ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

КАРИМОВ ЖАВЛОН ЖЎРАБОЙ ЎҒЛИ

МАХСУСЛИККА ЭГА БЎЛГАН АЙЛАНА АКСЛАНТИРИШЛАРИ ВА ТЕРМОДИНАМИК ФОРМАЛИЗМ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

УДК: 517.9

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

КАРИМОВ ЖАВЛОН ЖЎРАБОЙ ЎҒЛИ

МАХСУСЛИККА ЭГА БЎЛГАН АЙЛАНА АКСЛАНТИРИШЛАРИ ВА ТЕРМОДИНАМИК ФОРМАЛИЗМ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM208 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Джалилов Ахтам Абдурахманович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович физика-математика фанлари доктори (DSc)
Етакчи ташкилот:	Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2020 йил «24» декабрь соат 10^{00} даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2020 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2020 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда динамик системалар назарияси масалаларига олиб келади. Айлана гомеоморфизмлари назарияси замонавий бир ўлчовли аксляантиришлар назариясида муҳим йўналишларидан биридир. Дастлаб, айлана гомеоморфизмлари А. Пуанкаре илмий ишларида осмон механикаси масалаларини ечишда ўрганилган. Айлана гомеоморфизмлари назариясинининг фундаменталь натижалари машҳур математиклар А. Пуанкаре, А. Данжуа, А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд, Ю. Мозер, М. Эрман, Ж.К. Йоккоз, Я.Г. Синай, К.М. Ханин, Д. Орнстейн ва бошқалар ишларида келтирилиб ўтилган. Айлана гомеоморфизмларини тадқиқ қилиш динамик системалар ва эҳтимоллар назарияси масалаларининг турли моделларини яратишда ўз талқинига эга бўлганлиги сабабли, айлананинг махсусликка эга бўлган аксляантиришлари назариясида олинган натижалар ҳам назарий, ҳам тадбиқий жиҳатдан аҳамиятли ва замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда айлана аксляантиришлари билан боғлиқ масалаларни ечиш динамик системалар назариясининг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Айлана диффеоморфизмлари айлана аксляантиришларининг муҳим синфи саналади. Маълум маънода айлана диффеоморфизмлари бугунга қадар яхши ўрганилган. Айлана аксляантиришларининг табиий умумлашмаси сифатида критик аклантиришлар ва бўлакли-силлиқ аклантиришларни қараш мумкин. Шундай махсусликларга эга бўлган аксляантиришларни ўрганишда термодинамик формализм методи муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: синиш нуқталарига ва иррациональ буриш сонига эга бўлган айлана аксляантиришлари учун инвариант ўлчовнинг сонли характеристикалари асимптотик ҳолатларини ўрганиш; синиш нуқталарига эга бўлган бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари учун тушиш вақтлари ҳақидаги лимит теоремани исботлаш; синиш нуқталарига айлана гомеоморфизмлари учун термодинамик формализм қуриш масалалари мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда илмий-амалий аҳамиятга эга бўлган ва ишлаб чиқаришда татбиқ этиладиган фундаментал фанларга жуда катта эътибор қаратилмоқда. Айлана гомеоморфизмларининг татбиқи нафақат аниқ ва табиий фанларда, балки иқтисодий масалаларда, ахборотлаштириш назариясида, биологияда, медицинада, юрак касалликларини ташҳис қилишда ва қон таҳлилини ўрганишда қўлланилади. Бугунги кунда махсусликка эга бўлган айлана гомеоморфизмларини тадқиқ қилишда мухим натижаларга эришилди. «Динамик тизимлар назарияси»[1] фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Қарор ижросини таъминлашда динамик системалар ва айлана гомеоморфизмлари назариясини ривожлантириш мухим аҳамиятга эга.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Термодинамик формализм методи статистик физикада кенг қўлланилади. Динамик системалар назариясида термодинамик формализм методи биринчи маротаба Я.Г. Синай томонидан Аносов диффеоморфизмларини тадқиқ қилишда қўлланилган. 1978 йилда М. Фейгенбаум кесма акслантиришларининг бир параметрли оилаларида бифуркация ҳодисасининг икки баробарга ортишини ўрганишда биринчи маротаба ренормализацион группалаш (РГ) методидан фойдаланган. Кейинчалик РГ методи динамик системаларнинг кўплаб масалаларини тадқиқ қилишда муҳим воситалардан бирига айланди. Қўшмаларнинг силлиқлик масаласи Я.Г. Синай ва К.М. Ханин, Й. Кацнельсон и Д. Орнстейн ишларида ечимини топган. Сўнгги 20 йилда РГ методи ёрдамида критик акслантиришлар ва синиш нуқталарига эга бўлган гомеоморфизмлар учун “қаттиқлик масаласи” ечилди.

1985 йилда Е.Б. Вул, Я.Г. Синай ва К.М. Ханин ишида $[-1,1]$ кесманинг Фейгенбаум акслантиришлари учун термодинамик формализм қурилган. Маълумки, Фейганбаум акслантириши мос бўлган ренормализацион группалаш алмаштиришининг қўзғалмас нуқтаси ҳисобланади. А. Джалиловнинг ишида буриш бурчаги γ «олтин кесим» га тенг бўлган $T(\gamma)$ критик айлана гомеоморфизми учун термодинамик формализм (ТФ) қурилган ва сингуляр инвариант ўлчовнинг сонли характеристикалари ўрганилган. Қурилган ТФ асосида махсус нуқтанинг ренормализация атрофига нормалланган тушиш вақтларини лимит холатлари ўрганилган.

Тушиш вақтларининг ҳолатларини тадқиқ қилиш замонавий математик анализнинг муҳим масалаларидан бири ҳисобланади. Тушиш вақтлари учун тақсимот қонунлари турли хилдаги акслантиришлар учун тадқиқ қилинган: тордаги гиперболик автоморфизмлар ва Марков занжирлари, А-диффеоморфизмлар ва чекли типдаги Гельдер потенциалли силжишлар, бўлакли-чўзилувчан айлана акслантиришлари ва айлана диффеоморфизмлари. З. Коэло ва Э. де Фария ишларида айлананинг иррациональ буриш акслантиришларии учун ренормализация атрофига тушиш вақтларининг лимитик ҳолатлари ўрганилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф-4-(37-29) «*A*-аналитик функцияларнинг функционал хоссалари ва уларнинг тадбиқлари. Матрицавий соҳаларда комплекс анализнинг айрим масалалари» (2017–2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади инвариант ўлчовнинг сонли характеристикалари асимптотик ҳолатларини ва синиш нуқталарига эга бўлган бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари учун тушиш вақтларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

синиш нуқталарига ва иррационал буриш сонига эга бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари учун термодинамик формализм қуриш;

Лебег бўйича абсолют узлуксиз ўлчовларнинг айлана гомеоморфизмлари ёрдамида ҳосил қилинган бир томонлама кетма-кетликлар фазосида суришга нисбатан инвариант ўлчов қуриш;

синиш нуқталарига эга бўлган айлана гомеоморфизмлари учун инвариант ўлчовнинг сонли характеристикалари асимптотик ҳолатлари ҳақидаги лимит теоремани исботлаш;

Синиш нуқтасининг камаювчи атрофига нормаланган тушиш вақтларининг яқинлашишини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти синиш нуқталарига эга бўлган бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмлари, ренормализация, динамик бўлиниш, инвариант ўлчов, тушиш вақти.

Тадқиқотнинг предмети — динамик системалар, айлана гомеоморфизмлари назарияси, инвариант ўлчов.

Тадқиқотнинг усуллари. Илмий ишда математик анализ, функционал анализ, эргодиклик назарияси, бир ўлчовли динамика ва эҳтимоллар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

буриш бурчаги «олтин кесим» га тенг ва синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмлари учун синиш нуқта орбитасига ва динамик бўлинишларига оид теоремалар исботланган;

буриш бурчаги «олтин кесим» га тенг ва синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмлари учун синиш нуқтаси чексиз орбитаси ёрдамида термодинамик формализм қурилган;

бир томонлама кетма-кетликлар фазосида айлана гомеоморфизмлари томонидан ҳосил қилинган, Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз бўлган чапга суришга нисбатан инвариант ўлчов мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган;

битта синиш нуқтасига эга ва иррационал буриш сони узлуксиз касрга ёйилмаси $\rho=[m_1,m_2,\ldots,m_l,m_{l+1},\ldots]$, $m_s=1$, $s\geq l+1>0$ кўринишда ва синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеоморфизмлари инвариант ўлчовининг сонли кўрсаткичлари учун лимит теорема исботланган;

Синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеморфизмлари учун ичма-ич интервалларга, нормалланган биринчи тушиш вақтига мос тақсимот функциялари кетма-кетлиги учун лимит мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган. Бундан ташқари, лимит тақсимот функцияси тўғри чизиқда узлуксиз ва $[0,1]$ кесмада қатъий ўсувчилиги исботланган. Шунингдек, лимит тақсимот функциясини $[0,1]$ кесмада сингуляр бўлиши исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Сингуляр инвариант ўлчовнинг сонли кўрсаткичлари ҳисобланган ва тақсимот функциялари кетма-кетлигининг суст яқинлашишини динамик системалар, математик анализ масалаларини ечишда ва уларнинг тадбиқларида фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик мулоҳазалар ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланиб, бир ўлчовли динамика, эргодиклик назарияси ва математик анализнинг маълум усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти термодинамик формализм методи ёрдамида инвариант ўлчовнинг сингулярлик кўрсаткичларини топиш ва тақимот функцияларини яқинлашишини исботлаш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти диссертация натижалари бир нечта синишга нуқталарига эга ва критик нуқталарга эга айлана гомеоморфизмларини тадқиқ қилишда, шунингдек, кесманинг хаотик акслантиришларини асос бўлиб хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқот жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги илмий-тадқиқот проектларида жорий этилган:

Синиш нуқтасига эга бўлган силлиқ айлана акслантиришлари фазосида ренормгруппа операторининг фиксирланган нуқтаси мавжудлиги ва ягоналигига оид натижалар Утара Малайзия университетининг FRGS/1/2018/STG06/UUM/02/13 рақамли “Ночизиқли каср тартибли дифференциал тенгламаларни қўзғалмас нуқтанинг умумлашган усули ва гомотопик анализ усули билан ечиш” хорижий грантида каср тартибли Риман-Лиувилл дифференциал ва интеграл операторларидан фойдаланган ҳолда ночизиқли операторларнинг қўзғалмас нуқталарини ўрганишда қўлланилган. (Утара Малайзия университетининг (Малайзия) 2020 йил 21 октябрдаги UUM/CAS(SQS)/L-2 рақамли маълумотномаси). Ушбу натижалар каср тартибли дифференциал тенгламалар ечимлари мавжудлигини исботлаш имконини берган.

Бир нуқтада синишга эга бўлган айлана акслантиришлари учун инвариант ўлчовнинг сингулярлик кўрсаткичлари хоссаларидан MRU-OT-9/2017 рақамли “Кўп ўзгарувчили комплекс анализ” мавзусидаги лойиҳада сингулярлик кўрсаткичлари ҳақидаги лимит теоремани исботлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан 2020 йил 23 октябрда берилган 89-03-4187 рақамли маълумотнома). Илмий натижанинг қўлланилиши Лебег ўлчови ва инвариант ўлчов бўйича юқори ва қуйи сингулярлик кўрсаткичларининг ўзаро боғлиқлиги ҳақидаги теоремани исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 5 та мақола, жумладан, 1 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 96 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «Динамик системалар назариясидан зарур бўлган маълумотлар» деб номланган ва эргодиклик назарияси, синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеоморфизмлари ва айлана акслантиришлари учун тушиш вақтларига доир зарурий маълумотларни ўз ичига олган.

1.1 параграфда эргодиклик назариясига доир баъзи таърифлар ва фактлар келтирилган: инвариант ўлчов тушунчаси, эргодиклик, Биркгоф-Хинчин эргодик теоремаси, эҳтимоллик инвариант ўлчов мавжудлиги тўғрисидаги Боголюбов-Крылов теоремаси. Ушбу барча маълумотлар диссертация натижаларини баён қилишда қўлланилган.

1.2 параграфда айлана гомеоморфизмлари назарияси, динамик бўлиниш ва символик динамикага доир бошланғич маълумотлар келтирилган.

S^1 айлана $0 \le x < 1$ ярим интервал билан айнийлаштирилган, бу ерда x - S^1 да циклик координата. 0 дан 1 га қараб йўналиш айланадаги мусбат йўналиш дейилади.

Таъриф 1.2.1. *Агар қуйидаги шартлар бажарилса* $T: S^1 \to S^1$ *акслантириш айлана гомеоморфизми дейилади:*

1) T *акслантириш* S^1 *да ўзаро бир қийматли.*

2) T *ва* T^{-1} *акслантиришлар* S^1 *да узлуксиз.*

Қуйидаги хоссаларга эга бўлган $f: R^1 \to R^1$ функцияни қараймиз:

a) $f(x)$ функция R^1 да қатъий ўсувчи ва узлуксиз;

b) Ихтиёрий $x \in R^1$ лар учун $f(x+1) = f(x) + 1$.

$f(x)$ функция ёрдамида қуйидаги формула орқали йўналишни сақловчи T_f айлана гомеоморфизмини аниқлаш мумкин: $T_f x = \{f(x)\}$, $x \in S^1$, бу ерда $\cdot$ соннинг каср қисмини ифодалайди. $f(x)$ функция T_f гомеоморфизмнинг аниқловчи функцияси дейилади.

Таъриф 1.2.3. *Агар* f *ва* f^{-1} *функциялар* R^1 *да узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса,* $T_f: S^1 \to S^1$ *гомеоморфизм диффеоморфизм дейилади.*

T_f диффеоморфизм $C^r(S^1)$, $r > 1$ синфдан деймиз, агар $f \in C^r(R^1)$ бўлса. Агар f_1 ва f_2 айнан бир гомеоморфизмни аниқласа, у ҳолда барча $x \in R^1$ лар учун қуйидаги ўринли: $f_1(x) = f_2(x) + k$, k - бутун сон.

Таъриф 1.2.4. *Айтайлик* $g: M \to M$ *акслантириш берилган бўлсин.* $x_0 \in M$ *нуқта даври* $k, k > 1$ *га тенг бўлган даврий нуқта дейилади, агар қуйидаги шартлар бажарилса:*

$$g^{(i)}(x_0) \neq g^{(j)}(x_0),\ 0 \leq i < j \leq k-1 \ \text{ ва }\ g^{(k)}(x_0) = x_0.$$

$g(x_0) = x_0$ *ҳолида* x_0 *нуқта* g *акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.*

А. Пуанкаренинг фундаменталь теоремасини келтирамиз.

Теорема 1.2.1. (Пуанкаре). $T_f: S^1 \to S^1$- *йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизми ва* $f\ x$ *- ушбу гомеоморфизмнинг ихтиёрий аниқловчи функцияси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $x \in R^1$ *лар учун қуйидаги лимит мавжуд*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}\ x}{n} = \rho(T_f, f)$$

ва унинг қиймати $x \in R^1$ *нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмас.* ρ *сони рационал бўлиши учун* T_f *даврий траекторияга эга бўлиши зарур ва етарли.*

$\rho(T_f, f)$ сони T_f гомеоморфизмни аниқловчи f га боғлиқ. Агар $f_2(x) = f_1(x) + k,\ k \in Z^1$ бўлса, у ҳолда, равшанки, $\rho(T_{f_2}, f_2) = \rho(T_{f_1}, f_1) + k$.

Таъриф 1.2.5. S^1 *да йўналишни сақловчи* T_f *айлана гомеоморфизми ва* $f\ x$ *- ушбу гомеоморфизмнинг аниқловчи функцияси бўлсин.* $\rho(T_f) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f^{(n)}(x)}{n} \pmod 1$ *сони* T_f *гомеоморфизмнинг буриш сони дейилади.*

T_f гомеоморфизмни аниқловчи $f(x)$ функциялар ичида $0 \leq f(0) < 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи $\rho(T_f, f) = \rho(T_f)$ бўлган $f(x)$ ягона аниқловчи функция мавжуд. Кейинги ўринларда гомеоморфизмни аниқловчи функция ҳақида гап кетганда, айнан ушбу функцияни назарда тутамиз. Буриш сони қуйидаги маънода инвариант бўлади: Агар T_1, T_2 - S^1 да йўналишни сақловчи айлана гомеоморфизмлари бўлиб ва T_1 ни T_2 га ўтказувчи $\varphi: S^1 \to S^1$ гомеоморфизм мавжуд бўлса, яъни барча $x \in S^1$ лар учун $\varphi(T_1 x) = T_2 \varphi(x)$, у холда $\rho(T_1) = \rho(T_2)$. Кейинги ўринларда буриш бурчаги иррационал деб фараз қиламиз. $T_\rho x = x + \rho$, $x \in S^1$ гомеоморфизм ρ бурчакга чизиқли буриш дейилади.

Таъриф 1.2.8. *T_1 ва T_2 айлана гомеоморфизмлари топологик эквивалент дейилади, агар шундай йўналишни сақловчи $\varphi: S^1 \to S^1$ гомеоморфизм мавжуд бўлиб қуйидаги тенглик ўринли бўлса: $\varphi(T_f x) = T_\rho(\varphi(x))$, $\forall x \in S^1$. φ га қўшма гомеоморфизм ёки қўшмаси дейилади.*

Теорема 1.2.7. (Данжуа). *Фараз қилайлик T_f айлана диффеоморфизми бўлсин, унинг буриш сони $\rho = \rho(T_f)$ иррационал бўлсин. Агар T_f нинг $f(x)$ аниқловчиси S^1 да узлуксиз ҳосилага эга бўлиб, $f'(x) > 0$, ва $\operatorname{var}_{S^1} \ln f'(x) < \infty$ шартлар бажарилса, у ҳолда T_f билан T_ρ топологик эквивалент бўлади.*

1.3 параграфда синиш нуқталарига эга бўлган айлана гомеоморфизмлари синфига оид зарурий таъриф ва фактлар келтирилган. Сўнгги 20 йилда синиш нуқталарига эга бўлган айлана акслантиришлари К. Ханин, Д. Хмелев, А. Теплинский, Д. Смания, Д. Майер, А. Джалилов ва бошқалар ишларида кенг ўрганилди.

Синиш нуқталарига эга бўлган бўлакли-силлиқ гомеоморфизмлар айлана диффеоморфизмларининг табиий умумлашмаси ҳисобланади. $b \in [0,1)$ нуқта синиш нуқтаси дейилади, агар ушбу нуқтада биринчи ҳосила мавжуд бўлмаса. Синиш нуқталарига эга бўлган содда гомеоморфизмлар сифатида бўлакли-чизиқли айлана гомеоморфизмларини кўриш мумкин. М. Эрман иккита синиш нуқтасига ва иррационал буриш сонига эга бўлакли-чизиқли айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчови абсолют узлуксиз бўлиши учун ушбу икки синиш нуқтаси битта орбитада ётиши зарур ва етарли эканлигини кўрсатган. Синиш нуқталарига эга бўлган бўлган ночизиқли бўлакли-силлиқ айлана гомеоморфизмларининг инвариант ўлчовлари К. Ханин, А. Джалилов, Д. Майер, И. Лиусс, Х. Ахадкулов, Д. Смания ва бошқалар ишларида ўрганилган.

Диффеоморфизмлардан фарқли равишда бундай гомеоморфизмларнинг инвариант ўлчовлари Лебег ўлчовига нисбатан сингуляр бўлади (К. Ханин, А. Джалилов, Д. Майер, И. Лиусс, Х. Ахадкулов). Синиш нуқталарига эга етарлича силлиқ (синиш нуқталари орасида) гомеоморфизмлар ренормализацияси каср-чизиқли акслантиришларга апроксимацияланади (К. Ханин, Д. Хмелев, А. Теплинский, Д. Смания).

1.4 параграфда айлана гомеоморфизмлари учун тушиш вақтига доир зарурий таъриф ва теоремалар келтирилган.

Диссертациянинг иккинчи боби «Битта синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеморфизмлари учун эҳтимоллик инвариант ўлчовнинг сингулярлик кўрсаткичлари» деб номланган ва битта синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеморфизмларини тадқиқ қилишга бағишланган.

2.1 параграфда ренормгруппа алмаштиришларнинг даврий нуқталари ва синиш нуқталарига эга бўлган айлана гомеоморфизмлари учун термодинамик формализм ўрганилган.

X_b орқали қуйидаги шартларни бажарувчи, қатъий ўсувчи ва узлуксиз бўлган ($f(x),\ x\in[-1,0],\ g(x),\ x\in[0,\alpha]$) функциялар жуфтлиги тўпламини белгилаймиз:

а) $f(0)=\alpha, g(0)=-1$; б) $f(-1)=g(\alpha)$;

в) $f(g(0))=f(-1)<0$; г) $f^{(2)}(g(0))\geq 0$;

д) $f(x)\in C^{2+\varepsilon}([-1,0])$, $g(x)\in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ $\forall\ \varepsilon>0$.

а) - в) шарт қуйидаги формула орқали $(f,g)\in X_b$ акслантиришлар жуфтликлари ёрдамида $[-1,\alpha)$ (чекка нуқталари билан айнийлаштирилган) айлана гомеоморфизмини қуриш имконини беради:

$$T_{f,g}(x)=\begin{cases} f(x),\ \text{агар}\ x\in[-1,0), \\ g(x),\ \text{агар}\ x\in[0,\alpha). \end{cases}$$

$X_b(\omega)$ орқали буриш сони “олтин кесим” га тенг бўлган, яъни $\rho(T_{f,g}):=\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $(f,g)\in X_b$ жуфтликлардан ташкил топган қисм тўпламни белгилаймиз.

Ренормгруппа алмаштириши $R_b : X_b(\omega)\rightarrow X_b(\omega)$ ни қуйидаги формула ёрдамида аниқлаймиз: $R_b(f(x),\ g(x))=(\tilde{f}(x),\ x\in[-1,0];\ \tilde{g}(x),\ x\in[0,\alpha'])$, бу ерда $\tilde{f}(x)=-\alpha^{-1}f(g(-\alpha x)),\ \tilde{g}(x)=-\alpha^{-1}f(-\alpha x),\ \alpha'=-\alpha^{-1}f(-1).$

Синиш катталигини аниқлаймиз: $c=\sqrt{f'(-0)/f'(+0)}.$ Е. Вул ва К. Ханин ишида фиксирланган $c\neq 1$ учун $X_b(\omega)$ қисм тўпламда R_b алмаштириш даври иккига тенг бўлган ягона даврий траекторияга $\{f_i(x,c_i),\ g_i(x,c_i),\ i=1,2\}$ эга эканлиги исботланган. $f_i(x,c_i)$ ва $g_i(x,c_i)$, $i=1,2$ функциялар қуйидаги кўринишга эга:

$$f_i(x,c_i)=\frac{(\alpha_i+c_i x)\beta_i}{\beta_i+(\beta_i+\alpha_i-c_i)x}, \qquad g_i(x,c_i)=\frac{\alpha_i\beta_i(x_i-c_i)}{\alpha_i\beta_i c_i+(c_i-\alpha_i-c_i\beta_i)x},$$

бу ерда $\alpha_1=\frac{c-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ \ \alpha_2=\frac{c^{-1}-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ \ c_1=c,\ \ c_2=c^{-1},\ \ \beta_1=\beta_2=\beta_0,$

β_0 - ушбу $\beta^4-\beta^3-\beta^2\frac{(c+1)^2}{c}-\beta+1=0$ тенгламанинг (0,1) интервалда ётувчи ягона илдизи. $[-1,\alpha_i),\ i=1,2$ интервал чекка нуқталарини айнан тенглаштирган ҳолда S_i, $i=1,2$ айланага эга бўламиз. (f_i, g_i), $i=1,2$ жуфтлик ёрдамида $T_i : S_i \to S_i$ айлана гомеоморфизмини аниқлаш мумкин. Кейинги ўринларда T_1 гомеоморфизмни ўрганамиз. Иккинчи T_2 гомеоморфизм аналогик тарзда ўрганилади. T_1 гомеоморфизм x_0 ва $x_1 = T_1(x_0)$ нуқталарда синишга эга ҳамда бу нуқталарда синиш катталиклари кўпайтмаси c_1 га тенг. T_1 гомеоморфизмни T_b деб белгилаймиз.

Таъриф 2.1.1. *Агар $\Phi \circ T = G \circ \Phi$ тенгликни қаноатлантирувчи йўналишни сақловчи $\Phi \in C^k(S^1)$ гомеоморфизм мавжуд бўлса ($k \ge 1$ учун $\Phi^{-1} \in C^{-1}(S^1)$ бажарилиши зарур), у ҳолда йўналишни сақловчи икки T ва G айлана гомеоморфизмлари C^k қўшма.*

Маълумки, T_b гомеоморфизмнинг буриш сони ω га тенг. $\frac{p_n}{q_n}$, $n \ge 1$ орқали ω сонининг n- мос касрларини белгилаймиз. q_n сони қуйидаги тенгламани қаноатлантиради: $q_{n+1} = q_n + q_{n-1},\ q_0 = 1,\ q_1 = 1$. q_n сонини Фибоначчи сонлари дейилади. $B(T_b)$ тўплам орқали T_b билан C^1 қўшма бўлган барча айлана гомеоморфизмлари тўпламини белгилаймиз. Ихтиёрий $T \in B(T_b)$ акслантиришни қараймиз. $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0,\ T(x_0)\})$, $\varepsilon > 0$ акслантириш x_0 ва $T(x_0)$ да синиш нуқталарига эга ва буриш сони “олтин кесим” га, яъни ω га тенг эканлигини кўришимиз мумкин. Айтайлик, $x_0 \in S^1$ бўлсин. Айлананинг $\{\mathbb{P}_n(x_0), n \ge 1\}$ динамик бўлиниши кетма-кетлигини аниқлаймиз. Барча $n \ge 1$ лар учун $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ орқали x_0 ва x_{q_n} нуқталарни туташтирувчи кесмани белгилаймиз. $\Delta_i^{(n)}(x_0) = T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0)),\ i \ge 0$ бўлсин. У ҳолда $\mathbb{P}_n(x_0)$ бўлиниш $\{\Delta_i^{(n)},\ 0 \le i < q_{n+1}\}$ ва $\{\Delta_j^{(n+1)}, 0 \le j < q_n\}$ кесмалар системасидан ташкил топади. $\mathbb{P}_n(x_0)$ дан $\mathbb{P}_{n+1}(x_0)$ га ўтишда барча $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0 \le j \le q_n - 1$, «қисқа» кесмалар сақланади ва барча $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \le i < q_{n+1}$, «узун» кесмалар қуйидаги кўринишда иккига бўлинади: $\Delta_i^{(n)} = \Delta_i^{(n+2)} \bigcup \Delta_{i+q_n}^{(n+1)}$. $\mathbb{P}_n(x_0)$ динамик бўлиниш ёрдамида қуйидаги тарзда символик динамика қуриш мумкин. Айтайлик, $x \in S^1 \setminus \mathbb{O}_T(x_0)$ бўлсин. Агар $x \in \Delta_i^{(n+1)}(x_0),\ 0 \le i < q_n$ бўлса, у ҳолда $a_{n+1} := a_{n+1}(x) = a$ бўлсин. Айтайлик, $x \in \Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0 \le i < q_{n+1}$ бўлсин. x нуқта $\Delta_i^{(n+2)}(x_0)$ кесмага ёки $\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}(x_0)$ кесмага тушади. Биринчи ҳолатда $a_{n+1} = 0$ ва иккинчи ҳолатда $a_{n+1} = 1$ бўлсин. Шу тарзда ўзаро-бир қийматли мосликга эга бўламиз.

$$\varphi : S^1 \setminus O_f(x_0) \leftrightarrow \{\, \underline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots), a_n = a, 0, 1, \text{ бунда } a_{n+1} = a \text{ бўлиши учун}$$
$$a_n = 0,\ n \ge 1 \text{ бўлиши зарур ва етарли}\} =: \Theta_+ .$$

Бунда $\mathbb{P}_n(x_0)$ динамик бўлинишнинг ҳар бир $\Delta^{(n)}$ кесмасига узунлиги n га тенг бўлган ягона сўз $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ мос келади. Айтайлик,

$\Delta^{(n)} := \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ бўлсин. S^1 даги Лебег ўлчови Θ_+ да λ_0 эҳтимоллик ўлчовини ҳосил қилади: $\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) := |\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)|$. S^1 айланадан Θ_+ чексиз сўзлар фазосига ўтишда, T акслантириш $T: \Theta_+ \to \Theta_+$ га ўтади.

Энди худди шундай a,0,1 алфавитга эга бўлган бошқа, бир томонли чексиз сўзлар фазоси Ω ни аниқлаймиз. $\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), a_n = a, 0, 1,$ бунда $a_{n+1} = 0,$ бўлиши учун $a_n = a,\ n \geq 1$ бўлиши зарур ва етарли$\}$. Кейинги ўринларда $\vec{a}$ орқали $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ векторни белгилаймиз, $\underline{b}$ орқали $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ чексиз сўзни ифодалаймиз. Қуйидаги функцияни аниқлаймиз:

$$\underline{\gamma}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0, \ldots), & \text{агар } x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a, \ldots), & \text{агар } x = 0,\ 1. \end{cases}$$

Энди термодинамик формализм тўғрисидаги теоремани келтирамиз.

Теорема 2.1.1. *Барча $T \in B(T_b)$ акслантиришлар учун шундай ягона, узлуксиз (тихонов топологиясида) $U_b : \Omega \to (-\infty, 0)$ функция мавжудки, у қуйидаги хоссаларга эга:*

1) *Ω фазодан олинган барча $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ ва $\underline{b} = (a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n, \ldots)$ лар учун қуйидаги баҳо ўринли: $|U_b(\underline{a}) - U_b(\underline{b})| \leq C_1 \cdot q^k$, бу ерда $C_1 > 0$ ва $q \in (0,1)$ константалар $\underline{a}$, $\underline{b}$ ва k ларга боғлиқ эмас.*

2) *$\Delta_{s_n}^{(n)} \subset \Delta_{s_r}^{(r)}$, $1 \leq r < n,\ 0 \leq s_r \leq q_{r+1} - 1,\ 0 \leq s_n \leq q_{n+1} - 1$ ва $\varphi(\Delta_{s_n}^{(n)}) = (b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_n)$, $\varphi(\Delta_{s_r}^{(r)}) = (b_1 \ldots, b_r)$ берилган бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли:*

$$|\Delta_{s_n}^{(n)}| = (1 + \psi_r(b_1, b_2, \ldots, b_n))\, |\Delta_{s_r}^{(r)}| \exp\{\sum_{s=r}^{n} U_b(b_s, b_{s-1}, \ldots, b_r, \ldots, b_1,\ \underline{\gamma}(b_1))\},$$

бу ерда $|\psi_r(b_1, b_2, \ldots, b_n)| \leq C_2 \cdot q^r$, ва $C_2 > 0$ константа r, n ва $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ларга боғлиқ эмас.

2.2 параграфда бир нуқтада синишга эга бўлган айлана акслантиришлари томонидан символик фазода ҳосил қилинган инвариант ўлчовлар ўрганилган. Айланада иккита табиий эҳтимоллик ўлчови мавжуд: λ Лебег ўлчови ва T га нисбатан μ инвариант ўлчов. Таъкидлаш жоизки, T га нисбатан μ инвариант ўлчов Θ_+ да μ_+ эҳтимоллик ўлчовини ҳосил қилади: $\mu_+(a_1, ..., a_n) = \mu(\Delta(a_1, ..., a_n))$.

2.2 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теорема ҳисобланади.

Теорема 2.2.2. *$T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0,$ битта x_b синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеоморфизми бўлсин, ихтиёрий $x \in S^1 \setminus \{x_b\}$ лар учун $T'(x) \geq Const > 0$ бажарилсин ва буриш сони олтин кесим, ω га тенг бўлсин. μ ва λ орқали айланада мос равишда $T-$инвариант ўлчов ва Лебег* *ўлчовларини белгилаймиз. μ_+ ва λ_+ лар Θ_+. да ҳосил қилинган ўлчовлар бўлсин. У ҳолда*

1) *μ_+ ўлчов σ чапга суриш акслантиришига нисбатан инвариант;*

2) *ҳосил қилинган λ_+ Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз ν $\sigma-$ инвариант ўлчов мавжуд;*

3) *ҳосил қилинган μ_+ ўлчов λ_+ га нисбатан сингуляр.*

2.3 параграфда битта синиш нуқтасига эга бўлган айлана акслантиришлари учун инвариант ўлчовнинг сингулярлик кўрсаткичлари ўрганилган. Инвариант ўлчовнинг қуйи ва юқори сингулярлик кўрсаткичларини аниқлаймиз.

$$\underline{\tau}(x)=\liminf_{\delta\to0}\frac{\ln\mu([x,x+\delta])}{\ln|\delta|},\quad \overline{\tau}(x)=\limsup_{\delta\to0}\frac{\ln\mu([x,x+\delta])}{\ln|\delta|}.$$

$\underline{\tau}(x)$ ва $\overline{\tau}(x)$ функциялар T га нисбатан инвариант бўлади. Бундан, шунингдек T нинг μ_T ва λ ларга нисбатан эргодиклигидан, ушбу икки функциялар μ_T ва λ ўлчовлар бўйича деярли ўзгармас эканлиги келиб чиқади. Бу ўзгармас функцияларни мос равишда $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ ва $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$ лар билан белгилаймиз. А. Джалилов битта синиш нуқтасига эга ва «чегараланган типдаги» иррационал буриш сонига эга (яъни ρ_T ни узлуксиз касрга ёйишдан ҳосил бўлган элементлар кетма-кетлиги чегараланган) $T\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{x_b\})$, $\varepsilon>0$ айлана гомеоморфизмлари учун қуйидаги баҳолашлар ўринли эканлигини кўрсатган:

$$1<\underline{\tau}(\lambda)\le\overline{\tau}(\lambda)<+\infty,\qquad 0<\overline{\tau}(\mu)\le\underline{\tau}(\mu)<1.$$

Энди 2.3 параграфнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема 2.3.1. $T\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{x_b\})$, $\varepsilon>0$, *битта x_b синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеоморфизми бўлсин. Фараз қиламиз, $\rho=\rho_T$ буриш бурчаги иррационал ва унинг узлуксиз касрга ёйилмаси қуйидаги кўринишга эга: $\rho=[m_1,m_2,\dots,m_l,m_{l+1},\dots]$, бу ерда $m_s=1$, $s\ge l+1>0$. $\mu=\mu_T$ эҳтимоллик T - инвариант ўлчов. У ҳолда λ Лебег ўлчови бўйича (μ ўлчов бўйича ҳам) деярли барча x лар учун қуидаги чекли лимит мавжуд:*

$$\lim_{\delta\to0}\frac{\ln\mu([x,x+\delta])}{\ln|\delta|}=\tau_\lambda\ \ (\tau_\mu),$$

ва унинг қиймати x га боғлиқ эмас. Шунингдек, τ_λ ва τ_μ константалар фақатгина ρ буриш сонига боғлиқ.

Диссертациянинг учинчи боби «Синиш нуқталарига эга бўлган айлана гомеморфизмлари учун сингуляр лимит тақсимоти» деб номланган ва синиш нуқталарига эга бўлган айлана гомеморфизмлари учун нормалланган тушиш вақтларининг суст яқинлашишини ўрганишга бағишлангшан.

3.1 параграфда буриш сони иррационал бўлган умумлашган динамик бўлинишлар ўрганилаган. T иррационал буриш сони ρ олтин кесимга тенг бўлган гомеоморфизм бўлсин. $T_\rho x = x+\rho \,(\mathrm{mod}\,1)$, $x\in S^1$, ρ бурчакга чизиқли буриш бўлсин. Иккита айланани қараймиз. Биринчи айланада T гомеоморфизм, иккинчи айланада T_ρ таъсир қилсин. Биринчи айланада ётган x_0 ва иккинчи айланада ётган t_0 нуқталарни қараймиз. Ушбу нуқталар динамик бўлиниши структураси биринчи ва иккинчи айланаларда мос тушади. q_n, $n\geq 1$ T гомеоморфизм учун биринчи қайтиш вақти бўлсин. $c\in(0,1]$ ни фиксирлаймиз. Барча $n\geq 1$ лар учун $c_n(\rho)$ нуқталарни қуйидаги тенглик ёрдамида ягона тарзда аниқламиз: $\mu\,[x_0,c_n(\rho)] = c\cdot\mu\,[x_0,T^{q_n}x_0]$, бу ерда μ - T гомеоморфизмнинг инвариант ўлчови. Яхши маълумки, $\mu\,[x_0,T^{q_n}x_0] = |[t_0,T_\rho^{q_n}t_0]|$ бажарилади, бу ерда $|\cdot|$ кесма узунлигини билдиради. $\Delta_{n,c}$ орқали $[x_0,c_n(\rho))$ интервални белгилаймиз. Қуйидагиларни киритамиз: $A_0^{(n)}=[x_0,T^{-q_{n+2}}c_n],\ B_0^{(n)}=[x_{-q_{n+1}},c_n],\ C_0^{(n)}=[T^{-q_{n+2}}c_n,x_{-q_{n+1}}].$

Теорема 3.1.1. $A_i^{(n)}$, $0\leq i<q_{n+2}$, $B_j^{(n)}$, $0\leq j<q_{n+1}$, $C_k^{(n)}$, $0\leq k<q_{n+3}$ *кесмаларни қараймиз, бу ерда* $A_i^{(n)}:=T^i(A_0^{(n)})$, $B_j^{(n)}:=T^j(B_0^{(n)})$ *ва* $C_k^{(n)}:=T^k(C_0^{(n)})$.*Қуйидаги тасдиқлар ўринли:*

1. $\Delta_l^{(n)}=A_l^{(n)}\bigcup C_l^{(n)}\bigcup B_l^{(n)}\bigcup C_{l+q_{n+2}}^{(n)},\ 0\leq l<q_{n+1}$ *ва*
$\Delta_s^{(n+1)}=A_{s+q_{n+1}}^{(n)}\bigcup C_{s+q_{n+1}}^{(n)},\ 0\leq s<q_n.$
2. $A_i^{(n)}$, $B_j^{(n)}$ *и* $C_k^{(n)}$ *ўзаро кесишмайди (чекка нуқталаридан ташқари);*
3. $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{q_{n+2}-1}A_i^{(n)}\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{j=0}^{q_{n+1}-1}B_j^{(n)}\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{k=0}^{q_{n+3}-1}C_k^{(n)}\right)=S^1;$

3.2 параграфда битта синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеморфизмлари учун нормалланган тушиш вақтларининг суст яқинлашиши ўрганилади. ρ иррационал буриш сони олтин кесимга тенг бўлган T айлана гомеоморфизмини қараймиз. Ихтиёрий $z_0\in S^1$ нуқтани фиксирлаймиз. z_0 нуқтанинг атрофини қараймиз. $c\in(0,1]$ ни фиксирлаймиз. Барча $n\geq 1$ лар учун қуйидаги тенглик ёрдамида ягона тарзда $c_n=c_n(\rho)$ нуқтани аниқлаймиз: $|[z_0,c_n]|=c\cdot|[z_0,T_\rho^{q_n}(z_0)]|$. $\Delta_{n,c}\,z_0$ орқали $[z_0,c_n]$ интервални белгилаймиз. $E_{n,z_0}^{(1)}(x)$ функция x нуқтанинг $\Delta_{n,c}\,z_0$ интервалга 1-марта тушиш вақти бўлсин: $E_{n,z_0}^{(1)}(x)=\inf\ n\geq 1:\ T^nx\in\Delta_{n,c}\ z_0$. $E_{n,z_0}^{(1)}(x)$ функция ҳам c га боғлиқ. Барча $x\in S^1$ лар учун $T^mx\in\Delta_{n,c}\ z_0$ бўлган $m>0$ вақт моментларини қараймиз. Улар x нуқта траекториясининг $\Delta_{n,c}\ z_0$ интервалга тушиш вақтлари дейилади. $E_{n,z_0}^{(k)}(x)$ орқали x нуқтанинг $\Delta_{n,c}\ z_0$ интервалга k-чи тушиш вақтларини белгилаймиз, яъни

$$E^{(k)}_{n,z_0}(x)=\inf\ \ n:\ n>E^{(k-1)}_{n,z_0}(x),\ T^n x\in\Delta_{n,c}\ \ z_0\ \ .$$

$E^{(1)}_{n,z_0}(x)$ функция 1 дан q_{n+3} гача бўлган қийматларни қабул қилади. $\bar{E}_{n,z_0}(x)=\dfrac{1}{q_{n+3}}E^{(1)}_{n,z_0}(x)$ бўлсин. $\Phi_{n,z_0}(t)$ орқали $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ нинг Лебег ўлчовига нисбатан тақсимот функциясини белгилаймиз: $\Phi_{n,z_0}(t)=\lambda\ \ x\in S^1:\ \bar{E}_{n,z_0}(x)\le t\ \ $, $\forall t\in\mathbb{R}^1$.

3.2 параграфнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема 3.2.3. $c\in(0,1]$ *фиксирланган бўлсин.* $T\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{x_0\})$, $\varepsilon>0$, *битта* x_0 синиш нуқтасига эга ва ρ *иррационал буриш сони олтин кесимга тенг, яъни* $\rho=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, *бўлган айлана гомеоморфизми бўлсин. Ихтиёрий* $z_0\in S^1$ *нуқтани қараймиз.* $\Phi_{n,z_0}(t)\ \ {}_{n=1}^{\infty}$ - $\Delta_{n,c}\ \ z_0$ *интервалга биринчи нормалланган тушиш вақти* $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ *га мос, айланадаги Лебег ўлчовига нисбатан тақсимот функцияси кетма-кетлиги бўлсин. У ҳолда:*

1) *Ихтиёрий* $t\in R^1$ *лар учун қуйидаги чекли лимит мавжуд:*

$$\lim_{n\to\infty}\Phi_{n,z_0}(t)=\Phi_{z_0,c}(t),$$

бундан ташқари $t\le 0$ *да* $\Phi_{z_0,c}(t)=0$ *ва* $t>1$ *да* $\Phi_{z_0,c}(t)=1$;

2) $\Phi_{z_0,c}(t)$ $[0,1]$ *да қатъий ўсувчи ва* R^1 *да узлуксиз тақсимот функцияси бўлади.*

3.3 параграфда битта x_0 нуқтада синишга эга бўлган айлана гомеоморфизмлари учун нормалланган тушиш вақтларининг лимит тақсимот функциялари регулярлиги ўрганилган.

3.3 параграфнинг асосий натижасини келтирамиз.

Теорема 3.3.1. $T\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{x_0\})$, $\varepsilon>0$, *битта* x_0 синиш нуқтасига эга ва ρ *иррационал буриш сони олтин кесимга тенг бўлган айлана гомеоморфизми бўлсин.* $\Phi_{n,z_0}(t)\ \ {}_{n=1}^{\infty}$ - $\Delta_{n,c}\ \ z_0$ *интервалга биринчи нормалланган тушиш вақти* $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ *га мос, айланадаги Лебег ўлчовига нисбатан тақсимот функцияси кетма-кетлиги ва* $\Phi_c(t)$ *унинг лимит тақсимот функцияси бўлсин. У ҳолда* $\Phi_c(t)$ *функция* $[0,1]$ *интервалда сингуляр бўлади, яъни* $d\Phi_c(t)/dt=0$ *деярли барча (Лебег ўлчови бўйича)* $x\in[0,1]$ *лар учун.*

ХУЛОСА

Умуман олганда, диссертациядан олинган натижалар диссертация ишининг мақсадига эришилганлиги ҳақида гапиришга имкон беради. Барча асосий натижалар янги ва биргаликда бир ўлчовли динамик системалар назариясига маълум бир хисса қўшади. Диссертация иши синиш нуқтасига эга ва буриш сони иррационал бўлган айлана акслантиришларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқот ишининг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

буриш бурчаги «олтин кесим», яъни $\rho = (\sqrt{5}-1)/2 = [1,1,...,1,...]$ га тенг ва синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмлари учун R_b ренормгруппа алмаштиришининг даврий нуқталари бўлган синиш нуқталари орбиталари ва динамик бўлиниш хоссаларига оид теорема исботланган;

буриш бурчаги «олтин кесим» га тенг ва синиш нуқталарига эга айлана гомеоморфизмлари учун синиш нуқтаси чексиз орбитаси ёрдамида термодинамик формализм қурилган;

Θ_+ бир томонлама кетма-кетликлар фазосида айлана гомеоморфизмлари томонидан ҳосил қилинган, Лебег ўлчовига нисбатан абсолют узлуксиз бўлган σ суришга инвариант ν ўлчов мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланган;

битта x_b синиш нуқтасига эга ва иррационал буриш сони $\rho = [m_1, m_2, \dots, m_l, m_{l+1}, \dots]$, $m_s = 1,\ s \geq l+1 > 0$ бўлган $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0$, айлана гомеоморфизмлари учун $\mu = \mu_T$ инвариант ўлчов сонли кўрсаткичлари яқинлашиши ҳақидаги теорема исботланган;

буриш сони иррационал бўлган айлана гомеоморфизмлари учун ихтиёрий икки нуқта орбитаси ёрдамида умумлашган динамик бўлиниш кетма-кетлиги қурилган;

Синиш нуқтасига эга бўлган айлана гомеморфизмлари учун $\forall z_0 \in S^1$ да $\Delta_{n,c}(z_0) = [z_0, c_n],\ n \geq 1$, камаювчи интервалга биринчи нормалланган тушиш вақтига мос $\Phi_{n,z_0}(t)\ \Big|_{n=1}^{\infty}$ тақсимот функцияси кетма-кетлиги учун ушбу $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi_{n,z_0}(t) = \Phi_{z_0,c}(t), \quad \forall t \in R^1$ лимит мавжудлиги ҳақидаги теорема исботланди. Бундан ташқари, $\Phi_{z_0,c}(t)$ лимит тақсимот функцияси R^1 да узлуксиз ва [0,1] да қатъий ўсувчи ҳамда $t \leq 0$ да $\Phi_{z_0,c}(t) = 0,\ \ t > 1$ да $\Phi_{z_0,c}(t) = 1$ эканлиги исботланган.

$\Phi_c(t)$ лимит тақсимот функцияси [0,1] кесмада сингулярлиги, яъни [0,1] да деярли барча ерда (Лебег ўлчови бўйича) $\dfrac{d\Phi_c(t)}{dt} = 0$ бўлиши исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

КАРИМОВ ЖАВЛОН ЖУРАБАЙ УГЛИ

ОТОБРАЖЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ С ОСОБЕННОСТЯМИ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2020 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM208.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Джалилов Ахтам Абдурахманович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович доктор физико-математических наук (DSc)
Ведущая организация:	Каракалпакский государственный университет им. Бердаха.

Защита диссертации состоится «24» декабря 2020 года в 10^{00} на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2020 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2020 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Значительная часть научно-прикладных исследований, проводимых на мировом уровне, приводится к проблемам теории динамических систем. Теория гомеоморфизмов окружности является важной частью современной теории одномерных отображений. Гомеоморфизмы окружности впервые изучались в пионерских работах А. Пуанкаре в связи с задачами небесной механики. Фундаментальные результаты в теории гомеоморфизмов окружности были получены в работах таких выдающихся математиков, как А. Пуанкаре, А. Данжуа, А.Н. Колмогоров, В.И. Арнольд, Ю. Мозер, М. Эрман, Ж.К. Йоккоз, Я.Г. Синай, К.М. Ханин, Д. Орнстейн, Й. Катцнельсон и др. Поскольку изучение гомоморфизмов окружности имеет свою интерпретацию при создании различных моделей задач динамических систем и теории вероятностей, результаты, полученные в теории отображений окружности с особенностями, имеют как теоретическое, так и практическое значение и актуальны для современной математики.

В настоящее время в мире одной из актуальных проблем теории динамических систем являются задачи, связанные с отображениями окружности. Важным классом отображений окружности являются диффеоморфизмы окружности. В определенном смысле диффеоморфизмы окружности к настоящему времени изучены хорошо. Естественным обобщением диффеоморфизмов окружности являются критические отображения и кусочно-гладкие отображения. При исследованиях таких отображений с особенностями важную роль играет метод термодинамического формализма. В связи с этим: исследование асимптотических поведений числовых характеристик инвариантной меры для отображения окружности с изломами и иррациональным числом вращений; доказательство предельной теоремы о временах попадания для кусочно-гладких гомоморфизмов окружности с изломами; построение термодинамического формализма для гомеоморфизмов окружности с изломами является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделялось и продолжает уделяться фундаментальным наукам, имеющим прикладное значение. Гомеоморфизмы окружности важны не только для естественных наук, но и для экономики, теории информации, биологии, для изучения различных болезней сердца, при анализах крови и т.д. Значительные результаты были достигнуты в исследования гомеоморфизмов окружности с особенностями. Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям специальности «Теория динамических систем» рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[2]. Развитие теории динамических систем и гомеоморфизмов окружности играют важную роль при исполнении этого постановления.

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Метод термодинамического формализма широко используется в статистической физике. В теории динамических систем впервые метод термодинамического формализма использован Я.Г. Синаем в исследованиях диффеоморфизмов Аносова. В 1978 году М. Фейгенбаум при изучении явления бифуркации удвоения в однопараметрических семействах отображений отрезка впервые использовал метод ренормализационной группы (РГ). В дальнейшем метод РГ стал одним из мощных инструментов при исследовании многих задач динамических систем. Проблема о гладкости сопряжений была решена в работах Я.Г. Синая и К.М. Ханина, Й. Кацнельсона и Д. Орнстейна. В последние 20 лет методом РГ была решена проблема «жёсткости» для критических отображений и гомеоморфизмов окружности с изломами.

В 1985 году в работе Е.Б. Вула, Я.Г. Синая и К.М. Ханина для отображения Фейгенбаума отрезка $[-1,1]$ был построен термодинамический формализм. Отметим, что отображение Фейгенбаума является неподвижной точкой соответствующего преобразования ренормгруппы. В работе А. Джалилова для критического отображения окружности $T(\gamma)$ с числом вращений γ, равным золотому сечению, был построен термодинамический формализм (ТФ) и исследованы числовые характеристики сингулярной инвариантной меры. На основе построенного ТФ было исследовано предельное поведение нормированных времён попаданий в ренормализационные окрестности особой точки.

Исследование поведения времени попадания является одной из важных задач современного математического анализа. Законы распределения для времени попадания были исследованы в разных контекстах: для гиперболических автоморфизмов тора и цепей Маркова, для A-диффеоморфизмов и сдвигов конечного типа с гельдеревским потенциалом, для кусочно-растягивающих отображений окружности и для диффеоморфизмов окружности. В работах З. Коэльо и Э. де Фария были изучены предельные поведения времени попаданий в ренормализационные окрестности для иррационального поворота окружности.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования ОТ-Ф-4-(37-29) «Функциональные свойства А-аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017—2020 гг.).

Целью исследования является изучение асимптотического поведения числовых показателей инвариантной меры и времени попаданий для кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами.

Задачи исследования:

построить термодинамический формализм для кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами и иррациональным числом вращений;

построить на пространстве односторонних последовательностей, порождённых гомеоморфизмами окружности, абсолютно непрерывную меру Лебега, инвариантную меру относительно сдвига;

доказать предельную теорему об асимптотических поведениях показателей сингулярности инвариантной меры для гомеоморфизмов окружности с изломами;

доказать сходимость нормированного времени попадания в убывающие окрестности точки излома.

Объект исследования — кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломами, ренормализации, динамические разбиения, инвариантные меры, время попадания.

Предмет исследования — динамические системы, теория гомеоморфизмов окружности, инвариантные меры.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа, функционального анализа, эргодической теории, одномерной динамики, теории вероятностей.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказана теорема о свойствах орбиты точки излома и динамических разбиений для гомеоморфизмов окружности с изломами и числом вращений, равным «золотому сечению»;

построен термодинамический формализм при помощи орбиты точки излома для гомеоморфизмов окружности с изломами и числом вращений, равным «золотому сечению»;

доказана теорема о существовании инвариантной меры относительно сдвига налево на пространстве односторонних последовательностей, порождённых гомеоморфизмами окружности, являющихся абсолютно непрерывными относительно меры Лебега;

доказана предельная теорема для числовых показателей инвариантной меры для гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома и иррациональным числом вращений, разложения на непрерывную дробь имеющий вид $\rho=[m_1,m_2,\ldots,m_l,m_{l+1},\ldots]$, где $m_s=1,\ s\geq l+1>0$;

доказана теорема о существовании предела для последовательности функции распределений, соответствующих нормированному времени первого попадания в убывающие окрестности, для гомеоморфизмов окружности с изломами. Кроме того, доказано, что предельная функция распределения является непрерывной на прямой и строго возрастающей на $[0,1]$. Также доказано, что предельная функция распределения является сингулярной функцией на отрезке $[0,1]$.

Практические результаты исследования – явно вычисленные числовые показатели инвариантной меры и слабая сходимость последовательности функций распределения использованы при решении задач динамических систем, математического анализа и в их приложениях.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов одномерной динамики, эргодической теории и математического анализа.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что при помощи метода термодинамического формализма можно найти показатели сингулярности инвариантной меры и доказать сходимость функций распределения.

Практическая значимость состоит в том, что результаты диссертации могут быть использованы при исследовании гомеоморфизмов окружности с многими изломами и критическими точками, а также при изучении хаотических отображений отрезка.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Результаты о существовании и единственности фиксированной точки оператора ренормгруппы, заданного на пространстве гладких отображений окружности с изломом, были использованы в зарубежном проекте под номером FRGS/1/2018/STG06/UUM/02/13 “Решение нелинейных дробно-дифференциальных уравнений с помощью обобщенного метода неподвижной точки и метода гомотопического анализа”, Университета Утара Малайзия, одобренном Министерством образования Малайзии, для изучения неподвижных точек нелинейных операторов с использованием дифференциальных и интегральных операторов Римана-Лиувилля дробных порядков (Справка № UUM/CAS(SQS)/L-2 от 21 октября 2020 года Университета Утара Малайзия, Малайзия). Эти результаты позволили доказать существование решений дифференциальных уравнений дробного порядка.

Свойства показателей сингулярности инвариантной меры для отображений окружности с одним изломом были использованы в фундаментальном проекте MRU-OT-9/2017 “Многомерный комплексный анализ” для доказательства предельной теоремы о показателях сингулярности (Справка № 89-03-4187 от 23 октября 2020 года Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан). Эти результаты позволили доказать теорему о связи между верхними и нижними показателями сингулярности по мере Лебега и по инвариантной мере.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 7 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 5 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 1 опубликован в зарубежном журнале и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на десять параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 96 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, проведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и показана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная «Необходимые сведения из теории динамических систем», содержит необходимые сведения из эргодической теории, гомеоморфизмов окружности с изломами и времени попаданий для отображений окружности.

В параграфе 1.1 приведены некоторые определения и факты из эргодической теории: понятие инвариантной меры, эргодичности, эргодическая терема Биркгофа-Хинчина, теорема Боголюбова-Крылова о существовании вероятностной инвариантной меры. Все эти сведения далее будут использованы при изложении результатов диссертации.

В параграфе 1.2 даны предварительные сведения из теории гомеоморфизмов окружности, динамических разбиений и символической динамики.

Окружность S^1 отождествляется с полуинтервалом $0 \le x < 1$, где x - циклическая координата на S^1. Направление от 0 в сторону 1 называется положительным направлением на окружности.

Определение 1.2.1. *Отображение* $T : S^1 \to S^1$ *называется гомеоморфизмом окружности, если выполнены следующие условия:*

1) T *- взаимно-однозначное отображение* S^1*;*
2) *Отображения* T *и* T^{-1} *непрерывны на окружности* S^1.

Рассмотрим функцию $f : R^1 \to R^1$ со следующими свойствами:

$a)$ $f(x)$ - строго возрастающая и непрерывная функция на R^1;

$b)$ $f(x+1) = f(x)+1$ для любого $x \in R^1$.

При помощи функции $f(x)$ можно определить сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности T_f по формуле: $T_f x = \{f(x)\},\ x \in S^1$, где $\cdot$ обозначает дробную часть числа. Функция $f(x)$ называется определяющей функцией или поднятием гомеоморфизма T_f.

Определение 1.2.3. *Гомеоморфизм* $T_f : S^1 \to S^1$ *называется диффеоморфизмом, если* f *и* f^{-1} *имеют непрерывные производные на* R^1.

Мы будем говорить, что T_f - диффеоморфизм класса $C^r(S^1), r > 1$, если $f \in C^r(R^1)$. Отметим, что если f_1 и f_2 представляют один и тот же гомеоморфизм, то $f_1(x) = f_2(x) + k$ при всех $x \in R^1$, k -целое число.

Определение 1.2.4. *Пусть дано отображение* $g : M \to M$. *Точка* $x_0 \in M$ *называется периодической точкой периода* $k, k > 1$, *если*

$$g^{(i)}(x_0) \neq g^{(j)}(x_0),\ 0 \leq i < j \leq k-1 \ \text{ и } \ g^{(k)}(x_0) = x_0.$$

В случае $g(x_0) = x_0$ *точка* x_0 *называется неподвижной точкой отображения* g.

Теперь сформулируем фундаментальную теорему А. Пуанкаре.

Теорема 1.2.1. (Пуанкаре). *Пусть* $T_f : S^1 \to S^1$*- сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности и* $f\ x$ *- любая определяющая функция этого гомеоморфизма. Тогда для любого* $x \in R^1$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}\ x}{n} = \rho(T_f, f)$$

и значение предела не зависит от выбора точки $x \in R^1$. *Число* ρ *рационально тогда и только тогда, когда* T_f *имеет периодическую траекторию.*

Число $\rho(T_f, f)$ зависит от функции f, определяющей гомеоморфизм T_f. Но если $f_2(x) = f_1(x) + k,\ k \in Z^1$, то, очевидно, $\rho(T_{f_2}, f_2) = \rho(T_{f_1}, f_1) + k$.

Определение 1.2.5. *Пусть* T_f *- сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности* S^1, $f(x)$*- определяющая его функция. Число*

$$\rho(T_f) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n}\ (\mathrm{mod}1)$$

называется числом вращения гомеоморфизма T_f.

Среди функций $f(x)$, определяющих гомеоморфизм T_f, имеется ровна одна такая, что $\rho(T_f, f) = \rho(T_f)$, а именно определяющая функцию $f(x)$ с начальным условием $0 \le f(0) < 1$. В дальнейшем, говоря о функции, определяющей гомеоморфизм, мы будем иметь виду именно ее. Число вращения является инвариантным в следующем смысле: Если T_1, T_2 - два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма окружности S^1 и существует гомеоморфизм $\varphi: S^1 \to S^1$, переводящий T_1 в T_2, т.е. такой, что $\varphi\ T_1 x\ = T_2\,\varphi(x)$ для всех $x \in S^1$, то $\rho(T_1) = \rho(T_2)$.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что число вращений является иррациональным. Гомеоморфизм $T_\rho x = \ x + \rho\ $, $x \in S^1$ называется линейным поворотом на угол ρ.

Определение 1.2.8. *Два гомеоморфизма окружности* T_1 *и* T_2 *называются топологически эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм* $\varphi: S^1 \to S^1$ *такой, что* $\varphi(T_f x) = T_\rho(\varphi(x))$ *для любого* $x \in S^1$. *При этом отображение* φ *называется сопряжением.*

Теорема 1.2.7. (Данжуа). *Пусть* T_f *– диффеоморфизм окружности* S^1 *с иррациональным числом вращений* $\rho(T_f)$. *Если функция* $f(x)$, *определяющая* T_f, *имеет непрерывную производную* $f'(x) > 0$ *и* $\underset{S^1}{\mathrm{var}} \ln f'(x) < \infty$, *то* T_f *топологически эквивалентен повороту* T_ρ.

В параграфе 1.3 даны необходимые определения и факты, относящиеся к классу гомеоморфизмов окружности с изломами. Отображения окружности с изломами интенсивно изучались в течение 20 последних лет в работах К. Ханина, Д. Хмелева, А. Теплинского, Д. Смания, Д. Майера, А. Джалилова и др.

Естественным обобщением диффеоморфизмов окружности являются кусочно-гладкие гомеоморфизмы с изломами. Точка $b \in [0,1)$ называется точкой излома, если в ней имеется скачок первой производной. Простейшими гомеоморфизмами с изломами являются кусочно-линейные гомеоморфизмы окружности. М. Эрман показал, что инвариантная мера кусочно-линейного гомеоморфизма с двумя изломами и с иррациональным числом вращений является абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда обе точки излома лежат на одной орбите.

Инвариантные меры нелинейных кусочно-гладких гомеоморфизмов окружности с изломами изучены в работах К. Ханина, А. Джалилова, Д. Майера, И. Лиусс, Х. Ахадкулова, Д. Смания и др.

В отличие от диффеоморфизмов инвариантные меры таких гомеоморфизмов являются сингулярными относительно меры Лебега (К. Ханин, А. Джалилов, Д. Майер, И. Лиусс, Х. Ахадкулов). Для достаточно гладких (между точками излома) гомеоморфизмов с изломами их ренормализации аппроксимируются дробно-линейными отображениями (К. Ханин, Д. Хмелев, А. Теплинский, Д. Смания).

В параграфе 1.4 приведены необходимые определения и теоремы о времени попадания для гомеоморфизмов окружности.

Вторая глава диссертации, названная “Показатели сингулярности вероятностной инвариантной меры для гомеоморфизмов окружности с одним изломом”, посвящена исследованию гомеоморфизмов окружности с одной точкой излома.

В параграфе 2.1 изучаются периодические точки ренормгруппового преобразования и термодинамический формализм для гомеоморфизмов окружности с изломами.

Обозначим через X_b множество пар ($f(x),\ x\in[-1,0],\ g(x),\ x\in[0,\alpha]$) строго возрастающих, непрерывных функций на прямой, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f(0)=\alpha, g(0)=-1$; б) $f(-1)=g(\alpha)$;

в) $f(g(0))=f(-1)<0$; г) $f^{(2)}(g(0))\geq 0$;

д) $f(x)\in C^{2+\varepsilon}([-1,0])$, $g(x)\in C^{2+\varepsilon}([0,\alpha])$ для любого $\varepsilon>0$.

Условия а) - в) позволяют при помощи пары отображений $(f,g)\in X_b$ построить гомеоморфизм окружности $[-1,\alpha)$ (с отождествленными концами) по формуле: $T_{f,g}(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x\in[-1,0), \\ g(x), \text{ если } x\in[0,\alpha). \end{cases}$.

Обозначим через $X_b(\omega)$ подмножество состоящее из таких пар $(f,g)\in X_b$, что число вращений равном «золотому сечению», т.е. $\rho(T_{f,g}):=\omega=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Определим преобразование ренормгруппы $R_b: X_b(\omega)\to X_b(\omega)$ по формуле $R_b(f(x),\ g(x))=(\tilde{f}(x),\ x\in[-1,0];\ \tilde{g}(x),\ x\in[0,\alpha'])$, где $\tilde{f}(x)=-\alpha^{-1}f(g(-\alpha x)),\ \tilde{g}(x)=-\alpha^{-1}f(-\alpha x),\ \alpha'=-\alpha^{-1}f(-1)$.

Определим величину излома: $c=\sqrt{f'(-0)/f'(+0)}$. В работе Е. Вула и К. Ханина доказано, что при фиксированном $c\neq 1$ преобразование R_b в подмножестве $X_b(\omega)$ имеет единственную периодическую траекторию $\{f_i(x,c_i),\ g_i(x,c_i),\ i=1,2\}$ периода два. Функции $f_i(x,c_i)$ и $g_i(x,c_i)$, $i=1,2$, имеют вид:

$$f_i(x,c_i)=\frac{(\alpha_i+c_i x)\beta_i}{\beta_i+(\beta_i+\alpha_i-c_i)x}, \qquad g_i(x,c_i)=\frac{\alpha_i\beta_i(x_i-c_i)}{\alpha_i\beta_i c_i+(c_i-\alpha_i-c_i\beta_i)x},$$

где $\alpha_1=\dfrac{c-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ \ \alpha_2=\dfrac{c^{-1}-\beta_0^2}{1+\beta_0},\ \ c_1=c,\ \ c_2=c^{-1},\ \ \beta_1=\beta_2=\beta_0,$

β_0 - единственный корень уравнения $\beta^4-\beta^3-\beta^2\dfrac{(c+1)^2}{c}-\beta+1=0,$ принадлежащий интервалу $(0,1)$.

Отождествляя концы $[-1,\alpha_i),\ i=1,2$, получаем окружности S_i, $i=1,2$. При помощи пар $(f_i,g_i),\ \ i=1,2$, можно определить гомеоморфизмы окружности $T_i:S_i\to S_i$. В дальнейшем мы будем изучать гомеоморфизм T_1. Второй гомеоморфизм T_2 изучается аналогичным образом. Гомеоморфизм T_1 имеет изломы в точках x_0 и $x_1=T_1(x_0)$ и произведение величин изломов в этих точках равно c_1. Гомеоморфизм T_1 обозначим через T_b.

Определение 2.1.1. *Два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма окружностей* T *и* G *называются* C^k *сопряженными, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм* $\Phi\in C^k(S^1)$ *(при* $k\ge 1$ *требуется* $\Phi^{-1}\in C^{-1}(S^1)$*) такой, что выполняется равенство* $\Phi\circ T=G\circ\Phi$.

Ясно, что число вращения гомеоморфизма T_b ровно ω. Обозначим через $\dfrac{p_n}{q_n}$, $n\ge1$, n-ую подходящую дробь числа ω. Числа q_n удовлетворяют следующему разностному уравнению $q_{n+1}=q_n+q_{n-1},\ q_0=1,\ q_1=1$. Числа q_n называются числами Фибоначчи. Обозначим через $B(T_b)$ множество всех гомеоморфизмов окружности, C^1 - сопряженных с T_b. Возьмём произвольное отображение $T\in B(T_b)$. Заметим, что отображение $T\in C^{2+\varepsilon}(S^1\setminus\{x_0,\ T(x_0)\})$, $\varepsilon>0$, имеет две точки излома x_0 и $T(x_0)$, а его число вращений ровно «золотому сечению», то есть ω. Пусть $x_0\in S^1$. Определим последовательность $\{\mathbb{P}_n(x_0),n\ge1\}$ динамических разбиений окружности. Для каждого $n\ge1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(x_0)$ отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n}. Положим $\Delta_i^{(n)}(x_0)=T^i(\Delta_0^{(n)}(x_0)),\ i\ge0.$ Тогда разбиение $\mathbb{P}_n(x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)},\ 0\le i<q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)},0\le j<q_n\}$. При переходе от $\mathbb{P}_n(x_0)$ к $\mathbb{P}_{n+1}(x_0)$ все «короткие» отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(x_0)$, $0\le j\le q_n-1$ сохраняются, а «длинные» отрезки $\Delta_i^{(n)}(x_0)$, $0\le i<q_{n+1}$, разбиваются на пары отрезков: $\Delta_i^{(n)}=\Delta_i^{(n+2)}\bigcup\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}$. При помощи динамических разбиений $\mathbb{P}_n(x_0)$ можно построить символическую динамику следующим образом. Пусть $x\in S^1\setminus\mathbb{O}_T(x_0)$. Положим $a_{n+1}:=a_{n+1}(x)=a,$ если $x\in\Delta_i^{(n+1)}(x_0),\ 0\le i<q_n.$ Пусть $x\in\Delta_i^{(n)}(x_0),\quad 0\le i<q_{n+1}$. Точка x попадает в отрезок $\Delta_i^{(n+2)}(x_0)$ или в отрезок $\Delta_{i+q_n}^{(n+1)}(x_0)$. В первом случае положим $a_{n+1}=0$, а во втором $a_{n+1}=1$. Таким образом, мы получим взаимно-однозначное соответствие

$$\varphi : S^1 \setminus O_f(x_0) \leftrightarrow \{\, \underline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots), a_n = a, 0, 1, \text{ при этом } a_{n+1} = a \text{ тогда и только тогда, когда } a_n = 0,\ n \ge 1\} =: \Theta_+ .$$

Отметим, что при этом каждому отрезку $\Delta^{(n)}$ динамического разбиения $\mathbb{P}_n(x_0)$ соответствует единственное слово длины $n : (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Пусть $\Delta^{(n)} := \Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Мера Лебега на S^1 индуцирует вероятностную меру λ_0 на Θ_+: $\lambda_0(a_1, a_2, \ldots, a_n) := |\Delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)|$. При переходе от окружности S^1 на пространство бесконечных слов Θ_+ отображение T переходит на $T : \Theta_+ \to \Theta_+$.

Теперь определим другое пространство Ω односторонних бесконечных слов с тем же алфавитом $a, 0, 1$. $\Omega := \{\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots), a_n = a, 0, 1,$ при этом $a_{n+1} = 0$ тогда и только тогда, когда $a_n = a,\ n \ge 1\}$. В дальнейшем через $\vec{a}$ будем обозначать вектор $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а через $\underline{b}$ будем обозначать бесконечные слово $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$. Определим следующую функцию

$$\underline{\gamma}(x) = \begin{cases} (a, 0, a, 0, \ldots, a, 0, \ldots), & \text{если } x = a, \\ (0, a, 0, a, \ldots, 0, a, \ldots), & \text{если } x = 0,\ 1. \end{cases}$$

Теперь сформулируем теорему о термодинамическом формализме.

Теорема 2.1.1. *Для всех отображений* $T \in B(T_b)$ *существует единственная, непрерывная (в тихоновской топологии) функция* $U_b : \Omega \to (-\infty, 0)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) *Для любых* $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n, \ldots)$ *и* $\underline{b} = (a_1, \ldots, a_k, b_{k+1}, \ldots, b_n, \ldots)$ *из пространства* Ω *верна оценка* $|U_b(\underline{a}) - U_b(\underline{b})| \le C_1 \cdot q^k$, *где константы* $C_1 > 0$ *и* $q \in (0,1)$ *не зависят от* $\underline{a}$, $\underline{b}$ *и* k.

2) *Пусть* $\Delta_{s_n}^{(n)} \subset \Delta_{s_r}^{(r)}$, $1 \le r < n,\ 0 \le s_r \le q_{r+1} - 1,\ 0 \le s_n \le q_{n+1} - 1$ *и* $\varphi(\Delta_{s_n}^{(n)}) = (b_1, \ldots, b_r, \ldots, b_n)$, $\varphi(\Delta_{s_r}^{(r)}) = (b_1 \ldots, b_r)$, *тогда*

$$|\Delta_{s_n}^{(n)}| = (1 + \psi_r(b_1, b_2, \ldots, b_n))\, |\Delta_{s_r}^{(r)}| \exp\{\sum_{s=r}^{n} U_b(b_s, b_{s-1}, \ldots, b_r, \ldots, b_1, \underline{\gamma}(b_1))\},$$

где $|\psi_r(b_1, b_2, \ldots, b_n)| \le C_2 \cdot q^r$, *с константой* $C_2 > 0$, *не зависящей от r, n и* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

В параграфе 2.2 изучаются инвариантные меры на символическом пространстве, порождённые отображением окружности с одной точкой излома. На окружности есть две естественные вероятностные меры: мера Лебега λ и $T-$ инвариантная мера μ. Отметим, что $T-$ инвариантная мера μ индуцирует вероятностную меру μ_+ на Θ_+: $\mu_+(a_1, ..., a_n) = \mu(\Delta(a_1, ..., a_n))$. Основным результатом параграфа 2.2 является следующая теорема.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0,$ - *гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* x_b, $T'(x) \ge Const > 0$ *для любого*

$x \in S^1 \setminus \{x_b\}$ и числом вращений, равным золотому сечению ω. Обозначим через μ и λ $T-$ инвариантную меру и меру Лебега на окружности, соответственно. Пусть μ_+ и λ_+ - индуцированные меры на пространстве Θ_+. Тогда

1) *μ_+ инвариантно относительно отображения левого сдвига σ;*

2) *существует $\sigma-$ инвариантная мера ν, абсолютно непрерывная относительно индуцированной меры Лебега λ_+;*

3) *индуцированная мера μ_+ сингулярна относительно λ_+.*

В параграфе 2.3 изучаются показатели сингулярности инвариантной меры для отображений окружности с одним изломом.
Определим нижний и верхний показатели сингулярности инвариантной меры

$$\underline{\tau}(x) = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu([x,x+\delta])}{\ln|\delta|}, \quad \overline{\tau}(x) = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu([x,x+\delta])}{\ln|\delta|}.$$

Функции $\underline{\tau}(x)$ и $\overline{\tau}(x)$ являются инвариантными относительно T. Отсюда, а также из эргодичности T относительно мер μ_T и λ следует, что обе эти функции являются почти постоянными и по мере μ_T и по мере λ. Эти постоянные обозначим через $\overline{\tau}(\mu)$, $\underline{\tau}(\mu)$ и $\underline{\tau}(\lambda)$, $\overline{\tau}(\lambda)$, соответственно. А. Джалилов показал, что для гомеоморфизмов окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, с одной точкой излома и с иррациональным числом вращений «ограниченного типа» (то есть последовательность элементов разложения ρ_T в непрерывную дробь ограничена) справедливы следующие оценки: $1 < \underline{\tau}(\lambda) \le \overline{\tau}(\lambda) < +\infty$, $0 < \overline{\tau}(\mu) \le \underline{\tau}(\mu) < 1$.
Теперь сформулируем основной результат параграфа 2.3.

Теорема 2.3.1. *Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, – гомеоморфизм окружности с одной точкой излома x_b. Предположим, что числа вращений $\rho = \rho_T$ иррациональные и её разложение в непрерывную дробь имеет вид: $\rho = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, где $m_s = 1$, $s \ge l+1 > 0$. Пусть $\mu = \mu_T$ – вероятностная T - инвариантная мера. Тогда для почти всех x по мере Лебега λ (и по мере μ) существует конечный предел*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\ln \mu([x,x+\delta])}{\ln|\delta|} = \tau_\lambda \ \ (\tau_\mu)$$

и его значения не зависят от x. Кроме того, константы τ_λ и τ_μ зависят только от числа вращений ρ.

Третья глава диссертации, названная “Сингулярные предельные распределения для гомеоморфизмов окружности с изломами”, посвящена изучению слабой сходимости нормированных времени попаданий для гомеоморфизмов окружности с изломами.

В параграфе 3.1 изучаются обобщенные динамические разбиения для гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращений. Пусть T – гомеоморфизм с иррациональным числом вращений ρ, равным золотому сечению. Пусть $T_\rho x = x + \rho \pmod 1$, $x \in S^1$, – линейный поворот на угол ρ. Рассмотрим две окружности. Пусть на первой окружности действует гомеоморфизм T, а на второй T_ρ. Рассмотрим точку x_0, лежащую на первой окружности, и t_0 на второй окружности. Структуры динамических разбиений этих точек на первой окружности и на второй совпадают. Пусть q_n, $n \geq 1$, будет время первого возвращения для гомеоморфизма T. Зафиксируем $c \in (0,1]$. Для каждого $n \geq 1$ однозначно определим точки $c_n(\rho)$ соотношением: $\mu\,[x_0, c_n(\rho)] = c \cdot \mu\,[x_0, T^{q_n} x_0]$, где μ - инвариантная мера гомеоморфизма T. Хорошо известно, что $\mu\,[x_0, T^{q_n} x_0] = |[t_0, T_\rho^{q_n} t_0]|$, где $|\cdot|$ означает длину отрезка. Обозначим через $\Delta_{n,c}$ интервал $[x_0, c_n(\rho))$. Обозначим: $A_0^{(n)} = [x_0, T^{-q_{n+2}} c_n]$, $B_0^{(n)} = [x_{-q_{n+1}}, c_n]$, $C_0^{(n)} = [T^{-q_{n+2}} c_n, x_{-q_{n+1}}]$.

Теорема 3.1.1. *Рассмотрим следующие отрезки* $A_i^{(n)}$, $0 \leq i < q_{n+2}$, $B_j^{(n)}$, $0 \leq j < q_{n+1}$, $C_k^{(n)}$, $0 \leq k < q_{n+3}$, *где* $A_i^{(n)} := T^i(A_0^{(n)})$, $B_j^{(n)} := T^j(B_0^{(n)})$ *и* $C_k^{(n)} := T^k(C_0^{(n)})$. *Имеют место следующие утверждения:*

1. $\Delta_l^{(n)} = A_l^{(n)} \bigcup C_l^{(n)} \bigcup B_l^{(n)} \bigcup C_{l+q_{n+2}}^{(n)}$, $0 \leq l < q_{n+1}$ *и* $\Delta_s^{(n+1)} = A_{s+q_{n+1}}^{(n)} \bigcup C_{s+q_{n+1}}^{(n)}$, $0 \leq s < q_n$.
2. $A_i^{(n)}$, $B_j^{(n)}$ *и* $C_k^{(n)}$ *попарно не пересекаются (кроме конечных точек).*
3. $\left(\bigcup_{i=0}^{q_{n+2}-1} A_i^{(n)}\right) \bigcup \left(\bigcup_{j=0}^{q_{n+1}-1} B_j^{(n)}\right) \bigcup \left(\bigcup_{k=0}^{q_{n+3}-1} C_k^{(n)}\right) = S^1$.

В параграфе 3.2 изучается слабая сходимость нормированных времён попаданий для гомеоморфизмов окружности с одним изломом. Рассмотрим гомеоморфизм окружности T с иррациональным числом вращений ρ, равным золотому сечению. Зафиксируем произвольную точку $z_0 \in S^1$. Рассмотрим окрестность точки z_0. Фиксируем $c \in (0,1]$. Для каждого $n \geq 1$ однозначно определим точку $c_n = c_n(\rho)$ соотношением: $|[z_0, c_n]| = c \cdot |[z_0, T_\rho^{q_n}(z_0)]|$. Обозначим через $\Delta_{n,c}(z_0)$ интервал $[z_0, c_n]$. Пусть $E_{n,z_0}^{(1)}(x)$ – время 1-го попадания точки x в интервал $\Delta_{n,c}(z_0)$: $E_{n,z_0}^{(1)}(x) = \inf\{n \geq 1 : T^n x \in \Delta_{n,c}(z_0)\}$. Отметим, что функция $E_{n,z_0}^{(1)}(x)$ также зависит от c. Для каждого $x \in S^1$ рассмотрим моменты времени $m > 0$ такие, что $T^m x \in \Delta_{n,c}(z_0)$. Они называются временами попадания траектории точки x в интервал $\Delta_{n,c}(z_0)$. Обозначим через $E_{n,z_0}^{(k)}(x)$ время k-го попадания точки x в интервал $\Delta_{n,c}(z_0)$, т.е. $E_{n,z_0}^{(k)}(x) = \inf\{n : n > E_{n,z_0}^{(k-1)}(x),\ T^n x \in \Delta_{n,c}(z_0)\}$.

Функция $E^{(1)}_{n,z_0}(x)$ принимает значения от 1 до q_{n+3}. Положим $\bar{E}_{n,z_0}(x) = \dfrac{1}{q_{n+3}} E^{(1)}_{n,z_0}(x)$. Обозначим через $\Phi_{n,z_0}(t)$ функцию распределения $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ относительно меры Лебега: $\Phi_{n,z_0}(t) = \lambda\ \ x \in S^1 : \bar{E}_{n,z_0}(x) \le t\ \ ,\ \forall t \in \mathbb{R}^1$.

Сформулируем основной результат параграфа 3.2.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $c \in (0,1]$. *Пусть* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0\})$, $\varepsilon > 0$, – *гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* x_0 *и иррациональным числом вращений равным золотому сечению* $\rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Рассмотрим произвольную точку* $z_0 \in S^1$. *Пусть* $\Phi_{n,z_0}(t)\ \ {}_{n=1}^{\infty}$ - *последовательность функций распределения относительно меры Лебега на окружности, соответствующей первому нормированному времени попадания* $\bar{E}_{n,z_0}(x)$ *в интервал* $\Delta_{n,c}\ \ z_0$ *. Тогда:*

1) *Для любого* $t \in R^1$ *существует конечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_{n,z_0}(t) = \Phi_{z_0,c}(t),$$

причем $\Phi_{z_0,c}(t) = 0$ *при* $t \le 0$ *и* $\Phi_{z_0,c}(t) = 1$ *при* $t > 1$*;*

2) $\Phi_{z_0,c}(t)$ - *строго возрастающая на* $[0,1]$ *и непрерывная функция распределения на* R^1 .

В параграфе 3.3 изучается регулярность предельных распределений для нормированного времени попадания для гомеоморфизмов окружности с одним изломом в точке x_0.

Сформулируем основной результат параграфа 3.3.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0\})$, $\varepsilon > 0$, – *гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* x_0 *и иррациональным числом вращений равным золотому сечению* $\rho = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Пусть* $\Phi_{n,c}(t)\ \ {}_{n=1}^{\infty}$ - *последовательность функций распределения относительно меры Лебега на окружности, соответствующей первому нормированному времени попадания* $\bar{E}_{n,c}(x)$ *в интервал* $\Delta_{n,c}$, *и* $\Phi_c(t)$ – *ее предельная функция распределения. Тогда* $\Phi_c(t)$ *является сингулярной функцией на отрезке* $[0,1]$, *т.е.* $d\Phi_c(t)/dt = 0$ *почти для всех (по мере Лебега)* $x \in [0,1]$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В целом, полученные в диссертации результаты позволяют говорить о достижении цели диссертационной работы. Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят определенный вклад в теорию одномерных динамических систем. Работа посвящена изучению отображения окружности с изломами и иррациональным числом вращений.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказана теорема о свойствах орбиты точки излома и динамических разбиений для гомеоморфизмов окружности с изломами, являющейся периодической точкой преобразования ренормгруппы R_b, с числом вращений, равным «золотому сечению», т.е. $\rho = (\sqrt{5}-1)/2 = [1,1,...,1,...]$.

2. Построен термодинамический формализм при помощи бесконечной орбиты точки излома для гомеоморфизмов окружности с изломами и числом вращений ρ, равным «золотому сечению».

3. Доказана теорема о существовании инвариантной меры ν относительно сдвига σ на пространстве односторонних последовательностей Θ_+, порождённых гомеоморфизмами окружности, являющейся абсолютно непрерывной относительно меры Лебега.

4. Доказана теорема о сходимости числовых показателей инвариантной меры $\mu = \mu_T$ для гомеоморфизмов окружности $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\}),\ \varepsilon > 0$ с одной точкой излома x_b и иррациональным числом вращений $\rho = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, где $m_s = 1,\ s \geq l+1 > 0$.

5. Построена последовательность обобщенных динамических разбиений при помощи орбит произвольных двух точек окружности для гомеоморфизмов окружности с иррациональным числом вращений.

6. Доказано существование предельного распределения для последовательности функций распределений, соответствующих нормированному времени первого попадания во вложенные и убывающих окрестности точки излома гомеоморфизма T, также доказана непрерывность предельного распределения $\Phi_{z_0,c}(t)$ на прямой.

7. Доказано, что предельная функция распределения $\Phi_c(t)$ является сингулярной функцией на отрезке $[0,1]$, т.е. $\frac{d\Phi_c(t)}{dt} = 0$ почти всюду (по мере Лебега) на $[0,1]$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc. 03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KARIMOV JAVLON JURABOY UGLI

CIRCLE MAPS WITH SINGULARITIES AND THERMODYNAMIC FORMALISM

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM208.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Dzhalilov Akhtam Abdurakhmanovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganikhodjaev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
	Rakhmatullaev Muzaffar Mukhammadjanovich Doctor of Physical and mathematical Sciences
Leading organization:	Karakalpak State University named after Berdakh

Defense will take place on "24" December 2020 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.____). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "____" ______________ 2020.
(Mailing report No.____ on "____" ______________ 2020).

A.Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study the asymptotic behavior of the numerical exponents of the invariant measure and the hitting time for piecewise smooth homeomorphisms of a circle with breaks.

The object of the research work is piecewise smooth homeomorphisms with breaks, renormalizations, dynamical partitions, invariant measures, hitting time.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the theorem on the properties of the orbit of the break point and dynamical partitions for homeomorphisms of a circle with breaks and rotation number equal to the “golden mean”;.

the thermodynamic formalism is constructed using an infinite orbit of a break point of a circle homeomorphisms with breaks and a rotation number equal to the “golden mean”;.

it is proved on the existence of an invariant measure with respect to the left shift on the space of one-sided sequences generated by homeomorphisms of a circle that is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure;

the theorem on the convergence of the numerical exponents of the invariant measure for homeomorphisms of the circle with one break point and irrational rotation number $\rho = [m_1, m_2, \ldots, m_l, m_{l+1}, \ldots]$, where $m_s = 1, s \geq l+1 > 0$;

the theorem on the existence of the limit for the sequence of the distribution function corresponding to the first normalized hitting time in a decreasing neighborhood for circle homeomorphisms with breaks. In addition, it is proved that the limit distribution function is continuous on real line and strictly increasing on [0,1]. Also, it is proved that the limit distribution function is a singular function on the segment [0,1].

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The results concerning the existence and uniqueness of a fixed point of renormalization operator defined on a space of smooth circle maps with a break were used in the foreign project FRGS/1/2018/STG06/UUM/02/13 titled “Solutions of Nonlinear Fractional Differential Equations via a Generalized Fixed Point Method and Homotopy Analysis Method” of University Utara Malaysia, approved by Ministry of Education of Malaysia, to study the fixed points of nonlinear operators involving the Riemann-Liouville differential and integral operators of fractional orders (Certificate No UUM/CAS(SQS)/L-2 dated October 21, 2020, University Utara Malaysia). These results enabled us to prove the existence of solutions of fractional order differential equations;

The properties of the singularity exponents of the invariant measure for circle maps with one break point were used in the fundamental project MRU-OT-9/2017 “Multivariate Complex Analysis” to prove the limit theorem on singularity exponents (Certificate No 89-03-4187 dated October 23, 2020, of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan). These results made it possible to prove a theorem on the relationship between the upper and lower singularity exponents by the Lebesgue measure and by the invariant measure.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 96 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Каримов Ж.Ж. Времени попадания для гомеоморфизмов окружности с изломами. // ДАН РУз. 2018. № 5. С. 6-11. (01.00.00, № 7).
2. Karimov J. On continuity of limit distribution function for rescaled hitting times. // Uzbek Mathematical Journal. 2019. No 4. P. 81-91. (01.00.00, № 6).
3. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм и показатели сингулярности инвариантной меры отображений окружности с одним изломом. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т-30. Вып. 3. С. 343-366. (3. Scopus IF=1.00).
4. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. The entrance times for circle homeomorphisms with a break. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. Vol. 3. Iss. 3. P. 209-221. (01.00.00, № 8).
5. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Invariant measures on the space of sequences associated by circle maps. // Uzbek Mathematical Journal. 2020. No 4. P. 22-31. (01.00.00, № 6).

II бўлим (2 часть; part 2)

6. Джалилов А.А., Бегматов А.С., Каримов Ж.Ж. Рози-Вич ренормализации для обобщенных перекладываний интервала // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Алгебра, анализ и квантовая вероятность». Ташкент, 10-12 сентября 2015 года. С. 167-169.
7. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Поведение времени ожидания для некоторых отображений // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их применения». Ташкент, 1-3 мая 2017 года. С. 206-207.
8. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Behavior of the waiting time for irrational rotation of the interval // The abstract book of The Second USA-Uzbekistan conference on Analysis and Mathematical Physics. Urgench, 8-12 August, 2017. P. 35-36.
9. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. On the entrance functions for circle maps with breaks // Abstracts of the International Scientific Conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018”. Tashkent, Uzbekistan, September 13-15, 2018. P. 163-165.
10. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Теорема Ким и Сео для отображений окружности с особенностями // Abstracts of the International Conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. Samarkand, Uzbekistan, September 17-20, 2018. P. 17-19.

11. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. The limit theorem for hitting times of circle maps with singularities // STEMM Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference. Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17, 2019. P. 41-42.
12. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. О некоторых одномерных отображениях с особенностями // «Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики» международная научная конференция, Нальчик, РФ, 10-14 июня 2019 года. С. 33-38.
13. Karimov J.J. Generalized dynamical partitions of the circle // Материалы республиканской научной конференции «Актуальные проблемы и применение анализа», Карши, 4-5 октября 2019 года. С. 6-7.
14. Dzhalilov A.A., Karimov J.J. Hitting times and singular distributions of the circle maps with a break // Труды республиканской научно-практической конференции «Статистика и её применения», Ташкент, 17-18 октября 2019 года. С. 201-205.
15. Джалилов А.А., Каримов Ж.Ж. Термодинамический формализм для гомеоморфизмов окружности с изломами // Международная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана, 12-13 марта 2020 года. С. 300-303.
16. Karimov J.J. The invariant measures on symbolic spaces // International Conference “Frontier in Mathematics and Computer Science” (FMCS), Tashkent, 12-15 October, 2020. P. 67.