МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

В.Р.ХОДЖИБАЕВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВЫХОДОМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ ИЗ ИНТЕРВАЛА

ТАШКЕНТ–2014

УДК: 519.21
ББК 22.171
Х-69

В.Р.Ходжибаев. Об асимптотике распределений, связанных с выходом случайного процесса с независимыми приращениями из интервала. –Т.: «Fan va texnologiya», 2014, 112 стр.

ISBN 978–9943–4349–3–6

Монография посвящена граничным задачам для случайных процессов с независимыми приращениями, связанных с выходом процесса из интервала. Основное внимание уделено полным асимптотическим разложениям для совместного распределения момента первого выхода и положения процесса в момент выхода, а также положения в фиксированный момент времени до выхода из интервала для однородных процессов с независимыми приращениями и обобщенных процессов восстановления когда ширина полосы растет.

Рассмотрены также задачи о распределении осциллирующих случайных процессов и о распределении числа пересечений полосы траекторией однородного процесса с независимыми приращениями. В исследованиях применяется факторизационный метод.

Рассчитана на научных сотрудников, занимающихся теорией вероятностей и её применениями.

УДК: 519.21
ББК 22.171

Научный редактор: академик Ш.К.Форманов

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук Я.М.Хусанбоев;
доцент Н.Тургунов

Монография рекомендована к изданию решением Ученого Совета Наманганского инженерно-педагогического института.

ISBN 978–9943–4349–3–6

ВВЕДЕНИЕ

Граничные задачи для случайных процессов занимают важное место в современной теории вероятностей. Это связано с тем обстоятельством, что они имеют многочисленные применения в разнообразных прикладных областях теории вероятностей. Среди всего многообразия граничных задач выделим изучение распределений функционалов от траекторий случайного процесса с независимыми приращениями, связанных с двумя границами, таких как момент первого выхода, положение в момент первого выхода, положение в фиксированный момент времени до выхода из прямолинейной полосы. К подобным постановкам приводит изучение систем массового обслуживания, задачи хранения запасов, задачи последовательного анализа и т.д. Математическое содержание этих задач, как правило, требует привлечения для их решения довольно тонких аналитических методов. Литература, посвященная этим вопросам, обширна и в сколько-нибудь полном объеме не может быть отражена в рамках одной работы. Ниже приводятся ссылки лишь на те работы, которые имеют непосредственное отношение к предмету проводимых исследований.

В данной монографии изучаются распределения так называемых граничных функционалов, связанных с выходом случайного процесса с независимыми приращениями из интервала. Все исследования, кроме § 2, 8 носят асимптотический характер, т. е. ищутся асимптотические разложения искомых распределений и связанных с ними характеристик при условии, что длина интервала неограниченно растет (точные решения рассматриваемых задач возможны лишь при весьма частных предположениях, см. пример § 9). В параграфах 2 – 6 рассматриваются случайные блуждания с непрерывным временем, порожденные однородным случайным процессом с независимыми приращениями. В параграфе 7 изучаются распределения граничных функционалов, в случае обобщенных процессов восстановления. § 8 и § 9 посвящены: изучению распределения так называемых осциллирующих процессов с независимыми приращениями и задаче о числе пересечений интервала однородным процессом с независимыми приращениями.

Основными предположениями о распределении случайного процесса являются известные условия крамеровского типа.

В § 2 – 6 решается задача нахождения полных асимптотических разложений (п.а.р) для совместного распределения момента первого выхода и положения процесса в момент первого выхода, а также положения в фиксированный момент времени до выхода из прямолинейной полосы. Отдельно рассматриваются ситуации, когда обе границы растут и одна из двух границ остаётся фиксированной. Исследование осуществляется с помощью аналитических методов, которые принято называть факторизационными, так как они связаны с использованием факторизации некоторой функции. Среди множества подходов к исследованию асимптотики распределений граничных функционалов в случае прямолинейных границ, факторизационный метод обладает рядом достоинств, позволяя, в частности, получать п. а. р. Распределений для широкого круга задач. В этом направлении основополагающими являются работы А. А. Боровкова [1,2], где решена проблема нахождения п. а. р. распределений граничных функционалов для случайных блужданий, порожденных суммами независимых одинаково распределенных случайных величин, с одной прямолинейной границей. Этот подход оказался эффективным и при решении ряда других задач. Так с его помощью получены п.а.р. в задачах с одной границей для однородных случайных процессов с независимыми приращениями (Б. А. Рогозин [6]), для некоторых двумерных случайных блужданий (А. А. Боровков, Б. А. Рогозин [3]). Аналогичная двуграничная задача для случайных блужданий с дискретным временем решалась В. И. Лотовым [33,35].

В своих общих чертах метод исследований состоит из нескольких этапов. На первом из них доказываются факторизационные тождества для двойных преобразований Фурье – Стилтьеса над искомыми распределениями. В них устанавливаются функциональная зависимость (зачастую неявная) между этими преобразованиями и компонентами факторизации. Второй этап связан, как правило, с детальным изучением аналитической структуры этих компонент, в том числе выяснением расположения их нулей, особенностей, возможностей аналитического продолжения и т. д. Это позволяет затем (третий этап) асимптотически обратить имеющиеся двойные преобразования над искомыми распределениями по пространственной переменной. Слово «асимптотически» здесь означает, что обращение производится не в точном виде, а с выделением главного члена и оценкой остатка, как правило экспоненциально малого. Этот этап является одним из основных, в результате находятся так называемые асимптотические представления преобразований по переменной, связанной со «временем». На заключительном этапе главные части полученных асимптотических представлений исследуются с помощью модификации метода перевала.

Эта схема была разработана А. А. Боровковым и применялась во всех упомянутых выше работах. Все четыре этапа присутствуют и в настоящей работе. В то же время отметим, что аналитические свойства компонент факторизации во всех рассматриваемых ниже ситуациях с достаточной полнотой изучены ранее в [6,9]при решении соответствующих одних граничных задач. В связи с этим, в нашем случае, самостоятельные исследования на втором этапе не проводятся, но в целях облегчения чтения каждый раз излагаются нужные сведения о факторизации и приводятся необходимые ссылки.

В § 7 рассматривается аналогичная задача получения п.а.р., в случае обобщенных процессов восстановления.

Нахождению асимптотических формул для распределений граничных функционалов посвящены работы многих авторов. В ряде работ получены первые члены асимптотических разложений. Этот вопрос особенно хорошо изучен для блужданий с дискретным временем. Остановимся более подробно на результатах, известных к настоящему времени по получению п.а.р. Как упоминалось выше, для случайных блужданий с дискретным временем и одной границей п.а.р. распределений граничных функционалов получены в работах А. А. Боровкова [1,2], А. А. Боровкова, Б. А. Рогозина [3]. Для таких же блужданий с двумя границами наиболее продвинутые результаты в этом направлении получены в работах В. И. Лотова [4,5]. В ряде случаев получены п.а.р. и в граничных задачах для однородных процессов с независимыми приращениями. В случае одной границы, в условиях данной работы п.а.р. распределения первого выхода найдены в [6] для весьма широкого диапазона уклонения границы. В области нормальных уклонений границ, в [7] найдены п.а.р. для распределения момента выхода процесса без положительных скачков (т.е. для полунепрерывного процесса), через нижнюю границу и в [8] для распределения момента первого выхода с указанием границы интервала, через которую произошел выход. При этом предполагалось, что положительные скачки процесса распределены как сумма конечного числа независимых показательно распределенных случайных величин.

Во всех этих работах на распределение процесса накладываются условия Крамера.

Описываемый в данной работе факторизационный метод получения п.а.р. в двуграничных задачах, основные этапы которого охарактеризованы выше, обеспечивает значительно большие возможности как с точки зрения общности результатов (охватывается более широкий класс процессов), так и по их глубине (п.а.р. в зонах не только нормальных, но и больших уклонений, рассмотрение совместных распределений момента первого выхода и положения в момент выхода). С точки зрения факторизационных методов полунепрерывные и рассмотренные в [8] случайные процессы представляют собой лишь частный случай ситуации, когда компоненты факторизации могут быть найдены в явном виде ([9]). Например, если положительные (отрицательные) скачки процесса распределены показательно, то положительная (отрицательная) компонента рассматриваемой здесь безгранично делимой факторизации является дробно-линейной функцией по пространственной переменной. Как уже отмечалось выше, этот метод не требует знания явного вида компонент безгранично делимой факторизации.

Возможности аналитического метода исследования двуграничных задач, изложенного выше, не исчерпывается исследованием распределений, связанных с первым выходом траектории случайного процесса из интервала. Примером тому служат рассматриваемые в § 8, 9 задачи об осциллирующих процессах и о распределении числа пересечений интервала.

В § 8 найдено явное выражение для двойного преобразования над распределением осциллирующего случайного процесса. В одном частном случае найдено преобразование Фурье – Стилтьеса стационарного распределения. Приведена история данной задачи.

В заключительном параграфе 9 изучается распределение числа пересечений полосы траекторией однородного процесса с независимыми приращениями в том случае, когда число пересечений конечно с вероятностью единица. Распределение числа пересечение уровня (не полосы) достаточно полно исследовалось в теории стационарных гуассовских процессов, тогда как для однородных процессов с независимыми приращениями данный вопрос мало изучен. Отметим, что в [29] изучалось асимптотика числа пересечений полосы траекторией броуновского движения, а в [30] выведены некоторые представления для распределения числа пересечений полосы траекторией однородного случайного процессов с независимыми приращениями через распределения других граничных функционалов. В ряде работ (см. [26,28]) изучалось предельное поведение для распределения числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания, порожденного суммами независимых одинаково распределенных слагаемых. Здесь, в § 9, выведены точные формулы для распределения числа пересечений. Однако, прямые вычисления по этим формулам, как правило, затруднены; исключение составляют те немногочисленные процессы, для которых компоненты факторизации находятся в явном виде и при этом оказываются просто устроенными. Среди них – винеровский процесс со сносом, для которого здесь вычисляется распределение числа пересечений полосы; оно оказывается геометрическим. Далее, проводится асимптотический анализ полученных выражений, когда полоса неограниченно расширяются и выполнены условия крамеровского типа. В итоге выделяются главные члены распределения числа пересечений полосы, имеющие весьма простой вид, и оцениваются остатки, которые оказываются экспоненциально малыми.

Примечание. Нумерация утверждений и формул в каждом параграфе своя, при этом первое число в обозначении номера формулы (теоремы, леммы) соответствует номеру параграфа.

§ 1. Предварительные сведения о свойствах факторизации

В этом параграфе излагаются необходимые в дальнейшем сведения из $[6,9]$ о свойствах факторизации.

Пусть V будет совокупностью комплексных функций $v(t), -\infty < t < \infty$, имеющих ограниченную вариацию, и

$$B(\mu_-,\mu_+) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t}\, dv(t) : v(\cdot) \in V, \right.$$

$$\left. \int_{-\infty}^{\infty} e^{\operatorname{Re}\lambda t} \left| dv(t) \right| < \infty,\ \mu_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \mu_+ \right\},$$

т.е. $B(\mu_-, \mu_+)$-банахова алгебра преобразований Фурье - Стилтьеса функций из V,

$$\|f\| = \max_{\mu - \le c \le \mu +} \int_{-\infty}^{\infty} e^{cx} \left| dF(x) \right| \text{ при } f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dF(x),$$

$$B_\pm(\mu_\pm) = \left\{ \pm\int_0^{\pm\infty} e^{\lambda t} dv(t) : v(\cdot) \in V, \right.$$

$$\left. \pm\int_0^{\pm\infty} e^{\operatorname{Re}\lambda t} \left| dv(t) \right| < \infty, \pm\operatorname{Re}\lambda \le \pm\mu_\pm \right\}$$

Пусть $R(\mu_-, \mu_+)$ - подмножество множества $B(\mu_-, \mu_+)$, образованное элементами $g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dv(x)$, у которых функция $v(\cdot)$ абсолютно непрерывна. $R_\pm(\mu_\pm)$ определяются аналогично. Будем говорить, что функция $\varphi(\lambda)$, аналитическая внутри и непрерывная, включая границу полосы $\mu_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \mu_+$, допускает каноническую факторизацию в этой полосе, если она представима там в виде $\varphi(\lambda) = \varphi_+(\lambda)\varphi_-(\lambda)$, где $\varphi_-^{\pm 1}(\lambda) \in B_-(\mu_-)$.

Пусть, далее, $\xi(t),\ t \ge 0$ - однородный случайный процесс с независимыми приращениями, (ОСПНП) $\xi(0) = 0$. Выборочные траектории процесса $\xi(t)$ предполагаются непрерывными справа, $\psi(\lambda)=\frac{1}{t}\ln Ee^{\lambda\xi(t)}$. Функция:

$$r_u(\lambda)=\frac{u}{u-\psi(\lambda)},$$

при $\mathrm{Re}=0,\ u>0$ представляет преобразование Лапласа безгранично делимого распределения:

$$\frac{u}{u-\psi(\lambda)}=u\int_0^\infty e^{-ut}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x}d_xP(\xi(t)<x)\right\}dt.$$

Представление функции $r_u(\lambda)$, при $\mathrm{Re}\,\lambda=0,\ u>0$ в виде $r_u(\lambda)=r_{u+}(\lambda)r_{u-}(\lambda)$ называется безгранично делимой факторизацией, если $r_{u+}(\lambda)$ есть преобразование Лапласа при $\mathrm{Re}\,\lambda\le 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неотрицательной полуоси, а $r_{u-}(\lambda)$ есть преобразование Лапласа при $\mathrm{Re}\,\lambda\ge 0$ безгранично делимого распределения, носитель которого содержится на неположительной полуоси. $r_{u+}(\lambda)(r_{u-}(\lambda))$ называется положительной (отрицательной) компонентой факторизации. В [9] установлено, что функция $r_u(\lambda)$ допускает безгранично делимую факторизацию, и ее компоненты имеют вид:

$$r_{u+}(\lambda)=u\int_0^\infty e^{-ut}\left\{\int_0^\infty e^{\lambda x}d_x\mathrm{P}(\bar{\xi}(t)<x)\right\}dt$$
$$=\exp\left\{-\int_0^\infty (e^{\lambda x}-1)d_x\int_0^\infty t^{-1}\mathrm{P}(\xi(t)>x)e^{-ut}dt\right\},$$
$$r_{u-}(\lambda)=u\int_0^\infty e^{-ut}\left\{\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x}d_x\mathrm{P}(\bar{\bar{\xi}}(t)>x)dt\right\}$$
$$=\exp\left\{\int_{-\infty}^0 (e^{\lambda x}-1)d_x\int_0^\infty t^{-1}\mathrm{P}(\xi(t)\le x)e^{-ut}dt\right\},$$

где $\bar{\xi}(t)=\sup_{0\le s\le t}\xi(s),\ \bar{\bar{\xi}}(t)=\inf_{(0\le s\le t)}\xi(s)$.

Очевидно, что функция $r_{u+}(\lambda)$ аналитична при $\operatorname{Re}\lambda < 0$, непрерывна и не обращается в 0 при $\operatorname{Re}\lambda \le 0$ за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, а функция $r_{u-}(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами в правой полуплоскости λ.

Эти представления, однако, малополезны для дальнейших целей асимптотического анализа распределений и использоваться не будут.

В исследованиях данной работы будут использоваться свойства компонент безгранично делимой факторизации функции $r_u(\lambda)$ и канонической факторизации некоторой другой функции, связанной с $\psi(\lambda)$, (см. функцию $\psi_1(\lambda, u)$ ниже), изученных в работе [6], и которые имеют место при некоторых ограничениях на распределение $\xi(1)$. Остановимся на условиях, накладываемых на распределение $\xi(1)$.

На протяжении всей работы, кроме § 7,8, предполагаются выполненными следующие условия крамеровского типа:

1. $\mathrm{E}\exp\{\lambda\xi(1)\} < \infty$ при $-\infty < \lambda_- \le \lambda \le \lambda_+ < \infty$, $\lambda_+ - \lambda_- > 0$, и для функции $\psi(\lambda) = \ln \mathrm{E}e^{\lambda\xi(1)}$ имеет место представление:

$$\psi(\lambda) = \alpha\lambda + \frac{\omega^2\lambda^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x)\, dS(x), \tag{1.1}$$

в котором α, ω - некоторые вещественные числа,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dS(x) < \infty,\ S(-\infty) = S(+\infty) = 0.$$

Отметим, что для того, чтобы иметь представление (1.1) в полосе $\lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+$ для $\psi(\lambda)$, нужно дополнительно предположить конечность $E\xi^2(1)$, если $\lambda_-\lambda_+ = 0$.

2. $\limsup\limits_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+}} \dfrac{\left|E\exp\{\lambda\xi(1)\}\right|}{E\exp\{\operatorname{Re}\lambda\xi(1)\}} < 1.$

Это условие является усилением свойства хребтовости функции $\psi(\lambda)$ (см. [10]). Оно эквивалентно следующему: при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $|\operatorname{Im}\lambda| > \delta$, $\lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_-$:

$$\psi(\operatorname{Re}\lambda) \ge \operatorname{Re}\psi(\lambda) + \varepsilon.$$

Достаточными условиями, обеспечивающими выполнение условия 2, будут, в частности, неравенство $\omega^2 > 0$ или наличие абсолютно непрерывной компоненты у $S(x)$.

Далее приведем некоторые дополнительные условия, которые будут в последующем накладываться на процесс, хотя они будут появляться неодновременно:

А $\quad \omega^2 > 0$.

$А_1$. $\quad \omega^2 > 0, |\psi_4(\lambda)| = \left|\psi(\lambda) - \alpha\lambda - \dfrac{\omega^2\lambda^2}{2}\right| \le C|\lambda|^{2-p},$ при $\lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+$, некотором $p > 0$ и некоторой постоянной С.

Б. $\omega^2 = 0, \int_{|x|<1} |x|\, dS(x) < \infty, \gamma = \alpha - \int\limits_{-\infty}^{\infty} x dS(x) \ne 0.$

$Б_1$. Выполняется условие Б, $S(x)$ − функция ограниченной вариации и:

$$\varlimsup_{|\lambda|\to\infty} \frac{|\psi_2(\lambda)|}{\psi_2(\operatorname{Re}\lambda)} < 1 \quad \text{при } \lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+, \tag{1.2}$$

где

$$\psi_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} dS(x) - S(+0) + S(-0).$$

Условие $А_1$ является ограничением на поведение спектральной функции $S(x)$ в окрестности точки $x = 0$. Например, если $\int_{|x|<1} |x|\, dS(x) < \infty$, то условие $А_1$ выполняется с $p = 1$.

Условия Б означает, что случайный процесс $\xi(t)$ является процессом с ограниченной вариацией и с ненулевым сносом, т.е. с вероятностью единица его траектории имеют ограниченную вариацию на каждом конечном интервале. Отметим также, что из условия (1.2) вытекает выполнение условия 2, и наличие абсолютно непрерывной компоненты у $S(x)$ является достаточным условием для выполнения (1.2).

Приведем некоторые свойства функции $\psi(\lambda)$ в полосе аналитичности, известные из [6]. Функция $\psi(\lambda)$ аналитична внутри полосы $\lambda_- \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_+$. Кроме того, она является выпуклой при $\lambda_- \le \lambda \le \lambda_+$. Ввиду этого она достигает минимума на этом отрезке. Пусть λ_0-точка минимума функции $\psi(\lambda)$ на $[\lambda_-, \lambda_+]$, $u_0 = \psi(\lambda_0)$. Из выпуклости следует, что уравнение $\psi(\lambda) = u$ имеет не более двух корней $\lambda_+(u) \ge \lambda_-(u)$. При этом $\lambda_0 \le \lambda_+(u) \le \lambda_+$ при $u_0 \le u \le \psi(\lambda_+) = u_+$ и $\lambda_- \le \lambda_-(u) \le \lambda_0$ при $u_0 \le u \le \psi(\lambda_-) = u_-$. В случае $u_0 = u_+$, имеет место $\lambda_0 = \lambda_+$ и определена только функция $\lambda_-(u)$. При $u_0 = u_-$ определена только функция $\lambda_+(u)$. Если $u_0 < u_+$, $u_0 < u_-$, т.е. $\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+$, то определены обе функции $\lambda_+(u)$ и $\lambda_-(u)$.

Мы будем рассматривать только последний случай, когда определены обе функции $\lambda_+(u)$ и $\lambda_-(u)$. Функции $\lambda_\pm(u)$ аналитически продолжаются в области:

$$U^{\pm}_{\varepsilon_1,\varepsilon} = \left\{u : u_0 - \varepsilon_1 < \operatorname{Re} u < u_\pm - \varepsilon_2,\ \left|\operatorname{Im} u\right| < \varepsilon\right\} \setminus \left\{u : u_0 - \varepsilon_1 < \operatorname{Re} u = u \le u_0\right\},$$

где ε-любое достаточно малое число, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon_2(\varepsilon) > 0$ и $\varepsilon_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. При этом полученные продолжения остаются решениями уравнения $u = \psi(\lambda)$. Функции $\lambda_-(u)$ и $\lambda_+(u)$ являются ветвями двузначной аналитической функции с точкой ветвления $u = u_0$. Внутри указанных областей функции $\lambda_\pm(u)$ являются аналитическими и однолистными. В окрестности точки u_0 справедливы разложения:

$$\lambda_\pm(u) = \lambda_0 \pm \alpha_1\sqrt{u-u_0} + \alpha_2(u-u_0) + \ldots \tag{1.3}$$
$$\alpha_1 = \sqrt{2/\psi''(\lambda_0)}, \;\; \alpha_2 = -\psi'''\Big(\lambda_0/3\big(\psi''(\lambda_0)\big)\Big)^2.$$

Здесь корень квадратный понимается в смысле главного значения.

Далее рассмотрим функцию:

$$\psi_3(\lambda) = \begin{cases} \alpha\lambda + \dfrac{\omega^2\lambda^2}{2} - u_1, & \omega^2 > 0, \\ \gamma\lambda - u_1, & \omega^2 = 0, \end{cases}$$

где $u_1 > 0$ выбирается так, чтобы $\psi(\lambda_0) - \max\{\psi_3(\lambda_-), \psi_3(\lambda_+)\} > 1$. Эта функция обладает всеми упоминавшимися свойствами функции $\psi(\lambda)$. В частности, при $u > -u_1$, $\omega^2 > 0$ определены решения $\mu_\pm(u)$ уравнения $u = \psi_3(\lambda)$. Если $\omega^2 = 0$, то определена одна из функций $\mu_\pm(u)$ в зависимости от знака γ.

Если выполняется условие Б_1, то в качестве u_1 выбирается $\int\limits_{-\infty}^{0-} dS(x) + \int\limits_{0+}^{\infty} dS(x)$. При этом все необходимые свойства функции $\psi_3(\lambda)$ сохраняются.

Обозначим при $\operatorname{Im} u = 0$:

$$\bar{\lambda}_\pm(u) = \begin{cases} \lambda_+(u), & u_0 < u < u_\pm, \\ \lambda_0, & u \le u_0, \\ \lambda_\pm, & u \ge u_\pm, \end{cases}$$

и при $\delta > 0$, $\operatorname{Im} u = 0$:

$$\lambda_{\delta+}(u) = \min\left\{\bar{\lambda}_+(u) + \delta, \lambda_+\right\},$$
$$\lambda_{\delta-}(u) = \max\left\{\bar{\lambda}_-(u) - \delta, \lambda_-\right\}.$$

Следующие утверждения доказаны в $[6]$.

Лемма 1. 1. *Пусть выполняются условия* А *или* Б. *Функция* $\psi_1(\lambda,u)=(u-\psi(\lambda))/(u-\psi_3(\lambda))$ *при* $\operatorname{Re}u>u_0$ *допускает каноническую факторизации* $\psi_1(\lambda,u)=\psi_{1+}(\lambda,u)\psi_{1-}(\lambda,u)$ *в полосе*

$\bar{\lambda}_-(\operatorname{Re}u)+\delta_1\le\operatorname{Re}\lambda\le\bar{\lambda}_+(\operatorname{Re}u)-\delta_1$ *для любого* $\delta_1>0$ *т.е.* $\psi_{1+}^{\pm1}(\lambda,u)\in B_+\left(\bar{\lambda}_+(\operatorname{Re}u)-\delta_1\right)$, $\psi_{1-}^{\pm1}(\lambda,u)\in B_-\left(\bar{\lambda}_-(\operatorname{Re}u)+\delta_1\right)$. *При этом существует такое* $\delta>0$, *что при* $\operatorname{Re}u>u_0$.

$$\psi_{1+}(\lambda,u)\in B_+(\lambda_{\delta+}(\operatorname{Re}u)),\quad \psi_{1-}(\lambda,u)\in B_-(\lambda_{\delta-}(\operatorname{Re}u)).$$

Компоненты факторизации являются аналитическими функциями по совокупности переменных u,λ *во внутренности указанных областей.*

Лемма 1. 2. *Пусть выполняются условия* А *или* Б. *Тогда существуют числа* $\varepsilon>0$, $\varepsilon_1>0$, $\delta>0$ *такие, что при* $u\in U^+_{\varepsilon_1,\varepsilon}=\{u:u_0-\varepsilon_1<\operatorname{Re}u<u_+-\varepsilon_2,\ |\operatorname{Im}u|<\varepsilon\}$, *где* $\varepsilon_2=\varepsilon_2(\varepsilon)\to0$ *при* $\varepsilon\to0$,

$$\left[\psi_{1+}(\lambda,u)\frac{\lambda-\lambda_+-1}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{\pm1}\in B_+(\lambda_{\delta+}(\operatorname{Re}u)),$$

при $u\in U^-_{\varepsilon_1,\varepsilon}=\{u:u_0-\varepsilon_1<\operatorname{Re}u<u_--\varepsilon_2,|\operatorname{Im}u|<\varepsilon\}$

$$\left[\psi_{1-}(\lambda,u)\frac{\lambda-\lambda_-+1}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{\pm1}\in B_-(\lambda_{\delta-}\operatorname{Re}u)).$$

Функции:

$$\left[\psi_{1+}(\lambda,u)\frac{\lambda-\lambda_+-1}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{\pm1},\ \left[\psi_{1-}(\lambda,u)\frac{\lambda-\lambda_-+1}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{\pm1}$$

аналитичны по совокупности переменных u,λ *и равномерно ограничены (по норме) в указанных областях значений* u *и* λ.

Лемма 1.3. *Пусть выполняются условия* A_1 *или* $Б_1$. *Тогда существуют числа* $\varepsilon > 0,\ \varepsilon_1 > 0, \delta > 0$ *такие, что при* $u \in \tilde{U}_{\varepsilon_1,\varepsilon} = \{u : \operatorname{Re} u > u_0 - \varepsilon_1\} \setminus$

$$\{u : u_0 - \varepsilon_1 < \operatorname{Re} u < \max(u_+, u_-) + \varepsilon_1, |\operatorname{Im} u| < \varepsilon\}$$

функция $\psi_1(\lambda, u)$ *допускает каноническую факторизацию* $\psi_1(\lambda,u) = \psi_{1+}(\lambda,u)\psi_{1-}(\lambda,u)$ *в полосе* $\lambda_{\delta-}(\operatorname{Re} u) \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_{\delta+}(\operatorname{Re} u)$. *Функции* $[\psi_{1+}(\lambda,u)]^{\pm 1}$, $[\psi_{1-}(\lambda,u)]^{\pm 1}$ *равномерно ограничены по* u, λ $u \in \tilde{U}_{\varepsilon_1,\varepsilon}$, $\lambda_{\delta-}(\operatorname{Re} u) \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_{\delta+}(\operatorname{Re} u)$.

Компоненты безгранично делимой факторизации $r_u(\lambda) = r_{u+}(\lambda) r_{u-}(\lambda)$ и конической факторизации $\psi_1(\lambda,u) = \psi_{1+}(\lambda,u)\psi_{1-}(\lambda,u)$ связаны следующими равенствами:

при $\operatorname{Re} u > 0,\ \operatorname{Re}\lambda \le 0$:

$$r_{u+}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)}{\psi_{1+}(\lambda,u)(\mu_+(u) - \lambda)}, & \textit{если } \omega^2 > 0 \\ & \textit{или } \omega^2 = 0,\ \gamma > 0, \\ \dfrac{\psi_{1+}(0,u)}{\psi_{1+}(\lambda,u)}, & \textit{если } \omega^2 = 0, \gamma < 0; \end{cases}$$

при $\operatorname{Re} u > 0,\ \operatorname{Re}\lambda \ge 0$:

$$r_{u-}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\psi_{1-}(0,u)\mu_-(u)}{\psi_{1-}(\lambda,u)(\mu_-(u) - \lambda)}, & \textit{Íńëč } \omega^2 > 0 \\ & \textit{čëč } \omega^2 = 0,\ \gamma < 0, \\ \dfrac{\psi_{1-}(0,u)}{\psi_{1-}(\lambda,u)}, & \textit{Íńëč } \omega^2 = 0, \gamma > 0; \end{cases} \qquad (1.4)$$

З а м е ч а н и е . В лемме 1.2 число $\delta > 0$ выбирается так, что при $u \in U^+_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ уравнение $u = \psi(\lambda)$ имеет единственное решение $\lambda_+(u)$ в полосе $\lambda_0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_{\delta+}(\operatorname{Re} u)$, а при $u \in U^-_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ - единственное решение $\lambda_-(u)$ в полосе $\lambda_{\delta-}(\operatorname{Re} u) \le \lambda \le \lambda_0$. В лемме 1.3 $\delta > 0$ удовлетворяет условию, что при $u \in \tilde{U}_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ уравнение $u = \psi(\lambda)$ не имеет решений в полосе $\lambda_{\delta-}(\operatorname{Re}\lambda) \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_{\delta+}(\operatorname{Re} u)$.

§ 2. Факторизационные тождества для двойных преобразований

Для произвольных положительных чисел a и b определим случайную величину:

$$T = T(a,b) = \inf\left\{t : \xi(t) \notin \left[-a,b\right)\right\}.$$

Случайная величина T есть момент первого выхода случайного процесса $\xi(t)$ из $\left[-a,b\right)$. Полагаем $T=\infty$, если $\xi(t)\in\left[-a,b\right)$ для всех t. Известно, что $\mathrm{P}(T<\infty)=1$, если распределение $\xi(1)$ не является вырожденным в нуле, и $\mathrm{E}T^k<\infty$ при всех $k>0$.

В работе будут получены полные асимптотические разложения (п.а.р.) вероятностей:

$$\begin{gathered}\mathrm{P}(\xi(t)\in D_1,\, T>t),\quad D_1\subset\left[-a,b,\right)\\ \mathrm{P}(\xi(T)\in D_2,\, T<t),\; D_2\subset\left(-\infty,-a\right) \text{ или } \left[b,\infty\right)\end{gathered} \qquad (2.1)$$

при $t\to\infty$, при условии, что число $a+b$ растет согласованно с t. Отдельно рассматриваются случаи $a\to\infty$, $b\to\infty$; $a=const$, $b\to\infty$ и $a\to\infty$, $b=const$. Как было сказано во введении, исследование будет состоять из нескольких этапов. На первом этапе будут изложены факторизационные тождества для двойных преобразований над распределениями (2.1). При этом на исходный процесс не накладываются никакие ограничения. Упомянутые выше условия нам понадобятся позже для целей асимптотического анализа.

Введем обозначения:

$$H(u,D_1)=\int_0^\infty e^{-ut}\mathrm{P}(\xi(t)\in D_1,\, T>t)dt,\quad \mathrm{Re}\,u>0,$$

$$\Pi(u,D_2)=\int_0^\infty e^{-ut}\mathrm{P}(\xi(T)\in D_2,\, T\in dt),\quad \mathrm{Re}\,u\ge 0,$$

$$V(u,\lambda)=\int_{-a}^{b-0} e^{\lambda x}H(u,dx), \quad \operatorname{Re}\lambda=0, \quad \operatorname{Re}u>0,$$

$$\begin{aligned} V_+(u,\lambda) &= \int_b^{\infty} e^{\lambda x}\Pi(u,dx), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{Re}\lambda=0, \quad \operatorname{Re}\geq 0. \\ V_-(u,\lambda) &= \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\Pi(u,dx), \end{aligned}$$

Известно [11], что введенные двойные преобразования существуют при $\operatorname{Re}(u-\psi(\lambda))>0$ и связаны соотношением:

$$(u-\psi(\lambda))V(u,\lambda)=1-V_-(u,\lambda)-V_+(u,\lambda). \qquad (2.2)$$

Если функция g представима при некотором v, $\operatorname{Re}\lambda=v$ в виде интеграла Фурье-Стилтьеса:

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x}dG(x), \qquad (2.3)$$

то положим по определению:

$$\left[g(\lambda)\right]^D=\int_D e^{\lambda x}dG(x)$$

для любого измеримого $D\subset R$. В работе [12] доказано, что при $\operatorname{Re}u>0$, $\operatorname{Re}\lambda\leq 0$:

$$V_+(u,\lambda)=r_{u+}^{-1}(\lambda)\left[r_{u+}(\lambda)(1-V_-(u,\lambda))\right]^{[b,\infty)}. \qquad (2.4)$$

Аналогично, при $\operatorname{Re}u>0$, $\operatorname{Re}\lambda\geq 0$:

$$V_-(u,\lambda)=r_{u-}^{-1}(\lambda)\left[r_{u-}(\lambda)(1-V_+(u,\lambda))\right]^{(-\infty,-a)}. \qquad (2.5)$$

Пусть функция g допускает представление (2.3). Определим для произвольных вещественных t операторы A_t и B_t следующим образом:

$$A_t g(u,\lambda) = r_{u-}^{-1}(\lambda)\left[r_{u-}(\lambda)g(\lambda)\right]^{(-\infty,t)}.$$
$$B_t g(u,\lambda) = r_{u+}^{-1}(\lambda)\left[r_{u+}(\lambda)g(\lambda)\right]^{[t,\infty)},$$

и пусть $A = A_{-a}$. $B = B_b$. Тогда соотношения (2.4), (2.5) перепишутся в виде:

$$V_+(u,\lambda) = Be(u,\lambda) - BV_-(u,\lambda), \tag{2.6}$$
$$V_-(u,\lambda) = Ae(u,\lambda) - AV_+(u,\lambda), \tag{2.7}$$

где $e(\lambda) \equiv 1$. Подставляя (2.7) в (2.6) и, наоборот (2.6) в (2.7), получим:

$$V_+(u,\lambda) = Be(u,\lambda) - BAe(u,\lambda) + BAV_+(u,\lambda), \tag{2.8}$$
$$V_-(u,\lambda) = Ae(u,\lambda) - ABe(u,\lambda) + ABV_-(u,\lambda). \tag{2.9}$$

Подставляя в правые части (2.8), (2.9) эти же выражения для $V_\pm(u,\lambda)$, имеем при любом $k \ge 0$:

$$V_+(u,\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (BA)^i (B - BA) e(u,\lambda) + (BA)^{k+1} V_+(u,\lambda), \tag{2.10}$$

$$V_-(u,\lambda) = \sum_{i=0}^{k} (BA)^i (B - BA) e(u,\lambda) + (BA)^{k+1} V_-(u,\lambda), \tag{2.11}$$

Далее продемонстрируем другой способ получения этих тождеств, который позволяет выяснить вероятностный смысл отдельных слагаемых в (2.10), (2.11). Здесь рассматриваются также процессы общего вида. Доказываемая здесь теорема 2.1, может служить также инструментом для исследования, так называемых, осциллирующих случайных процессов, т.е. тех процессов, которые меняют свои характеристики при поочередном достижении границ некоторого интервала (§ 8), и для изучения числа пересечений полосы траекторией однородного процесса с независимыми приращениями (§ 9) .

Рассмотрим произвольный случайный процесс $\eta(t)$, $t \geq 0$, и марковский момент τ, возможно, несобственный. Обозначим $\xi(t) = \eta(\tau + t) - \eta(\tau)$, $t \geq 0$, и предположим, что ξ - однородный случайный процесс с независимыми приращениями, выборочные траектории которого непрерывны справа. Будем считать также, что процесс ξ не зависит от поведения процесса η до момента τ включительно.

Для произвольного вещественного x на событии $\{\tau < \infty\}$ определим случайные величины:

$$\tau_+(x) = \inf\{t \geq \tau : \eta(t) \geq x\},$$
$$\tau_-(x) = \inf\{t \geq \tau : \eta(t) < x\},$$

полагая всегда $\inf \varnothing = \infty$. Объектом изучения является совместное распределение пары случайных величин $(\tau_\pm(x), \eta(\tau_\pm(x)))$, на множестве $\{\tau_\pm(x) < \infty\}$. Для функций:

$$f_x^\pm(u,\lambda) = E\Big(\exp\{-u\tau_\pm(x) + \lambda\eta(\tau_\pm(x))\}; \tau_\pm(x) < \infty\Big),$$

определенных при $Reu > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, найдем представления в терминах функции:

$$f(u,\lambda) = E\Big(exp\{-u\tau + \lambda\eta(\tau)\}; \tau < \infty\Big),$$

и вероятностных характеристик процесса $\xi(t)$, что составляет содержание теоремы 2.1.

Теорема 2.1. *При* $Reu > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *справедливы равенства:*

$$f_x^+(u,\lambda) = B_x(u,\lambda), \quad f_x^-(u,\lambda) = A_x(u,\lambda).$$

Доказательство проводится способом, описанным в [9,12]. Для произвольного натурального m построим случайное блуждание с дискретным временем $S_n^{(m)} = \xi\left(n/2^m\right),\ n \ge 0,$ которое порождается суммами независимых одинаково распределенных случайных величин:

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n}\left[\xi\left(k/2^m\right) - \xi\left(k-1\right)/2^m\right)\right].$$

Пусть:

$$\tau^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} kI_{k,m},$$

где через $I_{k,m}$ обозначен индикатор события $\left\{(k-1)/2^m < \tau \le k/2^m\right\}$. Событие$\left\{\tau^{(m)} \le k\right\} = \left\{\tau \le k/2^m\right\}$ при любом k не зависит от σ - алгебры, порожденной случайными величинами:

$$\xi\left((k+1)/2^m\right) - \xi\left(k/2^m\right), \xi\left((k+2)/2^m\right) - \xi\left((k+1)/2^m\right), \ldots,$$

и потому к последовательности $\left\{S_n^{(m)}\right\}$ и случайной величине $\tau^{(m)}$ применима теорема 1 [13]. Пусть:

$$\tau_+^{(m)}(x) = \inf\left\{k \ge \tau^m : S_k^{(m)} \ge x\right\},$$

$$\tau_-^{(m)}(x) = \inf\left\{k \ge \tau^m : S_k^{(m)} \le x\right\},$$

$$f_x^{(m)\pm}(z,\lambda) = E\left(z^{\tau_\pm^{(m)}(x)} \exp\left\{\lambda S_{\tau_\pm^{(m)}(x)}^{(m)}\right\};\ \tau_\pm^{(m)}(x) < \infty\right),$$

$$f^{(m)}(z,\lambda) = E\left(z^{\tau^{(m)}} \exp\left\{\lambda S_{\tau^{(m)}}^{(m)}\right\}; \tau^{(m)} < \infty\right),$$

$R_{z+}^{(m)}(\lambda), R_{z-}^{(m)}(\lambda)$ - компоненты канонической факторизации функции $1 - zE\,exp\left\{\lambda S_1^{(m)}\right\}$, при $|z| < 1,\ \operatorname{Re}\lambda = 0$. Тогда в силу теоремы 1[13]:

$$f_x^{(m)+}(z,\lambda) = R_{z+}^{(m)}(\lambda)\left[\left(R_{z+}^{(m)}(\lambda)\right)^{-1} f^{(m)}(z,\lambda)\right]^{[x,\infty)},$$

$$f_x^{(m)-}(z,\lambda)=R_{z-}^{(m)}(\lambda)\left[\left(R_{z-}^{(m)}(\lambda)\right)^{-1}f^{(m)}(z,\lambda)\right]^{(-x,\infty]}.$$

.

Моменты $\tau^{(m)}, \tau_{\pm}^{(m)}(x)$ обладают, очевидно, следующими свойствами: $\tau^{(m)}\ge\tau$, $\tau_{\pm}^{(m)}\ge\tau_{\pm}(x)$, $\tau^{(m)}\to\tau$, $\tau_{\pm}^{(m)}(x)\to\tau_{\pm}(x)$, при $m\to\infty$ с вероятностью единица. Утверждения теоремы получаются из последних тождеств предельным переходом, при $m\to\infty$, $z=\exp\left\{-u2^{-m}\right\}$. Все обоснования такого перехода содержатся в $[9,12]$. Теорема доказана.

Получим теперь в качестве следствий теоремы 2.1 тождества (2.6) – (2.7). Пусть процесс $\eta(t)$ совпадает с $\xi(t)$ и

$$\tau_+(b)=\inf\left\{t>0:\xi(t)\ge b\right\}.$$
$$\tau_-(-a)=\inf\left\{t>0:\xi(t)<-a\right\}.$$

Тогда, полагая $a=\infty$ в (2.4) имеем:
$$\mathrm{E}(e^{-u\tau_+(b)+\lambda\xi(\tau_+(b))};\,\tau_+(b)<\infty)=Be(u,\lambda)=\mathrm{E}(e^{-ur_+(b)+\lambda\xi(\tau_+(b))};\,T=\tau_+(b)<\infty)$$
и, аналогично, если положить $b=\infty$ в (2.5),

$$\mathrm{E}(e^{-u\tau_-(-a)+\lambda\xi(\tau_-(a))};\,\tau_-(a)<\infty)=Ae(u,\lambda)=V_-(u,\lambda)+AV_+(u,\lambda).$$

Теперь мы можем дать вероятностную интерпретацию разложений (2.10) и (2.11). Так, первое слагаемое $Be(u,\lambda)$ в (2.10) соответствует траекториям случайного процесса, когда-либо достигшим множества $[b,\infty)$, слагаемое $BAe(u,\lambda)$ отвечает траекториям, когда-либо достигшим множества $(-\infty,-a)$, а затем достигшим $[b,\infty)$ и т.д. В слагаемом $(BA)^{k+1}V_+(u,\lambda)$ ведется пересчет траекторий, которые, впервые выйдя из интервала $[-a,b)$ через верхнюю границу, впоследствии $k+1$ раз проделывают путь в $(-\infty,-a)$ и обратно.

§ 3. Асимптотические представления для преобразований в случае роста двух границ

В этом параграфе предполагаются выполненными условия А или Б. Используя факторизационные тождества (2.8), (2.9) и свойства компонент факторизации, описанные в § 1, мы выделим здесь главные члены асимптотики функций П и H при $a\to\infty,\ b\to\infty$ в окрестности точки u_0 с оценкой остаточных членов.

Пусть $U_\varepsilon=\{u:u_0<\operatorname{Re}u<u_0+\varepsilon,|\operatorname{Im}u|<\varepsilon\}$. Обозначим:

$$v_u(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_+(u))r_{u+}(\lambda)}{\lambda_+(u)},\ \ \omega_u(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_-(u))r_{u-}(\lambda)}{\lambda_-(u)},$$

$$\frac{v_u(\lambda_+(u))}{v_u(\lambda)}=\int_0^\infty e^{\lambda x}F_+(u,dx),\ \operatorname{Re}\lambda\le\lambda_+,$$

$$\frac{\omega_u(\lambda_-(u))}{\omega_u(\lambda)}=\int_{-\infty}^0 e^{\lambda x}F_-(u,dx),\ \operatorname{Re}\lambda\ge\lambda_-,$$

$$\mu(u)=\exp\{\lambda_-(u)-\lambda_+(u)\},\ H(u)=H_1(u)H_2(u),$$

$$H_1(u)=\frac{\omega_u(\lambda_-(u))}{\omega_u(\lambda_+(u))},\ H_2(u)=\frac{v_u(\lambda_+(u))}{v_u(\lambda_-(u))}.$$

Принадлежность $v_u^{-1}(\lambda)\in B_+(\lambda_+),\ \omega_u^{-1}(\lambda)\in B_-(\lambda_-)$ при $u\in U_\varepsilon$ следует из свойств компонент факторизации и соотношений (1.4) (см. лемму 3.3 ниже).

Теорема 3.1. *Пусть выполняется условие* А *или* Б. *Тогда существуют числа* $\varepsilon>0$ *и* $\delta>0$ *такие, что при любых* $x\ge0,\ u\in U_\varepsilon$ *и достаточно больших (д.б.)* $a+b$ *равномерно по и справедливы представления:*

$$\Pi(u,[x+b,\infty))=\frac{\exp\{-b\lambda_+(u)\}(1-\mu^a(u)H_1(u))}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}F_+(u,[x,\infty))+$$
$$+e^{-\lambda_0(x+b)}\left[O(e^{-\delta(x+b)})+O(e^{-\delta(x+a)})\right], \tag{3.1}$$

$$\Pi(u,(-\infty,-x-a))=\frac{\exp\left\{a\lambda_-(u)\right\}(1-\mu^b(u)H_2(u))}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}F_-(u,(-\infty,-x))+$$
$$+e^{\lambda_0(x+a)}\left[O(e^{-\delta(x+a)})+O(e^{-\delta(x+b)})\right]. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняется условие* А *или* Б, *и пусть* $-a<x_1<x_2<b,\ x_1+a\to\infty,\ b-x_2\to\infty.$ *Тогда найдутся числа* $\varepsilon>0,\ \delta>0$ *такие, что при* $u\in U_\varepsilon$ *и д.б.* $a+b$ *равномерно по и справедливы представления:*

$$uH(u,A)=u\int_0^\infty e^{-ut}\mathrm{P}(\xi(t)\in[x_1,x_2))dt-\frac{\mu^b(u)(1-\mu^a(u)H_1(u))}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}$$
$$(\exp\left\{-\lambda_-(u)x_2\right\}-\exp\left\{-\lambda_-(u)x_1\right\})F_3(u)-\frac{\mu^a(u)(1-\mu^b(u)H_2(u))}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}$$
$$(\exp\left\{-\lambda_+(u)x_1\right\}-\exp\left\{-\lambda_+(u)x_2\right\})F_4(u)+\delta(u)\left[O(e^{-\lambda_0x_2-\delta d})+O(e^{-\lambda_0x_1-\delta d})\right],$$

где

$$F_3(u)=\lambda_+(u)v_u(\lambda_+(u))\omega_u(\lambda_-(u))(\lambda_+(u)-\lambda_-(u))^{-1},$$
$$F_4(u)=\lambda_-(u)v_u(\lambda_+(u))\omega_u(\lambda_-(u))(\lambda_+(u)-\lambda_-(u))^{-1},$$
$$\delta(u)=\begin{cases}\sqrt{u}, & \text{если}\quad \lambda_0=0,\\ (u-u_0)^{-\frac{1}{2}}, & \text{если}\quad \lambda_0\neq 0,\end{cases}$$
$$d=\min\left\{a,b,a+x_1,b-x_2\right\}.$$

Нетрудно заметить, что главные части асимптотических формул для $\Pi(u,B)$ и $H(u,A)$ аналитически продолжаются в область $U_{\varepsilon_1,\varepsilon}$, при некотором $\varepsilon_1>0$ (см. соотношения (1.4) и лемму 1.2).

При $a=\infty,\ x=0,\ \Psi_+(\lambda,u)=\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)v_u^{-1}(\lambda)$ из теоремы 3.1 получим следующее

Следствие 3.1. *При* $u\in U_\varepsilon$ $u\int_0^\infty e^{-ut}\mathrm{P}(\overline{\xi}(t)\geq b)dt$

$$=\psi_+(0,u)\psi_+^{-1}(\lambda_+(u),u)e^{-\lambda_+(u)b}+e^{-\lambda_0 b}O\left(e^{-\delta b}\right)$$

Это утверждение известно также из $[6]$.

В качестве следующего следствия из теоремы 3.1 можно получить асимптотические разложения для распределения величины первого перескока через границы интервала при $E\xi(1)=0$. В этом случае $u_0=0,\ \lambda_0=0$ и достаточно устремить u к нулю в (3.1) и (3.2).

Пусть в окрестности точки $u=0$:

$$H_1(u)=1+v_1u^{1/2}+\ldots,\ H_2(u)=1+\zeta_1u^{1/2}+\zeta_2u+\ldots,$$
$$H(u)=1+\eta_1u^{1/2}+\eta_2u+\ldots. \tag{3.3}$$

Следствие 3.2. *Если* $E\xi(1)=0$*, то существует число* $\delta>0$ *такое, что при* $x\geq 0$ *и д.б.* $a+b$ $P\left(\xi(T)\geq b+x\right)$

$$=\frac{a-v_1/(2\alpha_1)}{b+a-\eta_1/(2\alpha_1)}F_+\left(0,[x,\infty)\right)+O\left(e^{-\delta(b+x)}\right)+O\left(e^{-\delta(a+x)}\right),$$

$$P\left(\xi(T)\leq -a-x\right)$$

$$=\frac{b-\zeta_1/(2\alpha_1)}{b+a-\eta_1/(2\alpha_1)}F_-\left(0,(-\infty,-x)\right)+O\left(e^{-\delta(b+x)}\right)+O\left(e^{-\delta(a+x)}\right).$$

Для доказательства теорем приведем ниже несколько лемм.

Следующие леммы 3.1, 3.2 доказаны в $[2]$.

Лемма 3.1. *Если* $\{v_u\}$ *- совокупность функций из* $B(\mu_-,\ \mu_+)$*, равномерно ограниченных по норме, то в представлении:*

$$v_u(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}d\omega_u(x),\quad \omega_u(0)=0$$

$$|\omega_u(t)|=\omega_u+O\left(e^{-\mu_+t}\right)\quad при\quad t\to+\infty,$$

$$|\omega_u(t)|=\omega_u+O\left(e^{-\mu_-t}\right)\quad при\quad t\to-\infty.$$

Оценки являются равномерными по и, $|\omega_u| < C$ *и не зависит от* t.

Лемма 3.2. *Если* $\{v_u\}$ *- совокупность функций из* $B(\mu_-, \mu_+)$, *равномерно ограниченных по норме и*

$$v_u(\mu_0(u)) = 0, \quad \mu_- \le \mu_0(u) \le \mu_+, \text{ то } \frac{v_u(\lambda)}{\lambda - \mu_0(u)} \in R(\mu_-, \mu_+),$$

и в представлении $\dfrac{v_u(\lambda)}{\lambda - \mu_0(u)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} p_u(x)\,dx$

$$|p_u(x)| = O\left(e^{-\mu_+ x}\right), \quad x \to +\infty,$$

$$|p_u(x)| = O\left(e^{-\mu_- x}\right), \quad x \to -\infty.$$

равномерно по u.

Лемма 3.3. *При некоторых* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *для* $u \in U_\varepsilon$ *если* $\omega^2 > 0$, *то:*

$$v_u(\lambda)(\lambda - \lambda_+ - 1)^{-1} \in R_+(\lambda_0 + \delta), v_u^{-1}(\lambda) \in B_+(\lambda_0 + \delta),$$

$$\omega_u(\lambda)(\lambda - \lambda_+ + 1)^{-1} \in R_-(\lambda_0 - \delta), w_u^{-1}(\lambda) \in B_-(\lambda_0 - \delta);$$

если $\omega^2 = 0, \gamma > 0$, *то:*

$$v_u(\lambda)(\lambda - \lambda_+ - 1) \in B_+(\lambda_0 + \delta), \ v_u^{-1}(\lambda) \in R_+(\lambda_0 + \delta),$$

$$\omega_u(\lambda)(\lambda - \lambda_+ + 1) \in R_-(\lambda_0 - \delta), \omega_u^{-1}(\lambda) \in B_-(\lambda_0 - \delta);$$

Все эти функции аналитичны внутри U_ε, *непрерывны и равномерно ограничены по норме, включая границу* $\operatorname{Re} u = u_0$.

Доказательство этой леммы непосредственно следует из леммы 1.2 и соотношений (1.4), которые связывают компоненты безгранично делимой и канонической факторизаций, соответственно, функций $r_u(\lambda)$ и $\psi_1(\lambda, u)$.

Действительно, например, если $\omega^2 > 0$, то

$$\frac{v_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_+ - 1} = \frac{(\lambda - \lambda_+(u)) r_{u+}(\lambda)}{\lambda_+(u)(\lambda - \lambda_+ - 1)}$$

$$= \frac{\lambda - \lambda_+(u)}{(\lambda - \lambda_+ - 1)\psi_{1+}(\lambda, u)} \frac{\psi_{1+}(0, u)}{\lambda_+(u)} \frac{\mu_+(u)}{\mu_+(u) - \lambda},$$

$$
\begin{aligned}
v_u^{-1}(\lambda) &= \frac{\lambda_+(u)}{(\lambda-\lambda_+-1)r_{u+}(\lambda)} \\
&= \frac{\psi_{1+}(\lambda,u)(\lambda-\lambda_+-1)}{\lambda-\lambda_+(u)}\frac{\lambda_+(u)}{\psi_{1+}(0,u)}\frac{\mu_+(u)-\lambda}{(\lambda-\lambda_+-1)}.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Так как $\operatorname{Re}\mu_+(u)>\lambda_0+\delta$, $\lambda_+ +1>\lambda_0+\delta$, то

$$
\frac{\mu_+(u)}{\mu_+(u)-\lambda}\in R_+(\lambda_0+\delta),\quad \frac{\mu_+(u)-\lambda}{\lambda-\lambda_+-1}\in B_+(\lambda_0+\delta).
$$

Из леммы 1.2 получаем, что функция $\left(\dfrac{\psi_{1+}(0,u)}{\lambda_+(u)}\right)^{\pm1}$ равномерно ограничена при $u\in U_\varepsilon$ и $\dfrac{v_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_+-1}\in R_+(\lambda_0+\delta)$, $v_u^{-1}(\lambda)\in B_+(\lambda_0+\delta)$.

Здесь использован факт о том, что свертка двух функций из V, одна из которых абсолютно непрерывна, является абсолютно непрерывной. Существование указанного $\delta>0$ следует из того, что $\varepsilon>0$ можно выбирать так, что при $u\in U_\varepsilon$

$$
\lambda_{\delta+}(\operatorname{Re}u)>\lambda_0+\frac{\delta}{2},\quad \lambda_{\delta-}(\operatorname{Re}u)<\lambda_0-\frac{\delta}{2}
$$

(см. определения функций $\lambda_{\delta\pm}(u)$).

Остальные соотношения доказываются аналогично.

Исследуем асимптотику $Ag_1(u,\lambda)$ и $Bg(u,\lambda)$, где $g(u,\lambda)\in B(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$, $g_1(u,\lambda)\in B(\lambda_0-\delta,\lambda_0)$.

Лемма 3.4. *Для всякой функции* $g(u,\lambda)\in B(\lambda_0,\lambda_0+\delta)$, *равномерно ограниченной по* u, $u\in U_\varepsilon$, *имеет место представление:*

$$
Bg(u,\lambda)=\frac{v_u(\lambda_+(u))g(u,\lambda_+(u))e^{\lambda b}}{e^{\lambda_+(u)b}v_u(\lambda)}+(\lambda-\lambda_+(u))\int_b^\infty e^{\lambda x}\varphi_u(x)dx,
$$

где равномерно по u:

$$
\left|\int_x^\infty \varphi_u(t)\,dt\right| = O\!\left(e^{-(\lambda_0+\delta)x}\right),\quad x\ge b,\quad x\to\infty.
$$

Доказательство. Пусть сначала $\omega^2>0$ или $\omega^2=0$, $\gamma>0$. Тогда $v_u(\lambda)\in B_+(\lambda_0+\delta)$ (см. лемму 3.3),

$$Bg(u,\lambda)=r_{u+}^{-1}(\lambda)\left[r_{u+}(\lambda)g(u,\lambda)\right]^{[b,\infty)}=\frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda)g(u,\lambda)}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{[b,\infty)}$$

$$=\frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda_+(u))g(u,\lambda_+(u))}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{[b,\infty)}$$

$$+\frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda)g(u,\lambda)-v_u(\lambda_+(u))g(u,\lambda_+(u))}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{[b,\infty)} \qquad (3.5)$$

В числителе выражения, заключенные в квадратные скобки в последнем слагаемом, стоит функция из $B(\lambda_0+\delta)$, которая равна нулю при $\lambda_+(u)$, а в силу леммы 3.3 функция $v_u^{-1}(\lambda)\in B_+(\lambda_0+\delta)$. Так как:

$$\left[\frac{1}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{[b,\infty)}=\frac{e^{(\lambda-\lambda_+(u))b}}{\lambda-\lambda_+(u)},$$

применяя лемму 3.2 для второго слагаемого в (3.5), получим утверждение леммы.

Пусть, теперь: $\omega^2=0,\quad \gamma<0$. Тогда (см. лемму 3.3) :

$$\frac{v_u(u)}{\lambda-\lambda_+-1}\in B(\lambda_0+\delta),\qquad v_u^{-1}(\lambda)\in R_+(\lambda_0+\delta),$$

и при $u\in U_\varepsilon$:

$$Bg(u,\lambda)=\frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_+-1}\frac{\lambda-\lambda_+-1}{\lambda-\lambda_+(u)}g(u,\lambda)\right]^{[b,\infty)}$$

$$=\frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_+-1}\right]^{[b,\infty)}$$

$$+\frac{\lambda-\lambda_+(u)}{v_u(\lambda)}\left[\frac{v_u(\lambda)(\lambda_+(u)-\lambda_+-1)g(u,\lambda)}{(\lambda-\lambda_+-1)(\lambda-\lambda_+(u))}\right]^{[b,\infty)}$$

$$=\frac{v_u\left(\lambda_+(u)\right)g\left(u,\lambda_+(u)\right)e^{\lambda}}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}+\left(\lambda-\lambda_+(u)\right)\int_b^{\infty}e^{\lambda x}\varphi_u(x)dx,$$

т.е. приходим к тому же результату, что и в предыдущем случае. В силу того, что в этом случае $v_u^{-1}(\lambda)\in R_+(\lambda_0+\delta)$, из леммы 3.1 следует требуемая оценка для подледного слагаемого.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 3.5. *Для всякой функции* $g_1(u,\lambda)\in B(\lambda_0-\delta,\ \lambda_0)$, *равномерно ограниченной по* u, *при* $u\in U_\varepsilon$ *справедливо представление:*

$$Ag_1(u,\lambda)=\frac{\omega_u\left(\lambda_-(u)\right)g_1\left(u,\lambda_-(u)\right)e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}$$
$$+\left(\lambda-\lambda_-(u)\right)\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}\theta_u(u)dx,$$

где равномерно по u

$$\left|\int_{-\infty}^{t}\theta_u(x)dx\right|=O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)t}\right),\qquad t\le -a.$$

В дальнейшем, роль функции g будут выполнять e, $V_-(u,\cdot)$, а в качестве g_1 будут использоваться функции e, $V_+(u,\cdot)$. Нетрудно видеть, что во всех этих случаях, условия лемм 3.4 и 3.5, соответственно, будут выполнены. Например, при $g_1=V_+(u,\cdot)$ имеем:

$$\int_0^{\infty}e^{-\mathrm{Re}\,ut}\int_b^{\infty}e^{\lambda_0 x}P\left(\xi(T)\in dx,\ T\in dt\right)$$
$$=V_+(\mathrm{Re}\,u,\lambda_0)\le\tilde V_+(\mathrm{Re}\,u,\ \lambda_0)=Be(\mathrm{Re}\,u,\ \lambda_0)\le C<\infty,$$

где $\tilde V_+(u,\lambda)$ совпадает с $V_+(u,\lambda)$, вычисленной при $a=\infty$. Последнее равенство следует из леммы 3.4.

Доказательство теоремы 3.1. Из условия 2 следует (см. [6]), что при $\mathrm{Re}\,u>u_0$, $\bar\lambda_-(\mathrm{Re}\,u)\le\mathrm{Re}\,\lambda\le\bar\lambda_+(\mathrm{Re}\,u)$ справедливо $\mathrm{Re}\left(u-\psi(\lambda)\right)>0$. Значит при $u\in U_\varepsilon,\bar\lambda_-(\mathrm{Re}\,u)\le\mathrm{Re}\,\lambda\le\bar\lambda_+(\mathrm{Re}\,u)$ имеет место основное тождество (2.2) и его следствия (2.6), (2.7).

Применим леммы 3.4 и 3.5 к правым частям (2.6) и (2.7).

$$Be(u,\lambda)=\frac{v_u(\lambda_+(u))e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}+(\lambda-\lambda_+(u))\int_b^{\infty}e^{\lambda x}\varphi_u^{(1)}(x)dx,$$

$$BV_-(u,\lambda)=\frac{v_u(\lambda_+(u))V_-(u,\lambda_+(u))e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}+(\lambda-\lambda_+(u))\int_b^{\infty}e^{\lambda x}\varphi_u^{(2)}(x)dx,$$

$$Ae(u,\lambda)=\frac{\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}+(\lambda-\lambda_-(u))\int_{-b}^{-\infty}e^{\lambda x}\theta_u^{(1)}(x)dx,$$

$$AV_+(u,\lambda)=\frac{\omega_u(\lambda_-(u))V_+(u,\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}$$
$$+(\lambda-\lambda_+(u))\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}\theta_u^{(2)}(x)dx,$$

Здесь функции $\varphi_u^{(i)}$, $\theta_u^{(i)}$, $i=1,2$ обладают свойствами:

$$\left|\int_x^{\infty}\varphi_u^{(i)}(t)dt\right|=O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)x}\right),\ x\ge b,$$
$$\left|\int_{\infty}^{x}\theta_u^{(i)}(t)dt\right|=O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)x}\right),\ x\le -a$$

равномерно по u. Подставляя эти выражения в (2.6) и (2.7), получим:

$$V_+(u,\lambda)=\frac{v_u(\lambda_+(u))e^{\lambda b}(1-V_-(u,\lambda_+(u)))}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}+$$
$$+(\lambda-\lambda_+(u))\int_b^{\infty}e^{\lambda x}(\varphi_u^{(1)}(x)-\varphi_u^{(2)}(x))dx. \tag{3.6}$$

$$V_-(u,\lambda)=\frac{\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}(1-V_+(u,\lambda_-(u)))}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}+$$
$$+(\lambda-\lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}(\theta_u^{(1)}(x)-\theta_u^{(2)}(x))dx. \tag{3.7}$$

Эти выражения, кроме всего прочего, содержат функции $V_\pm(u,\lambda_{\mp(u)})$. Для их нахождения в (3.6) положим $\lambda=\lambda_-(u)$, а в

(3.7) $\lambda = \lambda_+(u)$. В результате чего имеем два уравнения с двумя неизвестными $V_+(u,\lambda_-(u))$ и $V_-(u,\lambda_+(u))$:

$$V_+(u,\lambda_-(u)) = H_2(u)\mu^b(u)(1 - V_-(u,\lambda_+(u))) +$$

$$+(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))\int_b^\infty e^{\lambda_-(u)x}(\varphi_u^{(1)}(x) - \varphi_u^{(2)}(x))dx, \qquad (3.8)$$

$$V_-(u,\lambda_+(u)) = H_1(u)\mu^a(u)(1 - V_+(u,\lambda_-(u)))$$

$$+(\lambda_+(u) - \lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}(\theta_u^{(1)}(x) - \theta_u^{(2)}(x))dx, \qquad (3.9)$$

Подстановкой (3.9) в (3.8) и, наоборот, (3.8) в (3.9) получаем уравнения для нахождения искомых функций $V_\pm(u,\lambda_\mp(u))$, из которых находим:

$$V_+(u,\lambda_-(u)) = \frac{H_2(u)\mu^b(u) - H(u)\mu^{b+a}(u)}{1 - \mu^{b+a}(u)H(u)} +$$

$$+\frac{H_2(u)\mu^b(u)(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))}{1 - \mu^{b+a}(u)H(u)}\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}(\theta_u^{(1)}(x) - \theta_u^{(2)}(x))dx + \qquad (3.10)$$

$$+\frac{\lambda_-(u) - \lambda_+(u)}{1 - \mu^{b+a}(u)H(u)}\int_b^\infty e^{\lambda_-(u)x}(\varphi_u^{(1)}(x) - \varphi_u^{(2)}(x))dx,$$

$$V_-(u,\lambda_+(u)) = \frac{H_1(u)\mu^a(u) - H(u)\mu^{b+a}(u)}{1 - H(u)\mu^{b+a}(u)} +$$

$$+\frac{(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))H_1(u)\mu^a(u)}{1 - \mu^{b+a}(u)H(u)}\int_b^\infty e^{\lambda_-(u)x}(\varphi_u^{(1)}(x) - \varphi_u^{(2)}(x))dx - \qquad (3.11)$$

$$-\frac{\lambda_-(u) - \lambda_+(u)}{1 - \mu^{b+a}(u)H(u)}\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}(\theta_u^{(1)}(x) - \theta_u^{(2)}(x))dx.$$

Здесь мы воспользовались неравенством:

$$\left|\mu^{b+a}(u)H_3(u)\right| < 1, \qquad u \in U_\varepsilon,$$

которое при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом $a+b$ следует из разложений функций $\lambda_\pm(u)$ в окрестности точки u_0 (см. (1.3)). Покажем, что при $u \in U_\varepsilon$ и при достаточно больших $a+b$ функции:

$$\frac{1-\mu^a(u)H_1(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)},\quad \frac{\lambda_-(u)-\lambda_+(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)},\quad \frac{1-\mu^b(u)H_2(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)} \tag{3.12}$$

равномерно ограничены. Достаточно рассмотреть целые a и b.

Действительно (см. также [4]),

$$\frac{|\lambda_+(u)-\lambda_-(u)|}{|1-\mu^{b+a}(u)H(u)|} \le \frac{|\lambda_+(u)-\lambda_-(u)|}{1-|\mu(u)|}(1+|\mu(u)|+|\mu^2(u)|+\ldots+|\mu^{b+a-1}(u)|+$$

$$+|\mu^{b+a}(u)|(1-|H(u)|)(1-|\mu(u)|)^{-1}),$$

функция $|\lambda_+(u)-\lambda_-(u)|/(1-|\mu(u)|)$ ограничена равномерно при $u\in U_\varepsilon$, а при д.б. $a+b$, $u=u_0$,

$$1+|\mu(u)|+|\mu^2(u)|+\ldots+|\mu^{b+a-1}(u)|+|\mu^{b+a}(u)|\frac{1-|H_2(u)|}{1-|\mu(u)|}>1.$$

Поскольку выражение в левой части непрерывно в окрестности точки $u=u_0$, неравенство верно и для $u\in U_\varepsilon$ при некотором $\varepsilon=\varepsilon(a+b)>0$, к тому же как функция $a+b$ эта величина не убывает. Аналогично доказывается ограниченность остальных функций в (3.12).

Оценим интегралы в правых частях (3.10) и (3.11). Пусть ε настолько мало, что $|\lambda_\pm(u)-\lambda_0|\le\dfrac{\delta}{2}$ при $u\in U_\varepsilon$. Тогда с помощью интегрирования по частям получим:

$$\left|\int_b^\infty e^{\lambda_-(u)x}\varphi_u{}^{(i)}(x)dx\right| = \left|\int_b^\infty e^{(-\lambda_0-\delta+\lambda_-(u))x}e^{(\lambda_0+\delta)x}\varphi_u{}^{(i)}(x)dx\right| =$$

$$=\left|(\lambda_0+\delta-\lambda_-(u))\int_b^\infty e^{(\lambda_-(u)-\lambda_0-\delta)x}\left(\int_b^x e^{(\lambda_0+\delta)y}\varphi_u{}^{(i)}(y)dy\right)dx\right| \le Ce^{-\frac{\delta}{2}b}$$

и аналогично,

$$\left|\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)}\theta_u{}^{(i)}(x)dx\right| \le Ce^{-\frac{\delta}{2}a},\qquad i=1,2.$$

Таким образом,

$$V_+(u,\lambda_-(u))=\frac{H_2(u)\mu^b(u)-H(u)\mu^{b+a}(u)}{1-H(u)\mu^{b+a}(u)}+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right),\quad (3.13)$$

$$V_-(u,\lambda_+(u))=\frac{H_1(u)\mu^a(u)-H(u)\mu^{b+a}(u)}{1-H(u)\mu^{b+a}(u)}+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right),\quad (3.14)$$

Подставляем (3.13) и (3.14) в (3.6) и (3.7) соответственно, в результате чего, будем иметь:

$$V_+(u,\lambda)=\frac{v_u(\lambda_+(u))e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}\left[\frac{1-H_1(u)\mu^a(u)}{1-H(u)\mu^{b+a}(u)}+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)-O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right)\right]+$$

$$+(\lambda-\lambda_+(u))\int_b^\infty e^{\lambda x}(\varphi_u{}^{(1)}(x)-\varphi_u{}^{(2)}(x))dx=$$

$$=\frac{v_u(\lambda_+(u))e^{\lambda b}}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}\cdot\frac{1-H_1(u)\mu^a(u)}{1-H(u)\mu^{b+a}(u)}+\int_b^\infty e^{\lambda x}d\rho_u(x),\qquad (3.15)$$

$$\left|\int_x^\infty d\rho_u(t)\right|=e^{-\lambda_0 x}\left[O\left(e^{-\frac{\delta}{2}x}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}(x-b+a)}\right)\right].\qquad x\ge b,$$

$$V_-(u,\lambda)=\frac{\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda}}\left[\frac{1-H_2(u)\mu^b(u)}{1-H_2(u)\mu^{b+a}(u)}+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right)\right]$$

$$+(\lambda-\lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}\left(\theta_u^{(1)}(x)-\theta_u^{(2)}(x)\right)dx$$

$$=\frac{\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}\cdot\frac{1-H_2(u)\mu^b(u)}{1-H_2(u)\mu^{b+a}(u)}+\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}d\varepsilon_u(x),\quad (3.16)$$

$$\left|\int_{-\infty}^{x}d\varepsilon_u(t)\right|=e^{-\lambda_0 x}\left[O\left(e^{\frac{\delta}{2}x}\right)+O\left(e^{\frac{\delta}{2}(x-b+a)}\right)\right].\qquad x\le -a.$$

Обращение (3.15), (3.16) по переменной λ завершает доказательства теоремы 3.1.

Доказательство теоремы 3.2. Пусть: $u \in U_\varepsilon$, $\overline{\lambda}_-(\mathrm{Re}\,u) \le \mathrm{Re}\,\lambda \le \overline{\lambda}_+(\mathrm{Re}\,u)$. При указанных значениях u, λ $\mathrm{Re}\big(u - \psi(\lambda)\big) > 0$ и в силу (2.2)

$$uV(u,\lambda) = r_u(\lambda) - r_u(\lambda)V_+(u,\lambda) - r_u(\lambda)V_-(u,\lambda).$$

Воспользуемся асимптотическими представлениями (3.15). (3.16) для $V_\pm(u,\lambda)$. Тогда:

$$uV(u,\lambda) = r_u(\lambda) - \frac{r_u(\lambda)\lambda_+(u)v_u(\lambda_+(u))e^{\lambda b}\left(1 - H_1(u)\mu^a(u)\right)}{\left(1 - H(u)\mu^{b+a}(u)e^{\lambda_+(u)b}\left(\lambda - \lambda_-(u)\right)\right.}$$

$$-\frac{r_{u-}(\lambda)\lambda_-(u)\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}\left(1 - H_2(u)\mu^b(u)\right)}{\left(1 - H(u)\mu^{b+a}(u)\right)e^{\lambda a}\left(\lambda - \lambda_-(u)\right)}$$

$$+r_u(\lambda)\int_b^\infty e^{\lambda x}d\rho_u(x) + r_u(\lambda)\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}d\varepsilon_u(x). \quad (3.17)$$

При рассматриваемых u и λ $\mathrm{Re}\big(u - \psi(\lambda)\big) > 0$, поэтому:

$$r_u(\lambda) = \frac{u}{u - \psi(\lambda)} = u\int_0^\infty e^{-(u-\psi(\lambda))t}dt = u\int_0^\infty e^{-ut}e^{t\psi(\lambda)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{\lambda x}d_x\left\{u\int_0^\infty e^{-ut}P\big(\xi(t) < x\big)dt\right\}.$$

Далее:

$$\left[\frac{e^{\lambda b}r_{u-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{[x_1,x_2]} = e^{\lambda b}\left[\frac{r_{u-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{[x_1-b,x_2-b]}$$

$$= e^{\lambda b}\left[\frac{r_{u-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{[-\infty,\, x_2-b]} - e^{\lambda b}\left[\frac{r_{u-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{[-\infty,x_1-b]}. \quad (3.19)$$

Теперь используем леммы 3.2 -3.3 и способ доказательства лемм 3.4. Рассмотрим функцию:

$$\frac{\lambda_+(u)\big(\lambda - \lambda_-(u)\big)r_{u-}(\lambda)}{\lambda_-(u)\big(\lambda - \lambda_+(u)\big)} = \frac{\lambda_+(u)\omega_u(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}.$$

В силу леммы 3.3 при $\omega^2 > 0$ или при $\omega^2 = 0, \ \gamma < 0$ она принадлежит классу $R(\lambda_0 - \delta, \ \lambda_0)$, а в случае $\omega^2 = 0$. $\gamma > 0$ она является элементом $B(\lambda_0 - \delta, \lambda_0)$ и равномерно ограничена по $u \in U_\varepsilon, \ \ \lambda_0 - \delta \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_0$. Поэтому используя лемму 3.2, имеем:

$$\left[\frac{r_{u-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{(-\infty, x_2 - b]} = \left[\frac{\lambda_-(u)\omega_u(\lambda)}{(\lambda - \lambda_+(u))(\lambda - \lambda_-(u))}\right]^{(-\infty, x_2 - b]}$$

$$= \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)}\left[\frac{\lambda_+(u)\omega_u(\lambda)}{(\lambda - \lambda_+(u))(\lambda - \lambda_-(u))}\right]^{(-\infty, x_2 - b]}$$

$$= \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)}\left[\frac{\lambda_+(u)\omega_u(\lambda_-(u))}{(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))(\lambda - \lambda_-(u))}\right]^{(-\infty, x_2 - b]}$$

$$+ \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)}\left[\frac{\lambda_+(u)\omega_u(\lambda)\lambda_+(u)\omega_u(\lambda_-(u))}{(\lambda - \lambda_+(u))(\lambda - \lambda_-(u))}\right]^{(-\infty, x_2 - b]}$$

$$= \frac{\lambda_-(u)\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda(x_2 - b)}}{(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))(\lambda - \lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)(x_2 - b)}} + \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)}\int_{-\infty}^{x_2 - b} e^{\lambda x} p_u(x)\,dx, \quad (3.20)$$

$$\left[\frac{r_{u-}-(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(u)}\right]^{(-\infty, x_1 - b)} = \frac{\lambda_-(u)\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda(x_1 - b)}}{(\lambda_-(u) - \lambda_+(u))(\lambda - \lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)(x_1 - b)}} + \frac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)}\int_{-\infty}^{x_1 - b} e^{\lambda x} p_u(x)\,dx, \quad (3.21)$$

где равномерно по u

$$\left|p_u(x)\right| = O\left(e^{-(\lambda_0 - \delta)x}\right), \qquad x \to -\infty.$$

Таким образом, подставив (3.20), (3.21) в (3.19). получаем:

$$\left[\frac{e^{\lambda b}r_{u-}(\lambda)}{\lambda-\lambda_+(u)}\right]^{[x_1,x_2)}=\frac{\lambda_-(u)\omega_u(\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)b}\left(e^{(\lambda-\lambda_-(u))x_2}-e^{(\lambda-\lambda_-(u))x_1}\right)}{(\lambda_-(u)-\lambda_+(u))(\lambda-\lambda_-(u))}+$$

$$+\frac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)}\int_{x_1-b}^{x_2-b}e^{\lambda x}p_u(x)dx. \tag{3.22}$$

Аналогично,

$$\left[\frac{r_{u+}(\lambda)e^{-\lambda a}}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{[x_1,x_2)}=e^{-\lambda a}\left[\frac{r_{u+}(\lambda)}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{[x_1+a,x_2+a)}=$$
$$=\frac{\lambda_+(u)v_u(\lambda_+(u))e^{-\lambda_+(u)a}\left(e^{(\lambda-\lambda_+(u))x_2}-e^{(\lambda-\lambda_+(u))x_1}\right)}{(\lambda_+(u)-\lambda_-(u))(\lambda-\lambda_+(u))}+\frac{\lambda_+(u)}{\lambda_-(u)}\int_{x_1+a}^{x_2+a}e^{\lambda x}q_u(x)dx, \tag{3.23}$$

где равномерно по $u\in U_\varepsilon$ $\quad |q_u(x)|=O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)x}\right),\ x\to\infty.$

Перейдем к исследованию остаточного члена в (3.17). Пусть при $\lambda_-(u)<\operatorname{Re}\lambda<\lambda_+(u)$:

$$r_u(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda x}R_u(x)dx.$$

Тогда:

$$\left[r_u(\lambda)\int_b^\infty e^{\lambda x}d\rho_u(x)\right]^{[x_1,x_2)}=\left[\int_{-\infty}^{x_2-b}e^{\lambda x}R_u(x)dx\int_b^\infty e^{\lambda x}d\rho_u(x)\right]^{(-\infty,x_2)}-$$
$$-\left[\int_{-\infty}^{x_1-b}e^{\lambda x}R_u(x)dx\int_b^\infty e^{\lambda x}d\rho_u(x)\right]^{(-\infty,x_1)}. \tag{3.24}$$

При $y<0$:

$$\int_{-\infty}^{y}e^{\lambda x}R_u(x)dx=\left[r_u(\lambda)\right]^{(-\infty,y)}=\left[\frac{\lambda_-(u)\lambda_+(u)v_u(\lambda)\omega_u(\lambda)}{(\lambda-\lambda_+(u))(\lambda-\lambda_+(u))}\right]^{(-\infty,y)}$$

$$
= \frac{\lambda_-(u)\lambda_+(u)v_u(\lambda_-(u))\omega_u(\lambda_-(u))}{\lambda_-(u)-\lambda_+(u)}\int_{-\infty}^{y} e^{(\lambda-\lambda_-(u))x}dx
$$

$$
+\lambda_-(u)\int_{-\infty}^{y} e^{\lambda x}\theta_u^{(3)}(x)\,dx,\quad \left|\theta_u^{(3)}(x)\right|\le Ce^{-(\lambda_0-\delta)x},\qquad x<y \qquad (3.25)
$$

.

Из (3.24), (3.25) в силу оценки остаточного члена в (3.15) следует:

$$
\left[r_u(\lambda)\int_b^{\infty} e^{\lambda x}d\rho_u(x)\right]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)} = \delta(u)O\left(e^{-\lambda_0 x_2}\right)\left[O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)\right].
$$

Аналогичная оценка имеет место и для последнего слагаемого в (3.17):

$$
\left[r_u(\lambda)\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}d\varepsilon_u(x)\right]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)} = \delta(u)O\left(e^{-\lambda_0 x_1}\right)\left[O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right)\right].
$$

Положим $\lambda = 0$ в (3.22), (3.23). Тогда суммарный остаточный член в (3.3) имеет вид:

$$
\lambda_-(u)e^{-\lambda_+(u)b}\left[O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)(x_2-b)}\right)+O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)(x_1-b)}\right)\right]
$$

$$
\lambda_+(u)e^{-\lambda_-(u)a}\left[O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)(x_2+a)}\right)+O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)(x_1+a)}\right)\right]
$$

$$
+\delta(u)\left[O\left(e^{-\lambda_0 x_2}\right)+O\left(e^{-\lambda_0 x_1}\right)\right]\left[O\left(e^{-\frac{\delta}{2}b}\right)+O\left(e^{-\frac{\delta}{2}a}\right)\right]
$$

$$
=\delta(u)\left[O\left(e^{-\lambda_0 x_2-\delta_1 d}\right)+O\left(e^{-\lambda_0 x_1-\delta_1 d}\right)\right],\qquad \delta_1>0.
$$

Так как:

$$
\left[uV(u,\lambda)\right]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)} = \left[r_u(\lambda)-r_u(\lambda)V_-(u,\lambda)-r_u(\lambda)V_+(u,\lambda)\right]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)},
$$

соотношения (3.22), (3.23) вместе с оценкой, полученной для остаточного члена, завершают доказательство теоремы 3.2.

§ 4. Оценки для преобразований вне окрестности точки u_0 (случай $a \to \infty,\ b \to \infty$).

Для получения п.а.р. распределений вероятностей потребуются получаемые в этом параграфе оценки для $\Pi(u, B)$ и $H(u, A)$ при $u \in \tilde{U}_\varepsilon = \{u : \operatorname{Re} u = u_0, |\operatorname{Im} u| > \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Здесь будут использованы равномерная ограниченность компонент канонической факторизации $\psi_{1+}^{\pm 1}(\lambda, u)$, $\psi_{1-}^{\pm 1}(\lambda, u)$ и их свойства при $u \in \tilde{U}_\varepsilon$, $\lambda_0 - \delta \le \operatorname{Re} \lambda \le \lambda_0 + \delta$ (см. лемму 1.3), в связи с чем предполагаются выполненными условия А_1 или Б_1. Используя лемму 3.1 и соотношения 2.6, 2.7, нетрудно получить:

$$\left|\Pi\left(u, [x, \infty)\right)\right| = O\left(e^{-(\lambda_0 + \delta)x}\right), \quad x \ge b, \qquad x \to +\infty,$$
$$\left|\Pi\left(u, [-\infty, y)\right)\right| = O\left(e^{-(\lambda_0 - \delta)y}\right), \quad y \ge -a, \qquad y \to -\infty.$$

Но для последующего применения контурного интегрирования эти оценки окажутся недостаточными, а потребуются оценки для рассматриваемых преобразований типа: $O\left(\dfrac{e^{-(\lambda_0 + \delta)x}}{|u|^{\gamma_1}}\right)$, $O\left(\dfrac{e^{-(\lambda_0 - \delta)x}}{|u|^{\gamma_1}}\right)$, соответственно, при $u \in \tilde{U}_\varepsilon$, $\gamma_1 > 0$.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* А_1 *или* Б_1*. Если* $\omega^2 = 0,\ \gamma > 0$*, то дополнительно будем предполагать:*

$$|\psi_2(\lambda)| \le C_1 |\lambda|^{-r}, \ \ 0 < r < 1, \ \ \lambda_- \le \operatorname{Re} \lambda \le \lambda_+, \qquad |\operatorname{Im} \lambda| > C_2.$$

Тогда равномерно по $u \in \tilde{U}_\varepsilon$ *при некоторых д.м.* $\varepsilon > 0, \quad \delta > 0, \ \ \gamma_1 > 0$

$$\left|\Pi\left(u, [x, \infty)\right)\right| = O\left(\frac{e^{-(\lambda_0 + \delta)x}}{|u|^{\gamma_1}}\right), \qquad x \ge b, \quad x \to \infty.$$

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия* А_1 *или* Б_1*. Если* $\omega^2 = 0,\ \gamma < 0$*, то дополнительно будем предполагать, что* $\psi_2(\lambda)$

удовлетворяет условие теоремы 4.1. Тогда при некоторых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_2 > 0$ *равномерно по* $u \in \tilde{U}_\varepsilon$*:*

$$\left|\Pi\left(u,(-\infty, y)\right)\right| = O\left(\frac{e^{-(\lambda_0-\delta)y}}{|u|^{\gamma_2}}\right), \quad -a > y \to -\infty.$$

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия* А_1 *или* Б_1. *Тогда при* $b - x_2 \to \infty$, $a + x_1 \to \infty$, $-a \le x_1 < x_2 < b$, *при некоторых д.м.* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_3 > 0$ *равномерно по* $u \in \tilde{U}_\varepsilon$*:*

$$\left|uH\left(u,[x_1,x_2)\right) - u\int_0^\infty e^{-ut}P\left(x_1 \le \xi(t) < x_2\right)dt\right|$$

$$= O\left(\frac{e^{-\lambda_0 x_2-\delta d}}{|u|^{\gamma_3}}\right) + O\left(\frac{e^{-\lambda_0 x_1-\delta d}}{|u|^{\gamma_3}}\right),$$

$d = \min\{a, b, a + x_1, b - x_2\}$.

Доказательство теоремы 4.1. Прежде всего отметим, что существование д.м. $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, которые присутствуют в формулировках теорем 4.1, 4.2, 4.3, следует из леммы 1.3. При $u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda < 0$:

$$\Pi\left(u,[b,x)\right) = u\int_0^\infty e^{-ut}P\left(b \le \xi(T) < x,\ T < t\right)dt.$$

$$V_+(u,\lambda) = -\lambda\int_b^\infty e^{\lambda x}\Pi\left(u,[b,x)\right)dx,$$

$$\int_b^\infty e^{\lambda x}\Pi\left(u,[b,x)\right)dx = -\frac{V_+(u,\lambda)}{\lambda}.$$

В силу леммы 1.1, тождеств (1.4) и (2.6) функция $V_+(u,\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в область $\operatorname{Re}u > u_0$, $\operatorname{Re}\lambda < \overline{\lambda}_+(\operatorname{Re}u)$. При $u \in \tilde{U}_\varepsilon$ (в силу леммы 1.3 такое $\varepsilon > 0$ существует) существует такое $\delta_1 > 0$:

$\psi_{1+}^{\pm1}(\lambda,u) \in B_+(\lambda_0 + \delta_1)$, $\psi_{1-}^{\pm1}(\lambda,u) \in B_-(\lambda_0 - \delta_1)$.

Функции $\Pi\left(u,[b,x)\right)$ и $\Pi\left(u,[b,\infty)\right)$ связаны соотношением

$$\Pi\left(u,[x,\infty)\right) = V_+(u,0) - \Pi\left(u,[b,x)\right) \qquad (4.1)$$

Далее,

$$\Pi\left(u,[b,x)\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_{-}-1}\frac{V_{+}(u,\lambda)}{\lambda}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_{-}-1}\frac{\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]^{[b,\infty)}}{\lambda r_{u+}(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda .$$

Так как при $u\in\tilde{U}_{\varepsilon}$ ($\varepsilon>0$ - некоторое малое число)

$$r_{u+}^{-1}(\lambda)\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]^{[b,\infty)}\in B_{+}\left(\lambda_0+\delta_1\right),$$

имеем:

$$\Pi\left(u,[b,x)\right)=\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{[b,\infty)}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V\ (u,\lambda)\right)\right]^{[b,\infty)}}{\lambda r_{u+}(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$=\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{[b,\infty)}-I_1, \qquad (4.2)$$

$$\Delta(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

Исследуем интеграл I_1. Очевидно, что

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{1-V_{-}(u,\lambda)}{\lambda}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}}{\lambda r_{u-}(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$=I_2-I_3 \qquad (4.3)$$

Поскольку $V_{-}(u,\lambda)\in B_{-}\left(\lambda_0-\delta_1\right)$, в силу леммы Жордана:

$$I_2=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)\left(1-V_{-}(u,0)\right).$$

Для оценки I_3 рассмотрим три случая:

I. Пусть $\omega^2>0$. Тогда (см. (1.4))

$$\frac{1}{r_{u+}(\lambda)}=\frac{\psi_{1+}(\lambda,u)\left(\mu_{+}(u)-\lambda\right)}{\psi_{1+}(0,u)\,\mu_{+}(u)}=\frac{\left(u-\psi(\lambda)\right)\left(\mu_{+}(u)-\lambda\right)}{\left(u-\psi_3(\lambda)\right)\psi_{1+}(0,u)\,\mu_{+}(u)\,\psi_{1-}(\lambda,u)}$$

$$=\frac{\mu_+(u)-\lambda}{\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)}=\frac{2\psi_4(\lambda)}{\omega^2\left(\mu_-(u)-\lambda\right)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)}$$

$$=\frac{2u_1}{\omega^2\left(\mu_-(u)-\lambda\right)\psi_{1-}(\lambda,u)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)}.$$

Подставляя это разложение в I_3, получаем:

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}\left(\mu_+(u)-\lambda\right)}{\lambda_{\mu+}(u)\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{2\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}\psi_4(\lambda)}{\omega^2\lambda\left(\mu_-(u)-\lambda\right)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{2u_1\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}}{\omega^2\lambda\left(\mu_-(u)-\lambda\right)\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)}e^{-\lambda x}d\lambda \qquad (4.4)$$

Поскольку,

$$\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}=e^{\lambda b}\left[e^{-\lambda b}r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)},$$

$$r_{u+}(\lambda)\in R_+(\lambda_0+\delta_1),\quad \left[e^{-\lambda b}r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}\to 0$$

при $\lambda\to+\infty$ и $x-b>0$, то

$$I_4=\left(\Delta(\lambda_0+\delta_1)-1\right)\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}\frac{u+u_1}{u}, \qquad (4.5)$$

здесь: $\dfrac{u+u_1}{u}=\psi_{1-}^{-1}(0,u)\psi_{1+}^{-1}(0,u)=\psi_1^{-1}(0,u).$

Аналогично, в силу того, что $\mu_-(u)\mu_+(u)=\dfrac{2(u+u_1)}{\omega^2}$,

имеем:

$$I_6=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)\left(1-V_-\left(u,\lambda\right)\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}\frac{u_1}{u}, \tag{4.6}$$

и в результате получаем:

$$I_4-I_6=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)\left(1-V_-\left(u,\lambda\right)\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}.$$

Оценим интеграл I_5, для чего представим его в виде:

$$I_5=\frac{1}{\omega^2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\psi_4\left(1-V_-\left(u,\lambda\right)\right)}{\lambda_{\psi_{1+}}\left(\lambda,u\right)\psi_{1-}\left(\lambda,u\right)\mu_+\left(u\right)-\lambda\right)\mu_-\left(u\right)-\lambda\right)}e^{-\lambda x}d\lambda \tag{4.7}$$

$$=\frac{1}{\omega^2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\psi_4\left(\lambda\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)\left(1-V_-\left(u,\lambda\right)\right)\right]^{[b,\infty)}}{\lambda\left(\mu_-\left(u\right)-\lambda\right)\psi_{1+}\left(0,u\right)\mu_+\left(u\right)\psi_{1-}\left(\lambda,u\right)}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$=I_7-I_8.$$

В силу того, что функции $\left(1-V_-\left(u,\lambda\right)\right)$, $\psi_{1+}^{-1}\left(\lambda,u\right)$ равномерно ограничены при $u\in\tilde{U}_\varepsilon$. $\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1$ и $\left|\psi_4\left(\lambda\right)\right|<C_1\left|\lambda\right|^{2-p}$, $p>0$ (см. условие A_1):

$$\left|I_7\right|\le C_1e^{-(\lambda_0+\delta_1)x}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left|\lambda\right|^{1-p}}{\left|\mu_+\left(u\right)-\lambda\right|\left|\mu_-\left(u\right)-\lambda\right|}\left|d\lambda\right|$$

$$=C_1e^{-(\lambda_0+\delta)x}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|i\mu+\lambda_0+\delta_1\right|^{1-p}}{\left|i\mu+\left(u\right)-\lambda_0+\delta_1-\mu_+\left(u\right)\right|\left|i\mu+\lambda_0+\delta_1-\mu_-\left(u\right)\right|}d\mu$$

$$=C_1e^{-(\lambda_0+\delta)x}\left|\mu_+\left(u\right)\right|^{-p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\mu-\frac{i\left(\lambda_0+\delta_1\right)}{\left|\mu_+\left(u\right)\right|}\right|\right)$$

$$\times\left(\left|\mu-i\frac{\lambda_0+\delta_1-\mu_+\left(u\right)}{\left|\mu_+\left(u\right)\right|}\right|\left|\mu-i\frac{\lambda_0+\delta_1-\mu_-\left(u\right)}{\left|\mu_+\left(u\right)\right|}\right|\right)^{-1}d\mu$$

$$\le C_2e^{-(\lambda_0+\delta_1)}\left|u\right|^{-p/2}. \tag{4.8}$$

Последняя оценка следует из того, что $\left|\arg\mu_{\pm}(u)\right| \to \dfrac{\pi}{4}$ при $|u| \to \infty,\ u \in \tilde{U}_{\varepsilon}$ и $\left|\mu_{+}(u)\right| \ge C_3 |u|^{1/2}$ (см. [6]). Переходим к оценке интеграла I_8. Здесь используются соотношение, аналог которого рассмотрен в доказательстве леммы 3.4: при $f(\lambda) \in B(\lambda_0, \lambda_0+\delta_1)$, $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_0 + \delta_1$

$$\left[\frac{f(\lambda)}{\lambda-\mu_0}\right]^{[b,\infty)} = \frac{\left[f(\lambda)\right]^{[b,\infty)}}{\lambda-\mu_0} - \frac{e^{(\lambda-\mu_0)b}}{\lambda-\mu_0}\left[f(\lambda)\right]_{\lambda=\mu_0}^{(-\infty,b)}.$$

Используя это соотношение, получим при $\mu_0 = \lambda_0 + \dfrac{\delta_1}{2}$

$$\begin{aligned}
|I_8| = \frac{1}{\omega^2\pi}\Bigg| &\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\left(\psi_4(\lambda)\left[\frac{\psi_{1+}(0,u)\mu_{+}(u)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)(\lambda-\mu_0)}{\psi_{1+}(\lambda,u)\left(\mu_{+}(u)-\lambda\right)}\right]^{[b,\infty)}\right) \\
&\times\left(\lambda(\lambda-\mu_0)\left(\mu_{-}(u)-\lambda\right)\psi_{1+}(0,u)\mu_{+}(u)\psi_{1-}(\lambda,u)\right)^{-1} e^{-\lambda x}\,d\lambda \\
&+\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\left(\psi_4(\lambda)\left[\frac{\psi_{1+}(0,u)\mu_{+}(u)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)(\lambda-\mu_0)}{\psi_{1+}(\lambda,u)\left(\mu_{+}(u)-\lambda\right)}\right]_{\lambda=\mu_0}^{(-\infty,b)} e^{(\lambda-\mu_0)b}\right) \\
&\times\left(\lambda(\lambda-\mu_0)\left(\mu_{-}(u)-\lambda\right)\psi_{1+}(0,u)\mu_{+}(u)\psi_{1-}(\lambda,u)\right)^{-1} e^{-\lambda x}\,d\lambda\Bigg| \\
&\le C_4 e^{-\left(\lambda_0+\frac{\delta_1}{2}\right)x}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{|\lambda|^{1-p}\,|d\lambda|}{|\lambda-\mu|\left|\mu_{-}(u)-\lambda\right|} \qquad (4.9) \\
&\le C_5 e^{-\left(\lambda_0+\frac{\delta_1}{2}\right)x}|u|^{-p/2}.
\end{aligned}$$

Собирая воедино (4.3) – (4.9), получаем:

$$I_1 = \left(\Delta(\lambda_0+\delta_1)-1\right)\times\left[\left(1-V_{-}(u,0)\right)-\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}\right]$$

$$+O\left(\frac{e^{-\left(\lambda_0+\frac{\delta_1}{2}\right)x}}{|u|^{p/2}}\right) = \left(\Delta(\lambda_0+\delta_1)-1\right)\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_{-}(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{[b,\infty)}$$

$$+O\left(\frac{e^{-\left(\lambda_0+\frac{\delta_1}{2}\right)x}}{|u|^{p/2}}\right).$$

Подстановка последнего в (4.2) дает:

$$\Pi\left(u,[b,x)\right)=\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{[b,\infty)}+O\left(\frac{e^{\left(\lambda_0+\frac{\delta_1}{2}\right)x}}{|u|^{p/2}}\right).$$

Поскольку,

$$\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{[b,\infty)}=V_+(u,0)\ ,$$

соотношение (4.1) доказывает теорему в случае $\omega^2>0$.

II. Пусть: $\omega^2=0,\ \ \gamma<0$. Тогда $u-\psi_3(\lambda)=\gamma\left(\lambda-\mu_-(u)\right)$,

$$\frac{1}{r_{u+}(\lambda)}=\frac{\psi_{1+}(\lambda,u)}{\psi_{1+}(0,u)}=\frac{u-\psi(\lambda)}{\left(u-\psi_3(\lambda)\right)\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)}$$

$$=\frac{1}{\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)}+=\frac{\psi_2(\lambda)}{\gamma\left(\lambda-\mu_-(u)\right)\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)},$$

$$J_3=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}}{\lambda\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)}e^{\lambda x}d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,b)}\psi_2(\lambda)}{\gamma\lambda\left(\lambda-\mu_-(u)\right)\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)}e^{\lambda x}d\lambda. \qquad (4.10)$$

Как и в предыдущем случае, при $x>b$:

$$J_9=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)\left[r_{u+}(\lambda)\left(1-V_-(u,\lambda)\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}. \qquad (4.11)$$

В силу условия теоремы $\left|\psi_2(\lambda)\right|\le C$ при $\lambda_-\le\operatorname{Re}\lambda\le\lambda_+$, поэтому

$$\left|J_{10} \le Ce^{-(\lambda_0+\delta_1)x} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1} \frac{|d\lambda|}{|\lambda||\lambda-\mu_-(u)|} \le Ce^{-(\lambda_0+\delta_1)x} \frac{\ln|u|}{|u|} \quad . \qquad (4.12)$$

Соотношение (4.1) – (4.3) и (4.10) - (4.12) доказывают теорему в случае $\omega^2 = 0, \quad \gamma < 0$.

III. Пусть теперь $\omega^2 = 0, \quad \gamma > 0$. В этом случае:

$$u - \psi_3(\lambda) = \gamma(\lambda - \mu_+(u)), \quad \frac{1}{r_{u+}(\lambda)} = \frac{\psi_{1+}(\lambda,u)(\mu_+(u)-\lambda)}{\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)}$$

$$= \frac{(u-\psi(\lambda))(\mu_+(u)-\lambda)}{(u-\psi_3(\lambda))\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)}$$

$$= \frac{\mu_+(u)-\lambda}{\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)} + \frac{\psi_2(\lambda)}{\gamma\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)}.$$

Как и в предыдущих случаях $J_3 = J_{11} + J_{12}$, где

$$J_{11} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1} \frac{\left[r_{u+}(\lambda)(1-V_-(u,\lambda))\right]^{(-\infty,b)}(\mu_+(u)-\lambda)}{\lambda\psi_{1+}(0,u)\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda x} d\lambda$$

$$= (\Delta(\lambda_0+\delta_1)-1)\left[r_{u+}(\lambda)(1-V_-(u,\lambda))\right]^{(-\infty,b)}_{\lambda=0}.$$

В силу условия на поведение функции $\psi_2(\lambda)$, в этом случае:

$$|I_{12}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1} \frac{\left[r_{u+}(\lambda)(1-V_-(u,\lambda))\right]^{(-\infty,b)}\psi_2(\lambda)}{\gamma\lambda\psi_{1+}(0,u)\mu_+(u)\psi_{1-}(\lambda,u)} e^{-\lambda x} d\lambda \right|$$

$$\le Ce^{-(\lambda_0+\delta_1)x} |\mu_+(u)|^{-1} \int_{\mathrm{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1} \frac{|d\lambda|}{|\lambda|^{1+r}} \le Ce^{-(\lambda_0+\delta_1)x} |u|^{-1/2}.$$

Подстановка этих выражений в (4.1)-(4.3) завершает доказательство теоремы в случае $\omega^2 = 0, \quad \gamma > 0$.

Теорема полностью доказана.

Доказательство теоремы 4.2 проводится аналогично. Его можно также провести, рассмотрев симметричный к $\xi(t)$ процесс - $\xi(t)$ вместо $\xi(t)$ и заменяя местами числа a и b. Тогда условие теоремы 4.2 в случае $\omega^2 = 0,\ \gamma > 0$ совпадает с условием теоремы 4.1 при $\omega^2 = 0,\ \gamma < 0$, когда вместо $\xi(t)$ берется - $\xi(t)$.

Доказательство теоремы 4.3 .

Пусть:

$$r_{u+}(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda x} df(x,u), \quad r_{u-}(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda x} dg(x,u).$$

Тогда при выполнении условий теоремы 4.1 (4.2) равномерно в $\tilde{U}_\varepsilon$:

$$\left|\int_y^\infty df(x,u)\right| = O\left(\frac{e^{-(\lambda_0+\delta)y}}{|u|^{\gamma_1}},\right) \quad \gamma_1 > 0,\ y > 0,$$

$$\left(\left|\int_{-\infty}^t dg(x,u)\right| = O\left(\frac{e^{-(\lambda_0-\delta)t}}{|u|^{\gamma_2}},\right) \quad \gamma_2 > 0,\ t < 0\right), \tag{4.13}$$

а если $\omega^2 = 0,\ \gamma > 0$ $\left(\omega^2 = 0,\ \gamma < 0\right)$ условие теоремы 4.1 (4.2) не выполняется, то тем не менее,

$$\left|\int_y^\infty df(x,u)\right| = O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)y}\right),\ y > 0,$$

$$\left(\left|\int_{-\infty}^t dg(x,u)\right| = O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)t}\right), \quad t < 0\right). \tag{4.14}$$

Эти оценки легко следуют из результатов [6]. (Выше, в доказательстве теоремы 4.1 рассматривалась более сложная ситуация, чем здесь).

Доказательство теоремы следует из соотношения (2.2) и теорем 4.1, 4.2 с использованием формулы свертки для функций из V.

Заметим, что в теореме 4.3, в случае $\omega^2 = 0,\ \gamma \neq 0$ дополнительные условия, кроме А_1 или Б_1, не накладываются.

§ 5. Асимптотические представления преобразований в случае роста только одной из границ

Пусть $a = const, \quad b \to \infty$. В этом случае, для оператора A лемма 3.5 не применима. Тем не менее, методами данной работы удается изучать асимптотику распределений в двуграничных задачах и, в этом случае, выделяя при этом в отдельное слагаемое вклад траекторий, когда-либо достигающих уровня - a в одно граничной задаче. А функционалы от траектории однородного процесса с независимыми приращениями, связанные с одной границей, широко изучены (см. например, $[14,15,16]$).

Прежде всего отметим, что

$$Ae(u,\lambda) = r_{u-}^{-1}(\lambda)\left[r_{u-}(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)} = E\left(e^{-u\tau_-(-a)+\lambda\xi(\tau_-(-a))};\tau_-(-a) < \infty\right),$$

где, напомним, что $\tau_-(-a) = \inf\{t : \xi(t) < -a\}$.

Из свойств компонент факторизации следует, что $Ae(u,\lambda)$ как функция переменных u,λ аналитически продолжается в область $\mathrm{Re}\,u > u_0$, $\mathrm{Re}\,\lambda > \lambda_0$. Последнее следует из того, что

$$Ae(u,\lambda) = \frac{\lambda-\lambda_-(u)}{\omega_u(u)}\left[\frac{\omega_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{(-\infty,-a)},$$

и

$$\left[\frac{\omega_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{(-\infty,-a)} = \frac{\left[\omega_u(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)}}{\lambda-\lambda_-(u)} + \frac{e^{-(\lambda-\lambda_-(u))a}}{\lambda-\lambda_-(u)}\left[\omega_u(\lambda)\right]^{[-a,0)}_{\lambda=\lambda_-(u)}$$

в случае $\omega^2 > 0$ или $\omega^2 = 0,\ \gamma < 0$;

$$\left[\frac{\omega_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_-(u)}\right]^{(-\infty,-a)} = \left[\frac{\omega_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_-+1}\right]^{(-\infty,-a)} + \left[\frac{\left(\lambda_-(u)-\lambda_-+1\right)\omega_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_-+1}\right]^{(-\infty,-a)}$$

$$\cdot\frac{1}{\lambda-\lambda_-(u)} + \frac{e^{-(\lambda-\lambda_-(u))a}}{\lambda-\lambda_-(u)}\left[\frac{\left(\lambda_-(u)-\lambda_-+1\right)\omega_u(\lambda)}{\lambda-\lambda_-+1}\right]^{[-a,0)}_{\lambda=\lambda_-(u)}$$

в случае $\omega^2 = 0,\ \gamma > 0.$

Далее используется следующее очевидное свойство оператора проектирования, которым уже пользовались ранее: если $h(\lambda) \in B(\lambda_0, \lambda_0)$, то

$$\left[e^{\lambda b} h(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)} = e^{\lambda b}\left[h(\lambda)\right]^{(-\infty,-b-a)}. \qquad (5.1)$$

Исследуем оператор A в точке $V_+(u,\cdot)$. Обозначим $\overline{V}_+(u,\lambda) = e^{-\lambda b} V_+(u,\lambda)$. Тогда в силу (5.1):

$$AV_+(u,\lambda) = A\left[e^{\lambda b}\overline{V}_+(u,\lambda)\right] = e^{\lambda b} A_{-a-b}\overline{V}_+(u,\lambda).$$

Функция $e^{\lambda_0 b}\overline{V}_+(u,\lambda)$ равномерно ограничена при $u \in U_\varepsilon$, $\operatorname{Re}\lambda \le \lambda_0$. Это следует из определения функции $\overline{V_+}(u,\lambda)$ и того, что $V_+(u,\lambda) \in B_+(\lambda_0)$ при $u \in U_\varepsilon$. Значит для функции $e^{\lambda_0 b}\overline{V}_+(u,\lambda)$ применима лемма 3.5 (с оператором A_{-a-b}), следовательно:

$$A_{-a-b}\left(e^{\lambda_0 b}\overline{V_+}(u,\lambda)\right) = \frac{e^{\lambda_0 b}\omega_u\left(\lambda_-(u)\right)\overline{V_+}\left(u,\lambda_-(u)\right)e^{\lambda_-(u)(b+a)}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda(b+a)}}$$

$$+\left(\lambda - \lambda_-(u)\right)\int_{-\infty}^{-a-b} e^{\lambda x}\theta_u(x)\,dx,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{t}\theta_u(x)\,dx\right| = O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)t}\right), \quad t < -a-b, \quad t \to -\infty.$$

Так как: $e^{\lambda_-(u)b}\overline{V_+}\left(u,\lambda_-(u)\right) = V_+\left(u,\lambda_-(u)\right)$, то

$$AV_+(u,\lambda) = \frac{\omega_u\left(\lambda_-(u)\right)V_+\left(u,\lambda_-(u)\right)e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}$$

$$+\left(\lambda - \lambda_-(u)\right)\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\theta_u^{(3)}(x)\,dx, \qquad (5.2)$$

где

$$\left|\int_{-\infty}^{t}\theta_u^{(3)}(x)\,dx\right| = O\left(e^{-(\lambda_0-\delta)t-\delta b}\right), \quad t < -a, \quad b \to \infty.$$

Представления для $Be(u,\lambda)$ и $BV_-(u,\lambda)$, в этом случае остаются теми же, что в доказательстве теоремы 3.1. Подставляя (5.2) в (2.7), получаем:

$$V_-(u,\lambda) = Ae(u,\lambda) - \frac{\omega_u(\lambda_-(u))V_+(u,\lambda_-(u))e^{\lambda_-(u)a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda a}}$$
$$+(\lambda-\lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda x}\theta_u^{(3)}(x)dx. \tag{5.3}$$

Соотношения (3.6) и (5.3) дают два уравнения для нахождения функций $V_\pm(u,\lambda)$. Дальнейшие выкладки проводятся аналогично случаю $a\to\infty$, $b\to\infty$, поэтому здесь некоторые подробности опускаются. Полагая $\lambda=\lambda_+(u)$ в (5.3), имеем вместе с (3.8) два уравнения относительно неизвестных $V_+(u,\lambda_-(u))$и $V_-(u,\lambda_+(u))$:

$$\begin{gathered}V_-(u,\lambda_+(u)) = Ae(u,\lambda_+(u)) - \mu^a(u)H_1(u)V_+(u,\lambda_-(u))\\ +(\lambda_+(u)-\lambda_-(u))\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_+(u)x}\theta_u^{(3)}(x)dx,\\ V_+(u,\lambda_-(u)) = \mu^b(u)H_2(u)(1-V_-(u,\lambda_-(u)))\\ +(\lambda_-(u)-\lambda_+(u))\int_b^{\infty} e^{\lambda_-(u)x}\left(\varphi_u^{(1)}(x)-\varphi_u^{(2)}(x)\right)dx.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Здесь, и в дальнейшем, выражение $Ag(u,\lambda_+(u))$ понимается как $(Ag(u,\lambda))_{\lambda=\lambda_+(u)}$, аналогично, $Bg(u,\lambda_-(u)) = (Bg(u,\lambda))_{\lambda=\lambda_-(u)}$.

Нетрудно заметить, что $Ae(u,\lambda_-(u))=1$. Поэтому, разлагая $Ae(u,\lambda)$, как функцию переменной λ по степеням $(\lambda-\lambda_-(u))$, и положив $\lambda=\lambda_+(u)$, имеем: $1-Ae(u,\lambda)=O(|\lambda_+(u)-\lambda_-(u)|)$, при $|u|\to|u_0|$.

С помощью последнего равенства, как и в доказательстве теоремы 3.1, доказывается равномерная ограниченность функции:

$$\frac{1-Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}$$

в окрестности точки $u=u_0$. Это дает возможность решать систему уравнений (5.4) относительно $V_-\left(u,\lambda_+(u)\right)$ и $V_+\left(u,\lambda_-(u)\right)$:

$$V_+\left(u,\lambda_-(u)\right)=\frac{\mu^b(u)H_2(u)\left(1-Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)\right)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}+O\left(e^{-\delta b}\right),$$

$$V_-\left(u,\lambda_+(u)\right)=\frac{Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)-\mu^{b+a}(u)H(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}+O\left(e^{-\delta b}\right).$$

Подставляя эти асимптотические представление для $V_+\left(u,\lambda_-(u)\right)$, $V_-\left(u,\lambda_+(u)\right)$ в (5.3) и в (3.6), получаем асимптотические представления для функций $V_\pm(u,\lambda)$:

$$V_-(u,\lambda)=Ae(u,\lambda)-\frac{\omega_u\left(\lambda_-(u)\right)e^{\lambda_-(u)a}\mu^b(u)H_2(u)\left(1-Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)\right)}{e^{\lambda a}\omega_u(\lambda)\left(1-\mu^{b+a}(u)H(u)\right)}+\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}d\varepsilon_u^{(1)}(x), \qquad (5.5)$$

$$V_+(u,\lambda)=\frac{v_u\left(\lambda_+(u)\right)e^{\lambda b}\left(1-Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)\right)}{v_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}\left(1-\mu^{b+a}(u)H(u)\right)}+\int_b^{\infty}e^{\lambda x}d\rho_u^{(1)}(x),$$

где равномерно по $u\in U_\varepsilon$

$$\left|\int_{-\infty}^{x}d\varepsilon_u^{(1)}(t)\right|=O\left(e^{-\lambda_0 x-\delta(b-x)}\right),\quad x<-a,$$

$$\left|\int_{y}^{\infty}d\rho_u^{(1)}(t)\right|=O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)(y+b)}\right),\quad y>0,\quad b\to\infty.$$

Отметим, что в формулах (5.2)-(5.5) числа $\varepsilon>0$, $\delta>0$ те же, что и в теореме 3.1.

Обращая полученные представления (5.5) для $V_\pm(u,\lambda)$ по пространственной переменной λ, окончательно имеем асимптотические представления для $\Pi(u,B)$.

Итак, доказана следующая:

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* А *или* Б $a = cont$, $b \to \infty$. *Тогда существуют числа* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *такие, что при любых* $x \ge 0$, $u \in U_\varepsilon$ *равномерно по* u *справедливы представления:*

$$\Pi\left(u,[x+b,\infty)\right) = \frac{\exp\left\{-\lambda_+(u)b\right\}\left(1 - Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)\right)}{1 - H(u)\mu^{b+a}(u)} F_+\left(u,[x,\infty)\right)$$
$$+O\left(e^{-(\lambda_0+\delta)(x+b)}\right),$$
$$\Pi\left(u,(-\infty,\ x-a)\right) = E\left(e^{-u\tau_-(-a)};\xi\left(\tau_-(-a)\right) < -x-a\right)$$

$$-\frac{\exp\left\{\lambda_-(u)a\right\}\mu^b(u)H_2(u)\left(1 - Ae\left(u,\lambda_-(u)\right)\right)}{1 - H(u)\mu^{b+a}(u)}$$

$\times F_-\left(u,(-\infty,-x)\right) + O\left(e^{\lambda_0 x-\delta(b+x)}\right)$, *функции* F_+, F_- *определены в теореме 3.1.*

Аналогично доказывается:

Теорема 5.2. *Пусть выполняются условия* А *или* Б $b = cont$, $a \to \infty$. *Тогда существуют числа* $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ *такие, что при любых* $x \ge 0$, $u \in U_\varepsilon$ *равномерно по* u *справедливы представления:*

$$\Pi\left(u,[x+b,\infty)\right) = E\left(e^{-u\tau_+(b)};\xi\left(\tau_+(b)\right) \ge b+x\right)$$
$$-\frac{\exp\left\{-\lambda_+(u)b\right\}\mu^a(u)H_1(u)\left(1 - Be\left(u,\lambda_-(u)\right)\right)}{1 - H(u)\mu^{b+a}(u)}$$
$$\times F_+\left(u,[x,\infty)\right) + O\left(e^{-\lambda_0 x-\delta(a+x)}\right),$$
$$\Pi\left(u,(-\infty,x-a)\right) = \frac{e^{\lambda_-(u)a}\left(1 - Be\left(u,\lambda_-(u)\right)\right)}{1 - \mu^{b+a}(u)H(u)}$$

$$\times F_-\left(u,(-\infty,-x)\right) + O\left(e^{(\lambda_0-\delta)(a+x)}\right).$$

Остановимся на преобразовании Лапласа совместного распределения $(\xi(t),T)$. Из (2.2), как и в § 3, имеем:

$$uH(u,[u,x_1,x_2)) = [r_u(\lambda)] - [r_u(\lambda)V_-(u,\lambda)]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)}$$
$$-[r_u(\lambda)V_+(u,\lambda)]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)} \qquad (5.6)$$

Так как $a = cont$, слагаемое $[r_u(\lambda)V_-(u,\lambda)]_{\lambda=0}^{[x_1,x_2)}$ в (5.6) подлежит асимптотическому анализу только при условии $x_1, x_2 \to \infty$, т.е. когда числа x_1, x_2, растут вместе с b. Но этот случай не представляет большого интереса, потому что вероятность попадания процесса в неограниченно удаляющийся от начала координат промежуток до выхода из полосы (одна граница не растет) экспоненциально мала. Действительно, применим лемму 3.4 к слагаемым правой части (5.6). Тогда полученные главные члены, после подстановки в (5.6), сокращаются и остаются только экспоненциально малые слагаемые. Это обстоятельство легко проверяется с помощью асимптотических представлений (5.5) для $V_\pm(u,\lambda)$.

Следующие теоремы дают необходимые в дальнейшем оценки для функций $\Pi(u,B)$ и $\tilde{U}_\varepsilon$.

Теорема 5.3. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Тогда существуют числа* $\varepsilon > 0, \quad \delta > 0, \ \gamma_4 > 0$ *такие, что при* $u \in \tilde{U}_\varepsilon$ *равномерно по* u*:*

1) *при* $a = const, \ b \to \infty$*:*

$$\left|\Pi(u[x,\infty))\right| = O\left(\frac{e^{-(\lambda_0+\delta)x}}{|u|^{\gamma_4}}\right), \qquad x \ge b;$$

2) *при* $a \to \infty, \ b = const$*:*

$$\left|\Pi(u[x,\infty)) - u\int_0^\infty e^{-ut}P(\xi(\tau_+(b)) \ge x, \tau_+(b) < t)\,dt\right|$$
$$= O\left(\frac{e^{-\lambda_0 x - \delta(a+x)}}{|u|^{\gamma_4}}\right), \qquad x \ge b.$$

Теорема 5.4. *Пусть выполняются условия теоремы 4.2. Тогда существуют числа* $\varepsilon > 0, \quad \delta > 0, \; \gamma_5 > 0$ *такие, что при* $u \in \tilde{U}_\varepsilon$ *равномерно по* $u \in \tilde{U}_\varepsilon$*:*

1) *при* $a = const, \; b \to \infty$*:*

$$\left| \Pi\left(u\left[-\infty, x\right)\right) - u\int_0^\infty e^{-ut} P\left(\xi\left(\tau_-\left(a\right)\right) < x, \tau_-\left(a\right) < t\right) dt \right|$$

$$= O\left(\frac{e^{-\lambda_0 x - \delta(b-x-a)}}{|u|^{\gamma_5}}\right), \qquad x < -a;$$

2) *при* $a \to \infty, \; b = const$:

$$\left| \Pi\left(u\left(-\infty, x\right)\right) \right| = O\left(\frac{e^{-(\lambda_0 - \delta)x}}{|u|^{\gamma_5}}\right), \qquad x < -a .$$

Доказательство теоремы 5.3 в случае $a = const, \; b \to \infty$ полностью совпадает с доказательством теоремы 4.1. Докажем вторую часть. Пусть $a \to \infty, \; b = const$**.** Как и в доказательстве теоремы 4.1 при $u > 0, \; \lambda < 0, \quad x \ge b$:

$$\Pi\left(u, \left[x, \infty\right)\right) = V_+\left(u, 0\right) - \Pi\left(u, \left[b, x\right)\right),$$

$$u\int_0^\infty e^{-ut} P\left(\xi\left(\tau_+\left(b\right)\right) \ge x, \tau\left(b\right) < t\right) dt$$

$$= Be\left(u, 0\right) - u\int_0^\infty e^{-ut} P\left(b \le \xi\left(\tau_+\left(b\right)\right) < x, \tau_+\left(b\right) < t\right) dt .$$

Поскольку функции $V_+\left(u, \lambda\right), \; BV_-\left(u, \lambda\right), Be\left(u, \lambda\right)$ аналитически продолжаеми в область $\operatorname{Re}\lambda < \lambda_0 + \delta$ при некотором $\delta > 0$, $\operatorname{Re} u > u_0$, то:

$$\Pi\left(u, \left[x, \infty\right)\right) - u\int_0^\infty e^{-ut} P\left(\xi\left(\tau_+\left(b\right)\right) \ge x, \tau_+\left(b\right) < t\right) dt$$

$$= V_+\left(u, 0\right) - Be\left(u, 0\right) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = \lambda_- - 1} \frac{V_+\left(u, \lambda\right) - Be\left(u, \lambda\right)}{\lambda} e^{-\lambda x} d\lambda$$

$$= -BV_-\left(u, 0\right) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re}\lambda = \lambda_- - 1} \frac{BV_-\left(u, \lambda\right)}{\lambda} e^{-\lambda x} d\lambda$$

$$=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)BV_-\left(u,0\right)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{BV_-\left(u,\lambda\right)}{\lambda}e^{-\lambda x}d\lambda$$

$$=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)BV_-\left(u,0\right)-I_1^{'},\quad \delta_1>0. \qquad (5.7)$$

Дальнейшее исследование интеграла $I_1^{'}$ проводится аналогично исследованию I_1 (см. доказательство теоремы 4.1). Здесь отличие состоит в том, что $b=const$, $a\to\infty$, и мы должны получить асимптотическую формулу при $a\to\infty$. Здесь также $I_1^{'}=I_2^{'}-I_3^{'}$,

$$I_2^{'}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{V_-\left(u,\lambda\right)}{\lambda}e^{-\lambda x}d\lambda=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)V_-\left(u,0\right). \qquad (5.8)$$

В случае $\omega^2>0$

$$I_3^{'}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\left[r_{u+}\left(\lambda\right)V_-\left(u,\lambda\right)\right]^{(-\infty,b)}}{\lambda r_{u+}\left(\lambda\right)}e^{-\lambda x}d\lambda=I_4^{'}-I_5^{'}-I_6^{'},$$

где

$$I_4^{'}=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)V_-\left(u,\lambda\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}\frac{u+u_1}{u},$$

$$I_6^{'}=\left(\Delta\left(\lambda_0+\delta_1\right)-1\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)V_-\left(u,\lambda\right)\right]_{\lambda=0}^{(-\infty,b)}\frac{u_1}{u}.$$

(5.9)

Для оценки $I_7^{'}$, где $I_5^{'}=I_7^{'}-I_8^{'}$,

$$I_7^{'}=\frac{1}{\omega^2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\psi_4\left(\lambda\right)V_-\left(u,\lambda\right)}{\lambda\psi_{1+}\left(\lambda,u\right)\psi_{1-}\left(\lambda,u\right)\left(\mu_+\left(u\right)-\lambda\right)\left(\mu_-\left(u\right)-\lambda\right)}e^{-\lambda x}d\lambda,$$

$$I_8^{'}=\frac{1}{\omega^2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{\psi_4\left(\lambda\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)\left(1-V_-\left(u,\lambda\right)\right)\right]^{[b,\infty)}}{\lambda\left(\mu_-\left(u\right)-\lambda\right)\psi_{1+}\left(0,u\right)\mu_+\left(u\right)\psi_{1-}\left(\lambda,u\right)}e^{-\lambda x}d\lambda,$$

используем следующую оценку:

$$\left|V_-\left(u,\lambda_0+\delta\right)\right|\le C_1e^{-\delta_1 a}. \qquad (5.10)$$

Действительно, так как $V_-\left(u,\lambda\right)\in B_-\left(\lambda_0\right)$

$$\left|V_-\left(u,\lambda_0+\delta\right)\right| = \left|\int_{-\infty}^{-a} e^{(\lambda_0+\delta_1)x}\Pi\left(u,dx\right)\right| \le e^{-\delta_1 a}\int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda_0 x}\left|\Pi\left(u,dx\right)\right| \le C_1 e^{-\delta_1 a}.$$

Тогда (см. (4.8))

$$\left|I_7^{'}\right| \le C_2\,\frac{e^{-\lambda_0 x-\frac{\delta_1}{2}(a+x)}}{\left|u\right|^{-p/2}}. \tag{5.11}$$

Для оценки $I_8^{'}$ заметим:

$$\left[r_{u+}\left(\lambda\right)V_-\left(u,\lambda\right)\right]^{[b,\infty)} = e^{-\lambda a}\left[r_{u+}\left(\lambda\right)\overline{V}_-\left(u,\lambda\right)\right]^{[b+a,\infty)},$$
$$\overline{V}_-\left(u,\lambda\right) = e^{\lambda a}V_-\left(u,\lambda\right),$$

а функция $e^{-\lambda_0 a}\overline{V}_-\left(u,\lambda\right)$ ограничена при $\lambda_0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \lambda_0+\delta_1$. Последнее следует из того, что при любом $\delta_1 \ge \delta_2 > 0$

$$e^{-\lambda_0 a}\overline{V}_-\left(u,\lambda+\delta_2\right) = e^{\delta_2 a}V_-\left(u,\lambda_0+\delta_2\right)$$

(см. (5.10)). Значит:

$$I_8^{'} = \frac{1}{\omega^2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\lambda_0+\delta_1}\frac{e^{\lambda_0 a}\psi_4\left(\lambda\right)\left[r_{u+}\left(\lambda\right)e^{-\lambda_0 a}\overline{V}_-\left(u,\lambda\right)\right]^{[b+a,\infty)}}{\lambda\left(\mu_-\left(u\right)-\lambda\right)\psi_{1+}\left(0,u\right)\mu_+\left(u\right)\psi_{1-}\left(\lambda,u\right)}e^{-\lambda(x+a)}d\lambda.$$

Дальнейшее оценивание $I_8^{'}$ проводится как в (4.9), в результате чего получим:

$$\left|I_8^{'}\right| \le C_3\,\frac{e^{-\lambda_0 x-\frac{\delta_1}{2}(a+x)}}{\left|u\right|^{p/2}}. \tag{5.12}$$

Соотношения (5.7)-(5.12) вместе с (5.6) доказывают теорему в случае $\omega^2 > 0$. Случаи $\omega^2 = 0, \gamma > 0$; $\omega^2 = 0$, $\gamma < 0$ рассматриваются аналогично.

Теорема 5.3 доказана.

Доказательство теоремы 5.4 проводится симметричными рассуждениями к предыдущему случаю.

§ 6. Полные асимптотические разложения для вероятностей

Здесь мы будем использовать ряд технических приемов из [2,4]. Рассмотрим три случая.

I. *Случай* $a \to \infty$, $b \to \infty$. По формуле обращения интеграла Лапласа при $c > 0$:

$$\mathrm{P}\big(\xi(t) \in D_1, T > t\big) = \mathrm{P}\big(\xi(t) \in D_1\big) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Phi_1(u, D_1)}{u} e^{tu} du,$$

$$\mathrm{P}\big(\xi(T) \in D_2, T < t\big) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Pi(u, D_2)}{u} e^{tu} du,$$

$$\Phi_1(u, D_1) = u \int\limits_0^{\infty} e^{-ut} \mathrm{P}\big(\xi(t) \in D_1\big) dt - uH(u, D_1),$$

$$D_1 \subset [-a, b), \quad D_2 \subset [b, \infty) \text{ или } (-\infty, -a).$$

Функции $\Pi(u, D_2), \Phi_1(u, D_1)$ аналитичны в полуплоскости $\mathrm{Re}\, u > u_0$, непрерывны и ограничены, включая границу $\mathrm{Re}\, u = u_0$, за исключением, быть может, некоторой малой окрестности точки $u = u_0$. Поэтому в качестве контура выберем ось $\mathrm{Re}\, u = u_0$. При этом, лежащую на ней точку $u = u_0$ обойдем справа по окружности радиуса $\varepsilon_3, \varepsilon_3 > 0$ - произвольное д.м. число.

Обозначим этот контур K_1. Если $E\xi(1) \neq 0$, то $u_0 < 0$, и выделяя вычет в точке $u = 0$, будем иметь:

$$P\big(\xi(t) \in D_1 T > t\big) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{\Phi_1(u, D_1)}{u} e^{tu} du,$$

$$P\big(\xi(T) \in D_2 T \geq t\big) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{\Pi(u, D_2)}{u} e^{tu} du, \qquad (6.1)$$

Предположим сначала, что $E\xi(1)\neq 0$, т.е. $u_0<0$. Пусть $K=K_1/\tilde{U}_\varepsilon$. В силу теорем 4.1 – 4.3, при выполнении соответствующих условий:

$$\left|\int_{\tilde{U}_\varepsilon}\frac{\Pi\left(u,[x,\infty)\right)}{u}e^{tu}du\right|=e^{u_0t-\lambda_0x}O\left(e^{-\delta x}\right),\ \ x\geq b.\qquad x\to\infty$$

,

$$\left|\int_{\tilde{U}_\varepsilon}\frac{\Pi\left(u,(-\infty,y)\right)}{u}e^{tu}du\right|=e^{u_0t-\lambda_0y}O\left(e^{-\delta y}\right)\ .\ y<-a.\qquad y\to-\infty,\quad (6.2)$$

$$\left|\int_{\tilde{U}_\varepsilon}\frac{\Phi_1\left(u,[x_1,x_2)\right)}{u}e^{tu}du\right|=e^{u_0t}\left[O\left(e^{-\lambda_0x_2-\delta d}\right)+O\left(e^{-\lambda_0x_1-\delta d}\right)\right]$$

$$-a\leq x_1<x_2<b.$$

Поэтому в интегралах (6.1) достаточно вести интегрирование по контуру K, образующаяся при этом погрешность имеет порядок, указанный в (6.2) соответственно. Во всех этих случаях, вдоль контура K мы можем заменить подынтегральные функции их асимптотическими представлениями из теорем 3.1, 3.2. Таким образом, задача получения асимптотических разложений вероятностей сводится к необходимости строить асимптотические разложения для интегралов вида:

$$I(t)=\frac{1}{2\pi}\int_K\frac{G_j(u)e^{tu}}{u}du,\quad j=1,2\ ,$$

где

$$G_1(u)=g(u)\exp\left\{(k_1a+k_2b)\lambda_-(u)-(k_3a+k_4b)\lambda_+(u)\right\}$$
$$\times\frac{1-\mu^a(u)H_1(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}+\frac{\varepsilon(u)}{(u-u_0)^{1/2}},$$
$$G_2(u)=g(u)\exp\left\{(k_1a+k_2b)\lambda_-(u)-(k_3a+k_4b)\lambda_+(u)\right\}$$
$$\times\frac{1-\mu^a(u)H_2(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}+\frac{\varepsilon(u)}{(u-u_0)^{1/2}},$$

здесь k_1, k_2, k_3, k_4 - постоянные величины,

$$g(u) = \sum_{k=-1}^{\infty} g_k (u - u_0)^{k/2},$$

сходящийся на множестве $U_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ ряд, $\varepsilon(u)$ аналитическая в U_ε и непрерывная на границе U_ε функция, оценки которой содержатся в теоремах 3.1, 3.2.

Прежде всего заметим, что

$$\left| \int_K \frac{\varepsilon(u) e^{tu}}{(u-u_0)^{1/2}} dt \right| \le C_1 \sup_{u \in U_\varepsilon} |\varepsilon(u)| e^{u_0 t}. \qquad (6.3)$$

Действительно, пусть $\tilde{\varepsilon}(z) = \varepsilon(u)$ после замены $z = (u - u_0)^{1/2}$, $U_\varepsilon(z)$, $\tilde{K}$ - соответственно образы U_ε и K в плоскости переменной z. Тогда $\tilde{\varepsilon}(z)$ аналитична в $U_\varepsilon(z)$ и

$$\left| \int_K \frac{\varepsilon(u) e^{tu}}{(u-u_0)^{1/2}} du \right| = \left| \int_{\tilde{K}} 2\tilde{\varepsilon}(z) e^{tu_0} e^{-z^2 t} dz \right| \le C_2 e^{tu_0} \sup_{u \in U_\varepsilon} |\varepsilon(u)|.$$

Пусть:

$$U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon} = U_{\varepsilon_1,\varepsilon} \cap \left\{ u : \left| \arg(u - u_0) - \pi \right| \ge \frac{\pi}{4} \right\}.$$

Функции $g(u)$, $\lambda_\pm(u)$, $H_1(u)$, $H_2(u)$, $H(u)$ аналитичны в $U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ при некоторых $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$. Кроме того из разложений (1.3) следует, что при д.м. $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon > 0$ существует $\gamma_3 = \gamma_3(\varepsilon) > 0$ такое, что при $u \in U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon} \cap \{u : |\mathrm{Im}\, u| = \varepsilon\}$

$$\mathrm{Re}\,\lambda_-(u) < \lambda_0 - \gamma_3, \quad \mathrm{Re}\,\lambda_+(u) < \lambda_0 + \gamma_3. \qquad (6.4)$$

Обозначим K_2 - контур, полученный из контура $\left\{ \left| \arg(u - u_0) \right| = \frac{3\pi}{4}, \quad u \in U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon} \right\}$, искривлением внутрь $U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ вблизи точки $u = u_0$ (это искривление можно не делать, если $g_{-1} = 0$ в разложении для функции g). В силу неравенств (6.3), (6.4)

$$\left|I(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_2}\frac{G_j(u)e^{tu}}{u}du\right|$$

$$\leq C_3e^{tu_0}\left[\sup_{u\in U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon}}\left|g(u)\right|\exp\left\{\left(k_1\left(\lambda_0-\gamma_3\right)-k_3\left(\lambda_0+\gamma_3\right)\right)a\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(k_2\left(\lambda_0-\gamma_3\right)-k_4\left(\lambda_0+\gamma_3\right)\right)b\right\}+\sup_{u\in U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon}}\left|\varepsilon(u)\right|\right].$$

Функция:

$$\Pi_1(u)=\frac{1-\mu^a(u)H_1(u)}{1-\mu^{b+a}(u)H(u)}$$

по – прежнему ограничена в $U^{(1)}_{\varepsilon_1,\varepsilon}$ (см. доказательство теоремы 3.1). Для любого целого $M\geq 1$ ее можно представить в виде:

$$\Pi_1(u)=\sum_{s=0}^{M-1}\left(1-\mu^a(u)H_1(u)\right)\left(\mu^{b+a}(u)H(u)\right)^s$$

$$+\Pi_1(u)\left(\mu^{b+a}(u)H(u)\right)^M \quad .$$

Обозначим:

$$\tau_1=\frac{a}{t},\ \tau_2=\frac{a}{t},\ \ \tau_3=\frac{1}{t},\quad \tilde{a}(u)=\frac{-g(u)}{u},\ \tilde{a}(u)=\tilde{a}(u)H_1(u),$$

$$\begin{aligned}
&\tilde{h}_{1s}(u)=\left(\tau_1s+\tau_2s\right)\left(\lambda_-(u)-\lambda_+(u)\right)\\
&+\left(k_1\tau_1+k_2\tau_2\right)\lambda_-(u)-\left(k_3\tau_1+k_4\tau_2\right)\lambda_+(u)\\
&+s\tau_3\ln H(u)+u-u_0-\left(k_1\tau_1+k_2\tau_2\right)\lambda_0\\
&+\left(k_3\tau_3+k_4\tau_2\right)\lambda_0,\qquad 0\leq s\leq M-1, \qquad\qquad (6.5)\\
&\tilde{h}_{2s}(u)=\tilde{h}_{1s}(u)+\tau_1\left(\lambda_-(u)-\lambda_+(u)\right),\qquad 0\leq s\leq M-1.
\end{aligned}$$

Тогда:

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{s=0}^{M-1}\left(I_{1s}(t)-I_{2s}(t)\right)+I_M(t)\right],$$

где

$$I_{js}(t)=e^{u_0t}\exp\left\{a\lambda_0\left(k_1-k_3\right)+b\lambda_0\left(k_2-k_4\right)\right\}$$

$$\times\int_{K_2}\tilde{a}_j(u)e^{t\tilde{h}_{js}(u)}du,\ 0\le s\le M-1,$$

$$I_M(t)=e^{u_0t}\exp\left\{a\lambda_0(k_1-k_3)+b\lambda_0(k_2-k_4)\right\}\times\int_{K_2}\tilde{a}_1(u)\Pi_1(u)e^{t\tilde{h}_{1M}(u)}du$$

Здесь и в дальнейшем j принимает только значения 1 и 2. Сделаем замену $z=(u-u_0)^{1/2}$. Обозначим Г образ K_2 в плоскости z,

$$\eta(z)=H_3(u),\ \psi_-(z)=\lambda_-(u),\ \psi_+(z)=\lambda_+(u), h_{js}(z)=$$
$$=\tilde{h}_{js}(u),\ a_j(z)=2z\tilde{a}_j(u),\ s=0.....,M-1,\ h_{1M}(z)=\tilde{h}_{1M}(u).$$

Тогда:

$$I_{js}=\int_{\Gamma}a_j(z)e^{th_{js}(z)}dz\cdot e^{u_0t}\exp\left\{a\lambda_0(k_1-k_3)+b\lambda_0(k_2-k_4)\right\}.$$

Исследование этих интегралов производится с помощью модификации метода перевала, изложенной в $[2]$. Функции a_j, h_{js} аналитичны в окрестности нуля, точки перевала z_{js} функций $h_{js}(z)$ определяются из уравнений $h'_{js}(z)=0$. Рассмотрим уравнения:

$$F_1(z,y_1,y_2,....,y_5)\equiv(y_1+y_2)\left(\psi'_-(z)-\psi'_+(z)\right)$$
$$+y_3\frac{\eta'(z)}{\eta(z)}+y_4\left(k_1\psi'_-(z)-k_3\psi'_+(z)\right)+y_5\left(k_2\psi'_-(z)-k_4\psi'_+(z)\right)+2z=0\ (6.6)$$

$$F_2(z,y_1,.....,y_5)\equiv F_1(z,y_1,.....,y_5)+y_4\left(\psi'_-(z)-\psi'_+(z)\right)=0.\ (6.7)$$

Так как функции F_1 и F_2 аналитичны в точке

$O=(0,0,0,0,0,0)$, $F_j(O)=0$, $\dfrac{\partial F_j}{\partial z}(O)=2$, по теореме о неявной функции (см.$[17]$) существуют решения $z_1(y_1,.....,y_5)$, $z_2(y_1,.....,y_5)$ уравнений (6.6) и (6.7) соответственно, представимые в некоторой окрестности $\Delta=\{|y_1|<\tau, i=1,2,.....5\}$ в виде сходящихся рядов по степеням $y_1,y_2,...,y_5$. Заметим, что

$$h'_{js}(z)=F_j(z,\tau_1s,\tau_2s,\tau_3s,\tau_1,\tau_2).$$

Пусть $M-1=[\tau t/a+b]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа), тогда при $0\le s\le M-1$ точка $(\tau_1 s,\tau_2 s,\tau_3 s,\tau_1,\tau_2)\in\Delta$. Для решения уравнений $h'_{js}(z)=0$ получим разложение по степеням $(\tau_1 s,\tau_2 s,\tau_3 s,\tau_1,\tau_2)$, а после перегруппировки членов – разложения по степеням (τ_1,τ_2,τ_3):

$$
\begin{aligned}
z_{js} &\equiv z_{js}(\tau_1 s,\tau_2 s,\tau_3 s,\tau_1,\tau_2)\\
&=\alpha_1\left(s+j-1+\frac{k_1+k_3}{2}\right)\tau_1+\alpha_1\left(s+\frac{k_2+k_4}{2}\right)\\
&\tau_2-s\eta_1\frac{\tau_3}{2}+O\left((\tau_1+\tau_2)^2 s^2\right), \qquad (6.8)
\end{aligned}
$$

где $\eta_1=\eta(0)$, число α_1 определено в (1.3). Точки z_{js} являются точками перевала функций $h_{js}(z)$, $0\le s\le M-1$. В окрестности нуля:

$$
\begin{aligned}
h_{js}(z)=&-\alpha_1 z\left[\left(2(s+j-1)+k_1+k_3\right)\tau_1+\left(2s+k_2+k_4\right)\tau_2\right]\\
&+s\eta_1\tau_3 z+z^2\left[1+O\left(s(\tau_1+\tau_2)\right)\right]+O\left(z^3\right),
\end{aligned}
$$

следовательно,

$$
\begin{aligned}
h_{js}(z_{js})=&-\left[\alpha_1\left(s+j-1+\frac{k_1+k_3}{2}\right)\tau_1+\alpha_1\left(s+\frac{k_2+k_4}{2}\right)\tau_2-s\eta_1\frac{\tau_3}{2}\right]^2\\
&+O\left((\tau_1+\tau_2)^3 s^3\right), \qquad h''_{js}(z_{js})=2+O\left(s(\tau_1+\tau_2)\right) \qquad (6.9)
\end{aligned}
$$

В этих разложениях коэффициенты при $\tau_1^{i_1}\cdot\tau_2^{i_2}\cdot\tau_3^{i_3}$ суть многочлены от s степени не выше $i_1+i_2+i_3$. Кроме того подчеркнем, что при $0\le s\le M-1$ все точки z_{js} лежат в множестве $z_j(\Delta)$; с ростом t все больше этих точек попадают в $z_j(\Delta)$ и $\lim\limits_{t\to\infty} z_{js}=0$ при фиксированном s.

Дальнейшее применение метода перевала к исследованию $I_{js}(t)$ при каждом $s=0,1,\ldots,M-1$ по схеме работ $[1-4]$ дает при каждом целом $q\ge 1$ (см. также [18]):

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{M-1}\left(I_{1s}(t)-I_{2s}(t)\right)=e^{u_0 t}e^{\lambda_0\left[(k_1-k_3)a+(k_2-k_4)b\right]}$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{q-1}t^{-k-\frac{1}{2}}\sum_{s=0}^{M-1}\left(Q_{1sk}e^{th_{1s}(z_{1s})}-Q_{2sk}e^{th_{2s}(z_{2s})}\right)\right.$$

$$\left.+t^{-q-\frac{1}{2}}\sum_{s=0}^{M-1}\left(R_{1sq}e^{th_{1s}}-R_{2sq}e^{th_{2s}}\right)\right], \qquad (6.10)$$

где

$$Q_{jsk}=\frac{(-1)^{1/2}}{2\pi}\sum_{i=0}^{2k}q_{2k,i}^{j,s}\left(-h_{js}^{(0)}\right)^{-i-k-\frac{1}{2}}\Gamma\left(i+k+\frac{1}{2}\right), \qquad (6.11)$$

а $q_{k,i}^{j,s}$ - коэффициенты при z^k в произведении

$$\frac{1}{i!}\left(a_{js}^{(0)}+a_{js}^{(1)}z+\ldots\right)\left(h_{js}^{(1)}z+h_{js}^{(2)}z^2+\ldots\right)^i,$$

$$a_{js}^{(k)}=\frac{a_j^{(k)}(z_{js})}{k!}, \quad h_{js}^{(k)}=\frac{1}{(k+2)!}h_{js}^{(k+2)}(z_{js}), \qquad (6.12)$$

$k=0,1,2,\ldots.$

Поскольку функции $a_j^{(k)}(z)$, $h_{js}^{(k)}(z)$ аналитичны в $z_j(\Delta)$ при каждом k числа $a_{js}^{(k)}(z), h_{js}^{(k)}(z)$, а вместе с ними и Q_{jsr} при фиксированном r равномерно по $0\le s\le M-1$ ограничены и допускают разложения по степеням $(\tau_1+\tau_2)s, \tau_3 s, \tau_1, \tau_2$. Величины R_{jsq} ограничены при д.м. $\tau>0$ равномерно по $s=0,1,\ldots,M-1$ (см. [2]).

Рассмотрим теперь интеграл

$I_{M(t)}=\int_\Gamma \alpha_1(z)\Pi_1(z)e^{th_{1M}(z)}dz$.

Функция $a_1(z)\Pi_1(z)$ равномерно по a и b ограничена в Г и, кроме того, в окрестности точки $z=0$ справедливо соотношение:

$$\left|h_{1M}(z)+z\left[2\alpha_1 M(\tau_1+\tau_2)+\alpha_1\tau_1(k_1+k_3)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_1\tau_2(k_2+k_4)+M\eta_1\right]\right|\le C\left|z^2\right|.$$

Из способа выбора числа M следует, что

$2\alpha_1 M(\tau_1+\tau_2)+M\eta_1\tau_3+\alpha_1\tau_1(k_1+k_3)+\alpha_1\tau_2(k_2+k_4)\ge\alpha_1\tau>0$

для д.б. t, поэтому

$$\operatorname{Re} h_{1M}(z) < -\gamma_4 < 0, \quad z \in \Gamma, \text{ т.е. при } t \to \infty$$

$$\left|I_M(t)\right| = e^{u_0 t} \exp\left\{a\lambda_0(k_1 - k_3) + b\lambda_0(k_2 - k_4)\right\} O\left(e^{-\gamma_4 t}\right). \quad (6.13)$$

Соотношения (6.10), (6.13) дают разложение для интеграла $I(t)$. Но это разложение не может служить окончательным результатом потому, что его коэффициенты сами являются суммами зависящего от t числа слагаемых. Однако, рассматривая те или иные конкретные ограничения на скорость роста чисел a и b, можно получить искомые п.а.р. для интегралов $I(t)$, а значит и для исследуемых вероятностей. Эта процедура для интегралов вида (6.10) проделана в $[4]$, поэтому здесь результаты приводим без доказательств.

Лемма 6.1. *Пусть* $a = o(t),\ b = o(t),\ a \to \infty,\ \ b \to \infty,$ $(a+b)/\sqrt{t} \to \infty$ *при* $t \in \infty$. *Тогда для произвольного* $q \ge 1$

$$I(t) = e^{u_0 t} \exp\left\{a\lambda_0(k_1 - k_3) + b\lambda_0(k_2 - k_4)\right\}$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}}\left(Q_{10i}e^{th_{10}(z_{10})} - Q_{20i}e^{th_{20}(z_{20})}\right)\right.$$

$$\left. + t^{-q-\frac{1}{2}} O\left(\exp\left\{-\gamma\left[(k_1 + k_3) + b(k_2 + k_4)\right]^2 / t\right\}\right)\right] \times \left(1 + O\left(e^{-\frac{\gamma(a+b)^2}{t}}\right)\right),$$

$z_{j0},\ h_{j0}(z_{j0}),\ \ Q_{j0i}$ *определены в (6.8) – (6.12).*

Лемма 6.2. *Пусть* $a = x_1\sqrt{t},\ \ b = x_2\sqrt{t},\ 0 < C_1 < x_j < C_2 < \infty$. *Тогда для любого целого* $q \ge 1$

$$I(t) = e^{u_0 t} \exp\left\{a\lambda_0(k_1 - k_3) + b\lambda_0(k_2 - k_4)\right\}$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} p_{ri} + O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right], \quad p_{ri} \equiv p_{ri}(k_1, k_2, k_3, k_4, g)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\left(q_r^{1,i}(s)\exp\left\{-\alpha_1^2\left[x_1\left(s+\frac{k_1+k_3}{2}\right)+x_2\left(s+\frac{k_2+k_4}{2}\right)\right]^2\right\}\right.$$

$$\left.-q_r^{2,i}(s)\exp\left\{-\alpha_1^2\left[x_1\left(s+1+\frac{k_1+k_2}{2}\right)+x_2\left(s+\frac{k_2+k_4}{2}\right)\right]^2\right\}\right),$$

где $q_r^{2,i}(s)$ *определяются из разложения*

$$Q_{jsi}\exp\left\{th_{js}(z_{js})+\alpha_1^2\left[x_1\left(s+j+1+\frac{k_1+k_3}{2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+x_2\left(s+\frac{k_2+k_4}{2}\right)\right]^2\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}t^{-\frac{r}{2}}q_r^{j,i}(s).$$

Лемма 6.3. *Пусть*
$a=x\sqrt{t},\ b=o(a)\to\infty,\ t\to\infty,\ 0<C_1<x<C_2<\infty$. *Тогда для любого целого* $q\geq 1$

$$I(t)=e^{u_0t}\exp\left\{a\lambda_0(k_1-k_3)+b\lambda_0(k_2-k_4)\right\}$$

$$\times\left[\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\left(\tau_2\sqrt{t}\right)^{i_1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{i_2}p_{i_1,i_2i}+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$p_{i_1,i_2i}\equiv p_{i_1,i_2i}(k_1,k_2,k_3,k_4,g)$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}\left(q_{i_1,i_2}^{1,i}(s)\exp\left\{-\alpha_1^2x^2\left(s+\frac{k_1+k_3}{2}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.-q_r^{2,i}(s)\exp\left\{-\alpha_1^2x^2\left(s+1+\frac{k_1+k_3}{2}\right)^2\right\}\right],$$

$q_{i_2,i_2}^{j,i}(s)$ *определяются из разложений:*

$$Q_{jsi}\exp\left\{th_{js}(z_{js})+\alpha_1^2x^2\left(s+j-1+\frac{k_1+k_3}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\left(\tau_2\sqrt{t}\right)^{i_1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{i_2}p_{i_1,i_2}^{j,i}(s).$$

Для получения аналогичных разложений для интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K\frac{G_2(u)e^{tu}}{u}du, \tag{6.14}$$

при исследовании $I(t)$ с самого начала нужно поменять местами числа a и b, функции $H_1(u)$ и $H_2(u)$. Коэффициенты $p_{ri,}\, p_{i_1 i_2 i}$ будут снабжаться штрихами, если они получены в процессе исследования интеграла (6.14). Теперь у нас все готово, чтобы выписать п.а.р. совместных распределений $(T, \xi(T))$ и $(T, \xi(t))$, при различных ограничениях на рост чисел a и b, совместимых с условиями: $a+b=o(t)$, $a+b \geq C\sqrt{t}$, $a \to \infty, b \to \infty$, $t \to \infty$ в случае $E\xi(1) \neq 0$.

Теорема 6.1. *Пусть:* $E\xi(1) \neq 0$ $a=o(t), b=o(t), a\to\infty, b\to\infty, (a+b)/\sqrt{t} \to\infty$ *при* $t \to \infty$. *Тогда существуют числа* $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ *такие, что для любого целого* $q \geq 1$ $\quad x \geq 0$

1) *при выполнении условий теоремы 4.1:*

$$P\left(\xi(T) \geq b + x,\ T \geq t\right) = e^{u_0 t - \lambda_0 b} \times \left[\sum_{i=1}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \left(Q_{10i} e^{th_{10}(z_{10})} - Q_{20i} e^{th_{20}(z_{20})}\right)\right.$$

$$\left. + t^{-q-\frac{1}{2}} O\left(e^{-\delta_2 \frac{b^2}{t}}\right)\right]\left(1 + O\left(e^{-\frac{\delta_2 (a+b)^2}{t}}\right)\right) + e^{u_0 t} O\left(e^{-(\lambda_0+\delta_1)(x+b)}\right),$$

где $h_{j0}(z_{j0})$, Q_{j0i}, $j = 1,2$ *определяются соотношениями (6.8) – (6.12) при* $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 1$, $g(u) = F_+(u, [x, \infty))$;

2) *при выполнении условий теоремы 4.2:*

$$P\left(\xi(T) < -x - a,\ T \geq t\right)$$

$$= e^{u_0 t - \lambda_0 a} \times \left[\sum_{i=1}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \left(Q_{10i} e^{th'_{10}(z'_{10})} - Q_{20i} e^{th'_{20}(z'_{20})}\right)\right.$$

$$\left. + t^{-q-\frac{1}{2}} O\left(e^{-\delta_2 \frac{a^2}{t}}\right)\right]\left(1 + O\left(e^{\frac{\delta_2 (a+b)^2}{t}}\right)\right) + e^{u_0 t} O\left(e^{-(\lambda_0-\delta_1)(-x-a)}\right),$$

$Q'_{j0i,}\,h'_{j0}\left(z'_{j0}\right)$ *отличаются от* $Q_{j0i,}\,h_{j0}\left(z_{j0}\right)$ *, соответственно, тем, что начиная с (6.5) поменяются местами числа* a *и* b*,* $H_1(u)$ *и* $H_2(u)$, $k_2=1,\ k_1=k_3=k_4=0,\ g(u)=F_-\left(u(-\infty,-x)\right)$.

Теорема 6.2. *Пусть:* $E\xi(1)\neq 0,\ a=x_1\sqrt{t},\ \ b=x_2\sqrt{t}$, $0<C_1<x_j<C_2<\infty,\ j=1,2$. *Тогда для любого целого* $q\geq 1$ *и* $x\geq 0$

1) *при выполнении условий теоремы 4.1:*

$$P\left(\xi(T)\geq x+b,\ \ T\geq t\right)$$

$$=e^{u_0t-\lambda_0 b}\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}p_{ri}\left(0,0,0,1,F_+\left(\cdot,[x,\infty)\right)\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right),$$

$$p_{00}\left(0,0,0,1,F_+\right)=0,$$

$$p_{10}\left(0,0,0,1,F_+\right)=\frac{\alpha_1F_+\left(u_0,[x,\infty)\right)}{|u_0|\sqrt{\pi}}$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\left[\left(sx_1+\left(s+\frac{1}{2}\right)x_2\right)\times\exp\left\{-\alpha_1^2\left(x_1s+x_2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.-\left[x_1(s+1)+x_2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]\times\exp\left\{-\alpha_1^2\left(x_1(s+1)+x_2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right)^2\right\}\right];$$

2) *при выполнении условий теоремы 4.2:*

$$P\left(\xi(T)<-x-a,\ \ T\geq t\right)$$

$$=e^{u_0t-\lambda_0 a}\left[\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}p'_{ri}\left(0,1,0,0,F_-\left(\cdot,(-\infty,-x)\right)\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$p'_{00}\left(0,1,0,0,F_-\right)=0,\qquad p'_{10}\left(0,1,0,0,F_-\right)=\frac{\alpha_1F_-\left(u_0,(-\infty,-x)\right)}{|u_0|\sqrt{\pi}}$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\left[\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)x_1+sx_2\right)\times\exp\left\{-\alpha_1^2\left(x_1\left(s+\frac{1}{2}\right)+sx_2\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.-\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)x_1+(s+1)x_2\right)\times\exp\left\{-\alpha_1^2\left(\left(s+\frac{1}{2}\right)x_1+(s+1)x_2\right)^2\right\}\right].$$

Теорема 6.3. *Пусть:* $E\xi(1)\neq 0,\ a=c\sqrt{t},\ 0<C_1<c<C_2<\infty,$
$b=o(a)\to\infty, t\to\infty$ *и выполняются условия теоремы 4.2. Тогда для любого целого* $q\geq 1,\ \ x\geq 0$:

$$P\left(\xi(T)<-x-a,\ T\geq t\right)$$

$$=e^{u_0t-\lambda_0 a}\left[\sum_{i=1}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{i_1,i_2=0}^{\infty}\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right)^{i_1}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{i_2}\times p_{i_1i_2i}\left(0,1,0,0,F_-\left(\cdot,(-\infty,-x)\right)\right)\right.$$

$$\left.+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)+O\left(e^{u_0t-(\lambda_0-\delta)x}\right),\quad x<-a,\quad \delta>0,\right.$$

$$p_{000}=p_{100}=0,$$

$$p_{010}\left(0,1,0,0,F_-\right)=\frac{\alpha_1 cF_-\left(u_0,(-\infty,-x)\right)}{|u_0|\sqrt{\pi}}$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\left[s\exp\left\{-\alpha_1^2c^2s^2\right\}-(s+1)\exp\left\{-\alpha_1^2c^2(s+1)^2\right\}\right].$$

Аналогичное разложение справедливо и для $P\left(\xi(T)\geq x+b,\ T\geq t\right)$, $x\geq 0$. П.а.р. для совместного распределения $\xi(t)$ и T выпишем, только для случая нормальных уклонений границ. Как мы видим, с помощью лемм 6.1 – 6.3 и в остальных случаях п.а.р. получаются без труда.

Теорема 6.4. *Пусть:*
$E\xi(1)\neq 0,\ a=c_1\sqrt{t},\ \ b=c_2\sqrt{t},\ 0<C_1\leq c_j<C_2<\infty$ *и выполняются условия теоремы 4.3. Тогда для любого целого* $q\geq 1$*:*

1) *если* $x_1, x_2,$ *не зависят от* t, $-a<x_1<x_2<b$, *то*

$$P\left(x_1\leq\xi(t)<x_2,\ T>t\right)$$

$$=e^{u_0t}\sum_{i=1}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{r/2}\left[p_{ri}\left(0,1,0,1,\overline{F}_3\right)+p'_{ri}\left(0,1,0,1,\overline{F}_4\right)\right]+e^{u_0t}O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right),$$

$$p_{00}\left(0,1,0,1,\overline{F}_3\right)+p'_{00}\left(0,1,0,1,\overline{F}_4\right)$$

$$= \frac{e^{-\lambda_0 x_2} - e^{-\lambda_0 x_1}}{2\alpha_1 u_0 \sqrt{\pi}} \lambda_0 v_{u_0}(\lambda_0)\omega_{u_0}(\lambda_0)$$

$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \left[\exp\left\{-\alpha_1^2 \left(c_1(s+1) + c_2 s\right)^2\right\} - 2\exp\left\{-\alpha_1^2 \left(c_1(s+1) + c_2(s+1)\right)^2\right\} \right]$$

$$\overline{F}_3(u,[x_1,x_2)) = \left[e^{-\lambda_-(u)x_2} - e^{-\lambda_-(u)x_1} \right] \frac{\lambda_+(u) v_u(\lambda_+(u))\omega_u(\lambda_-(u))}{\lambda_+(u) - \lambda_-(u)},$$

$$\overline{F}_4(u,[x_1,x_2)) = \left[e^{-\lambda_-(u)x_2} - e^{-\lambda_+(u)x_1} \right] \frac{\lambda_-(u) v_u(\lambda_+(u))\omega_u(\lambda_-(u))}{\lambda_-(u) - \lambda_+(u)};$$

2) е*сли* $x_1 = \alpha a < x_2 = \beta b$, *где* α *и* β *- постоянные величины* $\alpha \ge -1$, $\beta \le 1$, то

$$P\left(\xi(t) \in x_1, x_2), T > t\right)$$

$$= e^{u_0 t - \lambda_0 x_2} \left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} \left(p_{ri}(1,1,\beta,0,F_5) + p'_{ri}(1,1-\beta,0,0,F_6) \right) + O\left(t^{-q-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

$$- e^{u_0 t - \lambda_0 x_1} \left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} \left(p_{ri}(1+\alpha,1,0,0,F_5) + p'_{ri}(1,1,0,-\alpha,F_6) \right) + O\left(t^{-q-\frac{1}{2}} \right) \right]$$

где $F_5(u) = \lambda_+(u) v_u(\lambda_+(u))\omega_u(\lambda_-(u))$, $F_6(u) = \dfrac{\lambda_-(u)}{\lambda_+(u)} F_5(u)$,

коэффициенты p_{ri} *определены в лемме 6.2. При этом:*

$$q_0^{1,0}(s) = q_0^{2,0}(s) = \frac{\lambda_0 \omega_{u_0}(\lambda_0) v_{u_0}(\lambda_0)}{2\alpha_1 |u_0| \sqrt{\pi}},$$

p'_{00} *отличается от* p_{00} *тем, что* c_1 *и* c_2 *меняются местами.*

Переходим к случаю $E\xi(1) = 0$, т.е. $u_0 = \lambda_0 = 0$. В этом случае в интегралах (6.1) вычет в точке $u = 0$ не выделяется, контур интегрирования K_1 меняется на мнимую ось, искривленную вблизи точки $u = 0$ внутрь U_ε. Для исследования интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\Pi\left(u,D_2\right)}{u}e^{tu}du, \qquad (6.15)$$

при $a\to\infty,\ b\to\infty$, приведенная выше конструкция построения п.а.р. не годится, так как функции $a_j\left(z\right)$ (см. (6.5) и дальше) будут иметь простые полюса в точке $z=0$. В этом случае, однако, применима другая модификация метода перевала, разработанная в $\left[1,2\right]$ как раз для того случая, когда вблизи точки перевала находится простой полюс. Задача применения этого метода для обработки интегралов (6.15) решалась в $\left[4\right]$. По этой причине она здесь не приводится.

II. Случай $a=const,\ b\to\infty$. Пусть сначала $E\xi\left(1\right)\neq 0$. Запишем формулу обращения интеграла Лапласа: при $x\geq b$

$$P\left(\xi\left(T\right)\geq x,\,T<t\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Pi\left(u,\left[x,\infty\right)\right)}{u}e^{tu}du,\qquad c>0;$$

при $x<-a$

$$P\left(\xi\left(T\right)<x,\ \ T<t\right)=P\left(\xi\left(\tau_-\left(-a\right)\right)<x,\,\tau_-\left(-a\right)<t\right)$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Phi_2\left(u,\left(-\infty,x\right)\right)}{u}e^{tu}du,$$

где

$$\Phi_2\left(u,D_2\right)=E\left(e^{-ur_-\left(-a\right)};\xi\left(\tau_-\left(-a\right)\right)\in D_2,\,\tau_-\left(-a\right)<\infty\right)-\Pi\left(u,D_2\right).$$

После выделения вычета в точке $u=0$ имеем:

$$P\left(\xi\left(T\right)\geq x,\,T\geq t\right)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\Pi\left(u,\left[x,\infty\right)\right)}{u}e^{tu}du,\ \ x\geq b; \qquad (6.16)$$

$$P\left(\xi\left(T\right)<x,\,T\geq t\right)=P\left(\xi\left(\tau_-\left(-a\right)\right)<x,\,\tau_-\left(-a\right)\geq t,\,\tau_-\left(-a\right)<\infty\right)$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\Phi_2\left(u,\left(-\infty,x\right)\right)}{u}e^{tu}du,\ \ x<-a. \qquad (6.17)$$

В интегралах (6.16), (6.17) контур интегрирования K_1 заменим на K. В силу теорем 5.3, 5.4 допущенная погрешность оценивается величиной $e^{u_0 t}O\left(e^{-\left(\lambda_0+\delta\right)x}\right)$, $x\geq b$ в (6.16), величиной

$e^{u_0 t} O\left(e^{-\lambda_0 x - \delta(b-x)}\right)$, $x < -a$ в (6.17). Вдоль контура K подынтегральные функции заменим их асимптотическими представлениями из теоремы 5.1. Если учесть оценку (6.3), то в этом случае задача получения п.а.р. рассматриваемых вероятностей сводится к необходимости получения асимптотических разложений интегралов вида:

$$I(t,b) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{e^{k_1 b \lambda_-(u)} \Pi_3(u) F(u)}{e^{k_1 b \lambda_+(u)} \cdot u} e^{tu} du, \tag{6.18}$$

где обозначено

$$\Pi_3(u) = \frac{1 - Ae\left(u, \lambda_+(u)\right)}{1 - \mu^b(u) H_3(u)}, \quad H_3(u) = \mu^a(u) H(u).$$

Возможность замены контура интегрирования K в интеграле (6.18) на K_2, допуская при этом погрешность порядка:

$$O\left(e^{tu_0} exp\left\{k_1(\lambda_0 - \gamma_3) b - k_2(\lambda_0 + \gamma_3) b\right\}\right),$$

$\gamma_3 > 0$, следует из неравенств (6.4) и равномерной ограниченности функции $\Pi_3(u)$ при $u \in U_{\varepsilon_1, \varepsilon}$ (см. доказательство теоремы 5.1). Функция $H_3(u)$ обладает всеми необходимыми здесь свойствами функции $H(u)$, а функция $Ae\left(u, \lambda_+(u)\right)$ аналитична при $u \in U_{\varepsilon_1, \varepsilon}$ при некоторых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon > 0$, и в окрестности $u = u_0$ разлагается в сходящийся ряд:

$$Ae\left(u, \lambda_+(u)\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k (u - u_0)^{k/2}, \tag{6.19}$$

$$\rho_1 = \alpha_1 E\left(\chi_-(-a) \times \exp\left\{-u_0 \tau_-(-a) + \lambda_0 \chi_-(-a)\right\}; \tau_-(a) < \infty\right).$$

Последнее следует из равенства $Ae\left(u, \lambda_-(u)\right) = 1$ (см. лемму 3.5) и разложения функции $Ae(u, \lambda)$ по степеням $\left(\lambda - \lambda_-(u)\right)$

вблизи точки $\lambda = \lambda_-(u)$. Функцию $\Pi_3(u)$, в этом случае, можно записать в виде:

$$\Pi_3(u) = \sum_{s=0}^{M-1}\Big(1 - Ae\big(u,\lambda_+(u)\big)\Big)\Big(\mu^b(u)H_3(u)\Big)^s + \Pi_3(u)\Big(\mu^b(u)H_3(u)\Big)^M,$$

$M \ge 1$ - любого целое число. Тогда интеграл $I(t,b)$ представляется в виде следующей суммы:

$$I(t,b) = \frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{s=0}^{M-1} I_s(t) + I_M(t)\right],$$

где

$$I_s(t) = \int_{K_2} \tilde{a}(u) e^{t\tilde{h}_s(u)} du \cdot e^{u_o t} \exp\{\lambda_0(k_1 - k_2)b\},$$

$$\tilde{a}(u) = \frac{1 - Ae\big(u,\lambda_+(u)\big)}{u} F(u).$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_s(u) = {} & \tau_2 s\big(\lambda_-(u) - \lambda_+(u)\big) + k_1\tau_2\lambda_-(u) - k_2\tau_2\lambda_+(u) \\ & + s\tau_3 \ln H_3(u) + u - u_0 - k_1 2\tau_2\lambda_0 + k_2\tau_2\lambda_0, \qquad (6.20) \\ & 0 \le s \le M, \ \ \tau_2 = b/t, \ \ \tau_3 = 1/t.\end{aligned}$$

Как видим, интегралы $I_s(t)$ являются интегралами типа $I_{1s}(t)$ предыдущего случая, и дальнейшие исследования проводятся так же, как в предыдущем случае. Для удобства вычисления коэффициентов разложения здесь заново введем необходимые обозначения и сформулируем результат для случая $b = x_2\sqrt{t}, \ 0 < x_2 < C < \infty, t \to \infty$. Случай $b = o(t), \ \ b/\sqrt{t} \to \infty$ рассматривается аналогично случаю $a = o(t), b = o(t), \ \ \dfrac{a+b}{\sqrt{t}} \to \infty$ предыдущего пункта (см. лемму 6.1).

После замены $z = (u - u_0)^{1/2}$ $\quad I_s(t)$ приобретает вид:

$$I_s(t) = e^{u_o t + \lambda_0(k_1 - k_2)b} \int_\Gamma a(z) e^{t h_s(z)} dz,$$

где по – прежнему, Г есть образ K_2 в плоскости z,

$$a(z) = 2\tilde{z}(u). \ \ h_s(z) = \tau_2 s\big(\psi_-(z) - \psi_+(z)\big) + k_1\tau_2\psi_-(z)$$

$$-k_2\tau_2\psi_+(z)+s\tau_3\ln\eta(z)+z^2 \qquad (6.21)$$
$$-k_1\tau_2\lambda_0+k_2\tau_2\lambda_0,\quad 0\le s\le M,$$
$$\psi_\pm(z)=\lambda_\pm(u),\ \eta(z)=H_3(u).$$

Число M выбирается так: $M-1=\left[\dfrac{\tau t}{b}\right]$, $\tau>0$. Точка:

$z_s\equiv z_s(k_1,k_2)$
$$=\alpha_1\tau_2\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right)-s\tau_3\eta'(0)/2+O\left(\tau_2^2 s^2\right)$$

(6.22) является точкой перевала функции $h_s(z)$, $0\le s\le M-1$, в окрестности $z=0$ имеют место разложения:

$$h_s(z)=-\alpha_1 z\tau_2(2s+k_1+k_2)+s\eta_1\tau_3+z^2\left[1+O(s\tau_2)\right],\quad \eta_1=\eta'(0),$$
$$h_s(z_s)=-\left[\alpha_1\tau_2\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right)-s\tau_3\eta_1/2\right]^2+O\left(\tau_2^3 s^3\right)$$
$$h_s''(z_s)=2+O(s\tau_2). \qquad (6.23)$$

Как и в предыдущем случае, в силу ограниченности функции $\Pi_3(u)$ в Г:
$$\left|I_M(t)\right|=e^{u_0 t+\lambda_0(k_1-k_2)b}O\left(e^{-\gamma_5 t}\right),\quad \gamma_5>0.$$

Обозначим:
$$Q_{si}\equiv Q_{si}(k_1,k_2,F)=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{r=0}^{i}q_{2i,r}^{s}\left(-h_s^{(0)}\right)^{-r-i-\frac{1}{2}}\Gamma\left(r+i+\frac{1}{2}\right),\ (6.24)$$
где $q_{i,r}^{s}$ - коэффициент при z^i в произведении:
$$\frac{1}{r!}\left(a_s^{(0)}+a_s^{(1)}+\ldots\right)\left(h_s^{(1)}z+h_s^{(2)}z^2+\ldots\right)^r,$$
$$a_s^{(k)}=\frac{a^{(k)}(z_s)}{k!},\quad h_s^{(k)}=h_s^{(k+2)}(z_s)/(k+2)!,\quad k=0,1,2,\ldots.$$

Пусть:
$$Q_{si}\exp\left\{th_s(z_s)+\alpha_1^2\left[x_2\left(s+\frac{k_1+k_2}{2}\right)\right]^2\right\}=\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}q_r^i(s).\ (6.25)$$

Теорема 6.5. *Пусть* $a = const,\ b = x_2\sqrt{t},\ 0 < C_1 \le x_2 \le C_2 < \infty$, $t \to \infty,\ E\xi(1) \neq 0$. *Тогда для любого целого* $g \ge 1$ *и* $x \ge 0$:

1) *при выполнении условий теоремы 5.4,*

$$P\left(\xi(T) \ge x + b,\ \ T \ge t\right)$$

$$= e^{u_0 t - \lambda_0 b}\left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} q_{ri}\left(0,1,\overline{F}_+\right) + O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$\overline{F}_+(u,x) = \left(1 - Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)\right)u^{-1}F_+\left(u,[x,\infty)\right),$$

функция $F_+\left(u[x,\infty)\right)$ *определена в теореме 3.1,* $q_r^i(s)$ *определяется разложениями (6.23) – (6.25),*

$$q_{00}\left(0,1,\overline{F}_+\right) = q_{10}\left(0,1,\overline{F}_+\right) = 0, \quad q_{20}\left(0,1,\overline{F}_+\right) + q_{01}\left(0,1,\overline{F}_+\right)$$

$$= \frac{\rho_1 F_+\left(u_0[x,\infty)\right)}{2u_0\sqrt{\pi}}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2 x_2^2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.+2\alpha_1^2 x_2^2 \sum_{s=0}^{\infty}\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 \exp\left\{-\alpha_1^2 x_2^2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}\right]$$

число ρ_1 *определено в (6.19).*

2) *при выполнении условий теоремы 5.5:*

$$P\left(\xi(T) < -x-a,\ \ T \ge t\right) = P\left(\xi\left(\tau_-(-a)\right) < -x-a, \tau_-(-a) \ge t\right)$$

$$-e^{u_0 t}\left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-\frac{r}{2}} q_{ri}\left(1,1,\overline{F}_-\right) + O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$\overline{F}_-(u,x) = e^{\lambda_-(u)a} \times H_2(u)\left(1 - Ae\left(u,\lambda_+(u)\right)\right)u^{-1}F_-\left(u,(-\infty,-x)\right),$$

функция $F_-\left(u,(-\infty,-x)\right)$ *определена в теореме 3.1,*

$$q_{00}\left(0,1,\overline{F}_-\right) = q_{10}\left(0,1,\overline{F}_-\right) = 0$$

$$q_{20}\left(0,1,\overline{F}_-\right) + q_{01}\left(0,1,\overline{F}_-\right)$$

$$= \frac{e^{\lambda_0 a}\rho_1 F_-\left(u_0,(-\infty,-x)\right)}{2u_0\sqrt{\pi}}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2 x_2^2(s+1)^2\right\}\right.$$

$$+2\alpha_1^2x_2^2\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^2\exp\left\{-\alpha_1^2x_2^2(s+1)^2\right\}\Bigg].$$

В силу того, что в этом случае (когда $a=const$, $b\to\infty$) и при $E\xi(1)=0$, т.е. при $u_0=0$, функция $a(z)$ (см. 6.21) является аналитической в окрестности точки $z=0$, по приведенной выше конструкции можно выписать п.а.р. для совместного распределения $\xi(t)$ и T при $E\xi(1)=0$. Мы ограничимся формулировкой результатов для $a=const$, $b=x_2\sqrt{t}$, $t\to\infty$.

Теорема 6.6. *Пусть:* $E\xi(1)=0,\ a=const,\ b=x_2\sqrt{t},\ 0<C_1<x_2<\infty$. *Тогда при* $t\to\infty$ *для любого* $q\geq 1$ *и* $x\geq 0$

1) *при выполнении условий теоремы 5.4:*

$$P\left(\xi(T)\geq x+b,\ \ T<t\right)=\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}q_{ri}\left(0,1,\overline{F}_+\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right),$$

где функция $\overline{F}_+(u,x)$ *и алгоритм вычисления коэффициентов* $q_{ri}(k_1,k_2F)$ *определены в теореме (6.5),*

$$q_{00}\left(0,1,\overline{F}_+\right)=\frac{\alpha\left|E\chi_-(-a)\right|}{\sqrt{\pi}}F_+\left(0,[x,\infty)\right)\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2x_2^2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

2) *при выполнении условий теоремы 5.5:*

$$P\left(\xi(T)<-x-a,\ \ T<t\right)=P\left(\xi\left(\tau_-(-a)\right)<-x-a,\quad \tau_-(-a)<t\right)$$

$$-\left[\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{r/2}q_{ri}\left(1,1,\overline{F}_-\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

функция $\overline{F}_-(u,x)$ *определена в теореме 6.5,*

$$q_{00}\left(1,1,\overline{F}_-\right)=\frac{\alpha_1\left|E\chi_-(-a)\right|}{\sqrt{\pi}}F_-\left(0,(-\infty,-x)\right)\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2x_2^2(s+1)^2\right\}.$$

III. Случае $b=const$, $a\to\infty$. Этот случай в определенном смысле является симметричным к случаю $b=const$, $a\to\infty$. Если вместо процесса $\xi(t)$ рассмотреть процесс - $\xi(t)$ и поменять местами числа a и b, то приходим к предыдущему случаю. Исследования здесь проводятся полностью по схеме пункта II.

Формулы обращения в этом случае, если $E\xi(1)\neq 0$, после выделения вычета в точке $u=0$ записываются так:

$$P\big(\xi(T)\geq x,\ \ T\geq t\big)=P\big(\xi(\tau_+(b))\geq x,\quad \tau_+(b)\geq t\big)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\Phi_3(u,[x,\infty))}{u}e^{tu}du,\qquad x\geq b,$$
$$\Phi_3(u,[x,\infty))=E\Big(e^{-u\tau_+(b)};\ \xi(\tau_+(b))\geq x,\ \ \tau_+(b)<\infty\ \Big)-\Pi(u,[x,\infty)).$$
$$P\big(\xi(T)<x,\ \ T\geq t\big)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{K_1}\frac{\Pi(u,[x,\infty))}{u}e^{tu}du,\qquad x<-a$$

Здесь используем асимптотические представления для подынтегральных функций из теорем 5.2 – 5.4. Приводим сразу некоторые результаты. Пусть числа $q'_{ri}(k_1,k_2,F)$ вычисляются так же как q_{ri} (см. п. II), с той лишь разницей, что начиная с (6.18) меняются местами числа a и b, число τ_2 на $\tau_1=a/t$, функция $H_3(u)$ на $H_4(u)=\mu^b(u)H(u)$, $Ae(u,\lambda_+(u))$ на $Be(u,\lambda_-(u))$. Функция $Be(u,\lambda_-(u))$ в окрестности точки u_0 разлагается в ряд:

$$Be(u,\lambda_-(u))=1+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\rho}_k(u-u_0)^k, \tag{6.26}$$
$$\tilde{\rho}_1=-\alpha_1 E\Big(\chi_+(b)e^{-u_0\tau_+(b)+\lambda_0\chi_+(b)};\ \tau_+(b)<\infty\Big).$$

Теорема 6.7. *Пусть:* $E\xi(1)\neq 0,\ b=const,\ a=x_1\sqrt{t},$
$0<C_1<x_1<C_2<\infty,\quad t\to\infty$. *Тогда для любого целого* $q\geq 1$ *и* $x\geq 0$

1) *при выполнении условий теоремы 5.4:*

$$P\big(\xi(T)\geq x+b,\ \ T\geq t\big)=P\big(\xi(\tau_+(b))\geq x+b,\quad \tau_+(b)\geq t\big)$$

$$-e^{u_0 t}\left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} t^{-r/2} q'_{ri}\left(1,1,\tilde{F}_+\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

где

$$\tilde{F}_+(u,x)=e^{\lambda_+(u)b}\times H_1(u)\Big(1-Be\big(u,\lambda_-(u)\big)\Big)u^{-1}F_+\left[x,\infty\right)\Big),$$

$$q'_{00}\left(1,1,\tilde{F}_+\right)=q'_{10}\left(1,1,\tilde{F}_+\right)=0, \qquad q'_{20}\left(1,1,\tilde{F}_+\right)+q'_{01}\left(1,1,\tilde{F}_+\right)$$

$$=\frac{e^{-\lambda_0 b}\tilde{\rho}_1 F_+\left(u_0\left[x,\infty\right)\right)}{2u_0\sqrt{\pi}}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2 x_1^2 (s+1)^2\right\}\right.$$

$$\left.+2\alpha_1^2 x_1^2 \sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^2 \exp\left\{-\alpha_1^2 x_1^2 (s+1)^2\right\}\right],$$

число $\tilde{\rho}_1$ *определено в (6.26);*

2) *при выполнении условий теоремы 5.5:*

$$P\left(\xi(T)<-x-a,\ \ T\ge t\right)$$

$$=e^{u_0 t+\lambda_0 a}\left[\sum_{i=0}^{q-1} t^{-i-\frac{1}{2}} q'_{ri}\left(1,0,\tilde{F}_-\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right)\right],$$

где

$$\tilde{F}_-(u,x)=\Big(1-Be\big(u,\lambda_-(u)\big)\Big)u^{-1}F_-\big(u,(-\infty,-x)\big),$$

$$q'_{00}\left(1,0,\tilde{F}_-\right)=q'_{10}\left(1,0,\tilde{F}_-\right)=0,$$

$$q'_{20}\left(1,0,\tilde{F}_-\right)+q'_{01}\left(1,0,\tilde{F}_-\right)$$

$$=\frac{\tilde{\rho}_1 F_-\left(u_0(-\infty,-x)\right)}{2u_0\sqrt{\pi}}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2 x_1^2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right.$$

$$\left.+2\alpha_1^2 x_1^2 \sum_{s=0}^{\infty}\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 \exp\left\{-\alpha_1^2 x_1^2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right].$$

Теорема 6.8. *Пусть* $E\xi(1)\ne 0$, $b=const$, $a=x_1\sqrt{t}$, $0<C_1<x_1<C_2<\infty$, $t\to\infty$ *.Тогда для любого целого* $q\ge 1$ *и* $x\ge 0$

1) *при выполнении условий теоремы 5.4:*

$$P\left(\xi\left(T\right)\geq x+b,\;\; T<t\right)$$
$$=P\left(\xi\left(\tau_{+}\left(b\right)\right)\geq x+b,\quad \tau_{+}\left(b\right)<t\right)$$
$$-\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}q'_{ri}\left(1,1,\tilde{F}_{+}\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right),$$

функция $\tilde{F}_{+}\left(u,x\right)$ *определена в теореме 6.7,*

$$q'_{00}\left(1,1,\overline{F}_{+}\right)=\frac{\alpha_1 E\chi_{-}\left(b\right)}{\sqrt{\pi}}F_{+}\left(0,\left[x,\infty\right)\right)\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2x_1^2\left(s+1\right)^2\right\};$$

2) *при выполнении условий теоремы 5.5:*

$$P\left(\xi\left(T\right)<-x-a,\;\; T<t\right)-\sum_{i=0}^{q-1}t^{-i-\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}t^{-r/2}q'_{ri}\left(1,0,\tilde{F}_{-}\right)+O\left(t^{-q-\frac{1}{2}}\right),$$

функция $\tilde{F}_{-}\left(u,x\right)$ *определена в теореме 6.7,*

$$q'_{00}\left(1,1,\overline{F}_{-}\right)=\frac{\alpha_1\left|E\chi_{-}\left(-a\right)\right|}{\sqrt{\pi}}F_{-}\left(0,\left(-\infty,x\right)\right)\sum_{s=0}^{\infty}\exp\left\{-\alpha_1^2x_1^2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2\right\}.$$

§ 7. Двуграничные задачи для обобщенного процесса восстановления

В этом параграфе рассматривается схема случайного блуждания, обобщающая случайные блуждания, порожденные суммами независимых одиноко распределенных случайных величин. Здесь изложение проводится независимо от предыдущих параграфов, поэтому и обозначения не зависят от предыдущих.

1. Пусть $\left\{\xi_i^{(j)}\right\}_{i=1}^{\infty}$, $j=1,2$ - две независимые между собой последовательно независимых одинакого распределенных при фиксированном j случайных величин, причем $P\left(\xi_i^{(2)}\geq 0\right)=1$. Обозначим

$$S_0^{(j)}=0,\quad S_k^{(j)}+\xi_1^{(j)}+\xi_2^{(j)}+\ldots+\xi_k^{(j)},$$

$$\eta(t)=\sup\left\{k\ge 0: S_k^{(2)}<t\right\},\quad \xi(t)=S_{\eta(t)}^{(1)},$$
$$T=\inf\left\{t:\xi(t)\notin(-a,b)\right\}\quad (a>0,\, b>0),$$
$$Y=\xi(T).$$

Процесс $\xi(t)$ часто называют обобщенным процессом восстановления.

Целью является получение полных асимптотических разложений вероятностей:

$$P(T<t,\, Y\in A),\; A\subset(-\infty,-a]\cup[b,\infty)$$
$$P(T>t,\; \xi(t)\in B),\quad B\subset(-a,b)\quad , \tag{7.1}$$

при $t\to\infty$ в области нормальных и больших уклонений, т.е. при $a=a(t)\to\infty,\, b=b(t)\to\infty,\;\; C\sqrt{t}\le a+b=o(t)$. Эта задача решалась в $[4,5]$ при $P\left(\xi_1^{(2)}=1\right)=1$ и в $[3]$ при $a=\infty$. Здесь мы предполагаем, что распределение $\xi_1^{(2)}$ не является решетчатым (см. условие III ниже), случай решетчатых $\xi_1^{(2)}$ в техническом отношении более прост и исследуется по той же схеме. Случайные величины $\xi_1^{(1)}$ предполагаются целочисленными. Заметим также, что это ограничение не принципиально: аналогичным способом результаты могут быть получены и для распределений $\xi_1^{(1)}$, содержащих абсолютно непрерывную компоненту (ср. с $[5]$) .

Обозначим:

$$h(\lambda)=E\lambda^{\xi_1^{(1)}},\qquad \varphi(u)=Ee^{-u\xi_1^{(2)}}\quad .$$

Пусть н.о.д всевозможных разностей значений $\xi_1^{(1)}$ равен 1 и выполнены следующие условия:

I. $m_+=\sup\left\{\lambda:h(\lambda)<\infty\right\}\ge 1,\, m_-=\inf\left\{\lambda:h(\lambda)<\infty\right\}\le 1,$ $m_+-m_->0;$

II. $\upsilon_- = \inf\{\upsilon : \varphi(\upsilon) < \infty\} < 0$;

III. Для каждого $\upsilon \in (\upsilon_-, 0]$ существует $u_1 > 0$ такое, что при $u > u_1$

$$\left|\varphi(\upsilon + iu) - \varphi(u)\right| > \varepsilon_0,$$

при некотором $\varepsilon_0 > 0$;

IV. При каждом $\upsilon \in (\upsilon_-, 0]$

$$\int_1^\infty \left|\frac{\varphi(\upsilon + iu)}{\upsilon + iu}\right| du < \infty.$$

2. Напомним здесь необходимые сведения из $[3]$. В силу условия I можно выбрать интервал $[\lambda_-, \lambda_+], \lambda_- \le 1 \le \lambda_+, \lambda_+ - \lambda_- > 0$, такой, что функция $h(\lambda)$ аналитична в кольце $\lambda_- < |\lambda| < \lambda_+$, непрерывна на границе, и $\lambda_\pm$ могут быть выбраны как угодно близкими к $m_\pm$. Как известно, существует точка $\lambda_0 \in [\lambda_-, \lambda_+]$, в которой $h(\lambda)$ достигает своего наименьшего значения. Мы будем рассматривать здесь ситуацию, когда $\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+$, так как рассуждения только упрощаются, если λ_0 совпадает с одним из концов интервала $[\lambda_-, \lambda_+]$, замечания по этому случаю можно найти в $[3]$. Обозначим: $z_0 = 1/h(\lambda_0)$; $z_0 = 1$, если $E\xi_1^{(1)} = 0$ и $z_0 > 1$ в остальных случаях. Пусть $z_\pm = 1/h(\lambda_\pm)$ и $\lambda_\pm(z)$ - нули функции $r_z(\lambda) = 1 - zh(\lambda)$, определенные в некоторых окрестностях отрезков $[z_\pm, z_0]$, $\lambda_-(z) < \lambda_0 < \lambda_+(z)$ при $\max z_\pm \le z < z_0$.

Точка z_0 является точкой ветвления второго порядка функций $\lambda_\pm(z)$. Определим при положительных z функции:

$$\tilde{\lambda}_\pm(z) = \begin{cases} \lambda_\pm, & z \le z_\pm, \\ \lambda_\pm(z), & z_\pm < z < z_0, \\ \lambda_0 & z \ge z_0 \end{cases}$$

Функция $r_z(\lambda)$ допускает регулярную каноническую факторизацию (р.к.ф) $r_z(\lambda) = r_{z+}(\lambda) r_{z-}(\lambda)$ (см. $[3]$) в области

$|z| < z_0, \tilde{\lambda}_-(|z|) \quad +\varepsilon < |\lambda| < \tilde{\lambda}_+(|z|) - \varepsilon$, при любом достаточно малом (д.м.) $\varepsilon > 0$, т.е. $r_{z+}^{\pm 1}(\lambda)\left(r_{z-}^{\pm 1}(\lambda)\right)$ являются аналитическими внутри и непрерывными на границе области $|z| < z_0$, $|\lambda| < \tilde{\lambda}_+(|z|) - \varepsilon \quad \left(|\lambda| > \tilde{\lambda}_-(|z|) + \varepsilon\right)$. Если $|z - z_0| \geq \delta$, где $\delta > 0$ - произвольно, то функции $r_{z+}^{\pm 1}(\lambda)$ являются аналитическими внутри и непрерывными на границе области $|z| \leq z_0$, $|z - z_0| \geq \delta$, $|\lambda| \leq \lambda_0 + \delta_1$, $\delta_1 > 0$ - д.м. число. Функции $r_{z-}^{\pm 1}(\lambda)$ обладают аналогичными свойствами при $|z - z_0| \geq \delta, |z| \leq z_0, |\lambda| \geq \lambda_0 - \delta_1$. Кроме того, введем, как и в $[3,4]$, функции:

$$\upsilon_z(\lambda) = \frac{r_{z+}(\lambda)}{\lambda - \lambda_+(z)}, \quad u_z(\lambda) = \frac{\lambda r_{z-}(\lambda)}{\lambda - \lambda_-(z)},$$

определенные в окрестностях отрезков $[z_+, z_0]$ и $[z_-, z_0]$ соответственно (в плоскости переменного z). Известно $[3]$, что функции $\upsilon_z^{\pm 1}(\lambda)$ и $u_z^{\pm 1}(\lambda)$ аналитичны внутри и непрерывны на границах областей: $\left\{|z - z_0| \leq \delta,\ |\lambda| \leq \lambda_0 + \delta_1\right\}$ и $\left\{|z - z_0| \leq \delta, |\lambda| \geq \lambda_0 - \delta_1\right\}$ соответственно, при некоторых д.м. $\delta > 0, \delta_1 > 0$.

3. Пусть, далее, $N = \min\left\{k : S_k^{(1)} \notin (-a, b)\right\}$, где a и b - целые положительные числа, и при $|\lambda| = 1$ определим:

$$Q_0(z,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n E\left(\lambda^{S_n^{(1)}};\ N > n\right) \quad (|z| < 1),$$

$$Q_1(z,\lambda) = E\left(z^N \lambda^{S_N^{(1)}};\ S_N^{(1)} \leq -a\right) \quad (|z| \leq 1),$$

$$Q_2(z,\lambda) = E\left(z^N \lambda^{S_N^{(1)}};\ S_N^{(1)} \geq b\right) \quad (|z| \leq 1).$$

Известно $[11]$, что при $|z| < 1$ и $|\lambda| = 1$

$$r_z(\lambda) Q_0(z,\lambda) = 1 - Q_1(z,\lambda) - Q_2(z,\lambda), \qquad (7.2)$$

и далее, используя введенную выше р.к.ф., имеем

$$Q_1(z,\lambda) = r_{z-}(\lambda)\left[r_{z-}^{-1}(\lambda)\left(1-Q_2(z,\lambda)\right)\right]^{(-\infty,-a)}, \qquad (7.3)$$

$$Q_2(z,\lambda) = r_{z+}(\lambda)\left[r_{z+}^{-1}(\lambda)\left(1-Q_1(z,\lambda)\right)\right]^{(b,\infty)} \quad . \qquad (7.4)$$

Здесь по определению, при $|\lambda| = 1$

$$\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k f_k\right]^A = \sum_{k\in A} \lambda^k f_k, \quad A \subset R.$$

Использование р.к.ф. при заданных z и λ оправдано тем, что при:

$$|z| < 1 \ \tilde{\lambda}_-(|z|) < 1 \ \tilde{\lambda}_+(|z|) > 1.$$

Лемма 7.1. *Функции* $Q_i(z,\lambda)$ $(i = 0,1,2)$ *допускают аналити-- ческое продолжение в область* $|z| < z_0$ *и* $\tilde{\lambda}_-(|z|) + \varepsilon < |\lambda| < \tilde{\lambda}_+(|z|) - \varepsilon$ $(i = 0)$, $|\lambda| > \tilde{\lambda}_-(|z|) + \varepsilon$ $(i = 1)$, $|\lambda| < \tilde{\lambda}_+(|z|) - \varepsilon$ $(i = 2)$, *где* $\varepsilon > 0$ *- произвольное д.м. число.*

Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что в случае $a < \infty$, $b < \infty$ функция $Q_0(z,\lambda)$ по λ аналитична всюду, кроме точки $\lambda = 0$.

Доказательство. Пусть: $|z| < 1$. Из неравенства:

$$P\left(S_n^{(1)} = k, N > n\right) \le P\left(S_n^{(1)} = k\right)$$

и тождества:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k P\left(S_n^{(1)} = k\right) = \frac{1}{1 - zh(\lambda)},$$

следует аналитичность $Q_0(z,\lambda)$ в кольце:

$\tilde{\lambda}_-(|z|) + \varepsilon < |\lambda| < \tilde{\lambda}_+(|z|) - \varepsilon$.

Далее, правая часть равенства:

$$Q_2(z,\lambda) = 1 - Q_1(z,\lambda) - r_z(\lambda) Q_0(z,\lambda)$$

аналитична в кольце $1<|\lambda|<\tilde{\lambda}_{+}(|z|)-\varepsilon$ и непрерывна на границе, следовательно, функция $Q_2(z,\lambda)$аналитически продолжается в круг $|\lambda|<\tilde{\lambda}_{+}(|z|)-\varepsilon$. Аналогично, $Q_1(z,\lambda)$ по λ продолжается в область $|\lambda|>\tilde{\lambda}_{-}(|z|)+\varepsilon$, при таких z. Пусть теперь $\tilde{N}$ и $\tilde{Q}_2(z,\lambda)$ совпадают, соответственно, с N и $Q_2(z,\lambda)$, вычисленными при $a=\infty$. Тогда функция:

$$\tilde{Q}_2(z,\lambda)=r_{z+}(\lambda)\left[r_{z+}^{-1}(\lambda)\right]^{[b,\infty)}$$

в силу свойств компонент р.к.ф. допускает аналитическое продолжение в область $|z|<z_0, |\lambda|<\tilde{\lambda}_{+}(|z|)-\varepsilon, \varepsilon>0$ и, значит, в силу неравенства:

$$P\left(S_n^{(1)}=k,\, N=n\right)\le P\left(S_N^{(1)}=k,\ \tilde{N}=n\right),\ k\ge b$$

степенной ряд:

$$Q_2(z,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=b}^{\infty}\lambda^k P\left(S_N^{(1)}=k,\, N=n\right)$$

также есть аналитическая функция, при $|z|<z_0, |\lambda|<\tilde{\lambda}_{+}(|z|)-\varepsilon$. Утверждение леммы относительно $Q_1(z,\lambda)$ доказывается аналогично.

Лемма доказана.

Теперь мы можем считать соотношения (7.2) – (7.4) выполненными, при $|z|<z_0, \tilde{\lambda}_{-}(|z|)+\varepsilon<|\lambda|<\tilde{\lambda}_{+}(|z|)-\varepsilon$. Заметим, что при таких z и д.м. $\varepsilon>0$ $\tilde{\lambda}_{-}(|z|)+\varepsilon<\lambda_0<\tilde{\lambda}_{+}(|z|)-\varepsilon$. Применительно к нашим условиям асимптотические представления производящих функций распределений (7.1), доказанные в $[4]$, перепишутся следующим образом.

Теорема 7.1. *Существуют числа $\delta>0, \gamma>0, C>0$ такие, что при $z\in\Im_\delta=\{|z-z_0|<\delta, |z|<z_0\}, k\ge 0$, и достаточно больших (д.б.) a и b*

$$T_{k+b}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n P\left(N=n,\, S_N^{(1)}=k+b\right)$$

$$=\frac{\lambda_+^{-b}(z)b_k(z)\left(1-\mu^a(z)H_1(z)\right)}{\upsilon_z\left(\lambda_+(z)\right)\left(1-\mu^{b+a}(z)H_2(z)\right)}+s_k(z),$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k b_k(z)=\upsilon_z(\lambda) \quad \left(|\lambda|<\lambda_0+\delta_1\right),$$

$$\left|s_k(z)\right|\le\frac{C}{\lambda_0^{k+b}}\left(e^{-\gamma(k+b)}+e^{-\gamma(k+a)}\right),\quad \frac{\lambda_-(z)}{\lambda_+(z)}=\mu(z),$$

$$H_1(z)=\frac{u_z\left(\lambda_+(z)\right)}{u_z\left(\lambda_-(z)\right)},\ H_2(z)=\frac{\upsilon_z\left(\lambda_-(z)\right)H_1(z)}{\upsilon_z\left(\lambda_+(z)\right)}.$$

Асимптотические представления для

$$T_{k-a}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} z^n P\left(N=n,\ S_n^{(1)}=k-a\right),\ k\le 0,$$

мы не приводим здесь, потому что, как и в приведенном выше случае, их вид не изменится по сравнению с $[4]$, добавится лишь множитель λ_0^{-k+a} в оценке остаточного члена и область $\left\{|z-1|<\delta,\, |z|<1\right\}$ заменится на $\left\{|z-z_0|<\delta,\, |z|<z_0\right\}$. Заметим, что главные части полученных асимптотических представлений аналитически продолжаются в область $|z-z_0|<\delta,\ \left|\arg(z-z_0)\right|>\varphi_0$, при любом $0<\varphi_0<\pi$ и ограничены там равномерно по a и b.

Теорема 7.2. *Пусть* $k\in(-a,b)$. *Тогда для* $z\in\Im_\delta$, *при некотором* $\delta>0$ *и достаточно больших* a *и* b:

$$T_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P\left(S_n^{(1)}=k,\, N>n\right)$$

$$=S_k(z)-\frac{\mu^b(z)\lambda_-^k(z)\left(1-H_1(z)\mu^a(z)\right)}{\left(\lambda_-(z)-\lambda_+(z)\right)u_z\left(\lambda_-(z)\right)\upsilon_z\left(\lambda_+(z)\right)\left(1-H_2(z)\mu^{b+a}(z)\right)}$$

$$-\frac{\mu^a(z)\lambda_+^{-k}(z)\left(1-H_3(z)\mu^b(z)\right)}{\left(\lambda_-(z)-\lambda_+(z)\right)u_z\left(\lambda_-(z)\right)\upsilon_z\left(\lambda_+(z)\right)\left(1-H_2(z)\mu^{b+a}(z)\right)}$$
$$+\varepsilon(z)/(z-z_0)^{1/2},$$

где $H_3(u)=H_1^{-1}(u)H_2(u)$, $\varepsilon(z)$ - аналитическая функция переменной $i(z-z_0)^{1/2}$, удовлетворяющая в $\Im_\delta$ неравенству:

$$\left|\varepsilon(z)\right|\le\frac{C}{\lambda_0^k}\left(e^{-\gamma\min(b,b-k)}+e^{-\gamma\min a,a+k}\right)$$
$$\gamma>0,\ C>0,\ S_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(S_n^{(1)}=k\right).$$

4. Вернемся к рассмотрению процесса $\xi(t)$ и определим по аналогии с п. 3:

$$\tilde{T}_k(u)=\int_0^\infty e^{-ut}P\left(T>t,\,\xi(t)=k\right)dt\ \left(\mathrm{Re}u>0,\ k\in(-a,b)\right),$$

$$\tilde{T}_k(u)=\int_0^\infty e^{-ut}dP\left(T<t,\,Y=k\right)\ \left(\mathrm{Re}u\ge 0,\ k\notin(-a,b)\right).$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, легко проверить, что для рассматриваемых значений u:

$$\tilde{T}_k(u)=\frac{1-\varphi(u)}{u}T_k\left(\varphi(u)\right),\quad k\in(-a,b),$$
$$\tilde{T}_k(u)=T_k\left(\varphi(u)\right),\quad k\notin(-a,b). \tag{7.5}$$

Пусть число $u_0\le 0$ таково, что $\varphi(u_0)=z_0$ (см. $[3]$). При $\mathrm{Re}u>u_0$ имеем $\left|\varphi(u)\right|<z_0$, поэтому функции (7.5) могут быть аналитически продолжены в силу леммы 1 в область $\mathrm{Re}u>u_0$. Более того, при д.м. $\varepsilon>0$ множество $\tilde{\Im}_\varepsilon=\left\{u_0<\mathrm{Re}u<u_0+\varepsilon,\left|\mathrm{Im}u\right|<\varepsilon\right\}$ при отображении φ переходит внутрь $\Im_\delta$, значит, справедливы в $\tilde{\Im}_\varepsilon$ асимптотические представления функций $\tilde{T}_k(u)$, которые получаются из представлений для $T_k(z)$ заменой $z=\varphi(u)$ в соответствии с (7.5) . В случае $k\notin(-a,b)$ главные части этих представлений аналитичны и ограничены равномерно по u, a и b в ε- окрестности точки u_0 с вырезанным сектором $\left|\arg(u-u_0)-\pi\right|\le\varphi_1$ при произвольном $\varphi_1\in(0,\pi)$ и $\varepsilon=\varepsilon(\varphi_1)>0$, так как образ этого множества при отображении $z=\varphi(u)$ будет принадлежать множеству $\left|z-z_0\right|<\delta, \left|\arg(z-z_0)\le\varphi_0\right|$ при некоторых $\varphi_0>0,\ \delta>0$. При $k\in(-a,b)$, для выполнения указанных свойств главной части асимптотического представления $\tilde{T}_k(u)$ необходимо дополнительно исключить ε_1 - окрестность точки u_0, $\varepsilon_1<\varepsilon$.

5. Пусть $k\notin(-a,b)$. Тогда при любом $c>0$:

$$P(T<t,\, Y=k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,u=c}\frac{\tilde{T}_k(u)}{u}e^{tu}du\,.$$

Если $E\xi_1^{(1)}\ne0$, то, выделяя вычет подынтегральной функции в точке $u=0$, будем иметь:

$$P(T<t,\ Y=k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\tilde{T}_k(u)}{u}e^{tu}du+P(Y=k), \tag{7.6}$$

где Γ – контур $\mathrm{Re}\,u=u_0$, искривленный вправо в окрестности точки $u=u_0$. Под значениями $\tilde{T}_k(u)$ на $\mathrm{Re}\,u=u_0$ (вне окрестности искривления) будем понимать результат непрерывного продолжения из области $\mathrm{Re}\,u>u_0$. Такое продолжение возможно при $a=\infty$ см. $[3]$), а значит, и при произвольном a. В случае $E\xi_1^{(1)}=0$ формула (7.6) остается справедливой без последнего слагаемого правой части.

Лемма 7.2. *Для* $u\in\Gamma_\delta=\left\{u\in\Gamma,\left|\mathrm{Im}\,u\right|\ge\delta\right\}$, *при некоторых положительных постоянных* C,γ *справедливы оценки:*

$$\left|\tilde{T}_k(u)\right|\le\frac{C\left|\varphi(u)\right|}{\lambda_0^k}e^{-\gamma|k|},\quad k\notin(-a,b).$$

Доказательство. Пусть при $u \in \Gamma_\delta$

$$r_{\varphi(u)+}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k f_k(u), \tag{7.7}$$

$$r_{\varphi(u)+}^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k g_k(u), \quad |\lambda| \le \lambda_0 .$$

В силу условия III при любом $\delta > 0$ образ множества Γ_δ, при отображении $z = \varphi(u)$ принадлежит множеству $|z - z_0| > \varepsilon$, $|z| < z_0$, при некотором $\varepsilon > 0$, а при таких z разложения (7.7) имеют место в круге $|\lambda| \le \lambda_0 + \delta_1$, $\delta_1 > 0$, поэтому

$$f_k(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{r_{\varphi(u)+}(\lambda)}{\lambda^{k+1}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{1 + \varphi(u) h(\lambda)}{r_{\varphi(u)-}(\lambda) \lambda^{k+1}} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{d\lambda}{r_{\varphi(u)-}(\lambda) \lambda^{k+1}} - \frac{\varphi(u)}{2\pi i} \times \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{h(\lambda)}{r_{\varphi(u)-}(\lambda) \lambda^{k+1}} d\lambda$$

$$= I_1 - I_2 .$$

При $k > 0$ имеем: $I_1 = 0, |I_2| \le \dfrac{C|\varphi(u)|}{(\lambda_0 + \delta_1)^k}$. Далее,

$$g_k(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{r_{\varphi(u)+}^{-1}(\lambda)}{\lambda^{k+1}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{r_{\varphi(u)-}(\lambda) \varphi(u) h(\lambda)}{\lambda^{k+1} \left(1 - \varphi(u) h(\lambda)\right)} d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = \lambda_0 + \delta_1} \frac{r_{\varphi(u)-}(\lambda)}{\lambda^{k+1}} d\lambda = I_3 + I_4 ,$$

где $I_4 = 0$, при $k > 0, |I_3| \le \dfrac{C|\varphi(u)|}{(\lambda_0 + \delta_1)^k}$. Как и при доказательстве леммы 7.1, для $u \in \Gamma_\delta$ выводим, что функция $Q_1(\varphi(u), \lambda)$ аналитически продолжается в область $|\lambda| > \lambda_0 - \delta_1$, непрерывна при

$|\lambda| = \lambda_0 - \delta_1, \ \ \delta_1 > 0$, а следовательно, $\left|\tilde{T}_j(u)\right| \le C/(\lambda_0 - \delta_1)^j$, непрерывна при $j \le -a$. Используя далее (7.4) и полученные оценки, имеем при $k \ge b$ $\left|\tilde{T}_k(u)\right|$

$$= \left| \sum_{i=0}^{k-b} f_i(u) g_{k-i}(u) - \sum_{i=0}^{-a} f_i(u) \sum_{j=-\infty}^{-a} \tilde{T}_j(u) g_{k-i-j}(u) \right|$$
$$\le \frac{C_1(k-b+1)|\varphi(u)|}{(\lambda_0+\delta_1)^k} + \frac{C_2(k-b+1)|\varphi(u)|}{(\lambda_0+\delta_1)^k} \sum_{j=-\infty}^{-a} \left(\frac{\lambda_0+\delta_1}{\lambda_0-\delta_1} \right)^j$$
$$\le \frac{C|\varphi(u)|}{\lambda_0^k} e^{-\gamma k},$$

$0 < \gamma < \ln(1 + \delta_1/\lambda_0)$. Оценка в случае $k \le -a$ получается аналогично.

Лемма доказана.

Лемма 7.3. *Для* $k \in (-a, b)$, $u \in \Gamma_\delta$ *справедливо*

$$\left| \tilde{T}_k(u) - \frac{1-\varphi(u)}{u} \varphi_k(u) \right| \le \frac{|\varphi(u)|}{\lambda_0^k |u|} \left(C_1 e^{-\gamma(a+k)} + C_2 e^{-\gamma(b-k)} \right),$$

где C_1, C_2, γ *- положительные постоянные, функции* $\varphi_k(u) = S_k(\varphi(u))$ *определяются из разложения:*

$$\left[1 - \varphi(u) h(\lambda)\right]^{-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(u) \quad (|\lambda| = \lambda_0).$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, при $u \in \Gamma_\delta$ функция: $\left[1 - \varphi(u) h(\lambda)\right]^{-1}$ не имеет особенностей в кольце $\lambda_0 - \delta_1 \le |\lambda| \le \lambda_0 + \delta_1$,

$\delta_1 > 0$, поэтому равномерно по $u \in \Gamma_\delta$

$$|\varphi_i(u)| = O\left(\frac{1}{(\lambda_0+\delta_1)^i} \right), \quad i \ge 0,$$

$$\left|\varphi_i(u)\right| = O\left(\frac{1}{(\lambda_0-\delta_1)^i}\right), \quad i \le 0. \tag{7.8}$$

Из (7.2) и (7.5) следует, при $k \in (-a,b)$

$$\tilde{T}_k(u) = \frac{1-\varphi(u)}{u}\left(\varphi_k(u) - \sum_{j=-\infty}^{-a} \tilde{T}_j(u)\varphi_{k-j}(u) - \sum_{j=b}^{\infty} \tilde{T}_j(u)\varphi_{k-j}(u)\right). \tag{7.9}$$

Утверждение леммы следует из (7.9) применением оценок (7.8) и леммы 7.2. Лемма доказана.

Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что в $\tilde{\mathfrak{I}}_\varepsilon$ справедливы полученные выше асимптотические представления функций $\tilde{T}_k(u)$ и функции:

$$\Pi_1(u) = \left[1 - H_1(\varphi(u))\mu^a(\varphi(u))\right]\left[1 - H_2(\varphi(u))\mu^{b+a}(\varphi(u))\right]^{-1},$$
$$\Pi_2(u) = \left[1 - H_3(\varphi(u))\mu^b(\varphi(u))\right]\left[1 - H_2(\varphi(u))\mu^{b+a}(\varphi(u))\right]^{-1}$$

ограничены равномерно по a и b на множестве:

$$K_\varepsilon = \left\{\left|\mathrm{Re}\,u - u_0\right| \le \varepsilon, \left|\mathrm{Im}\,u\right| \le \varepsilon, \left|\arg(u-u_0) - \pi\right| \ge \pi/4\right\}.$$

Вследствие условия IV и оценок, полученных в леммах 7.2, 7.3, имеем для случая $E\xi_1^{(1)} \ne 0$:

$$P(T \ge t, Y = k) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma/\Gamma_\varepsilon} \frac{\tilde{T}_k(u)}{u} e^{tu}\,du + \lambda_0^{-k} O\left(e^{-\gamma|k|}\right), \tag{7.10}$$
$$k \notin (-a,b).$$

Если $E\xi_1^{(1)} = 0$, то это же представление мы будем иметь для $-P(Y = k,\ T < t)$. Далее, учитывая соотношение:

$$\int_0^\infty e^{-ut} P(\xi(t) = k)\,dt = \frac{1-\varphi(u)}{u}\varphi_k(u),$$

получаем при $k \in (-a,b)$

$$P\left(T \le t,\ \xi(t)=k\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma/\Gamma_\varepsilon}\left[\frac{1-\varphi(u)}{u}\varphi_k(u)-\tilde{T}_k(u)\right]e^{tu}du$$
$$+\lambda_0^{-k}\left(O\left(e^{-\gamma(a+k)}\right)\right)+O\left(e^{-\gamma(b+k)}\right),\quad \gamma>0.$$

Заменяя функции $\tilde{T}_k(u)$ их асимптотическими представлениями, будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma/\Gamma_\varepsilon}\frac{F_k(u)\lambda_-^{(j-1)a}(\varphi(u))\Pi_j(u)}{\lambda_+^{(2-j)b}(\varphi(u))}e^{tu}du+\lambda_0^{-k}R_k \tag{7.11}$$
$$=\begin{cases}-P\left(T\ge t,\ Y=k\right), & E\xi_1^{(1)}\ne 0,\\ P\left(T<t,\ Y=k\right), & E\xi_1^{(1)}=0,\end{cases}$$

где $j=1$, если $k\ge b$, и $j=2$, если $k\le -a$;

$F_k(u)=b_{k-b}(\varphi(u))\upsilon_{\varphi(u)}^{-1}\left(\lambda_+(\varphi(u))\right)$ при $k\ge b$ и

$F_k(u)=\beta_{k+a}(\varphi(u))\upsilon_{\varphi(u)}^{-1}\left(\lambda_-(\varphi(u))\right)$ при $k\le -a$, здесь функции $b_k(z),\ \beta_k(z)$ определяются из разложения:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k b_k(z)=\upsilon_z(\lambda),\quad \sum_{k=-\infty}^{0}\lambda^k\beta_k(z)=u_z(\lambda)\quad \left(|\lambda|=\lambda_0\right),$$
$$\left|R_k\right|\le C\left(e^{-\gamma|k|}+e^{-\gamma(k-b+a)\operatorname{sgn}k}\right),$$

$\gamma>0,\ C>0$. При $k\in(-a,b)$ аналогично получаем

$$P\left(T\le t,\ \xi(t)=k\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma/\Gamma_\varepsilon}F_k^{(1)}(u)\mu^b(\varphi(u))\Pi_1(u)e^{tu}du$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma/\Gamma_\varepsilon}F_k^{(2)}(u)\mu^a(\varphi(u))\Pi_2(u)e^{tu}du$$
$$+\lambda_0^{-k}O\left(e^{-\gamma\min(a,a+k)}+e^{-\gamma\min(b,b-k)}\right). \tag{7.12}$$

Здесь

$$F_k^{(1)}(u)=\frac{\left(1-\varphi(u)\right)u_{\varphi(u)}^{-1}\left(\lambda_-(\varphi(u))\right)\upsilon_{\varphi(u)}^{-1}\left(\lambda_+(\varphi(u))\right)}{u\lambda_-^k(\varphi(u))\left(\lambda_-(\varphi(u))-\left(\lambda_+(\varphi(u))\right)\right)},$$
$$F_k^{(2)}(u)=\mu^k(\varphi(u))F_k^1(u).$$

Контур $\Gamma/\Gamma_\varepsilon$ в (7.11), в случае $E\xi_1^{(1)} \neq 0$, можно заменить на участок границы K_ε, лежащий в полуплоскости $\mathrm{Re}\,u \le u_0$. То же самое проделаем и в интегралах в правых частях (7.10) при $u_0 = 0$ и (7.12), однако, учитывая особенности функций $F_k, F_k^{(i)}$, $j = 1,2$, в точке $u = u_0$, будем обходить точку u_0 по дуге д.м. радиуса, лежащей в K_ε. Дальнейший асимптотический анализ интегралов в (7.11) при $E\xi_1^{(1)} \neq 0$ и (7.12) проводится в соответствии со схемой, изложенной в § 6. Отметим лишь следующее изменение, которое необходимо внести в эту схему в этом случае. При $u \in K_\varepsilon$ существуют разложения:

$$\lambda_\pm(\varphi(u)) = \lambda_0 \pm \alpha_1 (u-u_0)^{1/2} + \alpha_2 (u-u_0) \pm \ldots$$
$$= \exp\left\{ \ln\lambda_0 \pm \frac{\alpha_1}{\lambda_0}(u-u_0)^{1/2} + \ldots \right\}, \alpha_1 > 0,$$

что соответствует функции $e^{\lambda_\pm(u)}$ в § 6. Приведем первые члены некоторых разложений.

Теорема 7.3. *Пусть:* $a = x_1\sqrt{t}$, $b = x_2\sqrt{t}$, $0 < C_1 \le x_j \le C_2 < \infty$, $j = 1,2$, $k \ge 0$ *и* $q \ge 1$ *- произвольные целые числа. Тогда, если* $E\xi_1^{(1)} \neq 0$, *то*

$$P(T \ge t,\ Y = k+b) = \frac{e^{tu_0} F_{k+b}(u_0)\alpha_1}{t\lambda_0^{b+1}|u_0|\sqrt{\pi}}$$
$$\times \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \left[x_1 s + x_2\left(s+\frac{1}{2}\right) \right] \exp\left\{ -\frac{\alpha_1^2}{\lambda_0^2}\left[x_1 s + x_2\left(s+\frac{1}{2}\right) \right]^2 \right\} \right.$$
$$\left. - \left[x_1(s+1) + x_2\left(s+\frac{1}{2}\right) \right] \right.$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{\lambda_0^2}\left[x_1(s+1)+x_2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right]^2\right\}\Bigg\}+O\left(e^{tu_0}\lambda_0^{-b}t^{-3/2}\right).$$

Теорема 7.4 *Пусть в условиях теоремы 7.3. число* k *не зависит от* t *и* $k\in(-a,b)$ *. Тогда для любого целого* $q\geq 1$*:*

$$P\left(T\leq t,\ \xi(t)=k\right)=\frac{\left(\varphi(u_0)-1\right)e^{tu_0}}{2\alpha_1|u_0|\sqrt{\pi t}\lambda_0^k u_{z_0}(\lambda_0 0)\upsilon_{z_0}(\lambda_0)}$$

$$\times\sum_{s=0}^{\infty}\left\{\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{\lambda_0^2}\left[x_1(s+1)+x_2 s\right]^2\right\}+\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{\lambda_0^2}\left[x_1 s+x_2(s+1)\right]^2\right\}\right.$$

$$\left.-2\exp\left\{-\frac{\alpha_1^2}{\lambda_0^2}\left[x_1(s+1)+x_2(s+1)\right]^2\right\}\right\}+O\left(t^{-1}e^{tu_0}\right).$$

Способы получения п.а.р. распределений $P(T\geq t,\ Y=k)$ при $k\notin(-a,b)$, $E\xi_1^{(1)}\neq 0$ и $P\left(T\leq t,\ \xi(t)=k\right)$ при $k\in(-a,b)$ в других ситуациях изложены в § 6. Исключение составляет исследование вероятностей $P(T<t,\ Y=k), k\notin(a,b)$, при $E\xi_1^{(1)}=0$. Для этого необходимо использовать другую модификацию метода перевала в связи с наличием у подынтегральных функций в (7.11) простого полюса в нуле (см.(6.15) и замечание к нему).

§ 8. Осциллирующие случайные процессы с независимыми приращениями

Пусть $\xi_i(t), t\geq 0,\ i=0,1,2$ независимые однородные случайные процессы с независимыми приращениями, $\xi_i(0)=0, m_1=E\xi_1(1)<0,\quad m_2=E\xi_2(1)>0$. Траектории процессов предполагаются непрерывными справа. Для произвольных чисел a и b, $-a<0<b$ обозначим:

$$T=\inf\left\{t:\xi_0(t)\notin[-a,b)\right\}.$$

Осциллирующий случайный процесс $X(t)$ строится следующим образом. $X(t)$ совпадает с $\xi_0(t)$ до момента T, т.е. до тех пор, пока впервые не будет достигнуто множество $(-\infty, -a)$ или $[b,\infty)$, после чего процесс $X(t)$ переключается на $\xi_1(t)$ или $\xi_2(t)$ в зависимости от того, которое из множеств $[b,\infty)$ и $(-\infty, -a)$ достигнуто. Если достигнуто множество $[b,\infty)$ раньше, чем $(-\infty,-a)$, то при $t>T$ процесс $X(t)$ совпадает с $\xi_1(t)$ до тех пор, пока впервые после T не будет достигнуто множество $(-\infty, -a)$ в некоторый момент времени $\tau_1^- > T$. Затем в качестве $X(t)$ используется процесс $\xi_2(t)$ до момента τ_2^+ первого после τ_1^- достижения множества $[b,\infty)$. В момент τ_2^+ $X(t)$ опять переключается на процесс $\xi_1(t)$ и т.д. Если же в момент T достигнуто множество $(-\infty,-a)$, то первое переключение происходит в момент T на процесс $\xi_2(t)$. Дальнейшие переключения на $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ происходят в моменты $\tau_1^+, \tau_2^-, \tau_3^+, \tau_4^-, \ldots$ поочередных достижений уровней b и $-a$ соответственно.

Эта процедура может быть формализована следующим образом. Положим $X(0)=0$, $X(t)=\xi_0(t)$ при $0 \le t \le T$; на событии $\{\xi_0(T) \ge b\}$ (т.е., если первый выход процесса $\xi_0(t)$ из множества $[-a,b)$ произошел через верхнюю границу) при $k \ge 0$ определяем:

$$\tau_{2k+1}^- = \inf\left\{t > \tau_{2k}^+ : X\left(\tau_{2k}^+\right) + \xi_1\left(t - \tau_{2k}^+\right) < -a\right\}, \quad \tau_0^+ = T,$$

$$X(t) = X\left(\tau_{2k}^+\right) + \xi_1\left(t - \tau_{2k}^+\right) \quad \textit{при} \quad \tau_{2k}^+ < t < \tau_{2k+1}^-;$$

при $k \ge 1$

$$\tau_{2k}^+ = \inf\left\{t > \tau_{2k-1}^- : X\left(\tau_{2k-1}^-\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k-1}^-\right) \ge b\right\},$$

$$X(t) = X\left(\tau_{2k-1}^-\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k-1}^-\right) \quad \textit{при} \quad \tau_{2k}^- < t \le \tau_{2k}^+.$$

Аналогично, на событии $\{\xi_0(T) < -a\}$ *при* $k \ge 0$ полагаем:

$$\tau_{2k+1}^{+} = \inf\left\{t > \tau_{2k}^{-} : X\left(\tau_{2k}^{-}\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k}^{-}\right) \ge b\right\}, \quad \tau_0^{-} = T,$$

$$X(t) = X\left(\tau_{2k}^{-}\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k}^{-}\right) \;\; при \;\; \tau_{2k} < t \le \tau_{2k+1}^{+};$$

при $k \ge 1$

$$\tau_{2k}^{-} = \inf\left\{t > \tau_{2k-1}^{+} : X\left(\tau_{2k-1}^{+}\right) + \xi_1\left(t - \tau_{2k-1}^{+}\right) < -a\right\},$$

$$X(t) = X\left(\tau_{2k-1}^{+}\right) + \xi_1\left(t - \tau_{2k-1}^{+}\right) \;\; при \;\; \tau_{2k-1}^{+} < t \le \tau_{2k}^{-}.$$

Случайные блуждания с дискретным временем, распределение скачка которых в момент времени n определяется знаком $X(n)$, изучались ранее в $[20,21]$и основном, вопросы возвратности и эргодичности. В $[22,23,24]$ изучались аналоги таких схем осциллирующих блужданий для непрерывного времени, когда переключение происходит с одного процесса с независимыми приращениями на другой. В$[23]$,$[24]$ рассматривались осциллирующие обобщенные пуассоновские процессы и для них изучались распределения некоторых граничных функционалов, в частности, найдено представление для интегрального преобразования стационарного распределения в предположении его существования. А в $[22]$ рассмотрен вопрос существования эргодического распределения.

Осциллирующие случайные блуждания с переключениями, при поочередном достижении полуосей $(-\infty, -a)$ и $[b,\infty)$, (когда $\xi_0(t) \equiv \xi_1(t)$), изучались в работах $[25, 26,27]$. Осциллирующий процесс со сбрасыванием, (когда при достижении $[b,\infty)$ ордината блуждающей частицы уменьшается на величину b), изучался в $[25,28]$ для некоторых специальных типов блуждания с дискретным и непрерывным временем.

Здесь для введенного осциллирующего случайного процесса находится явное выражение для двойного преобразования:

$$\psi(u;\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-ut} E e^{\lambda X(t)} dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \quad \operatorname{Re}\lambda = 0$$

в терминах факторизационных компонент, при дополнительных ограничениях на процессы детализируется $\psi(u;\,\lambda)$ и находится преобразование Фурье – Стилтьеса стационарного распределения. Аналогичная задача в случае дискретного времени и $\xi_0(t)\equiv\xi_1(t)$ решена в $[26]$. Здесь используются метод и некоторые технические приемы из $[26]$.

Прикладной аспект изучения осциллирующих случайных блужданий отражен в $[20]$.

Формулировка основных результатов.

Пусть $\psi_i(\lambda)=\ \ln Ee^{\lambda\xi_i(1)},\ i=0,1,2,\ u/(u-\psi_1(\lambda))=r_{i+}(u;\lambda)r_{i-}(u;\lambda)$ - безгранично делимые факторизации при $\operatorname{Re}\lambda=0,\ \operatorname{Re}u>0$. Напомним, что функции $r_{i+}(u;\lambda)$ (положительные компоненты факторизаций) аналитичны при $\operatorname{Re}\lambda<0$, при $\operatorname{Re}\lambda\le 0$ они непрерывны и не обращаются в нуль за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки; аналогичными свойствами обладают в правой полуплоскости отрицательные компоненты факторизаций $r_{i-}(u;\lambda)$. Функции $r_{i+}(u;\lambda)$ $(r_{i+}(u;\lambda))$ являются преобразованиями Лапласа, при $\operatorname{Re}\lambda\le 0$ $(\operatorname{Re}\lambda\ge 0)$ безгранично делимых распределений, носители которых содержатся на неотрицательной (неположительной) полуоси. Известны формулы для $r_{i\pm}(u;\lambda)$ в терминах характеристик распределения $\xi_i(1)$ (см. § 1).

Здесь на множестве функций h вида:

$$h(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}dH(y),\quad VarH<\infty.$$

введем операторы A и B, действующие следующим образом. При $\operatorname{Re}u>0,\ \ \operatorname{Re}\lambda=0$:

$$Ah(\lambda)=r_{1-}^{-1}(u;\lambda)\left[r_{1-}(u;\lambda)h(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)},$$

$$Bh(\lambda)=r_{2+}^{-1}(u;\lambda)\left[r_{2+}(u;\lambda)h(\lambda)\right]^{[b,\infty)},$$

где, как и ранее, используется обозначение:

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}dG(y)\right]^{D}=\int_{D}e^{\lambda y}dG(y)$$

для любого измеримого $D \subset R$ и произвольной функции G, имеющей ограниченную вариацию (G может зависеть также от u).

Обозначим, при $\operatorname{Re} u \geq 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$

$$V_+(u;\lambda) = E\left(e^{\lambda\xi_0(T)-uT};\ \xi_0(T) \geq b\right),$$

$$V_-(u;\lambda) = E\left(e^{\lambda\xi_0(T)-uT};\ \xi_0(T) < a\right).$$

Выражения для функций $V_\pm(u;\lambda)$ в терминах факторизационных компонентов имеются в § 2. См. также соотношение (14,12) ниже.

Теорема 8.1. *При* $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *справедливо представление:*

$$\psi(u,\lambda) = \frac{1}{u-\psi_0(\lambda)}\left(1 - V_-(u,\lambda) - V_+(u,\lambda)\right)$$

$$+\frac{1}{u-\psi_1(\lambda)}(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}(BA)^k\left(V_+(u,\lambda) + BV_-(u,\lambda)\right)$$

$$+\frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}(I-B)\sum_{k=0}^{\infty}(AB)^k\left(V_-(u,\lambda) + AV_+(u,\lambda)\right), \quad (8.1)$$

где I - тождественный оператор.

В случае, когда первое переключение процесса $\xi_0(t)$ происходит только при первом достижении множества $(-\infty,-a)$,(т.е., когда $\psi_0(\lambda) = \psi_1(\lambda)$), функцию $\psi(u;\lambda)$ обозначим через $\psi_0(u;\lambda)$.

Следствие.8.1. *При* $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$ *имеет место представление:*

$$\psi_0(u;\lambda) = \frac{1}{u-\psi_0(\lambda)}(I-A)\sum_{k=0}^{\infty}(BA)^k e(u;\lambda)$$

$$+\frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}(I-B)\sum_{k=0}^{\infty}(AB)^k Ae(u;\lambda), \quad (8.2)$$

где $e(u;\lambda)\equiv 1$.

Пусть

$$\psi_1(\lambda)=a_1\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\lambda x}-1\right)dS_1(x),\ \int_0^1 xdS_2(x)<\infty,\quad a_1>0,\ (8.3)$$

$$\psi_2(\lambda)=a_2\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\lambda x}-1\right)dS_2(x),\qquad -\int_{-1}^{0} xdS_2(x)<\infty,\quad a_2<0,$$

и пусть $dS_1(x)=k_1e^{ax}dx$ при $x<0,\ dS_2(x)=k_2e^{-\beta x}$, при $x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0,\ k_1>0,\ k_2>0$. В этих условиях, как будет показано ниже, уравнение $u-\psi_1(\lambda)=0$ имеет единственный простой корень в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda<0$, который обозначим через $\lambda_-(u)$, а единственный корень уравнения $u-\psi_2(\lambda)=0$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda>0$ будем обозначать через $\lambda_+(u)$.

Следствие 8.2. Пусть выполнено условие (8.3). Тогда при $\mathrm{Re}\,u>0$,

$\mathrm{Re}\,\lambda=0$**:**

$$\psi_0(u;\lambda)=\frac{1}{u-\psi_0(\lambda)}+\left(1-\delta(u)\mu^{b+a}(u)\right)\times\left(\frac{1}{u-\psi_0(\lambda)}-\frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}\right)$$

$$\times\left(\frac{\delta(u)\mu^{a}(u)\left(\lambda_-(u)-\beta\right)}{\lambda-\beta}e^{(\lambda-\lambda_+(u))b}-\frac{\lambda_-(u)+\alpha}{\lambda+\alpha}e^{-(\lambda-\lambda_-(u))a}\right),$$

где

$$\mu(u)=\exp\left\{\lambda_-(u)-\lambda_+(u)\right\},\ \delta(u)=\frac{\left(\lambda_-(u)+\alpha\right)\left(\lambda_+(u)-\beta\right)}{\left(\lambda_-(u)-\beta\right)\left(\lambda_+(u)+\alpha\right)}.$$

Предположим, что существует стационарное распределение процесса $\lim_{t\to\infty}P\left(X(t)<y\right)=F(y)$. По поводу некоторых условий наличия стационарного режима см. $[23,24]$. Обозначим:

$$W(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda y}dF(y),\quad \mathrm{Re}\,\lambda=0.$$

Следствие.8.3. *При выполнении условий* (8.3)

$$W(\lambda)=\frac{m_1 m_2}{m_1-m_2}\left(b+a+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\left(\frac{\beta}{\lambda-\beta}e^{\lambda b}+\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}e^{-\lambda a}\right)$$
$$\times\left(\frac{1}{\psi_0(\lambda)}-\frac{1}{\psi_2(\lambda)}\right).$$

Утверждения следствий 8.1 – 8.3, в случае дискретного времени известны из $[26]$.

Доказательства теоремы и следствий.

Приведем необходимые для доказательства леммы. В $[27]$ доказана.

Лемма 8.1. *При* $\operatorname{Re}\lambda=0,\ \operatorname{Re}u>0$:

$$\left(u-\psi_0(\lambda)\right)\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda\xi_0(t)},T>t\right)dt=1-V_-(u;\lambda)-V_+(u;\lambda).$$

Пусть τ_i – произвольный марковский момент относительно процесса $\xi_i(t)$, $i=1,2$,

$$f_i(u;\lambda)=E\left(e^{-u\tau_i+\lambda\xi(\tau_i)};\tau_i<\infty\right),\tau_-(-a)=\inf\left\{t\ge\tau_1:\xi_1(t)<-a\right\},$$

$$\tau_+(b)=\inf\left\{t\ge\tau_2:\xi_2(t)<b\right\}.$$

Лемма 8.2 (см. теорему 2.1). *При* $\operatorname{Re}u>0,\ \ \operatorname{Re}\lambda=0$:

$$E\left(e^{-u\tau_-(-a)+\lambda\xi_1(\tau_-(-a))}\right);\ \tau_-(-a)<\infty)=Af_1(u;\lambda),$$

$$E\left(e^{-u\tau_+(b)+\lambda\xi_2(\tau_+(b))}\right);\ \tau_+(b)<\infty)=Bf_2(u;\lambda).$$

Отметим, что в лемме 8.2 распределение приращения $\xi_i(t)$ до момента τ_i включительно может быть произвольным и не влияет на утверждение леммы.

Обозначим через $\upsilon(t)$ число переключений в процессе $X(t)$ до момента t. Тогда можно записать: $\Psi(u;\lambda)=\sum_{k=0}^\infty\left(I_{2k}+I_{2k+1}\right)$, где

$$I_n=\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda X(t)};\upsilon(t)=n\right)dt\,. \tag{8.4}$$

В силу леммы 8.1 при $\operatorname{Re} u > 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda = 0$ имеем:

$$I_0 = \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda X(t)}; \upsilon(t) = 0\right) dt = \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{e\xi_0(t)}; T > t\right) dt$$

$$= \left(u - \psi_0(\lambda)\right)^{-1} \left(1 - V_-(u;\lambda) - V_+(u;\lambda)\right). \tag{8.5}$$

Напомним, что случайные величины $\tau_{2k}^+, \tau_{2k+1}^-$ $\left(\tau_{2k}^-, \tau_{2k+1}^+\right)$ $k \geq 0$ определены на событии $\left\{\xi(T_0) \geq b\right\}$ $\left(\left\{\xi(T_0) < a\right\}\right)$. Далее, при

$\operatorname{Re} u > 0,\ \ \operatorname{Re}\lambda = 0,\ k \geq 0$:

$$\int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^-\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k}^-\right)\right)}; \tau_{2k+1}^+ > t \right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^-\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k}^-\right)\right)};\ \tau_{2k}^- < \infty \right) dt$$

$$- \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^-\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k}^-\right)\right)}; \tau_{2k+1}^+ \leq t \right) dt = I' - I'',$$

$$I' = \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t E\left(e^{\lambda\left(X(\theta) + \xi_2(t-\theta)\right)};\ \tau_{2k}^- \in d\theta\right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t E\left(e^{\lambda\xi_2(t-\theta)} E\left(e^{\lambda X(\theta)};\ \tau_{2k}^- \in d\theta\right) dt\right.$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda X(t)}; \tau_{2k}^- \in dt\right) \int_0^\infty e^{-ut} E e^{\lambda\xi_2(t)} dt$$

$$= \frac{1}{u - \psi_2(\lambda)} E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k}^-\right) - u\tau_{2k}^-};\ \tau_{2k}^- < \infty \right).$$

$$I'' = \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t \int_{-\infty}^{-a} E\left(e^{\lambda y + \xi_2(t-\theta)}, X(\theta) \in dy,\ \tau_{2k}^- \in d\theta,\right.$$

$$\left.\tau_+(b - y) \leq t - \theta\right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t \int_{-\infty}^{-a} E\left(e^{\lambda\xi_2(t-\theta)}; \tau_+(b-y) \leq t - \theta\right) \times e^{\lambda y} P\left(\tau_{2k}^- \in d\theta, X(\theta) \in dy\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^t P\left(\tau_{2k}^- \in d\theta, X(\theta) \in dy\right) \times E\left(e^{\lambda\xi_2(t-\theta)};\ \tau_+(b-y) \leq t - \theta\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \int_0^{\infty} e^{-ut} P\left(\tau_{2k}^{-} \in dt,\ X(t) \in dy\right) \times \int_0^{\infty} e^{-ut} E\left(e^{\lambda \xi_2(t)}; \tau_{+}(b-y) \le t\right) dt$$

$$= \frac{1}{u-\psi_2(\lambda)} \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \int_0^{\infty} e^{-ut} P\left(\tau_{2k}^{-} \in dt;\ X(t) \in dy\right)$$

$$\times \int_0^{\infty} e^{-ut} E\left(e^{\lambda \xi_2(t)};\ \tau_{+}(b-y) \in dt\right)$$

$$= \frac{1}{u-\psi_2(\lambda)} \cdot E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+1}^{+}\right) - \tau_{2k+1}^{+}}; \tau_{2k+1}^{+} < \infty\right)$$

Таким образом, при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $k \ge 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^{-}\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k}^{-}\right)\right)}; \tau_{2k+1}^{-} > t\right) dt$$

$$= \frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}\left(E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k}^{-}\right) - u\tau_{2k}^{-}}; \tau_{2k}^{-} < \infty\right) - E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+1}^{-}\right) - u\tau_{2k+1}^{-}};\ \tau_{2k+1}^{-} < \infty\right)\right)$$

$$= \frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}\left((AB)^k V_{-}(u;\lambda) - (BA)^k BV_{-}(u;\lambda)\right). \qquad (8.6)$$

Последнее равенство получается последовательным применением леммы 8.2.

Аналогично, при $\operatorname{Re} u > 0$, $\operatorname{Re}\lambda = 0$, $k \ge 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k+1}^{+}\right) + \xi_1\left(t - \tau_{2k+1}^{+}\right)\right)}; \tau_{2k+2}^{+} > t\right) dt$$

$$= \frac{1}{u-\psi_1(\lambda)}\left(E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+1}^{+}\right)^{-u\tau_{2k+1}^{+}}}; \tau_{2k+1}^{+} < \infty\right)\right.$$

$$\left. - E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+2}^{+}\right) - u\tau_{2k+2}^{+}};\ \tau_{2k+2}^{+} < \infty\right)\right)$$

$$= \frac{1}{u-\psi_1(\lambda)}\left((BA)^k BV_{-}(u;\lambda) - (AB)^{k+1} V_{-}(u;\lambda)\right), \qquad (8.7)$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^{+}\right) + \xi_1\left(t - \tau_{2k}^{+}\right)\right.}; \tau_{2k+1}^{-} > t\right) dt$$

$$=\frac{1}{u-\psi_1(\lambda)}\left(E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k}^+\right)-u\tau_{2k}^+};\tau_{2k}^+<\infty\right)-E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+1}^-\right)-\tau_{2k+1}^+};\ \tau_{2k+1}^-<\infty\right)\right)$$

$$=\frac{1}{u-\psi_1(\lambda)}\left((BA)^k V_+(u;\lambda)-(AB)^k AV_+(u;\lambda)\right), \qquad (8.8)$$

$$\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k+1}^-\right)+\xi_2\left(t-\tau_{2k+1}^-\right)\right)};\tau_{2k+2}^+>t\right)dt$$

$$=\frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}\left[E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+1}^+\right)-u\tau_{2k+1}^-};\tau_{2k+1}^+<\infty\right)\right.$$

$$\left.-E\left(e^{\lambda X\left(\tau_{2k+2}^+\right)-u\tau_{2k+2}^-};\ \tau_{2k+2}^+<\infty\right)\right]$$

$$=\frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}\left[(AB)^k AV_+(u;\lambda)-(BA)^{k+1}V_+(u;\lambda)\right] \qquad (8.9)$$

При $k\geq 0$, $\mathrm{Re}\,u>0$, $\mathrm{Re}\,\lambda=0$, в силу соотношений (8.6) – (8.9) имеем:

$$I_{2k+1}=\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda X(t)};\upsilon(t)=2k+1\right)dt$$

$$\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda X(t)};\upsilon(t)=2k+1,\ \xi_0(T)<-a\right)$$

$$+\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda X(t)};\upsilon(t)=2k+1,\ \xi_0(T)\geq b\right)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^-\right)+\xi_2\left(t-\tau_{2k}^-\right)\right)};\tau_{2k+1}^+>t\right)dt$$

$$+\int_0^\infty e^{-ut}E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k}^+\right)+\xi_1\left(t-\tau_{2k}^-\right)\right)};\tau_{2k+1}^-,>t\right)dt$$

$$=\frac{1}{u-\psi_2(\lambda)}\left[(AB)^k V_-(u;\lambda)-(BA)^k BV_-(u;\lambda)\right]$$

$$+\frac{1}{u-\psi_1(\lambda)}\left[(BA)^k V_+(u;\lambda)-(BA)^k AV_+(u;\lambda)\right], \qquad (8.10)$$

а при $k \ge 1$ находим:

$$I_{2k} = \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda X(t)}; \upsilon(t) = 2k\right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda X(t)}; \upsilon(t) = 2k,\ \xi_0(T) < -a\right) dt$$

$$+ \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda X(t)}; \upsilon(t) = 2k,\ \xi_0(T) \ge b\right) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k-1}^{+}\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k-1}^{+}\right)\right)}; \tau_{2k}^{-} > t \right) dt$$

$$+ \int_0^\infty e^{-ut} E\left(e^{\lambda\left(X\left(\tau_{2k-1}^{-}\right) + \xi_2\left(t - \tau_{2k-1}^{-}\right)\right)}; \tau_{2k}^{+}, > t \right) dt$$

$$= \frac{1}{u - \psi_1(\lambda)} \left[(BA)^{k-1} B V_-(u;\lambda) - (AB)^k V_-(u;\lambda) \right]$$

$$+ \frac{1}{u - \psi_2(\lambda)} \left[(AB)^{k-1} A V_+(u;\lambda) - (BA)^k V_+(u;\lambda) \right] \qquad (8.11)$$

Собирая воедино (8.4), (8.5) (8.10), (8.11) получим доказательство теоремы.

Отметим, что, если при $\operatorname{Re}\lambda = 0,\ \operatorname{Re} u > 0$:

$$C_+ h(\lambda) = r_{0+}^{-1}(u;\lambda) \left[r_{0+}(u;\lambda) h(\lambda) \right]^{[b,\infty)},$$

$$C_- h(\lambda) = r_{0-}^{-1}(u;\lambda) \left[r_{0-}(u;\lambda) h(\lambda) \right]^{(-\infty,-a)},$$

то

$$V_+(u;\lambda) = C_+ \sum_{k=0}^{\infty} (C_- C_+)^k e(u;\lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} (C_+ C_-)^k e(u;\lambda), \qquad (8.12)$$

$$V_-(u;\lambda) = C_- \sum_{k=0}^{\infty} (C_+ C_-)^k e(u;\lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} (C_- C_+)^k e(u;\lambda).$$

Эти равенства легко доказываются с помощью (2.6), (2.7).

Для доказательства следствия 8.1 достаточно в (8.1) положить $\psi_0(\lambda) = \psi_1(\lambda)$. При этом выражения с участием $V_+(u;\lambda)$ будут отсутствовать и $V_-(u;\lambda) = Ae(u,\lambda)$ (см. лемму 8.2).

Доказательство следствия 8.2. В условиях (8.3):

$$\psi_1(\lambda) = a_1\lambda + \int_0^\infty \left(e^{\lambda x} - 1\right) dS_1(x) - \frac{k_1\lambda}{\alpha(\lambda+\alpha)},$$

$$\psi_2(\lambda) = a_2\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1\right) dS_2(x) - \frac{k_1\lambda}{\beta(\lambda-\beta)},$$

функция:

$$\psi_{1+}(\lambda) = a_1\lambda + \int_0^\infty \left(e^{\lambda x} - 1\right) dS_1(x) \left(\psi_{2-}(\lambda) = a_2\lambda + \int_{-\infty}^0 \left(e^{\lambda x} - 1\right) dS_2(x)\right)$$

соответствует возрастающему (убывающему) процессу, и уравнение $u - \psi_{1+}(\lambda) = 0$ $\left(u - \psi_{2-}(\lambda) = 0\right)$ не имеет решений в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ $\left(\operatorname{Re} u > 0\right)$, так как:

$$\operatorname{Re}\left(u - \psi_{1+}(\lambda)\right) = \operatorname{Re} u - a_1 x_1 - \int_0^\infty \left(e^{x_1 x}\cos y_1 x - 1\right) dS_1(x) > 0$$

$$\left(\operatorname{Re}\left(u - \psi_{2-}(\lambda)\right) < 0\right), \quad \lambda = x_1 + i y_1 .$$

Заметим также, что

$\dfrac{u-\psi_1(\lambda)}{u-\psi_{1+}(\lambda)} = 1 + \dfrac{k_1\lambda}{\alpha(\lambda+\alpha)\left(u-\psi_{1+}(\lambda)\right)} \to 1$, при $\lambda \to -\infty$ в силу сходимости $\psi_1(\lambda) \to \infty$, при $\lambda \to -\infty$. При $\operatorname{Re}\lambda = 0,\ \operatorname{Re} u > 0$:

$\operatorname{Re}\left(u - \psi_1(\lambda)\right) > 0, \quad \operatorname{Re}\left(u - \psi_{1+}(\lambda)\right)^{-1} \ge 0$, следовательно,

$$\operatorname*{ind}_{\operatorname{Re}\lambda=0} \frac{u-\psi_1(\lambda)}{u-\psi_{1+}(\lambda)} = 0 .$$

Поскольку функция $u - \psi_1(\lambda)$ имеет единственный полюс при $\operatorname{Re}\lambda < 0$ в точке $\lambda = -\alpha$, в силу принципа аргумента уравнение $u - \psi_1(\lambda) = 0$ имеет единственное решение $\lambda_-(u)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$. В силу того, что $E\xi_1(1) < 0$, функция $\psi_1(\lambda)$ выпукла на $(-\alpha;0)$, $\lim\limits_{\lambda\to-\alpha+0}\psi_1(\lambda) = \infty$, $\psi_1(0) = 0$, получаем $\lambda_-(u) \to 0$ и $\lambda_-(u) = \dfrac{u}{E\xi_1(1)} + o(u)$ при $u \to 0$.

Таким образом, мы выполним все требования к компонентам факторизации, положив:

$$r_{1-}(u;\lambda)=\frac{\lambda+\alpha}{\lambda-\lambda_-(u)},\qquad r_{1+}(u;\lambda)=\frac{r_1(u;\lambda)(\lambda-\lambda_-(u))}{\lambda+\alpha}.$$

Совершенно аналогично находим:

$$r_{2+}(u;\lambda)=\frac{\lambda-\beta}{\lambda-\lambda_+(u)},\qquad r_{2-}(u;\lambda)=\frac{r_2(u;\lambda)(\lambda-\lambda_+(u))}{\lambda-\beta},$$

где $\lambda_+(u)$ - единственный корень уравнения $u-\psi_2(\lambda)=0$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0,\ u>0,\ \lambda_+(u)=u\left(E\xi_2(1)\right)^{-1}+o(u)$, при $u\to 0$.

Последующие леммы 8.3 и 8.4 получаются прямыми вычислениями.

Лемма 8.3. *Пусть функция* $g(\lambda)$ *имеет вид:*

$$g(\lambda)=\int_0^\infty e^{\lambda y}dG(y),\quad \operatorname{Re}\lambda=0,\quad VarG<\infty.$$

Тогда:

$$(Ag)(u;\lambda)=\frac{\lambda_-(u)+\alpha}{\lambda+\alpha}g(\lambda_-(u))e^{-(\lambda-\lambda_-(u))a}.$$

Доказательство следует из следуюўих равенств:

$$\left[r_{1-}(u;\lambda)g(\lambda)\right]^{(-\infty,a)}=\left[\frac{\lambda+\alpha}{\lambda-\lambda_-(u)}g(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)}$$

$$=\left[\left(1+(\lambda_-(u)+\alpha)\int_{-\infty}^0 e^{(\lambda-\lambda_-(u))}dx\right)g(\lambda)\right]^{(-\infty,-a)}$$

$$=(\lambda_-(u)+\alpha)\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}\int_0^\infty e^{\lambda_-(u)(t-x)}dG(t)\,dx$$

$$=\frac{\lambda_-(u)+\alpha}{\lambda-\lambda_-(u)}g(\lambda_-(u))e^{-(\lambda-\lambda_-(u))a}.$$

Аналогично проверяется следующее утверждение.

Лемма 8.4. *Для всякой функции* g *вида:*

$$g(\lambda)=\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda y} dG(y),\ \operatorname{Re}\lambda=0,\ VarG<\infty$$

справедливо равенство:

$$(Bg)(u;\lambda)=\frac{\lambda_+(u)-\beta}{\lambda-\beta} g(\lambda_+(u)) e^{(\lambda-\lambda_+(u))b}.$$

Леммы 8.3, 8.4 позволяют для любого $k\geq 1$ вычислить:

$$(BA)^k e(u;\lambda)=\frac{\lambda_-(u)-\beta}{\lambda-\beta}\delta^k(u)\mu^{(b+a)k}(u)e^{(\lambda-\lambda_-(u))b}, \quad (8.13)$$

$$(AB)^k Ae(u;\lambda)=\frac{\lambda_-(u)+\alpha}{\lambda+\alpha}\delta^k(u)\mu^{(b+a)k}(u)e^{-(\lambda-\lambda_-(u))a}, \quad (8.14)$$

где

$$\mu(u)=e^{\lambda_-(u)-\lambda_+(u)},\ \delta(u)=\frac{(\lambda_+(u)-\beta)(\lambda_-(u)+\alpha)}{(\lambda_-(u)-\beta)(\lambda_+(u)+\alpha)}.$$

Подстановка (8.13), (8.14) в (8.2) (см. следствие 8.1) завершает доказательство следствия 8.2. Утверждение следствия 8.3 следует из того, что при условии существования стационарного распределения $X(t)$:

$$W(\lambda)=\lim_{u\to 0} u\cdot\psi(u;\lambda),$$

и при сделанных предположениях:

$$\mu(u)=1+u\left(\frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}\right)+O(u^2),$$

$$\delta(u)=1-u\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_1}\right)+O(u^2),$$

при $u\to 0$. Утверждение о существовании стационарного распределения в наших условиях имеется в $[25,28]$.

Описанным выше способом можно вычислить $\psi(u;\lambda)$, в случае, когда $r_0(u;\lambda), r_{1-}(u;\lambda)$ и $r_{2+}(u;\lambda)$ являются рациональными функциями по переменной λ, однако, в этом случае вычисления становятся более громоздкими.

§ 9. Распределение числа пересечений интервала для случайных процессов с независимыми приращениями

Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$ - однородный случайный процесс с независимыми приращениями и непрерывными справа выборочными траекториями $\xi(0)=0$, и пусть сходится один из интегралов:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} P\big(\xi(t)>0\big)dt < \infty \text{ или } \int_1^\infty \frac{1}{t} P\big(\xi(t)<0\big)dt < \infty. \quad (9.1)$$

Известно $[9]$, что для этого достаточно, чтобы существовало $E\xi(1)\neq 0$. Сделанное предположение исключает возможность бесконечного числа пересечений интервала процессом $\xi(t)$.

Пусть $-a<0<b$. При каждом $k \geq 1$ введем событие $E_k^{(1)}$, означающее, что при некоторых $0<t_1<t_2<...<t_{2k}$ имеют место неравенства:

$$\xi(t_1)<-a,\ \xi(t_2)\geq b,\quad \xi(t_3)<-a,...,\xi(t_{2k-1})<-a,\ \xi(t_{2k})\geq b\ ,$$

а событие $E_k^{(2)}$ происходит, если

$$\xi(\theta_1)\geq b,\ \xi(\theta_2)<-a,\ \ \xi(\theta_3)\geq b,...,\xi(\theta_{2k-1})\geq b,\ \ \xi(\theta_{2k})<-a$$

при некоторых $0<\theta_1<\theta_2<...<\theta_{2k}$. Положим:

$$E_k^{(3)}=E_k^{(1)}\cap\left\{\xi(t_{2k+1})<-a \text{ при некотором } t_{2k+1}>t_{2k}\right\},$$

$$E_k^{(4)}=E_k^{(2)}\cap\left\{\xi(\theta_{2k+1})\geq b \text{ при некотором } \theta_{2k+1}>\theta_{2k}\right\}.$$

Введем случайные величины ζ_i, равные числу пересечений интервала $[-a,b)$ траекторией процесса $\xi(t)$ снизу вверх $(i=1)$ и сверху вниз $(i=2)$, т.е. $\{\zeta_i\geq k\}=E_k^{(i)}$, $k\geq 1$. Пусть $\zeta=\zeta_1+\zeta_2$ - общее число пересечений интервала. Нетрудно видеть, что

$$P(\zeta\geq 2k)=P\Big(E_k^{(3)}\Big)+P\Big(E_k^{(4)}\Big)-P\Big(E_{k+1}^{(1)}\Big)-P\Big(E_{k+1}^{(2)}\Big)+P\Big(E_{k+1}^{(3)}\Big)+P\Big(E_{k+1}^{(4)}\Big)-...,$$

$$P(\zeta\geq 2k-1)=P\Big(E_k^{(1)}\Big)+P\Big(E_k^{(2)}\Big)-P\Big(E_k^{(3)}\Big)-P\Big(E_k^{(4)}\Big)+....$$

Для подсчета $P\left(E_k^{(3)}\right),\ k \geq 1$ применим теорему 2.1. Для этого введем последовательность марковских моментов:

$$\tau_0^{\pm} = 0,\ \ \tau_i^{-} = \inf\left\{t > \tau_{i-1}^{+} : \xi(t) < -a\right\},$$

$$\tau_i^{+} = \inf\left\{t > \tau_{i-1}^{-} : \xi(t)(t) \geq b\right\}.$$

Здесь каждый момент $\tau_i^{\pm}$ полагается равным бесконечности, если определяющие его неравенство не выполняется ни при каких $t > \tau_{i-1}^{\pm}$ или, если $\tau_{i-1}^{\pm} = \infty,\ i = 1,2,...$. Ясно, что $P(\zeta_1 \geq k) = P\left(\tau_k^{+} < \infty\right)$, $\mathrm{P}(\zeta_2 \geq k) = \mathrm{P}\left(\tau_k^{-} < \infty\right)$, при каждом $k \geq 1$. Пусть операторы A и B определены как в § 2. Тогда из теоремы 2.1 следует, что при $\mathrm{Re}\,u > 0,\ \mathrm{Re}\,\lambda = 0$:

$$E\left(\exp\left\{-u\tau_k^{+} + \lambda\xi\left(\tau_k^{+}\right)\right\};\tau_k^{+} < \infty\right) = (BA)^k e(u;\lambda),$$

$$E\left(\exp\left\{-u\tau_k^{-} + \lambda\xi\left(\tau_k^{-}\right)\right\};\tau_k^{-} < \infty\right) = (AB)^k e(u;\lambda).$$

Пологая $\lambda = 0$ и устремляя u к нулю, получим следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Пусть выполнено (9.1), тогда для любого целого* $k \geq 1$:

$$P(\zeta_1 \geq k) = \lim_{u\to 0}(BA)^k e(u,0),\ P(\zeta_2 \geq k) = \lim_{u\to 0}(AB)^k e(u,0) \qquad (9.2)$$

$$P(\zeta \geq 2k) = \lim_{u\to 0}\Big[A(BA)^k e(u,0) + B(AB)^k e(u,0)$$
$$-(BA)^{k+1} e(u,0) - (AB)^{k+1} e(u,0) + ...\Big]\ , \qquad (9.3)$$

$$P(\zeta \geq 2k-1) = \lim_{u\to 0}\Big[(AB)^k e(u,0) + (BA)^k e(u,0)$$
$$-A(BA)^k e(u,0) - B(AB)^k e(u,0) + ...\Big].$$

Сходимость рядов в представлениях для $P(\zeta \geq m)$ следует из вероятностного смысла слагаемых.

Заметим, что требование $0 \in [-a,b)$ не принципиально; изменения, которые следует внести в формулы (9.2), (9.3), при $0 \notin [-a,b)$, очевидны. Например, при $0 < -a < b$:

$$P(\zeta_1 \geq k) = (BA)^{k-1} Be(u,0), \qquad P(\zeta_2 \geq k) = (AB)^k e(u,0).$$

Пример: Пусть $\xi(t)$ - винеровский процесс с отрицательным сносом, т.е. $\psi(\lambda)=\alpha\lambda+\frac{\sigma^2\lambda^2}{2}, \alpha<0$.

В этом случае имеем:

$$r_{u\pm}(\lambda)=\frac{\lambda_\pm(u)}{\lambda_\pm(u)-\lambda},$$

где

$$\lambda_\pm(u)=\frac{\pm\left(\alpha^2+2u\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}-\alpha}{\sigma^2}.$$

Непосредственными вычислениями устанавливаем, что

$$Ae(u,\lambda)=\exp\left\{-\left(\lambda-\lambda_-(u)\right)a\right\}, Be(u,\lambda)=\exp\left\{\left(\lambda-\lambda_+(u)\right)b\right\},$$

$$(BA)^k e(u,\lambda)=\exp\left\{\lambda b+\lambda_-(u)\left((k-1)b+ka\right)-k\lambda_+(u)(b+a)\right\},$$

$$(AB)^k e(u,\lambda)=\exp\left\{-\lambda a+k\lambda_-(u)\left((k-1)b+a\right)\right.$$
$$\left.-\lambda_+(u)\left(kb+(k-1)a\right)\right\},$$

$$A(BA)^k e(u,\lambda)=\exp\left\{-\lambda a+\lambda_-(u)\left(kb+(k+1)a\right)-k\lambda_+(u)(b+a)\right\}$$

$$B(AB)^k e(u,\lambda)=\exp\left\{\lambda b+k\lambda_-(u)(b+a)-\lambda_+(u)\left((k+1)b+ka\right)\right\}.$$

Так как $\lambda_+(0)=-\frac{2\alpha}{\sigma^2}, \lambda_-(0)=0$, из (9.2), (9.3) получаем:

$$P(\zeta_1\ge k)=\exp\left\{2\alpha\sigma^{-2}k(b+a)\right\}=P(\zeta\ge 2k),$$

$$P(\zeta_2\ge k)=\exp\left\{2\alpha\sigma^{-2}\left(kb+(k-1)a\right)\right\}=P(\zeta\ge 2k-1).$$

Представления (9.2), (9.3) сложны для прямых вычислений в более общих случаях. В то же время они могут служить основой для дальнейшего асимптотического анализа распределения числа пересечений. Воспользуемся результатами асимптотических исследований операторов A и B из предыдущих параграфов. Пусть выполняются условия 1 – 2, А или Б (см. §1), $E\xi(1)<0$ и $\lambda_-<0<\lambda_+, \psi(\lambda_+)>0$. Тогда из лемм 3.3, 3.4 следует (см. также замечания 3.1, 4.1), что для функции $g(u,\lambda)\in B\left(0,\lambda_{\delta+}(u)\right)$ при $0<u<u_{+}$ выполняется (в обозначениях § 1):

$$Bg(u,\lambda)=\frac{\upsilon_u\left(\lambda_+(u)\right)g\left(u,\lambda(u)\right)e^{\lambda b}}{\upsilon_u(\lambda)e^{\lambda_+(u)b}}+\left(\lambda-\lambda_+(u)\right)\int_b^{\infty}e^{\lambda x}\varphi_u(x)dx, \quad (9.4)$$

где

$$\left|\theta_u(x)\right|\le C_1e^{-(q+\delta)x}, x\ge b,\; Bg(0,0)=q_2g(0,q)e^{-qb}+O\left(e^{-(q+\delta)b}\right),$$

а для функции $g_1(u,\lambda)\in B\left(\lambda_{\delta-}(u),0\right)$ при $0<u<u_-$

$$Ag_1(u,\lambda)=\frac{\omega_u\left(\lambda_-(u)\right)g_1\left(u,\lambda_-(u)\right)e^{\lambda a}}{\omega_u(\lambda)e^{\lambda_-(u)(u)}a}+\left(\lambda-\lambda_-(u)\right)\int_{-\infty}^{-a}e^{\lambda x}\theta_u(x)dx,$$

где $\left|\theta_u(x)\right|\le C_2e^{-\delta x}, x<-a,\; Ag(0,0)=g_1(0,0)$.

Напомним, что здесь используются свойства:

$$\upsilon_u(0)=\omega_u(0)=-1,\; \lambda_+(0)=q,\; \lambda_-(0)=0 \text{ при } E\xi(1)<0.$$

Из (9.4), (9.5) получаем:

$$Be(0,0)=q_2e^{-qb}+O\left(e^{-(q+\delta)b}\right),\; Ae(0,0)=1,$$

$$BAe(0,0)=q_1q_2e^{-q(b+a)}\left(1+O\left(e^{-\delta(b+a)}\right)\right) \quad .$$

Последовательное применение оператора B, A в соответствии с (9.2), (9.3) и асимптотические представления (9.4), (9.5) для них позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 9.2. *Пусть выполняются условия 1 – 2, А или Б (§ 1),* $E\xi(1)<0$ *и* $\lambda_-<0<\lambda_+, \psi(\lambda_+)>0$ *. Тогда при некотором* $\delta>0$ *и* $b\to\infty$ *для* $k\ge1$ *справедливы соотношения:*

$$P(\zeta_1\ge k)=(q_1q_2)^k\,e^{-\delta(b+a)k}\left(1+O\left(e^{-\delta(b+a)}\right)\right)$$

$$=P(\zeta\ge 2k)\left(1+O\left(e^{-\delta(b+a)}\right)\right),$$

$$P(\zeta_2\ge k)=q_1^{k-1}q_2^ke^{-q(b+a)(k-1)-qb}\left(1+O\left(e^{-\delta(b+a)}\right)\right)$$

$$=P(\zeta\ge 2k-1)\left(1+O\left(e^{-\delta(b+a)}\right)\right).$$

Случай $E\xi(1)<0$ рассматривается аналогично.

Литература

1. Боровков А.А. (1960) Предельные теоремы о распределении максимума сумм, ограниченных решетчатых случайных величин, I, II, *Теория вероятностей и ее применения*, т.5, N2, 137 – 172; N4, 377- 392.

2. Боровков А.А. (1962) Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых, *Сиб.мат.жур.*, т.3, N5, 645 – 694.

3. Боровков А.А., Рогозин Б.А. (1964) Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий, *Теория вероятностей и ее применения*, т.9, N3, 401 – 430.

4. Лотов В.И. (1979) Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах, I, II, *Теория вероятностей и ее применения*, т.24, N3 - 4, 475 – 485, 873 – 879.

5. Лотов В.И. (1979) Об асимптотике распределений, связанных с выходом недискретного случайного блуждания из полосы, *Труды ИМ СО АН СССР, т. 1, 18- 25.*

6. Рогозин Б.А. (1969) Распределение максимума процесса с независимыми приращениями, *Сиб.мат.журн.,* т.10, N6, 1334 – 1363.

7. Боровских Ю.В. (1979) Полные асимптотические разложения для резольвенты полунепрерывного процесса с независимыми приращениями с поглощением и распределение вероятности разорения. *Аналитические методы в теории вероятностей*, 10 – 21, Наукова Думка, Киев.

8. Братийчук Н.С (1981) *Полные асимптотические разложения для распределений моментов выхода процесса с независимыми приращениями из полосы*, Препринт 81.88, ИМ АН УССР, Киев.

9. Рогозин Б.А. (1966) О распределении некоторых функционалов, связанных с граничными задачами для процессов с независимыми приращениями, *Теория вероятностей и ее применения*, т.11, N4, 656 – 670.

10. Линник Ю.В. (1960) *Разложение вероятностных законов*, Ленинградский университет, Ленинград.

11. Kemperman J. H. B. (1963) A Wiener – Hopf type method for a general random walk with a two – sided boundary, AMS, т.34, N4, 1168 – 1193.

12. Печерский Е.А. (1974) Некоторые тождества связанные с выходом случайного блуждания из отрезка и полуинтервала. *Теория вероятностей и ее применения*, т.19, N1, 104 – 119.

13. Лотов В.И. (1989) Об одном подходе в двуграничных задачах, *Статистика и управление случайными процессами*, Наука, Москва.

14. Боровков А.А. (1972) *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*. Наука. Москва.

15. Боровков А.А., Королюк В.С. (1965) О результатах асимптотического анализа в задачах с границами. *Теория вероятностей и ее применения*, т.10, N2, 255 – 265.

16. Братийчук Н.С., Гусак Д.В. (1990) *Граничные задачи для процессов с независимыми приращениями*. Наукова Думка. Киев.

17. Фукс Б.А. (1971) *Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных*, Наука, Москва.

18. Брейн Н.Г. де (1961) *Асимптотические методы в анализе*. Иностр. лит., Москва.

19. Ходжибаев В.Р. (1982) Асимптотический анализ распределений в двуграничных задачах для случайных блужданий с непрерывным временем, I, II, Деп. в ВИНИТИ, N3281 - 82, 3282 – 82, 23, 30.

20.Боровков А.А. (1980) Предельное распределение для осциллирующего случайного блуждания // *Теория вероятностей и ее применения*. V. 25, N 3. P. 663 – 665.

21. Рогозин Б.А., Фосс С. Г. (1978) Возвратность осциллирующего случайного блуждания // *Теория вероятностей и ее применения*. V. 23, N 1. P. 161 – 169.

22. Братийчук Н.С., Гусак Д.В. (1986) Эргодическое распределение осциллирующего процесса с независимыми приращениями // *Укр. мат. журн.*. V. 38, N 5. P. 547 – 554.

23. Братийчук Н.С., Гусак Д.В., (1984) Елейко О.И. *Распределение Некоторых Функционалов от Осциллирующего Случайного Процесса* /Препринт 84.9. Киев: ИМ АН УССР.

24. Гусак Д.В., Елейко О.И. (1981) *Об Осциллирующем пуассоновском процессе. Аналитические методы исследования в теории вероятностей.* Киев: ИМ АН УССР.

25. Гусак Д.В.(1990) Осциллирующие процессы с независимыми приращениями и невырожденной вигнеровской компонентой // *Укр. мат. журн.* V. 42, N 10. P. 1415 – 1421.

26. Лотов. В.И. (1996) Об осциллирующих случайных блужданиях // *Сиб. мат. журн*. V. 37, N 4. P. 869 – 880.

27. Прохоров Ю.В. (1964) Управление винеровским процессом при ограниченном числе переключений // *Труды МИ АН СССР им. В.А. Стеклова*. V. 71. P. 82 – 87.

28. Гусак Д.В. (1988) Об осциллирующих схемах случайного блуждания: I, II // *Теория вероятностей и математическая статистика.* N 39. P. 33 –39; 11 – 17. N 40 .

29. Ито К., Маккин Г. (1968) Диффузионные процессы и их траектории. – Москва: МИР.

30. Скороход А. В. (1986) Случайные процессы с независимыми приращениями. – Москва: Наука.

Abstract

We obtain complete asymptotic expansions for the joint distribution of the first exit time from an interval and allocation of a stochastic process with independent increments and for the generalized renewal process. Asymptotic analysis is carried out under supposition that one or two of the interval boundaries tend to infinity. The results are proven for the wide range of deviations including normal and large deviations.

Exact formulae for the binary transformation of the distribution of the oscilating process with independent increments and for the Fourier-Stilties transformation of the stationary distribution have also been obtained. Exat and asymptotic formulae for the distribution of the crossing number of a band by the trajectories of homogeneous process with independent increments have been derived.

Аннотация

Бир жинсли боғлиқсиз орттирмага эга бўлган ва умумлашган тикланиш тасодифий жараёнлари учун интервалдан биринчи марта чиқиш моменти ва қаралаётган тасодифий жараёнларнинг шу чиқиш моментидаги ҳолати биргаликдаги тақсимоти учун лимит теоремалар исбот қилинган, тўла асимптотик ёйилмалар топилган. Бунда чегараларнинг нормал ва катта оғишлари, иккала чегара ёки фақат битта чегара ўсиш ҳоллари қаралган.

Маълум чегараларга етганда тақсимотини ўзгартирадиган боғлиқсиз орттирмага эга бўлган тасодифий жараёнлар тақсимоти икки ўлчовли алмаштириши ва стационар тақсимотининг Фурье-Стилтьес алмаштириши учун аниқ ифодалар олинган.

Бир жинсли боғлиқсиз орттирмага эга бўлган тасодифий жараёнларнинг оралиқни кесиб ўтишлар сони тақсимоти учун аниқ ифодалар ва асимптотик ёйилмалар келтириб чиқарилган.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение …………………………………………………... 3

§ 1. Предварительные сведения о свойствах факторизации 8

§ 2. Факторизационные тождества для двойных преобразований …………………………………………………….. 16

§ 3. Асимптотические представления для преобразований в случае роста двух границ ………………………………. 22

§ 4. Оценки для преобразований вне окрестности точки u_0 (случай $a \to \infty, b \to \infty$)………………………………… 37

§ 5. Асимптотические представления преобразований в случае роста только одной из границ………………………. 46

§ 6. Полные асимптотические разложения для вероятностей……………………………………………………………. 55

§ 7. Двуграничные задачи для обобщенного процесса восстановления………………………………………………. 76

§ 8. Осциллирующие случайные процессы с независимыми приращениями………………………………………….. 90

§ 9. Распределение числа пересечений интервала для случайных процессов с независимыми приращениями…… 104

Литература ……………………………………………… 108

В.Р.ХОДЖИБАЕВ

ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ВЫХОДОМ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ ИЗ ИНТЕРВАЛА

Ташкент – «Fan va texnologiya» – 2014

Редактор: Г.Шахамидова
Тех. редактор: М.Холмухамедов
Художник: Д.Азизов
Компьютерная вёрстка: Н.Хасанова

E-mail: tipografiyacnt@mail.ru Тел: 245-57-63, 245-61-61.
Изд.лиц. AI№149, 14.08.09. Разрешено в печать 25.04.2014.
Формат 60х84 $^{1}/_{16}$. Гарнитура «Times New Roman».
Офсетная печать. Усл. печ.л. 6,75. Изд. печ.л. 7,0.
Тираж 500. Заказ № 58.

Отпечатано в типографии
«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi».
100066, г. Ташкент, ул. Алмазар, 171.