ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АМИНОВ БЕҲЗОД РАСУЛ ЎҒЛИ

НОКОММУТАТИВ АТОМИК СИММЕТРИК ФАЗОЛАРНИНГ ИЗОМЕТРИЯСИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АМИНОВ БЕҲЗОД РАСУЛ ЎҒЛИ

НОКОММУТАТИВ АТОМИК СИММЕТРИК ФАЗОЛАРНИНГ ИЗОМЕТРИЯСИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.1.PhD/FM191 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Чилин Владимир Иванович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Заитов Адилбек Атаханович** физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим **Закиров Ботир Сабитович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	ЎзР ФА Математика институти

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда Банах фазоларининг изометрик назарияси масалаларига келтирилади. Симметрик фазоларда таъсир қилаётган эрмит ва сюръектив изометрик операторларни тавсифлаш Банах фазолари назарияси ва чегараланмаган операторлар алгебраси назарияси тадқиқотларининг муҳим йўналишларидан биридир. Функционал ва нокоммутатив симметрик фазоларининг геометрик ва топологик хоссаларини ўрганишда симметрик фазоларда таъсир қилувчи изометрик операторларни тавсифлаш асос сифатида хизмат қилади. Симметрик фазоларни изометрик таснифи машҳур математиклар С. Банах, Ж. Ламперти, Б. Руссо, Дж. Арази, А.Сурур, Е. Семенов ва бошқалар ишларида келтирилиб ўтилган. Шу сабабли симметрик фазоларнинг турли синфларида таъсир қилувчи изометрик операторларини тузилишини тадқиқ қилиш замонавий математиканинг долзарб йўналишларидан ҳисобланади.

Ҳозирги кунда жаҳонда коммутатив ва нокоммутатив симметрик фазоларни изометрик классификация қилиш замонавий функционал анализнинг долзарб масалаларидан бири ҳисобланади. Сюръектив изометрик операторларни, Эрмит операторларни, косо-эрмит операторларни, 2-локал изометрияларни тадқиқ қилиш Банах фазолари назариясида мухим аҳамият касб этмоқда. Бу борада: симметрик кетма-кетликлар фазоси ва Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган Эрмит ҳамда сюръектив изометрик операторларини тавсифлаш, мукаммал атомик симметрик фазоларда аниқланган Кёте топологиясини тадқиқ қилиш, комплекс Банах фазоларда шар топологиясининг асосий хоссаларини исботлаш, атомик симметрик фазоларда аниқланган Кёте топологияси ҳамда ушбу фазода аниқланган шар топологияси орасидаги боғланишни топиш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларниниг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган функционал анализнинг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, ўлчовли операторларининг нокоммутатив симметрик фазолари назариясини яратишга алоҳида эътибор қаратилмоқда, чунки ушбу назария квант механикаси ва статистик физика масалалари билан чамбарчас боғлиқ. Мамлакатимизда симметрик кетма-кетликлар фазоси ва Банах симметрик идеалларининг изометриясини тавсифлашда сезиларли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ»[1] фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди. Қарор ижросини таъминлашда коммутатив ва нокоммутатив симметрик фазоларнинг изометрик назариясини ривожлантириш мухим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947-сонли Фармони, 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тпдқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Классик Банах фазоларининг чизиқли изометрияларини тадқиқ қилиш Банах томонидан бошланган бўлиб, у $p \neq 2$ бўлганда $L_p[0,1]$ фазоларининг изометриясини тавсифлади. Кейинчалик Лампертининг ишларида $L_p(\Omega, A, \mu)$ фазоларининг изометрияси барча σ-чекли ўлчовли (Ω, A, μ) ўлчовли фазолар учун тавсиф қилинди. L_p -фазоларининг изометриясини тавсиф қилишда Банах ва Ламперти қўллаган усуллар скаляр майдонни танлашга боғлиқ бўлмаган. L_p -фазолар синфидан кенгроқ бўлган функционал симметрик $E(\Omega, A, \mu)$ фазоларини изометриясини тадқиқ қилиш учун бошқа усулларни, яъни скаляр майдонга боғлиқ усулларни қўллашга тўғри келади. Симметрик фазо $E(\Omega, A, \mu)$ комплекс сонлар майдон устида қаралганда эрмит операторлари назариясига таянувчи Лумер техникаси самарали қўлланилади. Худди шу техника М.Г. Зайденберг томонидан μ узлуксиз ўлчовли комплекс симметрик $E(\Omega, A, \mu)$ фазоларини сюръектив изометрияларини тавсифлашда қўлланилган.

Иккинчи томондан хақиқий симметрик кетма-кетликлар фазосининг сюръектив чизиқли изометрияларининг аниқ кўриниши М.Ш.Браверман и Е.М.Семеновларнинг ишларида топилган бўлиб, улар чекли группалар назарияси методларини қўллашган. Табиийки, комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоларининг сюръектив изометрияларининг тавсифи масаласи юзага келган эди. Ушбу масалани Дж. Арази комплекс симметрик кетма-кетликлар фазолари сепарабел бўлган ҳол учун ечди. Ушбу йўналишдаги сўнгги натижалар ичида симметрик операторлар фазосининг мусбат изометрияларига бағишланган Ф.А.Сукочев ва А.С.Векслернинг биргаликдаги иши ажралиб туради.

Бизнинг мамлакатда Банах фазоларининг изометрик назарияси билан Ш.А.Аюпов, Р.З.Абдуллаев, Ф.А.Сукочев, В.И.Чилин, А.С.Векслер, А.М.Меджитов каби математиклар шуғулланишган. Масалан, В.И.Чилин, А.М.Меджитов ва Ф.А.Сукочевларнинг биргаликда бажарилган ишида нокоммутатив Лоренц фазосида таъсир қилувчи барча сюръектив изометриялар тавсиф қилинган. Ш.А.Аюпов ва Р.З.Абдуллаевларнинг биргаликда бажарилган ишида но ассоциатив L_p- фазоларида таъсир қилувчи сюръектив изометрияларнинг аниқ кўриниши топилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф4-31 « Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар» (2017–2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади комплекс симметрик кетма-кетликлар фазосида, Банах симметрик идеалларида ва нокоммутатив атомик симметрик фазоларда таъсир қиляётган барча эрмит ва сюръектив изометрияларни тавсиф қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Комплекс Банах фазоларида шар топологиясини хоссаларини исботлаш;

Симметрик кетма-кетликлар фазоларида, Банах симметрик идеалларида ва атомик нокоммутатив симметрик фазоларида таъсир қиляётган эрмит ва сюръектив изометрияларни Кёте топологиясига нисбатан узлуксиз эканлигини ўрнатиш;

Симметрик кетма-кетликлар фазоларида, Банах симметрик идеалларида ва атомик нокоммутатив симметрик фазоларида таъсир қиляётган эрмит ва сюръектив изометрияларни аниқ кўринишини топиш;

Банах симметрик идеалларнинг ўз-ўзига қўшма қисмида таъсир қилаётган косо-эрмит ва сюръектив изометрияларни аниқ кўринишини топиш.

Тадқиқотнинг объекти симметрик фазолар, эрмит операторлари, изометриялар, шар топологияси ва Кёте топологияси.

Тадқиқотнинг предмети мукаммал симметрик фазолар, мукаммал симметрик фазоларда таъсир қиляётган эрмит ва чизиқли изометрик операторлар, комплекс Банах фазоларда шар топологиясининг хоссалари, эрмит ва сюъректив изометрик операторларининг Кёте топологиясига нисбатан узлуксизлиги.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида функционал анализ, умумий топология, Банах фазолари назарияси ва операторлар алгебралари назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

Комплекс Банах фазосида шар топологиясининг асосий хоссалари тавсифланган;

Фату хоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоларида таъсир қиляётган эрмит ва сюръектив изометрияларни Кёте топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исбот қилинган;

Фату хоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоларида таъсир қиляётган эрмит ва сюръектив изометриялар тавсифланган;

Мукаммал Банах симметрик идеалларида таъсир қиляётган эрмит ва сюръектив изометриялар тавсифланган;

Мукаммал Банах симметрик идеалларининг ўз-ўзига қўшма қисмида таъсир қиляётган косо-эрмит ва сюръектив изометриялар тавсифланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

Фату хоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоларида, мукаммал симметрик Банах идеалларида таъсир қилаётган эрмит ва сюръектив чизиқли изометрияларни тадқиқ қилинган хоссалари, Банах функционал фазолари ва нокоммутатив симметрик ўлчовли операторлар фазоларини изометрик классификация қилишда қўлланилади.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, умумий топология, Банах фазолари назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.

Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоси, ҳамда Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган эрмит ва сюърректив изометрик операторларини аниқ кўриниши топилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти диссертация натижалари симметрик фазоларда таъсир қилаётган эрмит операторларни хоссаларини тадқиқ қилишда, шунингдек, симметрик фазолар изометриясини тавсифлашга асос бўлиб хизмат қилади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқот жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги илмий-тадқиқот проектларида жорий этилган:

Фату хоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазосида таъсир қилаётган сюръектив изометрияларнинг тавсифи ОТ-4-27 рақамли «Йордан учликлари олдқўшма фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» лойиҳасида матрицалар алгебрасида 2-локал дифференциаллашларини тадқиқ қилишда қўлланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 22 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши матрицалар алгебрасида ҳар қандай 2-локал дифференциаллаш оддий маънода дифференциаллаш бўлишини исботлашга имкон берган;

Банах симметрик идеалларида таъсир қиляётган сюръектив чизиқли изометрияларнинг аниқ кўриниши ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 «Z^d панжараларида ва G^k Кэли дарахтларида гамильтонианлар спектрлари ва Гиббс ўлчовлари» лойиҳасида Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган Данфорд-Шварц операторларини эргодик хоссаларини тадқиқ қилишда қўлланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 22 сентябрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган мусбат Данфорд-Шварц операторлари учун индивидуал эргодик теоремани исботлашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 3 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 106 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Бошланғич маълумотлар** » деб номланувчи биринчи бобида симметрик кетма-кетликлар фазолари, $\tau-$ўлчовли операторлар симметрик фазолари ва Банах симметрик идеаллари таърифлари келтирилган. Ҳақиқий нормалланган фазолар учун Тингли муаммоси баён қилинган. Эрмит ва изометрик операторлар таърифлари берилган. Симметрик кетма-кетликлар фазолари ва Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган эрмит ва изометрик операторлар тавсифи ҳақидаги маълум теоремалар келтирилган.

$\ell_\infty(\mathbb{K})$ бу $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$ нормага нисбатан барча комплекс ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) ёки ҳақиқий ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) чегараланган $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ кетма-кетликлар фазоси бўлсин, бу ерда $\mathbb{N}$ барча натурал сонлар тўплами. Координатавий қисмий тартибга нисбатан $\ell_\infty(\mathbb{R})$ фазоси Банах панжараси бўлиб, $|\{\xi_n\}_{n=1}^\infty| = \{|\xi_n|\}_{n=1}^\infty$ тенглиги ўринли бўлади. Комплекс вектор панжараси $\ell_\infty(\mathbb{C})$ элементлари $z=\{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ учун ҳам $|z|=\{|\zeta_n|\}_{n=1}^\infty$ тенглиги ўринли бўлади. Ҳар бир $z=\{\zeta_j\}_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{C})$ элементи учун ўсмайдиган $\zeta^*=\{\zeta_j^*\}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$ ўринлаштириш $\zeta_j^* := \inf\limits_{|F|<j}\sup\limits_{i\notin F}|\zeta_i|$ формуласи ёрдамида мос қўйилади, бу ерда F тўплами $\mathbb{N}$ тўпламнинг чекли қисм тўпламидир. Банах нормаси $\|\cdot\|_E$ га эга бўлган $\ell_\infty(\mathbb{K})$ нинг нолдан фарқли қисм-фазоси E симметрик кетма-кетликлар фазоси дейилади, агар

$y \in E$, $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ ва $x^* \le y^*$ шартларидан $x \in E$ ва $\|x\|_E \le \|y\|_E$ шартлари келиб чиқса. Бунда ҳар қандай $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция ва барча $\{\xi_n\} \in E, \lambda_n \in \mathbb{C}, |\lambda_n| = 1, n \in \mathbb{N}$ элементлари учун $\|\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\|_E = \|\{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty\|_E$ тенглиги ўринли бўлади. Бундан ташқари ихтиёрий $x \in E$ учун $\|x\|_\infty \le \|x\|_E$ муносабати ўринли бўлади. Нормалланган $(X, \|\cdot\|_X)$ фазони нормалланган $(Y, \|\cdot\|_Y)$ фазога акслантирувчи $T : X \to Y$ ва барча $x, y \in X$ элементлари учун $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ шартини қаноатлантирувчи акслантириш изометрия дейилади. Комплекс сепарабел симметрик кетма-кетликлар фазоларида таъсир қилаётган сюръектив чизиқли изометрияларнинг қуйидаги маълум тавсифини келтирамиз.

Теорема 1. E комплекс сепарабел симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлиб, $\ell_2(\mathbb{C})$ фазосига тенг бўлмасин ва V акслантириш E фазосида чизиқли сюръектив изометрия бўлсин. У ҳолда шундай биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ва шундай $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{C}), |\lambda_n| = 1, n \in \mathbb{N}$ кетма-кетлиги мавжудки, барча $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E$ элементлари учун $V(\{\xi_n\}_{n=1}^\infty) = \{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty$ тенглиги ўринли бўлади.

$\mathbb{K}$ майдони устида X чизиқли фазоси берилган бўлсин. Қуйидаги 1)-4) шартларни қаноатлантирувчи $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{K}$ акслантириш ярим-ички кўпайтма дейилади:

1) Барча $x \in X$ учун $[x, x] \ge 0$ ва $[x, x] = 0$ тенгликдан, $x = 0$ тенглиги келиб чиқади;

2) Барча $x, y \in X$ ва $\lambda \in \mathbb{K}$ учун $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$;

3) Барча $x, y, z \in X$ учун $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$;

4) Барча $x, y \in X$ учун $|[x, y]|^2 \le [x, x][y, y]$.

Равшанки, ҳар қандай $[\cdot,\cdot]$ ярим-ички кўпайтма $\|x\| = \sqrt{[x, x]}$ тенглик ёрдамида X фазода норма аниқлайди. Комплекс Банах $(X, \|\cdot\|_X)$ фазосида таъсир қилаётган чизиқли чегараланган $T : X \to X$ оператори барча $x \in X$ элементлари учун $[T(x), x] \in \mathbb{R}$ шартини қаноатлантирса, эрмит оператори дейилади, бу ерда $[\cdot,\cdot]$ акслантириши $\|\cdot\|_X$ нормасига мос ички-кўпайтма. Комплекс сепарабел симметрик кетма-кетликлар фазосида таъсир қилаётган эрмит операторларининг қуйида келтирилган тавсифи 1-теоремани исбот қилишда асосий ролни ўйнайди.

Теорема 2. E комплекс сепарабел симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлиб, $\ell_2(\mathbb{C})$ фазосига тенг бўлмасин ва $T : E \to E$ эрмит оператори бўлсин. У ҳолда шундай $\{a_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{R})$ кетма-кетлиги мавжудки, барча $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E$ элементлари учун $T(\{\xi_n\}_{n=1}^\infty) = \{a_n \xi_n\}_{n=1}^\infty$ тенглиги ўринли бўлади.

$(X, \|\cdot\|_X)$ ва $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ҳақиқий нормалланган фазолар бўлсин. Мазур-Уламнинг классик теоремаси ҳар қандай биектив $V : X \to Y$ изометрия аффин алмаштириш, яъни суриш ва чизиқли акслантиришни композицяси бўлишини тасдиқлайди. Хусусан $V(0) = 0$, бўлса V чизиқли акслантириш бўлади. Ҳақиқий нормалланган $(X,\|\cdot\|_X)$ фазоси учун $B(X)$ (мос равишда $S(X)$) орқали X фазосининг бирлик шари (мос равишда сфера)ни белгилаймиз, яъни $B(X)=\{x\in X:\|x\|_X\le 1\}$ ва $S(X)=\{x\in X:\|x\|_X=1\}$. П.Манкиевич ишида Мазур-Улам теоремаси қуйидагича кучайтирилган.

Теорема 3. $(X,\|\cdot\|_X)$ ва $(Y,\|\cdot\|_Y)$ ҳақиқий нормалланган фазолар бўлсин. Агар $V:B(X)\to B(Y)$ биектив изометрик акслантириш бўлса, у ҳолда шундай биектив чизиқли акслантириш $L:X\to Y$ мавжудки, барча $x\in B(X)$ элементлари учун $L(x)=V(x)$ тенглиги ўринли бўлади.

Д.Тингли 1987-йилда 3-теорема билан боғлиқ ҳолда қуйидаги муаммони илгари сурди.

Тингли муаммоси. $(X,\|\cdot\|_X)$ ва $(Y,\|\cdot\|_Y)$ ҳақиқий нормалланган фазолар бўлсин. Агар $V:S(X)\to S(Y)$ биектив изометрик акслантириш бўлса, барча $x\in S(X)$ элементлари учун $L(x)=V(x)$ тенгликни қаноатлантирувчи $L:X\to Y$ биектив чизиқли акслантириш топиладими?

Тингли муаммоси баъзида изометрик давом эттириш муаммоси дейилади ва ушбу муаммо кўп классик Банах фазолари синфлари учун ижобий томонга ечилган. Равшанки биектив изометрик $V:S(X)\to S(Y)$ акслантириш учун Тингли муаммоси ижобий томонга ечилса, у ҳолда албатта барча $x\in S(X)$ элементлари учун $V(-x)=-V(x)$ тенглиги бажарилиши керак. Шу муносабат билан, аввал қандай ҳақиқий нормалланган фазолар учун биектив изометрик $V:S(X)\to S(Y)$ акслантириш юқорида келтирилган тенгликни қаноатлантиришини аниқлаш лозим. Д.Тинглининг ишида ушбу масала чекли ўлчамли фазолар учун ҳал қилинган.

Теорема 4. $(X,\|\cdot\|_X)$ ва $(Y,\|\cdot\|_Y)$ чекли ўлчамли ҳақиқий нормалланган фазолар бўлсин . Агар $V:S(X)\to S(Y)$ биектив изометрик акслантириш бўлса, у ҳолда барча $x\in S(X)$ элементлари учун $V(-x)=-V(x)$ тенглиги ўринли бўлади.

$\mathcal{M}$ орқали комплекс сонлар $\mathbb{C}$ устида қаралаётган $\left(\mathcal{H},(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}\right)$ Гильберт фазосида таъсир қилаётган чизиқли чегараланган операторларнинг фон Нейман алгебрасини белгилаймиз, бунда $\mathbf{1}$— фон Нейман алгебраси $\mathcal{M}$ нинг бирлик элементидир. $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ орқали $\mathcal{M}$ даги барча $p=p^*=p^2$ проекторларни ва ҳар бир $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ учун $p^{\perp}=\mathbf{1}-p$ деб белгилаймиз. Агар $p,q\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ проекторлари учун шундай қисмий изометрия $v\in\mathcal{M}$ топилиб, $p=v^*v,\ q=vv^*$ шартларини қаноатлантирса, у ҳолда проекторлар эквивалент дейилади (белгилаш: $p\sim q$). Проектор $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ чекли дейилади, агар $e\le p, e\in\mathcal{P}(\mathcal{M}), e\sim p$ муносабатларидан $e=p$ тенглиги келиб чиқса. Нолдан фарқли $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ проектори минимал (ёки атом) дейилади, агар $0\ne q\le p, q\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ муносабатларидан $q=p$ тенглиги келиб чиқса. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси ярим-чекли дейилади, агар ихтиёрий нолдан фарқли

$p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ проектори учун $e \le p$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи нолдан фарқли чекли $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ проектори топилса. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси σ-чекли дейилади, агар $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ тўпламга тегишли ўзаро ортогонал ихтиёрий проекторлар тўпламининг қуввати саноқли тўпламнинг қувватидан катта бўлмаса. Гильберт фазоси $\mathcal{H}$ сепарабел бўлганда, унда таъсир қилувчи ихтиёрий фон Нейман $\mathcal{M}$ алгебраси σ-чекли бўлади. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебраси атомик дейилади, агар ҳар қандай нолдан фарқли $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ проектор учун $e \le p$ тенгсизлигини қаноатлантирувчи минимал проектор топилса. $\mathcal{H}$ Гильберт фазосида таъсир қилаётган барча чегараланган чизиқли операторлар алгебраси $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ атомик фон Нейман алгебрасига мисол бўлади. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ да одатдагидек $\|x\|_\infty = \sup\limits_{\xi \in \mathcal{H}: \|\xi\|_{\mathcal{H}} \le 1} \|x(\xi)\|_{\mathcal{H}}$ формула ёрдамида аниқланувчи оператор нормаси қаралади. Фараз қилайлик нолдан фарқли комплекс Гильберт фазолари кетма-кетлиги $(\mathcal{H}_n, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_n}), n = 1, 2 \ldots \alpha, \alpha < \infty,$ (ёки $\alpha = \infty$) берилган бўлиб, $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\alpha} \mathcal{H}_n = \{\{\xi_n\}_{n=1}^{\alpha} : \xi_n \in \mathcal{H}_n, \sum\limits_{n=1}^{\alpha} \|\xi_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 < \infty\}$ бўлсин. Координатавий аниқланган алгебраик амаллар ва $(\{\xi_n\}, \{\eta_n\})_{\mathcal{H}} = \sum\limits_{n=1}^{\alpha} (\xi_n, \eta_n)_{\mathcal{H}_n}$ каби аниқланган скаляр кўпайтмага нисбатан $\mathcal{H}$ тўплами комплекс Гильберт фазоси бўлади. Бунда $\mathcal{H}$ фақат ва фақат ҳар бир $\mathcal{H}_n$ ($n = 1, 2 \ldots \alpha$) сепарабел бўлгандагина сепарабел бўлади. $\bigoplus_{n=1}^{\alpha} \mathcal{B}(\mathcal{H}_n) = \{\{x_n\}_{n=1}^{\alpha} : x_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n), \sup\limits_{n \ge 1} \|x_n\|_\infty < \infty\}$ бўлсин. Координатавий аниқланган алгебраик амалларга нисбатан $\bigoplus_{n=1}^{\alpha} \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ тўплами $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{\alpha} \mathcal{H}_n)$ фон Нейман алгебрасининг атомик фон Нейман қисм-алгебраси бўлади. Бунда $\bigoplus_{n=1}^{\alpha} \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ фон Нейман алгебраси ҳар бир $\mathcal{H}_n$ ($n = 1, 2 \ldots \alpha$) сепарабел бўлганда ва фақат шу ҳолда σ-чекли бўлади.

Ярим-чекли $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасида τ аниқ нормал ярим-чекли из берилган бўлсин. Гильберт фазоси $\mathcal{H}$ да таъсир қилувчи ёпиқ ва зич аниқланган x оператори $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасига бириктирилган дейилади, агар коммутант $\mathcal{M}' = \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy = yx \ \forall \ x \in \mathcal{M}\}$ даги барча унитар u операторлари учун $ux \subseteq xu$ муносабати ўринли бўлса. $\mathcal{M}$ фон Нейман алгебрасига бириктирилган x оператори $\tau-$ўлчовли дейилади, агар шундай $\lambda > 0$ топилиб, $\tau(e_\lambda(x)^\perp) < \infty$ тенгсизлиги бажарилса, бу ерда $\{e_\lambda(x)\}_{\lambda \ge 0}$ бу $|x| = (x^* x)^{\frac{1}{2}}$ операторининг спектрал проекторлари оиласи. $S(\mathcal{M}, \tau)$ орқали барча $\tau-$ўлчовли операторлар ташкил қиладиган *-алгебрани белгилаймиз. Маълумки, $\mathcal{M}$ алгебраси $S(\mathcal{M}, \tau)$ нинг *-қисм-алгебраси бўлади ва $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H}), \tau = tr$ бўлганда $S(\mathcal{B}(\mathcal{H}), tr) = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ тенглиги ўринли бўлади. Атомик фон Нейман алгебраси $\mathcal{M} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ кўринишида ва $\tau(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} tr(x_n)$ бўлса, $S(\mathcal{M}, \tau)$ алгебраси координатавий аниқланган алгебраик амалларга нисбатан ҳосил бўлган $\prod_{n=1}^{\infty}\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)=\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}: x_n\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)\}$ алгебраси билан устма-уст тушади ва бу ҳолда $S(\mathcal{M},\tau)\neq\mathcal{M}$ муносабати ўринли бўлади.

$x\in S(\mathcal{M},\tau)$ элементи учун $\mu_t(x)=\inf\{\lambda>0:\tau(e_\lambda(x)^{\perp})\le t\}, t>0$ формуласи ёрдамида x операторининг камаймайдиган $\mu_t(x)$ ўринлаштириши аниқланади. Банах $\|\cdot\|_E$ нормаси аниқланган нолдан фарқли $E\subset S(\mathcal{M},\tau)$ чизиқли қисм фазоси $\mathcal{M}$ да симметрик фазо дейилади, агар барча $t>0$ учун $x\in E, y\in S(\mathcal{M},\tau), \mu_t(y)\le\mu_t(x)$ муносабатларидан $y\in E$ ва $\|y\|_E\le\|x\|_E$ тенгсизликни ўринли бўлиши келиб чиқса. $\mathcal{M}$ даги симметрик фазо E атомик дейилади, агар $\mathcal{M}$ атомик фон Нейман алгебраси бўлса.

Фараз қилайлик $\mathcal{H}$ сепарабел комплекс Гильберт фазоси бўлсин. Агар $(E,\|\cdot\|_E)\subset c_0$ симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлса, у ҳолда $\mathcal{C}_E:=\{x\in\mathcal{K}(\mathcal{H}):\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\in E\}$ тўплами $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ нинг икки томонлама идеали бўлади, бу ерда $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ бу x операторининг сингуляр сонлари кетма-кетлигидир (яъни $(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ операторининг ўсмайдиган тартибда жойлашган ҳос сонларидир). Бундан ташқари $\|x\|_{\mathcal{C}_E}=\|\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\|_E$ формуласи ёрдамида аниқланган нормага нисбатан $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ Банах фазоси бўлади ва $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ нормаси қуйидаги хоссаларга эга:

1) Барча $x,y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ва $z\in\mathcal{C}_E$ учун $\|xzy\|_{\mathcal{C}_E}\le\|x\|_\infty\|y\|_\infty\|z\|_{\mathcal{C}_E}$;

2) $\|x\|_{\mathcal{C}_E}=\|x\|_\infty$, агар $x\in\mathcal{C}_E$ операторининг ўлчами 1 га тенг бўлса.

Бунда Банах фазоси $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ Банах симметрик идеали дейилади. 1981-йилда Сурур сепарабел Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган сюръектив чизиқли изометрияларнинг аниқ кўринишини топди.

Теорема 5. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабел Банах симметрик идеали бўлиб ($\mathcal{C}_2$ дан фарқли), V акслантириш $\mathcal{C}_E$ фазосида чизиқли сюръектив изометрия бўлсин. У ҳолда $\mathcal{H}$ да таъсир қилувчи шундай унитар u ва v операторлари топиладики, бунда барча $x\in\mathcal{C}_E$ учун $V(x)=uxv$ ёки барча $x\in\mathcal{C}_E$ учун $V(x)=ux^tv$ тенглиги ўринли бўлади, бу ерда x^t бу x операторининг транспонирлангани.

X комплекс майдон устидаги ихтиёрий Банах фазоси бўлсин. Сюръектив (чизиқли бўлиши шарт эмас) $V:X\to X$ акслантириши 2-локал сюръектив изометрия дейилади, агар барча $x,y\in X$ учун $V(x)=V_{x,y}(x)$ ва $V(y)=V_{x,y}(y)$ тенгликларини қаноатлантирадиган сюръектив чизиқли изометрия $V_{x,y}:X\to X$ топилса. Равшанки Xдаги ҳар қандай сюръектив чизиқли изометрия 2-локал сюръектив изометрия бўлади.

Диссертациянинг **«Тингли теоремаси ва Банах фазоларида шар топологияси»** деб номланувчи иккинчи бобида нормалланган фазолар учун

(P) хосса тушунчаси киритилган. Тингли теоремаси (P) хоссага эга фазолар учун исбот қилинган. Комплекс Банах фазоларида шар топологиясининг асосий хоссалари ўрнатилган. Банах панжараларида камаяйиб нолга яқинлашувчи кетма-кетликларнинг шар топологиясига нисбатан лимити ягона эканлиги исбот қилинган.

$(X,\|\cdot\|)$ ҳақиқий нормалланган фазо бўлсин. X фазо (P) хоссага эга дейилади, агар $\|p+q\|=2$ шартини қаноатлантирувчи ихтиёрий $p,q\in S(X)=\{x\in X:\|x\|=1\}$ элементлари учун қуйидаги (i) ва (ii) шартларини бажарилишидан $p=q$ тенглиги келиб чиқса:

(i) Ихтиёрий $x\in S(X)$ учун $\|x+y\|=2$ ва $\|p-x\|=\|q-y\|$ тенгликларини қаноатлантирувчи $y\in S(X)$ элементи мавжуд.

(ii) Ихтиёрий $y\in S(X)$ учун $\|y+x\|=2$ ва $\|q-y\|=\|p-x\|$ тенгликларини қаноатлантирувчи $x\in S(X)$ элементи мавжуд.

Теорема 6. Нормалланган $(X,\|\cdot\|)$ фазоси (P) хоссага эга бўлсин. Агар $V:S(X)\to S(X)$ биектив изометрия бўлса, у ҳолда барча $x\in S(X)$ учун $V(-x)=-V(x)$ тенглик ўринли бўлади.

Натижа 1. $(C[a,b],\|\cdot\|)$ бу $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ сегментда аниқланган барча узлуксиз функциялар фазоси бўлсин, бунда $\|f\|=\sup\limits_{t\in[a,b]}|f(t)|$. Агар $V:S(C[a,b])\to S(C[a,b])$ биектив изометрия бўлса, у ҳолда барча $f\in S(C[a,b])$ учун $V(-f)=-V(f)$ тенглик ўринли бўлади, бу ерда $S(C[a,b])=\{f\in C[a,b]:\|f\|=1\}$.

$(X,\|\cdot\|_X)$ Банах фазоси $\mathbb{C}$ майдон устида берилган бўлсин. Маркази x нуқтада ва радиуси r га тенг бўлган $(X,\|\cdot\|_X)$ даги шарни $B(x,r)=\{y\in X:\|x-y\|_X\le r\}$ орқали белгилаймиз. X да шар топологияси b_X ни қуйидагича аниқлаймиз. Ҳар бир $x_0\in X$ нуқта учун $X\diagdown\bigcup\limits_{i=1}^{n}B(x_i,r_i)$ кўринишидаги тўпламларни b_X топологоясига нисбатан x_0 нуқтанинг атрофи деб эълон қиламиз, бу ерда барча $i=1,2,\dots n$, $n\in\mathbb{N}$ учун $\|x_i-x_0\|>r_i$ тенглиги ўринли. Шундай қилиб b_X топологияси учун $V_{x,\epsilon}=X\diagdown B(x,\epsilon)$ кўринишидаги тўпламлар предбаза бўлади, бу ерда $x\in X$ ва $\epsilon>0$. Равшанки b_X шар топологияси ҳар қандай ёпиқ шар $B(x,r)$ ёпиқ тўплам бўлган X даги τ топологиядан кучсиз. b_X топологияси X да Хаусдорфф топология бўлмайди.

Тасдиқ 1. Кетма-кетлик учун $x_n\xrightarrow{b_X}x_0$ муносабати фақат ва фақат барча $y\in X$ учун $\liminf\limits_{n\to\infty}\|x_n-y\|\ge\|x_0-y\|$ тенгсизлиги ўринли бўлганда бажарилади.

Теорема 7. X Банах фазоси, $Y\subset X^*$ тотал нормани тикловчи қисм фазо ва $x_n\xrightarrow{\sigma(X,Y)}0$ бўлсин. Фараз қилайлик ихтиёрий $f\in X^*$ учун $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\in\mathbb{C}$

мавжуд. У ҳолда $x_n \xrightarrow{b_X} 0$. Бундан ташқари агар $x_n \xrightarrow{b_X} x_0 \in X$ бўлса, у ҳолда $x_0 = 0$ тенглиги ўринли бўлади.

Теорема 8. X Банах панжараси, $x_n \in X$ ва $x_n \downarrow 0$ бўлсин. У ҳолда $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлиги b_X топологиясига нисбатан фақат ягона лимит нуқтага эга бўлиши мумкин.

Диссертациянинг « **Атомик симметрик фазоларининг изометрияси** » деб номланувчи учинчи бобида ассоцирланган симметрик кетма-кетликлар фазоси, ассоцирланган симметрик идеаллар, Фату хоссасига эга симметрик кетма-кетликлар фазоси ва мукаммал симметрик Банах идеаллари тушунчалари тушунчалари берилган. Мукаммал симметрик кетма-кетликлар E фазосида таъсир қилаётган эрмит ва сюъректив чизиқли изометрик операторларининг аниқ кўриниши топилган. E фазосининг ҳар қандай 2-локал сюръектив изометрияси чизиқли изометрия бўлиши исбот қилинган. $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$ топологияси аниқланиб, $\mathcal{C}_E^{*}$ га тегишли f функционал учун $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$ топологиясига нисбатан узлуксиз бўлишлилик мезони берилган. Мукаммал симметрик Банах идеали $\mathcal{C}_E$ да $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ қисм фазосини $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$ топологиясига нисбатан зич эканлиги, ҳамда $b_{\mathcal{C}_E}$ шар топологияси $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$ топологиясидан кучизроқ эканлиги исбот қилинган. $\mathcal{C}_E$мукаммал симметрик Банах идеалида таъсир қилувчи эрмит ва сюръектив чизиқли изометрик операторларининг аниқ кўриниши топилган. $\mathcal{C}_E$ фазосининг ҳар қандай 2-локал сюръектив изометриялари чизиқли сюръектив изометрия бўлиши исботланган.

Фараз қилайлик E ихтиёрий симметрик кетма-кетликлар фазоси $E(\mathbb{R}) = E \cap \ell_\infty(\mathbb{R})$ ва $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, x^{(n)} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in E(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$ бўлсин. $x^{(n)} \downarrow x$ (мос равишда $x^{(n)} \uparrow x$) ёзуви ихтиёрий $k \in \mathbb{N}$ учун $n \to \infty$ бўлганда $\xi_k^{(n)} \uparrow \xi_k$ (мос равишда $\xi_k^{(n)} \downarrow \xi_k$) ни англатади. Симметрик фазо $(E, \|\cdot\|_E)$ Фату ҳоссасига эга дейилади, агар $0 \le x^{(n)} \le x^{(n+1)}, x^{(n)} \in E(\mathbb{R}), \sup_{n \in \mathbb{N}} \| x^{(n)} \|_E < \infty$ шартларидан $x^{(n)} \uparrow x$ ва $\| x^{(n)} \|_E \to \| x \|_E$ муносабатларини қаноатлантирувчи $x \in E(\mathbb{R})$ элементи мавжуд бшлса. $(E, \|\cdot\|_E)$ учун $E^{\times}$ орқали ассоцирланган симметрик кетма-кетликлар фазосини белгилаймиз, яъни $E^{\times} = \{ \{\eta_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(\mathbb{K}) : \| \{\eta_n\} \|_{E^{\times}} = \sup_{\|\{\xi_n\}\|_E \le 1} \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \overline{\eta_n}| < \infty \}$.

Ассоцирланган фазо $E^{\times}$ ёрдамида ҳосил қилинган кучсиз $\sigma(E, E^{\times})$ топологиясини қараймиз. c_{00} орқали барча финит кетма-кетликлар фазосини белгилаймиз, яъни барча шундай $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ элементларки, қайсидир координата $k = k(x) \in \mathbb{N}$ бошлаб $\xi_k = 0$ тенглиги ўринли бўлади. Равшанки ихтиёрий симметрик кетма-кетликлар фазоси E учун $c_{00} \subset E$ муносабати ўринли бўлади.

Тасдиқ 2. Ихтиёрий симметрик кетма-кетликлар фазоси E да c_{00} фазоси $\sigma(E,E^{\times})$ топологиясига нисбатан зич бўлади.

Қуйидаги теоремада Фату ҳоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоси E да таъсир қилаётган эрмит операторларини тавсифлаш масаласи ҳал қилинган.

Теорема 9. E Фату ҳоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлиб, $\ell_2(\mathbb{C})$ фазосига тенг бўлмасин ва $T:E\to E$ эрмит оператори бўлсин. У ҳолда шундай $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_{\infty}(\mathbb{R})$ кетма-кетлиги мавжудки, барча $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in E$ элементлари учун $T(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty})=\{a_n\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ тенглиги ўринли бўлади.

9-теорема ёрдамида Арази теоремасини аналоги Фату ҳоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазосида таъсир қилаётган сюръектив изометриялар учун исботланади.

Теорема 10. E Фату ҳоссасига комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлиб, $\ell_2(\mathbb{C})$ фазосига тенг бўлмасин ва V акслантириш E фазосида чизиқли сюръектив изометрия бўлсин. У ҳолда шундай биекция $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ва шундай $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_{\infty}(\mathbb{C}),|\lambda_n|=1,n\in\mathbb{N}$ кетма-кетлиги мавжудки, барча $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in E$ элементлари учун

$$V(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty})=\{\lambda_n\xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty} \quad (1)$$

тенглиги ўринли бўлади.

Теорема 11. Фараз қилайлик $(E,\|\cdot\|_E)$ ҳар қандай сюръектив чизиқли изометрияси (1) кўринишида бўладиган ихтиёрий комплекс симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий 2-локал сюръектив $T:E\to E$ изометрияси E да чизиқли изометрия бўлади.

Фараз қилайлик $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ Банах симметрик идеали бўлсин. Кёте бўйича қўшма $\mathcal{C}_E^{\times}$ фазоси қуйидагича аниқланади: $\mathcal{C}_E^{\times}=\{x\in B(H): xy\in\mathcal{C}_1$ барча $y\in\mathcal{C}_E\}$ ва $x\in\mathcal{C}_E^{\times}$ элементлари учун $\|x\|_{\mathcal{C}_E^{\times}}=\sup\{tr(|xy|):y\in\mathcal{C}_E,\|y\|_{\mathcal{C}_E}\le 1\}$, бу ерда $tr(\cdot)$ бу $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ даги каноник из. Банах симметрик идеали $\mathcal{C}_E$ мукаммал дейилади агар $\mathcal{C}_E=\mathcal{C}_E^{\times\times}$ тенглиги ўринли бўлса.

Теорема 12. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ мукаммал Банах симметрик идеали ($\mathcal{C}_2$ дан фарқли) ва $T:\mathcal{C}_E\to\mathcal{C}_E$ эрмит оператори бўлсин. У ҳолда барча $x\in\mathcal{C}_E$ учун $T(x)=ax+xb$ тенгликни қаноатлантирувчи ўз-ўзига қўшма $a,b\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ операторлари мавжуд.

Теорема 13. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ мукаммал Банах симметрик идеали бўлиб ($\mathcal{C}_2$ дан фарқли), V акслантириш $\mathcal{C}_E$ фазосида чизиқли сюръектив изометрия бўлсин. У ҳолда $\mathcal{H}$ да таъсир қилувчи шундай унитар u ва v операторлари топиладики, бунда барча $x\in\mathcal{C}_E$ учун $V(x)=uxv$ ёки барча $x\in\mathcal{C}_E$ учун $V(x)=ux^tv$ тенглиги ўринли бўлади, бу ерда x^t бу x операторининг транспонирлангани.

Теорема 14. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ мукаммал Банах симметрик идеали бўлиб ($\mathcal{C}_2$ дан фарқли), V акслантириш $\mathcal{C}_E$ фазосида 2-локал сюръектив изометрия бўлсин. У ҳолда V акслантириш $\mathcal{C}_E$ фазосида чизиқли изометрия бўлади.

Диссертациянинг **«Симметрик идеалларнинг ўз-ўзига қўшма ҳақиқий қисм-фазолари изометрияси»** деб номланувчи тўртинчи бобида $\mathbb{K}$ майдон устида берилган Банах фазосида таъсир қилувси косо-эрмит оператори тушунчаси келтирилган. Ушбу бобда сепарабел ва мукаммал симметрик Банах идеалларининг ўз-ўзига қўшма қисмида таъсир қилаётган косо-эрмит операторлари тавсифланган. Банах симметрик идеалининг ўз-ўзига қўшма қисми $\mathcal{C}_E^h$ да таъсир қилаётган чизиқли чегараланган T оператори учун (P) хосса тушунчаси келтирилган. Сюръектив чизиқли $V:\mathcal{C}_E^h\to\mathcal{C}_E^h$ изометрияси (P) хоссага эга эканлиги исбот қилинган. $\mathcal{C}_E^h$-максимал оператор тушунчаси киритилиб, $\mathcal{C}_E^h$-максимал бўлишлик мезони исботланган. $\mathcal{C}_2$ дан фарқли ва униформ бўлмаган нормага эга Банах симметрик идеалларининг ўз-ўзига қўшма қисмида таъсир қилувчи сюръектив чизиқли изометрияларнинг аниқ кўриниши топилган.

$\mathbb{K}$ майдон устида $(X,\|\cdot\|_X)$ Банах фазоси ва $\|\cdot\|_X$ нормага мос X да $[\cdot,\cdot]$ ички кўпайтма берилган бўлсин. Чизиқли чегараланган оператор $H:X\to X$ косо-эрмит оператори дейилади, агар барча $x\in X$ учун $Re([H(x),x])=0$ тенглиги ўринли бўлса, бу ерда $Re(\alpha)$ бу $\alpha\in\mathbb{K}$ сонининг ҳақиқий қисми. Қуйидаги теоремада $\mathcal{C}_2$ дан фарқли $\mathcal{C}_E$ Банах симметрик идеали сепарабел ёки мукаммал бўлганда, $\mathcal{C}_E^h$ да таъсир қилаётган барча косо-эрмит операторларининг тавсифи келтрилган.

Теорема 15. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабел ёки мукаммал Банах симметрик идеали ва $\mathcal{C}_E\neq\mathcal{C}_2$ бўлсин. У ҳолда ҳар қандай косо-эрмит оператори $H:\mathcal{C}_E^h\to\mathcal{C}_E^h$ учун барча $x\in\mathcal{C}_E^h$ да $H(x)=i(xa-ax)$ тенгликни қаноатлантирувчи $a\in\mathcal{B}(\mathcal{H})^h$ элемент мавжуд.

$\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ нормаси униформ бўлмаган норма дейилади, агар $\dim p(\mathcal{H})>1$ хоссали барча $p\in\mathcal{P}(\mathcal{H})\cap\mathcal{F}(\mathcal{H})$ учун $\|p\|_{\mathcal{C}_E}>1$ тенгсизлиги бажарилса.

Теорема 16. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ униформ нормага эга бўлмаган сепарабел ёки мукаммал Банах симметрик идеали ва $\mathcal{C}_E\neq\mathcal{C}_2$ бўлиб, $V:\mathcal{C}_E^h\to\mathcal{C}_E^h$ сюръектив чизиқли изометрия бўлсин. У ҳолда $\mathcal{H}$да таъсир қилувчи шундай унитар ёки анти-унитар u оператори мавжудки барча $x\in\mathcal{C}_E^h$ учун $V(x)=uxu^*$ ёки барча $x\in\mathcal{C}_E^h$ учун $V(x)=-uxu^*$ муносабати ўринли бўлади.

ХУЛОСА

Диссертация иши симметрик кетма-кетликлар фазоси ва нокоммутатив атомик симметрик фазоларда таъсир қилаётган сюръектив чизиқли изометрияларни тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Комплекс Банах фазоларда шар топологиясининг асосий хоссалари тавсифланган;

2. Тингли теоремасини исбот қилишга янги усул топилган;

3. Фату хоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазосида таъсир қилаётган эрмит ва сюръектив чизиқли изометрик операторларининг Кёте топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исбот қилинган;

4. Фату хоссасига эга комплекс симметрик кетма-кетликлар фазосида таъсир қилаётган эрмит ва сюръектив чизиқли изометрик операторларининг аниқ кўриниши топилган;

5. Мукаммал Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган эрмит ва сюръектив чизиқли изометрик операторларининг Кёте топологиясига нисбатан узлуксиз эканлиги исбот қилинган;

6. Мукаммал Банах симметрик идеалларида таъсир қилаётган эрмит ва сюръектив чизиқли изометрик операторларининг аниқ кўриниши топилган;

7. Мукаммал Банах симметрик идеалларидннинг ўз-ўзига қўшма қисмида таъсир қилаётган косо-эрмит ва сюръектив чизиқли изометрик операторлар тавсифланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

АМИНОВ БЕХЗОД РАСУЛ УГЛИ

ИЗОМЕТРИЯ НЕКОММУТАТИВНЫХ АТОМИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2020 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.1.PhD/FM191.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Чилин Владимир Иванович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Заитов Адилбек Атаханович** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник **Закиров Батыр Сабитович** доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Институт математики АН РУз.

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2021 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2021 года).

А.Садуллаев
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования на мировом уровне, во многих случаях, сводятся к изучению изометрических преобразований различных классов банаховых пространств. Описание линейных изометрий симметричных функциональных и операторных пространствах является одной из центральных задач исследований в таких областях как теория банаховых пространств и теория алгебр неограниченных операторов. Описание изометрии симметричных пространствах служит основой для изучения геометрических и топологических свойств функциональных и некоммутативных симметричных пространств. Изометрическая классификация симметричных пространств были получены в работах таких знаменитых математиков, как С. Банах, Ж. Ламперти, Б. Руссо, Дж. Арази, А.Сурур, Е. Семенов и др. Поэтому исследования структуры изометрических операторов, действующих в различных классах симметричных пространствах актуальны для современной математики.

В настоящее время в мире одной из актуальных проблем современного функционального анализа является решение проблемы изометрической классификации коммутативных и некоммутативных симметричных пространств. Важное значение в теории банаховых пространств имеет исследование сюръективных изометрических операторов, эрмитовых операторов, косо-эрмитовых операторов и 2-локальных изометрий. В связи с этим, описание эрмитовых и сюръективных изометрических операторов, исследование топологии Кёте в совершенном атомическом симметричном пространстве, доказательства основных свойств шаровой топологии в комплексных банаховых пространствах, нахождение связи между топологией Кёте и шаровой топологией в атомическом симметричном пространстве являются целенаправленными научными исследованиями.

В нашей стране уделяется особое внимание развитию актуальных разделов функционального анализа, которые имеют научное и практическое применение в различных фундаментальных науках. Особое внимание уделяется построению теории некоммутативных симметричных пространств измеримых оператор, поскольку эта теория мотивируется задачами квантовой механики и статистической физики. Значительные результаты в нашей стране были достигнуты при описании линейных изометрий симметричных пространств последовательностей и банаховых симметричных идеалов. Проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям специальности «Алгебра и функциональный анализ» рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[2]. Развитие общей теории изометрий

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

коммутативных и некоммутативных симметричных пространств играет важную роль при исполнении этого постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Изучение линейных изометрий классических банаховых пространств было начато Банахом, который дал описание изометрий пространства $L_p[0,1]$ при $p \neq 2$. Позднее в работе Ламперти охарактеризованы все линейные изометрии L_p-пространств $L_p(\Omega, A, \mu)$ для любых измеримых пространств (Ω, A, μ) с полной σ-конечной мерой μ. Метод, который использовали Банах и Ламперти при описании линейных изометрий L_p-пространств, не зависел от выбора скалярного поля. При изучении линейных изометрий для более широкого класса функциональных симметричных пространств $E(\Omega, A, \mu)$ требуются иные подходы, зависящие от скалярного поля. В случае когда $E(\Omega, A, \mu)$ комплексное симметричное пространство, эффективно используется техника Лумера, опирающаяся на теорию эрмитовых операторов. Так, например, такая техника использовалась М.Г. Зайденбергом при описании всех сюръективных линейных изометрий комплексных симметричных пространств $E(\Omega, A, \mu)$ в случае непрерывной меры μ.

С другой стороны, для действительных симметричных пространств последовательностей общий вид сюръективных линейных изометрий был получен в работах М.Ш.Бравермана и Е.М.Семенова с помощью метода, опирающегося на теорию конечных групп. Естественно оставался вопрос об явном виде сюръективных линейных изометрий в случае комплексных симметричных пространств последовательностей. Для сепарабельных таких пространств решение этой задачи было получено в работе Дж. Арази. Из последных результатов в этом направлении выделяется совместная работа Ф.А.Сукочева и Ф.С.Векслера о положительных изометриях действующих в симметрических пространствах измеримых операторов.

В нашей стране изометрической теорией банаховых пространств занимались такие математики как Ш.А.Аюпов, Р.Абдуллаев, Ф.А.Сукочев, В.И.Чилин, А.С.Векслер, А.М.Меджитов. Так в совместной работе В.И.Чилина, А.М.Меджитова и Ф.А.Сукочева описаны все сюръективные линейные изометрии, действующие в некоммутативных пространствах Лоренца. В совместной работе Ш.А.Аюпова и Р.З.Абдуллаева получен явный вид сюръективных линейных изометрий неассоциативных L_p пространств.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексах» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (2017 – 2020 гг.).

Целью исследования является описание всех эрмитовых операторов, а также сюръективных линейных изометрий, действующих в комплексных симметричных пространствах последовательностей, в банаховых симметричных идеалах и в некоммутативных атомических симметричных пространствах.

Задачи исследования:

Доказательства свойств шаровой топологии в комплексных банаховых пространствах;

Установление непрерывности относительно топологии Кёте всех эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий, действующих в симметричных пространствах последовательностей, в банаховых симметричных идеалах и в некоммутативных атомических симметричных пространствах;

Нахождения общего вида эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий, действующих в симметричных пространствах последовательностей, в банаховых симметричных идеалах и в некоммутативных атомических симметричных пространствах;

Нахождения общего вида косо-эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий, действующих в самосопряженной части банаховых симметричных идеалов.

Объект исследования — Симметричные пространства, эрмитовые операторы, изометрии, шаровая топология и топология Кёте.

Предмет исследования — Совершенные симметричные пространства, эрмитовые операторы и линейные изометрические операторы, действующие в совершенных симметричных пространствах, свойства шаровой топологии в комплексных банаховых пространствах, непрерывность эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий относительно топологии Кёте.

Методы исследования. В работе используются методы функционального анализа, общей топологии, теории банаховых пространств и теории операторных алгебр.

Научная новизна исследования состоит в следующем**:**

Описаны основные свойства шаровой топологии в комплексных банаховых пространствах;

Установлена непрерывность относительно топологии Кёте всех эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий, действующих в комплексных симметричных пространствах последовательностей со свойством Фату;

Описаны все эрмитовые операторы и сюръективные линейные изометрии, действующие в комплексных симметричных пространствах последовательностей со свойством Фату;

Описаны все эрмитовые операторы и сюръективные линейные изометрии, действующие в совершенных банаховых симметричных идеалах;

Описаны все косо-эрмитовые операторы и сюръективные линейные изометрии, действующие в самосопряженной части совершенных банаховых симметричных идеалов.

Практические результаты исследования.

Изученные эрмитовые операторы и сюръективные линейные изометрии, действующие в комплексных симметричных пространствах последовательностей со свойством Фату, в совершенных банаховых симметричных идеалах, применяются при решении задач изометрической классификации банаховых функциональных пространств и некоммутативных симметричных пространств измеримых операторов.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа, общей топологии, теории банаховых пространств, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования заключается в том, что найден общий вид эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий, действующих как в комплексных симметричных пространствах последовательностей, так и в банаховых симметричных идеалах.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты могут использованы при исследовании свойств эрмитовых операторов действующих в симметрических пространствах, а также при описании изометрий симметрических пространств.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Описание сюръективных изометрий действующие в комплексном симметричном пространстве последовательностей со свойством Фату были использованы в фундаментальном проекте ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции» для изучения 2-локальных дифференцирований в матричных алгебрах (Справка от 22 сентября 2020 года Министерства высшего и среднего специального образования). Применение научных результатов дало возможность установить, что произвольное 2-локальное дифференцирование в матричных алгебрах является дифференцированием.

Общий вид сюръективных линейных изометрий, действующих в банаховых симметричных идеалах, были использованы в фундаментальном проекте ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 «Меры Гиббса и спектры гамильтонианов на решетках Z^d и на деревьях Кэли G^k» для изучения эргодических свойств операторов Данфорда-Шварца, действующих в банаховых симметричных идеалах (Справка от 22 сентября 2020 года Министерства высшего и среднего специального образования). Применение научных результатов дало возможность установить индивидуальную эргодическую теорему для положительных операторов Данфорда-Шварца, действующих в банаховом симметричном идеале.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работа, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе, из них 3 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 106 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приведены понятия симметричных пространств последовательностей, симметричных пространств $\tau-$измеримых операторов, а также банаховых симметричных идеалов. Формулируется проблема Тингли для действительных нормированных пространств. Сформулированы известные теоремы об описании эрмитовых и изометрических операторов, действующих в симметричных пространств последовательностей и в банаховых симметричных идеалов.

Пусть $\ell_\infty(\mathbb{K})$ банахово пространство всех ограниченных последовательностей $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ комплексных ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) или действительных ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) чисел с нормой $\|\{\xi_n\}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$, где $\mathbb{N}$ множество всех натуральных чисел. Относительно покоординатного частичного порядка пространство $\ell_\infty(\mathbb{R})$ является банаховой решеткой, при этом, $|\{\xi_n\}_{n=1}^\infty| = \{|\xi_n|\}_{n=1}^\infty$. Для элементов $z = \{\zeta_n\}_{n=1}^\infty$ комплексной векторной решетки $\ell_\infty(\mathbb{C})$ также верно равенство $|z| = \{|\zeta_n|\}_{n=1}^\infty$. Каждому элементу $z = \{\zeta_j\}_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{C})$ сопоставляется невозрастающая перестановка $\zeta^* = \{\zeta_j^*\} \in \ell_\infty(\mathbb{R})$, где $\zeta_j^* := \inf\limits_{|F|<j} \sup\limits_{i \notin F} |\zeta_i|$, F — конечное подмножество из $\mathbb{N}$. Ненулевое линейное подпространство E в $\ell_\infty(\mathbb{K})$, наделенное банаховой нормой $\|\cdot\|_E$, называется симметричным пространством последовательностей, если из $y \in E$, $x \in \ell_\infty(\mathbb{K})$ и $x^* \le y^*$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$. В этом случае, всегда верно равенство $\|\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\|_E = \|\{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty\|_E$, для всех $\{\xi_n\} \in E, \lambda_n \in \mathbb{C}, |\lambda_n| = 1, n \in \mathbb{N}$, и для любой биекции $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Кроме того, $\|x\|_\infty \le \|x\|_E$ при каждом $x \in E$. Напомним, что отображение $T : X \to Y$ нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ в нормированное пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ называется изометрией, если $\|T(x) - T(y)\|_Y = \|x - y\|_X$ для всех $x, y \in X$. Для комплексных сепарабельных симметричных пространств последовательностей известно следующее описание всех сюръективных линейных изометрий, действующих в этих пространствах.

Теорема 1. Пусть E комплексное сепарабельное симметричное пространство последовательностей, отличное от $\ell_2(\mathbb{C})$, и V сюръективная линейная изометрия в E. Тогда существуют такие биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{C}), |\lambda_n| = 1, n \in \mathbb{N}$, что $V(\{\xi_n\}_{n=1}^\infty) = \{\lambda_n \xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty$ для всех $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in E$.

Пусть X линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Отображение $[\cdot,\cdot] : X \times X \to \mathbb{K}$ называется полу-внутренним произведением, если

1) $[x,x] \ge 0$ для всех $x \in X$ и из $[x,x] = 0$ следует, что $x = 0$;
2) $[\lambda x, y] = \lambda [x, y]$ для всех $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$;
3) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$ для всех $x, y, z \in X$;
4) $|[x,y]|^2 \le [x,x][y,y]$ для всех $x, y \in X$.

Ясно, что полу-внутреннее произведение $[\cdot,\cdot]$ с помощью равенства $\|x\| = \sqrt{[x,x]}$ определяет норму на X. Линейный ограниченный оператор $T : X \to X$, действующий на комплексном банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$ называется эрмитовым, если $[T(x), x] \in \mathbb{R}$ для всех $x \in X$, где $[\cdot,\cdot]$ полу-внутреннее произведение на X, совместимое с нормой $\|\cdot\|_X$. Основным инструментом при доказательстве теоремы 1 служило следующее явное описание эрмитовых операторов, действующих в сепарабельных комплексных симметричных пространствах последовательностей.

Теорема 2. Пусть T эрмитов оператор в комплексном сепарабельном симметричном пространстве последовательностей E, отличном от $\ell_2(\mathbb{C})$. Тогда существует такая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(\mathbb{R})$, что $T(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{a_n \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ для всех $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in E$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ действительные нормированные пространства. Классическая теорема Мазура-Улама утверждает что, каждая биективная изометрия $V: X \to Y$ обязательно есть аффинное преобразование, т.е. композиция линейного отображения и сдвига. В частности, если $V(0) = 0$, то V линейное отображение. Далее для действительного нормированного пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ черех $B(X)$ (соответственно $S(X)$) обозначим единичный шар (соответственно сфера) пространство X, т.е. $B(X) = \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ и $S(X) = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$. В работе П. Манкиевича дано следующее усиление теоремы Мазура-Улама.

Теорема 3. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ действительные нормированные пространства. Если $V: B(X) \to B(Y)$ биективное изометричное отображение, то существует такая биективная линейная изометрия $L: X \to Y$, что $L(x) = V(x)$ для всех $x \in B(X)$.

В связи с теоремой 3 в работе Д. Тингли в 1987 году поставлена следующая проблема.

Проблема Тингли. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ действительные нормированные пространства. Если $V: S(X) \to S(Y)$ биективное изометричное отображение, то найдется ли такая биективная линейная изометрия $L: X \to Y$, что $L(x) = V(x)$ для всех $x \in S(X)$?

Проблема Тингли, иногда называемая проблемой изометрического продолжения, решена положительно для многих классов классических банаховых пространств. Ясно что при положительном решении проблемы Д.Тингли биективное изометричное отображение $V: S(X) \to S(Y)$ обязательно должно удовлетворять равенству $V(-x) = -V(x)$ для всех $x \in S(X)$. В связи с этим, естественно сначала решать задачу о том, в каких действительных нормированных пространствах биективное изометричное отображение $V: S(X) \to S(X)$ обладает этим свойством. В самой работе Д.Тингли эта задача решена для конечномерных пространств.

Теорема 4. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ действительные конечномерные нормированные пространства. Если $V: S(X) \to S(Y)$ биективная изометрия, то $V(-x) = -V(x)$ для всех $x \in S(X)$.

Пусть $\mathcal{M}$ алгебра фон Неймана ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\left(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}\right)$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $\mathbf{1}$ — единица алгебры $\mathcal{M}$. Через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ обозначается решетка всех проекторов $p = p^* = p^2$ из $\mathcal{M}$, и для каждого $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$

полагается $p^{\perp}=\mathbf{1}-p$. Проекторы $p,q\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ называются эквивалентными (обозначение: $p\sim q$), если существует такая частичная изометрия $v\in\mathcal{M}$, что $p=v^*v$ и $q=vv^*$. Проектор $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ называется конечным, если из условий $e\le p, e\in\mathcal{P}(\mathcal{M}), e\sim p$ следует, что $e=p$. Ненулевой проектор $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ называется минимальным (или атомом) если из условий $0\ne q\le p, q\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ следует, что $q=p$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется полуконечной, если для любого ненулевого проектора $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует ненулевой конечный проектор $e\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, для которого $e\le p$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется σ-конечной, если любой набор попарно ортогональных проекторов из $\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ не более чем счетен. В случае сепарабельности гильбертова пространства $\mathcal{H}$, любая алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, является σ-конечной алгеброй. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется атомической, если для каждого ненулевого проектора $p\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует такой минимальный проектор $e\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $e\le p$. Примером атомической алгебры фон Неймана служит алгебра $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Как обычно, в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ рассматривается операторная равномерная норма $\|x\|_\infty=\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}:\|\xi\|_{\mathcal{H}}\le 1}\|x(\xi)\|_{\mathcal{H}}$. Рассмотрим последовательность ненулевых комплексных гильбертовых пространств $(\mathcal{H}_n,(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}_n}), n=1,2\ldots\alpha, \alpha<\infty,$ или $\alpha=\infty$ и положим $\mathcal{H}=\bigoplus_{n=1}^{\alpha}\mathcal{H}_n=\{\{\xi_n\}_{n=1}^{\alpha}:\xi_n\in\mathcal{H}_n,\sum\limits_{n=1}^{\alpha}\|\xi_n\|^2_{\mathcal{H}_n}<\infty\}$. Относительно покоординатных алгебраических операций и скалярного произведения, определяемого с помощью равенство $(\{\xi_n\},\{\eta_n\})_{\mathcal{H}}=\sum\limits_{n=1}^{\alpha}(\xi_n,\eta_n)_{\mathcal{H}_n}$ множество $\mathcal{H}$ становится комплексным гильбертовым пространством, при этом, $\mathcal{H}$ сепарабельно в том и только в том случае, когда каждое $\mathcal{H}_n$ сепарабельно, $n=1,2\ldots\alpha$. Положим $\bigoplus_{n=1}^{\alpha}\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)=\{\{x_n\}_{n=1}^{\alpha}:x_n\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_n),\ \sup\limits_{n\ge 1}\|x_n\|_\infty<\infty\}$. Относительно покоординатных алгебраических операций множество $\bigoplus_{n=1}^{\alpha}\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ есть атомическая подалгебра фон Неймана в алгебре фон Неймана $\mathcal{B}(\bigoplus_{n=1}^{\alpha}\mathcal{H}_n)$. При этом, $\bigoplus_{n=1}^{\alpha}\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ является σ-конечной алгеброй фон Неймана тогда и только тогда, когда каждое $\mathcal{H}_n$ сепарабельно, $n=1,2\ldots\alpha$.

Пусть τ точный нормальный полуконечный след на полуконечной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Замкнутый и плотно определенный в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ оператор x называется присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, если для всех унитарных операторов u из коммутанта $\mathcal{M}'=\{y\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):xy=yx\ \forall\ x\in\mathcal{M}\}$ алгебры $\mathcal{M}$ верно включение $ux\subseteq xu$. Присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ оператор x называется

$\tau-$измеримым, если $\tau(e_\lambda(x)^\perp)<\infty$ для некоторого $\lambda>0$, где $\{e_\lambda(x)\}_{\lambda\ge0}$ спектральное семейство проекторов оператора $|x|=(x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Через $S(\mathcal{M},\tau)$ обозначим *-алгебру всех τ-измеримых операторов. Известно, что $\mathcal{M}$ есть *-подалгебра в алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$, а в случае $\mathcal{M}=\mathcal{B}(\mathcal{H}), \tau=tr$, верно равенство $S(\mathcal{B}(\mathcal{H}),tr)=\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Если же атомическая алгебра фон Неймана имеет вид $\mathcal{M}=\bigoplus_{n=1}^\infty \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$, и $\tau(\{x_n\}_{n=1}^\infty)=\sum\limits_{n=1}^\infty tr(x_n)$, то $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадает с алгеброй $\prod\limits_{n=1}^\infty \mathcal{B}(\mathcal{H}_n)=\{\{x_n\}_{n=1}^\infty : x_n\in\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)\}$ с покоординатными алгебраическими операциями, и в этом случае верно неравенство $S(\mathcal{M},\tau)\ne\mathcal{M}$.

Если $x\in S(\mathcal{M},\tau)$, то неубывающая перестановка $\mu_t(x)$ оператора x определяется с помощью равенства $\mu_t(x)=\inf\{\lambda>0:\tau(e_\lambda(x)^\perp)\le t\}, t>0.$ Ненулевое линейное подпространство $E\subset S(\mathcal{M},\tau)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным пространством на $\mathcal{M}$, если из условий $x\in E, y\in S(\mathcal{M},\tau), \mu_t(y)\le\mu_t(x)$ для всех $t>0$, следует, что $y\in E$ и $\|y\|_E\le\|x\|_E$ Симметричное пространство E на $\mathcal{M}$ называется атомическим, если $\mathcal{M}$ атомическая алгебра фон Неймана.

Пусть $\mathcal{H}$ сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Если $(E,\|\cdot\|_E)\subset c_0$ симметричное пространство последовательностей, то множество $\mathcal{C}_E:=\{x\in\mathcal{K}(\mathcal{H}):\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty\in E\}$ образует двусторонний идеал в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, где $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$ есть последовательность сингулярных чисел оператора x (т.е. собственных значений оператора $(x^*x)^{\frac{1}{2}}$, расположенных в невозрастающем порядке). К тому же, $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ является банаховым пространством относительно нормы $\|x\|_{\mathcal{C}_E}=\|\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty\|_E$, и норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\|xzy\|_{\mathcal{C}_E}\le\|x\|_\infty\|y\|_\infty\|z\|_{\mathcal{C}_E}$ для всех $x,y\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $z\in\mathcal{C}_E$;

2) $\|x\|_{\mathcal{C}_E}=\|x\|_\infty$, если $x\in\mathcal{C}_E$ имеет размерность 1.

В этом случае, банахово пространство $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ называется банаховым симметричным идеалом. В 1981 году А.Сурур установил общий вид сюръективных линейных изометрий, действующих в сепарабельном банаховом симметричном идеале.

Теорема 5. Пусть $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабельный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$, и пусть V сюръективная линейная изометрия на $\mathcal{C}_E$.Тогда существуют такие унитарные операторы u и v на $\mathcal{H}$, что $V(x)=uxv$ для всех $x\in\mathcal{C}_E$ или $V(x)=ux^tv$ для всех $x\in\mathcal{C}_E$, где x^t – транспонированный оператор к оператору x.

Пусть X произвольное банахово пространство над полем комплексных чисел. Сюръективное (не обязательно линейное) отображение

$V: X \to X$ называется 2-локальной сюръективной изометрией, если для любых $x, y \in X$ существует такая сюръективная линейная изометрия $V_{x,y}: X \to X$, что $V(x) = V_{x,y}(x)$ и $V(y) = V_{x,y}(y)$. Ясно, что каждая сюръективная линейная изометрия в X автоматически является 2-локальной сюръективной изометрией в X.

Во второй главе диссертации, названной **«Теорема Тингли и шаровая топология в банаховых пространствах»**, даются понятие свойства (P) для нормированного пространство. Доказывается справедливость теоремы Тингли для пространств со свойством (P). Устанавливается основные свойства шаровой топологии для комплексных банаховых пространств. Доказывается теорема о единственности предела относительно шаровой топологии, убывая стремящийся к нулю последовательности в банаховых решетках.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ нормированное действительное пространство. Будем говорить, что X обладает свойством (P), если для любых $p, q \in S(X) = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ с условием $\|p + q\| = 2$ при выполнении ниже следующих двух условий вытекает, что $p = q$:

(i) Для любого $x \in S(X)$ существует такой $y \in S(X)$, что $\|x + y\| = 2$ и $\|p - x\| = \|q - y\|$.

(ii) Для любого $y \in S(X)$ существует такой $x \in S(X)$, что $\|y + x\| = 2$ и $\|q - y\| = \|p - x\|$.

Теорема 6. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ нормированное пространство со свойством (P). Если $V: S(X) \to S(X)$ биективная изометрия, то $V(-x) = -V(x)$ для всех $x \in S(X)$.

Следствие 1. Пусть $(C[a,b], \|\cdot\|)$ банахово пространство всех непрерывных функций f, заданных на отрезке $[a, b]$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$, и пусть $S(C[a,b]) = \{f \in C[a,b] : \|f\| = 1\}$. Если $V: S(C[a,b]) \to S(C[a,b])$ биективная изометрия, то $V(-f) = -V(f)$ для всех $f \in S(C[a,b])$.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ банахово пространство над полем $\mathbb{C}$. Через $B(x,r) = \{y \in X : \|x - y\|_X \le r\}$ обозначается замкнутый шар в $(X, \|\cdot\|_X)$ с центром x и радиусом r. Определим на X шаровую топологию b_X следующим образом. Для каждого $x_0 \in X$ под окрестностью точки x_0 относительно топологии b_X будем понимать множества вида $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)$, где $\|x_i - x_0\| > r_i$ для любого $i = 1, 2, \dots n$, $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, топология b_X порождается предбазой множеств вида $V_{x,\epsilon} = X \setminus B(x, \epsilon)$, где $x \in X$, $\epsilon > 0$. Ясно, что шаровая топология b_X есть слабейшая топология в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|_X)$

среди всех тех топологий τ в X, для которых все замкнутые шары $B(x,r)$ замкнуты в (X,τ). Топология b_X не является Хаусдорфовой топологией в X.

Утверждение 1. Последовательность $x_n \xrightarrow{b_X} x_0$ в том и только в том случае, когда $\varliminf_{n\to\infty} \| x_n - y \| \geq \| x_0 - y \|$ для всех $y \in X$.

Теорема 7. Пусть X банахово пространство, $Y \subset X^*$ тотальное нормирующее подпространство и $x_n \xrightarrow{\sigma(X,Y)} 0$. Предположим далее что для любого $f \in X^*$ существует предел $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \mathbb{C}$. Тогда $x_n \xrightarrow{b_X} 0$. Более того если $x_n \xrightarrow{b_X} x_0 \in X$, то $x_0 = 0$.

Теорема 8. Пусть X банахова решетка, $x_n \in X$ и $x_n \downarrow 0$. Тогда последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ может сходиться в топологии b_X не более чем к одному элементу.

В третьей главе диссертации, названной **«Изометрии атомических симметричных пространств»**, приводиться понятия ассоциированных симметричных пространств последовательностей, ассоциированных симметричных идеалов, симметричных пространств последовательностей со свойством Фату, а также совершенных симметричных банаховых идеалов компактных операторов. Выясняется общий вид эрмитовых и изометрических линейных операторов, действующих в совершенном симметричном пространстве последовательностей E. Определяется слабая топология $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$ и приводится критерий $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$-непрерывности функционала f из $\mathcal{C}_E^*$. Доказывается секвенциальная плотность подпространства $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ в совершенном симметричном банаховом идеале $\mathcal{C}_E$ относительно слабой топологии $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$, а также показывается, что шаровая топология $b_{\mathcal{C}_E}$ слабее, чем топология $\sigma(\mathcal{C}_E, \mathcal{C}_E^{\times})$. Выясняется общий вид эрмитовых и линейных изометрических операторов, действующих в совершенном симметричном банаховом идеале $\mathcal{C}_E$. Доказывается, что всякая 2-локальная сюръективная изометрия пространства $\mathcal{C}_E$ является линейной сюръективной изометрией.

Пусть E произвольное симметричное пространство последовательностей, $E(\mathbb{R}) = E \cap \ell_\infty(\mathbb{R})$ и $x = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}, x^{(n)} = \{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \in E(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$. Запись $x^{(n)} \downarrow x$ (соответственно, $x^{(n)} \uparrow x$) означает, что $\xi_k^{(n)} \uparrow \xi_k$ (соответственно, $\xi_k^{(n)} \downarrow \xi_k$) при $n \to \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Говорят, что симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ обладает свойством Фату, если из $0 \leq x^{(n)} \leq x^{(n+1)}, x^{(n)} \in E(\mathbb{R}), \sup_{n\in\mathbb{N}} \| x^{(n)} \|_E < \infty$ следует, что существует такое $x \in E(\mathbb{R})$, что $x^{(n)} \uparrow x$ и $\| x^{(n)} \|_E \to \| x \|_E$.

Обозначим через $E^{\times}$ ассоциированное симметричное пространство последовательностей для $(E,\|\cdot\|_E)$, т.е. $E^{\times}=\{\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_\infty(\mathbb{K}):\|\{\eta_n\}\|_{E^{\times}}=\sup\limits_{\|\{\xi_n\}\|_E\le 1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n\overline{\eta_n}|<\infty\}$. Рассмотрим слабую топологию $\sigma(E,E^{\times})$ в симметричном пространстве $(E,\|\cdot\|_E)$, порожденную ассоциированном пространством $E^{\times}$. Обозначим через c_{00} линейное пространство всех финитных числовых последовательностей, т.е. таких $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_\infty(\mathbb{K})$, для которых $\xi_k=0$, начиная с некоторого номера $k=k(x)\in\mathbb{N}$ Ясно, что $c_{00}\subset E$ для любого симметричного пространства последовательностей E.

Утверждение 2. Линейное пространство c_{00} является $\sigma(E,E^{\times})$-плотным в каждом симметричном пространстве последовательностей E.

Теорема 9. Пусть T произвольный эрмитов оператор в комплексном симметричном пространстве последовательностей E, имеющем свойство Фату и отличном от $\ell_2(\mathbb{C})$. Тогда существует такая последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\in\ell_\infty(\mathbb{R})$, что $T(\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty})=\{a_k\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ для всех $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\in E$.

Используя теперь теорему 9, получаем следующий вариант теоремы Арази.

Теорема 10. Пусть E комплексное симметричное пространство последовательностей, обладающее свойством Фату и отличное от $\ell_2(\mathbb{C})$, и пусть V сюръективная линейная изометрия в E. Тогда существуют такие последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell_\infty(\mathbb{C}),|\lambda_n|=1,n\in\mathbb{N}$, и биекция $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, что

$$V(\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty})=\{\lambda_n\xi_{\pi(n)}\}_{n=1}^{\infty} \qquad (1)$$

для всех $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in E$.

Теорема 11. Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$ произвольное комплексное симметричное пространство последовательностей, в котором каждая сюръективная линейная изометрия имеет вид (1). Тогда любая 2-локальная сюръективная изометрия $T:E\to E$ является линейной изометрией в E.

Если $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ банахов симметричный идеал. Сопряженное по Кёте $\mathcal{C}_E^{\times}$ пространство определяется следующим образом: $\mathcal{C}_E^{\times}=\{x\in B(H): xy\in\mathcal{C}_1$ для всех $y\in\mathcal{C}_E\}$ и $\|x\|_{\mathcal{C}_E^{\times}}=\sup\{tr(|xy|):y\in\mathcal{C}_E,\|y\|_{\mathcal{C}_E}\le 1\}$ для $x\in\mathcal{C}_E^{\times}$, где $tr(\cdot)$ канонический след в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Банахов симметричный идеал $\mathcal{C}_E$ называется совершенным, если $\mathcal{C}_E=\mathcal{C}_E^{\times\times}$

Теорема 12. Пусть $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ совершенный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$ и пусть T эрмитов оператор, действующий в $\mathcal{C}_E$. Тогда существуют такие самосопряженные операторы $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, что $T(x) = ax + xb$ для всех $x \in \mathcal{C}_E$.

Теорема 13. Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ совершенный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$, и пусть V сюръективная линейная изометрия на $\mathcal{C}_E$. Тогда существуют такие унитарные операторы u и v на $\mathcal{H}$, что $V(x) = uxv$ для всех $x \in \mathcal{C}_E$ или $V(x) = ux^t v$ для всех $x \in \mathcal{C}_E$.

Теорема 14. Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ совершенный банахов симметричный идеал отличный от $\mathcal{C}_2$, и пусть V есть 2-локальная сюръективная изометрия на $\mathcal{C}_E$. Тогда V линейная изометрия на $\mathcal{C}_E$.

В четвертой главе диссертации **«Изометрии действительных подпространств самосопряженных операторов в симметричных идеалах»** приводиться понятие косо-эрмитового оператора, дается описание косо-эрмитовых операторов, действующих в самосопряженной части банаховых симметричных идеалах. Устанавливается общий вид сюръективных линейных изометрий, действующих в самосопряженной части банаховых симметричных идеалах, отличных от $\mathcal{C}_2$ и обладающих не униформной нормой.

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ банахово пространство над полем $\mathbb{K}$, и пусть $[\cdot,\cdot]$ полу-внутреннее произведение на X, совместимое с нормой $\|\cdot\|_X$. Линейный ограниченный оператор $H: X \to X$ называется косо-эрмитовом, если $Re([H(x), x]) = 0$ для всех $x \in X$, где $Re(\alpha)$ действительная часть числа $\alpha \in \mathbb{K}$. В частности, если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $[H(x), x] = 0$ для всех $x \in X$.

Теорема 15. Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабельный или совершенный банахов симметричный идеал, и пусть $\mathcal{C}_E \neq \mathcal{C}_2$. Тогда для каждого косо-эрмитового оператора $H: \mathcal{C}_E^h \to \mathcal{C}_E^h$ существует такой $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^h$, что $H(x) = i(xa - ax)$ для всех $x \in \mathcal{C}_E^h$.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$ является не униформной, если $\|p\|_{\mathcal{C}_E} > 1$ для любого $p \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{H})$ с $\dim p(\mathcal{H}) > 1$.

Теорема 16. Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ сепарабельный или совершенный банахов симметричный идеал, отличный от $\mathcal{C}_2$ с не униформной нормой, и пусть $V: \mathcal{C}_E^h \to \mathcal{C}_E^h$ сюръективная линейная изометрия. Тогда существует такой унитарный или анти-унитарный оператор u на $\mathcal{H}$, что $V(x) = uxu^*$ или $V(x) = -uxu^*$ ($x \in \mathcal{C}_E^h$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению сюръективных линейных изометрий, действующих в симметричных пространствах последовательностей и в некоммутативных атомических симметричных пространствах.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Описаны основные свойства шаровой топологии в комплексных банаховых пространствах;
2. Предложен новый метод доказательства теоремы Тингли;
3. Установлена непрерывность относительно топологии Кёте всех эрмитовых и сюръективных линейных изометрий, действующих в комплексных симметричных пространствах последовательностей со свойством Фату;
4. Установлен явный вид всех эрмитовых и сюръективных линейных изометрий, действующих в комплексных симметричных пространствах последовательностей со свойством Фату;
5. Доказана непрерывность относительно топологии Кёте всех эрмитовых операторов и сюръективных линейных изометрий, действующих в совершенных банаховых симметричных идеалах;
6. Описаны все эрмитовы операторы и сюръективные линейные изометрии, действующие в совершенных банаховых симметричных идеалах;
7. Описаны все косо-эрмитовы операторы и сюръективные линейные изометрии, действующие в самосопряженной части совершенных банаховых симметричных идеалов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

AMINOV BEKHZOD RASUL UGLI

ISOMETRY OF NONCOMMUTATIVE ATOMIC SYMMETRIC SPACES

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.1.PhD/FM191.

Dissertation has been prepared at National university of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Chilin Vladimir Ivanovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Zaitov Adilbek Atakhanovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Senior Researcher **Zakirov Batyr Sabitovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	Institute of Mathematics of the AS RUz.

Defense will take place on "____" ________________ 2021 at ____ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.____). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "____" _______________ 2021.
(Mailing report No.____ on "____" _______________ 2021).

A.Sadullaev
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to describe all Hermitian operators, as well as surjective linear isometries acting in complex symmetric sequence spaces, in symmetric Banach ideals, and in noncommutative atomic symmetric spaces.

The object of the research work is Symmetric spaces, Hermitian operators, isometries, ball topology and Köthe topology.

Scientific novelty of the research work is as follows:

The basic properties of the ball topology in complex Banach spaces are proved;

The continuity with respect to the Köthe topology of all Hermitian operators and surjective linear isometries acting in complex symmetric spaces of sequences with the Fatou property is established;

All Hermitian operators and surjective linear isometries acting in complex symmetric spaces of sequences with the Fatou property are described;

All Hermitian operators and surjective linear isometries acting in perfect symmetric Banach ideals are described;

All skew-Hermitian operators and surjective linear isometries acting on the self-adjoint part of perfect symmetric Banach ideals are described.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The description of surjective isometries acting in a complex symmetric space of sequences with the Fatou property were used in the fundamental project OT-4-27 "Description of the predual spaces of Jordan triples, the space of capacities and the holomorphic continuation of a function" to study 2-local derivations in matrix algebras (Certificate dated September 22 2020 of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education). Application of scientific results made it possible to establish that an arbitrary 2-local differentiation in matrix algebras is a differentiation.

The general form of surjective linear isometries acting in Banach symmetric ideals was used in the fundamental project ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 "Gibbs measures and spectra of Hamiltonians on lattices Z^d and on Cayley trees G^k" to study the ergodic properties of Dunford-Schwarz operators acting in Banach symmetric ideals (Certificate dated September 22, 2020 from the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education). The application of scientific results made it possible to establish an individual ergodic theorem for positive Dunford-Schwarz operators acting in a Banach symmetric ideal.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a bibliography. The volume of the thesis is 106 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Аминов Б. Р. Теорема Тинглея для банаховых пространств непрерывных функций // Вестник НУУз. — 2016. № 2/2. — С. 15-18. (01.00.00, № 8).
2. Aminov B.R., Chilin V.I. Isometries and Hermitian operators on complex symmetric sequence spaces // Siberian Advances in Mathematics. — 2017. V. 27. No 4. — P. 239-252. (3. Scopus IF=0.22).
3. Аминов Б.Р. Шаровая топология в комплексных банаховых пространств // Вестник НУУз. — 2017. № 2/1. — С. 60-68. (01.00.00, № 8).
4. Аминов Б.Р. 2-Локальные изометрии гильбертовых пространств // Вестник НУУз. — 2017. № 2/2. — С. 94-99. (01.00.00, № 8).
5. Aminov B.R., Chilin V.I. Isometries of perfect norm ideals of compact operators // Studia Mathematica. — 2018. V. 241. — P. 87-99. (3. Scopus IF=0.78).
6. Aminov B.R., Chilin V.I. Isometries of Real Subspaces of Self-Adjoint Operators in Banach Symmetric Ideals // Vladikavkaz Math. J. — 2019. V. 21. No. 4. — P. 11-24. (3. Scopus IF=0.10).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. Аминов Б.Р., Чилин В.И. Положительные изометрии вполне симметрических идеалов компактных операторов // Материалы Республиканской конференции «Современные методы математической физики и их приложения». — Ташкент, 15-17 апреля 2015 года. — С. 22.
8. Аминов Б.Р. Единственность предела в шаровой топологии монотонно убывающей последовательности в банаховых решетках // Материалы Республиканской конференции «Проблемы современной топологии и её приложения». — Ташкент, 5-6 мая 2016 года. — С. 121-122.
9. Aminov B.R., Chilin V.I. 2-local isometries of perfect norm ideals of compact operators // Abstracts of the Republic conference "Modern problems of dynamical systems and their appliactions" — Tashkent, May 1-3, 2017. — P. 221-222.
10. Chilin V.I., Aminov B.R. Positive isometries of norm ideals of compact operators // Abstracts of the second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics. — Urgench, August 8-12, 2017. — P. 17-18.
11. Aminov B.R. Skew-hermitian operators in the ideals of compact operators // Abstracts of the International conference "Mathematical Analysis and its Application to Mathematical Physics". — Samarkand, September 17-20, 2018. Part I. — P. 91-92.
12. Aminov B. R. Isometries of noncommutative atomic symmetric spaces // Abstracts of the Uzbek-Israel joint international conference. — Tashkent, 13-17 May, 2019. — P.13

13. Aminov B.R., Chilin V.I. Skew-Hermitian operators in noncommutative atomic symmetric spaces // Материалы международной конференции "КРОМШ-2019" — Крым, 17-29 сентября 2019 года. — С. 32-35.
14. Aminov B.R., Chilin V.I. Weak continuity of Skew-Hermitian operators in symmetric normed ideal*s* // Материалы международной конференции "Современные проблемы геометрии и топологии и их приложения". — Ташкент, 21-23 ноября 2019 года. — С. 19.
15. Аминов Б.Р., Чилин В.И. 2-локальные изометрии некоммутативных симметричных атомических пространств // Материалы международной конференции "Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики". — Фергана, 12-13 марта 2020 года. Часть II. — С. 29-32.
16. Aminov B.R., Chilin V.I. Hermitian operators in noncommutativ atomic Orlicz spaces // Abstracts of the International online conference "Frontier in mathematics and computer science". — Tashkent, October 12-15, 2020. — P. 16-17.