ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРСАНОВ ШОҲРУХ ЯШИНОВИЧ

$A(z)-$СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР ВА ГЁЛЬДЕР РЕГУЛЯРЛИК

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

УДК: 517.54

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата докторской диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ХУРСАНОВ ШОҲРУХ ЯШИНОВИЧ

$A(z)-$СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАР ВА ГЁЛЬДЕР РЕГУЛЯРЛИК

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PHD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2020 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.1.PhD/FM192 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Садуллаев Азимбой** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Имомназаров Холматжон Худойназарович** физика-математика фанлари доктори,етакчи илмий ходим (Россия)
	Рахимов Абдуғофур Абдумаджитович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Урганч давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

Ж.Хажиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., профессор, академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.ф.д.(PhD)

Р.Н.Ғаниходжаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда комплекс ўзгарувчили функциялар, квазиконформ акслантиришлар ва $A(z)-$ аналитик функциялар назариясига боғланган. Квазиконформ акслантиришлар ва $A(z)-$аналитик функциялар комплекс анализнинг мухим, жадал ривожланаётган қисмларидан биридир.

Борел ўлчовлари назарияси, потенциаллар назарияси ҳамда Рисс типида ифодаланишлар $A(z)-$гармоник ва $A(z)-$субгармоник функцияларни ўрганишда асосий усуллардан бўлиб, комплекс динамик системалар назариясида экстремал функцияларнинг узлуксизлиги ва Гёлдер узлуксизлиги муаммоларини ҳал этишда, Жюлиа тўпламларининг регулярлиги масалаларида муваффақият билан қулланилмоқда. Полином ва рационал функциялар динамикасида Фату ва Жюлиа тўпламлари хоссаларини ўрганиш, комплекс динамик системалар назариясининг асосий йўналишларидан биридир.

Қаралаётган диссертация иши $A(z)-$аналитик функциялар асосида $A(z)-$гармоник функциялар синфини ўрганиш, $A(z)-$гармоник функцияларнинг геометрик хоссаларини келтириб чиқариш, шу билан бирга $A(z)-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини яратиш, ҳамда $A(z)-$гармоник улчов ва унинг Гёлдер регулярлигини ўрганиш усулларини ишлаб чиқишга бағишланган. Бу йўналишида бажарилаётган улкан илмий изланишлар мазкур диссертация мавзусининг долзарблигини изоҳлайди.

Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 292-сонли қарорида “Алгебра ва функциялар назарияси, дифференциал тенглама ва математик физика, динамик тизимлар назарияси, геометрия ва топология, эҳтимоллик назарияси ва математик статистика, амалий математика ва математик моделлаштириш математика фанларининг устувор йўналишлари бўйича ҳалқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари” этиб белгиланди[1]. Қарорнинг ижросини таъминлашда потенциаллар назарияси, квазиконформ акслантиришлар ва комплекс динамик системаларда юзага келаетган масалаларни хал этишда $A(z)-$субгармоник функциялар ва Гёльдер маъносида регулярлик хоссалари муҳим аҳамиятга эгадир.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2017 йил 20 апрелдаги «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2909-сонли Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарорларида белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялари ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Таниқли олим Г.Грёч томондан асос солинган квазиконформ акслантришлар назариясини М.А. Лаврентьев ва Л. Альфорслар томонидан математик физика ва механика масалаларига тадбиқ қилишлари бу йўналишни кенг кўламда ривожланишига олиб келди.

Текисликдаги квазиконформ акслантиришлар назариясини ўрганиш Бельтрами тенгламасининг ечими билан чамбарчас боғланган. Квазиконформ акслантришлар назарияси ва Бельтрами тенгламаси XX аср ўрталарида Америкалик олимлар Л.Альфорс, А.Беринг, Ф.В.Геринг, Россиялик олимлар М.А.Лаврентьев, И.Н.Векуа, П.П.Белинский, Ю.Г.Решетняк, В.И.Миклюков, В.А.Зорич, П.М.Тамразов, С.Л. Кружкаль, А.В.Сычёв, И.П.Митюков, Г.Д.Суворов, В.В.Асеевларнинг фундаментал ишларида ўз аксини топган; Ўзбекистонлик олимлар Л.И.Волковиский, М.Захиров, А.Ахмедов, Г.М.Лян, Э.Х.Якубов, А.К.Варисов ва бошқалар томонидан ривожлантирилган.

$A(z)-$ аналитик функциялар назарияси эса ўтган асрнинг 90 йилларидан В.Гутлянский, Д.А. Ковтонюк, И.В. Петков, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов (Украина), Ю.Сребро, Э.Х.Якубов (Исроиль), А.Н.Кондрашов, А.Л.Бухгейм, С.Г.Казанцевлар (Россия) томонидан жадаллик билан ўрганилиб келинмоқда. Агар квазиконформ акслантиришлар гомеоморфизимнинг геометрик хусусиятлари билан боғлиқ бўлса, $A(z)-$ аналитик функциялар назариясида функционал хоссалар, силлиқлик, сингуляр нуқталар, интеграл формулалар ва бошқалар муҳумдир. Бу хусусиятлар тиббий ва геологик томографик масалаларда қўлланилишда муҳим ахамиятга эга.

Узбекистонда 2010 йилдан бошлаб Ўзбекистон Миллий университети математик анализ кафедрасида академик А.Садуллаев рахбарлигида унинг ўқувчилари Н.М.Жабборов, Т.У.Отабоев, Ш.Я.Хурсанов ва бошқалар томонидан $A(z)-$аналитик функцияларнинг функционал хоссалари ўрганила бошланди. Натижада Коши ядросининг аналоги, Шварц ва Пуассон формулалари, $A(z)-$гармоник ва $A(z)-$субгармоник функцияларнинг қатор хоссалари исботланди. Кафедрада ўрганилаётган яна бир муҳим муоммолардан бири бу $P-$улчовнинг регулярлиги, унинг Гёлдер регулярлик муоммосидир. Польшалик етакчи математик олим Й.Сичак $P-$улчов ва гармоник улчов билан аниқланадиган сиғим ёрдамида тўпламларнинг Гёльдер регулярлигини тадқиқ этган бўлиб, диссертант томонидан бу масала $A(z)-$субгармоник функциялар синфи учун ҳал қилинди.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ОТ-Ф-1-116 «$A(z)-$ аналитик функцияларнинг функционал хоссалари ва уларнинг тадбиқлари. Матрицавий сохаларда комплекс анализнинг баъзи масалалари» (2016-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади $A(z)-$гармоник функциялар учун Лаплас типидаги операторни қуриш, $A(z)-$субгармоник функциялар учун Рисс типидаги ифода ва Пуассон интеграл формуласини исботлаш ҳамда $A(z)-$гармоник ўлчовнинг Гёльдер узлуксизлик шартини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

$-A(z)-$гармоник функциялар учун Лаплас типидпги операторни қуриш;

$-A(z)-$гармоник функциялар учун Пуассон интеграл формуласини исботлаш;

$-$умумлашган $A(z)-$гармоник функциясини регуляр $A(z)-$гармоник функция бўлишлигини исботлаш;

$-$нормал $A(z)-$гармоник функциялар оиласини ўрганиш;

$-$силлиқ функциялар ёрдамида $A(z)-$субгармоник функцияларни апроксимациялаш;

$-A(z)-$гармоник улчовнинг Гёлдер узлуксизлиги шартини бериш.

Тадқиқотнинг объекти $A(z)-$гармоник функциялар, умумлашган $A(z)-$гармоник функциялар, интеграл ифодалаш ҳақидаги Рисс теоремаси, $A(z)-$субгармоник функциялар, компакт тўпламнинг Гёльдер регулярлиги кабилардан иборат.

Тадқиқотнинг предмети$-$Бельтрами тенгламаси, $A(z)-$лапласиан, $A(z)-$гармоник ва $A(z)-$субгармоник функциялар, Пуассон интеграл формуласи, Рисс ифодалари.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида ҳақиқий ва аналитик функциялар назарияси, классик потенцияллар ва плюрипотенциаллар назарияси, квазиконформ акслантришлар ва $A(z)-$ аналитик функциялар назарияси услубларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

$-A(z)-$гармоник функциялар учун Лаплас типидаги оператор қурилган;

$-A(z)-$гармоник функциялар учун Пуассон интеграл формуласи исботланган;

$-$умумлашган $A(z)-$гармоник функциясини регуляр $A(z)-$гармоник функция бўлишлиги исботланган;

$-$нормал $A(z)-$гармоник функциялар оиласи учун текис яқинлашиш хоссалари ўрганилган;

$-$силлиқ функциялар ёрдамида $A(z)-$субгармоник функцияларни апроксимациялаш мумкинлиги исботланган;

$-A(z)-$гармоник улчовнинг Гёлдер узлуксизлик шарти аниқланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Диссертация ишида исботланган Пуассон интеграл формуласи ва интеграл кўринишдаги Рисс теоремаси эллиптик типдаги чегаравий масалаларни ва математик физик тенгламаларни ечишда қўллашдан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Диссертация натижаларини исботлашда математик физика, потенциаллар назарияси, плюрипотенциаллар назарияси ва кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси услубларидан фойдаланилганлиги математик қатиятликни ифодалайди. Бундан ташқари олинган диссертация натижаларини ишончлилиги импакт-факторга эга ва нуфузли илмий журналларда чоп этилган ҳамда Халқаро ва Республика конференцияларида маъруза қилинганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий ахамияти шундан иборатки, олинган натижалардан компакт тўпламнинг регулярлигини ўрнатишда ва комплекс динамик системаларида Жюлиа тўпламини ўрганишда, $P-$ўлчовнинг Гёлдер узлуксизлигини исботлашда фойдаланиш мумкин. Шунингдек олинган натижалардан математик физика ва механика масалаларидаги тенгламаларнинг ечимларини ўрганиш учун фойдаланиш мумкин.

Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган натижаларнинг амалий ахамияти шундан иборатки у компьютер томографияси ва жисмлар ишқаланиш коэффицентини ҳисоблашда, механика ва математик физиканинг соҳа чегарасида берилган маълумотларга кўра соҳа ичидаги маълумотларни тиклаш муоммоларида қуланилиши мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.

$-$Диссертасиясида таклиф қилинган $A(z)-$гармоник функциялар учун Лаплас типидаги операторлар ва $A(z)-$гармоник функциялар учун Пуассон формулалари AP05133873 ”Эллиптик операторларнинг каср даражага эга бўлган математик моделлар учун ночизиқли тескари масалаларни ечишда параллел алгоритмлар ва ҳисоблаш усулларининг гравиметрияда қўлланиши“ мавзудаги фундаментал тадқиқотлар лойиҳасида гравиметриядаги бўлимларнинг сиртларини тиклаш учун тўғри ва тескари масалаларни ечишда тадбиқ этилган (Қозоғистон Республикаси Таълим ва фан вазирлиги Қўмитасининг 2020 йил 13 ноябрдаги 565-сонли маълумотномаси). Хусусан, натижаларнинг қўлланилиши регуляризацияланган қўшма градиент усулининг регуляризация параметрини танлашнинг эмпирик формуласини аниқлаш имконини берган.

$-$Умумлашган $A(z)-$гармоник функцияси ва регуляр $A(z)-$гармоник функцияларнинг умумлашган ифодаси ёрдамида Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети томонидан 2018-2019 йилларда баажарилган MRU-OT-1/2017 “Нелокальные краевые и обратные задачи для неклассических дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений” гранти лойихасида учинчи тартибли тенгламани ечишда қўлланган. Хусусан ишидан бош қисмида Лаплас оператори қатнашган аралаш-қўшма типдаги учинчи тартибли тенгламалар учун нолокал бошланғич-чегаравий масалалар ечимининг хоссалари исботлаш имконини берган.

Ш.Я.Хурсанов кўрсатилган бу иккита грантда иштирок қилмаган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари бўйича 3 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида маъруза қилинган. Шунингдек, олинган натижалар Ўзбекистон Миллий университети математик анализ кафедраси ҳузуридаги “Функциялар назарияси” Республика илмий семинарда (раҳбари: академик А. Садуллаев) бир неча бор, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти, "Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари" илмий лабораториясининг "Математик физиканинг замонавий муаммолари" илмий семинарида, (раҳбарлари: академик Ш.А.Алимов, профессор Р.Р.Ашуров), В.И.Романовский номидаги Математика институти Хоразм вилояти бўлинмаси ва Урганч Давлат университети “Математик таҳлил” кафедрасининг “Комплекс потенциаллар назарияси ва унинг татбиқлари” бирлашган илмий семинарида (раҳбари: профессор С. Имомкулов), Илмий кенгаш ҳузуридаги “Математик анализ бўйича илмий семинарда” (профессор Р.Н.Ғаниходжаев) мухокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, улардан 5 таси Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссияси томонидан тавсия этилган илмий нашрларда, жумладан, 2 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисм, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссетациянинг ҳажми 80 бетни ташкил этади.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмда диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Дастлабки маълумотлар**» деб номланувчи биринчи бобида диссертация учун зарур бўлган, $A(z)-$аналитик функциялар ва классик субгармоник функциялар назариясидаги асосий натижалар, таърифлар ва теоремалар келтириб ўтилган. 1.1-параграфда $A(z)-$ аналитик функциялар бўйича баъзи теоремалар ва таърифлар А.Садуллаев ва Н.М.Жабборовларнинг СФУ журналида чоп қилинган фундаментал мақоласидан олинган бўлиб, 1.2 ва 1.3- параграфлардаги керакли натижалар А.Садуллаевнинг “Плюрипотенциаллар назарияси” монографиясидан олинди.

Квазиконформ акслантиришлар назарияси ушбу Бельтрами тенгламаси

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

ечими билан таърифланадиган аналитик функциялар назариясига бағишланган. Умумий холда $A(z)$ функцияси улчовли ва қаралаётган $D \subset \mathbb{C}$ соханинг деярли барча нуқталарида $|A(z)| \le C < 1$шартини қаноатлантиради деб фараз қилинади. Адабиётларда (1) тенгламанинг ечими $A(z)-$*аналитик функция деб аталади.*

Қаралаетган диссертацияда биз $D \subset \mathbb{C}$ сохада $A(z)-$антианалитик функция, $\partial A = 0,\ |A(z)| \le C < 1,\ \forall z \in D$ ўринли бўлсин деб фараз қиламиз. У ҳолда (1) га кўра $A(z)-$ аналитик функциялар синфи $f \in O_A(D)$ ушбу $\bar{D}_A f = 0$ тенглама ёрдамида характерланади. Шундай қилиб, антианалитик функциялар чексиз силлиқ бўлганлигидан $O_A(D) \subset C^{\infty}(D)$ эканлиги келиб чиқади.

Теорема 1. (Коши теоремасининг аналоги). *Агар* $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$ *бўлса, бунда* $D \subset \mathbb{C} -$ ∂D *тўғриланувчи чегарадан иборат соҳа бўлса, у ҳолда* $\int\limits_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z)d\,\bar{z}\right) = 0$ *бўлади.*

Айтайлик, $D \subset \mathbb{C}$ қаварик соҳа ва ва $\xi \in D-$ фиксирланган нуқта бўлсин. У ҳолда $\psi(z,\xi) := z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau} \in O_A(D)$ функция ички акслантиришни амалга оширади. Хусусан, ушбу $L(\xi,r) = \left\{ z \in D:\ |\psi(z,\xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau} \right| < r \right\}$ тўплам D да очиқ бўлиб, етарлича кичик $r>0$ учун у Dда компакт ётади ва ξ нуқтани ўз ичига олади. $L(\xi,r)$ га маркази ξ бўлган $A-$*лемниската дейилади*. Қуйидаги функцияни қараймиз:

$$K(z,\xi)=\frac{1}{2\pi i}.\frac{1}{z-\xi+\overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\overline{A}(\tau)d\tau}}, \tag{2}$$

бу ерда $\gamma(\xi,z)-\xi,z\in D$ нуқталарни туташтирувчи силлиқ чизиқ. D соҳа бир-боғламли соҳа ва $\overline{A}(z)-$ голоморф функция бўлганлиги сабабли, $I(z)=\int\limits_{\gamma(\xi,z)}\overline{A}(\tau)d\tau$ интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмайди ва бошланғич функция билан устма-уст тушади $I'(z)=\overline{A}(z)$.

Теорема 2. (Коши формуласининг аналоги). *Айтайлик, $D\subset\mathbb{C}-$қавариқ соҳа ва $G\subset D-$чегараси бўлакли силлиқ ихтиёрий қисм соха бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $f(z)\in O_A(G)\cap C(\overline{G})$ функция учун қуйидаги формула ўринли*

$$f(z)=\int\limits_{\partial G}K(\xi,z)f(\xi)\big(d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\big),\ z\in G. \tag{3}$$

Диссертациянинг «$A(z)-$**Гармоник функциялар**» деб номланувчи иккинчи боби, классик анализнинг энг нафис ва долзарб йўналишларидан биридир. Гармоник функциялар назарияси, тадқиқот усуллари анализнинг бошқа сохалари ва эллиптик типдаги хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий назарияси билан боғлиқ қатор муомоларни ечишда намуна бўлиб хизмат қилади. Ушбу бобда биз гармоник функциялар назариясини ривожлантириб $A(z)-$гармоник функциялар синфини киритамиз ва ўрганамиз.

Теорема 3. *$f\in O_A(D)$, $A(z)-$аналитик функциянинг $u(z)$ хақиқий қисми D соҳада қуйидаги тенгламани қаноатлантиради*

$$\Delta_A u:=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}-2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z}-2\overline{A}\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}\right]\right]=0. \tag{4}$$

Ва аксинча, агар $D-$бир боғламли соҳада, $u\in C^2(D)$ икки марта дифференциялланувчи ва (4) тенгламани қаноатлантирувчи функция бўлса, у ҳолда шундай $f\in O_A(D)$ мавжудки $u=\operatorname{Re}f$ бўлади.

3-теоремадан келиб чиқиб $A(z)-$*гармоник* функцияни қуйидагича таърифлаш мумкин.

Таъриф 1. *Агар $D-$бир боғламли соҳада икки марта дифференциялланувчи $u\in C^2(D)$, $u:D\to R$, функция D нинг барча нуқталарида (4) тенгламани қаноатлантирса, у ҳолда функция D соҳада $A(z)-$гармоник функция дейилади.*

D сохадаги барча $A(z)-$гармоник функциялар синфини $h_A(D)$ билан белгилаймиз.

Шундай қилиб, оператор Δu гармоник функциялар назариясида қандай ўрин тутса оператор $\Delta_A u$ ҳам $A(z)-$ гармоник функцияларда шундай ахамиятга эга. 4-теоремадан келиб чиқадики, D соҳадаги $A(z)-$аналитик функцияларнинг хақиқий ва мавҳум қисмлари $A(z)-$гармоник функциялар бўлади.

Теорема 4 (ўрта қиймат ҳақида**).** *Агар D қавариқ соҳа, $u(z)$ функция $L(a,R)\subset D$ лемнискатада $A(z)-$гармоник бўлса, у ҳолда ҳар қандай $r<R$ учун қуйидаги ифодалар ўринли бўлади*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi r}\oint\limits_{|\psi(z,\xi)|=r} u(\xi)\left|d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right|, \tag{5}$$

$$u(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|\psi(z,\xi)|\le r} u(\xi)\left(1-|A(\xi)|^2\right)\frac{d\xi\wedge d\bar{\xi}}{2i}. \tag{6}$$

Маълумки, классик Пуассон формуласи гармоник функциялар синфида Дирихли масаласининг содда ва муҳим ечимларидан бири ҳисобланади. G соҳа $G=L(a,\mathrm{R})$ лемниската бўлганда қуйидаги теорема ўринли бўлади:

Теорема 5. ($A(z)-$гармоник функция учун Пуассон формуласининг аналоги). *Агар $\varphi(\xi)$ функция $L(a,R)\subset D$ лемниската чегарасида узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги функция*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi R}\oint\limits_{|\psi(a,\xi)|=R}\varphi(\xi)\frac{R^2-|\psi(a,z)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}\left|d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right| \tag{7}$$

$L(a,\mathrm{R})$ *соҳада Дирихли масаласининг ечими бўлади.*

(7) формула $A(z)-$гармоник функция учун Пуассона формуласининг аналоги дейилади.

Натижа 1. ($A(z)-$аналитик функция учун Шварц формуласи**).** *Айтайлик,* $L(a,R)\subset\subset D$ *ва* $f\in O_A\left(L(a,R)\right)\cap C\left(\bar{L}(a,R)\right)$, $\operatorname{Re} f(\xi)=\varphi(\xi),\ \xi\in\partial L(a,R)$, *бўлсин. У ҳолда*

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{|\psi(\xi,a)|=r}\frac{\varphi(\xi)\left(d\xi+Ad\bar{\xi}\right)}{\psi(\xi,z)}-\bar{f}(a). \tag{8}$$

формула ўринли бўлади.

Бу формула $\partial L(a,R)$ даги $\operatorname{Re} f(\xi)=\varphi(\xi)$ бўйича $A(z)-$аналитик функцияни тиклаш мумкинлигини биладиради.

Ҳар қандай функция $\psi(z)\in L^1_{loc}(D)$

$$(\psi,\varphi)=\psi(\varphi)=\iint_D \psi(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2i},$$

формулга нисбатан умумлашган функцияни аниқлайди, бунда $\varphi\in F(D):=\{\varphi\in C^{\infty}(D):\operatorname{supp}\varphi\subset\subset D\}$. Агар $u-$икки марта дифференцияланувчи функция бўлса, у ҳолда $\Delta_A u(\varphi)$ функция ҳам худди шу тарзда умумлашган функцияни аниқлайди:

$$\Delta_A u(\varphi)=\iint_D \Delta_A u(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2i},\ \varphi\in F(D).$$

Бошқа томондан $\Delta_A u(\varphi)=u(\Delta_A\varphi)$ ўринли, яъни

$$\iint_D \Delta_A u(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2i}=\iint_D u(z)\Delta_A\varphi(z)\frac{dz\wedge d\overline{z}}{2i},\ \varphi\in F(D). \qquad (9)$$

(9) формула ёрдамида умумлашган $A(z)-$гармоник функцияга қуйидагича таъриф бериш мумкин:

Таъриф 2. *Агар умумлашган* $u\in F^{*}(D)$ *функция учун* $\Delta_A u(\varphi):=u(\Delta_A\varphi)=0,\forall\varphi\in F(D)$ *тенглик ўринли бўлса у ҳолда* $u\in F^{*}(D)$ *умумлашган маънода* $A(z)-$*гармоник функция дейилади.*

Теорема 6. *Агар умумлашган функция* $u\in F^{*}(D)$ *умумлашган маънода* $A(z)-$*гармоник функция бўлса, у ҳолда у регуляр* $A(z)-$*гармоник функция бўлади, яъни шундай* $g\in h_A(D)$ *функция мавжуд бўладики қуйидаги тенглик ўринли бўлади*

$$u(\varphi)=g(\varphi)=\frac{1}{2i}\iint_D g(z)\varphi(z)dz\wedge d\overline{z},\forall\varphi\in F(D).$$

Узлуксизлик функция учун $A(z)-$гармоник функция учун қуйидаги критерия мавжуд. Айтайлик, $D-$қаварик соҳа берилган бўлсин.

Теорема 7. $u(z)\in C(D)$ *функция учун қуйидаги тасдиқлар тенг кучли:*

1) $u\in h_A(D)$*;*

2) Ихтиёрий $z\in D$ *ва* $L(z,r)\subset\subset D$ *учун қуйидаги тенглик бажарилади*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi r}\int_{|\psi(\xi,z)|=r} u(\xi)\left|d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\right|;$$

3) Ихтиёрий $z\in D$ *и* $L(z,r)\subset\subset D$ *учун қуйидаги тенглик бажарилади*

$$u(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|\psi(\xi,z)|\le r} u(\xi)d\mu. \qquad (10)$$

Натижа 2. (Экстремум принципи**).** *Агар* $u \in h_A(D)$ *функция экстремумга* D *соҳа ичида эришса, у ҳолда* $u \equiv const$.

Натижа 3. *Дирихле масаласи*

$$\Delta_A u(z) = 0,\ z \in D,\ \ u \in h_A(D) \bigcap C(\bar{D}),\ \ u|_{\partial D} = \varphi,\ \ \varphi \in C(\partial D)$$

ягона ечимга эга.

Теорема 8. ($A(z)-$гармоник функции учун Гарнак теоремасининг аналоги). $u_j \in h_A(D)$ *монотон кетма-кетлик ёки* D *нинг ичида* ∞ *га текис яқинлашади, ёки* D *нинг ичида бирор* $A(z)-$*гармоник функция* $u \in h_A(D)$ *га текис яқинлашади.*

Нормал (компакт) функциялар оиласи функциялар назарияси ва функционал анализда мухим ўрин тутади. Аналитик ва гармоник функциялар оиласи учун нормаллик критерияси Монтел теоремаси сифатида маълум. $h_A(D)$ учун Монтел теоремасининг аналогини келтириб ўтамиз.

Теорема 9. *Айтайлик,* D *соҳада берилган* $U = \{u_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ $A(z)-$*гармоник функциялар оиласи* D *нинг ичида, яъни* D *дан олинган ҳарқандай компактда текис чегараланган бўлсин. У ҳолда уларнинг ҳосиласи ҳам* D *нинг ичида текис чегараланган бўлади ва* U *дан олинган ҳар қандай* $\{u_j\}$ *кетма-кетликдан* D *нинг ичида бирор* $A(z)-$*гармоник функцияга текис яқинлашувчи* $\{u_{j_m}\}$ *қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.*

Диссертациянинг «$A-$***Субгармоник функциялар синфи***» деб номланувчи учинчи боби субгармоник функциялар назариясининг синфини кенгайтириш ва $A-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини қуриш каби долзарб масалага бағишланган.

Таъриф 3. *Айтайлик,* $D \subset \mathbb{C}$ *соҳада* $u : D \to [-\infty; \infty)$ *функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирсин:*

1) $u(z)$ *юқоридан ярим узлуксиз, яъни* $\forall z_0 \in D$ *учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\overline{\lim_{w \to z_0}} u(w) \le u(z_0); \tag{11}$$

2) Ихтиёрий қавариқ қисм соҳа $G \subset D$ *учун ундан олинган ҳар бир* $\forall z_0 \in G$ *да шундай* $r(z_0) > 0$ *сон мавжудки, барча* $r < r(z_0)$ *лар учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади*

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\psi(\xi, z_0)| = r} u(\xi) \left| d\xi + A(\xi) d\bar{\xi} \right|, \tag{12}$$

бунда, $G \subset D$ *қавариқ соҳада* $\psi(\xi, z_0) = \xi - z_0 + \overline{\int_{\gamma(\xi, z_0)} \bar{A}(\tau) d\tau}$ *функция мавжуд ва* z_0 *нуқтада ягона нолга эга.*

У ҳолда $u(z)$ функция D соҳада $A(z)-$ субгармоник функция дейилади.

D соҳада $A(z)-$субгармоник функциялар синфини $sh_A(D)$ билан белгилаймиз. Бундан ташқари, қулайлик учун $u\equiv-\infty$ функцияни ҳам $sh_A(D)$ синфга киритамиз.

Қаварик $D\subset\mathbb{C}-$соҳа берилган бўлсин. Фиксирланган $z_0\in D$ нуқтада $u\in sh_A(D)$ функция учун қуйидаги икки ўрта қиймат ҳақидаги ифодаларни қараймиз:

$$m_A(z_0,r,u)=\frac{1}{2\pi r}\oint\limits_{|\psi(z_0,\xi)|=r}u(\xi)\left|d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right|,\ n_A(z_0,r,u)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|\psi(z_0,\xi)|\le r}u(\xi)\mu(\xi),$$

бунда $r\le r(z_0)$ ва $\mu(\xi)=\frac{1}{2i}\left(1-|A(\xi)|^2\right)d\xi\wedge d\bar{\xi}$.

Тасдиқ 1. *Айтайлик, $u\in sh_A(D)$ ва $u\ne-\infty$ бўлсин. У ҳолда $z_0\in D$ нуқта учун қуйидагилар ўринли:*

1) $u(z_0)\le n_A(z_0,r,u)\le m_A(z_0,r,u)$ $\forall r:L(z_0,r)\subset\subset D$;

2) $n_A(z_0,r,u)>-\infty$ $\forall r:L(z_0,r)\subset\subset D$;

3) $n_A(z_0,r,u),\ m_A(z_0,r,u)$ лар r аргумент бўйича монотон ва $r\downarrow 0$ да $n_A(z_0,r,u)\downarrow u(z_0)$, $m_A(z_0,r,u)\downarrow u(z_0)$.

Тасдиқ 2. (Субгармоник функцияни аппроксимациялаш). *$D\subset\mathbb{C}$ қаварик соҳада $u\in sh_A(D)$ берилган бўлсин, у ҳолда шундай монотон ўсувчи очиқ тўпламлар кетма-кетлиги $D_j\subset D_{j+1}\subset\subset D,\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D_j=D$ (D соҳанинг қопламаси) ва улар учун монотон камаювчи силлиқ $u_j\in sh_A(D_j)\cap C^\infty(D_j)$ функциялар кетма-кетлиги мавжудки $u_j\downarrow u$ бўлади.*

Қуйидаги теорема Δ_A оператор тилида $A(z)-$субгармоник функциялар критериясини беради.

Теорема 10. *$u\in C^2(D)$ функциянинг $A(z)-$субгармоник бўлиши учун $\Delta_A u\big|_D\ge 0$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.*

Натижа 4. *Ҳар қандай $u\in sh_A(D)$, $u\not\equiv-\infty$, функция учун умумлашган функция $\Delta_A u(\varphi)$ мусбат бўлади.*

Навбатдаги тасдиқ $A(z)-$субгармоник функциялар синфида потенциаллар хоссасини ўрганиш учун мухимдир.

Тасдиқ 3. *Айтйлик, D қаварик соҳа бўлсин. У ҳолда $A(z)-$субгармоник функция $k(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|\psi(z_0,z)|$ қуйидаги тенгламани умумлашган маъносида қаноатлантиради*

$$\Delta_A k(z,z_0)=\frac{\delta_{z_0}}{1-\left|A(z_0)\right|^2},\ z\in D,$$

яъни

$$\int_D \ln\left|\psi(z_0,z)\right|\Delta_A\varphi(z)\,dm(z)=\frac{2\pi\varphi(z_0)}{1-\left|A(z_0)\right|^2},\forall\varphi\in F(D),$$

бунда δ_{z_0} *– Дирак ўлчови.*

Теорема 11. (Рисс ифодасининг аналоги). *Ҳар қандай* $u\in sh_A(D),\ u\not\equiv-\infty,$ *функция учун D соҳада шундай* μ *борел ўлчови мавжудки ихтиёрий қавариқ* $D_0\subset\subset D$ *соҳада қуйидаги тенглик ўринли*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{D_0}\ln\left|\psi(z_0,z)\right|d\mu+h(z),\forall z\in D_0,$$

бунда $h\in h_A(D_0)$.

Қуйидаги натижа 6-Теоремани тўлдиради.

Натижа 5. *Агар умумлашган функция мусбат* $A(z)-$ *лапласианга эга бўлса, яъни*

$$\Delta_A u(\varphi):=u(\Delta_A\varphi)\geq 0,\forall\varphi\in F(D),\ \varphi\geq 0,$$

у ҳолда у бирор $A(z)-$*субгармоник функция билан ифодаланади, яъни*

$$\exists g\in sh_A(D):u(\varphi)=\frac{1}{2i}\iint_D g(z)\varphi(z)\,dz\wedge d\bar{z},\forall\varphi\in F(D).$$

Натижа 6. $u\in C(D)$ *функция* $A(z)-$*субгармоник бўлиши учун* $\Delta_A u(\varphi)\geq 0,\forall\varphi\in F(D),$*шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.*

Айтайлик, D соҳа $A-$регуляр соҳа бўлсин, яъни шундай $\rho(z)\in sh_A(D)$: $\rho|_D<0$ ва $\lim\limits_{z\to\partial D}\rho(z)=0$ шартларни бажарадиган функция мавжуд бўлсин. Қуйидаги функциялар синфини қараймиз

$$U_A=U_A(E,D)=\left\{u\in sh_A(D):u|_E\leq-1,u|_D\leq 0\right\}$$

ва қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$\omega_A(z,E,D)=\sup_{u\in U}u(z).$$

Таъриф 4. $\omega_A^*(z,E,D)=\overline{\lim_{w\to z}}\,\omega_A(w,E,D)$ *регуляризация E тўпламни D га нисбатан* $A(z)-$*гармоник ўлчов дейилади.*

Айтайлик, $K\subset D-$компакт бўлсин.

Таъриф 5. *Агар* $z_0 \in K$ *нуқта учун* $\omega_A^*(z_0, K, D) = -1$ *тенглик ўрили бўлса, у ҳолда бу нуқта* $A(z)-$*регуляр нуқта дейилади, акс ҳолда* z_0 *нуқтага* $A(z)-$ *иррегуляр нуқта дейилади.*

Агар компакт K *даги ҳар бир* $z_0 \in K$ *нуқтада* $A(z)-$*регуляр бўлса, у ҳолда* K *компакт* $A(z)-$*регуляр дейилади.*

Агарда $\omega_A^*(z, K, D)$ *функция* D *да Гёльдер узлуксиз,* $\omega_A^*(z, K, D) \in H_\alpha(D),\ 0 < \alpha \le 1,$ *яъни агар* $\exists M > 0:$

$$\left|\omega_A^*(z', K, D) - \omega_A^*(z'', K, D)\right| \le M \cdot |z' - z''|^\alpha, \ \forall z', z'' \in D$$

бўлса, регуляр компакт $K \subset D$ *Гёльдер регуляр компакт дейилади.*

Шуни алохида таъкидлаймизки, компакт K ни регулярлигидан $\omega_A^*(z, K, D)$ функцияни D да узлуксизлиги, $\omega_A^*(z, K, D)|_K = -1$ бўлишлиги келиб чиқади.

Ихтиёрий регуляр $E \subset D$ компактни фиксирлаб, қуйидагича сиғим қийматини киритамиз

$$c_A(K, E, D) := -\sup_{z \in E} \omega_A(z, K, D).$$

Тўплам функция $c_A(K, E, D)$ га $K \subset D$ тўпламнинг E га нисбатан $A(z)-$*сиғими дейилади.* Шуни таъкидлаб ўтамизки, K компакт $A(z)-$поляр тўплам, яъни $\exists u \in sh_A(D): u\big|_K \equiv -\infty, u\big|_G \ne -\infty$ бўлиши учун $c_A(K, E, D) = 0$ бўлиши зарур ва етарли.

Фараз қилайлик, $G \subset D-$бирор қаварик соҳа бўлиб, $K \subset L(z_0, r) \subset L(z_0, R) \subset G$ бўлсин. Қуйидаги функцияни аниқлаймиз

$$c(t) = c(t, z_0) := c_A\left(K \cap L(z_0, t), L(z_0, rt), L(z_0, Rt)\right), 0 \le t \le r.$$

Қуйидаги лемма компакт тўплам учун унинг $A(z)-$Гёльдер регулярлигини ўрганишда мухим ахамиятга эга.

Лемма. *Агар* $q \le \dfrac{r}{R}$ *ва* $R > 1$ *бўлса, у ҳолда қуйидаги*

$$\omega_A\left(z, K \cap \overline{L}(z_0, q^j), L(z_0, Rq^j)\right) \le -1 + e^{-c(q^j) - c(q^{j+1}) - \ldots - c(q^{j+k})}, \forall z \in L\left(z_0, rq^{j+k}\right), \quad (13)$$

тенгсизликлар ўринли, бу ерда $j, k = 1, 2, 3, \ldots.$

Натижа 7. *Агар* $z_0 \in K$ *нуқта учун*

$$\sum_{j=1}^{\infty} c(q^j, z_0) = \infty$$

бўлса у ҳолда z_0 нуқта K *компактда* $A(z)-$*регуляр нуқта бўлади.*

Қуйидаги теорема компактни Гёльдер регулярлигини ифодалайди.

Теорема 12. *Агар* $z_0 \in K$ *учун барча* $j = 1, 2, \ldots$ *лар учун* $c\left(q^j, z_0\right) \geq m > 0$ *бўлса, у ҳолда* $\omega_A\left(z, K, G\right)$ *функция* z_0 *нуқтада Гёльдер узлуксиз бўлади. Бошқача айтганда,*

$$\left|\omega_A\left(z, K, G\right) - \omega_A\left(z^0, K, G\right)\right| = \left|\omega_A\left(z, K, G\right) + 1\right| \leq M\delta^{\gamma} \ \ \forall z \in L\left(z_0, \delta\right),\ 0 < \delta \leq \delta_0,$$

бўлиб, бунда $\gamma = m / \ln\frac{1}{q}$ *ва* $M - const.$

ХУЛОСА

Ушбу диссертатцияда $A(z)-$гармоник ва $A(z)-$субгармоник функцияларни бир қанча хоссалари, ҳамда Гёльдер регулярлик шарти ўрганилган. Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

$-\,A(z)-$гармоник функциялар учун Лаплас типидаги операторининг ошкор кўриниши аниқланган;

$-\,A(z)-$гармоник функциялар учун Пуассоннинг интеграл формуласи исботланган;

$-$ихтиёрий $A(z)-$субгармоник функцияларни силлиқ $A(z)-$субгармоник функциялар ёрдамида апроксимациялаш мумкинлиги кўрсатилган;

$-\,A(z)-$субгармоник функциялар учун Рисс формуласи исботланган;

$-\,A(z)-$субгармоникликни аниқлашнинг $A(z)-$ Лаплас типидаги қулай мезони топилган;

$-\,A(z)-$гармоник ўлчовнинг қатор хоссалари исботланган;

$-$ компактнинг Гёльдер регулярлигининг етарли шарти аниқланган.

Умуман олганда олинган натижаларни диссертация тадқиқотининг мақсадларига мувофиқ деб ҳисоблаш мумкин.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ХУРСАНОВ ШОХРУХ ЯШИНОВИЧ

$A(z)-$ СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РЕГУЛЯРНОСТИ ГЁЛЬДЕРА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2020 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.1.PhD/FM192.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Садуллаев Азимбой** доктор физико-математических наук, профессор, академик
Официальные оппоненты:	**Имомназаров Холматжон Худойназарович** доктор физико-математических наук, ведуший научный сотрудник (Россия)
	Рахимов Абдуғофур Абдумаджитович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2021 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2021 года).

Дж.Хаджиев
Зам председателя научного совета
по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие теоретические и прикладные исследования, проводимые на мировом уровне в комплексном анализе, в теории потенциала, в комплексной теории динамических систем, а также в томографиях сводится к свойствам квазиконформных отображений и $A(z)-$аналитических функций. Квазиконформные отображения и $A(z)-$аналитические функции составляют важный раздел комплексного анализа.

Использование теории борелевских мер и обобщенных функций в теории потенциала, представление типа Рисса является мощным аппаратом исследования $A(z)-$гармонических и $A(z)-$субгармонических функций, успешно применяется в проблемах Гёльдер непрерывностей экстремальных функций, имеет важные применения в описаниях регулярных компактов и множеств Жюлиа в теории динамических систем и несомненно, является актуальной задачей современной математики.

В настоящее время изучение функциональных свойств $A(z)-$аналитических функций остается одной из важных задач теории функций комплексных переменных. Одним из главных вопросов в современной математике является изучение класса $A(z)-$гармонических функций и их свойств на основе $A(z)-$аналитических функций, совершенствование метода изучения геометрических свойств $A(z)-$гармонических функций, в связи с этим, особое внимание уделяется целевым исследованиям, в том числе изучению класса $A(z)-$субгармонических функций, развитию теории потенциалов в классе $A(z)-$субгармонических функций, а также методам изучения $A(z)-$гармонических измерений и Гёльдер регулярности. Вышеупомянутое исследование в этом направлении объясняет актуальность данной темы диссертации.

В нашей стране особое внимание уделяется развитию указанных разделов математического анализа, имеющих научное и практическое применение в различных фундаментальных науках. Они определены как «Основные задачи и направления деятельности проведения исследований на уровне международных стандартов в области ведущих направлений: алгебра и теория функций, дифференциальное уравнение и математическая физика, геометрия и топология, теория вероятностей и математическая статистика, прикладная математика и моделирование»[2]. В решении различных задач комплексных динамических систем, теории потенциалов и квазиконформных отображений особое место занимает $A(z)-$ субгармонические функции и

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

регулярности компактов Гёльдера.

Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям такими как «Функциональный анализ, математический анализ и комплексный анализ» соответствует основным приоритетным задачам Правительства и Академии Наук Узбекистана, постановлению Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан». Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория плоских квазиконформных отображений, построенная Г.Грёчем, М.А.Лаврентьевым и Л.Альфорсом нашла важные применения в задачах математической физики и механики, привела к бурному развитию этого направления. Теория квазиконформных отображений и связанное с ней теория уравнения Бельтрами интенсивно развивались в середине XX века, благодаря Американским математикам Л. Альфорса, А. Беринга, Ф.В. Геринга, Российским математикам М.А. Лаврентьева, И.Н.Векуа, П.П. Белинского, Ю.Г.Решетняка, В.И.Миклюкова, В.А.Зорича, П.М.Тамразова, С.Л. Кружкаля, А.В.Сычёва, И.П.Митюкова, Г.Д.Суворова, В.В.Асеева, Польского математика Б. Боярского и Узбекских математиков Л.И. Волковыского, М.Захирова, А.Ахмедова, Г.М.Ляна, А.К. Варисова и др. Изучение свойств $A(z)-$аналитических функций получило развитие в 90х годах прошлого века, в работах известных ученых таких как: В.Гутлянский, Д.А. Ковтонюк, И.В. Петков, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов (Украина), Ю.Сребро, Э.Х.Якубов (Израиль), А.Н.Кондрашов, А.Л.Бухгейм, С.Г.Казанцев(Россия) и др. Это связано с тем, что если квазиконформные отображения связаны с геометрическими свойствами гомеоморфизмов, то для $A(z)-$аналитических функций важны функциональные свойства, гладкость, особые точки, складки и др. Эти свойства важны в применениях в медицинской и геологической томографии.

В Узбекистане с 2010 года на кафедре математического анализа Национального университета Узбекистана под руководством академика А. Садуллаева и его учеников Н. М. Жабборова, Т. Ю. Отабоева, Ш. Я. Хурсанова и др. стало изучаться функциональные свойства $A(z)-$ аналитических функций; получены аналоги ядра Коши, формул Шварца и Пуассона, аналог представления Рисса для $A(z)-$аналитических и $A(z)-$ субгармонических функций.

Еще одна проблема, изучаемая на кафедре$-$это регулярности и Гёльдер регулярности $P-$меры. Известный Польский математик Й.Сичак исследовал Гёльдер регулярность компактов в терминах емкостных величин, определяемых гармонической мерой и $P-$ мерой. Используя его метод в диссертации дается условие Гёльдер регулярность компактов относительно класса $A(z)-$субгармонических функций на плоскости.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Национального университета Узбекистана ОТ-Ф-1-116 «Функциональные свойства $A(z)-$аналитических функций и их применения. Некоторые задачи комплексного анализа в матричных областях» (2016-2020 гг.).

Целью исследования является построение оператора Лапласа для $A(z)-$ гармонических функций, доказательство аналога формулы Пуассона и представления Рисса; построение аппроксимацию $A(z)-$субгармонических функций, дать условие Гёльдер непреривности для $A(z)-$гармонической меры.

Задачи исследования:

$-$нахождение оператора $A(z)-$лапласиана для $A(z)-$гармонических функций;

$-$доказательство формулы Пуассона для $A(z)-$гармонических функций;

$-$определение обобщенных $A(z)-$гармонических функций и их порождаемость регулярными $A(z)-$гармоническими функциями;

$-$изучение нормального семейства $A(z)-$гармонических функций;

$-$построение аппроксимации $A(z)-$субгармонических функций гладкими функциями;

$-$доказательство Гёльдер непрерывности $A(z)-$гармонической меры.

Объект исследования. $A(z)-$гармонические функции, обобщенные $A(z)-$гармонические функции, теорема Рисса об интегральном представлении, Гёльдер регулярности компактов.

Предмет исследования. Уравнение Бельтрами, $A(z)-$Лапласиан,

$A(z)-$гармонические и $A(z)-$субгармонические функции, Формула Пуассона, Представление Рисса.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы теории функций, теория аналитических функций, классическая теория потенциала, теория плюрипотенциала, теория квазиконформных отображений и теории $A(z)-$аналитических функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

–найден явный вид оператора $A(z)-$Лапласиана;

–доказана интегральная формула Пуассона для $A(z)-$гармонических функций;

–доказана регуляно $A(z)-$гармоничность обобщенно $A(z)-$гармонических функций;

–доказано свойство компактности нормального семейства $A(z)-$гармонических функций;

–построена гладкая аппроксимация для $A(z)-$субгармических функций;

–дано достаточное условие Гёльдер регулярности $A(z)-$гармонической меры.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения полученной в диссертации формулы Пуассона, представления Рисса в решениях краевых задач эллиптических уравнений и в других разделах математической физики.

Достоверность результатов исследования обоснована применением известных методов математической физики, классической теории потенциала, теории плюрипотенциала и теории функций многих комплексних переменных, строгими математическими доказательствами. Кроме того, публикацией результатов диссертации в авторитетных научных журналах, в частности с импакт-факторами и апробации работы в научных семинарах и на Республиканских и Международных конференциях. Все это доказывают достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы для установления регулярности компактов, а Гёльдер непрерывность $P-$меры для изучения множеств Жюлиа. Полученные результаты могут быть использованы в изучении решений дифференциальных уравнений математической физики и механики.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что она позволяет восстанавливать значения $A(z)-$гармонических функций, используемых для компьютерной томографии и расчета коэффициентов трения предметов в задачах механики и математической физики.

Внедрение результатов исследования.

$-A(z)-$гармонические функции, Гёльдер регулярности, операторы типа

Лапласа и формула Пуассона предложенные Ш.Я.Хурсановым в диссертационной работе были использованы для восстановления поверхностей разделов в гравиметрии, использовались при решении прямых и обратных задач в рамках гранта №AP05133873 «Численные методы в паралельные алгаритмы решения нелинейных обратных задач для математических моделей с дробными степенями эллиптических операторов с приложениями в гравиметрии» (справка №565 от 13 ноября 2020 года Комитета науки Мнистерство образования и науки Республики Казахистан). В частности, используя выше указанных результатов Ш.Я.Хурсанова, была получена эмпирическая формула выбора параметра регуляризации метода сопряженных градиентов.

$-$Обобщенные $A(z)-$гармонические функции и обобщенное интегральное представление регулярных $A(z)-$гармонических функций использовались при решении уравнения третьего порядка в проекте MRU-OT-1/2017 “Нелокальные краевые и обратные задачи для неклассических дифференциальных и операторно-дифференциальных уравнений”, выполненного в 2018-2019 годах в Национальном университете Узбекистана. В частности, эти представления гармонических функций дали возможность доказать качественные свойства решений начально-краевых задач для уравнений третьего порядка смешанно-составного типа, с оператором Лапласа в главной части.

Ш.Я. Хурсанов не участвовал в работе указанных проектах.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 5 научно-практических конференциях, в том числе на 3 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях,
на научном семинаре «Теория функций» кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана (руководитель: академик А. Садуллаев)$-$неоднократно; на научном семинаре «Современные проблемы математической физики» научной лаборатории «Дифференциальные уравнения и их применения» Математического института им. В.И. Романовского (руководители: академик Ш.А. Алимов, профессор Р.Р. Ашуров); на объединенном научном семинаре «Комплексная теория потенциала и ее применения» Хорезмского отдела Математического института им. В.И. Романовского и кафедры математического анализа Ургенчского государственного университета (руководитель: профессор С. Имомкулов); на научном семинаре по математическому анализу при научном совете DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 (председатель профессор Р.Н. Ганиходжаев).

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 5 статьей в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики, в том числе 2 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Нумерации теорем, предложений, определений, формул сквозные, отдельно для каждой главы. Общее число страниц диссертационной работы –80.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Предварительные сведения”**, содержит основные теоремы и определения теории $A(z)-$аналитических функций и субгармонных функций, используемые в дальнейшем в диссертации. В параграфе 1.1 сформулированы результаты по $A(z)-$ аналитическим функциям из фундаментальной работы А. Садуллаева и Н. М. Жабборова, опубликованной в журнале СФУ, в параграфах 1.2 и 1.3 приведены определения и важные теоремы из монографии А. Садуллаева «Теория плюрипотенциала».

Решения уравнения Бельтрами:

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

напрямую связано с квазиконформными отображениями. В общем случае, относительно функции $A(z)$, предполагается, что она измерима и $|A(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) обычно называют $A(z)-$*аналитическими* функциями.

Наиболее интересным является случай, когда $A(z)-$антианалитическая функция, $\partial A = 0$, в области $D \subset \mathbb{C}$ такая, что $|A(z)| \le C < 1$, $\forall z \in D$. В диссертации мы рассматриваем именно этот случай. Тогда согласно (1) класс $A(z)-$аналитических функций $f \in O_A(D)$ характеризуется тем, что $\bar{D}_A f = 0$. Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то $O_A(D) \subset C^\infty(D)$. В этом случае имеет место следующая

Теорема 1 (Аналог теоремы Коши). *Если* $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$, *где* $D \subset \mathbb{C}-$ *область со спрямляемой границей* ∂D, *то*

$$\int_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z)d\,\bar{z}\right) = 0\,.$$

Предположим теперь, что область $D \subset \mathbb{C}-$ выпуклая и $\xi \in D-$её фиксированная точка. Тогда функция $\psi(z,\xi) := z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau} \in O_A(D)$ осуществляет внутреннее отображение. В частности, множество $L(\xi,r) = \left\{ z \in D: \ |\psi(z,\xi)| = \left| z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau} \right| < r \right\}$ представляет собой открытое множество в D. Для достаточно маленьких $r > 0$ оно компактно принадлежит D и содержит точку ξ. Это множество называется $A(z)-$ *лемнискатой, с центром в точке* ξ и обозначается как $L(\xi,r)$.

Рассмотрим функцию

$$K(z,\xi) = \frac{1}{2\pi i}.\frac{1}{z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau}}\,, \tag{2}$$

где $\gamma(\xi,z)-$ гладкая кривая, соединяющая точки $\xi, z \in D$. Так как область $D-$ односвязная и функция $\bar{A}(z)-$голоморфная, то интеграл $I(z) = \int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau$ не зависит от пути интегрирования; он совпадает с первообразной, $I'(z) = \bar{A}(z)$.

Теорема 2. (Аналог формулы Коши). *Пусть* $D \subset \mathbb{C}-$*выпуклая область и* $G \subset D-$*произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей* ∂G. *Тогда для любой функции* $f(z) \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$ *имеет место формула*

$$f(z) = \int_{\partial G} K(\xi,z) f(\xi)\left(d\xi + A(\xi)d\,\bar{\xi}\right), \ \ z \in G. \tag{3}$$

Вторая глава диссертации, названная **«$A(z)-$Гармонические функции»** относится к классической теории гармонических функций и представляет собой один из наиболее изящных и стройных разделов классического анализа. Ряд свойств гармонических функций, методы исследования и аппарат теории служат образцом для постановки задач и получения тех или иных результатов, в других разделах анализа и, прежде всего, в общей теории дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа. Гармонические функции занимают важное место не только во многих теоретических исследованиях, но также и в приложениях анализа к физике и механике, где ими часто описываются различные стационарные процессы.

В этой главе мы дадим развитие теории гармонических функций в классе $A(z)-$гармонических функций.

Теорема 3. *Действительная часть* $A(z)-$*аналитической функции* $f\in O_A(D)$, *удовлетворяет в области* D *уравнению*

$$\Delta_A u:=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial \bar z}-2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial \bar z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z}-2\bar A\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right]\right]=0. \quad (4)$$

И наоборот, если $D-$ *односвязная область, а* $u\in C^2(D)$, $u:D\to R$, *дважды дифференцируемая функция удовлетворяет дифференциальному уравнению* (4), то *существует* $f\in O_A(\mathrm{G}):\ u=\mathrm{Re}\, f$.

В связи с теоремой 3 естественно ввести понятие $A(z)-$*гармонической* функции следующим образом:

Определение 1. Дважды дифференцируемая функция $u(z)\in C^2(D)$, $u:D\to R$, называется $A(z)-$*гармонической* в области D, если всюду в D функция $u(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (4).

Класс $A(z)-$гармонических в области D функций обозначается как $h_A(D)$.

Таким образом, оператор $\Delta_A u$ в теории $A(z)-$гармонических функций играет такую же роль, что и оператор Δu в теории гармонических функций. Из Теоремы 3 вытекает, что действительная и мнимая часть $A(z)-$аналитической в области D функции $f=u+iv$ являются $A(z)-$гармоническими функциями.

Теорема 4 (о среднем**).** *Пусть* $D-$ *выпуклая область. Тогда, если функция* $u(z)$ является $A(z)-$*гармонической в лемнискате* $L(z,R)=\{\xi\in D:|\psi(z,\xi)|<R\}\subset D$, *то для любого* $r<R$ *имеют место следующие формулы*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi r}\oint_{|\psi(z,\xi)|=r}u(\xi)\left|d\xi+A(\xi)d\bar\xi\right|, \quad (5)$$

$$u(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|\psi(z,\xi)|\le r}u(\xi)\left(1-|A(\xi)|^2\right)\frac{d\xi\wedge d\bar\xi}{2i}. \quad (6)$$

Известная классическая формула Пуассона является простейшим, а также наиболее важным примером решения задачи Дирихле в классе гармонических функций. В случае, когда область G является лемнискатой, $G=L(a,\mathrm{R})$, имеет место следующий аналог этой формулы

Теорема 5 (аналог формулы Пуассона для $A(z)-$гармонических функций). *Если функция* $\varphi(\xi)$ *непрерывна на границе лемнискаты* $L(a,R)\subset D$, *то функция*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi R}\oint_{|\psi(a,\xi)|=R}\varphi(\xi)\frac{R^2-|\psi(a,z)|^2}{|\psi(\xi,z)|^2}\left|d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\right| \tag{7}$$

является решением задачи Дирихле в $L(a,\mathrm{R})$.

Формула (7) называется аналогом *формулы Пуассона* для $A(z)-$ гармонических функций.

Следствие 1. (аналог формулы Шварца для $A(z)-$ аналитической функции**).** *Пусть* $L(a,R)\subset\subset D$ *и* $f\in O_A\left(L(a,R)\right)\cap C\left(\bar{L}(a,R)\right)$, $\operatorname{Re} f(\xi)=\varphi(\xi),\ \xi\in\partial L(a,R)$.

Тогда

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\oint_{|\psi(\xi,a)|=r}\frac{\varphi(\xi)\left(d\xi+Ad\bar{\xi}\right)}{\psi(\xi,z)}-\bar{f}(a). \tag{8}$$

Эта формула дает нам восстановление $A(z)-$аналитической функции по значениям на границе $\partial L(a,R)$ значений её действительной части $\operatorname{Re} f(\xi)=\varphi(\xi)$.

Любая функция $\psi(z)\in L^1_{loc}(D)$ определяет обобщенную функцию по формуле

$$(\psi,\varphi)=\psi(\varphi)=\iint_D\psi(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i},$$

где $\varphi\in F(D):=\left\{\varphi\in C^\infty(D):\operatorname{supp}\varphi\subset\subset D\right\}$. Если $u-$дважды дифференцируемая функция, то $\Delta_A u(\varphi)$ таким же образом определяет обобщенную функцию

$$\Delta_A u(\varphi)=\iint_D\Delta_A u(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i},\ \varphi\in F(D).$$

С другой стороны, $\Delta_A u(\varphi)=u(\Delta_A\varphi)$, т.е.

$$\iint_D\Delta_A u(z)\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i}=\iint_D u(z)\Delta_A\varphi(z)\frac{dz\wedge d\bar{z}}{2i},\ \varphi\in F(D). \tag{9}$$

Доказанная формула (9) наводит на мысль определить обобщенную $A(z)-$гармоническую функцию следующим образом

Определение 2. *Обобщенная функция* $u\in F^*(D)$ *называется* $A(z)-$ *гармонической в обобщенном смысле, если* $\Delta_A u(\varphi):=u(\Delta_A\varphi)=0,\forall\varphi\in F(D)$.

Теорема 6. *Если обобщенная функция* $u\in F^*(D)$ *является* $A(z)-$ *гармонической в обобщенном смысле, то она порождается* $A(z)-$ *гармонической функцией, точнее существует* $g\in h_A(D)$ *такая, что*

$$u(\varphi)=g(\varphi)=\frac{1}{2i}\iint_D g(z)\varphi(z)dz\wedge d\overline{z},\forall\varphi\in F(D).$$

Для непрерывных функций имеют место следующие критерии $A(z)-$ гармоничности. Предположим, что $D-$ выпуклая область.

Теорема 7. *Для функции $u(z)\in C(D)$ следующие утверждения эквивалентны:*

1) $u\in h_A(D)$;

2) Для любого $z\in D$ и $L(z,r)\subset\subset D$ выполняется следующее равенство

$$u(z)=\frac{1}{2\pi r}\int_{|\psi(\xi,z)|=r}u(\xi)\left|d\xi+A(\xi)d\overline{\xi}\right|;$$

3) Для любого $z\in D$ и $L(z,r)\subset\subset D$ выполняется следующее равенство

$$u(z)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{|\psi(\xi,z)|\le r}u(\xi)d\mu. \qquad (10)$$

Следствие 2 (Принцип экстремума**).** *Если функция $u\in h_A(D)$ достигает экстремума внутри области области D, то $u\equiv const$.*

Следствие 3. *Задача Дирихле*

$$\Delta_A u(z)=0,\ z\in D,\ \ u\in h_A(D)\bigcap C(\overline{D}),\ \ u|_{\partial D}=\varphi,\ \ \varphi\in C(\partial D)$$

имеет единственное решение.

Теорема 8 (аналог теоремы Гарнака для $A(z)-$гармонических функций). *Монотонная последовательность $A(z)-$гармонических функций $u_j\in h_A(D)$ либо равномерно внутри D сходится к бесконечности, либо равномерно внутри D сходится к некоторой $A(z)-$гармонической функции $u\in h_A(D)$.*

Нормальное (компактное) семейство функций занимает особое место в теории функций и функционального анализа. Для семейства аналитических и гармонических функций критерия нормальности семейства проще, и она известна как Теорема Монтеля. Аналогом Теоремы Монтеля для $h_A(D)$ является

Теорема 9. Пусть $U=\{u_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ *семейство $A(z)-$гармонических функций в области D, которые равномерно ограничены на компактных подмножествах D. Тогда их производные также равномерно ограничены на компактных подмножествах D и из любой последовательности $\{u_j\}$ из U можно извлечь подпоследовательность $\{u_{j_m}\}$, сходящуюся равномерно на компактных подмножествах D к некоторой $A-$гармонической функции .*

В третьей главе диссертации, названной «**Класс $A-$субгармонических функций**» посвящена расширению класса субгармонических функций, определив класс $A(z)-$субгармонических функций, связанного с $A(z)-$гармоническими функциями. Далее, в этой главе мы построим теорию потенциала в классе $A(z)-$субгармонических функций.

Определение 3. *Функция* $u: D \to [-\infty;\infty)$ *называется* $A(z)-$*субгармонической в области* $D \subset \mathbb{C}$, *если она удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $u(z)$ *полунепрерывна сверху, т.е.* $\forall z_0 \in D$ *имеет место неравенство*

$$\overline{\lim_{w \to z_0}} u(w) \le u(z_0); \tag{11}$$

2) для любой выпуклой подобласти $G \subset D$ *для каждой точки* $\forall z_0 \in G$ *существует число* $r(z_0) > 0$ *такое, что для всех* $r < r(z_0)$ *выполняется неравенство*

$$u(z_0) \le \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\psi(\xi, z_0)|=r} u(\xi) \left| d\xi + A(\xi) d\overline{\xi} \right|. \tag{12}$$

Класс субгармонических в области D функций обозначается через $sh_A(D)$. В дальнейшем, для удобства тривиальную функцию $u \equiv -\infty$ также будем включать в $sh_A(D)$.

Пусть область $D \subset \mathbb{C}-$выпуклая. Для функции $u \in sh_A(D)$ в фиксированной точке $z_0 \in D$ рассмотрим следующие два усреднения

$$m_A(z_0, r, u) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{|\psi(z_0, \xi)|=r} u(\xi) \left| d\xi + A(\xi) d\overline{\xi} \right|, n_A(z_0, r, u) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|\psi(z_0, \xi)|\le r} u(\xi) \mu(\xi),$$

где $r \le r(z_0)$ и $\mu(\xi) = \frac{1}{2i}\left(1 - |A(\xi)|^2\right) d\,\xi \wedge d\,\overline{\xi}$.

Имеет место

Предложение 1. *Пусть* $u \in sh_A(D)$ *и* $u \ne -\infty$. *Тогда для произвольной точки* $z_0 \in D$ *справедливы:*

1) $u(z_0) \le n_A(z_0, r, u) \le m_A(z_0, r, u)$ $\forall r : L(z_0, r) \subset\subset D$;

2) $n_A(z_0, r, u) > -\infty$ $\forall r : L(z_0, r) \subset\subset D$;

3) $n_A(z_0, r, u), m_A(z_0, r, u)$ монотонны по r и $n_A(z_0, r, u) \downarrow u(z_0)$, $m_A(z_0, r, u) \downarrow u(z_0)$ *при* $r \downarrow 0$.

Предложение 2. *(*Аппроксимация субгармонических функций*). Если* $u \in sh_A(D)$, *где* $D-$*выпуклая область, то существует монотонно возрастающая последовательность открытых множеств* $D_j \subset D_{j+1} \subset\subset D, \bigcup_{n=1}^{\infty} D_j = D$ *(исчерпание* D*) и монотонно убывающая последовательность функций* $u_j \in sh_A(D_j) \cap C^\infty(D_j)$ *такая, что* $u_j \downarrow u$.

Следующая теорема дает нам критерий $A(z)-$субгармоничности в терминах оператора Δ_A.

Теорема 10. *Для того чтобы функция* $u \in C^2(D)$ *являлась* $A(z)-$ *субгармонической необходимо и достаточно выполнение условие* $\Delta_A u\big|_D \geq 0$.

Следствие 4. *Для любой функции* $u \in sh_A(D)$, $u \not\equiv -\infty$, *обобщенная функция* $\Delta_A u(\varphi)$ *является положительной.*

Следующее предложение является важной в исследовании потенциальных свойств $A(z)-$субгармонических функций.

Предложение 3. Пусть область $D-$выпуклая. Тогда $A(z)-$ субгармоническая функция $k(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln|\psi(z_0,z)|$ удовлетворяет в D уравнению

$$\Delta_A k(z,z_0)=\frac{\delta_{z_0}}{1-|A(z_0)|^2}$$

в обобщенном смысле, т.е.

$$\int_D \ln|\psi(z_0,z)|\Delta_A\varphi(z)dm(z)=\frac{2\pi\varphi(z_0)}{1-|A(z_0)|^2}, \forall\varphi\in F(D).$$

Здесь δ_{z_0} $-$мера Дирака.

Теорема 11 (аналог представления Рисса). *Для любой функции* $u \in sh_A(D)$, *тождественно не равной* $-\infty$, *в области* D *существует борелевская мера* μ *такая, что для произвольной выпуклой области* $D_0 \subset\subset D$ *имеет место равенство*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{D_0}\ln|\psi(z_0,z)|d\nu+h(z), \forall z\in D_0,$$

где $h\in h_A(D_0)$.

Следующее утверждение дополняет Теорему 6.

Следствие 5. *Если обобщенная функция имеет положительный* $A(z)-$*лапласиан, т.е.* $\Delta_A u(\varphi):=u(\Delta_A\varphi)\geq 0, \forall\varphi\in F(D), \varphi\geq 0$, *то она порождается некоторой* $A(z)-$*субгармонической функцией т.е.*

$$\exists g\in sh_A(D): u(\varphi)=\frac{1}{2i}\iint_D g(z)\varphi(z)dz\wedge d\bar{z}, \forall\varphi\in F(D).$$

Следствие 6. *Для того чтобы функция* $u\in C(D)$ *являлась* $A(z)-$ *субгармонической необходимо и достаточно выполнение условия* $\Delta_A u(\varphi)\geq 0, \forall\varphi\in F(D)$.

Пусть $D-$выпуклая и $A(z)-$регулярная область, т.е. существует функция $\rho(z) \in sh_A(D) : \rho|_D < 0$ и $\lim_{z \to \partial D} \rho(z) = 0$. Рассмотрим класс функций

$$U_A = U_A(E,D) = \{u \in sh_A(D) : u|_E \le -1, u|_D \le 0\}$$

и положим

$$\omega_A(z,E,D) = \sup_{u \in U} u(z).$$

Определение 4. *Регуляризация* $\omega_A^*(z,E,D) = \overline{\lim_{w \to z}} \omega_A(w,E,D)$ *называется* $A(z)-$*гармонической мерой множества* E *относительно области* D.

Пусть теперь $K \subset D-$компакт.

Определение 5. *Точка* $z_0 \in K$ *называется* $A(z)-$*регулярной точкой относительно* D*, если* $\omega_A^*(z_0,K,D) = -1,$ *в противном случае* z_0 *называется* $A(z)-$*иррегулярной точкой.*

Компакт K *называется* $A(z)-$*регулярным, если его каждая точка* $z_0 \in K$ *является* $A(z)-$*регулярной. Регулярный компакт* $K \subset D$ *называется Гёльдер регулярным, если функция* $\omega_A^*(z,K,D)$ *является Гёльдер непрерывной в* D: $\omega_A^*(z,K,D) \in H_\alpha(D),\ 0 < \alpha \le 1,$ *т.е. если* $\exists M > 0$:

$$\left|\omega_A^*(z',K,D) - \omega_A^*(z'',K,D)\right| \le M \cdot |z' - z''|^\alpha,\ \forall z', z'' \in D.$$

Заметим, что для нерегуляризованной функции

$$\omega_A(z,K,D) = \sup\{u(z) \in sh_A(D) : u|_K \le -1, u|_D \le 0\}$$

значения $\omega_A(z_0,K,D) = -1,\ \forall z_0 \in K$. Однако при регуляризации в некоторых точках может $\omega_A^*(z_0,K,D) > \omega_A(z_0,K,D) = -1$. Если компакт $K \subset D$ является $A(z)-$регулярным, то $\omega_A(z,K,D) \equiv \omega_A^*(z,K,D)$ и $\omega_A^*(z,K,D)$ является непрерывной функцией в D, $\omega_A^*(z,K,D) \in C(D)$.

Переходим к изучению $A(z)-$Гёльдер регулярности компактов. Фиксируем произвольный регулярный компакт $E \subset D$ и введем емкостную величину

$$c_A(K,E,D) := -\sup_{z \in E} \omega_A(z,K,D).$$

Функция множества $c_A(K,E,D)$ называется $A(z)-$*емкостью* множества $K \subset D$ относительно $E \subset D$. Отметим, что что K является $A(z)-$полярным по отношению к $A(z)-$субгармоническим функциям, т.е. $\exists u \in sh_A(D) : u|_K \equiv -\infty, u|_G \ne -\infty$, тогда и только тогда, когда $c_A(K,E,D) = 0$.

Пусть $G \subset D-$выпуклая область и $K \subset L(z_0,r) \subset L(z_0,R) \subset G$.

Определим функцию

$$c(t)=c(t,z_0):=c_A\left(K\cap L(z_0,t),L(z_0,rt),L(z_0,Rt)\right),0\le t\le 1.$$

Следующая лемма является ключевым для изучения $A(z)-$Гёльдер регулярности компактов.

Лемма. *Если* $q\le\dfrac{r}{R}$ *и* $R>1$ *то имеет место неравенство*

$$\omega_A\left(z,K\cap\bar{L}(z_0,q^j),L(z_0,Rq^j)\right)\le -1+e^{-c(q^j)-c(q^{j+1})-\ldots-c(q^{j+k})},\forall z\in L(z_0,rq^{j+k}),\quad (13)$$

где $j,k=1,2,3,\ldots$.

Следствие 7. *Если точка* $z_0\in K$ *такая, что*

$$\sum_{j=1}^{\infty}c(q^j,z_0)=\infty$$

то z_0 *является* $A(z)-$*регулярной точкой* K.

Теорема 12. *Если для точки* $z_0\in K$ *компакта* K *выполняется неравенства* $c(q^j,z_0)\ge m>0$ *для всех* $j=1,2,\ldots$, *то функция* $\omega_A(z,K,G)$ *Гёльдер непрерывна в точке* z_0. *Точнее,*

$$\left|\omega_A(z,K,G)-\omega_A(z^0,K,G)\right|=\left|\omega_A(z,K,G)+1\right|\le M\delta^{\gamma}\ \ \forall z\in L(z_0,\delta),\ 0<\delta\le\delta_0,$$

где $\gamma=m/\ln\dfrac{1}{q}$ *и* $M-const.$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертации работа посвящена изучению некоторых свойств $A(z)-$гармонических и $A(z)-$субгармонических функций, а также условию Гёльдер регулярности компактов. Основные результаты исследования состоят из следующих:

−найден явный вид оператора $A(z)-$Лапласиана;

−доказана формула Пуассона для $A(z)-$гармонических функций;

−построена гладкая аппроксимация для $A(z)-$субгармонических функций;

−доказано представление Рисса для $A(z)-$субгармонических функций;

−дается удобный критерий $A(z)-$субгармоничности в терминах $A(z)-$Лапласиана;

−доказаны ряд свойств $A(z)-$гармонической меры;

−дано достаточное условие Гёльдер регулярности компактов.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении цели исследования диссертации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc. 03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KHURSANOV SHOHRUH YASHINOVICH

$A(z)-$SUBHARMONIC FUNCTIONS AND HOLDER REGULARITY

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2020

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.1.PhD/FM192.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Sadullaev Azimbay** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor, Academician
Official opponents:	**Imomnazarov Holmatjon Khudainazarovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Leading researches (Russian)
	Rakhimov Abdugafur Abdumadjitovich Doctor of Physical and mathematical Sciences
Leading organization:	Urgench State University

Defense will take place on “____” _________________ 2021 at ____ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.____). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on “____” _______________ 2021.
(Mailing report No.____ on “____” _______________ 2021).

J. Khadzhiev
Deputy chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the study is to construct a Laplace-type operator for $A(z)-$harmonic functions, to prove Poisson's formulas and the Riesz representation; construct an approximation of $A(z)-$subharmonic functions, the Hölder condition of a $A(z)-$harmonic measure.

Object of study. $A(z)-$harmonic functions, generalized $A(z)-$harmonic functions, the Riesz integral representation theorem, Hölder regularity of compacta.

Scientific novelty of the research work is as follows:

− an explicit form of the $A(z)-$Laplacian operator is found;

− the Poisson formula for $A(z)-$harmonic functions is proved;

− the regular harmonicity of generalized harmonic functions is proved;

− the compactness property of a normal family of harmonic functions is proved;

− a smooth approximation for $A(z)-$subharmic functions is constructed;

− the Riesz representation for $A(z)-$ subharmonic functions is proved;

− a convenient criterion for $A(z)-$subharmonicity is given in terms of the $A(z)-$Laplacian;

− Hölder's sufficient condition for the regularity of compacta is given.

Implementation of the research results. Based on subharmonic functions and Helder regularity:

the Laplace-type operators for $A(z)-$harmonic functions and Poisson's formulas for $A(z)-$harmonic functions proposed by Sh.Ya. Khursanov in the dissertation work were introduced in the following directions: parallel algorithms for solving nonlinear inverse problems for mathematical models with fractional powers of elliptic operators with applications in gravimetry "(reference No. 565 dated November 13, 2020 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan). In particular, using the results of Sh.Ya. Khursanov above, an empirical formula for choosing the regularization parameter of the regularized conjugate gradient method was obtained.

The definition of generalized $A(z)-$ harmonic functions and the generalized integral representation of regular $A(z)-$ harmonic functions were used in the MRU-OT-1/2017 project “Nonlocal boundary value and inverse problems for non-classical differential and operator-differential equations”, carried out in 2018-2019 at the National University of Uzbekistan. These representations of $A(z)-$harmonic functions made it possible to investigate the qualitative properties of solutions of initial-boundary value problems for third order equations of mixed-composite type, with the Laplace operator in the main part.

Sh.Ya. Khursanov did not participate in the work of these projects.

The structure and volume of the thesis. The thesis consist of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 80 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Tishabaev Zh.K., Otaboyev T.U., Khursanov Sh.Y., Residues and argument principle for A(z)-analitic functions // Journal of mathematical sciences. 2020. Vol 245. No. 3. pp. 350-358 (3. Scopus)

2. Khursanov Sh.Y., Geometric properties of A-harmonic functions. // Bulletin of NUUz: Mathematics and Natural Sciences. 2020, Vol.3: Iss. 2. pp.236-245. (01.00.00 №8).

3. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У., Хурсанов Ш.Я., Неравенство Шварца и формула Шварца для A(z)-аналитических функций // Современные проблемы математики ки.Фунламентальные направления. 2018. том 64. №4 . ст. 637-649. (01.00.00 №45).

4. Жабборов Н.М., Хурсанов Ш.Я., Классификация изолированных особых точек A(z)-аналитических функций // Доклад академии наук Республики Узбекистан. 2017. №4. ст. 9-12.(01.00.00 №7).

5. Хурсанов Ш.Я., A-гармоник функциялар // ЎзМУ хабарлари 2017, 2/2. ст. 5-8. (01.00.00 №8).

II бўлим (2 часть; part 2)

6. Tishabayev J.K., Otaboyev T.U., Xursanov Sh.Y., Principle of the argument for A(z)-analitic functions. The second USA-Uzbekistan conference on analsys and mathematical physics.Tashkent. 2017. pp. 115-115.

7. Khursanov Sh.Y., Generalised A(z)-harmonic functions. International conference . Frontier in mathematics and computer science. 2020. pp. 53-54.

8. Khursanov Sh.Y., Generalised A-subharmonic functions. Abstracts of the international conference modern problems of geometry and topology and their applications. 2019 pp.54-56.

9. Жабборов Н.М., Хурсанов Ш.Я., Аналог теореммы Харнака в классе A-гармонических функций. Abstracts of the international conference modern problems of geometry and topology and their applications. 2019 ст.123-124.

10. Жабборов Н.М., Хурсанов Ш.Я., Квассификации изолированных особых точек A(z)-аналитических функций. Modern problems of dynamical systems and their applications. Tashkent. 2017. ст. 30-31.

11. Жабборов Н.М., Хурсанов Ш.Я., Фундаментальные решения задачи Дирихле в классе A-гармонических функций. International conference inverse and ill-posed problems. 2019. ст. 77-78.

12. Хурсанов Ш.Я., Вычет для A(z)-аналитических функций. Modern problems of dynamical systems and their applications. Tashkent. 2017. ст. 51-52.

13. Хурсанов Ш.Я., Некоторый свойство потенциали в классе A-субгармонической функции. International conference inverse and ill-posed problems. 2019. ст. 145-146

14. Khursanov Sh.Y., Bazarbayeva M.M., A-subharmonic functions. International conference. Mathematical analsys and its application to mathematical physics. Samarkand 2018. pp. 48-49

15. Khursanov Sh.Y., Bazarbayeva M.M., The estimation mass of the measure $\left(1-|A|^2\right)\Delta_A udm$ in class of A-subharmonic functions. Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики. Ташкент. 2019. ст.239-240.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат этилди: 30.12.2020. Ҳажми 2,5 босма табоқ.
Бичими 60x84 1/16. Адади 40 нусха. Буюртма 228.
М.Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети
босмахонасида чоп этилди