**В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

**МАМАДАЛИЕВ ЎКТАМЖОН ХАСАНБОЕВИЧ**

# НИЛРАДИКАЛИ БЕРИЛГАН ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ҚАТТИҚЛИГИ

**01.01.06 – Алгебра**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ**
**бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси**
**АВТОРЕФЕРАТИ**

**Тошкент – 2020**

**УДК: 512.554**

## Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

## Оглавление автореферата докторской диссертации

## доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

## Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

---

**ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ**

**МАМАДАЛИЕВ ЎКТАМЖОН ХАСАНБОЕВИЧ**

# НИЛРАДИКАЛИ БЕРИЛГАН ЕЧИЛУВЧАН ЛЕЙБНИЦ АЛГЕБРАЛАРИНИНГ ҚАТТИҚЛИГИ

**01.01.06 – Алгебра**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ**
**бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси**
**АВТОРЕФЕРАТИ**

**Тошкент – 2020**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM229 рақам билан рўйхатга олинган.**

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

| | |
|---|---|
| **Илмий раҳбар:** | **Омиров Бахром Абдазович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| **Расмий оппонентлар:** | **Арзикулов Фарходжон Нематжонович**<br>физика-математика фанлари доктори |
| | **Эшматов Фарход Хасанович**<br>физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD), катта илмий ходим |
| **Етакчи ташкилот:** | **Қорақалпоқ давлат университети** |

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «23» декабр соат 17:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (108-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2020 йил «15» декабр куни тарқатилди.
(2020йил «15» декабр даги 2-рақамли реестр баённомаси).

**У.А.Розиков**
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

**Ж.К.Адашев**
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н

**А.Р.Хаётов**
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси ўринбосари ф.-м.ф.д.

## КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Замонавий математика ва физиканинг баъзи илмий тадқиқотлари операторлар алгебралари ва алгебраик системалар назариясига қаратилган. Алгебраик воситалар квант механикасидаги элементар зарраларни, қаттиқ моддалар ва кристалларнинг хусусиятларини ўрганишда, иқтисодиётнинг моделлашган муаммоларини таҳлил қилишда, популяция генетикаси муаммоларида ва бошқа масалаларда жуда фойдалидир. Замонавий алгебра негизлари чекли группалар ва чекли ўлчамли ассоциатив алгебралар назариясига бориб тақалади. Кейинчалик, алгебраик системаларнинг ривожланиши ва уларнинг математика ва физиканинг бошқа соҳалари билан алоқалари янги алгебраларнинг, жумладан альтернатив, Йордан ва Ли алгебраларининг пайдо бўлишига олиб келди. Ушбу объектларнинг ҳар бири фундаментал ва амалий фанларда қўлланилиши туфайли мухим аҳамиятга эга. Ли алгебралари соҳасидаги кўп йиллик тадқиқотлар бу алгебраларнинг бир қатор умумлашмаларининг пайдо бўлишига олиб келди. Масалан, Ли суперaлгебралари, бинар Ли алгебралари, Лейбниц алгебралари ва бошқалар. Лейбниц алгебралари Ли алгебраларининг умумлашмаси бўлганлиги сабабли, Ли алгебралари назариясининг кўплаб натижаларини Лейбниц алгебралари ҳолида ҳам кенгайтириш мумкин деб тахмин қилиш табиийдир. Шу билан бирга Ли бўлмаган Лейбниц алгебралари учун тегишли бўлган натижаларни исботлашга алоҳида аҳамият берилади.

Ҳозирги вақтда замонавий алгебранинг муҳим йўналишларидан бири Лейбниц алгебралари назариясини тадқиқ қилишдир. Эслатиб ўтамиз, Ли алгебраларини табиий равишда умумлаштирадиган ва Лейбниц айнияти билан бериладиган ушбу алгебралар синфи биринчи марта Блох томонидан 1965 йилда D-алгебралар номи билан таклиф қилинган. Таъкидлаш жоизки, Лейбниц айниятининг бажарилиши, алгебра элементига ўнгдан кўпайтириш операторининг алгебра учун дифференциаллаш бўлишига тенг кучлидир. Шунинг учун D-алгебраларни, ҳар бир алгебра элементига ўнгдан кўпайтириш оператори дифференциаллаш бўлишининг шарти билан ҳам аниқлаш мумкин. Ўтган асрнинг 90-йиллари бошларида D-алгебралар Ж.-Л. Лоде ва Т. Пирашвилининг ишларида Лейбниц алгебралари деб номланиб ўрганила бошланди. Шундан сўнг Лейбниц алгебраларига қизиқиш кескин ортиб кетди.

Шуни таъкидлаш керакки, Лоде ва унинг шогирдлари тадқиқотларининг асосий йўналиши Лейбниц алгебраларининг когомологик муаммоларига бағишланган эди. Шу билан бирга чекли ўлчамли алгебраларнинг бирор кўпхиллигини ўрганишга табиий ёндашиш, масалан, структуравий назарияни қуриш улар томонидан қаралмаган. Структуравий назарияни ўрганишга бағишланган дастлабки натижалар Ш.А.Аюпов ва Б.А.Омировнинг ишларида пайдо бўлди. Хусусан, 3 ўлчамли комплекс Лейбниц алгебраларининг таснифи олинган, нилпотент ва ечилувчан Лейбниц алгебраларининг классик хоссалари тавсифланган. Ҳозирги вақтда алгебраик ёпиқ майдон устидаги чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларининг тузилиш назариясининг асосий скелети тўлиқ деб айтишимиз мумкин. Бу ишлар асосан Ш.А. Аюпов ва унинг шогирдлари, шунингдек Барнс, Горбацевич, Казас ва Ладра каби хорижий олимларнинг тадқиқотларига тегишли. Лейбниц алгебралари устидаги кейинги изланишлар бошқа классик алгебраларнинг кўпхилликлари билан ўзаро боғлиқликларни топиш ва уларни физикада қўллаш йўналишида олиб борилмоқда. Шуни таъкидлаш керакки, ушбу изланишлар Ли алгебраларига бошқа назар билан қарашга имкон бермоқда. Ўз навбатида бу нафақат Ли алгебралари учун амал қиладиган натижаларни умумлаштиришга, балки Ли алгебралари назариясидаги ҳал қилинмаган муаммоларни ҳам якунлашга имкон берди. Масалан, нилиндекси (n-3) бўлган табиий усулда градуирланган Лейбниц алгебраларини таснифлаш бўйича натижа ҳам ушбу турдаги Ли алгебраларини таснифлашни умумлаштирди. Бу нилпотент Ли алгебраларини таснифлашнинг маълум усуллари такомиллаштирилганлиги туфайли амалга ошди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2017 йил 20 апрелдаги «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2909-сон Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Ассоциатив бўлмаган алгебраларни ва классик конструкцияларнинг аналогларини ўрганиш, уларнинг математика ва физиканинг кўплаб соҳаларида қўлланилиши билан боғлиқ ҳолда ўз долзарблигини сақлаб келмоқда. Ли алгебралари назариясининг кўплаб классик натижалари Лейбниц алгебралари ҳолида ҳам татбиқ этилади. Масалан, Лейбниц алгебралари учун Леви теоремасининг аналогини Барнс ҳамда Блох исботлашди. У ҳар қандай чекли ўлчамли Лейбниц алгебрасини ечилувчан радикалнинг ва ярим содда Ли қисм алгебрасининг ярим тўғри йиғиндисига ажратиш мумкинлигини исботлади. Ярим содда Ли алгебраларининг тавсифи маълум бўлганлиги сабабли, чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларини тавсифлаш муаммоси ечилувчан қисмини ўрганишга келтирилди. Нилрадикали берилган ечилувчан Ли алгебраларини тавсифлашга ёндашиш Малцев томонидан ишлаб чиқилган ва кейинчалик Мубаракзянов томонидан ривожлантирилган услубга асосланган. Анкочеа, Ндогмо, Винтерниц, Тремлей, Ван, Лин, Дэн ва бошқаларнинг ишлари турли хил нилрадикалли ечилувчан Ли алгебраларини тавсифлашга бағишланган. Б.А.Омиров ва бошқаларнинг иши туфайли, Г.М. Мубаракзянов томонидан ишлаб чиқилган ечилувчан Ли алгебраларини тавсифлаш усули Лейбниц алгебралари ҳолида кенгайтирилди. Бу ерда чекли ўлчамли Лейбниц алгебраларини таснифлаш муаммоси нилпотентларни ўрганишга келтирилди. Ечилувчан Лейбниц алгебралари учун ҳам шунга ўхшаш натижалар мавжуд, яъни ҳар хил нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифлари мавжуд. Масалан, нилрадикал Гейзенберг алгебраси, филиформ, нол-филиформ, табиий усулда градуирланган филиформ, нол-филиформ алгебраларнинг тўғри йиғиндиси, шунингдек нилрадикал табиий усулда градуирланган квази-филиформ Лейбниц алгебраси ва бошқалар бўлган ҳоллар кўриб чиқилган.

Айниятлар билан бериладиган бошқа чекли ўлчамли алгебралар сингари, берилган ўлчамдаги Лейбниц алгебралари ҳам алгебраик кўпхилликни ҳосил қилади. Ҳар қандай алгебраик кўпхиллик чекли сондаги келтирилмайдиган компоненталарнинг бирлашмаси сифатида ифодаланганлиги ва улар ўз навбатида, очиқ қисм тўпламлар билан тавсифланганлиги сабабли, чекли ўлчамли алгебраларнинг кўпхилликларини тавсифлашда чизиқли группа таъсирида орбиталари очиқ тўпламлар бўлган алгебраларнинг тавсифи муҳим рол ўйнайди. Бундай орбиталарга эга алгебралар *қаттиқ* алгебралар деб аталади. Қаттиқ алгебра орбиталарининг ёпилмаси кўпхилликнинг келтирилмайдиган компоненталарини беради. Алгебранинг қаттиқлиги тушунчасини бошқа терминларда ифодаловчи турли критерийлар мавжуд. Ушбу критерийлардан энг муҳими Ли алгебралари учун Ниенхейс ва Ричардсон томонидан иккинчи когомологик группа ёрдамида исботланган қаттиқликнинг етарлилик критерийсидир. Лейбниц алгебралари учун худди шундай натижани Балавуан исботлаган. Яъни, коэффициентлари модулда регуляр тасвир билан берилган иккинчи когомология группасининг тривиаллиги алгебранинг қаттиқлигини англатади.

Анкочеа, Гозе, Фиаловский, Миллионшчиков, Хакимджанов ва бошқаларнинг ишларида Ли алгебраларининг баъзи синфларининг когомологик группаларини хоссалари тавсифланган. Шуни таъкидлаш керакки, 2-когомологик группаларни ҳисоблаш жуда мураккаб арифметик ҳисоблашлар билан боғлиқ. Хохшилд ва Серр Ли алгебралари учун когомология группаларини ҳисоблашни анча соддалаштирадиган теоремани исботлади.Ушбу теоремадан фойдаланиб, Анкочеа ва Кампоамор-Стурсберг ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга модел нилрадикалли ечилувчан Ли алгебрасининг биринчи ва иккинчи когомологик группаларининг тривиаллигини исботлади. Лейбниц алгебралари учун Хохшилд-Серр теоремасининг аналоги, афсуски, ҳозирда мавжуд эмас. Шунинг учун ҳар бир ҳолатда қаралаётган алгебра структурасидан фойдаланишга тўғри келади. Масалан, Анкочеа ва Кампоамор-Стурсберг ишларининг Лейбниц аналоги сифатида, биз ушбу диссертацияда ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга Ли бўлмаган модел нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тўлиқлиги ва когомологик қаттиқлигини исботладик.

**Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.** Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-31 “Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар” (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

**Тадқиқотнинг мақсади** нилрадикали берилган ечилувчан Лейбниц алгебраларини тавсифлаш ва уларнинг кичик тартибли когомологик группаларини тадқиқ этишдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари:**

ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга Ли бўлмаган модел нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларини тавсифлаш;

берилган нилпотент Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг тўлиқлигини аниқлаш;

берилган нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг иккинчи когомологик группаларини ўрганиш.

**Тадқиқотнинг объекти** ечилувчан Лейбниц алгебраларидан, дифференциаллашлар ва когомологик группалардан иборат.

**Тадқиқотнинг предмети** филиформ, квази-филиформ нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебралари, ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга Ли бўлмаган модел нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларидир.

**Тадқиқотнинг усуллари.** Диссертацияда ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси усуллари, структуравий усуллар, когомологиялар усуллари ва инвариантлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга Ли бўлмаган модел нилпотент Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан кенгайтмасининг таснифи олинган;

нилрадикали ихтиёрий характеристик кетма-кетликли модел алгебрасидан иборат бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тўлиқлиги ва когомологик қаттиқлиги исботланган;

максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг тўлиқлиги ва когомологик қаттиқлиги кўрсатилган;

берилган филиформ нилрадикалга эга ечилувчан Лейбниц алгебрасининг когомологик қаттиқлиги исботланган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари.** Диссертацияда қўлланилган натижалар ва усулларни олий ўқув юртлари магистрантлари ва докторантлари учун махсус курсларни ўқишда қўллаш мумкин. Бундан ташқари, ечилувчан Лейбниц алгебраларини тавсифлаш ва ечилувчан Лейбниц алгебраларининг 2-когомологик группаларини ҳисоблаш билан боғлиқ диссертация натижалари чексиз ўлчамли Ли алгебралари учун ўхшаш натижаларни олиш ва ечилувчан Лейбниц алгебраларига нисбатан бир қатор гипотезаларнинг ўринлилигини текширишга имкон беради.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги** алгебраларнинг бошқа синфлари учун маълум тадқиқот усулларидан фойдаланиш ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Олинган натижаларнинг исботлари математик жиҳатдан тўғри.

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган илмий натижалар алгебраларнинг бошқа кўпхилликларини кейинги тадқиқотлари учун ишлатилиши мумкин. Хусусан, ушбу диссертацияда ишлаб чиқилган техника ва усуллардан барча Лейбниц алгебраларининг кўпхилликларидаги қаттиқ алгебраларни топишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти шундаки, олинган натижалардан Лейбниц алгебраларининг когомологиялар назариясида фойдаланиш мумкин.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Олинган натижалар қуйидаги илмий лойиҳаларида фойдаланилган:

максимал узунликдаги квази-филиформ нилрадикалли баъзи ечилувчан Лейбниц алгебраларининг когомологик қаттиқлиги ҳақидаги натижа FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 рақамли «Алгебраларнинг айрим синфларининг умумлаштирилган дифференциаллашлари ва уларнинг қўлланилиши» хорижий лойиҳасида чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг айрим синфлари дифференциаллашлари алгебраларини тавсифлаш учун фойдаланилган (МАРА Технология университетининг 2020 йил 6-ноябрдаги маълумотномаси, Малайзия). Илмий натижанинг қўлланилиши чекли ўлчамли ноассоциатив алгебраларнинг аниқ синфларининг дифференциаллашлари алгебрасини тавсифлаш имконини берган;

нилрадикали берилган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг когомологик қаттиқлиги ва тўлиқлиги ҳақидаги натижа ОТ-Ф4-82 + ОТ-Ф4-87 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларнинг локал дифферециаллашлари ва автоморфизмлари, чизиқли бўлмаган динамик системада фазовий ўтиш ва тартибсизликлар» + «Евклид ва псевда-Евклид фазолардаги глобал эгри чизиқлар ва сиртларнинг инвариантлари назарияси ва унинг механикада қўлланилиши» лойиҳасида фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси фанлар Академиясининг 2020 йил 2 декабрдаги 2/1255-2708-сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши нилрадикали максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраси бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг классификациясини ва уларнинг дифферециаллашларининг тавсифларини олиш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий, 5 таси республика журналларида, шунингдек 9 та маъруза тезисларида илмий конференцияларда нашр этилган.

**Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми.** Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 79 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Нилрадикали ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга бўлган ечилувчан Лейбниц алгебралари**» деб номланувчи биринчи бобида Ли алгебралари ва Лейбниц алгебралари назарияларидан зарур тушунчалар ва ёрдамчи натижалар келтирилган. $(m_1,\ m_2)$ га тенг характеристик кетма-кетликка эга нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебралари тавсифланган. Шунингдек, нилрадикалга тўлдирувчи қисм фазосининг ўлчами максимал қийматга эга деган шарт остида, характеристик кетма-кетлиги $(m_1,\ \dots,\ m_s)$ га тенг бўлган, Ли бўлмаган модел нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебралари тавсифланган.

**Таъриф 1**. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган G алгебранинг ихтиёрий $x$, $y$, z элементлари учун қуйидаги айниятлар бажарилса,

$[x, x] = 0$ – антикоммутативлик айнияти,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – Якоби айнияти,

G алгебра Ли алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – G алгебрада аниқланган кўпайтириш амали.

**Таъриф 2**. $\mathbb{F}$ майдон устида аниқланган $L$ алгебранинг ихтиёрий $x$, $y$, $z$ элементлари учун қуйидаги Лейбниц айнияти бажарилса,

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

$L$ алгебра Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда [-,-] – $L$ да аниқланган кўпайтириш амали.

Ихтиёрий $L$ Лейбниц алгебраси учун қуйидаги қуйи марказий ва ҳосилавий кетма-кетликларни мос равишда аниқлаймиз:

$$L^1 = L,\quad L^{k+1} = [L^k, L^1];\ L^{[1]} = L,\ L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}],\ k\geq 1.$$

**Таъриф 3**. $L$ Лейбниц алгебраси учун шундай $s\in\mathbb{N}$ сон мавжуд бўлиб, $L^{[s]} = 0$ (мос равишда, $L^s = 0$) бўлса, у ҳолда $L$ ечилувчан (мос равишда, нилпотент) Лейбниц алгебраси дейилади.

Ихтиёрий Лейбниц алгебрасининг максимал нилпотент идеали унинг нилрадикали дейилади.

**Таьриф 4.** $L$ Лейбниц алгебраси, агар $\dim L^i = n - i,\ 2\leq i\leq n$ бўлса, филиформ Лейбниц алгебраси дейилади, бу ерда $n = \dim L$.

Табий усулда градуирланган Лейбниц алгебраси таърифини келтирамиз.

$L$ чекли ўлчамли нилпотент Лейбниц алгебраси бўлсин. $\mathrm{gr}(L)_i{:=}L^i/L^{i+1}$, $1\leq i\leq s-1$ деб оламиз, бу ерда s – $L$ алгебранинг нильиндекси ва $\mathrm{gr}L=\mathrm{gr}(L)_1\oplus\mathrm{gr}(L)_2\oplus\ \dots\ \oplus\mathrm{gr}(L)_{s-1}$ деб белгилаб оламиз. gr$L$ да кўпайтмани қуйидагича аниқлаймиз:

$$[x+ L^i, y+ L^j]_{\mathrm{gr}L} = [x, y] + L^{i+j-1},\ \text{бу ерда}\ x\in L^{i-1},\ y\in L^{j-1}.$$

У ҳолда $[\mathrm{gr}(L)_i, \mathrm{gr}(L)_j]_{\mathrm{gr}L}\subseteq\mathrm{gr}(L)_{i+j}$ бўлади ва биз gr$L$ градуирланган алгебрани ҳосил қиламиз.

**Таьриф 5.** Юқорида қурилган градуировкани *табиий градуировка* деб атаймиз. Агар $L$ Лейбниц алгебраси grL алгебрага изоморф бўлса, у ҳолда $L$ *табиий усулда градуирланган Лейбниц алгебраси* деб аталади.

Маълумки, ҳар қандай $n$-ўлчамли комплекс табиий усулда градуирланган Ли бўлмаган филиформ Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморф:

$F_n^1$: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_i,e_1]=e_{i+1}$, бу ерда $2\leq i\leq n-1$,

$F_n^2$: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_i,e_1]=e_{i+1}$, бу ерда $3\leq i\leq n-1$.

**Таьриф 6.** Айтайлик $L$ – $n$-ўлчамли Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар унинг нильиндекси $n$-1 га тенг бўлса, у ҳолда $L$ квази-филиформ Лейбниц алгебраси дейилади.

Айтайлик $L$ – нолга тенг бўлмаган фазоларнинг чекли сони билан Z-градуирланган Лейбниц алгебраси, яъни $L=\bigoplus_{i\in Z} V_i$ бўлсин, бу ерда ҳар қандай $i, j\in Z$ лар учун $[V_i, V_j]\subseteq V_{i+j}$.

L нилпотент Лейбниц алгебраси, агар $L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus\ \dots\ \oplus V_{k_t}$ бўлса, бу ерда барча i ($k_1\leq i\leq k_t$) лар учун $V_i\neq 0$, боғланган градуировкани қабул қилади деймиз.

$len(\oplus L)=k_t-k_1+1$ сони *градуировканинг узунлиги* дейилади. Кейинчалик, $l(L)=\max\{len(\oplus L)=k_t-k_1+1 \mid L=V_{k_1}\oplus V_{k_2}\oplus\ \dots\ \oplus V_{k_t}$ боғланган градуировка$\}$ ни L *Лейбниц алгебрасининг узунлиги* деб атаймиз.

**Таъриф 7.** $L$ Лейбниц алгебраси, агар $l(L)$=dim$L$ бўлса, *максимал узунликдаги алгебра* дейилади.

Маълумки, максимал узунликдаги ҳар қандай $n$-ўлчамли ($n$≥6) квази-филиформ Ли бўлмаган Лейбниц алгебраси қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебра оилаларидан бирига изоморфдир:

$$M^{1,\delta}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_n, & [e_{n-1},e_1]=e_2,\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\delta e_4,\ \delta\in\{0,1\}, & [e_i,e_{n-1}]=\delta e_{3+i}, \quad 2\le i\le n-5;\end{cases}$$

$$M^{2,\lambda}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda e_n, & \lambda\in C;\end{cases}$$

$$M^{3,\alpha}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=\alpha e_6,\ \alpha=0,\text{ агар } n>6,\ \alpha\in\{0,1\},\text{ агар } n=6,\end{cases}$$

бу ерда $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ алгебранинг базиси.

**Таъриф 8.** Айтайлик $d$ – $L$ Лейбниц алгебрасининг чизиқли алмаштириши бўлсин. Агар ихтиёрий $x,y\in L$ лар учун қуйидаги тенглик бажрилса

$$d([x, y])=[d(x), y]+[x, d(y)],$$

у ҳолда $d$ чизиқли алмаштиришга $L$ Лейбниц алгебрасининг дифференциаллаши дейилади.

Таъкидлаб ўтамизки, алгебра элементига ўнгдан кўпайтириш операторлари (яъни, алгебранинг ҳар қандай $y$ элементи учун $\mathcal{R}_x(y)=[x,y]$) дифференциаллаш бўлади, биз уларни ички дифференциаллашлар деб атаймиз.

Нил-боғлиқмас дифференциаллашлар тушунчасини келтирамиз.

**Таъриф 9.** $d_1,\dots,d_n$ лар $L$ Лейбниц алгебрасининг дифференциаллашлари системаси бўлсин. Агар уларнинг ҳар қандай тривиал бўлмаган чизиқли комбинацияси нилпотент бўлмаса, нил-боғлиқмас дифференциаллашлар дейилади, бошқача қилиб айтганда, агар ихтиёрий $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ лар учун шундай k натурал сон мавжуд бўлиб, $(\alpha_1 d_1+\alpha_2 d_2+\dots+\alpha_n d_n)^k=0$ бўлса, у ҳолда $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$ бўлади.

Маълумки, ҳарқандай ечилувчан Лейбниц алгебраси максимал нилпотент идеалга эга. Агар $N$ нилрадикалга эга бўлган $R$ ечилувчан Лейбниц алгебраси берилган бўлса, у ҳолда уни $R$=$N\oplus Q$ шаклида ажратиш мумкин, бу ерда $Q$ нилрадикалга тўлдирувчи вектор қисм фазосидир. $N$ нилрадикалга тўлдирувчи вектор қисм фазосининг ўлчами $N$ нинг нил-боғлиқмас дифференциаллашларининг максимал сонидан катта эмас.

Нилрадикали $N$ ва тўлдирувчи фазосининг ўлчами s га тенг бўлган барча ечилувчан Лейбниц алгебралари оиласини $R(N$, s) билан белгилаймиз. Кейинчалик, $N$ нилрадикалга эга бўлган барча ечилувчан Лейбниц алгебралари тўпламини $N$ *нилпотент алгебранинг ечилувчан кенгайтмалари* деб атаймиз. Бундан ташқари, $Q$ нинг ўлчами мумкин бўлган максимал қийматга эга бўлганда, биз бундай кенгайтмаларни *максимал* деб атаймиз.

К.К. Абдурасулов ва бошқаларнинг мақоласида, $R(M^{1,0},2)$ оиласидан олинган ихтиёрий алгебра қуйидаги

$$\begin{cases} [e_1,e_1]=e_n, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-2, \\ [e_1,x_1]=e_1, & [e_i,x_1]=(i-2)e_i, \quad 3\le i\le n-1, \\ [e_n,x_1]=2e_n, & [x_1,e_1]=-e_1, \\ [e_i,x_2]=e_i, & \quad 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

алгебрага изоморф ва $R(M^{2,\lambda},2)$ оиласидан олинган ихтиёрий алгебра қуйидаги

$$R(M^{2,0},2):\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3, \\ [e_{n-1},e_1]=e_n, & \\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le n-2, \\ [e_n,x_1]=e_n, & \\ [x_1,e_1]=-e_1, & \\ [e_{n-1},x_2]=e_{n-1}, & \\ [e_n,x_2]=e_n, & \end{cases}$$

$$R(M^{2,-1},2):\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3, \\ [e_{n-1},e_1]=e_n, & \\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n, & \\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le n-2, \\ [x_1,e_1]=-e_1, & \\ [e_n,x_1]=-[x_1,e_n]=e_n, & \\ [e_{n-1},x_2]=-[x_2,e_{n-1}]=e_{n-1}, & \\ [e_n,x_2]=-[x_2,e_n]=e_n & \end{cases}$$

алгебралардан бирига изоморф эканлиги исботланган.

$L$ Лейбниц алгебраси учун $M$ модулда $n$-когомология группа таърифини келтирамиз.

$L$ Лейбниц алгебраси ва $L$ устидаги $M$ модул учун қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$C^n(L,M):=Hom(L^{\otimes n},M),$$

$n\ge 0$ да ($n<0$ да $C^n(L,M)$ни нол деб оламиз). $C^n(L,M)$тўпламнинг элементлари $n$-даражали занжир дейилади.

$d^n: C^n(L,M)\to C^{n+1}(L,M)$ гомоморфизм қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$(d^n f)(x_1,\dots,x_{n+1}) := [x_1, f(x_2,\dots,x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i [f(x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_{n+1}), x_i] +$$
$$+ \sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{j+1} f(x_1,\dots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_{n+1}),$$

бу ерда $f \in C^n(L,M)$, $x_i \in L$ ва $\hat{x}$ белгиси $x$ элементнинг йўқлигини билдиради. $d^n$, $n \geq 0$ гомоморфизмлар $d^{n+1} \circ d^n = 0$ хоссани қаноатлантиради.

$d^n$ гомоморфизм ядросининг элементларини ($\mathrm{ZL}^n(L,M) := Kerd^n$ билан белгилаймиз) $n$-коцикллар, $d^{n-1}$ образининг элементларини эса ($\mathrm{BL}^n(L,M) := \mathrm{Im}\, d^{n-1}$ билан белгилаймиз) $n$-кочегаралар дейилади. Равшанки, $\mathrm{BL}^n(L,M) \subseteq \mathrm{ZL}^n(L,M)$ ўринли. $\mathrm{HL}^n(L,M) := \mathrm{ZL}^n(L,M)/\mathrm{BL}^n(L,M)$ фактор фазо *қийматлари M модулда бўлган L алгебранинг n-даражали когомологик фазоси* дейилади.

**Таъриф 10.** Айтайлик $L$ – Лейбниц алгебраси бўлсин. Агар $\mathrm{HL}^2(L,L) = 0$ бўлса, у ҳолда $L$ Лейбниц алгебраси *когомологик қаттиқ* дейилади.

Балавуан критерийси шуни англатадики, Лейбниц алгебрасининг когомологик қаттиқлигидан алгебранинг одатдаги қаттиқлиги келиб чиқади.

Бизга $L$ – нилпотент Лейбниц алгебраси берилган ва $x \in L\backslash L^2$ бўлсин. $\mathcal{R}_x$ ўнг кўпайтириш нилпотент оператори учун $\mathcal{R}_x$ операторининг Жордан катаклари ўлчамларидан иборат, камаювчи $C(x) = (m_1, \dots, m_s)$ кетма-кетликни қарайлик. Бундай кетма-кетликлар тўпламида лексикографик тартибни аниқлаймиз.

**Таъриф 11.** Қуйидаги кетма-кетлик
$$C(L) = \max_{x\in L\backslash L^2} C(x)$$
$L$ алгебранинг характеристик кетма-кетлиги дейилади.

Характеристик кетма-кетлиги $(m_1, \dots, m_s)$, $m_s > 1$ бўлган модел нилпотент Лейбниц алгебраси тушунчасини келтирамиз.

Характеристик кетма-кетлиги $(m_1, \dots, m_s)$, $m_s > 1$ ва кўпайтма жадвали
$$[e_i^t, e_1^1] = e_{i+1}^t,\ 1 \le t \le s, 1 \le i \le m_t - 1,$$
бўлган Лейбниц алгебраси характеристик кетма-кетлиги $(m_1,\dots,m_s)$ бўлган *Ли бўлмаган модел нилпотент Лейбниц алгебраси* дейилади ва $N_{m_1,\dots,m_s}$ билан белгиланади.

1.2-параграфда $N_{m_1,m_2}$ модел нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тавсифи келтирилган.

Характеристик кетма-кетлиги $(m_1, m_2)$, $m_2 > 1$ га тенг бўлган ва кўпайтма жадвали
$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le m_1 - 1, \\ [f_i, e_1] = f_{i+1}, & 1 \le i \le m_2 - 1, \end{cases}$$
бўлган $N_{m_1,m_2}$ Лейбниц алгебрасини қарайлик, бу ерда $\{e_1, \dots, e_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}\}$ $N_{m_1,m_2}$ алгебранинг базиси. Нилрадикали $N_{m_1,m_2}$ бўлган ечилувчан Лейбниц

алгебраларини тавсифлаш учун ушбу алгебранинг дифференциаллашлар фазосини тавсифлаш керак.

**Тасдиқ 1.** $N_{m_1,m_2}$ алгебранинг ихтиёрий $d$ дифференциаллаши қуйидаги кўринишга эга

$$d(e_i)=i\alpha_{1,1}e_i+\sum_{j=i+1}^{m_1}\alpha_{1,j-i+1}e_j+\sum_{j=i}^{m_2}\alpha_{2,j-i+1}f_j, \qquad 1\le i\le m_2,$$

$$d(e_i)=i\alpha_{1,1}e_i+\sum_{j=i+1}^{m_1}\alpha_{1,j-i+1}e_j, \qquad m_2+1\le i\le m_1,$$

$$d(f_i)=\sum_{j=m_1-m_2+i}^{m_1}\beta_{1,j-i+1}e_j+\left((i-1)\alpha_{1,1}+\beta_{2,1}\right)f_i+\sum_{j=i+1}^{m_2}\beta_{2,j-i+1}f_j,\ 1\le i\le m_2.$$

1-Тасдиқдан $N_{m_1,m_2}$ алгебранинг нил-боғлиқмас дифференциаллашлар сонини топиш қийин эмас.

**Натижа 1.** $N_{m_1,m_2}$ алгебранинг нил-боғлиқмас дифференциаллашларининг максимал сони 2 га тенг.

Нилрадикали $N_{m_1,m_2}$ бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини тавсифини $s$=1 да келтирамиз.

**Теорема 1.** $R(N_{m_1,m_2},1)$ оиладаги ихтиёрий алгебрада шундай $\{e_1,\dots,e_{m_1},f_1,\dots,f_{m_2},x\}$ базис мавжудки, унинг шу базисдаги кўпайтириш жадвали қуйидаги кўринишлардан бирига эга:

$$M_1:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad [x,e_1]=-e_1, & 1\le i\le m_1-1,\\ [f_i,e_1]=f_{i+1}, & 1\le i\le m_2-1,\\ [e_i,x]=ie_i+\sum\limits_{j=i+1}^{m_2}\alpha_{2,j-i+1}f_j, & 1\le i\le m_2,\\ [f_1,x]=\sum\limits_{i=m_1-m_2+1}^{m_1}\beta_{1,i}e_i+\beta_{2,1}f_1,\ \ [e_j,x]=je_j, & m_2+1\le j\le m_1,\\ [f_i,x]=\sum\limits_{j=m_1-m_2+i}^{m_1}\beta_{1,j-i+1}e_j+(i-1+\beta_{2,1})f_i, & 2\le i\le m_2,\\ [x,x]=\sum\limits_{i=1}^{m_2-1}\alpha_{2,i+1}f_i+\delta_{2,m_2}f_{m_2}, & \end{cases}$$

бу ерда агар $\beta_{2,1}\ne 1-m_2$ бўлса $\delta_{2,m_2}=0$ бўлади,

$$M_2:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le m_1-1,\\ [f_i,e_1]=f_{i+1}, & 1\le i\le m_2-1,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{m_1}\alpha_{1,j-i+1}e_j+\sum\limits_{j=i}^{m_2}\alpha_{2,j-i+1}f_j, & 1\le i\le m_2,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{m_1}\alpha_{1,j-i+1}e_j, & m_2+1\le i\le m_1,\\ [f_i,x]=\sum\limits_{j=m_1-m_2+i}^{m_1}\beta_{1,j-i+1}e_j+f_i+\sum\limits_{j=i+1}^{m_2}\beta_{2,j-i+1}f_j, & 1\le i\le m_2,\\ [x,x]=\delta_{1,m_1}e_{m_1}.\end{cases}$$

Энди нилрадикали $N_{m_1,m_2}$ бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларини таснифини $s$=2 бўлганда келтирамиз.

**Теорема 2.** $R(N_{m_1,m_2},2)$ оиладаги ихтиёрий Лейбниц алгебраси қуйидаги алгебрага изоморф:

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le m_1-1,\\ [f_i,e_1]=f_{i+1}, & 1\le i\le m_2-1,\\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le m_1,\\ [f_i,x_1]=(i-1)f_i, & 2\le i\le m_2,\\ [f_i,x_2]=f_i, & 1\le i\le m_2,\\ [x_1,e_1]=-e_1.\end{cases}$$

1.3-параграфда нилрадикали $N_{m_1,\dots,m_s}$ бўлган, нилрадикалга тўлдирувчи қисм фазосининг ўлчами максимал бўлган ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифи келтирилган.

**Теорема 3.** $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ оиладаги ихтиёрий Лейбниц алгебраси қуйидаги алгебрага изоморф:

$$\begin{cases}[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t, & 1\le t\le s,\ 1\le i\le m_t-1,\\ [e_i^1,x_1]=ie_i^1, & 1\le i\le m_1,\\ [e_i^t,x_1]=(i-1)e_i^t, & 2\le t\le s,\ 2\le i\le m_t,\\ [e_i^t,x_t]=e_i^t, & 2\le t\le s,\ 1\le i\le m_t,\\ [x_1,e_1^1]=-e_1^1,\end{cases}$$

бу ерда $\{x_1,\dots x_s\}$ – тўлдирувчи қисм фазосининг базиси.

Диссертациянинг «**Баъзи нилпотент Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг тўлиқлиги**» деб номланувчи иккинчи бобида, ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга модел нилпотент Ли бўлмаган Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан кенгайтмасининг ва максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг дифференциаллашлари тавсифланган, шунингдек бу алгебраларнинг тўлиқлиги исботланган.

3-Теоремадаги $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$ алгебранинг дифференциаллашлар фазосининг тавсифини келтирамиз.

**Тасдиқ 2.** Қуйидаги чизиқли алмаштиришлар $Der(R(N_{m_1,\dots,m_s}, s))$ фазонинг базисини ташкил қилади:

$$d_0(x_1) = -e_1^1,\ d_0(e_i^p) = -e_{i+1}^p, \quad 1 \le p \le s, \quad 1 \le i \le m_p - 1,$$

$$d_1(e_i^1) = ie_i^1, \quad 1 \le i \le m_1,$$

$$d_1(e_i^p) = (i-1)e_i^p, \quad 2 \le p \le s, \quad 2 \le i \le m_p,$$

$$d_p(e_i^p) = e_i^p, \quad 2 \le p \le s, \quad 1 \le i \le m_p.$$

**Тасдиқ 3.** $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$ Лейбниц алгебраси тўлиқдир.

Шуни таъкидлаш керакки, нилрадикалга тўлдирувчи қисм фазонинг ўлчами максимал қийматидан кичик бўлса, у ҳолда тўлиқ бўлмаган алгебралар мавжуд. Масалан, 1-теоремадаги $M_1$ ва $M_2$ оилаларнинг алгебралари бирон бир параметр учун тўлиқ эмас.

2.2-параграфда биз максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг тўлиқлигини исботлаймиз.

$R(M^{1,0}, 2)$ алгебранинг дифференциаллашлар фазосининг тавсифини келтирамиз.

**Тасдиқ 4.** $R(M^{1,0}, 2)$ алгебранинг ихтиёрий дифференциаллаши қуйидагича матрицавий кўринишга эга:

$$\begin{pmatrix}
a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} & 0 & 0 \\
0 & a_{2,2} & a_{1,n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{1,1}+a_{2,2} & a_{1,n} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2a_{1,1}+a_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-3)a_{1,1}+a_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_{1,1} & 0 & 0 \\
-a_{1,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

**Тасдиқ 5.** $R(M^{1,0}, 2)$ Лейбниц алгебраси тўлиқдир.

5-Тасдиққа ўхшаш натижаларни $R(M^{2,0},2)$ ва $R(M^{2,-1},2)$ алгебралар учун келтирамиз.

**Тасдиқ 6.** $R(M^{2,0},2)$, $R(M^{2,-1},2)$ Лейбниц алгебралари тўлиқдирлар.

Диссертациянинг «**Берилган нилпотент Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг когомологик қаттиқлиги**» деб номланувчи учинчи бобида, $F_n^1$ нинг берилган бир ўлчамли ечилувчан кенгайтмасининг ва максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларини когомологик қаттиқлиги исботланган. Ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга модел нилпотент Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчанан кенгайтмасининг когомологик қаттиқлиги ўрнатилди.

И.А. Каримжановнинг ишида нилрадикали $F_n^1$ бўлган ($n$+1) ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг таснифи олинган. Шуни таъкидлаш керакки, ушбу тасниф учта алоҳида $R_1$, $R_3$, $R_4$ алгебраларидан ва иккита $R_2(\alpha)$, $R_5(\alpha_4,...,\alpha_n)$ параметрли оилалардан иборат. Таъкидлаб ўтамиз,

$$R_1:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \qquad 2\le i\le n-1,\\ [e_1,x]=-e_1, & [e_2,x]=-e_2+e_n,\\ [x,e_1]=e_1, & [e_i,x]=-(i-1)e_i, \quad 3\le i\le n,\end{cases}$$

алгебра махсус хоссаларга эга, яъни қуйидаги натижа ўринли.

**Теорема 4.** $R_1$ алгебра когомологик қаттиқдир.

$\mathrm{HL}^2(R_1,R_1)=0$ шарти бажарилган Лейбниц алгебрасининг қаттиқлигидан фойдаланиб, биз қуйидаги натижани оламиз.

**Натижа 2.** $R_1$ алгебра $(n+1)$-ўлчамли Лейбниц алгебралари кўпхиллигида қаттиқ алгебрадир.

3.2-параграфда биз максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг когомологик қаттиқлигини исботлаймиз.

**Теорема 5.** $\mathrm{HL}^2(R(M^{1,0},2),R(M^{1,0},2))=0.$

Қуйидаги теоремада $R(M^{2,0},2)$ ва $R(M^{2,-1},2)$ алгебраларнинг когомологик қаттиқ эканлиги исботланган.

**Теорема 6.** $\mathrm{HL}^2(R(M^{2,0},2),R(M^{2,0},2))=\mathrm{HL}^2(R(M^{2,-1},2),R(M^{2,-1},2))=0.$

3.3-параграфда 3-теоремада олинган $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ ечилувчан Лейбниц алгебрасининг коэффициентлари регуляр модулда бўлган иккинчи когомология группасининг тривиаллиги исботланган.

**Теорема 8.** $\mathrm{HL}^2(R(N_{m_1,\dots,m_s},s),R(N_{m_1,\dots,m_s},s))=0.$

Шуни таъкидлаш керакки, $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ алгебранинг 2-когомологик группасини ҳисоблашда 2-коциклар ва 2-кочегаралар фазоларининг ўлчамлари

$$(m_1+m_2+\dots+m_s+s)^2-(s+1)$$

сонига тенг эканлиги аниқланди.

**Натижа 3.** $R(N_{m_1,\dots,m_s}, s)$ алгебра $m_1 + \dots + m_s + s$-ўлчамли Лейбниц алгебралари кўпхиллигида қаттиқ алгебрадир.

## ХУЛОСА

Диссертация иши чекли ўлчамли ечилувчан Лейбниц алгебралари ва уларнинг когомологик ҳоссаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Характеристик кетма-кетлиги $(m_1, m_2)$ га тенг нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебраларининг тавсифи олинган.
2. Ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга модел нилпотент Ли бўлмаган Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан кенгайтмаси олинган.
3. Ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга Ли бўлмаган модел нилпотент Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан кенгайтмасини тўлиқлиги исботланган.
4. Максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг тўлиқлиги исботланган.
5. Берилган филиформ нилрадикалли ечилувчан Лейбниц алгебрасининг когомологик қаттиқлиги исботланган.
6. Максимал узунликдаги квази-филиформ Лейбниц алгебраларининг максимал ечилувчан кенгайтмаларининг когомологик қаттиқлиги исботланган.
7. Ихтиёрий характеристик кетма-кетликка эга Ли бўлмаган модел нилпотент Лейбниц алгебрасининг максимал ечилувчан кенгайтмасини когомологик қаттиқлиги исботланган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01**
**ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ**
**ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

---

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА**

**МАМАДАЛИЕВ УКТАМЖОН ХАСАНБОЕВИЧ**

# ЖЕСТКОСТЬ РАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА С ЗАДАННЫМ НИЛЬРАДИКАЛОМ

**01.01.06 –Алгебра**

**АВТОРЕФЕРАТ**
**диссертации доктора философии (PhD) по**
**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Ташкент-2020**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM229.**

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресуhttp://www.ziyonet.uz.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Омиров Бахром Абдазович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Арзикулов Фарходжон Нематжонович**<br>доктор физико-математических наук |
| | **Эшматов ФарходХасанович**<br>доктор философии по физико-математическим наукам (PhD), старший научный сотрудник |
| **Ведущая организация:** | **Каракалпакский государственный университет** |

Защита диссертации состоится «23» декабря 2020 года в 17:00 на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 108). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «15» декабря 2020 года.
(протокол рассылки № 2 от «15» декабря 2020 года).

**У.А.Розиков**
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

**А.К.Адашев**
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н

**А.Р.Хаётов**
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Большое количество научных исследований в современной математике и физике сосредоточено на теории алгебраических систем и операторных алгебр. Алгебраические инструменты очень полезны при изучении элементарных частиц в квантовой механике, свойств твердых тел и кристаллов, при анализе модельных задач экономики, в задачах популяционной генетики и т.д.. Корни современной алгебры восходят к теории конечных групп и конечномерных ассоциативных алгебр. Дальнейшее развитие алгебраических систем и их взаимосвязей с другими направлениями математики и физики привело к появлению новых алгебр: альтернативных, йордановых и алгебр Ли. Каждый из этих объектов имеет важное значение, обусловленное их приложениями как в фундаментальной, так и в прикладной науке. Многолетние исследования в области алгебр Ли привели к возникновению ряда обобщений этих алгебр, таких как супералгебры Ли, бинарно Лиевые алгебры, алгебры Лейбница и другие. Алгебры Лейбница являются одним из важных обобщений и естественно предполагать, что многие результаты теории алгебр Ли могут быть распространены на случай алгебр Лейбница. В то же время доказательству результатов, справедливых для нелиевых алгебр Лейбница, придается особое значение.

В настоящее время одним из важных направлений современной алгебры являются исследования, посвященные теории алгебр Лейбница. Напомним, что данный класс алгебр, естественным образом обобщающий алгебры Ли и задающийся тождеством Лейбница, был впервые предложен Блохом в 1965 году под названием D-алгебр. Отметим, что выполнение тождества Лейбница равносильно тому, что оператор правого умножения на элемент алгебры является дифференцированием алгебры. Поэтому D-алгебры могут быть также заданы условием, что каждый оператор правого умножения на элемент алгебры является дифференцированием. Значительно позже, в начале 90-х годов прошлого столетия D-алгебры возникли в работе Ж.-Л. Лоде и Т. Пирашвили под современной терминологией – алгебры Лейбница. После работ Ж.-Л. Лоде и Т. Пирашвили алгебры Лейбница привлекли к себе активный интерес.

Следует отметить, что основной акцент исследований Лоде и его учеников приходился на когомологические задачи алгебр Лейбница. В то же время как более естественный подход к исследованию какого-либо многообразия конечномерных алгебр, а именно, построение структурной теории, ими не был рассмотрен. Первые результаты, посвященные исследованию структурной теории, появились в работах Ш.А. Аюпова и Б.А. Омирова. В частности, была получена классификация 3-мерных комплексных алгебр Лейбница, описаны классические свойства нильпотентных и разрешимых алгебр Лейбница и т.д. На данный момент можно сказать, что исследование основного скелета структурной теории конечномерных алгебр Лейбница над алгебраически замкнутым полем завершено. В основном эта заслуга принадлежит Ш.А. Аюпову и его ученикам, а также зарубежным ученым Д.Барнсу, В. Горбатцевичу, Х.М. Казасу и М. Ладре. Дальнейшие исследования алгебр Лейбница проводятся в направлении нахождения взаимосвязей с другими классическими многообразиями алгебр и приложения их в физике. Следует отметить, что последние исследования в теории алгебр Лейбница позволяют взглянуть на алгебры Ли под другим углом, что позволило не только обобщить результаты, справедливые для алгебр Ли, но и завершить нерешенные задачи теории алгебр Ли. Например, результат о классификации естественным образом градуированных алгебр Лейбница нильиндекса (n-3) также обобщил классификацию алгебр Ли такого типа. Это стало возможным благодаря усовершенствованию известных методов классификации нильпотентных алгебр Ли.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, поставленных в Указах Президента Республики Узбекистан №УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № УП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № УП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. "Математика, механика и информатика".

**Степень изученности проблемы.** Исследования неассоциативных алгебр и аналогов классических конструкций не перестают быть актуальными в связи с их приложениями во многих областях математики и физики. Многие классические результаты теории алгебр Ли были распространены на случай алгебр Лейбница. Например, аналог теоремы Леви для алгебр Лейбница был доказан Барнсом, а также Блохом. Он доказал, что любая конечномерная алгебра Лейбница разлагается в полупрямую сумму разрешимого радикала и полупростой подалгебры Ли. Так как описание полупростых алгебр Ли уже известно, то проблема описания конечномерных алгебр Лейбница сводится к изучению разрешимой части. Подход к описанию разрешимых алгебр Ли с заданным нильрадикалом основан на методе, разработанным Мальцевым и развитым далее Мубаракзяновым. Описанию разрешимых алгебр Ли с различными типами нильрадикалов были посвящены работы Анкочеа, Ндогмо, Винтерниц, Тремлей, Ван, Лин, Дэн и других. Благодаря работе Б.А. Омирова и других, метод описания разрешимых алгебр Ли с заданным нильрадикалом, разработанный Г.М. Мубаракзяновым, был распространен на случай алгебр Лейбница. Таким образом, задача классификации конечномерных алгебр Лейбница сводится к изучению нильпотентных. Для разрешимых алгебр Лейбница также имеются аналогичные результаты, то есть существуют классификации разрешимых алгебр Лейбница с различными типами нильрадикалов. Например, рассмотрены случаи, когда нильрадикал является алгеброй Гейзенберга, филиформной, нуль-филиформной, естественным образом градуированной филиформной, прямой суммой нуль-филиформных алгебр, а также когда нильрадикал есть естественным образом градуированная квази-филиформная алгебра Лейбница и т.д.

Так же как и другие конечномерные алгебры, которые задаются тождествами, алгебры Лейбница заданной размерности образуют алгебраическое многообразие. Ввиду того, что любое алгебраическое многообразие представляется в виде объединения конечного числа неприводимых компонент, а они, в свою очередь, описываются открытыми подмножествами, то важное значение при описании многообразий конечномерных алгебр состоит в описании алгебр, орбиты которых под действием линейной группы являются открытыми множествами. Алгебры с такими орбитами называются *жесткими* алгебрами. Таким образом, замыкания орбит жестких алгебр дают неприводимые компоненты многообразия. Существуют различные критерии жесткости алгебры, выражающие это (исходно топологическое) понятие в других терминах. Наиболее важным среди таких критериев для алгебр Ли является достаточный критерий жесткости, доказанный Ниенхейсом и Ричардсоном с использованием второй группы когомологий. Для случая алгебр Лейбница аналогичный результат доказан Балавуаном. А именно, тривиальность второй группы когомологий с коэффициентами в модуле, заданными регулярным представлением, влечет жесткость алгебры.

В работах Анкочеа, Гозе, Фиаловского, Миллионщикова, Хакимджанова и других описаны свойства когомологических групп некоторых классов алгебр Ли. Следует отметить, что вычисление 2-х групп когомологий связано с довольно громоздкими вычислительными трудностями. Для случая алгебр Ли Хохшильд и Серр доказали теорему, которая значительно упрощает вычисление групп когомологий. Пользуясь этой теоремой, Анкочеа и Кампоамор-Стурсберг доказали тривиальность первой и второй групп когомологий разрешимой алгебры Ли с модельным нильрадикалом произвольной заданной характеристической последовательности. Для нелиевых алгебр Лейбница аналог теоремы Хохшильда-Серры, к сожалению, на данный момент отсутствует и поэтому в каждом отдельном случае приходится использовать структуру рассматриваемой алгебры. Например, в качестве лейбницевого аналога работы Анкочеа и Кампоамор-Стурсберга в данной диссертации мы доказали полноту и когомологическую жесткость разрешимых алгебр Лейбница с нелиевым модельным нильпотентным нильрадикалом произвольной характеристической последовательности.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация.** Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования по теме ОТ-Ф4-31 "Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах" в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017-2020 гг.).

**Целью исследования** является описание разрешимых алгебр Лейбница с заданным нильрадикалом и исследование их групп когомологий малых порядков.

**Задачи исследования:**

описание разрешимых алгебр Лейбница с нелиевым модельным нильрадикалом произвольной характеристической последовательности;

установление полноты максимальных разрешимых расширений заданных нильпотентных алгебр Лейбница;

изучение второй группы когомологий разрешимых алгебр Лейбница с заданным нильрадикалом.

**Объектом исследования** являются разрешимые алгебры Лейбница, дифференцирования, группы когомологий.

**Предметом исследования** являются разрешимые алгебры Лейбница с филиформным, квази-филиформным нильрадикалом; разрешимые алгебры Лейбница с нелиевым модельным нильрадикалом произвольной характеристической последовательности.

**Методы исследования.** В диссертации используются методы теории неассоциативных алгебр, структурные методы, методы когомологий и методы теории инвариантов.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

получено описание максимальных разрешимых расширений нелиевой модельной нильпотентной алгебры Лейбница с произвольной характеристической последовательностью;

доказаны полнота и когомологическая жесткость разрешимых алгебр Лейбница, которые нильрадикал является модельной алгеброй произвольной характеристической последовательности;

показаны полнота и когомологическая жесткость максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины;

доказана когомологическая жесткость разрешимой алгебры Лейбница с заданным филиформным нильрадикалом.

**Практические результаты исследования.** Результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть применены при чтении специальных курсов для магистрантов и докторантов высших учебных заведений. Кроме того, результаты диссертации, касающиеся описания разрешимых алгебр Лейбница и вычисления 2-х групп когомологий разрешимых алгебр Лейбница, позволяют надеяться на получение аналогичных результатов для бесконечномерных алгебр Ли и проверить справедливость ряда гипотез относительно разрешимых алгебр Лейбница.

**Достоверность результатов исследования** обоснована использованием известных методов исследования других классов алгебр, а также строгостью математических рассуждений. Доказательства полученных результатов математически верны.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.** Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейших исследований других многообразий алгебр. В частности, техника и методы, разработанные в данной диссертации, могут быть использованы для нахождения жестких алгебр в многообразии всех алгебр Лейбница.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы в теории когомологий алгебр Лейбница.

**Внедрение результатов исследования.** Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты о жесткости некоторых разрешимых алгебр Лейбница с заданным нильрадикалом использованы в зарубежном проекте под номером FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 «Обобщенные дифференцирования некоторых классов алгебр и их приложений» Министерства высшего образования Малайзии (2016-2020), для описания алгебр дифференцирования некоторых классов конечномерных разрешимых алгебр Лейбница (справка от 6 ноября 2020 года Университета Технологи МАРА, Малайзия). Научные результаты были применены для описания алгебр дифференцирований некоторых классов конечномерных неассоциативных алгебр;

результаты о полноте и когомологической жесткости разрешимых алгебр Лейбница с заданным нильрадикалом использованы в проекте ОТ-F4-82 + ОТ-F4-87 «Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в нелинейных динамических системах» + «Теория глобальных инвариантов кривых и поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах и ее приложения в механике» (справка Академии наук Республики Узбекистан от 2 декабря 2020 года, № 2 /1255-2708). Используя полученные результаты, была получена классификация разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом максимальной длины, а также результаты позволили проверить справедливость ряда гипотез относительно разрешимых алгебр Лейбница.

**Апробация результатов исследования.** Основное содержание диссертации обсуждалось на 3 международных и 5 республиканских научных конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале, 5 в республиканских научных изданиях, а также в 9 тезисах докладов на научных конференциях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 79 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Разрешимые алгебры Лейбница с нильрадикалом произвольной характеристической последовательности»**, приведены необходимые понятия и вспомогательные результаты из теорий алгебр Ли и алгебр Лейбница. Описаны разрешимые алгебры Лейбница с нильрадикалом, имеющем характеристическую последовательность, равную $(m_1, m_2)$. Также описаны разрешимые алгебры Лейбница с нелиевым модельным нильрадикалом, имеющим характеристическую последовательность, равную $(m_1, \dots, m_s)$, при условии, что размерность дополняющего подпространства к нильрадикалу имеет максимальное значение.

**Определение 1.** Алгебра G над полем $\mathbb{F}$ называется алгеброй Ли, если для любых элементов $x, y, z \in G$ выполняются следующие тождества:

$[x, x] = 0$ – тождество антикоммутативности,

$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ – тождество Якоби,

где $[-, -]$ –умножение в G.

**Определение 2.** Алгебра $L$ над полем $\mathbb{F}$ называется алгеброй Лейбница, если для любых элементов $x, y, z \in L$ выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

где $[-, -]$ –умножение в $L$.

Для произвольной алгебры Лейбница $L$ определим нижний центральный и производный ряды:

$$L^1 = L, \quad L^{k+1} = [L^k, L^1]; \qquad L^{[1]} = L, \qquad L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], \ k \geq 1,$$

соответственно.

**Определение 3.** Алгебра Лейбница $L$ называется разрешимой (соответственно, нильпотентной), если существует $\mathrm{s} \in \mathbb{N}$ такое, что $L^{[\mathrm{s}]} = 0$ (соответственно, $L^{\mathrm{s}} = 0$).

Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница $L$ называется нильрадикалом.

**Определение 4.** Алгебра Лейбница $L$ называется филиформной, если $\dim L^i = n - i,\ 2 \le i \le n,$ где $n = \dim L$.

Определим естественное градуирование алгебры $L$.

Пусть $L$ – конечномерная нильпотентная алгебра Лейбница. Обозначим $\mathrm{gr}(L)_{\mathrm{i}}:=L^{\mathrm{i}}/L^{\mathrm{i+1}}$, $1 \le i \le \mathrm{s}-1$, где s – нильиндекс алгебры $L$, и положим $\mathrm{gr}L=\mathrm{gr}(L)_1 \oplus \mathrm{gr}(L)_2 \oplus \ \dots \ \oplus \mathrm{gr}(L)_{\mathrm{s-1}}$. Определим умножение в $\mathrm{gr}L$ следующим образом:

$$[x+ L^{\mathrm{i}}, y+ L^{\mathrm{j}}]_{\mathrm{grL}} = [x, y] + L^{\mathrm{i+j-1}}, \text{ где } x \in L^{\mathrm{i-1}}, y \in L^{\mathrm{j-1}}.$$

Тогда $[\mathrm{gr}(L)_i, \mathrm{gr}(L)_j]_{\mathrm{grL}} \subseteq \mathrm{gr}(L)_{i+j}$ и мы получим градуированную алгебру $\mathrm{gr}L$.

**Определение 5.** Градуировку, построенную таким образом, назовем *естественной градуировкой*. Если алгебра Лейбница $L$ изоморфна алгебре $\mathrm{gr}L$, то $L$ называется *естественным образом градуированной алгеброй Лейбница*.

Известно, что любая $n$-мерная комплексная естественным образом градуированная филиформная нелиевая алгебра Лейбница изоморфна одной из следующих попарно не изоморфных алгебр:

$\mathrm{F}_{\mathrm{n}}^1$: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_{\mathrm{i}},e_1]=e_{\mathrm{i+1}}$, где $2 \le \mathrm{i} \le n-1$,

$\mathrm{F}_{\mathrm{n}}^2$: $[e_1,e_1]=e_3$, $[e_{\mathrm{i}},e_1]=e_{\mathrm{i+1}}$, где $3 \le \mathrm{i} \le n-1$.

**Определение 6.** Алгебра Лейбница $L$ называется квази-филиформной, если ее нильиндекс равен $n-1$, а именно, $L^{n-2} \neq \{0\}$ и $L^{n-1} = \{0\}$, где $n = \dim L$.

Пусть $L$ – Z-градуированная алгебра Лейбница с конечным числом ненулевых пространств, т.е. $L=\bigoplus\limits_{\mathrm{i} \in \mathrm{Z}} \mathrm{V}_{\mathrm{i}}$, где $[\mathrm{V}_{\mathrm{i}}, \mathrm{V}_{\mathrm{j}}] \subseteq \mathrm{V}_{\mathrm{i+j}}$ для любых i, j$\in$Z.

Будем говорить, что нильпотентная алгебра Лейбница $L$ *допускает связное градуирование*, если $L=\mathrm{V}_{\mathrm{k}_1} \oplus \mathrm{V}_{\mathrm{k}_2} \oplus \dots \oplus \mathrm{V}_{\mathrm{k}_{\mathrm{t}}}$, где $\mathrm{V}_{\mathrm{i}} \neq 0$ для всех i ($\mathrm{k}_1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{k}_{\mathrm{t}}$).

Число $len(\oplus L)=\mathrm{k}_{\mathrm{t}}-\mathrm{k}_1+1$ называется *длиной градуировки*. В дальнейшем $l(L)=\max\{len(\oplus L)=\mathrm{k}_{\mathrm{t}}-\mathrm{k}_1+1 \mid \text{градуирование } L=\mathrm{V}_{\mathrm{k}_1} \oplus \mathrm{V}_{\mathrm{k}_2} \oplus \ \dots \ \oplus \mathrm{V}_{\mathrm{k}_{\mathrm{t}}} \text{ связное}\}$ будем называть *длиной алгебры Лейбница L*.

**Определение 7.** Алгебра Лейбница $L$ называется *алгеброй максимальной длины*, если $l(L)= \dim L$.

Известно, что любая $n$-мерная ($n \ge 6$) квази-филиформная нелиевая алгебра Лейбница максимальной длины изоморфна одной из следующих попарно неизоморфных семейств алгебр:

$$M^{1,\delta}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_n, & [e_{n-1},e_1]=e_2,\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_{n-1}]=\delta e_4,\ \delta\in\{0,1\}, & [e_i,e_{n-1}]=\delta e_{3+i}, \quad 2\le i\le n-5;\end{cases}$$

$$M^{2,\lambda}:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_1,e_{n-1}]=\lambda e_n, \quad \lambda\in\mathbb{C};\end{cases}$$

$$M^{3,\alpha}:\begin{cases}[e_1,e_1]=e_3,\ [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_1,e_i]=-e_{i+1}, & 3\le i\le n-1,\\ [e_3,e_3]=\alpha e_6,\ \alpha=0,\ \text{если } n>6,\ \alpha\in\{0,1\},\ \text{если } n=6,\end{cases}$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис алгебры.

**Определение 8.** Линейное преобразование $d$ алгебры Лейбница $L$ называется дифференцированием, если для любых $x, y \in L$ выполняется равенство

$$d([x,y]) = [d(x), y] + [x, d(y)].$$

Отметим, что операторы правого умножения на элемент алгебры (т.е. $\mathcal{R}_x(y) = [x,y]$ для любого элемента $y$ алгебры) являются дифференцированиями, которые будем называть *внутренними*.

Приведем понятие ниль-независимых дифференцирований.

**Определение 9.** Система дифференцирований $d_1, \dots, d_n$ алгебры Лейбница $L$ называется *ниль-независимой*, если их нетривиальная линейная комбинация не является нильпотентной, другими словами, если для любых $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ существует такое натуральное число $k$, что $(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 + \dots + \alpha_n d_n)^k = 0$, тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Известно, что всякая разрешимая алгебра Лейбница имеет максимальный нильпотентный идеал. Таким образом, если задана разрешимая алгебра Лейбница $R$ с нильрадикалом $N$, то ее можно разложить в виде $R$=$N\oplus Q$, где $Q$ – дополняющее векторное подпространство к нильрадикалу. Размерность дополняющего векторного подпространства к $N$ не больше максимального числа ниль-независимых дифференцирований $N$.

Обозначим через $R(N,s)$ семейство разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $N$ и размерностью дополняющего пространства $Q$, равного $s$. В дальнейшем множество всех разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $N$ будем называть *разрешимыми расширениями нильпотентной алгебры* $N$. При этом в случае, когда размерность $Q$ имеет максимально возможное значение, мы будем называть такие расширения *максимальными*.

В работе К.К. Абдурасулова и других доказано, что произвольная алгебра из семейства $R(M^{1,0}, 2)$ изоморфна следующей алгебре:

$$\begin{cases} [e_1,e_1]=e_n, & [e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad 2\le i\le n-2,\\ [e_1,x_1]=e_1, & [e_i,x_1]=(i-2)e_i, \quad 3\le i\le n-1,\\ [e_n,x_1]=2e_n, & [x_1,e_1]=-e_1,\\ [e_i,x_2]=e_i, & \quad 2\le i\le n-1, \end{cases}$$

а произвольная алгебра из семейства $R(M^{2,\lambda},2)$ изоморфна одной из следующих алгебр:

$$R(M^{2,0},2):\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le n-2,\\ [e_n,x_1]=e_n,\\ [x_1,e_1]=-e_1,\\ [e_{n-1},x_2]=e_{n-1},\\ [e_n,x_2]=e_n, \end{cases}$$

$$R(M^{2,-1},2):\begin{cases} [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le n-3,\\ [e_{n-1},e_1]=e_n,\\ [e_1,e_{n-1}]=-e_n,\\ [e_i,x_1]=ie_i, & 1\le i\le n-2,\\ [x_1,e_1]=-e_1,\\ [e_n,x_1]=-[x_1,e_n]=e_n,\\ [e_{n-1},x_2]=-[x_2,e_{n-1}]=e_{n-1},\\ [e_n,x_2]=-[x_2,e_n]=e_n. \end{cases}$$

Приведем определение $n$-ой группы когомологий алгебры Лейбница $L$ в модуле $M$.

Для алгебры Лейбница $L$ и модуля $M$ над $L$ введем обозначение:

$$C^n(L,M):=Hom(L^{\otimes n},M),$$

при $n\ge 0$ (при $n<0$, $C^n(L,M)$ положим равным нулю). Элементы множества $C^n(L,M)$ будем называть коцепями степени $n$.

Пусть $d^n\colon C^n(L,M)\to C^{n+1}(L,M)$ – гомоморфизм, определенный следующим образом:

$$(d^n f)(x_1,\dots,x_{n+1}):=[x_1,f(x_2,\dots,x_{n+1})]+\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^i[f(x_1,\dots,\widehat{x}_i,\dots,x_{n+1}),x_i+$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{j+1}f(x_1,\dots,x_{i-1},[x_i,x_j],x_{i+1},\dots,\widehat{x}_j,\dots,x_{n+1}),$$

где $f\in C^n(L,M)$, $x_i\in L$ и символ $\hat{x}$ означает отсутствие элемента $x$. Гомоморфизмы $d^n$, $n\ge 0$, удовлетворяют свойству $d^{n+1}\circ d^n=0$.

Элементы ядра $d^n$ (обозначим $\mathrm{ZL}^n(L,M):=Ker d^n$) назовем -коциклами, а элементы образа $d^{n-1}$ (обозначим $\mathrm{BL}^n(L,M):=\operatorname{Im} d^{n-1}$) назовем $n$-

кограницами. Очевидно, что $\mathrm{BL}^n(L,M) \subseteq \mathrm{ZL}^n(L,M)$. Фактор-пространство $\mathrm{HL}^n(L,M) := \mathrm{ZL}^n(L,M)/\mathrm{BL}^n(L,M)$ будем называть *пространством когомологий алгебры $L$ степени $n$ со значениями в модуле $M$*.

**Определение 10.** Алгебра Лейбница $L$ называется *когомологически жесткой*, если $\mathrm{HL}^2(L,L) = 0$.

Из критерия Балавуана вытекает, что из когомологической жесткости алгебры Лейбница следует обычная жесткость алгебры.

Пусть $L$ – нильпотентная алгебра Лейбница и пусть $x \in L \backslash L^2$. Для нильпотентного оператора правого умножения $\mathcal{R}_x$ рассмотрим убывающую последовательность $C(x) = (m_1, \dots, m_s)$, состоящую из размеров жордановых клеток оператора $\mathcal{R}_x$. На множестве таких последовательностей определим лексикографический порядок.

**Определение 11.** Последовательность

$$C(L) = \max_{x \in L \backslash L^2} C(x)$$

называется характеристической последовательностью алгебры $L$.

Приведем понятие модельной нильпотентной алгебры Лейбница с характеристической последовательностью $(m_1, \dots, m_s)$, $m_s > 1$.

Алгебра Лейбница с характеристической последовательностью $(m_1, \dots, m_s)$, $m_s > 1$ и таблицей умножения

$$[e_i^t, e_1^1] = e_{i+1}^t, \qquad 1 \le t \le s, \qquad 1 \le i \le m_t - 1,$$

называется *нелиевой модельной нильпотентной алгеброй Лейбница* с характеристической последовательностью $(m_1, \dots, m_s)$ и обозначается через $N_{m_1,\dots,m_s}$.

В параграфе 1.2 приведено описание разрешимых алгебр Лейбница с модельным нильрадикалом $N_{m_1,m_2}$.

Рассмотрим алгебру Лейбница $N_{m_1,m_2}$ с характеристической последовательностью, равной $(m_1, m_2)$, где $m_2 > 1$, и таблицей умножения

$$\begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 1 \le i \le m_1 - 1, \\ [f_i, e_1] = f_{i+1}, & 1 \le i \le m_2 - 1, \end{cases}$$

где $\{e_1, \dots, e_{m_1}, f_1, \dots, f_{m_2}\}$ базис алгебры $N_{m_1,m_2}$. Для того, чтобы описать разрешимые алгебры Лейбница с нильрадикалом $N_{m_1,m_2}$, необходимо описать пространство дифференцирований этой алгебры.

**Предложение 1.** Произвольное дифференцирование $d$ алгебры $N_{m_1,m_2}$ имеет вид

$$d(e_i) = i\alpha_{1,1}e_i + \sum_{j=i+1}^{m_1} \alpha_{1,j-i+1}e_j + \sum_{j=i}^{m_2} \alpha_{2,j-i+1}f_j, \qquad 1 \le i \le m_2,$$

$$d(e_i) = i\alpha_{1,1}e_i + \sum_{j=i+1}^{m_1} \alpha_{1,j-i+1}e_j, \qquad m_2 + 1 \le i \le m_1,$$

$$d(f_i) = \sum_{j=m_1-m_2+i}^{m_1} \beta_{1,j-i+1}e_j + \left((i-1)\alpha_{1,1} + \beta_{2,1}\right) f_i + \sum_{j=i+1}^{m_2} \beta_{2,j-i+1}f_j, \; 1 \le i \le m_2.$$

Из Предложения 1 нетрудно выделить число ниль-независимых дифференцирований алгебры $N_{m_1,m_2}$.

**Следствие 1.** Максимальное число ниль-независимых дифференцирований алгебры $N_{m_1,m_2}$ равно 2.

Приведем описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $N_{m_1,m_2}$, при $s=1$.

**Теорема 1.** В произвольной алгебре из семейства $R(N_{m_1,m_2},1)$ существует базис $\{e_1,\dots,e_{m_1},f_1,\dots,f_{m_2},x\}$ такой, что ее таблица умножения в этом базисе имеет один из следующих видов:

$$M_1:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, \quad [x,e_1]=-e_1, & 1\le i\le m_1-1,\\ [f_i,e_1]=f_{i+1}, & 1\le i\le m_2-1,\\ [e_i,x]=ie_i+\sum\limits_{j=i+1}^{m_2}\alpha_{2,j-i+1}f_j, & 1\le i\le m_2,\\ [f_1,x]=\sum\limits_{i=m_1-m_2+1}^{m_1}\beta_{1,i}e_i+\beta_{2,1}f_1, \quad [e_j,x]=je_j, & m_2+1\le j\le m_1,\\ [f_i,x]=\sum\limits_{j=m_1-m_2+i}^{m_1}\beta_{1,j-i+1}e_j+(i-1+\beta_{2,1})f_i, & 2\le i\le m_2,\\ [x,x]=\sum\limits_{i=1}^{m_2-1}\alpha_{2,i+1}f_i+\delta_{2,m_2}f_{m_2}, & \end{cases}$$

где $\delta_{2,m_2}=0$, если $\beta_{2,1}\ne 1-m_2$,

$$M_2:\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le m_1-1,\\ [f_i,e_1]=f_{i+1}, & 1\le i\le m_2-1,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{m_1}\alpha_{1,j-i+1}e_j+\sum\limits_{j=i}^{m_2}\alpha_{2,j-i+1}f_j, & 1\le i\le m_2,\\ [e_i,x]=\sum\limits_{j=i+1}^{m_1}\alpha_{1,j-i+1}e_j, & m_2+1\le i\le m_1,\\ [f_i,x]=\sum\limits_{j=m_1-m_2+i}^{m_1}\beta_{1,j-i+1}e_j+f_i+\sum\limits_{j=i+1}^{m_2}\beta_{2,j-i+1}f_j, & 1\le i\le m_2,\\ [x,x]=\delta_{1,m_1}e_{m_1}. & \end{cases}$$

Приведем теперь классификацию разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $N_{m_1,m_2}$, при $s=2$.

**Теорема 2.** Произвольная алгебра Лейбница из семейства $R(N_{m_1,m_2},2)$ изоморфна следующей алгебре:

$$\begin{cases}[e_i,e_1]=e_{i+1}, & 1\le i\le m_1-1, \quad [e_i,x_1]=ie_i, \qquad 1\le i\le m_1,\\ [f_i,e_1]=f_{i+1}, & 1\le i\le m_2-1, \quad [f_i,x_1]=(i-1)f_i, \quad 2\le i\le m_2,\\ [f_i,x_2]=f_i, & 1\le i\le m_2, \qquad [x_1,e_1]=-e_1.\end{cases}$$

В параграфе 1.3 приведена классификация разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $N_{m_1,\dots,m_s}$ при условии, что размерность дополняющего подпространства к нильрадикалу имеет максимальное значение.

**Теорема 3.** Произвольная алгебра Лейбница из семейства $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ изоморфна следующей алгебре:

$$\begin{cases}[e_i^t,e_1^1]=e_{i+1}^t, & 1\le t\le s,\ 1\le i\le m_t-1,\\ [e_i^1,x_1]=ie_i^1, & 1\le i\le m_1,\\ [e_i^t,x_1]=(i-1)e_i^t, & 2\le t\le s,\ 2\le i\le m_t,\\ [e_i^t,x_t]=e_i^t, & 2\le t\le s,\ 1\le i\le m_t,\\ [x_1,e_1^1]=-e_1^1,\end{cases}$$

где $\{x_1,\dots x_s\}$ – базис дополняющего векторного пространства.

Во второй главе диссертации, названной **«Полнота максимальных разрешимых расширений некоторых нильпотентных алгебр Лейбница»**, описаны дифференцирования максимально разрешимого расширения нелиевой модельной нильпотентной алгебры Лейбница с произвольной характеристической последовательностью, максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины, а также доказана полнота этих алгебр.

Приведем описание пространства дифференцирований алгебры $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ из Теоремы 3.

**Предложение 2.** Следующие линейные преобразования образуют базис пространства $Der(R(N_{m_1,\dots,m_s},s))$:

$$\begin{aligned}&d_0(x_1)=-e_1^1,\ d_0(e_i^p)=-e_{i+1}^p, && 1\le p\le s,\quad 1\le i\le m_p-1,\\ &d_1(e_i^1)=ie_i^1, && 1\le i\le m_1,\\ &d_1(e_i^p)=(i-1)e_i^p, && 2\le p\le s,\quad 2\le i\le m_p,\\ &d_p(e_i^p)=e_i^p, && 2\le p\le s,\quad 1\le i\le m_p.\end{aligned}$$

**Предложение 3.** Алгебра Лейбница $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ является полной.

Отметим, что когда размерность дополняющего подпространства к нильрадикалу меньше, чем максимальное значение, то существуют разрешимые алгебры, не являющиеся полными. Например, алгебры семейств $M_1$ и $M_2$ из Теоремы 1 не являются полными при любых параметрах.

В параграфе 2.2 доказывается полнота максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.

Приведем описание пространства дифференцирований алгебры $R(M^{1,0},2)$.

**Предложение 4.** Всякое дифференцирование алгебры $R(M^{1,0},2)$ имеет следующий матричный вид:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1,n} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & a_{1,n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{1,1}+a_{2,2} & a_{1,n} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a_{1,1}+a_{2,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-3)a_{1,1}+a_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2a_{1,1} & 0 & 0 \\ -a_{1,n} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Предложение 5.** Алгебра Лейбница $R(M^{1,0},2)$ является полной.

Приведем результаты для алгебр $R(M^{2,0},2)$ и $R(M^{2,-1},2)$, аналогичные Предложению 5.

**Предложение 6.** Алгебры Лейбница $R(M^{2,0},2)$, $R(M^{2,-1},2)$ являются полными.

В третьей главе диссертации, названной **«Когомологическая жесткость максимальных разрешимых расширений заданных нильпотентных алгебр Лейбница»**, доказана когомологическая жесткость заданного одномерного разрешимого расширения $F_n^1$ и максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины. Установлена когомологическая жесткость максимального разрешимого расширения нелиевой модельной нильпотентной алгебры Лейбница с произвольной характеристической последовательностью.

В работе И.А. Каримжанова была получена классификация $(n+1)$-мерных разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $F_n^1$. Отметим, что данная классификация состоит из трех отдельных алгебр $R_1$, $R_3$, $R_4$ и двух параметрических семейств $R_2(\alpha)$, $R_5(\alpha_4,\ldots,\alpha_n)$. Отметим, что алгебра

$$R_1:\begin{cases} [e_1,e_1]=e_3, \quad [e_i,e_1]=e_{i+1}, & 2\le i\le n-1, \\ [e_1,x]=-e_1, \quad [e_2,x]=-e_2+e_n, & \\ [x,e_1]=e_1, \quad [e_i,x]=-(i-1)e_i, & 3\le i\le n, \end{cases}$$

имеет особенные свойства, а именно, справедлив следующий результат.

**Теорема 4.** Алгебра $R_1$ является когомологически жесткой.

Пользуясь тем фактом, что алгебра Лейбница, для которой выполняется условие $\mathrm{HL}^2(R_1,R_1)=0$, является жесткой, и мы получаем следующее

**Следствие 2.** Алгебра $R_1$ является жесткой в многообразии $(n+1)-$ мерных алгебр Лейбница.

В параграфе 3.2 доказана когомологическая жесткость максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.

**Теорема 5.** $\mathrm{HL}^2(R(M^{1,0},2),R(M^{1,0},2))=0.$

В следующей теореме доказана когомологическая жесткость алгебр $R(M^{2,0},2)$ и $\mathrm{R}(M^{2,-1},2)$.

**Теорема 6.**

$$\mathrm{HL}^2(R(M^{2,0},2),R(M^{2,0},2))=\mathrm{HL}^2(R(M^{2,-1},2),R(M^{2,-1},2))=0.$$

В параграфе 3.3 доказывается тривиальность второй группы когомологий с коэффициентами в регулярном модуле разрешимой алгебры Лейбница $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ из Теоремы 3.

**Теорема 7.** $\mathrm{HL}^2(R(N_{m_1,\dots,m_s},s),R(N_{m_1,\dots,m_s},s))=0.$

Следует отметить, что при вычислении 2-й группы когомологий алгебры $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ получено, что размерности пространств 2-коциклов и 2-кограниц равны числу

$$(m_1+m_2+\dots+m_s+s)^2-(s+1).$$

**Следствие 3.** Алгебра $R(N_{m_1,\dots,m_s},s)$ является жесткой в многообразии алгебр Лейбница размерности $m_1+\dots+m_s+s.$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению конечномерных разрешимых алгебр Лейбница и их когомологических свойств.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Получено описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом, имеющим характеристическую последовательность, равную $(m_1,m_2)$.
2. Получено максимальное разрешимое расширение нелиевой модельной нильпотентной алгебры Лейбница с произвольной характеристической последовательностью.
3. Доказана полнота максимального разрешимого расширения нелиевой модельной нильпотентной алгебры Лейбница с произвольной характеристической последовательностью.
4. Установлена полнота максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.
5. Доказана когомологическая жесткость разрешимой алгебры Лейбница с заданным филиформным нильрадикалом.
6. Установлена когомологическая жесткость максимальных разрешимых расширений квази-филиформных алгебр Лейбница максимальной длины.
7. Доказана когомологическая жесткость максимального разрешимого расширения нелиевой модельной нильпотентной алгебры Лейбница с произвольной характеристической последовательностью.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

MAMADALIEV UKTAMJON KHASANBOEVICH

# RIGIDITY OF SOLVABLE LEIBNIZ ALGEBRAS WITH A GIVEN NILRADICAL

**01.01.06-Algebra**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Tashkent-2020**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM229.**

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uzand in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

| | |
|---|---|
| **Scientific supervisor:** | **Omirov Bakhrom Abdazovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor |
| **Official opponents:** | **Arziqulov Farxodjon Nematovich**<br>Doctor of Physical and Mathematical Sciences |
| | **Eshmatov Farkhod Khasanovich**<br>Doctor of Philosophy (PhD) physical and mathematical sciences, Senior researcher |
| **Leading organization:** | **Karakalpak State University** |

Defense will take place "23" december 2020 at 17:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered №108). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «15» december 2020 year
(Mailing report № 2 on «15» december 2020 year)

**U.A.Rozikov**
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

**A.K.Adashev**
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

**A.R.Hayotov**
Deputy-Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S.

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of research work** is to describe solvable Leibniz algebras with a given nilradical and to study their cohomology groups in low degrees.

**The object of the research work** is solvable Leibniz algebras, derivations, cohomology groups.

**Scientific novelty of the research work** is as follows:

a description of maximal solvable extension of a non-Lie model nilpotent Leibniz algebra with an arbitrary characteristic sequence is obtained;

completeness and cohomological rigidity of solvable Leibniz algebras, which the nilradical is a model algebra of an arbitrary characteristic sequence, are proved;

completeness and cohomological rigidity of maximal solvable extensions of quasi-filiform Leibniz algebras of maximum length are shown;

cohomological rigidity of a solvable Leibniz algebra with a given filiform nilradical is proved.

**Implementation of the research results.**The results of the dissertation are used in the following scientific projects:

results on the rigidity of some solvable Leibniz algebras with a given nilradical are used in a foreign project under the number FRGS/1/2016/STG06/UPM/03/2 "Generalized derivations of some classes of algebras and their applications" Ministry of Higher Education of Malaysia (2016-2020), to describe the algebras of differentiation of certain classes of finite-dimensional solvable Leibniz algebras (Reference from November 6, 2020, Universiti Technologi MARA, Malaysia). Scientific results were applied to describe the derivation algebras of certain classes of finite-dimensional solvable Leibniz algebras;

results on the completeness and on the cohomological rigidity of solvable Leibniz algebras with a given nilradical are used in the project OT-F4-82 + OT-F4-87 "Local derivations and automorphisms of operator and non-associative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems" + "The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics" (reference from the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated December 2, 2020, № 2 / 1255-2708). These results made it possible to verify a number of conjectures regarding solvable Leibniz algebras.

**The structure and volume of the thesis.** The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 79 pages.

## ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
## LIST OF PUBLISHED WORKS

### I бўлим (part I;I часть)


1. Мамадалиев У.Х. Об одной жесткой разрешимой алгебре Лейбница// Узбекский математический журнал. 2013. № 3. с. 70-78.(01.00.00; №6).
2. Мамадалиев У.Х. Алгебра Лейбница, ассоциированная с жесткой алгеброй Ли, имеющей нетривиальную вторую группу когомологий // Узбекский математический журнал. 2016. № 3. с. 75-83. (01.00.00; №6).
3. Adashev J.Q., Mamadaliyev U.X. The rigidity of some solvable Leibniz algebras with quasi–fliform nilradical of maximum length // Uzbek Mathematical Journal. 2018. №3. p. 13-21. (01.00.00; № 6).
4. Abdurasulov K.K., Drew Horton, Mamadaliyev U.X. On solvable Leibniz algebras whose nilradical has characteristic sequence $(m_1, m_2, m_3)$ // Uzbek Mathematical Journal. 2018. №4. p. 4-17. (01.00.00; № 6).
5. Мамадалиев У.Х. Описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом $N_{m,n}$ // Бюллетень Института Математики. 2020. № 1. с. 68-74. (01.00.00; № 17).
6. Mamadaliyev U.Kh., Omirov B.A. Cohomologically rigid solvable Leibniz algebras with nilradical of arbitrary characteristic sequence // Siberian Mathematical Journal. 2020. Vol. 61, №3. p. 504-515. (3. Scopus IF=0.7)


### II бўлим (part II; II часть)


7. Мамадалиев У. Х. О жесткости одной разрешимой алгебры Лейбница // Материалы республиканской конференции “Новые теоремы молодых математиков – 2013”. – Наманган, 15–16 апрель 2013 г. – С. 61–62.
8. Мамадалиев У.Х. Алгебры Лейбница, ассоциированные с лейбницевыми и лиевыми модулями над $sl_2$. // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых “Алгебра, анализ и квантовая вероятность”.– Ташкент, 10–12 сентябрь 2015 г. – С. 80–82.
9. Мамадалиев У.Х. О строении разрешимых алгебр Лейбница с квази-филиформным нильрадикалом// Материалы республиканской научной конференции “Задачи алгебры, прикладной математики и информационных технологий”. – Наманган, 20–21 декабрь 2016 г. – С. 71–74.
10. Мамадалиев У.Х., Солижанова Г.О. О строении одной разрешимой алгебры Лейбница // Материалы республиканской научной конференции “Задачи алгебры, прикладной математики и информационных технологий”. – Наманган, 20–21 декабрь 2016 г. – С. 115-117.
11. Мамадалиев У.Х. О жесткости одной разрешимой алгебры Лейбница с

квази-филиформным нильрадикалом // Тезисы докладов республиканской научной конференции “Новые результаты математики и их приложения”, часть 1. – Самарканд, 14–15 май 2018 г. – С. 157–159.

12. Mamadaliyev U.X., Sattarov A.M. On solvable Leibniz algebras whose nilradical has characteristic sequence $(m_1, m_2)$ // Abstracts of the conference "New theorems of young mathematicians-2018". – Namangan, October 18–19, 2018. – С. 120–121.
13. Mamadaliyev U.X. The rigidity of some solvable Leibniz algebras with quasi-filiform nilradical of maximum length //Abstracts of the international scienific conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmiy 2018". – Tashkent, September 13–15. 2018. – P. 148.
14. Омиров Б.А., Мамадалиев У.Х. Жесткость некоторых разрешимых алгебр Лейбница // Тезисы докладов узбекско-российской научной конференции “Неклассические уравнения математической физики”. – Ташкент, 24–26 октябрь 2019 г. – С. 233–235.
15. Мамадалиев У.Х. Описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом, имеющим характеристическую последовательность $(m_1, m_2)$ // Материалы международной научной конференции “Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения”. – Ташкент, 21–23 ноябрь 2019 г.– С. 148–150.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2020 йил 11 декабрда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди 14.12.2020. Ҳажми 2,75 босма табоқ.
Бичими $60 \times 84$ 1/16. Адади 50 нусха. Буюртма 188.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети
босмахонасида чоп этилди.