рўй беришига таъсир қилмаса, табиийки, $P\left(A/_B\right) = P(A)$ бўлади. Шунинг учун $A$ ва $B$ ҳодисалар *боғлиқ эмас* (боғлиқсиз) дейилади, агарда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

бўлса.

Агар $A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n = \Omega$ бўлиб, ихтиёрий $i \neq j$ ларда $A_i \cap A_j = \varnothing$ бўлса (яъни, тажриба натижасида $A_i$ ҳодисалардан биттаси ва фақат биттаси рўй берса), ихтиёрий $B$ ҳодиса учун

$$P(B) = P\left(B/_{A_1}\right)P(A_1) + P\left(B/_{A_2}\right)P(A_2) + \ldots + P\left(B/_{A_n}\right)P(A_n)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу муносабат кўплаб тадбиқларга эга ва *тўла эҳтимоллик формуласи* дейилади.

*Тасодифий миқдор* элементар ҳодисалар фазоси $\Omega$ да аниқланган функциядир. $\xi$ тасодифий миқдор *дискрет* бўлса , яъни $P(\xi = x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ бўлса, унинг *математик кутилмаси* ва *дисперсияси* мос равишда

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i, \quad D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - (M\xi)^2$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади. Агар тасодифий миқдор *узлуксиз* бўлиб, унинг *тақсимот функцияси* $F(x) = P(\xi < x)$ дифференциалланувчи, яъни *зичлик функцияси* $f(x) = F'(x)$ мавжуд бўлса, математик кутилма ва дисперсия

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (M\xi)^2$$

формулалар орқали топилади.

$\xi_1,\ \xi_2$ *боғлиқсиз* (боғлиқ бўлмаган) тасодифий миқдорлар дейилади, агарда ихтиёрий $x,\ y$ ҳақиқий сонлар учун $\{\xi_1 < x\}$ ва $\{\xi_2 < y\}$ ҳодисалар боғлиқсиз бўлса, яъни

$$F(x,y) = P(\xi_1 < x,\ \xi_2 < y) = P(\xi_1 < x)P(\xi_2 < y) = F_1(x)F_2(y)$$

бўлса . Агар $\xi_1$ ва $\xi_2$ боғлиқсиз тасодифий миқдорлар узлуксиз ва зичлик функциялари $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ бўлса, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ тасодифий миқдор ҳам узлуксиз бўлади ва унинг зичлик функцияси

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-t)f_2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-t)f_1(t)dt$$

кўринишда бўлади ва бу формула "тугун" формуласи дейилади. Қўшимча равишда $P(\xi_1 \geq 0) = P(\xi_2 \geq 0) = 1$ бўлса, охирги формулаларда интераллаш чегаралари 0 дан $x$ гача бўлади.

Ихтиёрий $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ тасодифий миқдорлар йиғиндисининг математик кутилмаси қўшилувчилар математик кутилмаларининг йиғиндисига тенг, яъни

$$M(\xi_1 + \xi_2 + ...\xi_n) = M\xi_1 + M\,\xi_2 + ... + M\xi_n$$

бўлади. Агар улар ўзаро боғлиқсиз бўлса,

$$M(\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot ... \cdot \xi_n) = M\xi_1 \cdot M\,\xi_2 \cdot ... \cdot M\xi_n,$$

$$D(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = D\xi_1 + D\xi_2 + ... + D\xi_n$$

тенгликлар ўринли бўлади. Энди бизга зарур бўлган асосий тақсимот турларига тўхталамиз.

**1. Бернулли тақсимоти**. *Бунда* $\xi$ *тасодифий миқдор 0 ва 1 қийматларни мос равишда* $q$ *ва* $p$ *эҳтимолликлар билан қабул қилади, яъни*

$$P(\xi = 0) = q, \quad P(\xi = 1) = p, \quad p + q = 1.$$

*Бу ҳолда* $M\xi = p, \quad D\xi = pq$ *бўлади.*

**2. Биномиал тақсимот.** $S_n$ *тасодифий миқдор* $(n, p)$ *параметрли биномиал тақсимот қонунига эга дейилади, агарда*

$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \ k = 0, 1, 2, ..., n$ *бўлса. Бу ерда* $0 < p < 1, \ \ C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ *ва Ньютон биномига асосан*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

*бўлади.*

Маълумки $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқсиз, бир хил Бернулли тақсимот қонунига эга бўлса, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ $(n, p)$ параметрли биномиал тақсимот қонунига эга бўлади (1.5 масалага қаранг) ва математик кутилма ва дисперсиянинг хоссаларига кўра , $MS_n = np, \ \ DS_n = npq$ бўлади.

**3.Пуассон тақсимоти.** $\xi$ *тасодифий миқдор* $\lambda > 0$ *параметрли Пуассон тақсимот қонунига эга дейилади, агарда*

$$p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2, ...$$

*бўлса.*

$e^{\lambda}$ функциянинг Маклорен қаторига ёйилмасидан фойдалансак,

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

келиб чиқади. Шунга ўхшаш $D\xi = \lambda$ тенгликни ҳосил қилиш мумкин. Агар $\xi_1$ ва $\xi_2$ тасодифий миқдорлар $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ параметрли Пуассон тақсимотига эга бўлиб, улар боғлиқсиз, яъни ихтиёрий $i, \ j = 1,2,...$ учун

$$P(\xi_1 = i, \ \xi_2 = j) = P(\xi_1 = i) P(\xi_2 = j)$$

бўлса, $\xi_1 + \xi_2$ тасодифий миқдор $\lambda_1 + \lambda_2$ параметрли Пуассон тақсимоти бўйича тақсимланган бўлади. Бу тасдиқни шартли эҳтимоллик ва тўла эҳтимоллик формуласидан фойдаланиб, қийинчиликсиз исбот қилса бўлади (1.6 масалага қаранг).

**4. Кўрсаткичли тақсимот**. $\tau$ *тасодифий миқдор* $\lambda > 0$ *параметрли кўрсаткичли (ёки экспоненциал) тақсимот қонунига эга дейилади, агарда унинг тақсимот функцияси*

$$F(x) = P(\tau < x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

*кўринишда бўлса. Бу ҳолда* $\tau$ *га мос зичлик функцияси*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

*бўлади.*

Бўлаклаб интеграллаш ёрдамида $\tau$ тасодифий микдорнинг математик кутилмаси ва дисперсияси мос равишда

$$M\tau = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$D\tau = M\tau^2 - (M\tau)^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

эканлигини келтириб чиқариш қийин эмас (мустақил равишда текшириб кўринг).

Энди кўрсаткичли тақсимот қонунининг жуда муҳим бўлган бир хоссасини кўриб чиқамиз.

**Лемма 1.** $\tau$ *тасодифий миқдор* $\lambda$ *- параметрли кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $x > 0, \ y > 0$ *учун*

$$P\left(\tau > x + y \middle/ \tau > x\right) = P(\tau > y) \qquad (2)$$

*бўлади.*

**Исботи.** $A$ ва $B$ ҳодисалар учун шартли эҳтимоллик

$$P\left(A \middle/ B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

формула орқали аниқланар эди. Агар $A=\{\tau > x+y\}$, $B=\{\tau > x\}$ деб олсак,

$$P\left(\tau > x+y \middle/ \tau > x\right)=\frac{P\left(\{\tau > x+y\}\cap\{\tau > x\}\right)}{P(\tau > x)}$$

тенглик ўринли бўлади. Агар $\tau$ тасодифий миқдор $x+y$ дан катта бўлса, у албатта $x$ дан ҳам катта бўлади. Шунинг учун $A\subseteq B$ муносабат ўринли бўлиб, ундан $A\cap B=A$ ва

$$P\left(\tau > x+y \middle/ \tau > x\right)=\frac{P\left(\tau > x+y\right)}{P(\tau > x)} \tag{3}$$

тенгликлар келиб чиқади. Кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлган тасодифий миқдор учун (1) га кўра

$$P(\tau > x)=1-\mathrm{P}(\tau\le x)=e^{-\lambda x}$$
$$P(\tau > x+y)=e^{-\lambda(x+y)}$$

бўлади. Бу тенгликлардан ва (3) дан лемманинг исботи келиб чиқади.

**Изоҳ**. Юқорида келтирилган хоссани янада яққолроқ тасаввур қилиш учун фараз қилайлик, $\tau$ электрик лампочканинг “яшаш вақти”, яъни лампочканинг яроқсиз ҳолга келгунча ёритиш муддати бўлсин. (2) муносабат шуни билдирадики, агар лампочка $x$ моментда ишлаб турган, яъни яроқсиз ҳолга келмаган бўлса, унинг яна $y$ вақт давомида “яшаш” эҳтимоллиги янги лампочканики каби бўлади. Бу хосса “эскирмаслик” хоссаси деб ҳам аталади.

Энди математикада айниятларни, тенгсизликларни ва бошқа муносабатларни исботлашда кўп қўлланиладиган *математик индукция* усулини эслатиб ўтамиз. Фараз қилайлик, бирор $T(n)$ тасдиқни ихтиёрий натурал сон $n$ учун тўғрилигини исботлаш талаб қилинсин (математик логика тилида айтганда, $T(n)$- натурал сонлар тўпламида берилган предикат). Бунинг учун

1) $T(n)$ тасдиқ $n=1$ да ўринли эканлиги кўрсатилади;

2) $n=k$ да, яъни $T(k)$ ўринли, деб фараз қилинади;

3) $n = k + 1$ да ҳам ўринли эканлиги исботланади. Мантиқий нуқтаи назардан қаралса, шу билан $T(n)$ тасдиқ ихтиёрий натурал сон $n$ учун исбот қилинган бўлади.

## §1 га масалалар

1.1. Тасодифий ҳодисалар устида амалларнинг асосий хоссаларини ёзинг.

1.2. Ихтиёрий $A$ ва $B$ ҳодисалар учун
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ айниятларни исботланг.

1.3. Ихтиёрий $A$ ва $B$ ҳодисалар учун
$P(A \cup B) = P(A) + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(A \cap B)$ эканлигини исботланг.

1.4. Тўла эҳтимоллик формуласини $n = 2$ учун исботланг.

1.5. $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ ўзаро боғлиқсиз тасодифий миқдорлар $p > 0$ параметрли бир хил Бернулли тақсимотига эга бўлса, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ...\xi_n$ тасодифий миқдор $(n,\ p)$ параметрли биномиал тақсимотига эгалигини кўрсатинг.

1.6. $\xi_1, \xi_2$ тасодифий миқдорлар боғлиқсиз бўлиб, мос равишда $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ параметрли Пуассон тақсимотига эга бўлсин. $\xi_1 + \xi_2$ ва $\xi_1 - \xi_2$ тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунларини аниқланг.

1.7. $\tau_1, \tau_2$ тасодифий миқдорлар боғлиқсиз бўлиб, мос равишда $\lambda_1$ ва $\lambda_2$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган бўлсин. $\tau_1 + \tau_2$ тасодифий миқдорнинг зичлик функциясини топинг.

1.8. 1.7. масала шартлари остида $\tau = \min\{\tau_1, \tau_2\}$ тасодифий миқдор $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ параметр билан кўрсаткичли тақсимланганлигини исботланг.

1.9. Математик индукция усулидан фойдаланиб

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}, \quad n = 1,2,...$$

Ньютон биноми формуласини исботланг.

1.10. Математик индукция усулидан фойдаланиб, агар $\xi_1, \xi_2, ... \xi_n$ тасодифий миқдорлар мос равишда $\lambda_1, \lambda_2, ... \lambda_n$ параметрли Пуассон тақсимот қонуни бўйича тақсимланган ва улар ўзаро боғлиқсиз бўлса, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ тасодифий миқдор $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$ параметрли Пуассон тақсимот қонунига эга эканлигини исботланг.

## §2. Талабларнинг энг содда (Пуассон) оқими

$\tau_1, \tau_2, ... \tau_n, ...$ ўзаро боғлиқсиз $\lambda > 0$ параметрли кўрсаткичли тақсимот қонунига эга тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги бўлсин. $\tau_i$ тасодифий миқдорни хизмат кўрсатиш станциясига $(i-1)$- мижоз билан $i$- мижоз келиш вақтлари оралиғи сифатида талқин қилиш мумкин. Агар ҳисобни $t_0$ моментдан бошласак, биринчи мижоз станцияга $t_1 = t_0 + \tau_1$ моментда, иккинчиси $t_2 = t_0 + \tau_1 + \tau_2$ моментда, ва хоказо, $k-$ мижоз $t_k = t_0 + \tau_1 + \tau_2 + ... + \tau_k$ моментда келади.

**Таъриф**. *Агар* $\tau_1, \tau_2, ... \tau_n, ...$ *тасодифий миқдорлар* $\lambda$ *параметрли кўрсаткичли тақсимланган тасодифий миқдорлар бўлса,*

$$t_0 = 0, \;\; t_k = t_{k-1} + \tau_k, \;\;\; k = 1, 2, ...$$

*кўринишидаги* $t_0, t_1, t_2, ... \left( \{t_k\}_{k=0}^{\infty} \right)$ *тасодифий миқдорлар кетма-кетлигига энг содда оқим ёки Пуассон оқими дейилади.*

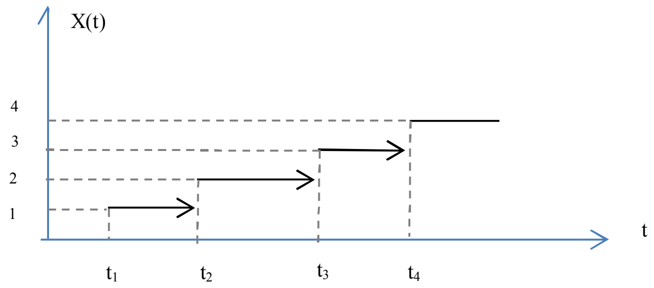
Агар мижозлар хизмат кўрсатиш станциясига энг содда оқимга мос равишда келсалар, кейин кўрамизки ((9)), $\lambda$ параметр станцияга вақт бирлиги орасида келган мижозлар сонининг математик кутилмасига, яъни ўрта қийматига тенг бўлади.

Эслатиб ўтамиз, ушбу қўлланмада биз, асосан, кириш оқими энг содда оқим бўлган оммавий хизмат кўрсатиш тизимларини қараймиз.

Энг содда оқим $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ учун $X(t)$ орқали $t$ моментгача келган мижозлар сонини белгилаймиз; бошқача айтганда,

$$X(t) = \max\{k \geq 0:\ t_k \leq t\}.$$

Табиийки, $X(t)$ тасодифий функция манфий бўлмаган бутун сонларни қабул қилади ва $t = t_1, t = t_2, \ldots$ моментларда 1 бирликка ортиб боради. Бу функциянинг графигини тасвирлаймиз (1-расм).




1-расм.

$t$ вақт мобайнида станцияга айнан $k$ та $(k = 0,1,2,\ \ldots)$ мижознинг келиш эҳтимоллигини

$$P_k(t) = P(X(t) = k)$$

орқали белгилаймиз.

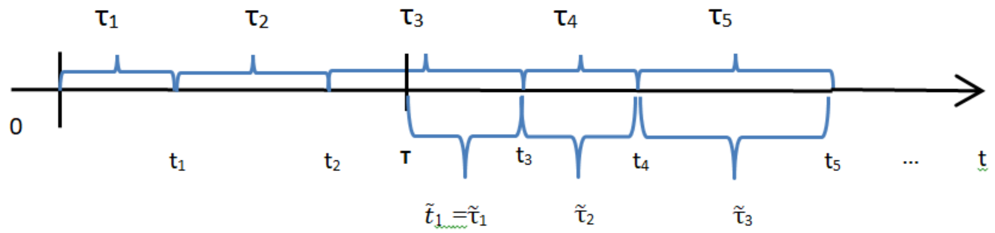
**Теорема 1**.

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

*тенглик ўринлидир*.

Теорема 1 ни исбот қилишдан аввал баъзи ёрдамчи тушунча ва тасдиқларни қараймиз.

$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ энг содда оқим ва $T > 0$ тасодифий бўлмаган вақт моменти бўлсин (2-расм)




2-расм.

$T$ дан катта ва унга энг яқин бўлган $t_k$ гача бўлган вақт оралиғини $\tilde{\tau}_1$ орқали белгилаймиз, яъни

$$\tilde{\tau}_1 = \min\{t_k - T : t_k - T > 0\}.$$

Навбатдаги мижоз келгунча кетган вақтни $\tilde{\tau}_2$ ва ҳ.к. белгилаймиз. 2-расмда $\widetilde{\tau_1} = \tau_3 - T$, $\widetilde{\tau_2} = \tau_4$ ва ҳ.к. $T$ моментдан кейин биринчи келган мижознинг тартиб рақами тасодифий бўлади (2-расмда бу 3 га тенг).

$$\tilde{\tau}_1 = t_k - T, \ \tilde{\tau}_{1+j} = \tau_{k+j},$$

$$k = \min\{m \ge 1 : t_m > T\}, \ j = 1,2,...,$$

$$\tilde{t}_0 = 0, \ \tilde{t}_1 = \tilde{\tau}_1, \ \tilde{t}_2 = \tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2$$

ва ҳ.к. белгилаб, $\left\{\tilde{\tau}_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ кетма-кетлик ёрдамида янги

$$\left\{\tilde{t}\right\}_{k=0}^{\infty}$$

оқимни ҳосил қиламиз. Бундай қурилган оқимни $\left\{t_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ оқимдан $T$ қийматга *силжиган оқим* деб атаймиз.

Лемма 1.1 дан тўғридан-тўғри қуйидаги тасдиқ келиб чиқади.

**Лемма 2.** *Энг содда оқим* $\left\{t_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ *дан* $T$ *қийматга силжиган* $\left\{\tilde{t}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *оқим ҳам энг содда оқим бўлади*.

$X(t)$ функциянинг $(a,b]$ ярим оралиқдаги орттирмасини

$$X\big((a,b]\big) = X(b) - X(a), \quad 0 \le a \le b < \infty$$

кўринишда белгилаймиз. Демак, $X\big((a,b]\big)$ станцияга $a < t \le b$ вақт оралиғида келган мижозлар сонига тенг.

**Лемма 3**. *Ихтиёрий* $0 \le a \le b < \infty$ *сонлар учун*

$$P\Big(X\big((a,b]\big) = k\Big) = P\Big(X\big((0,b-a]\big) = k\Big), \quad k = 0,1,2,...$$

*тенглик ўринли бўлади.*

Бу лемманинг исботи тўғридан-тўғри Лемма 2 дан келиб чиқишини тушуниш қийин эмас.

(4) хосса $X(t)$ функциянинг *бир жинсли орттирмалилик* хоссаси дейилади. Бунинг маъноси, $a < t \le b$ вақт оралиғида келган мижозлар сони бўлган $X\left((a,b]\right)$ нинг тақсимот қонуни фақат шу оралиқ узунлиги $b-a$ га боғлиқ бўлар экан.

**Теорема 1 нинг исботи.** Табиийки, етарли кичик $\Delta t$ вақт оралиғида бирорта ҳам мижознинг келмаслик эҳтимоллиги

$$P_0(\Delta t) = P(X(\Delta t) = 0) = P(\tau_1 > \Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o\left(\Delta t\right) \qquad (1)$$

бўлади. Энди $\Delta t$ вақт оралиғида станцияга фақат битта мижоз келиш эҳтимоллиги $P_1(\Delta t)$ ни аниқлаймиз. Бу эҳтимоллик, биринчи мижознинг келиш моменти $\Delta t$ дан кичик, иккинчи мижознинг келиш моменти $\Delta t$ дан катта бўлиш эҳтимоллигига тенг, яъни

$$P_1(\Delta t) = P(X(\Delta t) = 1) = P(\tau_1 < \Delta t,\, \tau_1 + \tau_2 > \Delta t) =$$

$$= P(\tau_1 < \Delta t) - \mathrm{P}(\tau_1 < \Delta t,\, \tau_1 + \tau_2 < \Delta t) = \mathrm{P}(\tau_1 < \Delta t) - P(\,\tau_1 + \tau_2 < \Delta t).$$

Охирги тенглик $\left\{\tau_1 + \tau_2 < \Delta t\right\} \subseteq \left\{\tau_1 < \Delta t\right\}$ муносабатдан келиб чиқади. Боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндисининг “тугун” формуласидан фойдаланиб,

$$P(\tau_1 + \tau_2 < \Delta t) = \int_0^{\Delta t} (1 - e^{-\lambda(\Delta t - x)}) d(1 - e^{-\lambda x}) =$$

$$= -\lambda \int_0^{\Delta t} (1 - e^{-\lambda\Delta t} \cdot e^{\lambda x}) \cdot e^{-\lambda x} dx = -\lambda \int_0^{\Delta t} e^{-\lambda x} dx + \lambda \int_0^{\Delta t} e^{-\lambda\Delta t} dx =$$

$$= e^{-\lambda\Delta t} - 1 + \lambda\Delta t e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) - 1 + \lambda\Delta t + o(\Delta t) = o(\Delta t) \qquad (2)$$

ни ҳосил қиламиз. $P(\tau_1 < \Delta t) = 1 - \mathrm{P}(\tau_1 > \Delta t)$ бўлганлиги учун (1) ва (2) муносабатлардан

$$P_1(\Delta t) = P(X(\Delta t) = 1) = \lambda\Delta t + o(\Delta t) \qquad (3)$$

келиб чиқади.

Ҳосил қилинган (1) , (3) тенгликлардан $\Delta t$ вақт оралиғида биттадан кўп сондаги мижозларнинг келиш эҳтимоллиги ҳам $\Delta t$ га нисбатан чексиз кичик ($o(\Delta t)$) миқдор эканлигини кўриш мумкин, яъни

$$P(X(\Delta t) \geq 2) = P_2(\Delta t) + P_3(\Delta t) + \ldots$$

$$= 1 - P(X(\Delta t) = 0) - P(X(\Delta t) = 1) =$$

$$= 1 - (1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) - (\lambda\Delta t + o(\Delta t)) = o(\Delta t). \qquad (4)$$

$P_n(t)$ ни оммавий хизмат кўрсатиш тизимига $t$ вақт мобайнида айнан $n$ та талаб тушиш эҳтимоллиги, деб талқин қилиш мумкин. Табиийки, $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) = 1$, чунки ихтиёрий $t$ вақт мобайнида тизимга бирорта ҳам талаб тушмаган ёки қандайдир сондаги талаблар тушган бўлиши мумкин. Агар $\Delta t$ етарлича кичик бўлса, лемма 2 ва (1)-(4) тенгликлардан $n \geq 1$ да

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)P_0(\Delta t) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) = P_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t),$$

$$P_n(t + \Delta t) = P_n(t)P_0(\Delta t) + \mathrm{P}_{n-1}(t)P_1(\Delta t) + P_{n-2}(t)P_2(\Delta t) + \ldots + P_0(t)P_n(\Delta t) =$$

$$= P_n(t)(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) + P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) =$$

$$= P_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t) \qquad (5)$$

келиб чиқади. Ҳақиқатан ҳам (5) даги биринчи тенгликнинг чап томонида $t + \Delta t$ вақт мобайнида бирорта ҳам талаб тушмаслик ҳодисасининг эҳтимоллиги турибди. Равшанки, бу эҳтимоллик, боғлиқсиз ҳодисалар кўпайтмасининг эҳтимоллиги формуласига асосан, $t$ моментгача талаб тушмаслик эҳтимоллигини $\Delta t$ узунликдаги вақт интервалида талаб тушмаслик эҳтимоллигига кўпайтмасига тенг. Иккинчи тенглик эса, тўла эҳтимоллик формуласига асосланади ва бунда биринчи ва иккинчи ҳадлар эътиборга олинади, чунки $\Delta t$ вақт оралиғида биттадан кўп талабларнинг тушиш эҳтимоллиги (4) га асосан $\Delta t$ га нисбатан чексиз кичик миқдордир. (5) тенгликларда мос равишда $P_0(t)$ ва $P_n(t)$ ларни чап томонга ўтказиб ва $\Delta t$ га бўлиб, қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad ,$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

$\Delta t \to 0$ да лимитга ўтсак, чап томонлар $P_n'(t)=\dfrac{dP_n(t)}{dt}$ ҳосилаларга интилади ва

$$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$$

$$\tag{6}$$

$$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t),\ \ n=1,2,...$$

бўлади. Бу эса, $t$ га нисбатан чизиқли дифференциал, $n$ га нисбатан эса, чизиқли айирмали биринчи тартибли тенгламалардир.

(6) тенламаларни бир неча усулда, хусусан, қуйидаги ҳосил этувчи функция

$$P(z,t)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)\mathrm{z}^n = P_0(t)+\mathrm{z}P_1(t)+\mathrm{z}^2 P_2(t)+... \tag{7}$$

ёрдамида ҳал этиш мумкин. Агар ҳосил этувчи функция $P(z,t)$ маълум бўлса, уни $z$ бўйича $n$ марта дифференциаллаб, $n!$ га бўлиб ва $z=0$ қийматни қўйиб, $P_n(t)$ ни топиш мумкин, яъни

$$P_n(t)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n P(z,t)}{\partial z^n}\bigg|_{z=0}. \tag{8}$$

Аввал таъкидлаганимиздек, $P_0(0)=1$, яъни $t=0$ бошланғич моментда тизимда талаблар (мижозлар) бўлмасин. Бу шартнинг бузилиши, яъни бошланғич $t=0$ моментда тизимда бир нечта талабларнинг бўлиши $(P_i(0)=1,\ i\ge 1)$, кўриш мумкинки, жиддий қийинчиликларга олиб келмайди. Шундай қилиб,

$$P(z,0)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(0)=P_0(0)=1\,.$$

Яна шуни қайд этамизки,

$$P(1,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mathrm{t})=1$$

ва

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mathrm{t})\ \mathrm{z}^n=\sum_{n=0}^{\infty}P_n'(\mathrm{t})\ \mathrm{z}^n\,.$$

Агар (6) тенгламаларнинг иккала томонини $z^n$ га кўпайтириб, сўнгра йиғиб чиқсак, чап томонларнинг йиғиндиси $\dfrac{\partial P(z,t)}{\partial t}$ га, ўнг томондаги биринчи ҳадларнинг йиғиндиси $-\lambda P(z,t)$ га, иккинчи ҳадларнинг йиғиндиси эса

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\,P_{n-1}(\mathrm{t})\ \mathrm{z}^n=\lambda\,z\,P_0(t)+\lambda\,z^2P_1(t)+\ldots=\lambda\,z\,P(\mathrm{z},t)$$

га тенг бўлади. Шундай қилиб, (6) тенгламалар системаси ҳосил этувчи $P(z,t)$ функция учун

$$\frac{\partial P(z,t)}{\partial t}-\lambda(z-1)P(z,t)=0$$

кўринишидаги чизиқли дифференциал тенгламага келади. Бу эса, математик анализнинг умумий курсларида ўрганиладиган энг содда биринчи тартибли оддий дифференциал тенглама бўлиб, унинг умумий ечими

$$P(z,t)=Ce^{\lambda(z-1)t}$$

бўлади. Бу ечим эканлигини ўрнига қўйиш билан текшириб кўриш мумкин. $P(z,0)=1$ бошланғич шартни ҳисобга олсак, $C=1$ ва

$$P(z,t)=e^{\lambda(z-1)t}$$

ечимга келамиз. (8) формулага асосан, талаб қилинган

$$P_0(t)=e^{-\lambda t},\quad P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t},\ldots,P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\ \ n=1,2,\ldots$$

натижага келамиз. Теорема 1 исботланди.

Агар $t = 1$ деб олсак,

$$P_n(1) = P(X(1) = n)$$

станцияга вақт бирлиги ичида келган мижозлар сонининг тақсимотини беради. Бу эса, юқорида кўрганимиздек, $\lambda$ параметрли Пуассон тақсимотидир ва

$$MX(1) = \lambda, \tag{9}$$

яъни, $\lambda$ параметрли энг содда оқим билан станцияга вақт бирлиги оралиғида келган мижозлар (оммавий хизмат кўрсатиш тизимига тушган талаблар) сонининг математик кутилмаси (ўрта қиймати) шу $\lambda$ параметрга тенг бўлар экан.

Демак, $t$ вақт мобайнида энг содда оқим бўйича станцияга (оммавий хизмат кўрсатиш тизимига) келган мижозлар (тушган талаблар) сони $\lambda t$ параметрли Пуассон тақсимот қонунига бўйсунар экан.

**Лемма 4.** *Ихтиёрий $m$ та $(m \geq 2)$ кесишмайдиган*

$$(b_0, b_1],\ (b_1, b_2],\ \ldots\ (b_{m-1}, b_m],\ \ 0 = b_0 \leq b_1 \leq \ldots \leq b_m < \infty,$$

*ярим оралиқлар учун*

$$X\big((b_0, b_1]\big),\ X\big((b_1, b_2]\big),\ \ldots\ X\big((b_{m-1}, b_m]\big)$$

*тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқсиз бўлади, яъни ихтиёрий манфий бўлмаган бутун $i_1, i_2, \ldots, i_m$ сонлар учун*

$$P\Big(X\big((b_0, b_1]\big) = i_1,\ X\big((b_1, b_2]\big) = i_2,\ \ldots\ X\big((b_{m-1}, b_m]\big) = i_m\Big) =$$

$$= P\Big(X\big((b_0, b_1]\big) = i_1\Big) \cdot \mathrm{P}\Big(X\big((b_1, b_2]\big) = i_2\Big) \ldots P\Big(X\big((b_{m-1}, b_m]\big) = i_m\Big) \tag{10}$$

*бўлади.*

**Исботи**. Лемма 3 ва теорема 1 га асосан лемма 4 ни исботлаш учун

$$P\Big(X\big((b_0, b_1]\big) = i_1,\ X\big((b_1, b_2]\big) = i_2,\ \ldots\ X\big((b_{m-1}, b_m]\big) = i_m\Big) =$$

$$= e^{-\lambda(b_1 - b_0)} \cdot \frac{(\lambda(b_1 - b_0))^{i_1}}{i_1!} \cdot e^{-\lambda(b_2 - b_1)} \cdot \frac{(\lambda(b_2 - b_1))^{i_2}}{i_2!} \ldots \tag{11}$$

$$\dots e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}$$

эканлигини кўрсатиш кифоя.

(11) муносабатни $k=i_1+i_2+\dots+i_m$ сони бўйича математик индукция методини қўллаш билан исботлаш мумкин.

$k=0$ бўлганда

$$P\Big(X\big((b_0,b_1]\big)=0,\ X\big((b_1,b_2]\big)=0,\ \dots X\big((b_{m-1},b_m]\big)=0\Big)=$$

$$=e^{-\lambda(b_1-b_0)}\cdot e^{-\lambda(b_2-b_1)}\dots e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})},$$

яъни (11) тенглик ўринли.

Фараз қиламиз, (11) формула барча $k\le n$ лар учун ўринли бўлсин.

$$k=i_1+i_2+\dots+i_m=n+1,\ \ s=\min\big\{j\ge 1:\ i_j\ge 1\big\}$$

бўлса, тўла эҳтимоллик формуласига (§1) кўра ,

$$P\equiv P\Big(X\big((b_0,b_1]\big)=i_1,\ X\big((b_1,b_2]\big)=i_2\,,\ \dots X\big((b_{m-1},b_m]\big)=i_m\Big)=$$

$$=\int_{b_{s-1}}^{b_s}\lambda e^{-\lambda u}P\Big(X\big((b_0,b_1]\big)=0,\dots,X\big((b_{s-2},b_{s-1}]\big)=$$

$$=0,X\big((u,b_s]\big)=i_s-1,\ X\big((b_s,b_{s+1}]\big)=i_{s+1},\dots,$$

$$\dots,X\big((b_{m-1},b_m]\big)=i_m)du$$

бўлади. Лемма 2 ва қилган фаразимизга кўра ($k=0+\dots+0+i_s-1+i_{s+1}+\dots+i_m=n$ бўлгани учун)

$$P(X\big((b_0,b_1]\big)=0,\dots,\ X\big((b_{s-2},b_{s-1}]\big)=0,X\big((u,b_s]\big)=$$

$$=i_s-1,X\big((b_s,\,b_{s+1}]\big)=i_{s+1},\dots..,X\big((b_{m-1},\,b_m]\big)=i_m\,)=$$

$$=P(X\big((b_0,\,b_1]\big)=0)\dots P\Big(X((b_{s-2},\,b_{s-1}]\big)=0)\cdot\mathrm{P}(\,X\big((0,\,b_s-u]\big)=$$

$$=i_s-1, X\left(\left(b_s-\mathrm{u},\ b_{s+1}-u\right]\right)=i_{s+1},\ldots X\left(\left(b_{m-1}-u,\ b_m-u\right]\right)=$$

$$=i_m\,)=e^{-\lambda(b_1-b_0)}\cdots e^{-\lambda(b_{s-1}-b_{s-2})}.$$

$$.e^{-\lambda(b_s-u)}\cdot\frac{(\lambda(b_s-u))^{i_s-1}}{(i_s-1)!}\ldots\ e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}.$$

муносабатлар ўринлидир. Шунинг учун

$$P=\int_{b_{s-1}}^{b_s}\lambda e^{-\lambda u}e^{-\lambda(b_s-u)}\cdot\frac{(\lambda(b_s-u))^{i_s-1}}{(i_s-1)!}\ldots e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}du=$$

$$=e^{-\lambda b_s}\int_{b_{s-1}}^{b_s}\lambda\frac{(\lambda(b_s-u))^{i_s-1}}{(i_s-1)!}du\ \ldots\ e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}=$$

$$=e^{-\lambda(b_1-b_0)}\ldots e^{-\lambda(b_{s-1}-b_{s-2})}\cdot e^{-\lambda(b_s-b_{s-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_s-b_{s-1}))^{i_s}}{i_s!}\ldots$$

$$\ldots e^{-\lambda(b_m-b_{m-1})}\cdot\frac{(\lambda(b_m-b_{m-1}))^{i_m}}{i_m!}.$$

Лемма исбот қилинди.

Лемма 4 да келтирилган хосса $X(t)$ тасодифий жараён орттирмаларининг *боғлиқсизлик* хоссаси дейилади.

Юқоридагилардан хулоса қилиб айтганда, $X(t)$ бир жинслилик, орттирмалари боғлиқсизлик хоссаларига эга бўлиб, $X\left(\left(a,b\right]\right)$ орттирма $\lambda(b-a)$ параметрли Пуассон тақсимотига эга экан. $X(t)$ ни *бир жинсли Пуассон жараёни* деб аталади.

Энди энг содда оқимнинг (демак, Пуассон жараёнининг) яна иккита муҳим хоссаларини кўриб чиқамиз.

Мос равишда $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}$ параметрли иккита боғлиқсиз энг содда

$$\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}, \quad \left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$$

оқимлар берилган бўлсин.

**Таъриф**. *Агар* $\{t_k\}$ *тўплам* $\left\{t_k^{(1)}\right\}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}$ *тўпламларнинг бирлашмасидан иборат бўлиб,* $\{t_k\}$ *тўплам элементлари ўсиш тартибида жойлаштирилган бўлса,* $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ *оқимга* $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *ва* $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *оқимларнинг қўшилишидан ҳосил бўлган оқим дейилади.*

**Лемма 5**. *Агар* $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ *мос равишда* $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$ *параметрли энг содда оқимлар бўлса, уларнинг қўшилишидан ҳосил бўлган* $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ *оқим* $\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$ *параметрли энг содда оқим бўлади.*

**Исботи.** Агар $X^{(1)}(t)$, $X^{(2)}(t)$ мос равишда $\left\{t_k^{(1)}\right\}_{k=0}^{\infty}$, $\left\{t_k^{(2)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ оқимларга мос келувчи Пуассон жараёнлари бўлса, равшанки $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ оқимга

$$X(t)=X^{(1)}(t)+X^{(2)}(t)$$

жараён мос келади. $\lambda^{(1)}$ ва $\lambda^{(2)}$ параметрли Пуассон тақсимотига эга бўлан боғлиқсиз тасодифий микдорлар йиғиндиси $\lambda=\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}$ параметрли Пуассон тақсимот қонунига эга эканлигидан (§1, п.3) лемманинг исботи осонгина келиб чиқади.

Энг содда

$$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$$

оқимнинг иккита оқимга ажралиш жараёнига тўхталамиз. Бунинг учун боғлиқсиз бир хил тақсимланган фақат 0 ва 1 қийматларни $q$ ва $p$ эҳтимоллик билан қабул қиладиган (яъни Бернулли тақсимотига эга бўлган) $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n, ...$ тасодифий микдорлар кетма-кетлигини қараймиз:

$$P(\xi_i = 1) = p, \quad P(\xi_i = 0) = q, \quad p + q = 1, \;\; p \geq 0, \quad q \geq 0, \;\; i = 1, 2, ....$$

$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ энг содда оқимни иккита оқимга бўлинишини қуйидагича амалга оширамиз: агар $\xi_i = 1$ бўлса $t_i$ ни биринчи оқимга, агарда $\xi_i = 0$ бўлса, $t_i$ ни иккинчи оқимга ( тўпламга) киритамиз. Оқимнинг 2 та оқимга бундай бўлинишига *$p$ параметрли Бернулли бўлиниши* деб аталади.

**Лемма 6.** *$\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ энг содда оқимнинг $p$ параметрли Бернулли бўлинишидан ҳосил бўлган $\{t_k^{(1)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{t_k^{(2)}\}_{k=0}^{\infty}$ оқимлар мос равишда $\lambda^{(1)} = \lambda p$ ва $\lambda^{(2)} = \lambda q$ параметрли боғлиқ бўлмаган энг содда оқимлар бўлади.*

Лемманинг исботи қуйида келтирилган 2.5 масаланинг ечилишидан келиб чиқади.

**Изоҳ.** Агар бошланғич $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ энг содда оқимни мижозларнинг келиш тартибига қараб, биринчисига жуфт рақамли мижозларни, яъни $t_{2k}$ ларни, иккинчисига тоқ рақамли мижозларни, яъни $t_{2k+1}$ ларни бўлиб чиқсак, ҳосил бўлган оқимлар энг содда оқимлар бўлмайди.

## § 2 га масалалар

2.1. Дўконга вакт бирлиги оралиғида кирувчи харидорлар сони $\lambda$ параметрли Пуассон тақсимотига эга бўлсин ва ҳар бир харидор $p$ эҳтимоллик билан харид қилсин. Дўконга кирган харидорларнинг харид қилганлари сони $\lambda p$ параметрли Пуассон тақсимот қонунига эга эканлигини исбот қилинг.

2.2.Лемма 5 нинг тўла исботини келтиринг.

2.3. Лемма 6 дан кейинги изоҳдаги тасдиқни исботланг.

2.4. Бўлинган оқимлар боғлиқсизлигининг исботига алоҳида эътибор берган ҳолда Лемма 6 нинг тўла исботини келтиринг.

2.5. Хўрандалар ресторанга Пуассон оқимига мос равишда келадилар ва соатига ўртача 20 та хўранда келади. Ресторан $11^{00}$ да очилади.

а) Агар $11^{07}$ да ресторанда 18 та хўранда бўлса, соат $11^{12}$ да уларнинг сони 20 та бўлиш эҳтимоллигини топинг.

б) Агар охирги хўранда ресторанга $11^{25}$ да кирган бўлса, ундан кейинги янги хўранданинг $11^{28} - 11^{30}$ вақт оралиғида келиш эҳтимоллигини топинг.

2.6. Маҳсулот 80 бирлик ҳажмга (сиғимга) эга бўлган омбордан Пуассон оқимига мос равишда бир кунда ўртача 5 бирликдан олинади.

а) Биринчи икки кунда омборхонадан 10 бирлик маҳсулот олинишининг эҳтимоллигини топинг.

б) Тўртинчи куннинг охирига келиб омборхонада маҳсулот қолмаслик эҳтимолини топинг.

2.7. Агар $t_1$- биринчи мижознинг станцияга келиш моменти (яъни $\lambda$ - кўрсаткичли тасодифий миқдор) бўлса, $\Delta > 0,\ \Delta \to 0$ да

$$P(t_1 \in (t,\ t+\Delta) = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \Delta + o(\Delta)$$

эканлигини кўрсатинг. Эслатма: $\alpha(\Delta) = o(\Delta)$ бўлади, агарда $\lim\limits_{\Delta \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta)}{\Delta} = 0$ бўлса.

## *§3. Туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни*

Фараз қилайлик, биз қандайдир тирик мавжудотлар ҳамжамиятининг (ёки популяциясининг) вақт бўйича ривожланишини ўрганаётган бўлайлик. Бу қандайдир чегараланган ҳудуддаги ҳайвонот ёки ўсимликлар дунёси бўлиши мумкин. Бизни фақат ўрганилаётан ҳамжамиятнинг (популяциянинг) энг асосий кўрсаткичи (характеристикаси) бўлган, ундаги тирик мавжудотлар сони қизиқтирсин. Аниқлик учун , айтайлик, дунёнинг қолган қисмидан ажратилган (изоляция қилинган) ўрмондаги (масалан бирор оролдаги) олмахонларнинг популяцияси, яъни улар сонининг кўпайиши ва камайиши ўрганилаётган бўлсин. Олмахонлар “ўзларининг қонунлари” асосида кўпайиши, нобуд бўлиши мумкин ва бизни $t$ моментдаги олмахонлар сони $X(t)$ қизиқтиради. Равшанки, $X(t)$ жараён манфий бўлмаган бутун қийматларни қабул қилади; агар қандайдир $t_0$ моментда олмахонлар сони $X(t_0)=0$ бўлса, у $t>t_0$ да ўзгармайди, яъни олмахонлар ҳамжамияти (популяцияси) йўқолади. Бундай $X(t)$ жараённи §2 даги Пуассон жараёни сингари “конструктив” ҳолда қурамиз.

Иккита манфий бўлмаган ҳақиқий сонлар кетма-кетлиги $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ берилган бўлсин. Уларнинг биринчиси популяциянинг кўпайишига мос келса, иккинчиси нобуд бўлишига мос келади. Ундан ташқари, иккита бир-бирига боғлиқ бўлмаган $\left\{\tau_i^+\right\}_{i=1}^{\infty}$, $\left\{\tau_i^-\right\}_{i=1}^{\infty}$ $\lambda=1$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган, ҳар бир кетма-кетлик ичида ўзаро боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар кетма-кетликлари берилган бўлсин. Демак, $t\geq 0$ учун

$$P(\tau_i^+>t)=P(\tau_i^->t)=e^{-t}$$

бўлади. У ҳолда $\dfrac{\tau_i^+}{\lambda_i}$ тасодифий миқдорлар $\lambda_i$ параметрли, $\dfrac{\tau_i^-}{\mu_i}$ тасодифий миқдорлар эса, $\mu_i$ параметрли кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлади, чунки

$$P\left(\frac{\tau_i^+}{\lambda_i}>t\right)=P(\tau_i^+>\lambda_i t)=e^{-\lambda_i t},\quad P\left(\frac{\tau_i^-}{\mu_i}>t\right)=P(\tau_i^->\mu_i t)=e^{-\mu_i t}.$$

$X(t)$ жараённи қуйидагича қурамиз. $X(0)=i_0$, $i_0\geq 1$ бўлсин. Агар

$$t_1=\tau_1,\ \ \tau_1=\min\left\{\frac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}},\ \frac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}}\right\}$$

деб белгиласак, $X(t)$ жараён $(0,t_1)$ вақт оралиғида қийматини ўзгартирмайди, яъни $X(t_0)=i_0$ бўйича қолади.

$$\frac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}} \text{ ва } \frac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}}$$

моментлардан қайси бири аввал келишига қараб, $t_1$ моментда $X(t)$ жараённинг қиймати бир бирликка ошади ёки камаяди:

$$X(t_1) = i_1 = \begin{cases} i_0 + 1, \ \text{агар} & \dfrac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}} \leq \dfrac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}} \quad \text{бўлса}, \\ i_0 - 1, \ \text{агар} & \dfrac{\tau_i^+}{\lambda_{i_0}} > \dfrac{\tau_i^-}{\mu_{i_0}} \quad \text{бўлса}. \end{cases}$$

Шундай қилиб, $X(t)$ жараённинг $t_1$ нуқтадаги қиймати $i_1$ га тенг бўлади. Агар

$$\tau_2 = \min\left\{\frac{\tau_2^+}{\lambda_{i_1}}, \ \frac{\tau_2^-}{\mu_{i_1}}\right\}, \ t_2 = t_1 + \tau_2$$

белгилашлар киритсак, $X(t)$ жараённинг ўзгариши (популяцияси) $(t_1, t_2)$ вақт интервалида юқоридаги қонуниятга бўйсунади, яъни $(t_1, t_2)$ интервалда ўзгармайди $(X(t) = i_1)$ ва $t_2$ моментда бир бирликка ортади, агарда

$$\frac{\tau_2^+}{\lambda_{i_1}} \leq \frac{\tau_2^-}{\mu_{i_1}}$$

бўлса. Акс ҳолда бир бирликка камаяди. Агар $X(0) = 0$ бўлса, $X(t)$ жараённинг қиймати

$$\tau_1 = \frac{\tau_1^+}{\lambda_0}$$

тасодифий моментда бир бирликка ортади, яъни $X(\tau_1) = 1$ бўлиб қолади. $X(t)$ жараённинг аниқланиши шу тариқа давом этади.

Юқоридаги тартибда аниқланган $X(t), \ t \geq 0$ жараён *вақт бўйича бир жинсли туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни* дейилади. Унинг тақсимоти

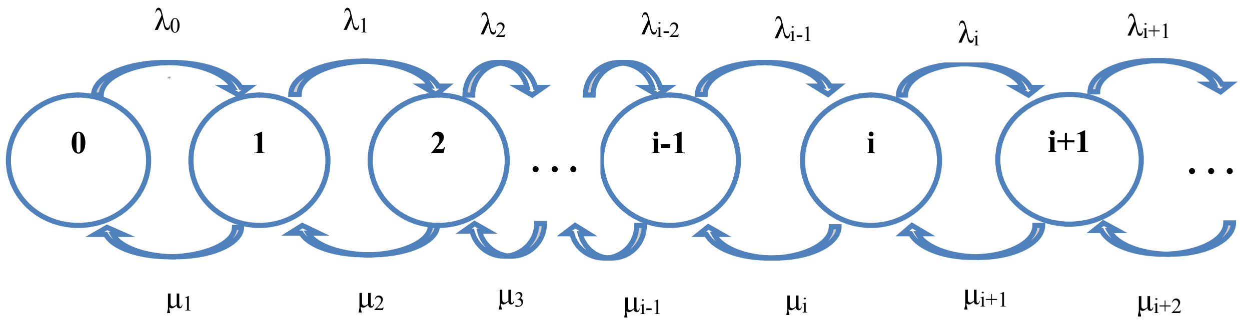
$$\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}, \quad \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$$

параметрлар ва бошланғич тақсимот, яъни $X(0)$ тасодифий миқдорнинг

$$P_k(0)=P(X(0)=k),\ \ k=0,1,2,...$$

тақсимоти орқали тўла аниқланади.

$X(t)$ жараённинг ривожланишини яққолроқ тасаввур қилиш учун қуйидаги шаклдаги диаграммадан фойдаланиш қулайдир (1-расм).




1-расм.

Шаклнинг юқори қисмидаги йўналишлар (стрелкачалар) жараённинг кўпайиш динамикасига мос келади: жараён $i-$ ҳолатдан $(i+1)-$ ҳолатга $\lambda_i$ интенсивлик билан ўтади. Қуйи қисмдаги стрелкачалар эса, жараённинг камайиш (нобуд бўлиш) динамикасига мос келади: жараён $i-$ ҳолатдан $(i-1)$- ҳолатга $\mu_i$ интенсивлик билан ўтади.

$$P_k(t)=P(X(t)=k),\ \ t\geq 0,\ \ k=0,1,2,...$$

функциялар туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни $X(t)$ нинг тақсимотини аниқлайди. Кейинги параграфда бу функциялар қаноатлантирадиган дифференциал тенгламалар системасини келтирамиз.

Шуни таъкидлаш керакки, параметрларнинг ҳар қандай

$$\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty},\ \ \{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$$

кетма-кетлиги учун қиймати доимо чекли бўладиган (бузилмаган) $X(t)$ жараён мос келавермайди. Гап шундаки, агар $i\to\infty$ да $\lambda_i$ сонлар жуда тез ўсадиган бўлса, яъни кўпайиш жуда катта интенсивликда (тезликда) кечса, у ҳолда $X(t)$ жараён қандайдир $t$ моментда “портлаши” мумкин, яъни $X(t)$ нинг ихтиёрий сондан катта бўлиш эҳтимоллиги мусбат бўлиб, чексизликкача ўсиши мумкин. Бунга мисол қилиб, бактерияларнинг қулай шароитларда кўпайиш жараёнини, портлашга олиб келадиган химик реакцияларни ифодаловчи жараёнларни келтириш мумкин. Демак, туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнларининг ўрганишда

$$P(X(t) < \infty) = 1$$

бўлиши учун зарур ва етарли шартларни аниқлаш муҳим масалалардан ҳисобланар экан. Энди биз шу масала билан шуғулланамиз.

Барча $\mu_i = 0$ бўлган туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнлари *фақат кўпаювчи жараёнлар* сирасига (қаторига) киради. Агар барча $\lambda_i = 0$ бўлса, бундай жараёнлар *фақат камаювчи жараёнлар* дейилади. Оммавий хизмат кўрсатиш тизими ўз фаолиятини тизимда маълум сондаги мижозлар бор бўлган ҳолатда бошлаб, хизмат кўрсатиб бўлинган мижозлар $\mu_i$ интенсивлик билан тизимни тарк этса ва янги мижозлар келмаса (ёки қабул қилинмаса), бундай тизимлар фақат камайиш жараёнлари орқали ифодаланади. Бундай жараёнларга мисол қилиб, дўконга янги товарлар олиб келинмаган ҳолда мавжуд товарларни сотиш жараёнини ёки янги маҳсулотлар киритилмаган ҳолда омборхонада мавжуд бўлган маҳсулотларни тегишли жойларга тарқатиш жараёнини келтириш мумкин. Фақат кўпаювчи жараёнларга ҳам шунга ўхшаш кўплаб мисоллар келтириш мумкин.

Қуйидаги лемма фақат кўпаювчи бўлган $X(t)$ жараённинг чекли бўлишини кафолатлайдиган

$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$$

параметрларга қўйиладиган зарурий ва етарли шартларни беради.

**Лемма 1.** *Барча* $i \geq 1$ *лар учун* $\mu_i = 0$ *бўлсин. У ҳолда* $t > 0$ *нинг ихтиёрий чекли қийматида* $P(X(t) < \infty) = 1$ *бўлиши учун*

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}=\infty$$

*бўлиши зарур ва етарлидир.*

**Исботи**.

$$S_n\left(t\right)=\sum_{k=0}^{n}P_n(t)=\sum_{k=0}^{n}P(X(t)=k)$$

белгилаш киритамиз. Биз ҳозирча исботсиз қабул қиладиган қуйидаги тенгликларни § 4 да исбот қиламиз:

$$S_n'\left(t\right)=-\lambda_n P_n(t),\quad t\geq 0,\quad n=0,1,2,... \qquad (1)$$

(1) дан $P_0(0)=1,\ P_k(0)=0,\ k=1,2,...$ бошланғич шартларга асосан

$$1-S_n(t)=-\int_0^t S_n{}'(u)du=\lambda_n\int_0^t P_n(u)du \qquad (2)$$

тенглик келиб чиқади. $S_n(t)$ $n$ га нисбатан ўсувчи, яъни $n$ ортиб бориши билан унинг қиймати ортиб боради.

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k(t)=1$$

бўлганлиги учун $\{1-S_n(t)\}$ кетма – кетлик монотон камаювчи ва қуйидан чегараланган бўлади. Шунинг учун

$$r(t)=\lim_{n\to\infty}(1-S_n(t))$$

мавжуд ва ихтиёрий $n$ учун $1-S_n(t)\geq r(t)$ тенгсизлик ўринли бўлади. (2) муносабатларга асосан

$$\int_0^t P_n(u)du\geq\frac{r(t)}{\lambda_k},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\int_0^t P_k(u)du=\int_0^t S_n(u)du\geq r(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}$$

бўлади. $S_n(t)\leq 1$ тенгсизлик ўринли бўлганидан

$$t=\int_0^t du\geq\int_0^t S_n(u)du\geq r(t)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}$$

тенгсизликларга эга бўламиз. Равшанки, агар

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

узоқлашувчи бўлса, ихтиёрий $t>0$ учун $r(t)=0$ бўлади. Шу билан биз лемманинг етарлилик шартини, яъни

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty$$

шартдан ихтиёрий $t\geq 0$ учун $P(X(t)<\infty)=1$ келиб чиқишини исботладик. Иккинчи томондан (2) га асосан

$$\lambda_n\int_0^t P_n(u)du=1-S_n(t)\leq 1,$$

яъни

$$\int_0^t P_n(u)du\leq\frac{1}{\lambda_n}$$

тенгсизлик ўринли. Охирги тенгсизликлардан

$$\int_0^t S_n(u)\,du=\sum_{k=0}^{n}\int_0^t P_k(u)\,du\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\lambda_k}$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Шунинг учун

$$\int_0^t\lim_{n\to\infty}S_n(u)du\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

тенгсизликка эга бўламиз. Агар $P(X(t)<\infty)=1$ бўлса, у ҳолда ихтиёрий $u>0$ учун

$$\lim_{n\to\infty}S_n(u)=1$$

бўлади. Демак, $t$ нинг ихтиёрий нолдан катта қийматида

$$\int_0^t\lim_{n\to\infty}S_n(u)du=\int_0^t du=t\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}$$

тенгсизлик ўринлидир. Бундан эса,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}=\infty$$

муносабат келиб чиқади. Шу билан ихтиёрий $t\geq 0$ учун

$$P(X(t) < \infty) = 1$$

ўринли бўлишидан

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty$$

келиб чиқиши кўрсатилди. Лемма 1 исботланди.

Энди $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ параметрли туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни $X(t)$ га мос келувчи $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $(\mu_i = 0,\ i = 1,2,...)$ параметрли фақат кўпайиш жараёни бўлган $X^{+}(t)$ жараённи қараймиз. $\{X(t) < \infty\}$ ва $\{X^{+}(t) < \infty\}$ ҳодисалар учун

$$\{X^{+}(t) < \infty\} \subseteq \{X(t) < \infty\}$$

муносабат ўринли эканлигини кўриш қийин эмас. Шунинг учун лемма 1 дан қуйидаги натижани олиш мумкин.

**Натижа**. *Агар ихтиёрий* $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ *параметрли туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни* $X(t)$ *учун*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$$

*шарт бажарилса, у ҳолда ихтиёрий* $t \geq 0$ *учун*

$$P(X(t) < \infty) = 1$$

*ўринли бўлади.*

**Мисол.** Туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни $X(t)$ учун $\lambda_i = ci^{\alpha}$, $i = 1,2,...$ бўлсин. Агар $\alpha \leq 1$ бўлса,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$$

қатор узоқлашувчи бўлади ва юқоридаги натижага асосан, $X(t)$ жараён бир эҳтимоллик билан чекли бўлади. Агар $\alpha > 1$ бўлиб, $X(t)$ фақат кўпайиш жараёни бўлса, у ҳолда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i}$$

қатор яқинлашувчи бўлади. Лемма 1 га асосан, мусбат эҳтимоллик билан ихтиёрий чекли $t$ моментда "портлаш" юз бериши, яъни $X(t)=\infty$ бўлиши мумкин.

## § 3 га масалалар

3.1. Параметрлари

$$\lambda_k=\begin{cases}(N-k)\lambda, & \text{агар } 0\le k\le N \quad \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар } \ k>N \quad \text{бўлса},\end{cases}$$

$$\mu_k=\begin{cases}\mathrm{k}\,\mu, & \text{агар } 1\le k\le N \quad \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар } \ k>N \quad \text{бўлса},\end{cases}$$

кўринишда бўлган туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнини қараймиз. Шу жараёнга мос келувчи диаграммани тасвирланг.

3.2. Туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнининг параметрлари

$$\lambda_k=k\lambda+\alpha,\ \ k=0,1,2,...$$
$$\mu_k=k\mu,\quad k=1,2,...$$

бўлса, унга мос келувчи диаграммани тасвирланг.

3.3. Бир дона автомобилга мўлжалланган автомобиллар тўхташ жойини қараймиз. Банд бўлган тўхташ жойи $\mu$ параметрли кўрсаткичли тақсимотли тасодифий $\tau^-$ вақтда бўшайди. Тўхташ жойига автомобиллар $\lambda$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган тасодифий $\tau^+$ вақт оралиғида келади. (Тўхташ жойи банд бўлса, навбатдаги келган автомобил жой бўшашини кутмайди, дархол кетади). $X(t)$ автомобиллар тўхташ жойидаги $t$ моментдаги автомобиллар сони бўлсин. $X(t)$ га мос келувчи диаграммани ясанг.

3.4. $\lambda$ параметрли Пуассон жараёнига мос келадиган диаграммани тасвирланг.

3.5. Телефон орқали маълумот олмоқчи бўлган мижозлар $\lambda$ параметрли энг содда оқимни ташкил этсин. Ҳар бир сўзлашув $\mu$ кўрсаткичли тасодифий вақт давом этсин. Демак, тизимда ихтиёрий

$t$ моментда $X(t)=1$ нафар мижоз бўлиши мумкин (телефон банд) ёки $X(t)=0$ (телефон банд эмас) бўлиши мумкин. $X(t)$ га мос келувчи диаграммани чизинг.

3.6. 3.5.-масалада телефоннинг бир нафар мижоз учун хотираси бўлсин, яъни мижоз қўнғироқ қилганда телефон банд, лекин хотираси банд бўлмаса, автомат трубкани қўйиб, кутишни таклиф қилади. Телефон бўшаганда кутаётган мижознинг телефон қўнғироғи жиринглайди. Агар телефон ва хотира банд бўлса, мижозга хизмат кўрсатиш рад этилади. Агар $X(t)$ тизимдаги мижозлар сони бўлса, унга мос диаграммани тасвирланг.

3.7. 3.5.-масаланинг шартларида автоматик коммутатор, иккита телефон ва ҳар бир телефоннинг хизмат қилувчи оператори бўлсин. Агар мижоз мурожат қилган пайтда банд бўлмаган телефон бўлса, коммутатор автоматик равишда мижозни шу телефонга йўналтиради, акс ҳолда мижоз рад этилади. $X(t)$ тизимдаги мижозлар сони бўлса, унга мос диаграмма чизилсин.

3.8. 3.7.-масаланинг шартлари остида коммутатор бир нафар мижозга хотираси мавжуд бўлсин. $X(t)$ тизимдаги мижозлар сонини ифодаласа, унга мос диаграммани ясанг.

3.9. 3.7.-масала шартларида ҳар бир телефон бир нафардан мижоз учун хотираси мавжуд бўлсин. Агар $X(t)$ системадаги мижозлар сонига тенг бўлса, шу жараёнга мос келувчи диаграмма аниқлансин.

3.10. $X(t)$ фақат кўпаювчи жараён бўлсин. $(\mu_i=0,\ i=1,2,...)$. Кўпайиш интенсивлиги параметрлари $\lambda_k$ лар қуйидагича бўлганда жараён чекли бўлиш $(P(X(t)<\infty)=1)$ ёки бўлмаслигини аниқланг:

$a)$ $\lambda_k = k\lambda+\alpha,\quad \lambda>0,\quad \alpha>0,\quad k=0,1,...$

б) $\lambda_0=1,\quad \lambda_{k+1}=(k+1)\lambda_k,\qquad k=0,1,...$

в) $\lambda_k=\gamma^k,\qquad k=0,1,...,\quad \gamma>0$ нинг ҳар хил қийматида.

3.11. Фақат кўпайиш жараёнига мисоллар келтиринг.

## *§4. Туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнлари учун дифференциал тенгламалар. Стационар ҳолат*

$X(t)$ тасодифий жараён

$$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$$

коэффициентлар кетма-кетликлари асосида қурилган туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлсин. Қандайдир $0 < a < \infty,\ 0 < b < \infty$ сонлар учун

$$\lambda_k \le a + bk, \ \ k = 0,1,2,...$$

тенгсизликлар ўринли бўлсин, деб фараз қиламиз. Бу шарт ихтиёрий $t > 0$ қийматларда

$$P(X(t) < \infty) = 1$$

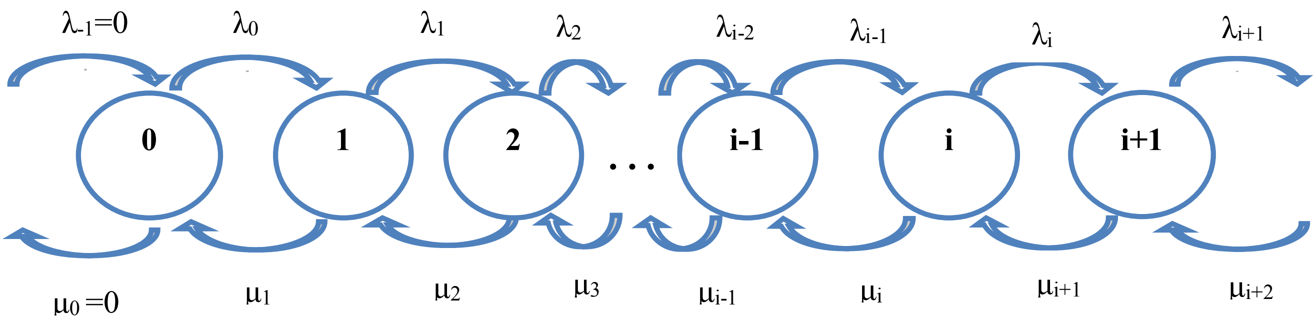
бўлишини, яъни $X(t)$ жараён "портлашсиз" ривожланишини таъминлайди (§3.даги лемма 1 ва 3.10. (а) масалага қаранг).

Бундан ташқари, $X(t)$ га мос диаграммада ҳар бир ҳолатга (ҳаттоки 0 ҳолатга) юқори стрелка чап томондан келишини ва бунда туғилиш (кўпайиш) интенсивлиги бўлган $\lambda$ нолга ҳам тенг бўлиши мумкинлигини (масалан, $\lambda_{-1} = 0$); ҳар бир ҳолатдан эса, қуйидаги стрелкалар чап томонга қараб чиқишини ва нобуд бўлиш интенсивлиги $\mu$ ҳам нолга тенг бўлиши мумкинлигини (масалан, $\mu_0 = 0$ ) келишиб оламиз. Диаграммани бундай қўшимча келишувлар орқали тўлдириш масаланинг моҳиятини ўзгартирмайди, балки кейинги мулоҳазаларни юритишда фойдали бўлади. Юқоридаги келишувлар асосида $X(t)$ жараёнга мос келувчи диаграммани чизамиз (1-расм).

Аввалгидай, берилган $t$ моментдаги популяция ҳажми (олмахонлар сони) $X(t)$ нинг $k$ га тенг бўлиш эҳтимоллигини

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \ \ k = 0,1,2,...$$

орқали белгилаймиз.




1-расм.

1-расмдаги диаграммага мос келувчи туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни $X(t)$ тўла аниқланган бўлади, агарда унинг бошланғич ҳолатини аниқловчи

$$P_k = P(X(0)=k), \quad k=0,1,2,... \tag{1}$$

эҳтимолликлар берилган бўлса.

**Лемма 1.** *$X(t)$ жараён 1-расмдаги диаграммага мос келувчи туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлиб,* (1) *бошланғич шартлар берилган бўлсин. У ҳолда бу жараённинг $P_k(t)$ характеристикалари (эҳтимолликлари) қуйидаги*

$$P_k'(t) = -(\lambda_k + \mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t), \quad k=0,1,2,... \tag{2}$$

*чизиқли дифференциал тенгламалар системасини ва*

$$P_k(0)=0, \quad k=0,1,2,..., \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1$$

*бошланғич шартларни қаноатлантиради.*

Эътиборли томони шундаки, (2) тенгламалар системасида, умуман олганда, тенгламалар сони ва номаълумлар сони чексиз кўп бўлиши мумкин.

(2) чизиқли тенгламалар системасидаги биринчи тенглама ($k=0$ бўлганда)

$$P_0'(t) = -\lambda_0 P_0(t) + \mu_1 P_1(t)$$

кўринишга эга бўлиб, у (2) тенгламалар системасидан $\lambda_{-1}=0, \ \mu_0 = 0$ эканлигини ҳисобга олганда келиб чиқади.

**Исботи.** $k \geq 1$ бўлсин. Етарли кичик $\Delta > 0$ қийматларда

$$P_k(t+\Delta) = P(X(t+\Delta) = k)$$

эҳтимолликни ҳисоблаймиз. Қуйидаги тасодифий ҳодисаларни қараймиз:

$A_0(t,\Delta) = \{[t, t+\Delta]$ вақт оралиғида $X(t)$ жараён бирорта ҳам сакрашни амалга оширмади$\}$,

$A_1(t,\Delta) = \{[t, t+\Delta]$ вақт оралиғида $X(t)$ жараён фақат битта сакрашни амалга оширди$\}$,

$A_2(t,\Delta) = \{[t, t+\Delta]$ вақт оралиғида $X(t)$ жараён икки ёки ундан кўп сакрашни амалга оширди$\}$.

У ҳолда $\bigcup_{i=0}^{2} A_i = \Omega$ - муқаррар ҳодиса, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j = 0,1,2,$ яъни $A_0(t,\Delta)$, $A_1(t,\Delta)$, $A_2(t,\Delta)$лар ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этгани учун шартли эҳтимоллик ва тўла эҳтимоллик формулаларига асосан,

$$P_k(t+\Delta) = P(X(t+\Delta) = k) =$$

$$= P\left( X(t+\Delta) = k \big/ A_0(t,\Delta) \right) \cdot P(A_0(t,\Delta)) +$$

$$+ P\left( X(t+\Delta) = k \big/ A_1(t,\Delta) \right) \cdot P(A_1(t,\Delta)) +$$

$$+ P\left( X(t+\Delta) = k \big/ A_2(t,\Delta) \right) \cdot P(A_2(t,\Delta)) =$$

$$= P(X(t+\Delta) = k; A_0(t,\Delta)) + P(X(t+\Delta) =$$

$$= k; A_1(t,\Delta)) + P(X(t+\Delta) = k; A_2(t,\Delta)) =$$

$$= P(X(t) = k; A_0(t,\Delta)) + P(X(t) =$$

$$= k+1, X(t+\Delta) = \mathrm{k}, A_1(t,\Delta)) + P(X(t) =$$

$$= k-1, X(t+\Delta) = \mathrm{k}, A_1(t,\Delta)) + P(X(t+\Delta) = k, A_2(t,\Delta))$$

тенгликлар ўринли бўлади.

$\tau_{k-1}^{+}$, $\tau_{k}^{+}$, $\tau_{k+1}^{+}$ тасодифий миқдорлар мос равишда $\lambda_{k-1}$, $\lambda_k$, $\lambda_{k+1}$ параметрли, $\tau_{k-1}^{-}$, $\tau_{k}^{-}$, $\tau_{k+1}^{-}$ тасодифий миқдорлар эса, мос равишда $\mu_{k-1}$, $\mu_k$, $\mu_{k+1}$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган тасодифий миқдорлар ва улар ўзаро боғлиқсиз бўлсин. $\Delta \to 0$ да $e^{-\Delta} = 1 - \Delta + o(\Delta)$ бўлгани учун

$$P(X(t) = k, A_0(t,\Delta)) = P(X(t) = \mathrm{k})\,\mathrm{P}(\tau_k^{+} > \Delta, \tau_k^{-} > \Delta) =$$

(3)

$$= \quad P_k(t) e^{-\lambda_k \Delta} e^{-\mu_k \Delta} = P_k(t)(1 - (\lambda_k + \mu_k)\Delta + o(\Delta))$$

бўлади. Худди шунга ўхшаш,

$$P(X(t) = k-1, X(t+\Delta) = k, A_1(t,\Delta)) = P_{k-1}(\mathrm{t})\,\mathrm{P}(\tau_{k-1}^{+} \le \Delta, \tau_{k-1}^{-} > \Delta) =$$

$$= P_{k-1}(t)(1 - \mathrm{e}^{-\lambda_{k-1}\Delta})\,\mathrm{e}^{-\mu_{k-1}\Delta} = P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}\Delta + o(\Delta))(1 - \mu_{k-1}\Delta + o(\Delta)) =$$

$$= P_{k-1}(t)(\lambda_{k-1}\Delta + o(\Delta)),$$

$$P(X(t) = k+1, X(t+\Delta) = k, A_1(t,\Delta)) = P_{k+1}(t)(\mu_{k+1}\Delta + o(\Delta))$$

муносабатларни ҳосил қиламиз.

Энди

$$P(X(t+\Delta)=k, A_2(t,\Delta))=o(\Delta)$$

муносабатни исботлаймиз. Бунинг учун

$$t_1^* = \max\{u < t+\Delta : X(u) \neq k\}$$

$X(t)$ жараённинг $t+\Delta$ моментгача охирги сакраш моменти,

$$t_2^* = \max\{u < t_1^* : X(u) \neq X(t_1^*)\}$$

$X(t)$ жараённинг $t_1^*$ моментгача охирги сакраш моменти, $\tau_1^* = t+\Delta - t_1^*$, $\tau_2^* = t_1^* - t_2^*$ белгилашларни киритамиз. У ҳолда

$$\{X(t+\Delta)=k, A_2(t,\Delta)\} = \{X(t+\Delta)=k, t \le t_2^*\} \subseteq$$

$$\subseteq \; X(t+\Delta)=k,\, \tau_1^* \le \Delta,\, \tau_2^* \le \Delta\}$$

эканлигини текшириш қийин эмас.

$$P(X(t+\Delta)=k,\, \tau_1^* \le \Delta,\, \tau_2^* \le \Delta) \le (1-e^{-\lambda_{k-1}\Delta})\cdot(1-e^{-\lambda_{k-2}\Delta}) +$$

$$+(1-e^{-\lambda_{k-1}\Delta})\cdot(1-e^{-\mu_k\Delta}) + (1-e^{-\mu_{k+1}\Delta})\cdot(1-e^{-\mu_{k+2}\Delta}) +$$

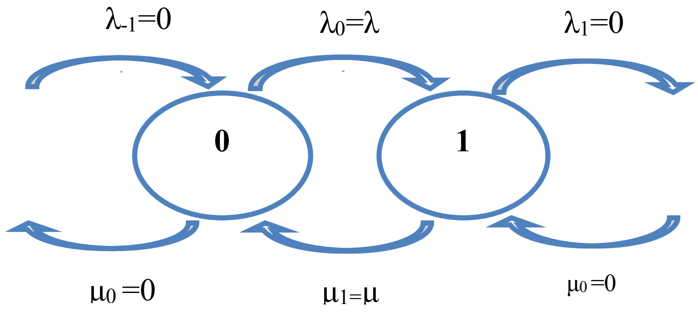
$$+(1-e^{-\mu_{k+1}\Delta})\cdot(1-e^{-\lambda_k\Delta}) = o(\Delta)$$

муносабатларни ҳисобга олиб, юқорида келтирилган тенгликларни (3) га қўйиб, қуйидаги

$$\frac{P_k(t+\Delta)-P_k(t)}{\Delta} = -(\lambda_k+\mu_k)P_k(t) + \lambda_{k-1}P_{k-1}(t) + \mu_{k+1}P_{k+1}(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}$$

натижага келамиз. Охирги тенгликда $\Delta \to 0$ да лимита ўтиб, (2) тенгламани ҳосил қиламиз. $k=0$ бўлган ҳолда исбот худди шу тартибда олиб борилади (бунда баъзи қўшилувчилар иштирок этмайди холос). Лемма 1 исботланди.

**Мисол 1**. $X(t)$ бир дона телефон аппаратининг ишлаш жараёнига мос бўлсин: агар $t$ моментда телефон банд бўлмаса, $X(t)=0$, агар банд бўлса, $X(t)=1$ қийматни қабул қилади. Телефоннинг банд бўлмаслик вақт оралиқлари $\lambda$ параметрли, банд бўлиш оралиқлари $\mu$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган, деб ҳисоблаймиз. У ҳолда $X(t)$ туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлиб, унга қуйидаги диаграмма мос келади (2-расм):




2-расм.

Лемма 1 га кўра $P_0(t)$ ва $P_1(t)$ эҳтимолликлар

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t), \quad P_1'(t) = -\mu P_1(t) + \lambda P_0(t) \tag{4}$$

тенгламалар системасининг

$$P_0(0) = p_0, \quad P_1(0) = p_1, \quad p_0 \geq 0, \quad p_1 \geq 0, \quad p_0 + p_1 = 1 \tag{5}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

(4)-(5) масаланинг ечимини топиш учун

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu \\ \lambda & -\mu \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицаларни қараймиз ва (4) тенгламалар системасига мос келувчи

$$|A - zE| = \begin{vmatrix} -\lambda - z & \mu \\ \lambda & -\mu - z \end{vmatrix} = 0$$

характеристик тенгламани тузамиз. Натижада ечимлари $z_1 = 0, \quad z_2 = -(\lambda + \mu)$ бўлган $(\lambda + \mu)z + z^2 = 0$ тенгламани ҳосил қиламиз. $P_0(t)$ ва $P_1(t)$ ечимларни

$$P_0(t) = a + be^{-t(\lambda+\mu)}, \quad P_2(t) = c + de^{-t(\lambda+\mu)} \tag{6}$$

кўринишда қидирамиз. (6) ни (4) системага қўйиб ва (5) бошланғич шартларни ҳисобга олиб, $a, b, c, d$ ўзгармасларни топамиз.

$$a = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad c = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad b = p_0 - \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad d = p_1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Шундай қилиб, қидирилган эҳтимолликлар

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\left(p_0-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-t(\lambda+\mu)}$$

$$P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\left(p_1-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-t(\lambda+\mu)}$$

бўлади.

Кўрилган масалада $P_0(t)$ ва $P_1(t)$ эҳтимолликларнинг $t\to\infty$ даги чекли лимитлари

$$P_0=\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\quad P_1=\lim_{t\to\infty}P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

мавжуд. Агар бошланғич шартлар сифатида $p_0=P_0$ ва $p_1=P_1$ лимит қийматларни олсак, ихтиёрий $t\ge 0$ учун

$$P_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\quad P_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

келиб чиқади, яъни (4) ечим $t$ га боғлиқ бўлмайди.

**Таъриф**. *$X(t)$ жараён эргодик жараён дейилади, агарда унинг $P_k(t)$ характеристикалари (эҳтимолликлари) нинг $t\to\infty$ даги чекли лимитлари*

$$\lim_{t\to\infty}P_k(t)=P_k \tag{7}$$

*мавжуд ва*

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_k=1$$

*бўлса. Бу ҳолда (̀7) $P_k$ лимитлар эргодик жараённинг стационар характеристикалари (эҳтимолликлари) дейилади.*

Агар $X(t)$ эргодик жараён бўлса, унинг $P_k,\ k=0,1,2,...$ стационар характеристикалари қуйидаги

$$-(\lambda_k+\mu_k)P_k+\lambda_{k-1}P_{k-1}+\mu_{k+1}P_{k+1}=0,\quad k=0,1,2,... \tag{8}$$

алгебраик тенгламалар системасидан топилади.

(8) алгебраик тенгламалар системаси (2) дифференциал тенгламалар системасининг икки томонидан $t\to\infty$ да лимитга ўтиш натижасида ҳосил бўлади. Бунда (2) нинг чап томонидаги ҳосилалар нолга тенг

бўлади, чунки $P_k(t)$ лар $t$ га боғлиқ бўлмай қолади. (8) алгебраик тенгламаларни кетма-кет ечиб, $P_k$ ларни $(k=1,2,...)$ $P_0$ орқали ифодалаш мумкин:

$$P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0, \quad P_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} P_0, \quad P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} P_0.$$

Агар $X(\text{t})$ жараён эргодик жараён бўлса,

$$P_0 + P_1 + \ldots P_k + \ldots = 1$$

шарт бажарилади ва ундан $P_k,\ k = 0,1,2,...$ стационар характеристикаларни топиш мумкин.

$$P_0 + P_1 + \ldots P_k + \ldots = P_0 + P_0 \left( \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \ldots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} + \ldots \right) =$$

$$= P_0 + P_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} = P_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} \right) = 1$$

тенгликлардан қуйидаги лемманинг исботи келиб чиқишини кўриш қийин эмас.

**Лемма 2**. $X(t)$ *туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни эргодик жараён бўлиши учун*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} < \infty$$

*бўлиши зарур ва етарлидир. Бу ҳолда* $X(t)$ *жараённинг* $P_k$ *стационар характеристикалари*

$$P_0 = (S+1)^{-1}, \ \ P_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_k} P_0, \ \ k = 1,2,...$$

*формулалар ёрдамида топилади.*

Мисол 1 да $k$ фақат 0 ва 1 қийматларни қабул қилиши мумкин ва

$$S = \frac{\lambda_0}{\mu_1} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad P_0 = \left( \frac{\lambda}{\mu} + 1 \right)^{-1} = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

бўлади.

## §4 га масалалар

4.1. 3.1 ва 3.2 масалаларда келтирилган туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнлари учун тизимда $t$ моментда $k$ нафар мижоз мавжуд бўлиши эҳтимолликлари $P_k(t)$ ларни боғловчи дифференциал тенгламалар системасини тузинг.

4.2. Оммавий хизмат кўрсатиш тизимининг ишлаш тартиби $\lambda_0 = \lambda, \ \ \lambda_k = 0, \ \ k \neq 0, \ \ \mu_1 = \mu, \ \ \mu_k = 0, \ \ k \neq 0$ параметрли туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнига мос келсин. $P_k(t)$ лар учун дифференциал тенгламалар системасини тузинг ва уни ечинг. Ечимни $P_k = P_k(0)$ орқали ифодаланг.

4.3. Оммавий хизмат кўрсатиш тизими фаолияти

$$\lambda_k = 0, \quad k = 0,1,2,...,$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{агар } \ 1 \le k \le 2 \ \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } \ k > 2 \ \text{ бўлса}, \end{cases}$$

параметрли туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнига мос келсин. $P_k(t)$ ларни аниқлаш учун дифференциал тенгламалар системасини тузинг ва уни ечинг.

Жавобни $P_k = P_k(0)$ орқали ифодаланг.

4.4. Битта хизмат қилувчи мосламага эга бўлган оммавий хизмат кўрсатиш тизимини қараймиз. Кирувчи энг содда оқимнинг интенсивлиги $\lambda$ га тенг ва ҳар бир талабга (мижозга) хизмат кўрсатиш вақти $\mu$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган бўлсин. Ундан ташқари, ихтиёрий мижоз $\alpha$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган вақтдан кейин хизмат кўрсатиш жараёни тугамаган ҳолда тизимни тарк этиши мумкин. Бундай тизимга мос келувчи диаграммани тасвирланг. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ характеристикалар учун дифференциал тенгламалар системасини тузинг. Тизимнинг стационар ҳолати учун тенгламалар системасини тузинг ва $\alpha = \mu$ бўлган ҳолда стационар эҳтимолликларни топинг.

4.5. 3.5 масаладаги оммавий хизмат кўрсатиш тизимини қаранг.Унга мос диаграммани чизинг. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ характеристикалар учун дифференциал тенгламалар системасини тузинг. Стационар ҳолат учун алгебраик тенгламалар системасини тузинг ва стационар эҳтимолликларни топинг.

4.6. 3.6 масаладаги оммавий хизмат кўрсатиш тизимини қаранг. Тизимга мос келувчи диаграммани тасвирланг. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ эҳтимолликлар учун дифференциал тенгламалар системасини тузинг. Стационар ҳолат учун алгебраик тенгламалар системасини тузинг ва стационар эҳтимолликларни топинг.

4.7. 3.7 масаладаги оммавий хизмат кўрсатиш тизими учун диаграммани ҳосил қилинг (қайтадан). $P_k(t) = P(X(t) = k)$ характеристикалар учун дифференциал тенгламалар системасини , стационар ҳолат учун алгебраик тенгламалар системасини тузинг ва стационар эҳтимолликларни топинг.

4.8. 3.8 масаладаги оммавий хизмат кўрсатиш тизими учун қайтадан диаграмма чизинг. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ характеристикалар учун дифференциал тенгламалар системасини , стационар ҳолат учун алгебраик тенгламалар системасини тузинг. Стационар эҳтимолликларни топинг.

4.9. 3.9 масалага қаранг. Тизимга мос келувчи диараммани чизинг. $P_k(t) = P(X(t) = k)$ характеристикалар учун дифференциал, стационар ҳолат учун алгебраик тенгламалар системасини тузинг. Стационар эҳтимолликларни топинг.

## *§5. Оммавий хизмат кўрсатиш тизимларининг асосий турлари*

Энг содда оммавий хизмат кўрсатиш тизимининг элементлари: 1) кирувчи оқим; 2) хизмат кўрсатувчи мослама (ёки мосламалар); 3) хизмат кўрсатиш тартибининг таснифидан иборат бўлади. Эслатиб ўтамиз, кириш оқими деганда тизимга мижозлар қиладиган талабларнинг тушиш (мижозларнинг келиш) моментларидан ҳосил бўлган $t_0 = 0, t_1, t_2,...$ вақт кетма-кетлиги тушунилади. Ҳар бир $t = t_i$ моментда фақат битта талаб тушади, деб ҳисоблаймиз. Талабларнинг тушиш моментлари (мижозларнинг келиш моментлари) орасидаги вақт оралиқларини $\tau_i = t_i - t_{i-1}, \ i = 1,2,...$ орқали белгилаймиз. Одатда,

$$\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$$

тасодифий миқдорлар кетма-кетлиги ўзаро боғлиқсиз ва бир хил тақсимланган, деб қабул қилинади ва уларнинг умумий тақсимот функциясини $G_e$ ($e$- ҳарфи инглиз тилидаги entrance - кириш сўзидан олинган):

$$G_e = P(\tau_i < t), \quad i = 1,2,...$$

каби белгиланади.

Агар $\tau_1, \tau_2,...$ тасодифий миқдорлар $\lambda$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган бўлса, кириш оқими $\lambda$ параметрли энг содда (Пуассон) оқим дейилади (§ 2 га қаранг).

Кўрсаткичли тақсимланган тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини

$$M(t) = M_\lambda(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{агар} \quad t \ge 0 \quad \text{бўлса}, \\ 0, & \text{агар} \quad t < 0 \quad \text{бўлса}, \end{cases}$$

кўринишда белгилаймиз.

Мижозларга хизмат кўрсатувчи мосламанинг таснифи битта мижозга хизмат кўрсатиш вақти бўлган $\xi$ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси $G_s$( s - ҳарфи инглиз тилидаги service -хизмат кўрсатиш сўзидан олинган)

$$G_s(t) = P(\xi < t)$$

функцияни бериш билан амалга оширилади.

Шундай қилиб, оммавий хизмат кўрсатиш тизимига $t_i$ моментда келган мижозга $i$ рақами берилади ва унга $\xi_i$ вақт давомида хизмат кўрсатилади. $\xi_1, \xi_2,...$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқсиз ва умумий $G_s(t)$ тақсимот функцияга эга, деб фараз қилинади.

Агар хизмат кўрсатиш тизимида хизмат кўрсатувчи $m$ та бир хил мосламалар бўлса, уларнинг ҳар бири юқорида келтирилган тартибда иш юритади ва улар бир-бирига боғлиқсиз равишда ишлайди.

Агар бир нафар мижозга хизмат кўрсатиш вақти бўлган $\xi$ тасодифий миқдор $\mu$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган бўлса, унинг тақсимот функциясини

$$M(t) = M_{\mu}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & агар \quad t \geq 0 \quad бўлса, \\ \quad 0, & агар \quad t < 0 \quad бўлса, \end{cases}$$

кўринишида белгилаймиз.

Хизмат кўрсатиш тизимига келган мижозлар амал қилиши керак бўлган қоидалар мажмуаси хизмат кўрсатиш тартибини белгилайди. Хизмат кўрсатиш тартибининг энг муҳим таркибий қисмларидан бири навбат узунлигининг максимал (энг катта) қиймати бўлган $N$ ҳисобланади. $N$ бирор манфий бўлмаган бутун сонга ёки чексизга тенг бўлиши мумкин. Фараз қилайлик, $N = \infty$ бўлсин. У ҳолда мижоз хизмат кўрсатиш тизимига келганда барча хизмат кўрсатувчи мосламалар банд бўлса, у навбатга туради ва хизмат кўрсатиш тизимига келиш тартибида ҳосил қилинган навбат қаторида биринчи ўринга келгунча ҳаракатланади. Ундан кейин бу мижоз биринчи бўлиб бўшаган мосламадан жой олади ва унга тасодифий вақт давомида хизмат кўрсатилади. Мижозга хизмат кўрсатиш якунланганда у тизимни дарҳол тарк этади.

Энди хизмат кўрсатиш тизимида навбат узунлиги $N$ чекли бўлган ҳолни қарайлик. Бунда мижоз системага келган пайтда барча мосламалар банд ва унда навбат кутаётган мижозлар сони $N$ дан кичик бўлса, у навбатга туради. Агар мижоз келганда тизимда навбатда турганлар сони $N$ нафар бўлса (ундан кўп бўлиши мумкин эмас!), у тизимни дарҳол тарк этади, яъни "йўқолади" (у бундан кейин эътиборга олинмайди). Адабиётларда навбатнинг максимал узунлиги $N$ оддийгина қилиб, *навбат узунлиги*, деб юритилади.

Юқоридаги каби аниқланган оммавий хизмат кўрсатиш тизимлари

$$<\cdot\left|\cdot\right|\cdot>(\cdot)$$

шаклда белгиланади. Бунда бурчакли қавс ичида биринчи ўринда мижозларнинг тизимга келиш вақт оралиғининг тақсимот функцияси (яъни, кириш оқимининг характеристикаси), иккинчи ўринда битта мижозга хизмат кўрсатишга кетадиган вақтнинг тақсимот функцияси (яъни хизмат кўрсатиш вақтининг характеристикаси) , учинчи ўринда тизимдаги хизмат кўрсатувчи мосламаларнинг сони, кичик қавс ичида эса, хизмат кўрсатиш тартиби кўрсатилади. Масалан,

$$< G_e\left|M_\mu\right|2>(\text{навбат узунлиги } N)$$

кўринишидаги ёзув кириш оқими $G_e$ тақсимот қонунига, ҳар бир мосламада хизмат кўрсатиш вақти $\mu$ параметрли кўрсаткичли тақсимотга эга, хизмат кўрсатувчи мосламалар сони иккита ва навбат узунлиги $N$ билан чегараланган оммавий хизмат кўрсатиш тизимига мос келади. Агар навбат узунлиги чегараланмаган бўлса, кичик қавс бўлмайди.

Ушбу қўлланмада биз, асосан,

$$< M_\lambda\left|M_\mu\right|m>(\text{навбат узунлиги } N)$$

кўринишидаги хизмат кўрсатиш тизимларини ўрганамиз. Бундай тизимлар §§ 3,4 да ўрганилган туғилиш ва нобуд бўлиш жараёнлари ёрдамида бир қийматли тасвирланади.

Энди

$$< M_\lambda\left|M_\mu\right|m>(\text{навбат узунлиги } N)$$

кўринишидаги оммавий хизмат кўрсатиш тизимларидаги асосий масалаларга тўхталамиз. Оммавий хизмат кўрсатиш тизимининг энг муҳим характеристикаларидан бири $t$ моментда тизимда мавжуд бўлган мижозлар сонини кўрсатувчи $X(t)$ жараёндир.

Аввалгидай $X(t)$ жараённинг тақсимотини

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0,1,2,...$$

кўринишда белгилаймиз ва у билан боғлиқ бўлган асосий масалалар рўйхатини келтирамиз.

1. $P_k(t)$ эҳтимолликлар қаноатлантирадиган дифференциал тенгламалар системасини тузиш;
2. $P_k(t)$ лар учун аниқ формулалар топиш;
3. Стационар характеристикалар

$$P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t), \quad \sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 \tag{1}$$

мавжуд бўладиган шартларни топиш;

4. $P_k$ стационар эҳтимолликлар қаноатлантирадиган алгебраик тенгламалар системасини тузиш;
5. $P_k$ ларни топиш.

Агар (1) лимитлар мавжуд бўлса, хизмат кўрсатиш тизими учун стационар ҳолат мавжуд, деб айтамиз; $P_k$ сонлар эса хизмат кўрсатиш тизимининг стационар характеристикалари деб аталади.

Хизмат кўрсатиш тизимининг яна бир муҳим характеристикаларидан бири $t$ моментда келган мижознинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутган вақтига тенг бўлган $q(t)$ жараёндир. Хизмат кўрсатиш тизимининг $q(t)$ характеристикаси билан боғлиқ асосий масалалар сифатида қуйидагиларни келтириш мумкин.

6. Тизимга $t$ моментда келган мижозга хизмат кўрсатиш $t+x$ моментдан аввал бошланмаслик (яъни мижознинг хизмат кўрсатиш бошлангунча кутиш вақти $x$ вақт бирлигидан кичик бўлмаслик) эҳтимоли

$$Q(t,x) = P(q(t) > x)$$

эҳтимолликларни топиш;

7. Агар тизим учун стационар ҳолат мавжуд бўлса, шу стационар ҳолатда мижознинг хизмат кўрсатилишини $x$ вақт бирлигидан кўпроқ вақт кутиш эҳтимоллиги

$$Q(x) = \lim_{t \to \infty} P(q(t) > x)$$

ни топиш.

**Мисол 1**. Битта телефон аппаратининг иш жараёни билан боғлиқ бўлган оммавий хизмат кўрсатиш тизимини қарайлик:

$$< M_\lambda \left| M_\mu \right| 1 > (\textit{навбат узунлиги } 0)$$

Бу тизимга мос $X(t)$ жараён

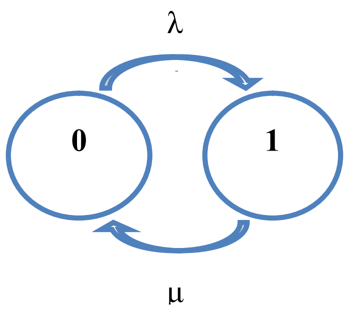



диаграмма билан аниқланадиган туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлади. Шунинг учун $P_0(t)$, $P_1(t)$ функциялар § 4 да қурилган дифференциал тенгламалар системасини қаноатлантиради.

## § 5 га масалалар

5.1. $< M \left| M \right| 2 >$ хизмат кўрсатиш тизимида бир нафар мижозга ўртача хизмат кўрсатиш вақти 5 минут, кетма-кет келган мижозлар келиш моментлари орасидаги ўртача фарқ 8 минутни ташкил этади. Тизим етарли узоқ вақт фаолият кўрсатади. Қуйидагиларни топиш талаб этилади:

а) хизмат кўрсатувчи мосламаларнинг иккаласи ҳам банд бўлиш эҳтимоллигини;

б) ҳеч бўлмаганда битта мосламанинг банд бўлмаслик эҳтимоллигини;

в) иккала хизмат кўрсатувчи мосламаларнинг банд бўлмаслик эҳтимоллигини.

5.2. Автомобиллар тўхташ жойида 10 та ўрин бўлиб, ҳар бир ўринга фақат битта автомобил тўхташи мумкин. Автомобиллар тўхташ жойига автомобиллар энг содда оқим (Пуассон оқими) га мос равишда келади ва бир соат ичида келган автомобилларнинг ўртача сони (яъни Пуассон жараёнининг параметри) 10 га тенг. Битта автомобилнинг тўхташ жойида туриш вақтининг давомийлиги ўртача қиймати 10 минутга тенг бўлган кўрсаткичли тақсимланган тасодифий миқдорга тенг. Тўхташ жойига навбатдаги келган автомобилнинг тўхташ жойидан банд бўлмаган ўринни топа олмаслик эҳтимолини топинг.

5.3. Автомобилларга ёнилғи қуйиш шоҳобчасида бир дона ёнилғи қуйиш мосламаси мавжуд ва бу шоҳобчага автомобиллар энг содда (Пуассон) оқими бўйича ёнилғи қуйишга келади. Бир соат вақт оралиғида шоҳобчага келадиган автомобилларнинг ўртача сони 10 га тенг. Ҳар бир автомобилга хизмат кўрсатиш вақти кўрсаткичли тақсимланган бўлиб, унинг ўрта қиймати 5 минутга тенг. Шоҳобчада 3 та автомобилга мосланган махсус кутиш майдончаси мавжуд. Навбатдаги автомобил келганда махсус майдончада бўш ўрин бўлмаса, у шоҳобча ташқарисида кутади. Шоҳобча етарли узоқ муддат ишлайди. Қуйидагиларни топинг:

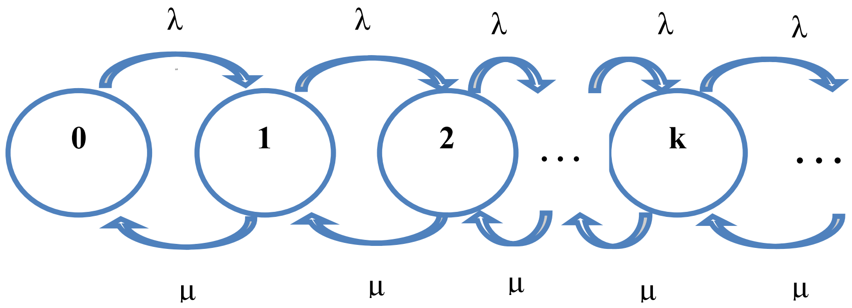
а) ёнилғи қуйиш шоҳобчасига келган автомобил кутиш учун махсус майдончадан ўрин топа олиш эҳтимоллигини;

б) шоҳобчага келган автомобил махсус майдончадан ташқарида навбатга туришга мажбур бўлиш эҳтимоллигини.

## §6. $< M \left| M \right| m > (навбатли)$ тизимлари

*1.* $< M \left| M \right| 1 > (навбатли)$ *хизмат кўрсатиш тизими.*

Аваламбор шуни таъкидлаб ўтамизки, охирги кичик қавслар ичидаги “навбатли” иборасини “навбат узунлиги чексиз” маъносида тушунамиз. $< M \left| M \right| 1 > (навбатли)$ тизимнинг тузилиши ва ишлаш қоидаси билан танишамиз. Унда фақат битта хизмат кўрсатувчи мослама мавжуд ва унга мижозлар $\lambda$ параметрли энг содда оқим бўйича мурожаат этадилар. Мослама ҳар бир мижозга $\mu$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган тасодифий вақт давомида хизмат кўрсатади. Агар тизимнинг хизмат кўрсатувчи мосламаси банд бўлса, келган мижоз ўзидан олдин келган мижозларнинг барчасига хизмат кўрсатиб бўлингунча навбатда туриб кутади. Хизмат кўрсатиш тизимида $t$ моментда мавжуд бўлган мижозлар сони $X(t)$ шу $t$ моментда мосламадаги мижоз (яъни хизмат кўрсатилаётган мижоз, агар у бор бўлса) ва шу $t$ моментда навбатда турган мижозлар сонидан иборат. Табиийки, $X(t)$ туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлади ва унга қуйидаги 1-расмдаги диаграмма мос келади:




1-расм.

Параметрлар $\lambda$ ва $\mu$ ларнинг қандай қийматларида $X(t)$ жараённинг стационар ҳолати мавжуд бўлади, яъни $X(t)$ жараён қандай шартлар бажарилса, эргодик бўлади, деган масалани ўрганамиз. Бунинг учун §4 даги лемма 2 га асосан

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

қаторни яқинлашишга текширишимиз зарур бўлади. $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ белгилаш киритамиз. У ҳолда, равшанки, $\rho<1$ бўлганда қаралаётган қатор яқинлашувчи, яъни $S<\infty$ ва жараённинг стационар ҳолати мавжуд бўлади. Бу ҳолда

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k=\frac{\rho}{1-\rho},\qquad P_0=(1+S)^{-1}=\left(1+\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{-1}=1-\rho,$$

$$P_k=P_0\rho^k=(1-\rho)\rho^k,\quad k=1,2,\ldots$$

бўлади. Агар $\rho\geq 1$ бўлса, $S=\infty$ бўлади.

Демак,

$$<M|M|1>(\text{навбатли})$$

хизмат кўрсатиш тизимида стационар ҳолат мавжуд бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки, қачонки $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ бўлса. Бу ҳолда тизимнинг стационар характеристикалари

$$P_k = \lim_{t\to\infty} P(X(t) = k)$$

лар учун

$$P_k = (1-\rho)\rho^k, \quad k = 0, 1, 2,... \tag{1}$$

ўринли бўлади.

Энди хизмат кўрсатиш тизимининг яна бир муҳим характеристикаларидан ҳисобланган, $t$ моментда ташриф буюрган мижознинг, унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутган вақти $q(t)$ нинг тақсимоти ҳақида тўхталамиз. Мантиқан равшанки, тизимнинг стационар ҳолатида $q(t)$ тасодифий миқдорнинг тақсимоти $t$ га боғлиқ бўлмайди, яъни

$$Q(x) = \lim_{t\to\infty} P(q(t) < x)$$

функция аниқланган бўлади. $q$ орқали $Q(x)$ тақсимот функцияга эга бўлган тасодифий миқдорни белгилаймиз, яъни

$$P(q < x) = Q(x).$$

$q$ тасодифий миқдор хизмат кўрсатиш тизимининг “стационар ҳолатида”, яъни узоқ муддат ишлаганда мурожат қилган мижознинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутган вақтини ифодалайди.

**Лемма 1**. *Агар* $\rho < 1$ *бўлса,*

$$P(q \ge x) = \rho e^{-(\mu-\lambda)x}$$

*тенглик ўринли бўлади.*

Демак, $q$ тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$P(q < x) = \begin{cases} 1-\rho e^{-(\mu-\lambda)x}, & агар \quad x \ge 0 \quad бўлса, \\ 0, & агар \quad x < 0 \quad бўлса, \end{cases}$$

кўринишда бўлади.

**Исботи**. $X$ орқали тизимнинг стационар ҳолатида ундаги мижозлар сонини белгилаймиз. У ҳолда (1) га асосан

$$P(X=k)=(1-\rho)\rho^k, \quad k=0,1,2,...$$

бўлади. $\{X=k\}$, $k=0,1,2,...$ ҳодисаларнинг тўла группасини ташкил этгани учун тўла эҳтимоллик формуласига асосан (§2 га қаранг), $x>0$ бўлганда

$$P(q\ge x)=\sum_{k=1}^{\infty}P\left(q\ge x \middle/ X=k\right)P(X=k) \qquad (2)$$

тенглик келиб чиқади.

$\Upsilon(t)$ $\mu$ параметрли Пуассон жараёни бўлсин. У ҳолда

$$P\left(q\ge x \middle/ X=k\right)=P(\Upsilon(x)<k)$$

муносабат ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам, биз қараётган мижоз хизмат кўрсатиш тизимидаги навбатда $k$ - ўринда бўлса, унга хизмат кўрсатиш бошлангунча ўзидан олдинги $(k-1)$ та мижозга хизмат кўрсатиб бўлинишини кутади. §2 даги лемма 2 га асосан

$$P(\Upsilon(x)<k)=\sum_{i=0}^{k-1}e^{-\mu x}\cdot\frac{(\mu x)^i}{i!}$$

тенглик ўринли бўлади.

Шунинг учун (2) га кўра ,

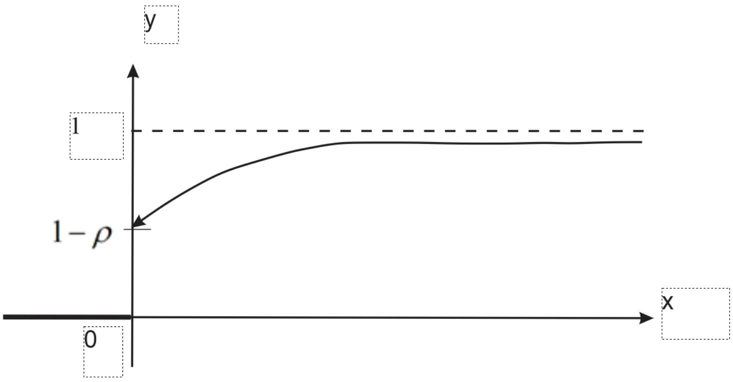
$$P(q\ge x)=\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{k-1}e^{-\mu x}\cdot\frac{(\mu x)^i}{i!}(1-\rho)\rho^k =$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{k=i+1}^{\infty}(1-\rho)\rho^k\right)e^{-\mu x}\cdot\frac{(\mu x)^i}{i!}=(1-\rho)e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\rho^{i+1}(\mu x)^i}{(1-\rho)i!}=$$

$$=\rho e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu x\rho)^i}{i!}=\rho e^{-\mu x}e^{\mu x\rho}=\rho e^{-(\mu-\lambda)x}$$

натижа ҳосил бўлади. Лемма 1 исботланди.

$y = P(q < x)$ тақсимот функциянинг графигини чизамиз.




Шаклдан кўринадики, бу функция $x = 0$ нуқтада биринчи тур узилишга, яъни қиймати $1-\rho$ га тенг сакрашга эга.

Лемма 1 ёрдамида стационар ҳолатдаги тизимда мижознинг хизмат кўрсатиш бошлангунча ўртача кутиш вақтини, яъни $q$ нинг математик кутилмасини осонгина топиш мумкин.

**Натижа.** *Стационар ҳолатга эга бўлган хизмат кўрсатиш тизимлари учун*

$$Mq = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

*бўлади.*

**Исботи**. Таъриф бўйича

$$Mq = \int_0^\infty x(\mu-\lambda)\rho e^{-(\mu-\lambda)x}dx.$$

Агар интегралда $(\mu-\lambda)x = y$ алмаштириш бажарсак,

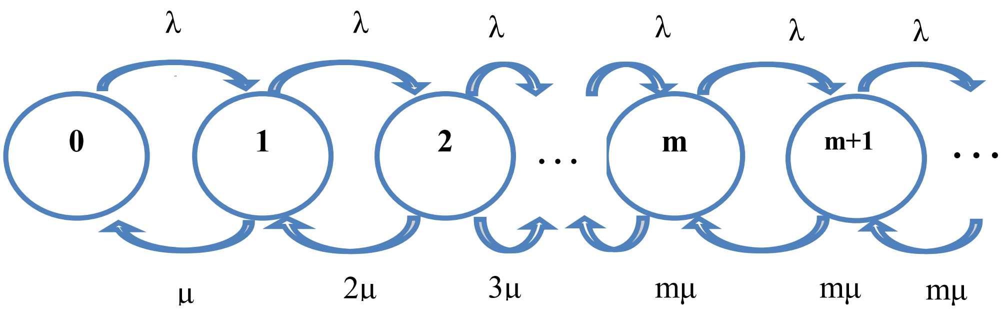
$$Mq = \frac{\rho}{\mu-\lambda}\int_0^\infty ye^{-y}dy = \frac{\rho}{\mu-\lambda}$$

ҳосил бўлади. $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ эканлигидан натижа исботи келиб чиқади.

$Mq$ катталик хизмат кўрсатишнинг муҳим “сифат” кўрсаткичларидан бири бўлиб, у қанча кичик бўлса, хизмат кўрсатиш шунча яхши бўлади.

*2.* $<M|M|m>$(*навбатли*) *тизими*

Энди $<M|M|m>$(*навбатли*) хизмат кўрсатиш тизимини қараймиз, бунда $m$ -ихтиёрий натурал сон бўлиб, у тизимдаги хизмат кўрсатувчи бир хил турдаги мосламалар сони (масалан, автомобилларга ёнилғи қуйиш шохобчасидаги колонкалар сони). $X(t)$ - хизмат кўрсатиш тизимида $t$ моментда мавжуд бўлган мижозлар сони бўлсин. У ҳолда $X(t)$ туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлиб, унга қуйидаги 2-расмда келтирилган диаграмма мос келади.




2-расм.

Бу ерда тизимга мижозлар $\lambda$ параметрли энг содда оқим сифатида келиши ва ҳар бир мослама ҳар бир мижозга $\mu$ кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлган тасодифий вақт давомида хизмат кўрсатиши эътиборга олинган.

Диаграммада қуйидаги (пастдаги) стрелкаларга нима учун бундай интенсивликлар мос келади? Агар тизимда қаралаётган вақтда $m$ та мосламадан $i$ таси $(i \le m)$ банд бўлса, система $\{i\}$ ҳолатдан $\{i-1\}$ ҳолатга $\mu_i = i\mu$ интенсивлик билан ўтади. Чунки боғлиқсиз Пуассон жараёнлари йиғиндиси яна Пуассон жараёни бўлади ва йиғиндининг параметри қўшилувчилар параметрлари йиғиндисига тенгдир. Агар $m$ та мосламаларнинг барчаси банд бўлса, тизим $\{i\}$ ҳолатдан $\{i-1\}$ ҳолатга $(i \ge m)$, табиийки $\mu m$

интенсивлик билан ўтади, чунки фақат $m$ та хизмат кўрсатувчи мослама мавжуд. Бу ҳолда

$$S = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m} \left( \frac{\lambda}{m\mu} \right)^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} + \frac{\lambda^m \cdot \lambda / (m\mu)}{m!\,\mu^m \left( 1 - \frac{\lambda}{m\mu} \right)}$$

бўлади. Кўриниб турибдики, юқоридаги қаторнинг йиғиндиси $S$ чекли бўлади, агарда

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < m$$

бўлса. Шундай қилиб,

$$< M \left| M \right| m > (\textit{навбатли})$$

хизмат кўрсатиш тизимининг стационар ҳолати мавжуд бўлиши учун

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < m$$

бўлиши зарур ва етарли экан. Бу ҳолда

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{m!(S+1)}, & \textit{агар} \quad 0 \le k \le m \quad \textit{бўлса}, \\ \dfrac{\rho^k}{m!\,m^{k-m}(S+1)}, & \textit{агар} \quad k \ge m \quad \textit{бўлса}, \end{cases}$$

$$S = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^i}{i!\,\mu^i} + \frac{\lambda^m \cdot \lambda / (m\mu)}{m!\,\mu^m \left( 1 - \frac{\lambda}{m\mu} \right)}$$

тенгликлар ўринли бўлади. Хусусий ҳолда, агар $m = 2$ бўлса,

$$S=\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^2\cdot\rho/2}{2\left(1-\rho/2\right)}=$$

$$=\frac{4\rho-2\rho^2+2\rho^2-\rho^3+\rho^3}{2(2-\rho)}=\frac{2\rho}{2-\rho},$$

$$P_k=\begin{cases}\dfrac{\rho^k\,(2-\rho)}{2!\,(2+\rho)}, & \text{агар}\quad 0\le k\le 2\quad \text{бўлса},\\[2ex] \dfrac{\rho^k\,(2-\rho)}{2^{k-1}\,(2+\rho)}, & \text{агар}\quad k\ge 2\qquad \text{бўлса},\end{cases}$$

натижага эга бўламиз.

Энди $<M\left|M\right|m>(\textit{навбатли})$ тизимнинг стационар ҳолатида тизимга келган мижознинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутадиган вақти $q$ нинг тақсимоти ҳақидаги тасдиқни исботсиз келтирамиз (исботини [2] дан топиш мумкин).

**Лемма 2**. $<M\left|M\right|m>(\textit{навбатли})$ *тизимида*

$$P(q\ge x)=Re^{-(\mu m-\lambda)x},\quad M\,q=\frac{R}{\mu\,(m-\rho)}$$

*муносабатлар ўринли бўлиб, бу ерда*

$$R=\sum_{k=m}^{\infty}P_k=\frac{\rho^m}{(m-1)!\,(S+1)\,(m-\rho)}$$

*тизимнинг стационар ҳолатида барча* $m$ *та мосламаларнинг банд бўлиш эҳтимоллигидир.*

Тизимдаги мосламаларнинг сони $m=2$ бўлганда
Лемма 2 дан

$$R=1-P_0-P_1=1-\frac{\rho^0\,(2-\rho)}{0!\,(2+\rho)}-\frac{\rho^1\,(2-\rho)}{1!\,(2+\rho)}=$$

$$=\frac{2+\rho-(2-\rho)-2\rho+\rho^2}{2+\rho}=\frac{\rho^2}{2+\rho}$$

келиб чиқади. Шунинг учун

$$P(q\geq x)=\frac{\rho^2}{2-\rho}\,e^{-(2\mu-\lambda)x},$$

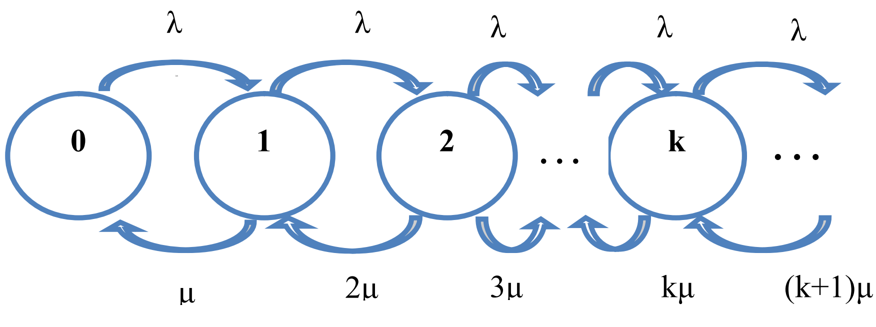
$$M\,q=\frac{R}{\mu(2-\rho)}=\frac{\rho^2}{(2+\rho)(2\mu-\lambda)}$$

бўлади.

*3. $<M|M|\infty>$ хизмат кўрсатиш тизими*

Энди $<M|M|\infty>$ тизимни қараймиз. Демак, бу тизимда хизмат кўрсатувчи мосламалар сони чексиз кўп. Бу моделдан тизимдаги хизмат кўрсатувчи мосламалар сони етарли катта бўлганда ёки ҳақиқатан ҳам чексиз кўп бўлганда фойдаланиш мумкин. Бундай тизим сифатида балиқ овланадиган денгизни мисол келтирсак, ундаги мижозлар балиқчилар ҳисобланади. Табиийки, денгизга келган ҳар қандай балиқчи балиқ овлаши мумкин. Бу мисолда тизимнинг асосий характеристикаси бўлган $t$ моментдаги мижозлар сони $X(t)$ хизмат кўрсатилаётган балиқчилар сони бўлади. Ёки бундай тизимга харидорлар ўз-ўзига хизмат кўрсатадиган супермаркетни мисол келтириш мумкин. Бунда ҳар бир харидор ўзи хизмат кўрсатиш мосламаси бўлади.

Кўриниб турибдики, қаралаётган хизмат кўрсатиш тизимида навбат узунлиги бўлмайди ва унга қуйидаги 3-расмдаги диаграмма мос келади.




3-расм

Ўзгармас сон

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}=e^{\rho}-1$$

бўлади. §5 даги лемма 2 га асосан бу тизим учун стационар ҳолат мавжуд ва бу ҳолда

$$P_k=\frac{\rho^k}{k!}\,e^{-\rho}, \quad k=0,1,2,...$$

бўлади.

**Хулоса.** $<M\left|M\right|m>(навбатли)$

хизмат кўрсатиш тизимида стационар ҳолат (режим) мавжуд бўлади фақат ва фақат шу ҳолдаки , қачонки $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<m$ бўлса. Мижознинг тизимда хизмат бошлангунча кутган вақти бўлган $q$ тасодифий миқдор

$$P(q\ge x)=R\,e^{-(\mu m-\lambda)x}$$

тақсимот функцияга эга бўлиб,

$$M\,q=\frac{R}{\mu(m-\rho)}$$

бўлади. Бу ерда $R$ - стационар ҳолатда барча мосламаларнинг банд бўлиш эҳтимоллиги.

## §6 га масалалар

6.1. Кириш оқими $\lambda$ параметрли энг содда (Пуассон) оқим бўлган

$$<M\left|M\right|3>(навбатли)$$

хизмат кўрсатиш тизимини қараймиз. Ҳар бир мижозга хизмат кўрсатишнинг ўртача вақти $1/\mu$ бўлиб, $\lambda<3\mu$ бўлсин (албатта, $\lambda$ ва $1/\mu$ лар бир хил ўлчов бирлигига эга, айтайлик, минут). Қуйидагиларни топинг:

а) $P_k(t)$ лар учун дифференциал тенгламалар системасини;

б) $P_k$ стационар эҳтимолликларни;

в) стационар ҳолатда $q$ характеристиканинг тақсимот функциясини;

г) $Mq$ математик кутилмани.

6.2. 5.3.масалада ёнилғи қуйиш шаҳобчасига келган автомобилнинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча талаб этиладиган вақтнинг ўрта қийматини топинг.

6.3.Кириш оқими соатига $\lambda = 50$ интенсивликдаги Пуассон оқимидан иборат бўлган ўз-ўзига хизмат кўрсатиладиган хизмат кўрсатиш тизимини қараймиз. Ҳар бир мижоз ўз-ўзига хизмат кўрсатиш вақтининг ўрта қиймати (математик кутилмаси) 5 минутга тенг бўлган кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлса, қуйидагиларни топинг:

а) ихтиёрий $t$ моментда тизимда хизмат кўрсатилаётган мижозларнинг ўртача сонини;

б) хизмат кўрсатиш тизимида мижозларнинг бўлмаслик вақтининг тақсимот қонунини.

## §7. *Денгиз порти қурилишининг уч лойиҳаси ҳақида*

Денгиз порти қурилишининг уч лойиҳаси ҳақидаги масала кириш қисмида келтирилган эди. Масаланинг қўйилишини эслатамиз. Қуйидаги уч лойиҳадан бирини танлаш талаб этилади:

1. Иккита бир хил самарадорликка эга бўлиб, бир-бирига боғлиқсиз равишда ишлайдиган терминаллардан иборат бўлган порт қуриш.
2. Битта терминалдан иборат бўлиб, иккита бир хил қувватда ишлайдиган юклаш ва юкларни тушириш жойлари бўлган порт қуриш.
3. Битта терминалдан иборат бўлиб, унда самарадорлиги I ва II лойиҳалардагига нисбатан икки марта юқори бўлган битта юклаш ва юкларни тушириш жойидан ташкил топган порт қуриш.

Ушбу лойиҳалардан қайси бирини танлаш мақсадга мувофиқ? Қурилиш харажатлари учала ҳолда ҳам бир хил миқдордаги маблағни ташкил этади. Ҳар бир лойиҳага қуйидагича оммавий хизмат кўрсатиш тизимини мос қўямиз.

1. Биринчи лойиҳага иккита бир хил $< M_{\lambda} \left| M_{\mu} \right| 1 >$ хизмат кўрсатиш тизими мос келади.

2. Иккинчи лойиҳага битта $< M_{2\lambda} \left| M_{\mu} \right| 2 >$ хизмат кўрсатиш тизими мос келади. Бунда кириш оқимининг интенсивлиги $2\lambda$ га тенг бўлиб, биринчи лойиҳадаги ҳар бир тизимга кирувчи оқим интенсивлигидан икки марта катта.

3. Учинчи лойиҳага битта $< M_{2\lambda} \left| M_{2\mu} \right| 1 >$ хизмат кўрсатиш тизими мос келади. Бунда мавжуд бўлган ягона хизмат кўрсатувчи мосламанинг хизмат кўрсатиш интенсивлиги биринчи ва иккинчи лойиҳалардаги мосламаларнинг хизмат кўрсатиш интенсивлигидан икки марта юқори.

Бу лойиҳаларни таққослаш учун хизмат кўрсатиш тизимининг энг асосий характеристикаларидан ҳисобланган $i$ - лойиҳада мижознинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутган вақти $q_i \; (i = 1,\, 2,\, 3)$ ларни қараймиз ва уларнинг математик кутилмалари

$$\overline{q_i} = M\, q_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3$$

ларни ҳисоблаймиз.

Биринчи лойиҳа бўйича

$$\overline{q_1} = M\, q_1 = \frac{\rho_1}{\mu\left(1-\rho_1\right)}, \quad \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu} = \rho .$$

Иккинчи лойиҳа бўйича

$$\overline{q_2} = M\, q_2 = \frac{\rho_2^2}{(2+\rho_2)\,\mu\left(2-\rho_2\right)}, \quad \rho_2 = \frac{2\lambda}{\mu} = 2\rho$$

бўлгани учун

$$\overline{q_2} = \frac{4\rho^2}{(2+2\rho)\,\mu\left(2-2\rho\right)} = \frac{\rho^2}{\mu(1-\rho^2)}$$

бўлади.

Учинчи лойиҳада

$$\overline{q_3} = M\, q_3 = \frac{\rho_3}{2\mu\left(1-\rho_3\right)}, \quad \rho_3 = \frac{2\lambda}{2\mu} = \rho\,.$$

Шундай қилиб,

$$\overline{q_1} = M\, q_1 = \frac{\rho}{\mu\left(1-\rho\right)},$$

$$\overline{q_2} = M\, q_2 = \frac{\rho^2}{\mu\left(1-\rho^2\right)} = \overline{q_1}\,\frac{\rho}{1-\rho}\,,$$

$$\overline{q_3} = M\, q_3 = \frac{\rho}{2\mu\left(1-\rho\right)} = \frac{1}{2}\,\overline{q_1}$$

муносабатларга эга бўлдик.

Юқоридагилардан мижознинг (кеманинг) хизмат кўрсатиш бошлангунча кутиш вақти нуқтаи назаридан 3 та лойиҳани солиштириш мумкин (кутиш вақти қанча кичик бўлса, шунча яхши). Биринчи лойиҳа қолган иккита лойиҳадан ёмон. $\rho < 1$ бўлганда

$$\frac{\rho}{1+\rho} < \frac{1}{2}$$

бўлгани учун иккинчи лойиҳа учинчи лойиҳадан яхши.

Эътибор бериш керакки "яхши" ёки "ёмон" деганда, $\overline{q_1}, \overline{q_2}, \overline{q_3}$ характеристикалар назарда тутилмоқда.

Энди учта лойиҳани хизмат кўрсатиш тизимининг энг асосий характеристикаси бўлган кеманинг (мижознинг) портда (тизимда) жаъми ўтказган вақти $\upsilon_i$ $(i = 1, 2, 3)$ нуқтаи назардан солиштирамиз. Табиийки, $\upsilon_i$ қанча кичик бўлса, шунчалик яхши бўлади. Мижознинг портда жаъми ўтказган вақти хизмат кўрсатиш бошлангунча кутилган вақт $q_i$ ва мижозга хизмат кўрсатиш вақти $\xi_i$ ларнинг йиғиндисидан иборат, яъни

$$\upsilon_i = q_i + \xi_i\,,$$

$i = 1, 2, 3$ - лойиҳаларнинг рақамлари. Эслатиб ўтамиз, мижозга хизмат кўрсатиш тугагандан сўнг, у тизимни дарҳол тарк этади. $\overline{\upsilon_i}$ сон $\upsilon_i$ тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси бўлсин, яъни

$$\overline{\upsilon_i} = M\upsilon_i, \quad i = 1, 2, 3 .$$

У ҳолда

$$\overline{\upsilon_i} = M\,q_i + \mathrm{M}\,\xi_i, \quad i = 1, 2, 3$$

бўлади. $\overline{\upsilon_i}$ ларни ҳисоблаш учун учта моделдаги ўртача хизмат кўрсатиш вақтларини топамиз:

$$M\xi_1 = \frac{1}{\mu}, \quad M\xi_2 = \frac{1}{\mu}, \quad M\xi_3 = \frac{1}{2\mu}.$$

Шундай қилиб,

$$\overline{\upsilon_1} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)},$$

$$\overline{\upsilon_2} = \frac{\rho^2}{\mu(1-\rho^2)} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho^2)},$$

$$\overline{\upsilon_3} = \frac{\rho}{2\,\mu(1-\rho)} + \frac{1}{2\mu} = \frac{1}{2\,\mu(1-\rho)},$$

тенгликларни ҳосил қиламиз.

Демак, кеманинг (мижознинг) портда (тизимда) умумий ўтказган вақти нуқтаи назаридан биринчи лойиҳа учинчи лойиҳадан ёмон. Иккинчи ва учинчи лойиҳаларни солиштириш учун

$$\frac{1}{1-\rho^2} \text{ ва } \frac{1}{2(1-\rho)}$$

сонларни таққослаш керак. $0 < \rho < 1$ бўлганда

$$\frac{1}{1+\rho} > \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{1-\rho^2} > \frac{1}{2(1-\rho)}$$

бўлади. Демак, учинчи лойиҳа иккинчи лойиҳага нисбатан яхши экан.

Хулоса қилиб айтганда, $q_i$ - хизмат кўрсатиш бошлангунча кутиш вақти нуқтаи назаридан қараганда энг яхши лойиҳа иккинчи лойиҳа, кейин учинчи ва биринчи лойиҳалар ўрин эгаллайди. Портда умумий ўтказилган вақтга $(\overline{\upsilon_i})$ нисбатан эса, учинчи лойиҳа энг яхши, ундан кейин иккинчи лойиҳа ва энг ёмони биринчи лойиҳа ҳисобланади. Демак, порт қурилишида қайси лойиҳани танлаш кераклиги масаласида иккинчи ва учинчи лойиҳалар рақобат қилади. Охирги қарорни қабул қилишда, албатта, баъзи қўшимча сабабларни муҳокама қилишга тўғри келади.

## §7 га масалалар

7.1. Кичкина шаҳарчада уяли телефонига қўнғироқ қилиш мумкин бўлган тўрт нафар такси ҳайдовчиси аҳолига хизмат кўрсатади. Қуйидаги бўлиши мумкин бўлган ҳолатларни қараймиз:

I. Такси ҳайдовчиларининг барчаси алоҳида-алоҳида бир-бирига боғлиқсиз равишда ишлайди, яъни тўртта бир хил

$$<M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>$$

тизимлар мавжуд.

II. Такси ҳайдовчилари иккитадан ҳамкорликда ишлайди, яъни иккита

$$<M_{2\lambda}\left|M_{\mu}\right|2>,\ <M_{2\lambda}\left|M_{\mu}\right|2>$$

тизимлар ташкил қилинган.

III. Барча тўртта такси ҳайдовчи бир жамоани ташкил қилади ва ҳамкорликда ишлайди, яъни битта

$$<M_{4\lambda}\left|M_{\mu}\right|4>$$

хизмат кўрсатиш тизими мавжуд.

IV. Иккита ҳайдовчи биргаликда, қолган иккитаси алоҳида боғлиқсиз равишда ишлайди, яъни учта

$$<M_{2\lambda}\left|M_{\mu}\right|2>,\ \ <M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>,\ \ <M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>$$

тизимлар бор.

V. Бир нафар ҳайдовчи қолганларига боғлиқсиз алоҳида, қолган уч нафари бир жамоа бўлиб, ҳамкорликда ишлайди, яъни улар иккита

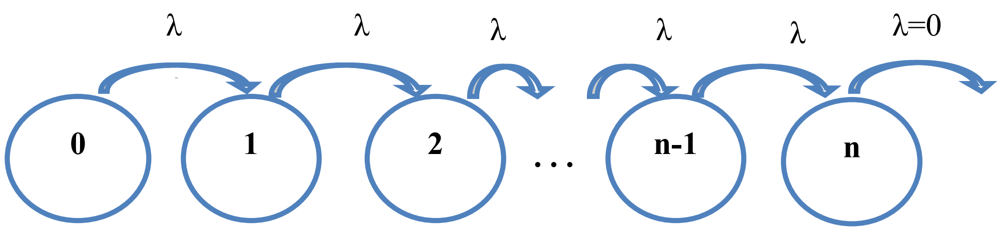
$$<M_{3\lambda}\left|M_{\mu}\right|3> \quad \text{ва} \quad <M_{\lambda}\left|M_{\mu}\right|1>$$

тизимларни ташкил этади.

Барча келтирилган бешта хизмат кўрсатиш тизимини хизмат кўрсатиш бошлангунча ўртача кутиш вақти $Mq$ нуқтаи назаридан таққосланг.

## *§8. Баъзи энг содда оммавий хизмат кўрсатиш тизимлари*

1. Бирор механизмнинг асосий элементи $\lambda$ параметрли кўрсаткичли тақсимланган тасодифий вақтдан кейин ишдан чиқсин, яъни яроқсиз ҳолга келсин. Яроқсиз ҳолга келган элемент заҳирада мавжуд бўлган янги худди шундай элемент билан дарҳол алмаштирилади. Бошланғич пайтда захирадаги яроқли элементлар сони $n$ та бўлсин. $X(t)$ орқали $t$ моментгача яроқсиз ҳолга келган (ишдан чиққан) элементлар сонини белгилаймиз. У ҳолда , равшанки , $X(t)$ фақат кўпайиш жараёни (§3 га қаранг) бўлади ва унга қуйидаги 1-расмда келтирилган диаграмма мос келади.




1-расм.

Одатдагидай

$$P_k(t) = P(X(t) = k), \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

функцияларни киритамиз. Улар (лемма 1.4 га қаранг)

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t)$$

$$P_1'(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t)$$

$$\dots$$

$$P'_{n-1}(t) = \lambda P_{n-1}(t) + \lambda P_{n-2}(t)$$

$$P_n{}'(t) = \lambda P_{n-1}(t),$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(t) = 1$$

дифференциал тенгламалар системасини ва $P_0(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантиради. Бу тенгламалар системасидаги дифференциал тенгламалар $P_k(t),\ k = 0,1,\dots,n$ функцияларга нисбатан биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламалардир.

$$P_0(0) = 1, \quad P_k(0) = 0, \quad \mathrm{k} = 1,\ 2,\ \dots, n$$

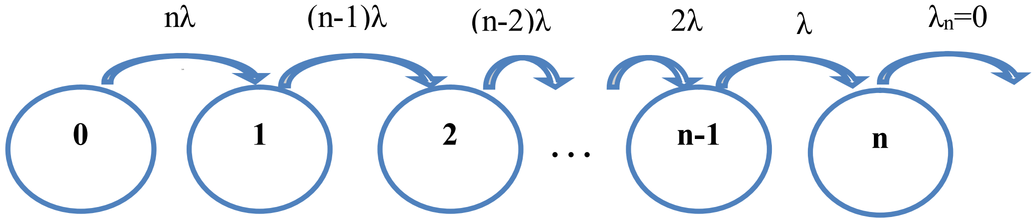
бошланғич шартларни ҳисобга олган ҳолда системадаги тенгламаларни кетма-кет ечиб,

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad 0 \le k \le n-1,$$

$$P_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P_k(t)$$

ларни ҳосил қиламиз.

2. Механизмда $n$ та бир хил турдаги элемент ишлаётган бўлсин. Уларнинг ҳар бири, олдинги масаладагига ўхшаб, $\lambda$ параметрли кўрсаткичли тасодифий вақтдан кейин яроқсиз ҳолга келади. Механизм ишдан тўхтайди, агар барча $n$ та элемент яроқсиз ҳолга келса. $X(t)$ жараён $t$ моментгача яроқсиз ҳолга келган элементлар сони бўлса, у ҳам фақат кўпайиш жараёни бўлади ва унга қуйидаги 2-расмдаги диаграмма мос келади.




2-расм.

Бу ҳолда

$$P_k(t) = P(X(t) = \mathrm{k}), \quad \mathrm{k} = 0, 1, ..., n$$

функциялар

$$P_0'(t) = -n\lambda P_0(t)$$

$$P_1'(t) = -(n-1)\lambda P_1(t) + n\lambda P_0(t)$$

$$. \quad . \quad .$$

$$P_{n-1}'(t) = -\lambda P_{n-1}(t) + 2\lambda P_{n-2}(t)$$

$$P_n'(t) = \lambda P_{n-1}(t),$$

$$\sum_{k=0}^{n} P_k(t) = 1$$

дифференциал тенгламалар системасини ва $P_0(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантиради.

Бу системанинг ечими

$$P_k(t) = C_n^k e^{-(n-k)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^k, \quad 0 \le k \le n-1, \qquad (1)$$

кўринишида бўлишини математик индукция усулида исботлаймиз. $k = 0$ бўлганда

$$P_0(t) = e^{-n\lambda t}$$

эканлигини кўриш қийин эмас. (1) ни $k = i,\ \ 0 \le i \le n-1$ да ўринли, деб фараз қиламиз. $k = i+1$ да тенгламалар системасидан

$$P_{i+1}'(t) = -\lambda P_{i+1}(t) + 2\lambda P_i(t)$$

ёки фаразимизга кўра,

$$P_{i+1}'(t) = -\lambda P_{i+1}(t) + 2\lambda C_n^i e^{-(n-i)\lambda t}(1 - e^{-\lambda t})^i \qquad (2)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. (2) тенгламадаги охирги қўшилувчини $f(t)$ деб белгиласак, тенглама

$$P_{k+1}'(t) + \lambda P_{k+1}(t) = f(t),$$

унинг ечими эса,

$$P_{i+1}(t) = e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t} f(t)dt$$

эканлигини ҳосил қиламиз. Охирги тенгликка $f(t)$ функциянинг ифодасини қўйиб,

$$P_0(0)=1,\quad P_k(0)=0,\quad 1\le \mathrm{k}\le n$$

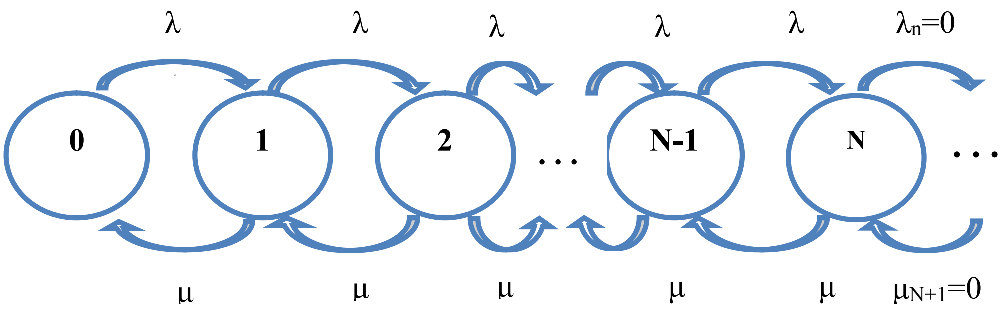
бошланғич шартлардан фойдалансак,

$$P_{i+1}(t)=C_n^{i+1}e^{-(n-i-1)\lambda t}\ (1-e^{-\lambda t})^{i+1} \qquad (3)$$

келиб чиқади ва шу билан (1) муносабат исботланди.

3. $<M_\lambda\left|M_\mu\right|1>(навбат\ узунлиги<N)$

тизимни қараймиз. Бу хизмат кўрсатиш тизимини қуйидаги 3-расмда келтирилган диаграммага мос келадиган $X(t)$ туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни ифодалайди.




3-расм.

Табиийки, $\lambda$ ва $\mu$ параметрларнинг ихтиёрий қийматларида тизимнинг стационар ҳолати мавжуд бўлиб,

$$S=\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda^k}{\mu^k}=\sum_{k=1}^{N}\rho^k=\frac{\rho^{N+1}-\rho}{\rho-1},$$

$$P_k=\lim_{t\to\infty}P_k(t)=\frac{\rho^{k+1}-\rho^k}{\rho^{N+1}-1},\quad 0\le k\le N$$

муносабатлар ўринли бўлади. Стационар ҳолатда тизимда мавжуд бўлган мижозлар сонининг математик кутилмаси

$$MX=\sum_{k=0}^{N}kP_k=\frac{\rho-1}{\rho^{N+1}-1}\sum_{k=0}^{N}k\rho^k$$

қийматга тенг бўлиши келиб чиқади. Агар

$$\sum_{k=0}^{N} k\rho^k = \sum_{k=1}^{N} k\rho^k = \rho\sum_{k=1}^{N} k\rho^{k-1} = \rho\sum_{k=1}^{N} (\rho^k)' =$$

$$= \rho\left(\sum_{k=1}^{N} \rho^k\right)' = \rho\left(\frac{\rho^{N+1}-\rho}{\rho-1}\right)'_{\rho} = \rho\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(\rho-1)^2}$$

эканлини ҳисобга олсак,

$$MX = \rho\frac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{(\rho^{N+1}-1)(\rho-1)}$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

$< M_\lambda \left| M_\mu \right| m > (\textit{навбат узунлиги} < N)$ хизмат кўрсатиш тизими учун $m \geq 2$ бўлганда юқоридагига ўхшаш муносабатларни келтириб чиқариш мумкин.

## §8 га масалалар

8.1. (2) тенгламанинг ечими (3) эканлигининг тўла исботини келтиринг.

8.2. Автомагистрал четида жойлашган кабобхона ёнида бир дона автомобилга тўхташ жойи бўлиб, бу жой банд бўлса, йўл бўйида яна 10 тагача автомобилга навбат кутиш учун жой ажратилган. Агар бу жойларнинг барчаси банд бўлса, кабобхонага тўхташни хохлаган навбатдаги автомобил тўхтамай ўтиб кетади. Статистик маълумотларга кўра , кабобхонага энг содда Пуассон оқими билан ўртача ҳар 10 минутда 3 нафардан мижоз келади. Ҳар бир мижозга $\lambda = 3$ минут кўрсаткичли тақсимланган тасодифий вақт оралиғида хизмат кўрсатилади. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а) кабобхонада бирорта ҳам мижоз бўлмаслик ҳодисасининг эҳтимоллигини;

б) хизмат бошланишини кутаётган мижозлар сонининг ўртача сонини (математик кутилмасини);

в) мижознинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча ўртача кутадиган вақтини;

г) кабобхонадаги мижозлар сонининг 10 нафардан кўп бўлиш эҳтимоллигини.

8.3.Ошхонада хизмат кўрсатиш учун 50 нафар мижозга етарли ўрин бор. Мижозлар ошхонага ўртача соатига 20 нафар энг содда (Пуассон) оқим сифатида келади. Хизмат кўрсатиш тезлиги соатига 22 нафар мижозни ташкил этади. Барча ўринлар банд бўлса, мижоз кутиб турмайди, қайтиб кетади.

а) Келган мижознинг ошхонада бўш ўрин йўқлиги учун овқатланмай кетиш ҳодисасининг эҳтимоллигини топинг;

б) Ошхонада бўш ўринлар сони 3 тадан кам бўлиш ҳодисасининг эҳтимоллигини топинг.

8.4.Поликлиникага соатига ўртача $\lambda = 30$ нафар бемор Пуассон оқими бўйича ташриф буюради. Врачнинг қабулхонасида 14 нафар бемор қабулни кутиши учун ўрин мавжуд. Врач ҳар бир беморга кўрсаткичли тақсимланган тасодифий вақт оралиғида хизмат кўрсатади. Агар врач бир соатда ўртача 20 нафар беморга хизмат кўрсатса, қуйидагиларни топинг:

а) врач ҳузурига келган беморнинг навбат кутмаслик эҳтимоллигини;

б) беморнинг врач қабулхонасининг кутиш залида бўш жой топа олиш эҳтимоллигини;

в) беморнинг поликлиникада ўтказган умумий (кутиш ва хизмат кўрсатиш) вақтининг математик кутилмасини.

8.5. Банк бўлимига мижозлар Пуассон оқими бўйича соатига ўртача $\lambda = 36$ нафардан ташриф буюради. Ҳар бир мижозга хизмат кўрсатиш вақти $\mu = 0{,}035$ соат параметрли кўрсаткичли тақсимотга эга. Кутиш залига кўпи билан 30 нафар мижоз сиғади.

а) кутувчилар сони 3 нафар бўлиш эҳтимоллиги 0,2 дан ошмаслиги;

б) кутувчилар сонининг ўрта қиймати 3 дан ошмаслиги учун банк бўлимида хизмат кўрсатувчи нечта касса бўлиши керак?

8.6. Валюталарни алмаштириш (айирбошлаш) шоҳобчасининг иш фаолиятини қараймиз. Мижозлар шоҳобчага ўртача ҳар 6 минутда бир нафардан Пуассон оқими бўйича келади. Ҳар бир мижозга ўртача 6 минут давомида хизмат кўрсатилади ва хизмат кўрсатиш вақти кўрсаткичли тақсимланган. Ҳар бир хизмат кўрсатилган мижоз шоҳобчага ўртача бир доллар фойда келтиради. Шоҳобча битта хизмат кўрсатадиган касса ва иккита кутиш ўриндиғига эга. Мижоз келганда кутиш ўриндиқлари банд бўлса, у тизимни дарҳол тарк этади. Шоҳобчанинг иш фаолиятини яхшилаш учун иккита инвестицион лойиҳа қаралмоқда:

а) 100 доллар маблағ ҳисобига қўшимча иккита кутиш ўриндиғи (жами тўртта бўлади) ташкил этиш;

б) 500 доллар маблағ ҳисобига кутиш ўриндиқлари сонини 10 тага етказиш.

Агар шоҳобча кунига 8 соатдан ишласа, қилинган ҳаражатларни қоплаш учун талаб этиладиган ўртача вақтни топинг.

8.7. 8.6-масалани битта мижозга хизмат кўрсатиш ўзгармаган ва шоҳобчага Пуассон оқими бўйича ўртача ҳар 12 минутда битта мижоз келадиган ҳолда ечинг.

## *§9. Бошқа турдаги оммавий хизмат кўрсатиш тизимлари ҳақида*

Хизмат кўрсатиш тизимига мижозларнинг келиш оралиғидаги $\tau_i$ тасодифий вақтлар $G_e(x) = \mathrm{P}(\tau_i < x)$, $i -$ рақамли мижозга хизмат кўрсатиш $\xi_i$ вақти $G_s(x) = \mathrm{P}(\xi_i < x)$ тақсимот функцияларига эга бўлсин. Бу ерда $\tau_i$ ва $\xi_i$ тасодифий миқдорлар, умуман олганда , кўрсаткичли тақсимот қонунига эга бўлиши шарт эмас; ва $\tau_1, \tau_2, ...$ $(\xi_1, \xi_2, ...)$ тасодифий миқдорлар боғлиқсиз ва бир хил тақсимланган, деб ҳисоблаймиз.

$$M\tau_i = \frac{1}{\lambda} \text{ ва } M\xi_i = \frac{1}{\mu}$$

белгилашлар киритамиз ва кириш оқими $\lambda$ интенсивликка, мижозларга хизмат кўрсатиш $\mu$ интенсивликка эга, деган ибораларни сақлаб қоламиз.

Аввалгидай, $X(t)$ - $t$ моментдаги хизмат кўрсатиш тизимида мавжуд бўлган мижозлар сони бўлсин. Умумий ҳолда, $X(t)$

қийматларини ўзгартирадиган моментлар орасидаги тасодифий вақт кўрсаткичли тақсимланган бўлиши шарт эмас. Шунинг учун, умумий ҳолда $X(t)$ туғилиш ва нобуд бўлиш жараёни бўлмайди. Бундай жараёнларни ўрганиш учун бизнинг курсимиз доирасидан ташқарида бўлган анчагина мураккаб математик усуллардан фойдаланишга тўғри келади. Биз бу йўналишдаги баъзи натижаларни санаб ўтамиз холос. Уларнинг исботини [1-3] адабиётлардан топиш мумкин.

Агар аввалгидай $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ белгилашни қабул қилсак, қуйидаги тасдиқ ўринлидир.

**Теорема.** *Агар* $\rho < 1$ *бўлса,* $X(t)$ *жараён учун стационар ҳолат мавжуд, яъни* $P_k = \lim\limits_{t\to\infty} P(X(t) = k)$ *лимит мавжуд ва* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} P_k = 1$ *бўлади. Агар* $\rho \geq 1$ *бўлса,* $X(t)$ *учун стационар ҳолат мавжуд бўлмайди ва* $t$ *нинг ўсиши билан* $X(t)$ *нинг қиймати чексизликка қараб кетади.*

Агар $\rho < 1$ бўлса, стационар ҳолатда мижознинг унга хизмат кўрсатиш бошлангунча кутадиган вақти - $q$ мураккаб тақсимот қонунига эа бўлади ва унинг аниқ кўринишини топиш жуда мураккаб масала ҳисобланади. Бироқ, $x$ нинг етарли катта қийматларида $P(q > x)$ учун тақрибий формулалар келтириб чиқарилган. Бу тақрибий формула

$$P(q > x) = Ce^{-\lambda_0 x}(1 + o(1)), \quad x \to \infty \qquad (1)$$

кўринишга эга бўлиб, $C$ ва $\lambda_0$ ларнинг аниқ қийматлари топилган, масалан,

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda : M\, e^{\lambda(\tau - \xi)} \leq 1\},$$

бу ерда $\tau -$ мижозларнинг келиш моментлари орасидаги фарқ, $\xi -$ битта мижозга хизмат кўрсатиш вақти.

Мантиқан қараганда, $\tau_i$ ва $\xi_i$ тасодифий миқдорлар ўзаро боғлиқсиз бўлмаган ҳолда битта хизмат кўрсатувчи мосламага эга бўлган $(m = 1)$ янада умумийроқ оммавий хизмат кўрсатиш тизимларини қараш мумкин. Бу ҳолда ҳам етарли кенг шартлар остида $\rho < 1$ бўлганда стационар ҳолатнинг мавжудлиги, $\rho \geq 1$ бўлганда эса, мавжуд эмаслиги келиб чиқади.

Ўрганиш янада қийинроқ бўлган оммавий хизмат кўрсатиш тизимларига

$$<G|G|m>$$

турдаги тизимлар киради (хизмат кўрсатувчи мосламалар сони $m > 1$). Бундай тизимларда стационар ҳолат мавжуд бўлиши учун $\rho < m$ шарт етарли ҳисобланади. Қаралаётган тизимлар учун $m = 2$ бўлганда (1) кўринишдаги тақрибий формула яқин ўтмишда топилган бўлиб, $m \geq 3$ бўлганда изланишлар давом этмоқда.

## §9 га масалалар

9.1. Битта хизмат кўрсатувчи мосламали хизмат кўрсатиш тизимига тушадиган талаблар Пуассон оқими бўйича бўлсин. Бунда бир соат ичида тушадиган талабларнинг ўртача частотаси $\lambda$ га тенг, деб оламиз. Битта мижозга хизмат кўрсатиш вақти $5(\textit{минут}) < x < 15(\textit{минут})$ оралиғида текис тақсимланган тасодифий миқдор бўлсин, яъни унинг зичлик функцияси $5 < x < 15$ оралиқда $p(x) = \frac{1}{10}$, қолган $x$ ларда $p(x) = 0$ бўлсин.

а) $\lambda$ нинг қандай қийматларида тизимнинг стационар ҳолати мавжуд бўлишини аниқланг;

б) стационар ҳолатда

$$\ln P(q > x) = \lambda_0 x(1 + o(1)), \quad x \to \infty$$

формуладаги $\lambda_0$ ни аниқланг ((1) формулага қаранг).

9.2. Битта хизмат кўрсатувчи мосламали хизмат кўрсатиш тизимини қараймиз. Кетма-кет тушадиган талабларнинг тушиш вақтлари орасида фарқ ўзармас бўлиб, 10 минутга тенг бўлсин. Ҳар бир талабга хизмат кўрсатиш вақти $\mu = 5$ минут параметр билан кўрсаткичли тақсимланган бўлса, қуйидагиларни топинг:

а) Ўзидан олдинги мижоз тизимга кириш моментида тизимда тўртта мижоз бўлган бўлса, мижознинг тизимга кириш моментида тизимда иккита мижоз бўлишининг эҳтимоллигини;
б) Ўзидан олдинги мижоз тизимга кириш моментида тизимда иккита мижоз бўлган бўлса, мижознинг тизимга кириш моментида тизимда мавжуд бўлган мижозлар сонининг математик кутилмасини.

9.3. Автомобилларнинг ювиш станциясига ҳар 15 минутда битта мижоз келади, яъни мижозлар келиш моментлари орасидаги вақт тасодифий эмас. Ҳар бир автомобилга хизмат кўрсатиш вақти (7,16) параметрли текис тақсимланган бўлсин (табиийки, бу вақт ўзгармас бўла олмайди, чунки у автомобил ҳажмига боғлиқ). Станцияда фақат битта хизмат кўрсатиш мосламаси бор. Агар $q$ - стационар ҳолатда хизмат кўрсатиш бошланишини кутиш вақти бўлса,

$$\ln P(q > x) = \lambda_0 x(1 + o(1)), \quad x \to \infty$$

шартни қаноатлантирувчи $\lambda_0$ ни топинг.

## Адабиётлар


1. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения. М., Советское радио, 1971, 520 стр.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М., Наука, 1987, 336 стр.
3. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания /Пер. с англ.М.,Машиностроение, 1979, 432 стр.
4. Таха Х. Введение в исследование операций. В 2 кн./Пер. с англ. М., Мир, 1985, Кн.2, 196 стр.
5. Джафаров К.А., Могульский А.А. Элементы теории массового обслуживания. Изд.ИМ СО РАН, 1997, 68 стр.
6. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания . М., Наука, 1972, 368 стр.

## МУНДАРИЖА

**ВАЛИ РАХИМДЖАНОВИЧ ХОДЖИБАЕВ**

# ОММАВИЙ ХИЗМАТ КЎРСАТИШ НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

Муҳаррир: М.Талипова
Техник муҳаррир Г. Ибрагимова
Саҳифаловчи: Г.Таджибаева

Босишга рухсат этилди: 28.07.2020 й. Бичими 60x84 1/16
Офис қоғози. Ризограф усулда. Times гарнитураси.
Шартли босма табоғи 5,0. Нашр. ҳисоб табоғи 4,5.
Адади 200 нусха. Буюртма №28-07

«IMPRESS MEDIA» МЧЖ босмахонасида чоп этилди.
Манзил: Тошкент шаҳри, Яккасарой тумани, Қушбеги, 6