O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN MUHANDISLIK-QURILISH INSTITUTI
OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

Oliy matematika fanidan

O’QUV-USLUBIY MAJMUA

Namangan - 2019

Mundarija

V. AMALIY MASHG'ULOT MATERIALLARI

So’z boshi

Mazkur o’quv uslubiy majmua “Oliy matematika” fanidan , barcha ta’lim yo’nalishi uchun mo’ljallangan bo’lib, Qurilish fakul’tetining “Oliy matematika” kafedrasi professor-o’qituvchilari tomonidan ishlab chiqilgan. “Oliy matematika” fani o’quv uslubiy majmuasini yaratishda yetakchi xorijiy OTMlari o’quv dasturlariga asosiy adabiyotlar ro’yxatiga kiritilgan Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015, 2010.,M.Fogel. Calculus. Super rev. USA. 2004,Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I, II. Basic calculus. Calculus and Linear Algebra Oldenbourg Verlag Munchen 2010 adabiyotlardan foylalanildi.
“Oliy matematika” fani “5310600-Yer usti tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi” ta’lim yo’nalishi o’quv rejasiga asosan 3-semetrda 36 auditoriya soatlarda o’qitiladi. 3-semestrda Maydonlar nazariyasi elementlari, Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o’zgaruvchili funktsiyalar, Operatsion hisob, Matematik fizika tenglamalari nazariyasining
Elementlari, Matematik fizika tenglamalari nazariyasining Elementlari, Ehtimollar nazariyasi elementlari, Matematik statistika elementlari haqida ma’lumotlar berilgan, ular bilan ishlash namunaviy misollar asosida tushuntirib o’tilgan.

Barcha nomatematik bakalavr yo’nalishlar uchun Oliy matematika fani o’z tarkibiga matematikaning analitik geometriya, oliy va chiziqli algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar va ehtimollar nazariyasi bo’limlarini oladi.

Ushbu o’quv uslubiy qo’llanma beshta qismdan iborat bo’lib, ular sillabus, ishchi o’quv reja, namunaviy va ishchi o’quv dastur, modulni o’qitishda foydalaniladigan interfaol ta’lim metodlari, ma’ruza materiallari (ma’ruza matni, adabiyotlar ro’yxati, mustaqil ta’lim mavzulari, glossariy, keyslar banki, nazorat savollari va test savollari) va amaliy mashg’ulotlar materiallari (amaliy topshiriqlar, namuna, adabiyotlar ro’yxati, tarqatma materiallar, keyslar banki, test savollari)dan tashkil topgan. Ma’ruza va amaliy mashg’ulotlar materiallari semestrlarga ajratilgan holda berilgan.

I. SILLABUS

«Oliy matematika» fanining sillabusi

(2019/2020 o’quv yili)

Kafedra nomi:	**Oliy matematika**	
O’qituvchi haqida ma’lumot:	Katta o’qituvchi Ikromjon Sheraliyev Ibroximovich	Sheraliyev_127@mail.ru
Semestr va o’quv kursining davomiyligi	3- Semestr va jami soat	
O’quv soatlari xajmi:	**jami:**	124
	shuningdek:	
	ma’ruza	36

	seminar	-
	Amaliy (laboratoriya)	36
	mustaqil ta'lim	52
Yo'nalish nomi va shifri	5310600	Yer usti tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi

Kursni predmeti va mazmuni: Oliy matematika fani matematikaning analitik geometriya, oliy va chiziqli algebra, matematik analiz, differensial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi bo'limlarini o'z ichiga oladi. Unda birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar, ikkinchi tartibli sirtlar, determinantlar va matritsalar, chiziqli tenglamalar sistemasini echish, kompleks sonlar, chiziqli almashtirishlar, differensial va integral hisob, birinchi va yuqori tartibli differensial tenglamalar, hodisalar ehtimoli, ehtimolning taqsimot va zichlik funksiyalari, tasodifiy miqdorlarning xarakteristikalari va matematik staistika elementlari o'rin olgan.

Bakalavr yo'nalishlarining xususiyatiga, dars soatlari hajmiga, yo'nalish uchun zarur mavzularga ko'ra ishchi dastur tuzildi.

Oliy matematika fani deyarli barcha fanlar bilan bog'liq, ko'p fanlar uchun asos bo'lganligi uchun ulardan oldin o'tiladi.

Fanning maqsad va vazifalari

Oliy matematika fanining asosiy maqsadi talabalarga matematika fanidan nazariy bilimlarni berish, tegishli tushunchalar, tasdiqlar, matematikaga xos bo'lgan isbotlash usullarini o'rgatish, olgan nazariy bilimlarini masala va misollar yechishga tadbiq eta bilish, ularda mantiqiy fikrlash, abstrakt tafakkur kabi inson faoliyatining barcha sohalari uchun zarur bo'lgan ilmiy qobiliyatni shakllantirishdan iboratdir.

Oliy matematika fanini o'qitishning asosiy vazifasi, talabalarga ishchi dasturda belgilangan mavzularning mohiyatini aniq ochish, olgan nazariy bilimlarni amaliyotga qo'llay bilish o'rgatish va oqibat natijada ularning bo'lajak mutaxassislar uchun qanchalik kerakligini ommabop texnikaviy muammolarni matematik tilda bayon qilish, ya`ni modellarini qurish orqali tushuntirishdan iboratdir.

Kursning tarkibi va mazmuni

№	Mavzular	Ma'ruza	Amaliy	Mustaqil ish
	3-semestr			
1.	Maydonlar nazariyasi elementlari	4	4	6
2.	Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar	8	8	12
3.	Operatsion hisob	6	6	8
4.	Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari	4	4	6
5.	Ehtimollar nazariyasi elementlari	10	10	14
6.	Matematik statistika elementlari	4	4	6
	Jami:	**36**	**36**	**52**

1-2 ма'ruza. Maydonlar nazariyasi elementlari.
Skalyar maydon. Skalyar maydonning sath chiziqlari va sirtlari, yo'nalish bo'yicha hosila. Skalyar maydonning gradienti, yuksaklik chiziqlari va sirtlar. Vektor maydon, vektor chiziqlar, vektor

naychalar. Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor maydonning sirt bo'yicha oqimi, uning xossalari, fizik ma'nosi. Vektor maydonning divergentsiyasi, fizik mahnosi, Ostragradskiy teoremasi. **3-6 -ma'ruza. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar** Kompleks sonlarning moduli va argument. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakli. Muavr formulasi. Kompleks sondan ildiz chiqarish. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar, ularning aniqlanish sohasi. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya limiti va uzluksizligi. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarni differensiallash. **7-9-ma'ruza. Operatsion hisob.** Laplas almashtirilishi, uning xossalari. Originallar sinfi, tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari.Differentsial tenglamalarni va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish. **10-11-ma'ruza. Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari.** Xususiy hosilali differentsial tenglama haqida tushuncha. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differentsial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi. Cheksiz tor uchun Koshi masalasini yechish. Asosiy masalalarning qo'yilishi. Koshi masalasi, chegaraviy masalalar, aralash masalalar. **12-16-ma'ruza. Ehtimollar nazariyasi elementlari.** Ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalari. Kombinatorika elementlari. Hodisalar algebrasi. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimollik. Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Zichlik funktsiyasi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari: matematik kutilma, dispertsiya va o'rta kvadratik chetlanish. **17-18-ma'ruza. Matematik statistika elementlari.** Matematik statistika elementlari. Tanlanma. Statistik qator va uning xossalari. Poligon va gistogramma. Empirik taqsimot funktsiyasi. Tanlanmaning sonli xarakteristikalarini nuqtaviy va intervalli baho.	
Mustaqil ta'lim:	Talaba mustaqil ta'limning asosiy maqsadi – o'qituvchining rahbarligi va nazoratida muayyan o'quv ishlarini mustaqil ravishda bajarish uchun bilim va ko'nikmalarini shakllantirish va rivojlantirish. Mustaqil ishlarni bajarish jarayonida talabalar quyidagi ishlarni bajaradidar: - darslik va o'quv qo'llanmalar asosida fan mavzulari bo'yicha nazariy tayyorgarlik ko'rish, amaliy va laboratoriya mashg'ulotlariga tayyorlanish; - tarqatma materiallar bo'yicha ma'ruzalarni chuqur o'zlashtirish; - fan mazmunida ko'rsatilmagan dasturlash tillari va muhitlari bilan tanishish va qiyosiy tahlil qilish; - masofaviy ta'lim orqali dasturlash bilan turdosh fanlar bo'yicha o'quv kurslarida qatnashish va mos sertifikatlarga ega bo'lish tavsiya qilinadi. Talaba mustaqil ishini tashkil etishda quyidagi shakllardan foydalanadi: • berilgan mavzular bo'yicha axborot (referat) tayyorlash; • nazariy bilimlarni amaliyotda qo'llash; • maket, model va namunalar yaratish; • ilmiy maqola, anjumanga ma'ruza tayyorlash va h.k.

Tavsiya etilayotgan mustaqil ishlarning mavzulari

1. Maydonlar nazariyasi.
2. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar.
3. Operatsion hisob.
4. Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari.
5. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika.

Izoh: Mustaqil ta'lim soatlari hajmlaridan kelib chiqqan holda ishchi dasturda mazkur mavzular ichidan mustaqil ta'lim mavzulari shakllantiriladi.

Maslahatlar va topshiriqlarni topshirish vaqti	CHorshanba	14:00	321- aud.

Bilimlarni baholash usullari, mezonlari, va tartibi:

Baholash usullari

O'zlashtirish nazorati (3-semestr)

№	Reyting nazorat / shakli, maksimal ballari	1-JN	2-JN	1-ON	2-ON	YaN	Ballar yig'indisi
1.	Maksimal ball	20	20	15	15	30	100
2.	SHakli:	Og'zaki	Og'zaki	Yozma	Yozma	Yozma	
3.	Muddati (o'quv yili haftalarida)	8	13	9	16	19	

Baholash mezonlari

a) 86-100 ball uchun quyidagilarga javob berishi lozim:
Xulosa va qaror qabul qila oladi.
Ijodiy fikrlay oladi.
Mustaqil mushohada yuritadi.
Bilimini amalda qo'llay oladi.
Mohiyatini tushunadi.
Bilganlarini aytib bera oladi.Tasavvurga ega bo'ladi
b) 71-85 ball uchun quyidagilarga javob berishi lozim:
Mustaqil mushohada yuritadi.
Amalda qo'llay oladi.
Mohiyatini tushunadi.
Bilganlarini aytib bera oladi.Tasavvurga ega bo'ladi..
v) 55-70 ball uchun quyidagilarga javob berishi lozim:
Mohiyatini tushunadi.
Bilganlarini aytib bera oladi.Tasavvurga ega bo'ladi.
g) quyidagi hollarda 0-54 ball bilan baholanishi mumkin:
Aniq tasavvurga ega bo'lmaydi.
O'tilganlarni bilmaydi.

Axborot resurs baza NamMPI Resurs markazi kompyuter sinflari

Asosiy adabiyotlar:	1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015, 2010. 2. M.Fogel. Calculus. Super rev. USA. 2004. 3. Gerd Baumann. Mathematics for Engineers I, II. Basic calculus. Calculus and Linear Algebra Oldenbourg Verlag Munchen 2010. 4. Д.Писменнўй. «Конспект лекции по вўсшей математике», 1,2,3 часть. -М.: Айрис Пресс, 2008. 5. Соатов Ё.У. Олий математика. 1-5 қисмлар. -Т.: Ўқитувчи, 1995. 6. Т.Ж. Жўраев ва бошқалар. Олий математика асослари. 1-2-қисм. Тошкент. "Ўқитувчи"- 1995, 1998 й. 7. B.A. Abdualimov. Oliy matematika. Toshkent. "O'zbekiston", 1994. 8. Т.Ҳ. Латипов, Ш.И. Тожиев, Р. Рустамов. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. Тошкент. "Ўзбекистон", 1995. 9. F. Usmonov va boshqalar. Matematikadan qo'llanma 2-qism. "Yangi asr avlodi" 2009. 10. I. Mamajanov. "Oliy matematika". Toshkent. "O'qituvchi", 2011. .
Qo'shimcha adabiyotlar:	1.Capinski, Tomasz Zastawniak. Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering. Springer. 2. C. Peterson. Technical Mathematics 4th edition.2011. 3. John James Stewart. Calculus.Seventh editions. Metric version. 2012. Brooks/Cole, Cengage Learning. 4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 2 частях -М.: Наука, 2001. 5. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и мат-ка статистика. –М., Вўсшей школа. 2004. 6. Сборник индивидуальнўх заданий по вўсшей математике. Под обҳей редакцей. А.П.Рябушко. в 3 ч. –Минск. «Вўсшая школа». 2007. 7. П.Минорский. Сборник задач по вўсшей математике. ФИЗМАТЛИТ 2010й. 8. Сборник задач по вўсшей математике для экономистов. Учебное пособие. Под редакцией проф. В.И.Ермакова. –М.: ИНФРА-М, 2008. 9. Бугров Я.С., Никольский С.М. Вўсшая математика, Учебник для Вузов, ч.1,2,3 -М:, Дрофа, 2006, 2007, 2005. 10. Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах, том 1, Москва, издательство МЦНМО, 2010. 11. http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru 12. http:// www.a-geometry.narod.ru 13. http://allmath.ru/highermath/mathanalis/ 14. http//www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/ 1.
Normativ-huquqiy hujjatlar:	1. Karimov I.A. Yuksak malakali mutaxassislar – taraqqiyot omili. T., O'zbekiston, 1995 y. 2. Ukaz Prezidenta Respubliki Uzbekistan «O dalьneyshem razvitii kompьyuterizatsii i vnedrenii informatsionno-

	kommunikatsionnўx texnologiy».// «Narodnoe slovo», 2002 g., 1-iyunya. 3. Postanovlenie Kabineta Ministrov Respubliki Uzbekistan «O dalьneyshem razvitii kompьyuterizatsii i vnedrenii informatsionno- kommunikatsionnўx texnologiy».// «Narodnoe slovo», 2002 g., 8-iyunya.
Ilmiy jurnallar:	1. Science of Computer Programming 2. Scientific Programming
Davriy nashrlar:	1. Programming and Computer Software
Statistik nashrlar:	**-**
Internet resurslar:	. http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru http:// www.a-geometry.narod.ru http://allmath.ru/highermath/mathanalis/ http//www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Рўйхатга олинди: Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

№ БД – 5310200 – 2.01 2017 йил "24" 07

2017 йил "18" 08

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

ФАН ДАСТУРИ

Билим сохаси: 100 000 - Гуманитар соха;
300 000 - Ишлаб чиқариш-техник соха;
600 000 - Хизматлар сохаси.

Таълим сохаси:
110 000 - Педагогика;
150 000 – Санъат;
310 000 - Муҳандислик иши;
320 000 – Ишлаб чиқариш технологиялари;
330 000 – Компьютер технологиялари ва информатика;
340 000 – Архитектура ва қурилиш;
350 000 – Алоқа ва ахборотлаштириш, телекоммуникация технологиялари;
543 0100 – Қишлоқ хўжалигини механизациялаш;
543 0200 – Қишлоқ хўжалигини электрлаштириш ва автоматлаштириш;
610 000 – Хизмат кўрсатиш соҳаси;
620 000 – Транспорт;
630 000 – Атроф муҳит муҳофазаси;
640 000 – Хаётий фаолият хавфсизлиги.

Таълим йўналиши: - Таълим сохалари таркибидаги барча таълим йўналишлари

Тошкент – 2017

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2017 йил "24" 08 даги "603" -сонли буйругининг 2 -иловаси билан фан дастури рўйхати тасдиқланган.

Фан дастури Олий ва ўрта махсус, касб-ҳунар таълими йўналишлари бўйича Ўқув-услубий бирлашмалар фаолиятини Мувофиқлаштирувчи Кенгашининг 2017 йил "18" 08 даги 4 - сонли баённомаси билан маъқулланган.

Фан дастури Тошкент давлат техника университетида ишлаб чиқилди.

Тузувчилар:

М.У.Ғафуров –ТАЙЛҚЭИ «Олий математика ва информацион технологиялар» кафедраси мудири, проф. ф.-м.ф.д.;

А.Б.Ахмедов – ТошДТУ «Олий математика» кафедраси профессори, ф.-м.ф.д.;

О. Эгамбердиев – ЎзФА, В.И. Романовский номидаги Математика институти илмий котиби, ф.-м.ф.н.;

Ф.М.Зокиров –ТАЙЛҚЭИ «Олий математика ва информацион технологиялар» кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.;

Ш.Т.Пирматов – ТошДТУ «Олий математика» кафедраси мудири, ф.-м.ф.н.

Тақризчилар:

Ш. Хуррамов – ТАКИ, «Математика ва табиий фанлар» кафедраси мудири, доцент, ф.-м.ф.н.;

А. Абдукаримов – ТошДТУ, «Олий математика» кафедраси доценти, ф.-м.ф.н.

Ж. Адашов – ЎзФА, В.И. Романовский номидаги Математика институти катта илмий ходими, ф.-м.ф.н.

Фан дастури Тошкент давлат техника университети Кенгашида кўриб чиқилган ва тавсия қилинган (2017 йил "11" 07 даги 12 - сонли баённома).

1. Фаннинг олий таълимдаги ўрни хамда максади ва вазифалари

Иктисодий ва техникавий кўрсатгичлар, улар устида олиб борилаётган кузатув натижаларини бир тизимда шакллантириш, уларга таъсир этувчи омилларнинг ўзаро боғлиқлигини аниқлашда замонавий математик усуллар ва моделлардан фойдаланишнинг ўрни бекиёсдир. Шунинг учун хам, замонавий кадрлар тайёрлаш борасида мамлакатимизнинг ОЎЮдаги ўкув жараёнини ташкил этишда амалий ахамиятга эга бўлган олий математика фанига - алохида эътибор берилмокда.

Ушбу дастур давлатимизнинг техник ОЎЮдаги юкорида кўрсатилган таълим йўналишлари бўйича таълим олаётган бакалаврлар хамда магистрлар учун мўлжалланган бўлиб, у табиий жараёнларга математикани тадбик килувчи илмий изланувчилар учун хам фойдалидир.

Фанни ўқитишдан максад:

- талабаларнинг интелектини ривожлантириш, мантиқий ва алгоритмик фикрлаш қобилиятини шакллантириш;
- талабаларга мустахкам фундаментал билим бериш, олган билимларини замонавий амалий масалаларини ечишга тадбик килишга ўргатиш;
- тажриба ўтказиш йўли билан олинган натижаларнинг, турли табиий жараёнларнинг математик моделларини тузишга ва уларни тахлил қилишга, қилинган тахлиллар асосида тўғри хулосалар чиқариш оркали макбул ечимлар қабул килишга ўргатиш;
- талабаларда олий математика фани бўйича ДТС талабларига тўлиқ мос келадиган билим ва кўникмаларни шакллантириш.

Фанни вазифаси - турдош ва мутахассислик кафедралари билан келишилган холда дастур асосида тузилган ишчи ўкув хужжатлари ёрдамида талабаларга (уларни билим савиясини инобатга олган холда) математик услубларнинг моҳиятини ва уларнинг замонавий компьютер дастурларидаги иштирокларини тўлиқ ва оммабоп тарзда тушунтиришдан иборат.

"Олий математика" ўкув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга ошириладиган масалалар доирасида талаба:

- фан дастури бўйича чуқур амалий ва назарий билимларга эга бўлиши;
- ўзлаштирилган математик тушунчаларни, тасдиқларни геометрик нуктаи назардан тасаввур қила олишни;
- мутахассислиги бўйича билимларни пухта эгаллаши, мавзуларда учрайдиган математик тушунчаларни аниқ тасаввур қила олиши, энг содда техникавий жараёнларни математик "тил"га ўгира олишни;
- энг содда амалий жараёнларнинг моделларини тахлил қилиш учун керакли математик усулларни танлай олишни, тахлил асосида амалий хулосалар чиқара олишни;

- кузатув натижаларига статистик ишлов бера олишни, номаълум кўрсатгичлар учун статистик бахоларни хар хил усуллар ёрдамида кура олишни;
- статистик гипотезалар хакида амалий тушунчага эга бўлиши, уларни текшириш боскичларни билиши ва х.к. талаб килинади.

Ушбу дастурдан фойдаланиб, фаннинг асосий бўлимларини ўз ичига жамлаганлигини эътиборга олиб, йўналишлар учун ажратилган соатга караб ўзларида мавжуд таълим йўналишларига мослаштириш мумкин.

2. Асосий назарий кисм

2.1. Маъруза машғулотлари.

1-модул. Чизикли алгебра.

1-мавзу. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар. Детерминантни хисоблаш усуллари. Детерминантнинг асосий хоссалари. Минорлар ва алгебраик тўлдирувчилар. n- тартибли детерминант хакида тушунча.
2-мавзу. Матрица тушунчаси. Матрицанинг асосий турлари. Матрица устида амаллар. Тескари матрица ва уни тузиш. Матрицанинг ранги.
3-мавзу. Чизикли тенгламалар системаси ва уларни ечиш усуллари. Кронеккер-Капелли теоремаси.Чизикли алгебраик тенгламаларни ечишда дастурлар мажмуасидан фойдаланиш.

2-модул. Векторлар алгебраси.

4-мавзу. Векторлар ва улар устида чизикли амаллар. Векторнинг ўкдаги проекцияси. Векторнинг узунлиги. Йўналтирувчи косинуслар. Векторнинг чизикли эрклилиги. Векторни базис векторлар бўйича ёйиш.
5-мавзу. Векторларни скаляр, вектор ва аралаш кўпайтмалари. Уларнинг хоссалари. Векторлар орасидаги бурчак. Икки векторнинг коллинеарлик ва компланарлик шартлари.

3-модул. Текисликда аналитик геометрия.

6-мавзу. Текисликда тўгри чизик тенгламалари ва уларнинг турлари. Тўгри чизикларнинг ўзаро жойлашиши. Икки тўгри чизик орасидаги бурчак.
7-мавзу. Иккинчи тартибли эгри чизиклар. Айлана, эллипс, гипербола, парабола.

4-модул. Фазода аналитик геометрия.

8-мавзу. Фазода текисликнинг, вектор, умумий, нормал тенгламалари. Текисликнинг ўзаро жойлашиши. Икки текислик орасидаги бурчак.

Текисликнинг ўзаро параллелик ва перпендикулярлик шартлари.Текисликлар дастаси.

9-мавзу. Фазода тўғри чизиқнинг вектор, каноник, параметрик ва умумий тенгламалари. Тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиши. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак, параллеллик ва перпендикулярлик шартлари.Тугри чизиқ билан текисликнинг ўзаро жойлашиши.

10-мавзу. Сиртнинг фазодаги тенгламаси.Иккинчи тартибли сиртлар.

5-модул. Математик анализга кириш. Бир ўзгарувчили функциянинг дифференциал хисоби.

11-мавзу. Ўзгарувчи ва ўзгармас миқдорлар. Тўпламлар ва улар устида амаллар. Мантиқий амаллар. Кетма-кетликнинг лимити. Функция тушунчаси. Функциянинг лимити.

12-мавзу. Лимтилар ҳақида асосий теоремалар. Бир томонлама лимитлар. Чексиз кичик ва чексиз катта миқдорлар. Биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлар.

13-мавзу. Функциянинг узлуксизлиги. Функциянинг узилиш нуқталари ва уларнинг турлари. Ҳосиланинг таърифи, унинг геометрик ва механик маъноси. Функциянинг дифференциалланувчанлиги.

14-мавзу. Дифференциаллашнинг асосий қоидалари.Элементар функцияларнинг ҳосилалари. Ошкормас ва параметрик кўринишда берилган функциянинг ҳосилалари. Гиперболик функцияларнинг ҳосилалари. Ҳосила жадвали. Мураккаб функциянинг ҳосиласи.

15-мавзу. Юқори тартибли ҳосилалар. Иккинчи тартибли ҳосиланинг механик маъноси. Ҳосиланинг тадбиқлари. Функциянинг дифференциали. Юқори тартибли дифференциаллар. Дифференциаллардан тақрибий ҳисоблашларда фойдаланиш.

16-мавзу. Дифференциалланувчи функциялар ҳақида баъзи бир теоремалар. Эгри чизиққа уринма ва нормал тенгламаси. Лопитал қоидаси.Тейлор ва Маклорен формулалари. e^x ,$sinx$ функцияларни Маклорен формуласи бўйича ёйиш.

17-мавзу. Функциянинг монотонлиги, критик ва экстремум нуқталари. Функция графигининг ботиқлиги ва қавариқлиги, бурилиш нуқталари, асимтоталари. Функцияни тўла текшириш. Дифференциал ҳисобнинг амалий масалаларда қўлланилиши.

8-модул. Кўп ўзгарувчили функциялар назарияси.

18-мавзу. Кўп ўзгарувчили функциянинг таърифи, аниқланиш ва ўзгариш соҳаси, лимити, узлуксизлиги ва хусусий ҳосилалари. Тўла дифференциал.

19-мавзу. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар. Кўп ўзгарувчили мураккаб функциянинг хусусий ва тўла дифференциали. Юқори тартибли дифференциаллар. Ошкормас функцияни дифференциаллаш.

20-мавзу. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламалри. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумлари. Шартли экстремум.

9-модул. Аникмас интеграл.

21-мавзу. Бошлангич функция ва аникмас интегралнинг таърифи, хоссалари. Аникмас интеграл жадвали. Интеграллаш коидалари: ўзгарувчини алмаштириш ва булаклаб интеграллаш.
22-мавзу. Энг содда касрларни интеграллаш. Рационал касрларни содда касрларга ажратиш. Рационал функцияларни интеграллаш алгоритми.
23-мавзу. Иррационал функцияларни интеграллаш.
24-мавзу. Тригонометрик функциялар катнашган баъзи интегралларни интеграллаш.

10-модул. Аник интеграл.

25-мавзу. Аник интегралга келтирилувчи масалалар. Аник интегралнинг таърифи ва унинг асосий хоссалари. Нютон-Лейбниц формуласи. Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Бўлаклаб интеграллаш.
26-мавзу. Хосмас интеграллар. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар. Чегараланмаган функцияларнинг хосмас итегралари. Хосмас интегралларнинг якинлашиш аломатлари.
27-мавзу. Аник интегрални такрибий хисоблаш формулалари. Аниқ интегрални геометрия ва механикага татбиклари. Аниқ интегралнинг мухандислик масалаларини ечишга татбики.

11-модул. Оддий дифференциал тенгламалар.

28-мавзу. Дифференциал тенглама тушунчасига олиб келадиган масалалар. Дифференциал тенгламалар назариясининг асосий тушунчалари. n-тартибли дифференциал тенглама учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги хакидаги теорема. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган дифференциал тенгламалар.
29-мавзу. Бир жинсли дифференциал тенгламалар. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар. Бернулли тенгламаси.Тўла дифференциал тенглама.

12-модул. Юкори тартибли дифференциал тенгламалар.

30-мавзу. Юкори тартибли дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги. Тартиби пасайтириладиган дифференциал тенгламалар.
31-мавзу. Чизикли бир жинсли дифференциал тенгламалар. Ўзгармас коэффициентли юкори тартибли бир жинсли тенгламалар.

6

32-мавзу. Ўзгармас коэффициентли юқори тартибли бир жинсли бўлмаган, ўнг томони махсус кўринишга эга бўлган дифференциал тенгламалар.
33-мавзу. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси. Нормал системани ечишда номаълумларни йўқотиш усули.

13-модул. Сонли қаторлар.

34-мавзу. Сонли қаторнинг асосий тушунчалари. Қатор яқинлашишининг зарурий шартлари. Яқинлашувчи қаторлар ва уларнинг хоссалари. Гармоник қаторлар.
35-мавзу. Мусбат ҳадли қаторларни таққослаш теоремалари. Мусбат ҳадли сонли қаторлар яқинлашишининг етарли шартлари: Даламбер аломати, Кошининг радикал ва интеграл аломатлари.
36-мавзу. Ишораси алмашинувчи ва ўзгарувчан ишорали сонли қаторлар. Лейбниц теоремаси. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар.

14-модул. Функционал қаторлар.

37-мавзу. Функционал қаторлар. Нуктада яқинлашувчи функционал қаторлар. Функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳаси. Текис яқинлашиш. Кучайтирилган қаторлар. Қатор ҳадлари йиғиндисининг узлуксизлиги.
38-мавзу. Даражали қаторлар. Абель теоремаси. Яқинлашиш радиуси. Яқинлашувчи даражали қаторларнинг хоссалари. Қаторларни дифференциаллаш ва интеграллаш.
39-мавзу. Функцияларни Тейлор ва Маклорен қаторларига ёйиш. Биномиал қатор. Асосий элементар функцияларни қаторларга ёйиш. Қаторларни тақрибий ҳисоблашларга қўллаш, дифференсиал тенгламаларни қаторлар ёрдамида ечиш.
40-мавзу. Фурье қатори ва Фурье коэффициентлари. Фуре қаторининг яқинлашиши. Дирихле теоремаси.
41-мавзу. Тоқ ва жуфт функцияларнинг Фурье қатори. Даври $2l$ га тенг бўлган функцияларни $(-l,l)$ оралиғида Фурье қаторига ёйиш.

15-модул. Каррали интеграллар ва уларнинг тадбиқлари.

42-мавзу. Икки ўлчовли интеграл, унинг хоссалари, геометрик ва механик маъноси. Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш. Икки каррали интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш.
43-мавзу. Икки ўлчовли интегрални қутб координаталар системасида ҳисоблаш. Икки ўлчовли интегралларнинг геометрия ва механикага тадбиқи.
44-мавзу. Уч ўлчовли интеграл ва унинг асосий хоссалари. Уч каррали интегрални ҳисоблаш. Уч ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш, уч ўлчовли интегралнинг тадбиқлари.

16-модул. Эгри чизикли интеграллар ва уларнинг татбиклари.

45-мавзу. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интегралларнинг таърифи, уларнинг хоссалари ва уларни хисоблаш.
46-мавзу. Биринчи ва Иккинчи тур эгри чизикли интеграллар орасидаги богланиш. Грин формуласи. Эгри чизикли интеграл ёрдамида юзани хисоблаш.
47-мавзу. Эгри чизикли интегралларнинг интеграллаш йўлига боглик бўлмаслиги шарти. Эгри чизикли интегралларни геометрия ва механика масалаларини ечишга тадбиклари.

17-модул. Сирт интеграллари ва уларнинг тадбиклари.

48-мавзу. Биринчи тур сирт интеграли таърифи, хоссалари ва уни ҳисоблаш. Стокс формуласи.
49-мавзу. Иккинчи тур сирт интеграли хоссалари ва ҳисоблаш. Биринчи ва иккинчи тур сирт интеграллари орасидаги богланиш. Сирт интегралларини тадбиклари.

18-модул. Майдонлар назарияси элементлари.

50-мавзу. Скаляр майдон. Скаляр майдоннинг сатҳ чизиклари ва сиртлари, йўналиш бўйича хосила. Скаляр майдоннинг градиенти, юксаклик чизиклари ва сиртлари.
51-мавзу. Вектор майдон, вектор чизиклар, вектор найчалар. Ориентирланган ва ориентирланмаган сиртлар. Вектор майдоннинг сирт бўйича оқими, унинг хоссалари, физик маъноси.
52-мавзу. Вектор майдоннинг дивергенцияси, физик маъноси, Остраградский теорамаси.
53-мавзу. Соленоидал майдон. Вектор майдон уюрмаси (ротори) ва унинг хоссалари. Вектор майдоннинг циркуляцияси. Стокс теоремаси.
54-мавзу. Потенциал майдон. Потенциал майдонда эгри чизикли интегрални ҳисоблаш. Гамилтон (Набла) оператори. Лаплас оператори. Гармоник майдон.

19-модул. Комплекс сонлар ва улар устида амаллар. Комплекс ўзгарувчили функциялар.

55-мавзу. Комплекс сонларнинг модули ва аргумент. Комплекс сонлар устида амалллар. Комплекс сонинг тригонометрик ва кўрсаткичли шакли. Муавр формуласи. Комплекс сондан илдиз чикариш.
56-мавзу. Комплекс ўзгарувчили функциялар, уларнинг аникланиш соҳаси. Комплекс ўзгарувчили функция лимити ва узлуксизлиги. Комплекс ўзгарувчили функцияларни дифференциаллаш.

57-мавзу. Коши-Риман шарти. Комплекс ўзгарувчили функцияларнинг интеграли ва уни ҳисоблаш. Кошининг асосий теоремаси. Аналитик функциялар. Гармоник функциялар. Кошининг интеграл формуласи.
58-мавзу. Комплекс ҳадли каторлар. Тейлор катори. Лоран катори. Яккаланган махсус нуқталар ва уларнинг классификатцияси.
59-мавзу. Чегирмалар. Чегирмалар ҳақидаги Коши теоремаси. Чегирмаларни интегралларни ҳисоблашга татбики.

20-модул. Операцион ҳисоб.

60-мавзу. Лаплас алмаштирилиши, унинг хоссалари. Оригиналлар синфи, тасвирлар синфи. Операцион ҳисобнинг асосий теоремалари.
61-мавзу. Оригинални тасвир бўйича тиклаш усуллари.
62-мавзу. Дифференциал тенгламаларни ва тенгламалар системасини операцион хисоб ёрдамида ечиш.

21-модул. Математик физика тенгламалари назариясининг элементлари.

63-мавзу. Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама ҳақида тушунча. Иккинчи тартибли чизикли хусусий хосилали дифференциал тенгламалар ва уларнинг классификацияси. Чексиз тор учун Коши масаласини ечиш. Асосий масалаларнинг қўйилиши: Коши масаласи, чегаравий масалалар, аралаш масалалар.

64-мавзу. Тор тебраниш масалалари, иссиклик таркалиш тенгламаси учун Коши масаласи. Мэтематик физика тенгламаларини ечишнинг тўр усули.

25-модул. Эхтимоллар назарияси элементлари.

65-мавзу. Эхтимоллар назарияси фанининг асосий тушунчалари. Комбинаторика элементлари. Ҳодисалар алгебраси. Эхтимолнинг классик таърифи. Геометрик эхтимоллик.
66-мавзу. Шартли эхтимол. Тўла эхтимол. Бейес формуласи. Ҳодисаларнинг боғликмаслиги.
67-мавзу. Тажрибалар кетма-кетлиги. Бернулли схемаси. Пуассон теоремаси; Муавр-Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари. Бернулли схемасининг энг эхтимолли сони.
68-мавзу. Тасодифий миқдор тушунчаси. Дискрет тасодифий миқдор ва унинг тақсимот конуни. Узлуксиз тасодифий миқдор. Зичлик функцияси. Улуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси.
69-мавзу. Тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари: математик кутилма, дисперция ва ўрта квадратик четланиш.

9

70-мавзу. Дискрет тасодифий миқдорга мисоллар. Гипергеометрик, биномиал, Пуассон ва геометрик тақсимотлар. Нормал тақсимланган тасодифий миқдорлар.

26-модул. Математик статистика элементлари.

71-мавзу. Математик статистика элементлари. Танланма. Статистик қатор ва унинг хоссалари. Полигон ва гистограмма. Эмпирик тақсимот функцияси. Танланманинг сонли характеристикалари. Танланманинг характеристикаларини нуқтавий ва интервалли баҳолаш.

72-мавзу. Корреляцион-регрессион таҳлил элементлари. Корреляция тушунчаси ва унинг хоссалари. Регрессиянинг ҳар хил кўринишдаги тенгламаларини топишда энг кичик квадратлар усулининг моҳияти ва унинг ҳар хил модификациялари. Корреляцион-регрессион таҳлилнинг техникавий, иқтисодий масалалардаги аҳамияти.

2.1. Амалий машғулотлар бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Амалий машғулотларини ўтказишда қуйидаги дидактик тамойилларга амал қилинади:

амалий машғулотларининг мақсадини аниқ белгилаб олиш;

ўқитувчининг инновацион педагогик фаолияти бўйича билимларини қўллаган ҳолда талабаларда дарсга қизиқиш уйғотиш;

талабада натижани мустақил равишда қўлга киритиш имкониятини таъминлаш;

талабани назарий-методик жиҳатдан тайёрлаш;

амалий машғулотлар нафақат аниқ мавзу бўйича билимларни мустаҳкамлаш, балки талабаларда назарий ва амалий билим ва кўникмаларни шакллантириш ҳамдир.

Амалий машғулотларининг тахминий рўйхати

1. Иккинчи ва учинчи тартибли детерманантларни ҳисоблаш усуллари. Детерминантларнинг хоссалари. Минорлар ва алгебраик тўлдирувчилари.
2. Матрицалар устида амаллар. Тескари матрицани топиш. Матрицани рангини ҳисоблаш.
3. Чизиқли тенгламалар системасини ечишнинг Крамер, Гаусс ва матрицалар усули. Чизиқли тенгламалар системасининг турлари, ечимга эга бўлиши ва ҳ.к.
4. Векторлар устида чизиқли амаллар. Векторни ўқдаги проекцияси. Векторни базис бўйича ёйиш. Вектор узунлиги. Векторни сонга кўпайтириш. Векторнинг йўналтирувчи косинуслари.

5. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси. Икки вектор орасидаги бурчак. Икки векторнинг параллелик ва педпендикуляр шартлари. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси.

6. Декарт ва кутб координаталар системалари. Текисликда тўғри чизик тенгламалари. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Параллелик ва перпендикулярлик шартлари. Бир ва икки нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламалари.

7. Иккинчи тартибли эгри чизиклар. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола.

8. Фазода текислик тенгламаларига доир машклар. Фазода туғри чизик тенгламаларига доир машклар.

9. Тўғри чизиқ ва текислик орасидаги муносабатлар. Иккинчи тартибли сиртларга доир машклар.

10. Функция тушунчаси. Функциянинг аникланиш ва ўзгариш соҳаси. Жуфт ва токлиги, даврийлиги. Кетма-кетликнинг лимити, функциянинг лимити, бир томонлама лимитлар.

11. Ажойиб лимитлар. Лимитларга доир аралаш мисоллар.

12. Функциянинг узлуксизлиги. Функциянинг хосиласи. Элементар функцияларнинг ҳосилалари.

13. Мураккаб функцияни хосиласи. Ошкормас ва параметрик функцияни хосиласи. Функцияни дифференциаллаш.

14. Юкори тартибли хосила ва дифференциал. Аникмасликларни Лопитал коидаси ёрдамида очиш.

15. Функциянинг ўсиши ва камайиши. Функциянинг экстремумлари. Тейлор ва Маклорен формулаларига доир машклар.

16. Кесмада узлуксиз функциянинг энг катта ва энг кичик қийматлари. Функция графигининг қавариклиги ва ботиклиги. Бурилиш нукталари. Асимтоталари. Функцияни тўла текшириш.

17. Экстремумлар назариясининг геометрия, механика ва бошқа соҳаларга доир масалаларига татбики.

18. Кўп ўзгарувчили функция, унинг аникланиш соҳаси, лимити ва узлуксизлиги. Хусусий хосилалар. Тўла дифференциал.

19. Кўп ўзгарувчили мураккаб функциянинг хосиласи. Юкори тартибли хусусий хосилалар ва тўла дифференциаллар.

20. Икки ўзгарувчили функциянинг экстремуми. Сиртга ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаси.

21. Аникмас интеграл. Интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Бўлаклаб интеграллаш.

22. Квадрат учхад катнашган баъзи бир функцияларни интеграллаш. Энг содда рационал касрларни интеграллаш.

23. Рационал функцияларни интеграллаш. Баъзи тригонометрик функциялар синфини интеграллаш.

24. Иррационал функцияларни интеграллаш.

25. Аник интеграл таърифи ва унинг хоссалари. Аник интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Аник интегралда бўлаклаб интеграллаш.

26. Хосмас интеграллар.

27. Аниқ интегралнинг геометрик ва механика масалаларига тадбиқлари.
28. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилари ажралган ва ажраладиган дифференциал тенгламалар.
29. Бир жинсли дифференциал тенгламалар. Бир жинсли дифференциал тенгламага келтириладиган тенгламалар. Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар. Бернулли тенгламаси.
30. Тўла дифференциалли тенглама. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар. Тартиби пасайтириладиган дифференциал тенгламалар.
31. Ўзгармас коэффициентли юқори тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламалар.
32. Ўзгармас коэффициентли юқори тартибли чизиқли бир жинсли бўлмаган, ўнг томони махсус кўринишга эга бўлган дифференциал тенгламалар.
33. Дифференциал тенгламалар системаси. Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари.
34. Мусбат ҳадли сонли қаторлар. Қатор йиғиндиси. Қатор яқинлашишининг зарурий шартлари. Мусбат ҳадли сонли қаторларни таққослаш.
35. Мусбат ҳадли сонли қаторлар яқинлашишининг йетарли шартлари: Даламбер аломати, Кошининг радикал ва интеграл аломатлари. Ишораси алмашинувчи ва ўзгарувчан ишорали сонли қаторлар. Лейбниц теоремаси.
36. Абсолют ва шартли яқинлашиш. Функционал қаторларнинг яқинлашиш соҳаси.
37. Даражали қаторлар. Яқинлашиш радиуси. Қаторларни дифференциаллаш ва интеграллаш.
38. Функцияларни Тейлор ва Маклорен қаторларига ёйиш. Биномиал қатор. Асосий элементар функцияларни қаторларга ёйиш.
39. Қаторларни тақрибий ҳисоблашларга қўллаш, дифференциал тенгламаларни қаторлар ёрдамида ечиш.
40. Фурье қатори ва Фурье коэффициентлари. Фурье қаторининг яқинлашиши.
41. Тоқ ва жуфт функцияларнинг Фурье қатори. Даври 2π га тенг бўлган функцияларни $(-\pi;\pi)$ оралиғида Фурье қаторига ёйиш.
42. Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш, геометрик ва механик маъноси.
43. Икки ўлчовли интегралларнинг геометрия ва механикага тадбиқларига доир машқлар.
44. Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш.
45. Уч ўлчовли интегралнинг тадбиқларига доир машқлар.
46. Биринчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблашга доир машқлар. Эгри чизиқли интеграл ёрдамида юзани ҳисоблаш.
47. Иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблашга доир машқлар. Грин формуласи. Эгри чизиқли интегрални тадбиқига доир машқлар.
48. Сирт интеграллари ва уларни ҳисоблашга доир машқлар.
49. Скаляр ва вектор майдонлар. Йўналиш бўйича ҳосила.Градиент.
50. Юксаклик чизиқлари ва сиртлар Ориентирланган ва ориентирланмаган сиртлар. Вектор чизиқлар.

51. Вектор майдоннинг дивергенцияси. Остраградский теорамасининг тадбиклари.
52. Вектор майдоннинг циркуляцияси. Соленоидал майдонлар. Стокс теоремаси тадбиклари.
53. Вектор майдоннинг ротори. Потенциал майдон. Потенциал майдонда эгри чизикли интегрални хисоблаш
54. Гамильтон (Набла) оператори. Лаплас оператори. Гармоник майдон.
55. Комплекс сонлар ва улар устида амаллар. Комплекс ўзгарувчили функциялар.
56. Комплекс ўзгарувчили функциянинг лимити, узлуксизлиги. Комплекс ўзгарувчили функциянинг хосиласи. Аналитик функциялар. Гармоник функциялар.
57. Комплекс ўзгарувчили функцияларнинг интеграли. Ёпиқ контур бўйича олинган интеграл. Кошининг интеграл формуласи. Юқори тартибли хосила.
58. Комплекс ҳадли каторлар. Лоран катори. Яккаланган махсус нукталар. Функциянинг ноллари.
59. Функциянинг чегирмалари. Чегирмалар хакидаги Коши теоремаси. Коши теоремасини чегирмаларнинг интегралларини хисоблашларда қўлланилиши.
60. Лаплас алмаштириши, унинг хоссалари. Оригиналлар синфи. Тасвирлар синфи. Операцион хисобнинг асосий теоремалари.
61. Операцион хисобнинг асосий теоремалари. Оригинални тасвир бўйича тиклаш усуллари.
62. Дифференциал тенгламалар ва тенгламалар системасини операцион хисоб усуллари ёрдамида ечиш.
63. Иккинчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенгламаларнинг каноник формалари ва тавсифи. Характеристик тенгламаси. Коши масаласининг қўйилиши.
64. Бир ўлчовли тўлкин тенгламалари учун Коши масаласи. Даламбер формуласи.
65. Эҳтимоллар назариясининг предмети. Асосий тушунчалар. Эхтимолликнинг классик таърифи. Нисбий частота. Эхтимолнинг геометрик таърифи.
66. Эҳтимолликларни кўшиш. Ҳодисаларнинг тўла гуруҳи. Эхтимолликларни кўпайтириш. Тўла эхтимол. Бейес формуласи.
67. Бернулли формуласи. Пуассон формуласи. Лапласнинг локал ва интеграл теоремалари.
68. Эҳтимолларнинг тақсимот функцияси. Дискрет тасодифий миқдорлар. Бернулли тақсимоти. Пуассон тақсимоти. Геометрик ва гипергеометрик тақсимотлар.
69. Эҳтимоллар тақсимотинг зичлик функцияси. Абсалют узлуксиз тасодифий миқдорлар. Текис тақсимот. Нормал ва кўрсаткичли тақсимотлар.
70. Тасодифий миқдорларнинг сонли характеристикалари. Математик кутилиш, дисперсия, ўрта квадратик четланиш.

71. Математик статистика элементлари. Эмпирик тақсимот функцияси. Танланма характеристикалари ва уларнинг тақсимот қонунлари. Танланма тақсимотлари параметрларининг нуқтавий ва интегралли баҳолари.
72. Гипотезаларни статистик текшириш. Стюдент мезони ва унинг тақсимот билан боғлиқлиги.

2.3. Лаборатория ишларини ташкил этиш бўйича кўрсатмалар

Лаборатория ишлари ўқув режада кўрсатилмаган.

2.4. Ҳисоб-график ишларини ташкил этиш бўйича услубий кўрсатмалар.

Ҳисоб-график ишларини бажариш талабада олий математика фанини мустақил ўрганишни шакллантиради ва шунинг билан бирга унда математика ва бошқа фанларнинг ўқув адабиётларидан фойдаланиш учун замин яратади. Ҳисоб-график ишларни бажариш жараёнида математиканинг муҳим жиҳатлари ва унинг техникадаги ўрнининг долзарблигини тушуниб боришини таъминлайди.

Ҳисоб-график ишларида тасдиқланган вариантлар асосида талабага семестр давомида ўтилган мавзулар бўйича мисоллар тўплами берилади.

Ҳар бир ҳисоб-график иш барча мавзулар бўйича математиканинг тадбиқий жиҳатларини очиб бериши керак. Ҳар бир семестр давомида талабалар 2 та ҳисоб-график ишлари бажаради.

Ҳисоб-график ишларининг тахминий рўйхати

1. Чизиқли алгебра ва аналитик геометрия.
2. Функциянинг лимити, ҳосиласи ва дифференциали. Функцияни ҳосила ёрдамида тўла текшириш.
3. Аниқмас ва аниқ интеграллар.
4. Дифференциал тенгламалар.
5. Сонли ва функционал қаторлар.
6. Каррали ва эгри чизиқли интеграллар.
7. Комплекс ўзгарувчили функциялар.
8. Операцион ҳисоб.
9. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика.

2.5. Мустақил ишлар бўйича кўрсатма ва тавсиялар

Мустақил таълимни ташкил этишда муайян фаннинг хусусиятларини ҳисобга олган ҳолда қуйидаги шакллардан фойдаланиш тавсия этилади ва жорий назорат сифатида баҳоланади:

1) мавзулар бўйича конспект (реферат, тақдимот) **тайёрлаш.** Назарий материални пухта ўзлаштиришга ёрдам берувчи бундай усул ўқув материалига диккатни кўпрок жалб этишга ёрдам беради. Талаба конспекти турли назорат ишларига тайёргарлик ишларини осонлаштиради, вактни тежайди;

2) ўкитиш ва назорат килишнинг автоматлаштирилган тизимлари билан ишлаш. Олган билимларини ўзлаштиришлари, турли назорат ишларига тайёргарлик кўришлари учун тавсия этилган электрон манбалар, инновацион дарс лойиҳаси намуналари, ўз-ўзини назорат учун тест топшириклари в.б;

3) фан бўйича кўшимча адабиётлар билан ишлаш. Мустакил ўрганиш учун берилган мавзулар бўйича талабалар тавсия этилган асосий адабиётлардан ташкари кўшимча ўкув, илмий адабиётлардан фойдаланадилар. Бунда рус ва хорижий тиллардаги адабиётлардан фойдаланиш рағбатлантирилади;

4) ИНТЕРНЕТ тармоғидан фойдаланиш. Фан мавзуларини ўзлаштириш, курс иши, битирув малакавий ишларини ёзишда мавзу бўйича ИНТЕРНЕТ манбаларини топиш, улар билан ишлаш назорат турларининг барчасида кўшимча рейтинг баллари билан рағбатлантирилади;

5) мавзуга оид масалалар, кейс-стадилар ва ўкув лойиҳаларини ишлаб чикиш ва иштирок этиш;

6) амалиёт турларига асосан материал йиғиш, амалиётдаги мавжуд муаммоларнинг ечимини топиш, ҳисоботлар тайёрлаш;

7) илмий семинар ва анжуманларга тезис ва маколалар тайёрлаш ва иштирок этиш;

8) мавжуд лаборатория ишларини такомиллаштириш, масофавий (дистанцион) таълим асосида машғулотларни ташкил этиш бўйича методик кўрсатмалар тайёрлаш ва х.к.

Янги билимларни мустақил ўрганиш, керакли маълумотларни излаш ва уларни топиш йўлларини аниклаш, Интернет тармокларидан фойдаланиб маълумотлар тўплаш ва илмий изланишлар олиб бориш, илмий тўгарак доирасида ёки мустакил равишда илмий манбалардан фойдаланиб илмий мақола (тезис) ва маърузалар тайёрлаш кабилар талабаларнинг дарсда олган билимларини чукурлаштиради, уларнинг мустакил фикрлаш ва ижодий кобилиятини ривожлантиради. Вазифаларини текшириш ва баҳолаш амалий машғулот олиб борувчи ўкитувчи томонидан, конспектларни ва мавзуни ўзлаштиришни маъруза дарсларини олиб борувчи ўкитувчи томонидан ҳар дарсда амалга оширилади.

Мустакил ишни ташкил этиш бўйича услубий кўрсатма ва тавсиялар, кейс-стади, вазиятли масалалар тўплами ишлаб чикилади. Маъруза мавзулари бўйича амалий топширик, кейс-стадилар ечиш услуби ва мустакил ишлаш учун вазифалар белгиланади.

Тавсия этиладиган мустақил таълим мавзулари

1. Декарт ва кутб координаталари орасидаги боғланиш. Координаталарни алмаштириш. Цилиндрик ва сферик координаталар.
2. Конуссимон сиртлар. Сфера. Айланиш сиртлар. Иккинчи тартибли сиртларга доир машқлар.
3. Юқори тартибли хосилалар. Ошкормас ва параметрик кўринишда берилган функцияларнинг юқори тартибли хосилалари.
4. Функцияларни Тейлор ва Маклорен каторларига ёйишга мисоллар. Лопитал коидаси.
5. Экстреммумлар назариясининг геометрия, механика ва физика масалаларига тадбиқлари.
6. Эйлер алмаштиришлари.
7. Хосмас интегралларнинг яқинлашиш аломатлари. Хосмас интегралга доир машқлар.
8. Аниқ интегрални тақрибий хисоблаш формулалари. Мавзуга доир машқлар.
9. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг махсус ечими. Клеро тенгламаси. Лагранж тенгламаси.
10. Дифференциал тенгламалар системаси. Нормал система. Номаълумларни йўқотиш усули.
11. Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари.(Эйлер, Рунге-Кутта, кетма-кет яқинлашиш, Адамс методи, Тейлор формуласи).
12. Дифференциал тенгламаларнинг амалий масалалар ечишга тадбиқлари. Механик тебранишларнинг дифференциал тенгламаси. Эркин тебраниш, мажбурий тебраниш.
13. Қаторларни тақрибий ҳисоблашларга тадбиқлари. Дифференциал тенгламаларни каторлар ёрдамида ечиш.
14. Фурье интеграли. Фурье алмаштиришлари.
15. Икки ўлчовли интегрални кутб координаталар системасида ўзгарувчиларни алмаштириб хисоблаш. Жордан ўлчовлари.
16. Икки ва уч ўлчовли интегралларни геометрия ва механика масалаларини ечишга тадбиқлари.
17. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар орасидаги боғланиш. Остроградский-Грин формуласининг тадбиқлари.
18. Биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ҳисоблашга доир машқлар. Стокс формуласининг тадбиқлари.
19. Сирт интегралларини тадбиқлари.
20. Остраградский теоремасининг тадбиқлари.
21. Вектор майдонидаги иккинчи тартибли амаллар. Набла оператори билан амаллар бажариш.
22. Лаплас операторининг цилиндирик ва сферик координаталарда ифодаланиши. Майдонлар назариясининг тадбики.
23. Гиперболик ва тескари гиперболик функциялар. Ёпик эгри чизик бўйича олинган интеграл.

16

24. Модулнинг максимум принципи. Коши туридаги интеграл. Юқори тартибли ҳосиланинг мавжудлиги. Аналитик функциянинг юқори тартибли ҳосиласи.
25. Функцияларни Лоран қаторига ёйиш. Қутбга нисбатан функциянинг чегирмасини топиш.
26. Операцион ҳисоб ёрдамида дифференциал тенгламалар ва тенгламалар системасини ечиш. Тебранишлар дифференциал тенгламаларни ечиш.
27. Тор тебранишлари тенгламасини Даламбер усули ва ўзгарувчиларини ажратиш (Фурье) усули билан ечиш. Торнинг мажбурий тебраниши.
28. Иссиқлик тарқалиш тенгламаларини металл стерженда, чегараланмаган стерженда, фазода текшириш. Лапласнинг иккинчи тенгламасига келтириладиган масалалар. Дирихле масаласини ечиш.

29. Амалиётда кўп учрайдиган муҳим дискрет ва узлуксиз тақсимотлар, нормал тақсимотни тадбиқлари.
30. Эҳтимоллар назариясининг лимит теоремалари. Катта сонлар қонуни. Чебышев тенгсизлиги. Бир хил тақсимланган ўзаро боғлиқсиз тасодифий миқдорлар йиғиндиси учун марказий лимит теоремаси.
31. Тасодифий миқдорлар системаси, уларнинг тақсимот қонунлари, шартли тақсимот қонунлари. Ковариация ва корреляция. Икки ўлчовли нормал тақсимот қонуни ва унинг ўзига хос хусусияти.
32. Эҳтимоллар назариясининг техникавий масалаларда қўлланилиши. Тақсимотнинг номаълум параметрлари учун статистик баҳоларни қуришда масаланинг қўйилиши. Статистик баҳоларга талаблар: силжимаслик, асослилик, эффективлик.
33. Дисперсия баҳосининг хоссалари, танланманинг тўғирланган дисперсияси. Статистик баҳолар қуриш услублари. Ишончлилик интерваллари. Статистик гипотезалар ва уларнинг синфлари. Гипотезаларни текшириш алгоритми. Биринчи ва иккинчи турдаги хатоликлар.
34. Энг қувватли мезонлар. Нейман-Пирсон мезони, Колмагоров мезони, Пирсоннинг Хи квадрат мезони.
35. Корреляцион-регрессион таҳлил элементлари. Корреляция тушунчасининг келиб чиқиш тарихи ва хоссалари.
36. Регрессиянинг хар хил кўринишдаги тенгламаларини топишда энг кичик квадратлар усулининг моҳияти ва хар хил модификациялари.

3. Ўқув-услубий ва ахборот таъминоти
3.1 Асосий адабиётлар

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I, II. Springer-Verlag Italia, Milan 2015, 2010.
2. Д.Писменный. «Конспект лекции по высшей математике», 1,2,3 часть. - М.: Айрис Пресс, 2008.

3. Я.С.Бугров, С.М.Никольский. Высшая математика. Учеб.для Вузов: В 3 т – 6-е изд.стереотип.- М.: Дрофа, 2004.
4. К.В.Балдин, В.Н.Башлыков, А.В.Рукосуев. Высшая математика. Учебник. – М.: Флинт: НОУ ВПО "МПСИ". - 360 с.
5. Ю.Ф. Сенчук. Математический анализ для инженеров. 1,2 часть-Харков: НТУ «ХПИ», 2003.-408 с.
6. Ахмедов А.Б., Шодмонов Г., Эсонов Э.Э., Абдукаримов А.А., Шамсиев Д.Н. Олий математикадан индивидуал топшириқлар. –Тошкент: Ўзбекистон энциклопедияси, 2014.
7. Хуррамов Ш.Р. Олий математика. Мисол ва масалалар, назорат топшириқлари. 1,2,3-қисмлар. – Тошкент: Фан ва технологиялар, 2015.

3.2 Қўшимча адабиётлар

1. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президентининг лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқи. –Т.: "Ўзбекистон" НМИУ, 2016. – 56 б.
2. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш – юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза, 2016 йил 7 декабрь. – Т.: "Ўзбекистон" НМИУ, 2016. – 48 б.
3. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. - Т.: "Ўзбекистон" НМИУ, 2017. – 488 б.
4. Ўзбекистон Республкасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида. - Т.:2017 йил 7 февраль, ПФ-4947-сонли Фармони.
5. John James Stewart. Calculus.Seventh editions. Metric version. Brooks/Cole. Cengage Learning, 2012.
6. Y. Subov, M. Kelbert. Probability and Statistics by Example. 2nd edition. United Kingdom. University printing house, Cambridge CB2 8BS, 2014.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. 2 частях -М.: Наука, 2001.
8. Черненко В.Д. Высшая математика в примерах и задачах. Учебное пособие для вузов. – СПб.: Политехника, 2003. – 703 с.
9. В.Е.Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. -М.: Высшей школа, 2004.
10. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Под общей редакцией А.П.Рябушко. в 3 ч. -Минск: «Вишейшая школа», 2007.
11. П.Минорский. Сборник задач по высшей математике. ФИЗМАТЛИТ 2010й.
12. Жураев Т.Ж., Худойберганов Р.Х., Ворисов А.К., Мансуров Х. Олий математика асослари. 1 ва 2 қисм. -Т. Ўзбекистон, 1995, 1999.-290б.

Интернет сайтлари

1. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси хукумат портали.
2. www.catback.ru - научные статьи и учебные материалы
3. www. ziyonet.uz;
4. www. gaap.ru;
5. www. cip.com;
6. www. aicpa.ord;
7. www.bilim.uz,

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN MUXANDISLIK-QURILISH INSTITUTI

Ro’yxatga olindi:	“TASDIQLAYMAN”
№____________________	O’quv ishlari bo’yicha prorektor
2018 y. «___» _________	
	___________dots.B.Ergashev
	“___” ____________2018 yil

OLIY MATEMATIKA

FANIDAN

ISHCHI O’QUV DASTURI

Bilim sohasi:	100 000 – Gumanitar sohasi 600 000 – Xizmatlar sohasi
Ta’lim sohasi:	610 000 - Xizmat ko’rsatish sohasi 620 000 - Transport
Ta’lim yo’nalishi:	5310600-Yer usti transport tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi

Namangan -2018y.

Fanning ishchi o'quv dasturi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2017 yil 24. 08 dagi 603-sonli buyrug'ining 2- ilovasi bilan tasdiqlangan Oliy matematika fanining namunaviy dasturi asosida tuzildi.

Fanning ishchi o'quv dasturi 5310600-Yer usti transport tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi ta'lim yo'nalishi uchun ishchi o'quv rejasida fanga ajratilgan soatlar va nazorat turlari:

Mavsum (Semestr)	Mashg'ulotning tarkibi					Jami o'quv soati	Umumiy soat
	Ma'ruza	Amaliy	Tajriba	Seminar	Mustaqil ta'lim		
1	54	54	-	-	70	108	178
2	54	54	-	-	70	108	178
3	36	36	-	-	52	72	124
Jami	144	144			192	288	480

Tuzuvchilar: f.-m.f.d.,prof. Yu.Apakov
Katta o'q. A. Jo'raev
Katta o'q. I. Sheraliyev
O'qituvchi A. Raxmonov

Taqrizchi:
f.-m.f.n. dots. I. Gaffarov

« Oliy matematika » kafedrasining __-sonli yig'ilishida ma'qullandi

Kafedra mudiri:_____dots.B.Jamalov

«____»_____________ 2018 yil

Mutaxassislik kafedralari bilan kelishildi
Kafedra mudiri:

____
____
____
____
____
____
____

NamMQI Ilmiy-uslubiy kengashining 2018 yildagi -sonli qarori bilan tasdiqlandi.

NamMQI O'UB boshlig'i dots. T.Jo'raev

Kirish

Fanning dolzarbligi

Iqtisodiy va texnikaviy ko'rsatgichlar, ular ustida olib borilayotgan kuzatuv natijalarini bir tizimda shakllantirish, ularga ta'sir etuvchi omillarning o'zaro bog'liqligini aniqlashda zamonaviy matematik usullar va modellardan foydalanishning o'rni beqiyosdir. Shuning uchun ham, zamonaviy kadrlar tayyorlash borasida mamlakatimizning OUYu laridagi o'quv jarayonini tashkillashda amaliy ahamiyatga ega bo'lgan matematika faniga -modellar xaqidagi fanga alohida e'tibor berilmoqda.

Ushbu ishchi dastur 5310600 - Yer usti transport tizimlari va ularning ekspluatatsiyasi (Avtomobil transporti) ta'lim yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan bakalavrlar uchun mo'ljallangan.

Fanning o'quv rejadagi boshqa fanlar bilan o'zaro bog'liqligi va uslubiy jixatdan uzviyligi

"Oliy matematika" fanining ko'p tushunchalari va uslublari texnika OO'Yu.larida o'qitiladigan informatika, mexanika, chizma geometriya, fizika va x.k. umumta'lim, umumkasbiy va maxsus kurslarni o'zlashtirishda muhim o'rinni egallaydi. Shu sababdan ham, bu fanlarni matematikadan kerakli bo'limlarni o'qimasdan turib muvaffaqqiyatli o'zlashtirib bo'lmaydi.

Fanning ilm-fan, iqtisodiyot va ishlab chiqarishdagi o'rni

"Oliy matematika" fani xalk ho'jaligi, texnikaning rivojlanishida alohida o'rin egallaydi. U xalk ho'jaligi va texnikaning turli sohalarida: jumladan, turli loyixalarni modellashtirishda, bashoratlash jarayonida, katta mehnat talab qilinadigan inshootlarning loyixasini xisoblashda va ularga ketadigan sarf-xarajatlarni muqobillashtirishda asosiy vosita xisoblanadi.

Fanni o'qitishdagi zamonaviy axborot va pedagogik texnologiyalar hamda o'quv mashg'ulotlarini loyihalash

Talabalarning "Oliy matematika" fanini o'zlashtirishlari uchun o'qitishning yangi informatsion-pedagogik texnologiyalarni tadbiq qilish muhim axamiyatga egadir. Fanni o'zlashtirishda darslik, o'quv va uslubiy qo'llanmalar, ma'ruza matnlari, tarqatma materiallar, elektron materiallar, keys-texnologiyalaridan foydalaniladi. Ma'ruza, amaliy mashg'ulotlarida va laboratoriya ishlarida o'qitishning interaktiv usullari (vizual, muammoli, mualliflik ma'ruzalari, ikki tomonlama taxlil, Insert, klaster, "Venna diagrammasi", Sinkveyn va boshqalar) dan foydalaniladi.

Fanni o'qitishdan maqsad:

- talabalarning intelektini rivojlantirish, mantiqiy va algoritmik fikrlash qobiliyatini shakllantirish;
- talabalarga mustahkam fundamental bilim berish, olgan bilimlarini zamonaviy amaliy masalalarini yechishga tadbiq qilishga o'rgatish;
- tajriba o'tkazish yo'li bilan olingan natijalarning, turli tabiiy jarayonlarning matematik modellarini tuzishga va ularni tahlil qilishga, qilingan tahlillar asosida to'g'ri xulosalar chiqarish orqali maqbul yechimlar qabul qilishga o'rgatish;
- talabalarda Oliy matematika fani bo'yicha DTS talablariga to'liq mos keladigan bilim va ko'nikmalarni shakllantirish.

Fanni vazifasi – mutaxassislik kafedralari bilan kelishgan holda dastur asosida tuzilgan ishchi o'quv xujjatlari yordamida talabalarga (ularni bilim saviyasini inobatga olgan holda) matematik uslublarning mohiyatini va ularning zamonaviy kompyuter dasturlaridagi ishtiroklarini to'liq va ommabop tarzda tushuntirishdan iborat.

"Oliy matematika" o'quv fanini o'zlashtirish jarayonida amalga oshiriladigan

masalalar doirasida talaba:
- fan dasturi bo'yicha chuqur amaliy va nazariy bilimlarga ega bo'lishi;
- o'zlashtirilgan matematik tushunchalarni, tasdiqlarni geometrik nuqtai nazardan tasavvur qila olishni;
- mutaxassisligi bo'yicha bilimlarni puxta egallashi, mavzularda uchraydigan matematik tushunchalarni aniq tasavvur qila olishi, eng sodda texnikaviy jarayonlarni matematik "til"ga o'gira olishni;
- eng sodda amaliy jarayonlarning modellarini tahlil qilish uchun kerakli matematik usullarni tanlay olishni, tahlil asosida amaliy xulosalar chiqara olishni;
- kuzatuv natijalariga statistik ishlov bera olishni,noma'lum ko'rsatkichlar uchun statistik baholarni har hil usullar yordamida ko'ra olishni;
- statistik gipotezalar haqida amaliy tushunchaga ega bo'lishni, ularni tekshirish bosqichlarni bilishi va x.k. talab qilinadi.

Ushbu dasturdan foydalanib, fanning asosiy bo'limlarini o'z ichiga jamlaganligi e'tiborga olib, yo'nalishlar uchun ajratilgan soatga qarab o'zlarida mavjud ta'lim yo'nalishlariga moslashtirish mumkin.

Oliy matematika fanining mavzular va ularning semestrlar bo'yicha taqsimoti

№	MAVZULAR	Ajratilgan soatlar				
		Mahruza	Amaliym ashg'ulot	Tajriba	Mustaqil ta'lim	Jami
1	2	3	4	5	6	7
	1- semestr	**54**	**54**	**-**	**70**	**178**
1	1-modul. Chiziqli algebra.	8	8	-	10	26
2	2-modul. Vektorlar algebrasi.	4	4	-	6	14
3	3-modul. Tekislikda analitik geometriya.	4	4	-	6	14
4	4-modul. Fazoda analitik geometriya.	6	6	-	8	20
5	5-modul. Matematik analizga kirish. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning differentsial xisobi.	18	18	-	22	58
6	6-modul. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi.	6	6	-	8	20
7	7- modul. Aniqmas integral.	8	8	-	10	26
	2-semestr	**54**	**54**	**-**	**70**	**178**
8	8- modul. Aniq integral.	6	6	-	8	20
9	9- modul. Oddiy differentsial tenglamalar	8	8	-	10	26
10	10-modul. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar	8	8	-	10	26
11	11-modul. Sonli qatorlar	6	6	-	8	20
12	12-modul. Funktsional qatorlar	10	10	-	12	32
13	13-modul. Karrali integrallar va ularni tadbiqlari	6	6	-	8	20
14	14-modul. Egri chiziqli integrallar va ularning tadbiqlari	6	6	-	8	20
15	15-modul. Sirt integrallari va ularning tadbiqlari	4	4	-	6	14
	3-semestr	**36**	**36**	**-**	**52**	**124**
16	16-modul. Maydonlar nazariyasi elementlari	4	4	-	6	14
17	17-modul. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar	8	8	-	12	28

18	18-modul. Operatsion hisob	6	6	-	8	20
19	19-modul. Matematik fizika tenglamalari nazariyasining Elementlari	4	4	-	6	14
20	20-modul. Ehtimollar nazariyasi elementlari	10	10	**-**	14	34
21	21-modul. Matematik statistika elementlari	4	4	-	6	14
	Jami	**144**	**144**	**-**	**192**	**480**

Oliy matematika fanining ma'ruza materiallari rejasi

№	Ma'ruza mashg'ulotlarining mavzulari	Ajratil-gan soat
	1-semestr	**54**
1	**1-modul. Chiziqli algebra.** Ikkinchi, uchinchi tartibli determinantlar. Determinantni hisoblash usullari. Determinantning asosiy xossalari.	2
2	Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. n – tartibli determinant haqida tushuncha.	2
3	Matritsa tushunchasi.Matritsaning asosiy turlari. Matritsa ustida amallar. Teskari matritsa va uni tuzish. Matritsaning rangi.	2
4	Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Kronekker-Kapelli teoremasi. Chiziqli algebraik tenglamalarni yechishda dasturlar majmuasidan foydalanish.	2
5	**2-modul. Vektorlar algebrasi.** Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar.Vektorning o'qdagi proektsiyasi. Vektorning uzunligi. Yo'naltiruvchi kosinuslar. Vektorning chiziqli erkliligi. Vektorni bazis vektorlar bo'yicha yoyish.	2
6	Vektorning skalyar,vektor va aralash ko'paytmalari. Ularning xossalari. Vektorlar orasidagi burchak. Ikki vektorning kollenearlik va komplanarlik shartlari.	2
7	**3-modul. Tekislikda analitik geometriya.** Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularning turlari. To'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishi. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.	2
8	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola, parabola.	2
9	**4-modul. Fazoda analitik geometriya.** Fazoda tekislikning vektor, umumiy, normal tenglamalari. Tekislikning o'zaro joylashishi. Ikki tekislik orasidagi burchak.Tekislikning o'zaro parallelik va perpendikulyarlik shartlari.Tekisliklar dastasi.	2
10	Fazoda to'g'ri chiziqning vektor, kanonik, parametrik va umumiy tenglamalari. To'g'ri chiziqni o'zaro joylashishi Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak,parallelik va perpendikulyarlik shartlari.	2
11	To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishi. Sirtning fazodagi tenglamasi. Ikkinchi tartibli sirtlar.	2
12	**5-modul. Matematik analizga kirish. Bir o'zgaruvchili funktsiyaning differentsial xisobi** O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. To'plamlar va ular ustida amallar. Mantiqiy amallar. Ketma-ketlikning limiti.	2
13	Funktsiya tushunchasi. Funktsiyaning limiti tushunchasi. Bir tomonlama limitlar.Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.	2
14	Funktsiyaning uzluksizligi. Funktsiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.	2
15	Hosilaning ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi. Differentsiallashning asosiy qoidalari. Darajali va trigonometrik funktsiyaning hosilasi.	2

16	Murakkab va teskari funktsiyaning hosilasi. Ko'rsatkichli, logarifmik va teskari tigonometrik funktsiyaning hosilasi. Elementar funktsiyalarning hosilalari jadvali.	2
17	Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyaning hosilalari. Giperbolik funktsiyalarning hosilalari.	2
18	Yuqori tartibli hosilalar. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi. Hosilaning tadbiqlari. Funktsiyaning differentsiali. Yuqori tartibli differentsiallar. Differentsiallardan taqribiy hisoblashlarda foydalanish .	2
19	Differentsiallanuvchi funktsiyalar haqida ba'zi teoremalar. Egri chiziqqa urinma va normal tenglamasi. Lopital qoidasi. Teylor va Makloren formulalari. $e^x, \sin x$ funktsiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyish.	2
20	Funktsiyaning monotonligi, kritik va ekstremum nuqtalari. Funktsiya grafigining botiqligi va qavariqligi, burilish nuqtalari, asimptotalari. Funktsiyani to'la tekshirish. Differentsial hisobning amaliy masalalarda qo'llanishi.	2
21	**6-modul. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi.** Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning ta'rifi,aniqlanish va o'zgarish sohasi, limiti, uzluksizligi va xususiy hosilalari. To'la differentsial.	2
22	Yuqori tartibli xususiy hosilalar.Ko'p o'zgaruvchi murakkab funktsiyaning xususiy va to'la differentsiali.Yuqori tartibli differentsiallar.Oshkormas funktsiyani differentsiallash.	2
23	Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalari. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari. Shartli ekstremum.	2
43	**7- modul. Aniqmas integral.** Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integralning ta'rifi, xossalari. Aniqmas integral jadvali. Integrallash qoidalari: o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash.	2
25	Eng sodda kasrlarni integrallash. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga ajratish. Ratsional funktsiyalarni integrallash algoritimi.	2
26	Trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ba'zi integrallarni integrallash.	2
27	Irratsional funktsiyalarni integrallash.	2
	2-semestr	**54**
28	**8- modul. Aniq integral.** Aniq integralga keltiriluvchi masalalar. Aniq integralning ta'rifi va uning asosiy xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Bo'laklab integrallash.	2
29	Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar. Chegaralanmagan funktsiyaning xosmas integrallari. Xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari.	2
30	Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Aniq integralni geometriya va mexanikaga tadbiqlari. Aniq integralning muhandislik masalalarini yechishga tadbiqlari.	2
31	**9- modul. Oddiy differentsial tenglamalar.** Differentsial tenglama tushunchasini olib keladigan masalalar. Differentsial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari. n-tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differentsial tenglamalar.	2
32	Bir jinsli differentsial tenlamalar. Bir jinsliga keltiriladigan differentsial tenglamalar	2
33	Birinchi tartibli chiziqli defferentsial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2

34	To'la differentsial tenglama. Integrallovchi ko'paytuvchi	2
35	**10-modul. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.** Yuqori tartibli differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi. Tartibni pasaytiriladigan differentsial tenglamalar.	2
36	Chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar. O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli tenglamalar.	2
37	O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli bo'lmagan o'ng tomoni maxsus ko'rinishga ega bo'lgan differentsial tenglamalar.	2
38	Differentsial tenglamalarni normal sistemasi. Normal sistemani yechishda noma'lumlarni yo'qotish usuli.	2
39	**11-modul. Sonli qatorlar** Sonli qatorlarning asosiy tushunchalari. Qator yaqinlashishining zaruriy shartlari. Yaqinlashuvchi qatorlar va ularning xossalari. Garmonik qatorlar.	2
40	Musbat hadli qatorlarni taqqoslash teoremalari. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishini yetarli shartlari: Dalamber alomati, Koshining radikal va integral alomatlari.	2
41	Ishorasi almashinuvchi va o'zgaruvchan ishorali sonli qatorlar. Leybnits teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.	2
42	**12-modul. Funktsional qatorlar.** Funktsional qatorlar. Nuqtada yaqinlashuvchi funktsional qatorlar. Funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish. Kuchaytirilgan qatorlar. Qator hadlari yig'indisining uzluksizligi.	2
43	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari. Qatorlarni differentsiallash va integrallash.	2
44	Funktsiyalarni Teylor va Makloren qatorlarga yoyish. Binomial qator. Asosiy elementar funktsiyalarni qatorlarga yoyish. Qatorlarni taqribiy hisoblashlarda qo'llash, differentsial tenglamalarni qatorlar yordamida yechish.	2
45	Furg'e qatori va Furg'e koeffitsientlari. Furg'e qatorini yaqinlashishi.Dirixle teoremasi.	2
46	Toq va juft funktsiyalarning Furg'e qatori. Davri $2l$ ga teng bo'lgan funktsiyalarni $(-l,l)$ oraliqda Furg'e qatorga yoyish.	2
47	**13-modul. Karrali integrallar va ularni tadbiqlari.** Ikki o'lchovli integral, uning xossalari, geometrik va mexanik ma'nosi. Ikki o'lchovli integralni hisoblash. Ikki karrali integralda o'zgaruvchilarini almashtirish.	2
48	Ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalar sistemasida hisoblash. Ikki o'lchovli integrallarning geometrik va mexanikaga tadbiqlari.	2
49	Uch o'lchovli integral va uning asosiy xossalari.Uch karrali integralni hisoblash. Uch o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish, uch o'lchovli integral tadbiqi.	2
50	**14-modul. Egri chiziqli integrallar va ularning tadbiqlari.** Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning ta'rifi, ularning xossalari va ularni hisoblash.	2
51	Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish. Grin formulasi. Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash.	2
52	Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi sharti. Egri chiziqli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini yechishga tadbiqlari.	2
53	**15-modul. Sirt integrallari va ularning tadbiqlari.** Birinchi tur sirt integrali ta'rifi, xossalari va uni hisoblash. Stoks formulasi.	2
54	Ikkinchi tur sirt integrali xossalari va hisoblash. Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallari orasidagi bog'lanish. Sirt integrallarini tadbiqlari.	2

	3-semestr	**36**
55	**16-modul. Maydonlar nazariyasi elementlari.** Skalyar maydon. Skalyar maydonning sath chiziqlari va sirtlari, yo'nalish bo'yicha hosila. Skalyar maydonning gradienti, yuksaklik chiziqlari va sirtlar. Vektor maydon, vektor chiziqlar, vektor naychalar. Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor maydonning sirt bo'yicha oqimi, uning xossalari, fizik ma'nosi. Vektor maydonning divergentsiyasi, fizik mahnosi, Ostragradskiy teoremasi.	2
56	Solenoidal maydon. Vektor maydon uyurmasi (rotori) va uning hossalari. Vektor maydonning tsirkulyatsiyasi. Stoks teoremasi. Potentsial maydon. Potentsial maydonda egri chiziqli integralni hisoblash. Gamilton (Nabla) operatori. Laplas operatori. Garmonik maydon.	2
57	**17-modul. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar.** Kompleks sonlarning moduli va argument. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakli. Muavr formulasi. Kompleks sondan ildiz chiqarish.	2
58	Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar, ularning aniqlanish sohasi. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya limiti va uzluksizligi. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarni differentsiallash..	2
59	Koshi-Riman sharti. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarning integrali va uni hisoblash. Koshining asosiy teoremasi. Analitik funktsiyalar. Garmonik funktsiyalar. Koshining integral formulasi.	2
60	Kompleks hadli qatorlar. Teylor qatori. Loran qatori. Yakkalangan maxsus nuqtalar va ularning klassifikatsiyasi. Chegirmalar. Chegirmalar haqidagi Koshi teoremasi. Chegirmalarni integrallarni hisoblashga tadbiqi.	2
61	**18-modul. Operatsion hisob.** Laplas almashtirilishi, uning xossalari. Originallar sinfi, tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari.	2
62	Originalni tasvir bo'yicha tiklash usullari.	2
63	Differentsial tenglamalarni va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish.	2
64	**19-modul. Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari.** Xususiy hosilali differentsial tenglama haqida tushuncha. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differentsial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi. Cheksiz tor uchun Koshi masalasini yechish. Asosiy masalalarning qo'yilishi. Koshi masalasi, chegaraviy masalalar, aralash masalalar.	2
65	Koshi Tor tebranish masalalari, issiqlik tarqalish tenglamasi uchun masalasi. Matematik fizika tenglamalarini yechishning tor usuli.	2
66	**20-modul. Ehtimollar nazariyasi elementlari.** Ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalari. Kombinatorika elementlari. Hodisalar algebrasi. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimollik.	2
67	Shartli ehtimol. To'la ehtimol. Bayes formulasi. Hodisalarning bog'liqmasligi.	2
68	Tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi. P'uasson teoremasi. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Bernulli sxemasining eng ehtimolli soni.	2
69	Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Zichlik funktsiyasi. Uzluksiz tasodifiy	2

	miqdorning taqsimot funktsiyasi. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari: matematik kutilma, dispertsiya va o'rta kvadratik chetlanish.	
70	Diskret tasodifiy miqdorga misollar. Gipergeometrik binomial, Ppuasson va geometrik taqsimotlar. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.	2
71	**21-modul. Matematik statistika elementlari.** Matematik statistika elementlari. Tanlanma. Statistik qator va uning xossalari. Poligon va gistogramma. Empirik taqsimot funktsiyasi. Tanlanmaning sonli xarakteristikalarini nuqtaviy va intervalli baho.	2
72	Korrelatsion-regression tahlil elementlari. Korrelyatsiya tushunchasi va uning hossalari. Regressiyaning xar xil ko'rinishdagi tenglamalarini topishda eng kichik kvadratlar usulining mohiyati va uning xar xil modifikatsiyalari. Korrelatsion-regression tahlilning texnikaviy, iqtisodiy masalalardagi ahamiyati.	2

ASOSIY QISM

Ma'ruza mashg'ulotlari

1-ma'ruza.

Mavzu: Skalyar maydon (2 soat)

Reja:

1. Skalyar maydonning sath chiziqlari va sirtlari, yo'nalish bo'yicha hosila
2. Skalyar maydonning gradienti, yuksaklik chiziqlari va sirtlar
3. Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar.

2-ma'ruza.

Mavzu: Solenoidal maydon (2 soat).

Reja:

1. Vektor maydon uyurmasi (rotori) va uning hossalari.
2. Vektor maydonning tsirkulyatsiyasi. Stoks teoremasi.
3. ‘otentsial maydonda egri chiziqli integralni hisoblash.

3-ma'ruza.

Mavzu: Kompleks sonlarning moduli va argument.

Reja:

1. Kompleks sonlar ustida amallar
2. Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakli
3. Muavr formulasi. Kompleks sondan ildiz chiqarish.

4-ma'ruza

Mavzu: Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar, ularning aniqlanish sohasi

Reja:

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya limiti.
2. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya uzluksizligi.
3. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarni differentsiallash.

5-ma'ruza

Mavzu: Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarning integrali va uni hisoblash.

Reja:

1. Koshining asosiy teoremasi.

2. Analitik funktsiyalar

3. Garmonik funktsiyalar. Koshining integral formulasi.

6-ma'ruza

Mavzu: **Kompleks hadli qatorlar**

Reja:

1. Teylor qatori. Loran qatori

2. Yakkalangan maxsus nuqtalar va ularning klassifikatsiyasi. Chegirmalar

3. CHegirmalar haqidagi Koshi teoremasi. Chegirmalarni integrallarni hisoblashga tadbiqi.

7-ma'ruza

Mavzu: Operatsion hisob

Reja:

1. Laplas almashtirilishi, uning xossalari**.**

2. Originallar sinfi

8-ma'ruza

Mavzu: Originalni tasvir bo'yicha tiklash usullari

Reja:

1. Tasvirlar sinfi

2. Operatsion hisobning asosiy teoremalari

9-ma'ruza

Mavzu: Differentsial tenglamalarni va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish

Reja:

1. Differentsial tenglamalar

2. Differentsial tenglamalarni hisob yordamida yechish

3. Tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish

10-ma'ruza

Mavzu: Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari

Reja:

1. Xususiy hosilali differentsial tenglama haqida tushuncha.

2. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differentsial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi

3. Cheksiz tor uchun Koshi masalasini yechish

11-ma’ruza
Mavzu: Tor tebranish masalalari, issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi
Reja:

1. Koshi masalasi, chegaraviy masalalar, aralash masalalar
2. Matematik fizika tenglamalarini yechishning to’r usuli.

12-ma’ruza
Mavzu: Ehtimollar nazariyasi elementlari
Reja:

1. Ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalari
2. Kombinatorika elementlari
3. Hodisalar algebrasi.
4. Ehtimolning klassik ta’rifi. Geometrik ehtimollik

13-ma’ruza
Mavzu: Shartli ehtimol
Reja:

1. To’la ehtimol.
2. Bayes formulasi
3. Hodisalarning bog’liqmasligi

14-ma’ruza
Mavzu: Tajribalar ketma-ketligi
Reja:

1. Bernulli sxemasi
2. Puasson teoremasi
3. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari
4. Bernulli sxemasining eng ehtimolli soni

15-ma’ruza

Mavzu: Tasodifiy miqdor tushunchasi

Reja:

1. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni
2. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Zichlik funktsiyasi
3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi.
4. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari: matematik kutilma, dispertsiya va o’rta kvadratik chetlanish

16-ma'ruza

Mavzu: Diskret tasodifiy miqdorga misollar

Reja:

1. Gipergeometrik binomial taqsimotlar
2. Puasson va geometrik taqsimotlar
3. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.

17-ma'ruza

Mavzu: Matematik statistika elementlari

Reja:

1. Matematik statistika elementlari. Tanlanma
2. Statistik qator va uning xossalari. 'oligon va gistogramma
3. Empirik taqsimot funktsiyasi
4. Tanlanmaning sonli xarakteristikalarini nuqtaviy va intervalli baho

18-ma'ruza

Mavzu: Korrelatsion-regression tahlil elementlari

Reja:

1. Korrelyatsiya tushunchasi va uning xossalari
2. Regressiyaning xar xil ko'rinishdagi tenglamalarini topishda eng kichik kvadratlar usulining moxiyati va uning xar xil modifikatsiyalari.
3. Korrelatsion-regression tahlilning texnikaviy, iqtisodiy masalalardagi ahamiyati

2.1. Amaliy mashg'ulotlar bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar

Amaliy mashg'ulotlarini o'tkazishda quyidagi didaktik tamoyillarga amal qilinadi;
Amaliy mashg'ulotning maqsadini aniq belgilab olish;
O'qituvchining innovatsion pedagogik faoliyati bo'yicha bilimlarini qo'llagan holda talabalarda darsga qiziqish uyg'otish;
Talabada natijani mustaqil ravishda qo'lga kiritish imkoniyatini ta'minlash;
Talabani nazariy-metodik jixatdan tayyorlash;
Amaliy mashg'ulotlar nafaqat aniq mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash, balki talabalarda nazariy va amaliy bilim va ko'nikmalarni shakllantirish hamdir.

Oliy matematika fanining amaliy mashg'ulot materiallari rejasi

№	Mavzular	Ajratilgan soat
	1-semestr	**54**
1	**1-modul. Chiziqli algebra.** Ikkinchi, uchinchi tartibli determinantlar. Determinantni hisoblash usullari. Determinantning asosiy xossalari.	2
2	Minorlar va algebraik to'ldiruvchilar. n – tartibli determinant haqida tushuncha.	2
3	Matritsa tushunchasi.Matritsaning asosiy turlari. Matritsa ustida amallar. Teskari matritsa va uni tuzish. Matritsaning rangi.	2
4	Chiziqli tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari. Kronekker-Kapelli teoremasi. Chiziqli algebraik tenglamalarni yechishda dasturlar majmuasidan foydalanish.	2
5	**2-modul. Vektorlar algebrasi.** Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar.Vektorning o'qdagi proektsiyasi. Vektorning uzunligi. Yo'naltiruvchi kosinuslar. Vektorning chiziqli erkliligi. Vektorni bazis vektorlar bo'yicha yoyish.	2
6	Vektorning skalyar,vektor va aralash ko'paytmalari. Ularning xossalari. Vektorlar orasidagi burchak. Ikki vektorning kollenearlik va komplanarlik shartlari.	2
7	**3-modul. Tekislikda analitik geometriya.** Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamalari va ularning turlari. To'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashishi. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.	2
8	Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana, ellips, giperbola, parabola.	2
9	**4-modul. Fazoda analitik geometriya.** Fazoda tekislikning vektor, umumiy, normal tenglamalari. Tekislikning o'zaro joylashishi. Ikki tekislik orasidagi burchak.Tekislikning o'zaro parallelik va perpendikulyarlik shartlari.Tekisliklar dastasi.	2
10	Fazoda to'g'ri chiziqning vektor, kanonik, parametrik va umumiy tenglamalari.To'g'ri chiziqni o'zaro joylashishi Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, parallelik va perpendikulyarlik shartlari.	2
11	To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashishi. Sirtning fazodagi tenglamasi. Ikkinchi tartibli sirtlar.	2
12	**5-modul. Matematik analizga kirish.** **Bir o'zgaruvchili funktsiyaning differentsial xisobi** O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar. To'plamlar va ular ustida amallar. Mantiqiy amallar. Ketma-ketlikning limiti.	2
13	Funktsiya tushunchasi. Funktsiyaning limiti tushunchasi. Bir tomonlama limitlar.Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlar.	2
14	Funktsiyaning uzluksizligi. Funktsiyaning uzilish nuqtalari va ularning turlari.	2
15	Hosilaning ta'rifi, uning geometrik va mexanik ma'nosi. Funktsiyaning differentsiallanuvchanligi. Differentsiallashning asosiy qoidalari. Darajali va trigonometrik funktsiyaning hosilasi.	2
16	Murakkab va teskari funktsiyaning hosilasi. Ko'rsatkichli, logarifmik va teskari tigonometrik funktsiyaning hosilasi. Elementar funktsiyalarning hosilalari jadvali.	2

17	Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funktsiyaning hosilalari. Giperbolik funktsiyalarning hosilalari.	2
18	Yuqori tartibli hosilalar. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi. Hosilaning tadbiqlari. Funktsiyaning differentsiali. Yuqori tartibli differentsiallar. Differentsiallardan taqribiy hisoblashlarda foydalanish .	2
19	Differentsiallanuvchi funktsiyalar haqida ba'zi teoremalar. Egri chiziqga urinma va normal tenglamasi. Lopital qoidasi. Teylor va Makloren formulalari. $e^x, \sin x$ funktsiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyish.	2
20	Funktsiyaning monotonligi, kritik va ekstremum nuqtalari. Funktsiya grafigining botiqligi va qavariqligi, burilish nuqtalari, asimptotalari. Funktsiyani to'la tekshirish. Differentsial hisobning amaliy masalalarda qo'llanishi.	2
21	**6-modul. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi.** Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning ta'rifi,aniqlanish va o'zgarish sohasi, limiti, uzluksizligi va xususiy hosilalari. To'la differentsial.	2
22	Yuqori tartibli xususiy hosilalar.Ko'p o'zgaruvchi murakkab funktsiyaning xususiy va to'la differentsiali.Yuqori tartibli differentsiallar.Oshkormas funktsiyani differentsiallash.	2
23	Sirtga o'tkazilgan urinma tekislik va normal tenglamalari. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyaning ekstremumlari. Shartli ekstremum.	2
43	**7- modul. Aniqmas integral.** Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integralning ta'rifi, xossalari. Aniqmas integral jadvali. Integrallash qoidalari: o'zgaruvchini almashtirish va bo'laklab integrallash.	2
25	Eng sodda kasrlarni integrallash. Ratsional kasrlarni sodda kasrlarga ajratish. Ratsional funktsiyalarni integrallash algoritimi.	2
26	Trigonometrik funktsiyalar qatnashgan ba'zi integrallarni integrallash.	2
27	Irratsional funktsiyalarni integrallash.	2
	2-semestr	**54**
28	**8- modul. Aniq integral.** Aniq integralga keltiriluvchi masalalar. Aniq integralning ta'rifi va uning asosiy xossalari. Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish. Bo'laklab integrallash.	2
29	Xosmas integrallar. Chegaralari cheksiz xosmas integrallar. Chegaralanmagan funktsiyaning xosmas integrallari. Xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari.	2
30	Aniq integralni taqribiy hisoblash formulalari. Aniq integralni geometriya va mexanikaga tadbiqlari. Aniq integralning muhandislik masalalarini yechishga tadbiqlari.	2
31	**9- modul. Oddiy differentsial tenglamalar.** Differentsial tenglama tushunchasini olib keladigan masalalar. Differentsial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari. n-tartibli differentsial tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema.O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan differentsial tenglamalar.	2
32	Bir jinsli differentsial tenglamalar. Bir jinsliga keltiriladigan differentsial tenglamalar	2
33	Birinchi tartibli chiziqli defferentsial tenglamalar. Bernulli tenglamasi.	2
34	To'la differentsial tenglama. Integrallovchi ko'paytuvchi	2
35	**10-modul. Yuqori tartibli differentsial tenglamalar.** Yuqori tartibli differentsial tenglamalar uchun Koshi masalasi yechimining	2

	mavjudligi va yagonaligi. Tartibni pasaytiriladigan differentsial tenglamalar.	
36	Chiziqli bir jinsli differentsial tenglamalar. O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli tenglamalar.	2
37	O'zgarmas koeffitsientli yuqori tartibli bir jinsli bo'lmagan o'ng tomoni maxsus ko'rinishga ega bo'lgan differentsial tenglamalar.	2
38	Differentsial tenglamalarni normal sistemasi. Normal sistemani yechishda noma'lumlarni yo'qotish usuli.	2
39	**11-modul. Sonli qatorlar** Sonli qatorlarning asosiy tushunchalari. Qator yaqinlashishining zaruriy shartlari. Yaqinlashuvchi qatorlar va ularning xossalari. Garmonik qatorlar.	2
40	Musbat hadli qatorlarni taqqoslash teoremalari. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishini yetarli shartlari: Dalamber alomati, Koshining radikal va integral alomatlari.	2
41	Ishorasi almashinuvchi va o'zgaruvchan ishorali sonli qatorlar. Leybnits teoremasi. Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar.	2
42	**12-modul. Funktsional qatorlar.** Funktsional qatorlar. Nuqtada yaqinlashuvchi funktsional qatorlar. Funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasi. Tekis yaqinlashish. Kuchaytirilgan qatorlar. Qator hadlari yig'indisining uzluksizligi.	2
43	Darajali qatorlar. Abel teoremasi. Yaqinlashish radiusi. Yaqinlashuvchi darajali qatorlarning xossalari. Qatorlarni differentsiallash va integrallash.	2
44	Funktsiyalarni Teylor va Makloren qatorlarga yoyish. Binomial qator. Asosiy elementar funktsiyalarni qatorlarga yoyish. Qatorlarni taqribiy hisoblashlarda qo'llash, differentsial tenglamalarni qatorlar yordamida yechish.	2
45	Furye qatori va Furye koeffitsientlari. Furye qatorini yaqinlashishi.Dirixle teoremasi.	2
46	Toq va juft funktsiyalarning Furye qatori. Davri $2l$ ga teng bo'lgan funktsiyalarni $(-l,l)$ oraliqda Furye qatorga yoyish.	2
47	**13-modul. Karrali integrallar va ularni tadbiqlari.** Ikki o'lchovli integral, uning xossalari, geometrik va mexanik ma'nosi. Ikki o'lchovli integralni hisoblash. Ikki karrali integralda o'zgaruvchilarini almashtirish.	2
48	Ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalar sistemasida hisoblash. Ikki o'lchovli integrallarning geometrik va mexanikaga tadbiqlari.	2
49	Uch o'lchovli integral va uning asosiy xossalari.Uch karrali integralni hisoblash. Uch o'lchovli integralda o'zgaruvchilarni almashtirish, uch o'lchovli integral tadbiqi.	2
50	**14-modul. Egri chiziqli integrallar va ularning tadbiqlari.** Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallarning ta'rifi, ularning xossalari va ularni hisoblash.	2
51	Birinchi va ikkinchi tur egri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish. Grin formulasi. Egri chiziqli integral yordamida yuzani hisoblash.	2
52	Egri chiziqli integrallarning integrallash yo'liga bog'liq bo'lmasligi sharti. Egri chiziqli integrallarni geometriya va mexanika masalalarini yechishga tadbiqlari.	2
53	**15-modul. Sirt integrallari va ularning tadbiqlari.** Birinchi tur sirt integrali ta'rifi, xossalari va uni hisoblash. Stoks formulasi.	2
54	Ikkinchi tur sirt integrali xossalari va hisoblash. Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallari orasidagi bog'lanish. Sirt integrallarini tadbiqlari.	2
	3-semestr	**36**
55	**16-modul. Maydonlar nazariyasi elementlari.** Skalyar maydon. Skalyar maydonning sath chiziqlari va sirtlari, yo'nalish	2

	bo'yicha hosila. Skalyar maydonning gradienti, yuksaklik chiziqlari va sirtlar. Vektor maydon, vektor chiziqlar, vektor naychalar. Orientirlangan va orientirlanmagan sirtlar. Vektor maydonning sirt bo'yicha oqimi, uning xossalari, fizik ma'nosi. Vektor maydonning divergentsiyasi, fizik ma'nosi, Ostragradskiy teoremasi.	
56	Solenoidal maydon. Vektor maydon uyurmasi (rotori) va uning hossalari. Vektor maydonning tsirkulyatsiyasi. Stoks teoremasi. potentsial maydon. potentsial maydonda egri chiziqli integralni hisoblash. Gamilton (Nabla) operatori. Laplas operatori. Garmonik maydon.	2
57	**17-modul. Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar.** Kompleks sonlarning moduli va argument. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakli. Muavr formulasi. Kompleks sondan ildiz chiqarish.	2
58	Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar, ularning aniqlanish sohasi. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya limiti va uzluksizligi. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarni differentsiallash..	2
59	Koshi-Riman sharti. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarning integrali va uni hisoblash. Koshining asosiy teoremasi. Analitik funktsiyalar. Garmonik funktsiyalar. Koshining integral formulasi.	2
60	Kompleks hadli qatorlar. Teylor qatori. Loran qatori. Yakkalangan maxsus nuqtalar va ularning klassifikatsiyasi. Chegirmalar. Chegirmalar haqidagi Koshi teoremasi. Chegirmalarni integrallarni hisoblashga tadbiqi.	2
61	**18-modul. Operatsion hisob.** Laplas almashtirilishi, uning xossalari. Originallar sinfi, tasvirlar sinfi. Operatsion hisobning asosiy teoremalari.	2
62	Originalni tasvir bo'yicha tiklash usullari.	2
63	Differentsial tenglamalarni va tenglamalar sistemasini operatsion hisob yordamida yechish.	2
64	**19-modul. Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari.** Xususiy hosilali differentsial tenglama haqida tushuncha. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differentsial tenglamalar va ularning klassifikatsiyasi. Cheksiz tor uchun Koshi masalasini yechish. Asosiy masalalarning qo'yilishi. Koshi masalasi, chegaraviy masalalar, aralash masalalar.	2
65	Tor tebranish masalalari, issiqlik tarqalish tenglamasi uchun Koshi masalasi. Matematik fizika tenglamalarini yechishning to'r usuli.	2
66	**20-modul. Ehtimollar nazariyasi elementlari.** Ehtimollar nazariyasi fanining asosiy tushunchalari. Kombinatorika elementlari. Hodisalar algebrasi. Ehtimolning klassik ta'rifi. Geometrik ehtimollik.	2
67	Shartli ehtimol. To'la ehtimol. Bayes formulasi. Hodisalarning bog'liqmasligi.	2
68	Tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi. Puasson teoremasi. Muavr-Laplasning lokal va integral teoremalari. Bernulli sxemasining eng ehtimolli soni.	2
69	Tasodifiy miqdor tushunchasi. Diskret tasodifiy miqdor va uning taqsimot qonuni. Uzluksiz tasodifiy miqdor. Zichlik funktsiyasi. Uzluksiz tasodifiy miqdorning taqsimot funktsiyasi. Tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari: matematik kutilma, dispertsiya va o'rta kvadratik chetlanish.	2

70	Diskret tasodifiy miqdorga misollar. Gipergeometrik binomial, Puasson va geometrik taqsimotlar. Normal taqsimlangan tasodifiy miqdorlar.	2
71	**21-modul. Matematik statistika elementlari.** Matematik statistika elementlari. Tanlanma. Statistik qator va uning xossalari. Poligon va gistogramma. Empirik taqsimot funktsiyasi. Tanlanmaning sonli xarakteristikalarini nuqtaviy va intervalli baxo.	2
72	Korrelatsion-regression tahlil elementlari. Korrelyatsiya tushunchasi va uning xossalari. Regressiyaning xar xil ko'rinishdagi tenglamalarini topishda eng kichik kvadratlar usulining moxiyati va uning xar xil modifikatsiyalari. Korrelatsion-regression taxlilning texnikaviy, iqtisodiy masalalardagi ahamiyati.	2

2.2. Laboratoriya ishlarini tashkil etish bo'yicha ko'rsatmalar

Laboratoriya ishlari o'quv rejada ko'rsatilmagan.

2.3. Xisob-grafik ishlarini tashkil etish bo'yicha uslubiy ko'rsatmalar.

Hisob-grafik ishlarini bajarish talabada oliy matematika fanini mustaqil o'rganishni shakllantiradi va shuning bilan birga unda matematika va boshqa fanlarning o'quv adabiyotlaridan foydalanish uchun zamin yaratadi. Hisob-grafik ishlarini bajarish jarayonida matematikaning muhim jihatlari va uning texnikadagi o'rnining dolzarbligini tushunib borishini ta'minlaydi.

Hisob-grafik ishlarida tasdiqlangan variantlar asosida talabaga semestr davomida o'tilgan mavzular bo'yicha misollar to'plami beriladi.

Har bir hisob-grafik ish barcha mavzular bo'yicha matematikaning tadbiqiy jihatlarini ochib berishi kerak. Har bir semestr davomida talabalar ikki marta hisob-grafik ishlari bajaradi.

Hisob-grafik ishlarining rejasi

I-semesir

1. Chiziqli algebra va analitik geometriya.
2. Funktsiyaning limiti, hosilasi va differentsiali, funktsiyaning hosila yordamida to'la tekshirish.

II-semestr

3. Aniqmas va aniq integrallar.
4. Differentsial tenglamalar.

III-semestr

5. Sonli va funktsional qatorlar.
6. Operatsion hisob.

2.4. Mustaqil ishlar bo'yicha ko'rsatma va tavsiyalar.

Mustaqil ta'limni tashkil etishda muayyan fanning xususiyatlarini hisobga olgan holda quyidagi shakllardan foydalanish tavsiya etiladi va oraliq nazorat sifatida baholanadi.

1) mavzular bo'yicha konspekt (referat, taqdimot) tayyorlash:

Nazariy materiallarni puxta o'zlashtirishga yordam beruvchi bunday usul o'quv materiallariga diqqatni ko'proq jalb etishga yordam beradi. Talaba konspekti turli nazorat ishlariga tayyorgarlik ishlarini osonlashtiradi vaqtni tejaydi:

2) **o'qitish va nazorat qilishning avtomatlashtirilgan tizimlari bilan ishlash:** Olgan bilimlarni o'zlashtirishlari turli nazorat ishlarga tayyorgarlik ko'rishlari uchun tavsiya etilgan elektron manbalar innovatsion dars loyixasi namunalari o'z-o'zini nazorat uchun test to'shiriqlari.

3) fan bo'yicha qo'shimcha adabiyotlar bilan ishlash: Mustaqil o'rganish uchun berilgan mavzular bo'yicha talabalar tavsiya etilgan asosiy adabiyotlardan tashqari qo'shimcha o'quv ilmiy adabiyotlardan foydalanadilar. Bunda rus va xorijiy tillardagi adabiyotlardan foydalanish rag'batlantiriladi:

4)INTERNET tarmog'idan foydalanish: Fan mavzularini o'zlashtirish: Kurs ishi, bitiruv malakaviy ishlarini yozishda mavzu bo'yicha INTERNET manbalarini topish, ular bilan ishlash nazorat turlarining barchasida qo'shimcha reyting ballari bilan rag'batlantiriladi.

5) mavzuga oid masalalar keys-stadilar va o'quv loyihalarini ishlab chiqish va ishtirok etish:

6) amaliyot turlariga asosan material yig'ish. Amaliyotdagi mavjud muammolarni yechimini topish, hisobotlar tayyorlash:

7) ilmiy seminar va anjumanlarga tezis va maqolalar tayyorlash va ishtirok etish:

8) mavjud laboratoriya ishlarini takomillashtirish masofaviy (distantsion) ta'lim asosida mashg'ulotlarni tashkil etish bo'yicha metodik ko'rsatmalar tayyorlash.

Yangi bilimlarni mustaqil o'rganish, kerakli ma'lumotlarni izlash va ularni topish yo'llarini aniqlash. INTERNET tarmoqlaridan foydalanib ma'lumotlar to'plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to'garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola (tezis) va ma'ruzalar tayyorlash kabilar talabalarni darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatlarini rivojlantiradi. Vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib borish o'qituvchi tomonidan kons'ektlarni va mavzuni o'zlashtirishini ma'ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan xar darsda amalga oshiriladi.

Mustaqil ishni tashkil etish bo'yicha uslubiy ko'rsatma va tavsiyalar.
Keys-stadi vaziyatli masalalar to'plami ishlab chiqiladi. Ma'ruza mavzulari bo'yicha amaliy topshiriq keys-stadilar yechish uslubida va mustaqil ishlash uchun vazifalar beriladi.

Tavsiya etilgan mustaqil ta'lim mavzulari

1. Dekart va qutb kordinatalari orasidagi bog'lanish. Koordinatalarni almashtirish. Silindrik va sferik koordinatalar.
2. Konussimon sirtlar.Sifera.Aylanish sirtlar.Ikkinchi tartibli sirlarga doir mashqlar
3. Yuqori tartibli hosilalar, Oshkormas va parametrik ko'rinishda
berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari.
4. Funktsiyalarni Teylor va Makloren qatorlariga yoyishga misollar. Lopital qoidasi.
5. Ekstremumlar nazariyasining geometriya, mexanika va fizka masalalariga tadbiqlari.
6. Eyler almashtirishlari.
7. Xosmas integrallarni yaqinlashish alomatlari. Xosmas integralga doir mashqlar.
8. Aniq itegralni taqribiy hisoblash formulalari. Mavzuga doir mashqlar.
9. Birinchi tartibli differentsial tenglamannig mahsus yechimi. Klero tenglamasi. Lagranj tenglamasi.
10. Differentsial tenglamalar sistemasi. Normal sistema. Noma'lumlarni yo'qotish usuli.
11. Differentsial tenglamalarni taqribiy yechish usullari.(Eyler, Runge-Kutta, ketma-ket yaqinlashish, Adams metodi, Teylor, formulasi).
12. Differentsial tenglamalarning amaliy masalalar yechishga tadbiqlari. Mexanik tebranishlarning differentsial tenglamasi. Erkin tebranish, majburiy tebranish.
13. Qatorlarni taqribiy hisoblashlarga tadbiqlari. Differentsial tenglamalarni qatorlar yordamida yechish.

14. Furye integrali. Furye almashtirishlari.
15. Ikki o'lchovli integralni qutb koordinatalar sistsmasida, o'zgaruvchilarni amashtirib hisoblash. Jordan o'lchovlari.
16 Ikki va uch o'lchovli integrallarni geometriya va mexanika –masalalarini yechishga tadbiqlari.
17. Birinchi va ikkinchi to'g'ri chiziqli integrallar orasidagi bog'lanish. Ostrogradskiy-Grin formulasining talbiqlari.
18. Birinchi va ikkinchi tur sirt integrallarini hisoblashga doir mashqlar. Stoks formulasining tadbiqlari.
19. Sirt integrallarini tadbiqlari.
20. Ostrogradskiy teoremasining tadbiqlari.
21. Vektor maydondagi ikkinchi tartibli amallar. Nabla operatori bilan amallar bajarish.
22. Laplas operatorining silindirik va sferik koordinatalarda ifodalanishi. Maydonlar nazariyasining tadbiqi.
23. Giperbolik va teskari giperbolik funktsiyalar. Yoyiq egri chiziq bo'yicha olingan integral.
24. Modulning maksimum prinsipi. Koshi turidagi integral. Yuqori tartibli hosilaning mavjudligi. Analitik funktsiyaninig yuqori tartibli hosilasi.
25. Funktsiyalarni Loran qatoriga yoyish. Qutbga nisbatan funktsiyaning chegirmasini topish.
26. Operatsion hisob yordamida differentsial tenglamalar va tenglamalar sistemasini yechish. Tebranishlar differetsial tenglamalarni yechish.
27. Tor tebranishlari tenglamasini Dalamber usuli va o'zgaruvchilarni ajratish (Furye) usuli bilan yechish. Torning majburiy tebranishi.
28. Issiqlik tarqalish tenglamalarini metall sterjenda, chegaralanmagan sterjenda, fazoda tekshirish. Laplasning ikkinchi tenglamasiga keltiriladigan masalalar, Dirixle masalasini yechish.
29. Amaliyotda ko'p uchraydigan muxim diskret va uzluksiz taqsimotlar, normal taqsimotni tadbiqlari.
30. Ehtimollar nazariyasining limit teoremalari. Katta sonlar qonuni. Chebqshey tengsizligi. Bir xil taqsimlangan o'zaro bo'g'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun markaziy limit teoremasi.
31. Tasodifiy miqdorlar sistemasi, ularning taqsimot qonunlari, shartli taqsimot qonunlari. Kovariatsiya va korrelyatsiya. Ikki o'lchovli normal taqsimot qonuni va uning o'ziga xos hususiyati.
32. Ehtimollar nazariyasining texnikaviy masalalarda qo'llanilishi.
Taqsimotning noma'lum parametrlari uchun statistik baholarni qurishda masalaning qo'yilishi. Statistik baholarga talablar: siljimaslik, asoslilik, effektivlik.
33. Dispertsiy bahosining xossalari, tanlanmaning to'g'rilangan dispersiyasi. Statistik baholar qurish uslublari. Ishonchlilik intervallari. Statistik gipotezalar va ularning sinflari. Gipotezalarni tekshirish algaritmi. Bnrinchi va ikkiichi turdagi xatoliklar.
34. Eng quvvatli mezonlar. Neyman-Pirson mezoni. Kolmagorov mezoni. Pirsonning Xi kvadrat mezoni.
35. Korrelyatsion- regression tahlil elementlari. Korrelyatsiya tushunchasining kelib chikish tarixi va xossalari.
36. Regressiyaning har xil ko'rinishdagi tenglamalarini topishda eng kichik kvdratlar usulining mohiyati va har xil modifikatsiyalari.

Talabalarning bilimini baholash

Talabalarning o'zlashtirishini nazorat qilish O'zbekiston Res'ublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2010 yil 25 avgustdagi 333-sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan "Oliy ta'lim muassasalarida talabalar bilimini nazorat qilish va nazoratning reyting tizimi to'g'risida NIZOM" asosida amalga oshiriladi. Mazkur ishchi dasturdagi baholash turlari va mezoni shu NIZOM asosida ishlab chiqildi.

Nazorat turlari va ularni amalga oshirish tartibi

Talabalarning bilim saviyasi va oraliq o'zlashtirish darajasining Davlat ta'lim standartlariga muvofiqligini ta'minlash uchun quyidagi nazorat turlarini o'tkazish nazarda tutiladi:

Joriy nazorat (JN) – talabaning oliy matematika fani mavzulari bo'yicha bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Joriy nazorat oliy matematika fanining xususiyatidan kelib chiqqan holda, amaliy mashg'ulotlarida: og'zaki so'rov, **misol va masalalarni yechish**, test o'tkazish, uy vazifalarini tekshirish shakllarida o'tkaziladi. Oliy matematika va matematika fanlaridan har bir semestrda **2** marta joriy nazorat o'tkaziladi.;

Oraliq nazorat (ON) – semestr davomida Oliy matematika va matematika fanlaridan o'quv dasturining tegishli bo'limi tugallangandan keyin talabaning bilim va amaliy ko'nikma darajasini aniqlash va baholash usuli. Oliy matematika va matematika fanlaridan har bir semestrda **2** tadan oraliq nazorat o'tkaziladi. Har bir oraliq nazorat "yozma ish" yoki "test sinovi" shaklida yakka tartibda o'tkaziladi.

Yakuniy nazorat (YaN)–har bir semestr yakunida oliy matematika va matematika fanlari bo'yicha nazariy bilim va amaliy ko'nikmalarni talabalar tomonidan o'zlashtirish darajasini baholash usuli. Yakuniy nazorat asosan tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan yozma ish shaklida o'tkaziladi.

Oraliq nazoratni o'tkazish jarayoni "Oliy matematika" kafedrasi mudiri tomonidan tuzilgan komissiya ishtirokida davriy ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, oraliq nazorat natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda oraliq nazorat qayta o'tkaziladi.

NamMQI rektorining buyrug'i bilan ichki nazorat va monitoring bo'limi rahbarligida tuzilgan komissiya ishtirokida yakuniy nazoratni o'tkazish jarayoni davriy ravishda o'rganib boriladi va uni o'tkazish tartiblari buzilgan hollarda, yakuniy nazorat natijalari bekor qilinishi mumkin. Bunday hollarda yakuniy nazorat qayta o'tkaziladi.

Baholash tartibi va mezonlari

Talabalarning bilim saviyasi, ko'nikma va malakalarini nazorat qilishning reyting tizimi asosida talabaning oliy matematika va matematika fanlari bo'yicha o'zlashtirish darajasi ballar orqali ifodalanadi.

Oliy matematika va matematika fanlari bo'yicha talabaning semestr davomidagi o'zlashtirish ko'rsatkichi 100 ballik tizimda baholanadi. Ushbu 100 ball nazorat turlari bo'yicha quyidagicha taqsimlanadi:

yakuniy nazoratga – 30 ball; oraliq nazoratlarga – 30 ball; joriy nazoratlarga – 40 ball.

Talabaning fan bo'yicha o'zlashtirish ko'rsatkichini nazorat qilishda mezonlar quyidagicha:

1) 86-100 ball uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim:

xulosa va qaror qabul qilish; ijodiy fikrlay olish; mustaqil mushohada yurita olish;

olgan bilimlarini amalda qo'llay olish; mohiyatini tushunish; bilish, aytib berish;

tasavvurga ega bo'lish.

2) 71-85 ball uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim:

mustaqil mushohada yurita olish; olgan bilimlarini amalda qo'llay olish; mohiyatini tushunish; bilish, aytib berish; tasavvurga ega bo'lish.

3) 55-70 ball uchun talabaning bilim darajasi quyidagilarga javob berishi lozim:

mohiyatini tushunish; bilish, aytib berish; tasavvurga ega bo'lish.

4) quyidagi hollarda talabaning bilim darajasi 0-54 ball bilan baholanishi mumkin:

aniq tasavvurga ega bo'lmaslik; bilmaslik.

Namunaviy mezonlar asosida oliy matematika va matematika fanlaridan ishlab chiqilgan va talabalarga e'lon qilinadigan joriy va oraliq nazoratlar bo'yicha aniq mezonlar quyidagicha.

Har bir joriy nazoratda talabaning:

1) Mashg'ulotlardagi ishtiroki uchun 0-2 ball;

2) Mustaqil ta'lim to'shiriqlarini bajargani uchun 0-8 ball

3) Mashg'ulotlardagi faolligi uchun 0-10 (tajriba mashg'ulotlari o'tkaziladigan mashg'ulotlardagi faolligi uchun 0-6 ball, tajriba mashg'ulotini bajargani uchun 0-4 ball), ball;

Jami 0-20 ball qo'yiladi.

Har bir oraliq nazorat uchun 5 ta to'shiriqdan iborat yozma ish variantlari tuziladi va bu topshiriqlarning har biriga 0-3 balldan, yoki 15 ta savoldan iborat test topshiriqlari tuziladi va ularning har biriga 0-1 balldan belgilanadi, jami 0-15 ball qo'yiladi. Variantlarni tuzishda semestr boshida talabalarga tarqatilgan "Mustaqil topshiriqlar to'plami" ga asoslaniladi.

Yakuniy nazorat uchun har bir semestrda tayanch tushuncha va iboralarga asoslangan 6 ta topshiriqdan iborat yozma ish variantlari tuziladi va bu topshiriqlarning har biriga 0-5 balldan, jami 30 ball qo'yiladi.

Umumiy baholash mezoni quyidagicha:

Kurs	Semestr	Maks. Reyting ball	Maks. Ball (saralash bali)	JB (40 b)		OB(30 b)		YaB (30 b)	Jami (100 b)
				1	2	1	2		
1	1	109	100(55)	20	20	15	15	30	100
	2	110	100(55)	20	20	15	15	30	100
2	3	109	100(55)	20	20	15	15	30	100
	4	110	100(55)	20	20	15	15	30	100

Talabaning semestr davomida to'plagan umumiy bali har bir nazorat turidan belgilangan qoidalarga muvofiq to'plagan ballari yig'indisiga teng.

Talabaning fan bo'yicha reytingi quyidagicha aniqlanadi: $R_f = \frac{V \cdot O'}{100}$, bu yerda:

V– semestrda fanga ajratilgan umumiy o'quv yuklamasi (soatlarda);

O' –fan bo'yicha o'zlashtirish darajasi (ballarda).

Joriy va oraliq nazoratlarga ajratilgan 70 ballning saralash balidan, yani 38,5 balldan yuqori ball to'plagan barcha talabalar ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kiritiladi.

Joriy va oraliq nazoratlarda kam ball to'plagan talaba qayta topshirish uchun navbatdagi shu nazorat turigacha, so'nggi joriy va oraliq nazoratlar uchun yakuniy nazoratgacha muddat beriladi.

Talaba semestrda joriy va oraliq nazorat turlari bo'yicha to'plagan ballari ushbu nazorat turlari umumiy balining 55 foyizidan kam, yani 0-38,5 balldan kam, yoki semestr yakunida joriy, oraliq va yakuniy nazorat turlari bo'yicha to'plagan ballari yig'indisi 55 balldan kam bo'lsa u akademik qarzdor hisoblanadi.

Joriy va oraliq nazorat turlari bo'yicha 55 va undan ortiq ball to'plagan talaba fanni o'zlashtirgan deb hisoblanadi va ushbu fan bo'yicha yakuniy nazoratga kirmasligiga yo'l qo'yiladi.

Asosiy adabiyotlar

1. Cladio Canuto, Anita Tabakko. Mathematikal Analysis I, II. Shringer-Verlag Italiya. Milan 2015,2010.

2. Д. Писменнўй. Конспект лекциипо вўсшей математике. 1,2,3 часть. М. Айрис Пресс, 2008.
3.Я.С.Бугров,С.М.Николский. Вўсшая математика.Учеб для Вузов:В 3т-6-е изд.стеротип.-М.Дрофа,2004
4.К.В.Балдин,В.Н.Башлўков,А.В.Рукосуев. Вўсшая математика.Учебник.-М Флинт:НОУ ВПО "МПСИ"-360 с.
5.Ю.Ф.Сенчук.Математический анализ для инженеров.1,2 часть-Харков:НТУ «ХПИ»,2003.-408с
6.Ахмедов А.Б. Шодмонов Г,Эсонов Э.Э ,Абдукаримов А.А,Шамсиев Д.Н. Олий математикадан индивудал топшириқлар. –Тошкент:Ўзбекистон энциклопедияси,2014
7.Хуррамов Ш.Р.Олий математика.Мисол ва масалалар,назорат топшириқлари,1,2,3-қисмлар.-Тошкент:Фан ва технологиялар,2015

Qo'shimcha adabiyotlar

1.Мирзиёев Ш.М. Эркин ва Фаровон,демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз.Ўзбекистон Республикаси Президентинг лавозимига кириш тантанали маросимига бағишланган Олий мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқи.-Т.:"Ўзбекистон" НМИУ,2016.-56 б.
2.Мирзиёев Ш.М.Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови.Ўзбекистон Республикаси конституцияси қабул қилинганлигининг 24 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маъруза.2016 йил 7декабрь.-Т."Ўзбекистон"НМИУ,2016.-48 б.
3.Мирзиёев Ш.М.Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз.-Т.:"Ўзбекистон"НМИУ,2017.-488 б
4.Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Харакатлар стратегияси тўғрисида.Т.:2017 йил 7 февраль,ПФ-4947-сонли Фармони.
5.John james stewart.Calculus.Seventh editions.Metric version.Brooks Cole. Cengage learning,2012.
6.Y.Suhov,M.Kelbert.Probability and Statisties by Example.2nd edition.United Kingdom.University prining house,Cambridge CB2 8BS,2014.
7.Пислунов Н.С.Дифференциальное иинтегральное исчисление для ВТУЗов,2 частях-М.:Наука.2001.
8.Черненко В.Д.Вўсшая математика в примерах и задачах.Учебное пособие для вузов.-СПб.:Политехника,2003,-703 с.
9.В.Е.Гумурман.Руководство к решению задач по теори вероятностей и математической статистике. М.:Вўсшей школа,2004.
10.Сборник индивидуальнўх заданий по вўсшей математике.Под обҳей редакцией А.П.Рябушко,в 3ч.Минск:»Вўсшая школа».2007
11.П.Минорский.Сборник задач по вўсшей матиматике.ФИЗМАТЛИТ 2010й.
12. http://www.mcce.ru, http://lib.mexmat.ru
13. http:// www.a-geometry.narod.ru
14. http://allmath.ru/highermath/mathanalis/

15. http//www.el.tfi.us/pdf/enmcoq22.uzk.pdf/

III. MODULNI O'QITISHDA FOYDALANILADIGAN INTERFAOL TA'LIM METODLARI

KIRISH

"Oliy matematika fani bo'yicha ta'lim texnologiyalari ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarni texnologiyalashtirish qoidalari asosida ishlab chiqildi.

Talabalarga bilim berishda zamonaviy ta'lim texnologiyalarining ahamiyati to'g'risida so'z borganda Prezidentimiz I.A.Karimovning "O'quv jarayoniga yangi axborot va pedagogik texnologiyalarni keng joriy etish, bolalarimizni komil insonlar etib tarbiyalashda jonbozlik ko'rsatadigan o'qituvchi va domlalarga e'tiborimizni yanada oshirish, qisqacha aytganda, ta'lim-tarbiya tizimini sifat jihatidan butunlay yangi bosqichga ko'tarish diqqatimiz markazida bo'lishi darkor"1 degan so'zlarini ta'kidlash o'rinlidir. Bu masala "Barkamol avlod yili" Davlat dasturida ham asosiy yo'nalishlardan biri sifatida e'tirof etilgan.

Kitobda keltirilgan ta'lim texnologiyalarining har biri o'zida o'quv mashg'ulotini o'tkazish shart-sharoiti to'g'risida axborot materiallarini, pedagogik maqsad, vazifa va ko'zlangan natijalarni, o'quv mashg'ulotning rejasi, o'qitishning usul va vositalarini mujassamlashtirgan. SHuningdek, bu o'quv mashg'ulotining texnologik kartasini, ya'ni o'qituvchi va o'quvchining mazkur o'quv mashg'ulotida erishadigan maqsadi bo'yicha hamkorlikdagi faoliyatning bosqichma-bosqich ta'riflanishini ham o'z ichiga oladi.

Kitob tarkibi kirish, ta'lim texnologiyasining konseptual asoslari, har bir mavzu bo'yicha ma'ruza va seminar mashg'ulotlarida o'qitish texnologiyasidan iborat. Ma'lumotlar maksimal darajada umumlashtirilgan va tartibga solingan. Ularni o'zlashtirish va yodda saqlab qolishni kuchaytirish uchun jadval va chizmalardan foydalanilgan.

Konseptual asoslar qismida "Oliy matematika o'quv kursining dolzarbligi va o'qitish strukturasi, kursning mazmuni, o'quv kursi bo'yicha ma'ruza va amaliy mashg'ulotlarda o'qitish texnologiyalarini ishlab chiqishning konseptual asoslari yoritib berilgan. So'ngra loyihalashtirilgan ta'lim texnologiyasi keltirilgan:

(1) Ma'ruza mashg'ulotlarida 5 xil : kirish, tematik, ma'ruza-kuzatish, ma'ruza -muloqat va yakunlovchi ma'ruza.

(2) Amaliy mashg'ulotlar olingan bilimlarni iqtisodiy masalalarga qo'llash, kengaytirish, chuqurlashtirish va mustaqil ishlashni rivojlantirishga asoalangan.

Keltirilgan ta'lim texnologiyasi "Oliy matematika(iqtisodchilar uchun)" fani o'qitiladigan barcha oliy o'quv yurtlarida qo'llanilishi mumkin.

Hozirgi kunda jahon tajribasidan ko'rinib turibdiki, ta'lim jarayoniga o'qitishning yangi, zamonaviy usul va vositalari kirib kelmoqda va samarali

1 Ўзбекистон Конституцияси – биз учун демократик тараққиёт йўлида ва фуқаролик жамиятини барпо этишда мустаҳкам пойдевордир. – Президент Ислом Каримовнинг Ўзбекистон Республикаси Конституцияси қабул қилинганининг 17 йиллигига бағишланган тантанали маросимдаги маърузаси // Халқ сўзи, 2009 йил 6 декабрь.

foydalanilmoqda. Jumladan, Toshkent Davlat Iqtisodiyot universitetida ham innovasion va zamonaviy pedagogik g'oyalar amalga oshirilmoqda: o'qituvchi bilim olishning yagona manbai bo'lib qolishi kerak emas, balki talabalar mustaqil ishlash jarayonining tashkilotchisi, maslahatchisi, o'quv jarayonining menejeri bo'lishi lozim. Ta'lim texnologiyasini ishlab chiqish asosida aynan shu g'oyalar yotadi.

OLIY MATEMATIKA O'QUV KURSI BO'YICHA TA'LIM TEXNOLOGIYASINING KONSEPTUAL ASOSLARI

1 Oliy matematika kursining dolzarbligi va ahamiyati

Mazkur ta'lim texnologiyasuda Oliy matematika fanining chiziqli algebra elementlari, tekislikdagi va fazodagi analitik geometriya, vektorlar algebrasi, bir o'zgaruvchili va ko'p o'zgaruvchili funktsiyalarning differentsial hisobi, integral hisob elementlari, qatorlar nazariyasi, birinchi va ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar bo'limlari kiritilgan. Shuningdek, matematik tushuncha va tasdiqlarning iqtisodiy talqini, matematik modellashtirish va iqtisodning matematik modellari haqida tushuncha, iqtisodda uchraydigan ayrim matematik modellar qarab chiqildi. "Oliy matematika kursini o'qitishdan asosiy maqsad talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlash, matematik taffakurini shakllantirish va rivojlantirish, o'zining fikr-mulohazalarini, xulosalarini asosli tarzda aniq bayon etishga o'rgatish, iqtisodning nazariy va amaliy masalalarini echa olishga yetarli matematik apparatni egallash va uni qo'llash, iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzish va tahlil qilishga o'rgatish.

Matematika ta'limda asosiy (tayanch) fan hisoblandi. Fanni o'qitishda ilg'or pedagogik texnologiyalarning «aqliy hujm», «interaktiv», «prizentatsia» usullaridan va Scientific Work Place, Matlap, Mathcad, Mesosour, Mathematica, Statistica, Eviews, MS Projeet, Stata, Stadia, Tecplot, Mtex, Latex kabi axborot texnologiyalaridan foydalaniladi.

Hozirgi kunda O'zbekistonda ta'lim tizimidagi islohotlarning asosini shakllantiruvchi qator me'yoriy xujjatlar qabul qilingan va amalga oshirilib kelinmoqda. Bular asosida "Ta'lim to'g'risida"gi va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi to'g'risida"gi qonunlar alohida o'rin tutadi. Bu qonunlardan kelib chiqadigan vazifa ta'lim dasturlari mazmunining yuqori sifatiga erishish va yangi pedagogik texnologiyalarni joriy qilishdir.

Ushbu usullar talabalarning ijodiy faolligini oshirishda, turli masalalarni hal qilishda, muammoni hal qilishning eng maqbul yo'llarini topishda yordam beradi. Shuningdek, yo'nalishlar bo'yicha bakalavrlar tayyorlash davlat ta'lim standartini amalga oshirishda amaliy vosita hisoblanadi.

Davlat ta'lim standartida bakalavrning tayyorgarlik darajasiga quyidagi talablar qo'yilgan.

Bakalavr:

- dunyoqarashni kengaytiruvchi bilimlar tizimiga ega bo'lishi, gumanitar va sosial–iqtisodiy fanlarning asosini, davlatning hozirgi kundagi siyosatining dolzarb masalalarini bilishi, ijtimoiy muammo va hodisalarni mustaqil tahlil qila olishga qodir bo'lishi;

- mamlakatimiz tarixini bilishi, milliy g'oya va umuminsoniy qadriyatlar masalalari bo'yicha o'z nuqtai-nazarini ilmiy asoslash, milliy mustaqillik g'oyasi asosida faol hayotiy nuqtai nazarga ega bo'lishi;
- tabiat va jamiyatda sodir bo'ladigan jarayon va hodisalar to'g'risida yaxlit tasavvurga ega bo'lishi, ulardan hayotda va kasbiy faoliyatida ilmiy asoslangan holda foydalana olishi;
- insonning insonga, jamiyatga, atrof-muhitga nisbatan bo'lgan munosabatini boshqarishning huquqiy va ahloqiy me'yorlarini bilish, kasbiy ish jarayonida ularni hisobga ola bilishi;
- axborotni to'plash, saqlash, qayta ishlash va uni qo'llash usullarini bilishi, o'zining kasbiy ish tajribasiga asoslangan xulosalar chiqarishi;
- mustaqil ravishda yangi bilimlarni o'zlashtirishi, o'z malakasini oshirishi va mehnatini ilmga asoslangan holda tashkillashtirishi;
- sog'lom hayot kechirish tarzining muhimligi to'g'risida ilmiy tushunchalarga va asoslarga, jismoniy rivojlanish borasidagi bilim va malakalarga ega bo'lishi;
- kadrlar malakasini oshirish va qayta tayyorlash tizimida qo'shimcha kasbiy ta'lim olishi kerak.

Oliy matematika fani o'qituvchisi doimo o'z pedagogik mahoratini oshirib, uni san'at darajasiga etkazib borishi kerak. O'z fikrini tushunarli, ko'rgazmali ifodalay bilish, jahon va

mamlakatimiz ijtimoiy-iqtisodiy hayotidagi voqealarga o'z munosabatini bildirishi, ta'lim berishga ijodiy yondashuvni rivojlantirib borishi kerak.

Odatdagi ma'ruza darslarining an'anaviy tarzda, ilg'or pedagogik usullarsiz olib borilishi talabadan faollik talab qilmaydi. Darsni o'zlashtirish ham osonday tuyuladi, fanga nisbatan qiziqish uyg'onmaydi. Muammoli holatlarning yaratilishi, aniq misollar yordamida iqtisodiy masalalarning echilishi, talabani fanga qiziqtirish, uning faolligini oshirib, kengroq fikrlashga, maqsadga qarab intilishga, kerakli bilim va ko'nikmalar hosil qilishga yordam beradi.

2	Oliy matematika fani bo’yicha ma’ruza va seminar mashg’ulotlarida ta’lim texnologiyalarini ishlab chiqishning konseptual asoslari

O’zbekiston mustaqilligining dastlabki kunlaridanoq yuksak malakali va yangicha dunyoqarashga ega bo’lgan milliy kadrlarni tayyorlash, hayotimizda muhim ahamiyatga ega bo’lgan masalalar qatorida ta’lim- tarbiya tizimini tubdan isloh qilish, uni zamon talablari darajasiga ko’tarish, barkamol avlodni tarbiyalab voyaga etkazish dolzarb masala bo’lib qoldi.

Hozirgi kunda innovasion texnologiyalar, pedagogik va axborotlar texnologiyalarini o’quv jarayonida qo’llashga bo’lgan qiziqish, e’tibor kundan – kunga kuchayib bormoqda, bunday bo’lishining sabablaridan biri, shu vaqtgacha an’anaviy ta’limda o’quvchi talabalarni faqat tayyor bilimlarni egallashga o’rgatilgan bo’lsa, zamonaviy texnologiyalar ularni egallayotgan bilimlarini o’zlari qidirib topishlari, mustaqil o’rganib tahlil qilishlariga, hatto xulosalarni ham o’zlari chiqarishlariga o’rgatadi.

O’quv jarayoni bilan bog’liq ta’lim sifatini belgilovchi holatlar quyidagilar:
-yuqori ilmiy- pedagogik darajada dars berish,
-muammoli ma’ruzalar o’qish,
-darslarni savol- javob tarzida qiziqarli tashkil qilish,
-ilg’or pedagogik texnologiyalardan va mul’timedia qo’llanmalaridan foydalanish,
-talabalarni undaydigan, o’ylantiradigan muammolarni ular oldiga qo’yish,
-talabchanlik,
-talabalar bilan individual ishlash,
-erkin muloqot yuritishga, ilmiy izlanishga jalb qilish.

Aytilganlardan kelib chiqqan holda “Oliy matematika o’quv kursi bo’yicha ta’lim texnologiyasini loyihalashtirishdagi asosiy konseptual yondoshuvlarni keltiramiz:
Shaxsga yo’naltirilgan ta’lim. Bu ta’lim o’z mohiyatiga ko’ra ta’lim jarayonining barcha ishtirokchilarini to’laqonli rivojlanishlarini ko’zda tutadi. Bu esa ta’limni

loyihalashtirilayotganda, albatta, ma’lum bir ta’lim oluvchining shaxsini emas, avvalo, kelgusidagi mutaxassislik faoliyati bilan bog’liq o’qish maqsadlaridan kelib chiqqan holda yondshilishni nazarda tutadi.

Ta’lim texnologiyasi insoniylik tamoyillariga tayanadi. Falsafa, pedagogika va psixologiyada bu yo’nalishning o’ziga xosligi talabaning individualligiga alohida e’tibor berish orqali namoyon bo’ladi.

Shulardan kelib chiqqan holda “Oliy matematika kursining ta’lim texnologiyalarini loyihalashtirishda quyidagi asosiy konseptual yondashuvlarga e’tibor berish kerak.

Ta’limning shaxsga yo’naltirilganligi. O’z mohiyatiga ko’ra bu yo’nalish ta’lim jarayonidagi barcha ishtirokchilarning to’laqonli rivojlanishini ko’zda tutadi. Bu esa Davlat ta’lim standarti talablariga rioya qilgan holda o’quvchining intellektual rivojlanishi darajasiga yo’naltirilib qolmay, uningning ruhiy-kasbiy va shaxsiy xususiyatlarini hisobga olishni ham anglatadi.

- **Tizimli yondashuv**. Ta'lim texnologiyasi tizimning barcha belgilarini o'zida mujassam qilishi zarur: jarayonning mantiqiyligi, undagi qismlarning o'zaro aloqadorligi, yaxlitligi.
- **Amaliy yondashuv**. SHaxsda ish yuritish xususiyatlarini shakllantirishga ta'lim jarayonini yo'naltirish; o'quvchi faoliyatini faollashtirish va intensivlashtirish, o'quv jarayonida uning barcha layoqati va imkoniyatlarini, sinchkovligi va tashabbuskorligini ishga solishni shart qilib qo'yadi.
- **Dialogik yondashuv.** Ta'lim jarayonidagi ishtirokchi sub'ektlarning psixologik birligi va o'zaro hamkorligini yaratish zaruratini belgilaydi. Natijada esa, shaxsning ijodiy faolligi va taqdimot kuchayadi.
- **Hamkorlikdagi ta'limni tashkil etish.** Demokratiya, tenglik, sub'ektlar munosabatida o'qituvchi va o'quvchining tengligi, maqsadini va faoliyat mazmunini birgalikda aniqlashni ko'zda tutadi.
- **Muammoli yondashuv.** Ta'lim jarayonini muammoli holatlar orqali namoyish qilish asosida o'quvchi bilan birgalikdagi hamkorlikni faollashtirish usullaridan biridir. Bu jarayonda ilmiy bilishning ob'ektiv ziddiyatlarini aniqlash va ularni hal qilishning dialektik tafakkurni rivojlantirish va ularni amaliy faoliyatda ijodiy ravishda qo'llash ta'minlanadi.
- **Axborot berishning eng yangi vosita va usullaridan foydalanish,** ya'ni o'quv jarayoniga kompyuter va axborot texnologiyalarini jalb qilish.

Yuqoridagi konseptual yondashuv va "Oliy matematika(iqtisodchilar uchun)" fanining tarkibi, mazmuni, o'quv axborot hajmidan kelib chiqqan holda o'qitishning quyidagi usul va vositalari tanlab olindi.

- **O'qitish usullari va texnikasi**: muloqot, keys stadi, muammoli usul, o'rgatuvchi o'yinlar, "aqliy hujum", insert, "Birgalikda o'rganamiz", pinbord, ma'ruza (kirish ma'ruzasi, vizual ma'ruza, tematik, ma'ruza-konferensiya, aniq holatlarni echish, avvaldan rejalashtirilgan xatoli, sharhlovchi, yakuniy).
- **O'qitishni tashkil qilish shakllari**: frontal, kollektiv, guruhiy, dialog, polilog va o'zaro hamkorlikka asoslangan.
- **O'qitish vositalari**: odatdagi o'qitish vositalari (darslik, ma'ruza matni, tayanch konspekti, kodoskop)dan tashqari grafik organayzerlar, kompyuter va axborot texnologiyalari.
- **O'zaro aloqa vositalari**: nazorat natijalarining tahlili asosida o'qitishning diagnostikasi (tashxisi).
- **Boshqarishning usuli va vositalari.** O'quv mashg'ulotini texnologik karta ko'rinishida rejalashtirish o'quv mashg'ulotining bosqichlarini belgilab, qo'yilgan maqsadga erishishda o'quvchi va o'qituvchining hamkorlikdagi faoliyatini talabalarning auditoriyadan tashqari mustaqil ishlarini aniqlab beradi.
- **Monitoring va baholash.** O'quv mashg'uloti va butun kurs davomida o'qitish natijalarini kuzatib borish, o'quvchi faoliyatini har bir mashg'ulot va yil davomida reyting asosida baholash.

Ma’ruza mashg’ulotini tashkil etishning shakl va xususiyatlari

№	Ma’ruza shakllari	O’ziga xos tavsiflovchi xususiyatlari
1.	Kirish ma’ruzasi	Fan to’g’risida yaxlit tasavvur hamda ma’lum yo’nalishlar beradi. Pedagogik vazifasi: o’quvchini ushbu fanning vazifalari va maqsadi bilan tanishtirish, kasbiy tayyorgarlik tizimida uning o’rni va rolini belgilash, kursning qisqacha sharhini berish, fanning yutuqlari va taniqli olimlar nomlari bilan tanishtirib, kelajakdagi izlanishlarning yo’nalishini belgilash, tavsiya qilingan o’quv-uslubiy adabiyotlar tahlilini berish, hisobot va baholashning muddatlari va shakllarini belgilash.
2.	Ma’ruza axborot	Ma’ruzaning odatdagi an’anaviy turi. Pedagogik vazifasi: o’quv ma’lumotlarini bayon qilish va tushuntirish.
3.	Sharhlovchi ma’ruza	Bayon qilinayotgan nazariy fikrlarning o’zagini, ilmiy tushunchalar va butun kurs yoki bo’limlarining konseptual asosini tashkil etadi. Pedagogik vazifasi: ilmiy bilimlarni tizimlashtirishni amalga oshirish, fanlarning o’zaro aloqadorligini ochish.
4.	Muammoli ma’ruza	Yangi bilimlar qo’yilgan savol, masala, holatning muammoliligi orqali beriladi. Bunda o’quvchining o’qituvchi bilan birgalikdagi bilish jarayoni ilmiy izlanishga yaqinlashdi. Pedagogik vazifasi: yangi o’quv axborotining mazmunini ochish, muammoni qo’yish va uni echimini topishni tashkil qilish, hozirgi zamon nuqtai nazarlarini tahlil qilish.
5.	Vizual ma’ruza	Ma’ruzaning mazkur shakli vizual materiallarni namoyish etish hamda ularga aniq va qisqa sharhlar berishga qaratilgan. Pedagogik vazifasi: yangi o’quv ma’lumotlarini o’qitishning texnik vositalari va audio, videotexnika yordamida berish.
6.	Binar (ikki kishilik) ma’ruza	Bu ma’ruza ikki o’qituvchining yoki ikkita ilmiy maktab namoyondasining, o’qituvchi-talabaning dialogidan iborat. Pedagogik vazifasi: yangi o’quv ma’lumotlarining mazmunini yoritish.
7.	Avvaldan rejalashtirilgan xatoli ma’ruza	Xatolarni izlashga mo’ljallangan mazmuni va uslubiyatida, ma’ruza oxirida tinglovchilar tashxisi o’tkaziladi va qilingan xatolar tekshiriladi. Pedagogik vazifasi: yangi materiallar mazmunini yoritish, berilgan ma’lumotni doimiy nazorat qilishga talabalarni rag’batlantirish.

8.	Ma'ruza konferensiya	Avvaldan qo'yilgan muammo va dokladlar tizimi (5-10 minut)dan iborat ilmiy-amaliy dars sifatida o'quv dasturi chegarasida o'tiladi. Dokladlar birgalikda muammoni har tomonlama yoritishga qaratilishi kerak. Mashg'ulot oxirida o'qituvchi mustaqil ishlar va talabalarning ma'ruzalarga yakun yasab, to'ldirib, aniqlashtirib xulosa qiladi. Pedagogik vazifasi: yangi o'quv ma'lumotning mazmunini yoritish.
9.	Maslahat ma'ruza	Turli ssenariylar yordamida o'tishi mumkin. Masalan, 1) «Savol-javob» - ma'ruzachi tomonidan butun kurs bo'yicha yoki alohida bo'lim bo'yicha savollarga javob beriladi. 2) «Savol-javob-diskussiya» - izlanishga imkon beradi. Pedagogik vazifasi: yangi o'quv ma'lumotni o'zlashtirishga qaratilgan.

OLIY MATEMATIKA FANIDAN MA'RUZA VA AMALIY MASHG'ULOTLARNI O'QITISH TEXNOLOGIYALARI

Ma'ruza mashg'ulotining texnologik kartasi

Bosqichlar, vaqti	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Talaba faoliyatining mazmuni
1-bosqich. Kirish (20 daqiqa)	1.1.Fan nomini aytadi. Fan haqida umumiy tushunchalar beradi. Talabalarni O'quv kursi reyting baholash va har bir mashg'ulotdagi faoliyatini baholash ko'rsatkichlari va mezonlari bilan tanishtiradi. 1.2. Oliy matematika fanidan foydalaniladigan adabiyotlar ruyxati bilan tanishtirish. 1.3. O'quv mashg'uloti mavzusi, maqsadi va o'quv faoliyati natijalarini aytadi. 1.4. Shu mavzu bo'yicha biladigan tushunchalarni aytishni so'raydi, (aqliy hujum metodi) aytilgan tushunchalarning barchasini doskaga yozadi 1.5. Bu ish mashg'ulotning ohirigacha tugatilishini aytadi.	Tinglaydi Tinglaydi Yozadi Mavzu nomini yozib oladi. Tushunchalarni aytadi Tinglaydi
2-bosqich. Asosiy bo'lim (50 daqiqa)	2.1 Shu mavzu bo'yicha vizual materiallar bilan tanishtiradi va mavzu rejasi, tayanch iboralar bilan tanishib chiqishni so'raydi.	O'qiydi

	2.2. Mavzuni tushuntiradi. Oliy matematika fanining roli bilan tanishtiradi. Vizual material yordamida mavzuni tushuntiradi. Har bir punkt bo'yicha xulosa chiqarar ekan, eng muhim joylariga e'tibor berishni so'raydi. 2.3. Mavzu bo'yicha doskada yozilgan tayanch iboralarga qaytishni so'raydi. Talabalar bilan birgalikda ularning ketma-ketligini aniqlaydi, takrorlangan ma'lumotlar shu erning o'zidayoq o'chiriladi (pinbord texnikasi) fanga aloqasi bo'lmagan ma'lumotlarni ham o'chiradi, zarur bo'lgan tayanch ibora va terminlarni kiritadi.	Eshitadi. Kerakli joylarni yozib oladi Savollar beradi Har bitta tayanch iborani muhokama qiladi. Tinglaydi
3 – bosqich. Yakunlovchi (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakunlovchi xulosalar qiladi. Mavzu bo'yicha olingan bilimlarni qaerda ishlatish mumkinligi ma'lum qiladi. 3.2. Mavzu maqsadiga erishishdagi talabalar faoliyati tahlil qilinadi va baholanadi. 3.3. Mavzu bo'yicha mustaqil o'rganish uchun savol va test savollari beradi.	Savollar beradi Mustaqil tayyorlanish uchun savollarni yozib oladi.

Amaliy mashg'ulotning texnologik xaritasi

Ish bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Talaba faoliyatining mazmuni
1-bosqich. Mavzuga kirish (10 daqiqa)	1.1.Mavzu nomini, maqsad va vazifalarini aytadi. 1.2. Mavzuni olib borish formasi va baholash mezonlarini aytadi. 1.3. Shu mavzu bo'yicha tarqatma materiallarni har bir talabaga tarqatadi.	Mavzu nomini yozib oladi.
2-bosqich. Asosiy bo'lim (65 daqiqa)	2.1. Talabalarni 3-4 guruhga kartochkalar yordamida ajratadi. 2.2.Har bir guruh liderini o'qituvchi o'zi tanlaydi. 2.3. Guruhga topshiriqlarni tarqatadi. 2.4.Barcha guruh topshiriqlarni bajargandan so'ng, guruh topshiriqlarini bir – biri bilan almashtiradi 3 marta. 2.5. Guruh a'zolari topshiriqlarni bajarib	3-4 guruhga ajraladi. Topshiriq bilan tanishadi, bajaradi. Boshqa guruh topshiriqlarini ham bajaradi.

	bo'lgandan so'ng, topshiriqlar birinchi holatda o'z guruhlariga topshiriladi. 2.6. Guruhdan o'qituvchi tanlagan talaba prezentasiyaga tayyorlanishini aytadi.	Prezentasiyani amalga oshiradi.
3 – bosqich. Yakunlovchi (10 daqiqa)	3.1. Guruhlar prezentasiyani baholash jadvalini to'ldirishini aytadi. 3.2. Prezentasiyani yakunlab, prezentasiya jadvalini yig'ib oladi va ialabalar bilimini baholaydi. 3.2. Talabalar bilimini ma'ruza mashg'ulotida berilgan savollarning javoblari va darsdagi faolligi asosida baholaydi. 3.3. Mustaqil ishlashga savollar beradi.	Savollar beradi. Tinglaydi. Yozadi. Test savollarining javoblarini aytadi. Topshiriqni yozib oladi.

Aqliy hujum usuli qoidasi:

- Aytilayotgan barcha g'oyalar bir–biriga nisbatan muhimlikda tengdir.
- Ko'rilayotgan g'oyalar tanqid qilinmasligi kerak.
- G'oyani taqdim etayotgan paytda so'zlovchining gapini bo'lmaslik kerak.
- So'zlovchiga nisbatan baholovchi komponent mavjud emas.

1. Guruhning barcha ishtirokchilariga bir mavzu bo'yicha bir savol qo'yiladi.
2. O'qituvchi o'quv jarayonida tashabbusni o'z qo'lida shunday tarzda oladi: u auditoriyadagi barcha talabalarga savol beradi va qandaydir maxsus mavzuga daxldor barcha mumkin bo'lgan fikrlarni aytishni.
3. Barchs,hatto,axmoqona g'oyalarni ham aytishga ruxsat beriladi. Aytilayotgan fikrlar ichida birgina asosiy mavzu saqlanib qolishi.
4. Birortasining ham fikri sharhlanmaydi,tanqid qilinmaydi,baholanmaydi.
5. Asosiy fikrlarni o'qituvchi flip-karta, doskaga yozadi yoki ekranda ko'rsatadi.
6. Aqliy hujum tugagach,barcha g'oyalar to'planishi,guruhlarga ajratilishi yoki kategoriyalarga bo'linishi mumkin.

Vizual materiallar haqida

Matematikaning astronomiya, mexanika, fizika kabi fanlarga tatbiqlari qadimdan ma'lum. XX asrning 40 yillarida elektron hisoblash mashinalarining kashf qilinishi, ayniqsa, axborot texnologiyalarining keyingi taraqqiyoti, bir tomondan matematik usullarning imkoniyatini oshirgan bo‘lsa, ikkinchi tomondan uning tatbiqlari doirasi keskin kengayishiga olib keldi.

Pinbord texnikasi

(ingglizcha: pin – mahkamlash, board – doska)
Muammoni hal qilishga oid fikrlarni tizimlashtirish va guruhlashni amalga oshiraga,jamoa tarzida yagona yoki aksincha qarama-qarshi pozitsiyani shakllantirishga imkon beradi.

O’qituvchi taklif etgan muammo bo’yicha o’z nuqtai nazarlarini bayon qilishni so’raydi. To’g’ridan-to’g’ri yoki ommaviy aqliy hujumning boshlanishini tashkil qiladi (rag’batlantiriladi).

Fikrlar taklif qiladi,muhokama qiladi, muhokama nazarlarini bayon qilishni so’raydi. To’g’ridan-to’g’ri yoki ommaviy aqliy hujumning boshlanishini tashkil qiladi (rag’batlantiriladi).

Guruh namoyondalari doskaga chiqadi va maslahatlashgan holda:
(1) Yaqqol xato bo’lgan yoki takrorlanayotgan fikrlarni olib tashlaydi;
(2) bahsli bo’lgan fikrlarni oydinlashtiradi;
(3) fikrlarni tizimlashtirish mumkin bo’lgan belgilarni aniqlaydi;
(4) shu belgilar asosida doskadagi barcha fikrlarni (qog’oz varaqlaridagi) guruhlarga ajratadi;
(5) ularning o’zaro munosabatlarini chiziqlar yoki boshqa belgilar yordamida ko’rsatadi:kollektivning yagona yoki aksincha qarama-qarshi pozitsiyani ishlab chiqadi.

Ish bosqichlari	O’qituvchi faoliyatining mazmuni	Talaba faoliyatining mazmuni
1-bosqich. Mavzuga	1.1.Mavzu nomini aytadi. Mavzu haqida umumiy tushunchalar beradi. Talabalarni ushbu	Tinglaydi Mavzu nomini

kirish (20daqiqa)	mashg'ulotdagi faoliyatini baholash ko'rsatkichlari va mezonlari bilan tanishtiradi. 1.2. Shu mavzu bo'yicha biladigan tushunchalarni aytishni so'radi, aytilgan tushunchalarning barchasini doskaga yozadi.	yozib oladi. Tushunchalarni aytadi
2-bosqich. Asosiy bo'lim (50 daqiqa)	2.1 Talabalarni 1,2,3,4,5 raqamlar bilan belgilangan kartochkalar yordamida 4-5 ta guruhga ajratadi. 2.2. Shu mavzu bo'yicha mashg'ulot topshiriqlarini har bir guruhga tarqatadi. Topshiriqlarni aniqlaydi va guruhda ishlashni tashkil etadi.	4-5guruhga ajraladi. Topshiriqda keltirilgan misollarning echimini topadi, tayyorlaydi.
3 – bosqich. Yakunlovchi (10 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha yakunlovchi xulosalar qiladi. 3.2. Ma'ruza mashg'ulotida berilgan savollarning javoblari asosida talabalar bilimini baholaydi. 3.3. Mavzu bo'yicha bilimlarni chuqurlashtirish uchun topshiriqlar beradi.	Savollar beradi. Yozib oladi.

III SEMESTR

IV. MA'RUZA MATERIALLARI

1-2-Ma'ruza

55- маъруза. Maydonlar nazariyasi elementlari. Skalyar maydon.

Reja:

1.Skalyar maydon.
2. Maydon gradiyenti, xossalari.
3. Yo'nalish bo'yicha xosila.
4. Maydonda chiziq bo'yicha olingan ba'zi integrallar
5. Maydonda sirt bo'yicha olingan ba`zi integrallar
6. Grin formulasi

Tayanch so'zlar:

Maydon, skalyar maydon, vektor maydon, gradiyent, Vektor maydon. vektor chiziqlar

1.Skalyar maydon. Agar fazoning ma`lum bir qismidagi har bir nuqtaga biror fizik hodisani ifodalovchi kattalikning muayyan qiymatlari mos keltirilgan bo'lsa, u holda fazoning Ushbu qismida skalyar maydon aniqlangan deyiladi.

Masalan, fazoning turli nuqtalarida havoning temperaturasi temperaturalar maydonini hosil qiladi. yerni o'rab olgan atmosferada bosimlar maydoni, havo namligi maydoni, jismni zichliklar maydoni skalyar maydonga misol bo'la oladi.

Vaqt o'tishi bilan maydon o'zgarmasa statsionar, aks holda nostatsionar maydon deyiladi. Zichliklar maydoni statsionar bo'lsa, havo namliklari nostatsionar maydondir.

Maydon hosil qiluvchi skalyar kattalikni Φ orqali, maydonnig ixtiyoriy nuqtasini M orqali belgilasak, M ning har bir o'rniga Φ ning qandaydir son qiymati mos keladi. Bu moslikni

$$\Phi = \Phi(M) \qquad (1)$$

ko'rinishida ifodalaymiz Φ ni maydon skalyari deyiladi. Maydonda qutb nuqtani tanlab $\vec{r}$ orqali M nuqtaning radius-vektori belgilansa

$$\Phi = \Phi(\vec{r}) \qquad (2)$$

funktsiyani kiritish mumkin.

Nostatsionar maydon uchun skalyar funktsiya

$$\Phi = \Phi(M, t) \qquad (3)$$

ko'rinishga ega.

Fazoda ma`lum dekart koordikatalar sistemasi o'rnatilgan bo'lsa, bu sistemada M nuqta x, y, z koordinatalarga ega bo'ladi. U holda (1)-ni

$$\Phi = \Phi(x, y, z) \qquad (4)$$

ko'rinishda ifodalaymiz.

Tekshirilayotgan skalyar kattalikning qiymatlari biror tekislikdagi soha nuqtalariga mos keltirilgan bo'lsa, yassi maydon berilgan deymiz.

Tekislik uchun OXU koordinata tekisligi tanlansa (4)

$$\Phi = \Phi(x, y) \qquad (5)$$

ko'rinishda yoziladi.

Skalyar maydonda shunday soha mavjud bo'lib, uning har bir nuqtasida fizik hodisa bir xil bo'lsin, ya`ni $\forall M$ uchun $\Phi(x, y, z)$ funktsiya bir xil S qiymatga ega bo'lsin:

$$\Phi(x, y, z) = C \qquad (6)$$

Oshkormas tenglama (6) geometriyada biror sirtni ifodalaydi.

Maydon skalyarni bir xil qiymatga ega bo'lgan fazo nuqtalarining geometrik o'rniga **maydonning yuksaklik** sirti deyiladi. Adabiyotlarda ekvipotentsial sirt atamasi ko'proq qo'llaniladi.

Ikki o'lchamli maydonlarda yuksaklik sirti tushinchasi yuksaklik chizig'i tushinchasi bilan almashtiriladi.

Maydonnig har bir $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidan faqat bitta yuksaklik sirti o'tadi.

1-misol:

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x_0, y_0, z_0) = C$$

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

maydon uchun yuksaklik sirtlari kontsentrik sferalardir.

2-misol:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$$

maydon uchun yuksaklik sirtlar $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = C$ ellipsoidlardan iborat.

3-misol: $z = x^2 + y^2$ sirtni $z_0 = 1.2.3...$ tekisliklar bilan kesganda OXU tekislikda markazi koordinatalar boshida bo'lgan kontsentrik aylanalardan iborat yuksaklik chiziqlari hosil bo'ladi.

2.Maydon gradient. Maydon skalyar funktsiyasi $\Phi(x,y,z)$ ning to'la differentsiali

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z}dz \qquad (1)$$

quyidagi ikkita vektorlarning skalyar ko'paytmasidan iboratdir. $\vec{g} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}$ va $dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$ ko'paytuvchilardan ikkinchisini

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k} \qquad (2)$$

belgilaymiz, bunda $d\vec{r}$ maydon nuqtasi radius vektorining differentsiali. Birinchi ko'paytuvchi nuqta differentsialiga bog'liq emas. Ushbu miqdorni maydonning gradienti deyiladi va

$$grad\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k} \qquad (3)$$

belgilanadi. (1) ni

$$d\Phi = grad\Phi . d\vec{r} \qquad (4)$$

ko'rinishda ifodalaymiz.

Xossalari:

1) $grad\left(\Phi_1 + \Phi_2\right) = grad\Phi_1 + grad\Phi_2$

2) $grad\left(\vec{\Phi}_1 \cdot \vec{\Phi}_2\right) = \vec{\Phi}_2 grad\Phi_1 + \vec{\Phi}_1 grad\Phi_2$

3) $grad\Phi^2 = 2\vec{\Phi} grad\Phi$

Maydonning har bir nuqtasida gradient bir qiymatli holda aniqlanadi. Buni isbotlash uchun ko'rsatilgan nuqtada ikkita $\vec{g}_1$ va $\vec{g}_2$ gradient mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik, ya`ni

$$d\Phi = \vec{g}_1 d\vec{r} \text{ va } d\Phi = \vec{g}_2 d\vec{r}$$

Tengliklarning birinchisidan ikkinchisini ayiramiz

$$\left(\vec{g}_1 - \vec{g}_2\right)d\vec{r} = 0$$

ushbu tenglikda $d\vec{r}$ ko'paytuvchi maydon nuqtasining ixtiyoriy siljishini ifoda etadi. $d\vec{r}$ ko'paytuvchi nol bo'lishi shuningdek $\vec{g}_1 - \vec{g}_2$ vektorga perpendikulyar bo'lishi mumkin emas. U holda $\vec{g}_1 - \vec{g}_2 = 0$ ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib $\vec{g}_1 = \vec{g}_2$ ekan.

1-teorema. Gradient maydonnig berilgan nuqtasidagi yuksaklik sirtinig normali bo'yicha yo'nalishga ega.

Isbot: $\Phi(x,y,z) = C$ Maydonnnig yuksaklik sirtida $M(x,y,z)$ nuqtani olaylik. Shu nuqtadan sirt ustida (L) chiziq o'tkazaylik. (L)-ni yoy uzunligi s orqali parametrlashtiraylik. U holda M nuqtaning x,y,z koordinatalari s parametrning funktsiyalari bo'lib, $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$ belgilaymiz, $\Phi\left(x(s), y(s), z(s)\right) = C$ ayniyatni s bo'yicha differentsiallaymiz.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0 \Rightarrow grad\Phi \cdot \vec{\tau} = 0 \qquad (*)$$

bunda $\vec{\tau}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}$ L - chiziq urinmasining ort vektori (*) tenglik L chiziqning har qanday nuqtasida bajariladi. L-ning ixtiyoriyligidan $M\in L$ nuqtada $grad\Phi\perp\vec{\tau}$. Shunday qilib, $grad\Phi$ yuksaklik sirtining M nuqtasidagi normali bo'yicha yo'nalishga ega. Sirtning M nuqtasidan o'tuvchi barcha chiziqlarning urinmalari urinma tekislikka tegishlidir.

1-misol: Masofa funktsiyasi $\varphi=\varphi(r)$ berilgan $grad\varphi(r)$ ni hisoblang.

Echish:

$$grad\varphi(r)=\frac{\partial\varphi(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi(r)}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{d\varphi(r)}{dr}\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}=$$

$$=\frac{d\varphi(r)}{dr}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}\right)=\frac{d\varphi(r)}{dr}gradr$$

Javob: $grad\varphi(r)=\frac{d\varphi(r)}{dr}gradr$

2-misol: $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ funktsiyaning gradientini toping.

Echish: $grad\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(2x\vec{i}+2y\vec{i}+2z\vec{k}\right)=\frac{1}{(r)}\vec{r}=\vec{r}_0$, bunda $\left|\vec{r_0}\right|=1$.

3-misol: $grad\frac{u}{v}=\frac{vgradu-ugradv}{v^2}$ formula asosida $grad\frac{1}{r^2}$ ni hisoblang.

Echish: $grad\frac{1}{r^2}=-\frac{2rgradr}{r^4}=-2\frac{gradr}{r^3}=-2\frac{\vec{r}}{r^4}$

Javob: $grad\frac{1}{r^2}=-2\frac{\vec{r}}{r^4}$

3.Yo'nalish bo'yicha hosila. Maydon skalyarining ko'rasatilgan yo'nalish bo'yicha o'zgarish holatini aniqlaylik.

Maydonning berilgan $M(x,y,z)$ nuqtasida yo'naltiruvchi birlik vektor $\vec{\tau}$ berilgan bo'lsin. M nuqtadan $\vec{\tau}$ ga urinma holatda (L) chiziq o'tkazaylik. (L) chiziq yoy uzunligi s bo'yicha tabiiy parametrlashtirilgan bo'lsin.

$$x=x(s),y=y(s),z=z(s)\qquad(1)$$

(L) chiziq bo'ylab M nuqtadan qo'shni M_1 $\left(x(s+\Delta s),y(s+\Delta s),z(s+\Delta s)\right)$ nuqtaga siljiylik. Ushbu siljishda maydon skalyari $\Delta\Phi$ ortimaga ega bo'ladi: $\Delta\Phi=\Phi\left[x(s+\Delta s),y(s+\Delta s),z(s+\Delta s)\right]-\Phi\left[x(s),y(s),z(s)\right]$ $\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}$ nisbat tuzib $\Delta s\to0$ da limitga o'taylik.

Ta`rif $\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}$ nisbatning $\Delta s\to0$ dagi limitiga skalyar funktsiya Φ ning yo'nalish bo'yicha hosilasi deyiladi va

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}=\lim_{\Delta s\to0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to0}\frac{\Phi\left[x(s+\Delta s),y(s+\Delta s),z(s+\Delta s\right]-\Phi\left[x(s),y(s),z(s)\right]}{\Delta s}\qquad(2)$$

belgilanadi.
Ta`rifdan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:
1) $\frac{\partial \Phi}{\partial s}=\frac{d\Phi\left[x(s),y(s),z(s)\right]}{ds}$ (3)

yo'nalish bo'yicha hosila va (L) chiziqning yoy uzunligi s bo'yicha to'la hosila (1) ga ko'ra ustma-ust tushadi. $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ hosila (L) chiziqqa bog'liq bo'lmasdan nuqtaga va yo'nalishga bog'liqdir.
2) Yo'nalish bo'yicha hosila berilgan nuqtada berilgan yo'nalishdagi $\vartriangle s$ siljishga mos maydon skalyarining ortirmasini ifodalaydi.
Φ funktsiyaning marakkab funktsiya ekanidan

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad (4)$$

o'rinlidir. $grad\Phi=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}$ $\quad \vec{\tau}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}$ munosabatlar asasida (4)-ni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}=\left(grad\Phi\,\vec{\tau}\right) \qquad (5)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin, yoki

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}=\pi r_{\vec{\tau}}\,grad\Phi \qquad (6)$$

Xulosa. Skalyar funktsiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasi gradientning shu yo'nalishidagi proektsiyasiga tengdir. *M* nuqtadagi yo'nalish bo'yicha hosilani geometrik ko'rsatish uchun MN gradient vektorni diametr qilib Sfera olinadi. *M* nuqtadan berilgan yo'nalishda *M* nur o'tkazib Sfera bilan kesishish nuqtasi *R* aniqlanadi. *MR* kesma uzunligi yo'nalish bo'yicha hosila miqdoriga tengdir. Nur sfera bilan ko'rsatilgan yo'nalishda kesishmay qarama-qarshi yo'nalishda kesishsa u holda yo'nalish bo'yicha hosila manfiy miqdor bo'lib *MR* kesma uzunligidan ishora bo'yicha farq qiladi.

2-teorema. Maydon skalyarining berilgan nuqtadagi gradient yo'nashidagi hosilasi gradient vektor moduliga teng qiymatga ega bo'lgan eng katta qiymatga ega.

Isbot. Maydon gradienti yuksaklik sirtining normali bo'yicha yo'nalishga ega bo'lib, uning ort vektorini $\vec{n}^0$ belgilaylik (5) formulani quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\left(grad\Phi\vec{n}^0\right)=\left|grad\Phi\right|\left|\vec{n}^0\right|\cos 0^0=\left|grad\Phi\right|$$

Har qanday boshqa yo'nalishda

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}<\frac{\partial \Phi}{\partial n}.$$

Shunday qilib,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}=\left|grad\Phi\right| \qquad (7)$$

Skalyar maydonning yuksaklik sirti sifatida

$$\Phi(x,y,z)=0 \qquad (8)$$

sirtni olish ham mumkin. $\Phi=\Phi(x,y,z)$ maydon gradienti

$$grad\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = \vec{n} \qquad (9)$$

(8) sirtning istalgan $M(x,y,z)$ nuqtasida normal bo'yicha yo'nalishga ega.
Sirt normalining yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos\alpha = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}} \qquad (10)$$

bunda $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$

bo'lgan nuqtalarda normal aniq emas.
Bularni sirtning maxsus nuqtalari deyiladi.

Misol: $\Phi = \frac{1}{r}$ skalyar maydonning gradienti aniqlansin.

Echish: Yuksaklik sirti $\Phi = const$ yoki $r = C$ markazi koordinatalar boshida bo'lgan kontsentrik sferalar

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\vec{r}^2}} \Rightarrow d\Phi = -\frac{1}{2}\left(\vec{r}^2\right)^{-\frac{3}{2}} 2\vec{r}d\vec{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}d\vec{r} \quad d\Phi = grad\Phi d\vec{r} \Rightarrow grad\Phi = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Javob: $grad\Phi = -\frac{\vec{r}}{r^3}$

4. Майдонда чизик буйича олинган интеграллар. Maydonning skalyar funktsiyasi maydonning hamma nuqtalarida uzliksiz va differentsiallanuvchi deb hisoblanada.

Nuqta funktsiyasi bo'lgan $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsin. Maydonning *A* va *V* nuqtalari orqali o'tgan biror L chiziqni olaylik. $M \in L$ uchun $\vec{a}$ maydon vektori tayin yo'nalishga va qiymatga egadir. *M* ga yaqin $M' \in L$ nuqta tanlaymiz. *M* va *M'* nuqtalar orasidagi yoy uzunlik $\vartriangle s$ bo'lsin. $\vec{MM'}$ siljish vektorini $\vartriangle\vec{r}$ belgilaymiz. $(\vec{a}\vartriangle\vec{r})$ skalyar ko'paytma tuzamiz L chiziqning *A, V* nuqtalar bilan chagaralangan qismini mayda uchastkalarga ajratib har bir uchastka uchun skalyar ko'paytma tuzib, so'ngra ularning umumiy yig'indisi $\sum(\vec{a}\vartriangle\vec{r})$ ni hisoblaylik. Elementlarning har biri cheksiz kamaya borishi bilan ularning soni cheksiz ko'paya borsin.

Ta`rif. Elementlarnnig har biri cheksiz kamaya borishi bilan bu elementarning umumiy soni cheksiz ko'paya borganda $\sum(\vec{a}\vartriangle\vec{r})$ yig'indining limiti mavjud bo'lsa, bu limit $\vec{a}$ vektorning *A, V* nuqtalar orasidagi (L) chiziq bo'yicha olingan chiziqli integrali deyiladi va $\int \vec{a}d\vec{r}$ shaklda yoziladi.

Chiziqli integralning qiymati $\vec{a}$ vektorga, boshlang'ich A va so'ngi V nuqtaga va chiziqning shakliga bog'liqdir. L chiziq yopiq , ya`ni kontur bo'lishi ham mumkin.

Ta`rif. Vektoning yopiq chiziq (kontur) bo'yicha olingan integrali vektorning tsirkulyatsiyasi yoki kontur integrali deyiladi va $\oint \vec{a}d\vec{r}$ shaklda yoziladi.

Misol: Zarracha $\vec{F}$ kuch ta`sir qilishi natijasida elementar siljish $d\vec{r}$ bo'lsin. Bajarilgan elementar ish $\left(\vec{F}d\vec{r}\right)$ bo'ladi. $L$ kontur bo'yicha bir nuqtadan ikkinchi nuqtacha o'tganda zarrachaga ta`sir qiluvchi kuchning bajargan ishi $\int \vec{F}d\vec{r}$ bo'ladi. L-yopiq chiziq bo'lsa, bajargan ish $\oint \vec{F}d\vec{r}$ bo'ladi.

Ba`zan $\oint \vec{F}d\vec{r}=0$ bo'lishi ham mumkin. Ma`lumki yopiq chiziq hosil qiluvchi vektorlar yig'indisi nolga teng. Shunga binoan

$$\oint d\vec{r}=0 \qquad (1)$$

L-yopiq chiziq bo'lib, M_1 va M_2 uning berilgan nuqtalari bo'lsin.

$$\oint d\vec{r} = \int\limits_{M_1l_1M_2} d\vec{r} + \int\limits_{M_2l_2M_1} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int\limits_{M_1l_1M_2} d\vec{r} = -\int\limits_{M_2l_2M_1} d\vec{r} = \int\limits_{M_1l_2M_2} d\vec{r}$$

Ko'ramizki

$$\int\limits_{M_1l_1M_2} d\vec{r} + \int\limits_{M_1l_2M_2} d\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (2)$$

$\oint d\vec{r} \neq \oint |d\vec{r}|$, shuningdek

$$\int\limits_{M_1l_1M_2} |d\vec{r}| \neq \int\limits_{M_1l_2M_2} |d\vec{r}|,$$

$$\int\limits_{M_1l_1M_2} |d\vec{r}| = l_1, \quad \int\limits_{M_1l_2M_2} |d\vec{r}| = l_2 \qquad (3)$$

U holda

$$\oint |d\vec{r}| = l_1 + l_2 \qquad (4)$$

eng sodda egri chiziqli integral

$$\int\limits_{(L)} F(x,y,z)\,dx \qquad (5)$$

ko'rinishda bo'lib, y va z argumentning $a \le x \le b$ kesmadagi $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ ko'rinishdagi funktsiyalaridir, ya`ni

$$\int\limits_{(L)} F(x,y,z)\,dx = \int\limits_a^b F\left[x, f(x), \varphi(x)\right]dx$$

**5.Maydonda sirt bo'yicha olingan ba`zi integrallar.** Bir jinsli vektor maydon, ya`ni maydon vektorining son qiymati va yo'nalishi hamma nuqtalarda bir xil bo'lgan maydon berilgan bo'lsin.

Agar biror (L) chiziqning har bir nuqtasida maydon vektori unga urinsa, u holda bunday chiziqni maydonning vektor chizig'i deyiladi.

Vektor chiziq bo'ylab $\vec{a}$ va $\frac{d\vec{r}}{dt}$ vektorlar o'zaro kollinear bo'lib

$$\left[\vec{a}d\vec{r}\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \qquad (1)$$

(1) vektor chiziq tenglamasidir.

Vektor chiziqlar yo'nalishiga perpendikulyar bo'lmagan, ammo qog'oz betiga perpendikulyar bo'lgan S yuzaning qog'oz beti bilan kesishish chizig'i AV bo'lsin. Yuz normalining birlik vektorini $\vec{n}$ orqali ifodalasak

$$\vec{S} = S\vec{n} \qquad (2)$$

Berilgan S yuzning vektor chiziqlar yo'nalishiga perpendikulyar bo'lgan tekislikka proektsiyasini σ orqali belgilaylik: $AC = \sigma$ bu holda:

$$\sigma = S\cos\alpha \qquad (3)$$

bo'lib $\alpha = \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{n}\right) = \left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{s}\right)$

$$\sigma = S\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{s}\right) \qquad (4)$$

ga ega bo'lamiz.

Agar vektor chiziq yo'nalishiga perpendikulyar qo'yilgan birlik yuzdan o'tuvchi vektor chiziqlar soni vektor modulini ifodalashi ko'zda tutilsa, σ yuz orqali $a\sigma$ vektor chiziqlar o'tishi ma`lum bo'ladi. Bu miqdor N bo'lsa

$$N = a\sigma = a\cos\left(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{s}\right) = \left(\vec{a}\vec{s}\right) \qquad (5)$$

yoki $N = S\left(\vec{a}\vec{n}\right) = Sa_n$, bunda $|\vec{n}| = 1$ $\pi r_n \vec{a} = a_n$ (5) ni

$$N = a_n S \qquad (6)$$

belgilaymiz. N miqdor $\vec{a}$ vektorning S yuz orqali oqimini ifodalaydi.

Agar S yuz $\vec{a}$ maydon vektorga perpendikulyar bo'lsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{n}$ normal vektorga kollinear bo'lib, $|\cos\alpha| = 1$ va

$$N = aS \qquad (7)$$

Vektor maydonda biror sirtni olib, uni kichik elementlarga ajrataylik. Elementlardan biri Δs -elementar sirt bo'lsin. Δs $\vec{a}$ ga perpendikulyar bo'lsa, vaqt birligida Δs orqali o'tuvchi vektor oqimi $a\Delta s$ ga teng, bunda $a = |\vec{a}|$ Δs yuz $\vec{a}$ vektor oqim yo'nalishiga perpendikulyar bo'lmasa, ya`ni unga qiya joylashgan bo'lsa, u holda Δs elementar sirt orqali o'tuvchi vektor oqimini aniqlash uchun $\vec{a}$ ga perpendikulyar bo'lgan Δs_1 elementar sirt o'tkazamiz, bunda Δs_1 sirt Δs ning proektsiyasidir $\Delta s_1 = \Delta s\cos\alpha$ Δs yuz orqali o'tuvchi vektor oqimini ΔN belgilasak, birinchi holda $\Delta N = a\Delta S,$ (8)

ikkinchi holda

$$\Delta N = a\Delta S\cos\alpha \qquad (9)$$

$\vec{a}$ ning $\vec{n}$ normal yo'nalishiga proektsiyasini a_n orqali belgilasak

$$\Delta N = a_n \Delta S \qquad (10)$$

Sirtning bir elementidan ikkinchi elementiga o'tilganda $\vec{a}$ vektor o'zgaradi.

Shuning uchun sirt elementlari naqadar kichik olinsa, vektorning berilgan sirt orqali oqimi shu qadar aniq hisoblanib chiqilishi mumkin.

Ta`rif: Sirt elementlarining har biri cheksiz kamaya borishi bilan birga elementlar soni cheksiz ko'paya borganda olingan elementar oqimlar yig'indisi $\sum \Delta N = \sum(\vec{a}\Delta\vec{s})$ ning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $\vec{a}$ vektorning berilgan sirt orqali oqimi deyiladi va

$$N = \int(\vec{a}d\vec{s}) \qquad (11)$$

shaklda yoziladi.

Vektorning yopiq sirt orqali oqimi

$$N = \oint(\vec{a}d\vec{s}) \qquad (12)$$

shaklda yoziladi, bunda

$$d\vec{s} = ds\vec{n} \qquad (13)$$

$\vec{n}$ vektorning yo'nalishi elementar yuzni chegaralovchi kontur yo'nalishiga mos qilib olinishi kerak, (13) ga binoan

$$(\vec{a}d\vec{s}) = (\vec{a}\vec{n})ds = a_n ds \qquad (14)$$

(11), (12) ni (14) asosan

$$N = \int a_n ds \qquad (15)$$

yoki

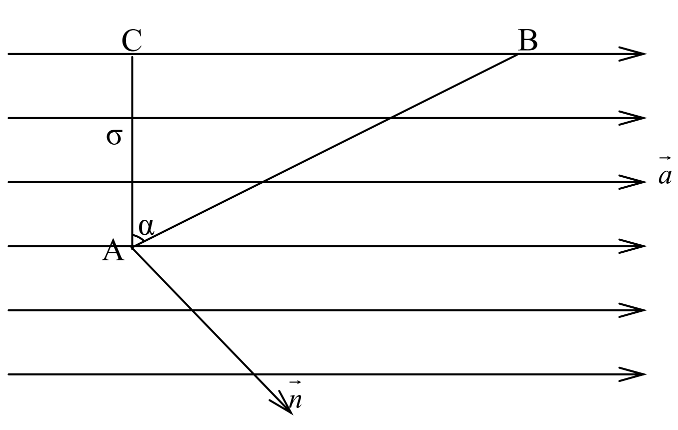
$$N = \oint a_n ds \qquad (16)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Yopiq sirtga nisbatan tashqi normal yo'nalishi normalning musbat yo'nalishi deb qabul qilinadi. Yopiq sirtdan tashqari chiquvchi vektor chiziqlarga mos oqim musbat ishora bilan, ichkari kiruvchilarga mos oqim esa manfiy ishora bilan olinadi. Yopiq sirt hosil qiluvchi yuz vektorlari yig'indisining nolga tengligi, ya`ni

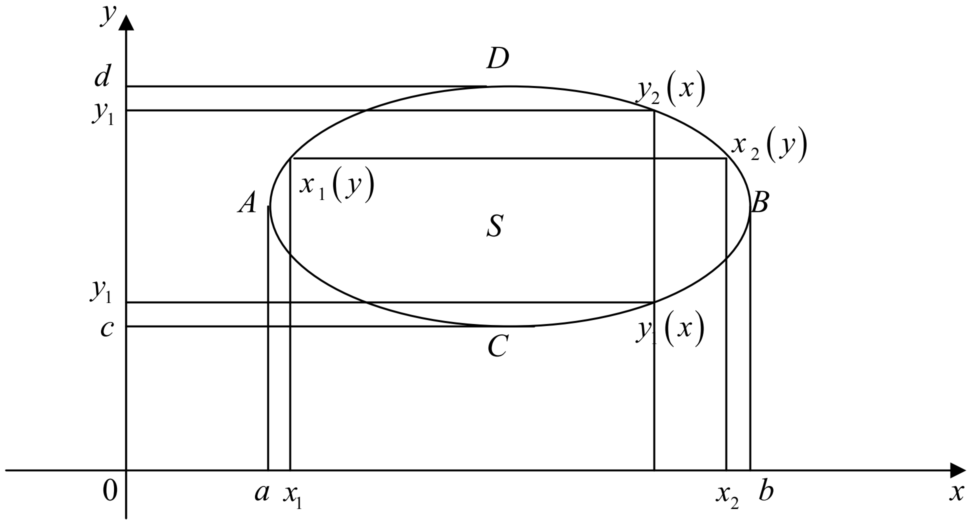
$$\oint d\vec{s} = 0 \qquad (17)$$

tenglik bizga ma`lum, lekin $\oint|d\vec{s}| \neq 0$. Ikki sirt umumiy kontur bilan chegaralangan bo'lsa,

$$\int_{s_1} d\vec{s} = \int_{s_0} d\vec{s} \qquad (18)$$



6. Grin formulasi. Oxu tekislikda (l) kontur bilan chegaralangan (S) yassi sohani qaraylik. (S) sohada $P=P(x,y)$ va $Q=Q(x,y)$ funktsiyalar aniqlangan bo'lsin.



Bu funktsiyalar (S) sohada va uning (l) chegara konturida uzluksiz bo'lib, uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsin. (S) soha bo'yicha va (l) yopiq kontur bo'yicha olinib, o'zaro quyidagi

$$\oint Pdx+Qdy=\iint\limits_{(s)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \qquad (1)$$

munosabatda bo'lgan funktsiyalar (S) sohada mavjuddir. (1) ni Grin formulasi deyiladi. Ushbu formulaning o'rinli bo'lishini isbotlaylik ikki karrali integral ta`rifiga ko'ra

$$\iint\limits_{(s)}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}dx$$

U holda

$$\iint\limits_{(s)}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\int\limits_c^d dyQ(x,y)\Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)}=\int\limits_c^d Q\left[x_2(y),y\right]dy-\int\limits_c^d Q\left[x_1(y),y\right]dy \qquad (2)$$

ning o'ng qismidagi aniq integrallar (CBD) va (DAC) yoylar bo'yicha olingan egri chiziqli integrallardir.

$$\int\limits_c^d Q\left[x_2(y),y\right]dy=\int\limits_{(CBD)}Q(x,y)dy$$

$$-\int\limits_c^d Q\left[x_1(y),y\right]dy=\int\limits_{(DAC)}Q(x,y)dy \qquad (3)$$

(3) tengliklarni qo'shib (2) ni keltirib chiqaramiz.

$$\int\limits_{(CBD)}Q(x,y)dy+\int\limits_{(DAC)}Q(x,y)dy=\oint Qdy \qquad (4)$$

yoki

$$\iint_{(s)} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{(l)} Qdy \qquad (5)$$

(l) yopiq chiziqni soat strelkasi harakatiga teskari yo'nalish bo'yicha aylanib chiqiladi.

Shuningdek

$$\iint_{(s)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b dx P(x,y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_a^b P\left[x, y_2(x)\right]dx - \int_a^b P\left[x_1 y_2(x)\right]dx \qquad (6)$$

Bunda

$$\int_a^b P\left[x_1 y_2(x)\right]dx = -\int_{(BDA)} P(x,y)\,dx,$$

$$-\int_a^b P\left(\mathrm{x,y,(x)}\right]dx = -\int_{(ACB)} P(x,y)\,dx \qquad (7)$$

U holda

$$\iint_{(s)} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint_{(l)} Pdx \qquad (8)$$

(5) dan (7) ni ayirsak

$$\iint_{(s)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_{(l)} Pdx + Qdy \qquad (1)$$

kelib chiqadi.

1.Vektor maydon. vektor chiziqlar. Fazoning chegaralangan sohasini qaraylik.

Ushbu sohaning har bir nuqtasida $\vec{R}$ vektor miqdor aniqlangan bo'lsa, u holda vektor maydon aniqlangan deyiladi. Vektor maydon o'zgaruvchi $\vec{R}$ vektorning berilishi orqali aniqlanib, sohaning har bir nuqtasida $\vec{R}$ aniq qiymatga (vaziyatga) egadir.

<u>**Masalan:**</u> **1)** Elektr orqali zaryadlangan jism, shu jism joylashgan fazo qismida elektr maydonini yuzaga keltiradi. Maydoning har bir nuqtasida kuchlanish mavjud bo'lib, u shu nuqtadagi musbat birlik zaryadga ta`sir o'tkazadi.

2) Suyuqlik oqimi, suyuqlik to'ldirilgan hajmga ta`sir etib tezliklar maydonini yuzaga keltiradi.

Vektor maydon nazariyasida vektor miqdorlar orqali yuzaga kelgan fizik jarayonlar va ularning fizik xossalari emas, balki maydoning matematik nazariyasi o'rganiladi.

Fazo sohasining M nuqtasida vektor maydon biror aniq $\vec{R}$ vektor orqali tasvirlanadi.

$\vec{R}$ vektor M nuqtaning radius vektori $\vec{r}$ ning funktsiyasidir.

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}) \qquad (1)$$

$B = \left\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ dekart reperida $\vec{r} = \overrightarrow{om}$ x, y, z dekart koordinatalarga ega Shuning uchun

$$\vec{R} = \vec{R}(x, y, z) \qquad (2)$$

Agar

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \qquad (3)$$

yoyilmani qarasak, $\vec{R}$ ning *X, Y, Z* koordinatalari *x, y, z* o'zgaruvchilarning funktsiyalari bo'ladi.

$$X = X(x,y,z),$$
$$Y = Y(x,y,z),$$
$$Z = Z(x,y,z), \qquad (4)$$

Vektor maydon t vaqtga bog'liq bo'lmasa, u holda unig statsionar maydon deyiladi.

Vaqtga bog'liq

$$\vec{R} = \vec{R}(x,y,z,t) \qquad (5)$$

(5) ko'rinishdagi vektor bilan berilgan vektor maydonni o'zgaruvchi maydon deyiladi.

__**Ta`rif**__: Maydondagi biror (L) chiziqning har bir nuqtasida maydon vektori L ga urinsa, u holda uni maydonning vektor chizig'i deyiladi.

Magnit va elektr maydonlaridagi kuchlanish chiziqlari vektor chiziqlardir.

Vektor chiziqni

$$L: \quad \vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (6)$$

ko'rinishda ifodalaylik $\frac{d\vec{r}}{d\vec{t}}$ va $\vec{R}$ vektorlar $M \in L$ nuqtada urinma bo'yicha yo'nalgandir. Ular kollinear vektorlar bo'lib,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lambda\vec{R} \qquad (7)$$

yoki

$$d\vec{r} = \vec{R}\lambda dt \qquad (8)$$

(8) vektor chiziqning parametrik shakldagi vektorli differentsial tenglamasidir. (8)-ni koordinatalar bo'yicha yozaylik:

$$dx = X\lambda dt, \; dy = Y\lambda dt, \; dz = Z\lambda dt \qquad (9)$$

(9) dan λdr ni chiqarsak vektor chiziqlarning quyidagi differentsial tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \qquad (10)$$

(10) ni integrallab

$$\varphi_1(x,y,z) = C_1, \; \varphi_2(x,y,z) = C_2 \qquad (11)$$

oshkormas tenglamalarga ega bo'lamiz.

Masalan,

$$\vec{R} = (bz - cy)\vec{i} + (cz - az)\vec{j} + (ay - bx)\vec{k}$$

maydon vektori berilgan bo'lsin. Vektor chiziqlarni aniqlaylik. Quyidagi differentsial tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$$\frac{dx}{bz - cy} = \frac{dy}{cx - dz} = \frac{dz}{ay - bx}$$

quyidagi proportsiyalarni tuzamiz.

$$\frac{xdx+ydy+zdz}{x(bz-cy)+y(cx-az)+z(ay-bx)}=\frac{xdx+ydy+zdz}{0}=0$$

$$\frac{adx+bdy+cdz}{a(bz-cy)+b(cx-az)+c(ay-bx)}=\frac{adx+bdy+cdz}{0}=0$$

ko'ramizki

$$xdx+ydy+zdz=0$$

$$adx+bdy+cdz=0$$

Integrallash orqali

$$x^2+y^2+z^2=C_1^2$$

$$ax+by+cz=C_2$$

tenglamalar hosil qilinadi.

Vektor chiziqlar markazi koordinatalar boshi bo'lgan sferalar oilasi va $\vec{N}\{a,b,c\}$ vektorga perpendikulyar tekisliklar oilasining kesishmasidan iboratdir.

10-§ da maydonda yopiq chiziq bo'yicha integralni $\oint(\vec{a}d\vec{r})$ ko'rinishda ifodaladik $\vec{a}=\vec{R}$ va $d\vec{r}=\vec{\tau}ds$ uchun

$$\Gamma_L=\int\limits_{(L)}\left(\vec{R}\vec{\tau}\right)ds \qquad (12)$$

Γ_L ni maydonda L chiziq bo'ylab tsirkulyatsiya deyiladi.

(12)-ni koordinatalar bo'yicha ifodalasak

$$\Gamma_L=\int\limits_{(L)}Xdx+Ydy+Zdz \qquad (13)$$

formula aniqlanadi.

$$\left(\vec{R}d\vec{r}\right)=Xdx+Ydy+Zdz \qquad (14)$$

miqdorni tsirkulyatsiya elementi deyiladi.

Misol: $\vec{R}=-y\vec{i}+x\vec{j}+x\vec{k}$ vektor maydonning $x^2-y^2=1,\ z=0$ aylana bo'yicha tsirkulyatsiyasi hisoblansin.

$$\Gamma_L=\int\limits_{(L)}-ydx+xdy+cdz$$

$$x=\cos t, y=\sin t, z=0$$

$$dx=-\sin tdt, dy=\cos tdt, dz=0$$

$$\Gamma_L=\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt=\int\limits_0^{2\pi}dt=t\Big|_0^{2\pi}=2\pi$$

2. Sirt orqali maydon oqimining koordinatalar bo'yicha ifodasi. Harakatdagi suyuqlik yoki gazning tezliklar maydonini o'rganishda, tabiiyki, biz maydon oqimi tushunchasiga kelamiz. Harakatdagi suyuqlik har bir zarrachasining tezlik vektori $\vec{R}$ bir xilda bo'lsin. Ushbu oqimda yassi soha (S) ni olaylik. Vaqt birligida (S) orqali oquvchi suyuqlik hajmi Q uchun quyidagi

$$Q=SH=S\left(\vec{R}\vec{n}^0\right) \qquad (1)$$

formula o'rinlidir.

Q hajmiga (S) soha bo'yicha suyuqlik oqimi deyiladi.

Egri sirtda kichikroq (S) sohani va unda ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtani olaylik

M ni tayanch nuqta deyiladi. Ushbu tayanch nuqtadan sirtga urinma tekislik o'tkazamiz urinma tekislikka sirt sohasi (S) ni proektsiyalaymiz.

Urinma tekislikka tegishli paralellogramm $ABCD$ ning yuzi sirtning (S) elementar sohasiga taqriban teng deb olinadi. Qirralari maydon vektori $\vec{R}$ ga teng va parallel qiyshiq parallellopiped quramiz: (S) orqali harakatlanuvchi suyuqlik miqdori Q avvalgidek (1) orqali ifodalanadi. Q-ni (S) soha bo'yicha maydoning elementar oqimi deyiladi. M nuqtadagi normalning ort vektorini $\vec{n}^0(x,y,z)$ belgilaylik. Elementar oqim uchun

$$Q = S\left(\vec{n}^0(x,y,z)\vec{R}(x,y,z)\right) \qquad (2)$$

formula o'rinli bo'lib, u o'lchovlari yetarlicha kichik (S) soha orqali vaqt birligida harakatlanuvchi suyuqlik elementar oqimining hajmini yetarlicha aniqlikda ifoda etadi.

Elementar oqim (S) soha uchun bir qiymatli ravishda aniqlangan miqdor bo'lmay, tayanch nuqtaga va $\vec{n}^0$ vektor yo'nalishiga bog'liqdir.

Endi sirtning (S) sohasini n-ta $(S_1),(S_2),...,(S_n)$ sohalarga ajratamiz. (S_i) qism soha har birining ichida tayanch nuqtalarni belgilaymiz. (S_i) qism sohadan harakatlanuvchi elementar oqimlar

$$Q_k = S_k\left(\vec{n}^0(x_k,y_k,z_k)\vec{R}(x_k,y_k,z_k)\right)$$

yig'indisini aniqlaymiz va $n\to\infty$ da limitga o'tamiz

$$Q = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} Q_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{n} S_k\left(\vec{n}^0(x_k,y_k,z_k)\vec{R}(x_k,y_{k,}z_k)\right)$$

Matematik tahlil kursida ushbu Q miqdorni sirt bo'yicha integral yig'indi limiti deyiladi va u sirt sohasini qismlarga ajratish usuliga shuningdek, ajratilgan qism sohalar ichida tayanch nuqtalar tanlashga bog'liq bo'lmagan miqdor bo'lib sirt bo'yicha integralga tengdir.

$$Q = \iint_{(s)}\left(\vec{R}\vec{n}\right)ds = \iint_{(s)}\left(\vec{R}d\vec{s}\right) \qquad (4)$$

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k},\ \vec{n}^0 = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\vec{j} + \cos\gamma\vec{k} \qquad (5)$$

vektorlar uchun

$$Q = \iint_{(s)}\left(X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma\right)ds \qquad (6)$$

(6) Sirt bo'yicha vektor oqimning koordinat ko'rinishdagi ifodasidir.

$$ds = \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dzdx}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma} \qquad (7)$$

shartli formulalarni integral ostidagi ifodaga mos ravishda qo'llasak

$$Q = \iint_{(s)} Xdydz + Ydxdz + Zdxdy \qquad (8)$$

formulani keltirib chiqarish mumkin. Ushbu muhim formuladan sirt bo'yicha vektor oqimni hisoblashda foydalaniladi.

$$\mathbb{Z} = f(x,y) \qquad (9)$$

ko'rinishda berilgan sirt uchun (8)-ni

$$Q=\iint_{(s)}\left(-PX-qY+Z\right)dxdy \qquad (10)$$

Ko'rinishda yozish mumkin, bunda $P=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$

$$\vec r=\vec r\left(u^1,u^2\right) \qquad (11)$$

parametrik tenglama orqali berilgan sirt uchun vektor oqim formulasi

$$Q=\iint_{(s)}\left(\vec r_1\vec r_2\vec R\right)du^1du^1 \qquad (12)$$

ko'rinishga ega bo'lib, bunda $\vec r_1=\dfrac{\partial\vec r}{\partial u^1}, \vec r_2=\dfrac{\partial\vec r}{\partial u^2}$; $\left(\vec r_1\vec r_2\vec R_3\right)$-uchta vektorning aralash ko'paytmasidir.

Misol. $\vec R=-\sqrt{x}\vec i+yz\vec j+\vec k$ maydonning $z^2=4x$ tsilindrni $z^2=4\left(x^2+y^2\right)$ konus bilan kesish orqali ajratilgan sohasi bo'yicha oqimining miqdori aniqlansin.

TSilindr va konus tenglamalaridan Z-ni chiqarsak $x^2+y^2=x,\ z=0$ doira tenglamasiga ega bo'lamiz.

$$Q=\iint_{(S)}\left(\frac{2}{z}\sqrt{x}+1\right)dxdy$$

(S) sohani quyi va yuqori qismlarga ajratamiz

$$Q=\iint_{(S_1)}\left(\frac{2\sqrt{x}}{z}+1\right)dxdy+\iint_{(S_2)}\left(\frac{2\sqrt{x}}{z}+1\right)dxdy$$

$$\left(S_1\right):z=-2\sqrt{x},\left(S_2\right):z=2\sqrt{x}$$

formulalarda Q ni aniqlaymiz.

$$Q=\iint_{(S_1)}Odxdy+\iint_{(S_2)}2dxdy=2\iint_{(S)}dxdy=\frac{\pi}{2}$$

3. Vektor maydon divergentsiyasi Gauss-Ostrogradskiy formulasi

Fazo nuqtasini qurshovchi yopiq sirt bo'yicha olingan maydon vektor funktsiyasi $\vec a$ ning ikki xil integralini qaraymiz

$$\oint(\vec a d\vec s) \text{ va } \oint[\vec a d\vec s]$$

Bu $\int$ -larning fazo nuqtasini qurshovchi yopiq sirt bilan chegaralangan hajmga nisbatini tuzamiz

$$\frac{\oint(\vec a d\vec s)}{V} \text{ va } \frac{\oint[\vec a d\vec s]}{V}$$

Yopiq sirt benihoya kichrayib borsa ushbu nisbatlar qandaydir miqdorlarga intiladi.

Birinchi nisbatning limitini ifodalovchi skalyar miqdor $\vec a$ vektorning berilgan nuqtadagi divergentsiyasi deyiladi va

$$div\vec a=\lim_{V\to 0}\frac{\oint(\vec a d\vec s)}{V}$$

belgilanadi. Ikkinchi nisbatning limiti maydon vektorning berilgan nuqtadagi uyurmasi deyiladi va

$$rot\vec{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint[\vec{a}d\vec{s}]}{V}$$

belgilanadi $div\vec{a}$-vektorning fazoviy skalyar hosilasi.

Ma`lumki, $N=\oint(\vec{a}d\vec{s})$-S sirt orqali vaqt birligida o'tuvchi vektor oqimi yoki S yuzadan o'tuvchi vektor chiziqlar sonidir $\oint(\vec{a}d\vec{s})$ nolga teng bo'lmasa, nuqtada vektor oqimga sababchi manba joylashgan bo'lishi mumkin. $div\vec{a}$-manba quvvatining o'lchovini anglatadi. Quvvat katta bo'lsa oqim katta $div\vec{a}$-ni dekart sistemada ifodalaylik.

Parallelopipedning butun sirt orqali vektor oqimi oltita yog'i orqali vektor oqimlarining yig'indisiga tengdir.

$$\oint(\vec{a}d\vec{s})=\int_{M123M}(\vec{a}d\vec{s})+\int_{54755}(ads)+\int_{M561M}(\vec{a}d\vec{s})+\int_{32743}(\vec{a}d\vec{s})+$$
$$+\int_{M345M}(\vec{a}d\vec{s})+\int_{16721}(\vec{a}d\vec{s}) \qquad (1)$$

Yopiq sirt normalining musbat yo'nalishi tashqariga qaratilgan.

$\int_{M123M}(ads)=\int_{M123M}\vec{a}_n ds=a_x(x,y,z)\vartriangle y\vartriangle z$ bunda $a_n-\vec{a}$ ning $\vec{n}\,||\,(i)$ yo'nalishidagi proektsiyasi $ds=\vartriangle s=\vartriangle y\vartriangle z$-elementar yuz $a_x(x,y,z)-\vec{a}$ vektorning M nuqtadagi x-komponenti

$$\int_{54765}(\vec{a}d\vec{s})=\int_{54765}a_n ds=a_x(x+\vartriangle x,y,z)\vartriangle ydz$$

$a_x(x+\vartriangle x,y,z)-\vec{a}$ vektorning S nuqtadagi x-komponenti (2)-integralda $\vec{n}$ yo'nalishi ichkariga (3)-da esa tashqariga qaratilgan. Shuning uchun

$$\int_{M123M}(\vec{a}d\vec{s})+\int_{54765}(\vec{a}d\vec{s})=\{a_x(x+\vartriangle x,y,z)-a_x(x,y,z)\}\vartriangle y\vartriangle z \qquad (4)$$

qolgan yoqlarda

$$\int_{M561M}(\vec{a}d\vec{s})+\int_{32743}(\vec{a}d\vec{s})=\{a_4(x,y+\vartriangle y,z)-a_4(x,y,z)\}\vartriangle x\vartriangle z \qquad (5)$$

$$\int_{M345M}(\vec{a}d\vec{s})+\int_{16721}(\vec{a}d\vec{s})=\{a_z(x,y,z+\vartriangle z)-a_z(x,y,z)\}\vartriangle x\vartriangle y \qquad (6)$$

(4), (5), (6)larni (1) ga qo'yamiz, $V=\vartriangle x\vartriangle y\vartriangle z$ bo'lgani uchun (1)-ni V ga bo'lamiz

$$div\vec{a}=\lim_{\vartriangle x\to 0}\frac{a_x(x+\vartriangle x,y,z)-a_x(x,y,z)}{\vartriangle x}+\lim_{\vartriangle y\to 0}\frac{a_1(x,y+\vartriangle y,z)-a(x,y,1)\vartriangle y}{\Delta y}+$$
$$+\lim_{\vartriangle z\to 0}\frac{a_2(x,y,z+\vartriangle z)-a_z(x,y,z)}{\vartriangle z}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial ay}{\partial y}+\frac{\partial az}{\partial z}$$

Yakuniy formula

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z} \qquad (7)$$

$divgrad\varphi=\vartriangle\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ Laplas operatori $div\vec{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint(\vec{a}d\vec{s})}{V}$ da S yopiq sirt V esa shu sirt bilan chegaralangan hajmi bo'lsin. Hajmini n ta mayda elementlarga bo'lamiz. S yopiq mayda sirtlardan ixtiyoriysi. V_i esa uning hajmi. Limit ta`rifidan

$$\left|\frac{\oint\limits_{si}(\vec{a}d\vec{s})}{V_i}-div_i\vec{a}\right|<\delta \qquad (8)$$

$div\vec{a}-\vec{a}$ vektorning V_i hajmiga qarashli biror (1) dagi divergentsiya (8)ni V_i ga ko'paytirib, so'ngra yig'indisini olamiz

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\oint\limits_{s_i}(\vec{a}d\vec{s})-div_i\vec{a}\,v_i\right|<\sum_{i=1}^{n}\delta\cdot V_i=\delta V\left|\sum_{i=1}^{n}\oint\limits_{s_i}(\vec{a}d\vec{s})-\sum_{i=1}^{n}div_i\vec{a}\,V_i\right|\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|\oint(\vec{a}d\vec{s})-div_i\vec{a}\,V_i\right|\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{n}\oint\limits_{s_i}(\vec{a}d\vec{s})-\sum_{i=1}^{n}div_i\vec{a}\,V_i\right|<\delta V\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\oint(\vec{a}d\vec{s})-\int div\vec{a}V\right|<\delta V\Rightarrow\oint(\vec{a}d\vec{s})=\int\limits_{v}div\vec{a}dV$$

Shunday qilib, Gauss-Ostrogradskiy formulasi:

$$\oint\left(\vec{a}d\vec{S}\right)=\int\limits_{V}div\vec{a}\,dv\,.$$

4. Vektor maydon uyurmasi. Stoks formulasi. Yuqorida $rot\vec{a}=\lim\limits_{V\to 0}\frac{\oint\left[\vec{a}\vec{S}\vec{a}\right]}{V}$ formula bilan tanishdik $rot\vec{a}$ ni biror yo'nalishdagi proektsiyasini tekshiraylik. Shu yo'nalishning birlik vektori $\vec{n}$ -bo'lsin.

$$rot_{\vec{n}}\vec{a}=\left(rot\vec{a}\vec{n}\right)=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\vec{n}\left[d\vec{s}\vec{a}\right]}{V};\quad\left(\vec{n}\left[d\vec{s}\vec{a}\right]\right)=\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow rot_{\vec{n}}\vec{a}=\left(rot\vec{a}\,\vec{n}\right)=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]}{V}$$

$\int\limits_{I}\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)$ - asoslar bo'yicha integral $\int\limits_{II}\left(\vec{a}\left[\vec{n}ds\right]\right)$-yon sirt bo'yicha integral $\oint\left(\vec{a}\left[\vec{n}ds\right]\right)=\int\limits_{I}\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)+\int\limits_{II}\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)$ TSilindr asos normalari $\vec{n}$ ga kollinear bo'ladi $\int\limits_{I}\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)=0$ $\oint\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)=\int\limits_{II}\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)$ S asosni dl kontur chegaralaydi $\vec{\tau}$ urinma birlik vertor $\Rightarrow$ $d\vec{l}=dl\vec{\tau}$ Yon sirt $dS=dl\cdot\Delta H;$ $d\vec{S}=dS\vec{N}$ bo'ladi $d\vec{S}=dl\Delta H\vec{N}$.

$$\left[\vec{n}d\vec{s}\right]=dl\Delta H\left[\vec{n}\vec{N}\right]=dl\Delta H\vec{\tau}=\Delta H.d\vec{l}$$

U holda $\oint\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)=\int\limits_{II}\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{s}\right]\right)=\Delta H\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right)$ $\qquad V=S\Delta H\Rightarrow$

$$rot_{\vec{n}}\vec{a}=\left(rot\left(\vec{a}\vec{n}\right)\right)=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\left(\vec{a}\left[\vec{n}d\vec{S}\right]\right)}{V}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right)}{S}=\lim_{S\to 0}\frac{\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right)}{S}\Rightarrow\ rot\left(\vec{a}\vec{n}\right)S=\int\left(\vec{a}d\vec{l}\right)$$

$$rot_{n}\vec{a}=\left(rot\left(\vec{a}\vec{n}\right)\right)=\lim_{S\to 0}\frac{\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right)}{S} \qquad (2)$$

Cheksiz kichik yuqori tartibli miqdorlarga e`tibor qilinmasa (2) dan

$$rot\left(\vec{a}\vec{s}\right)=\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right) \qquad (3)$$

kelib chiqadi.

S sirtni S_i – elementar sirtlarga ajratsak

$$rot\left(\vec{a}\vec{s}_i\right)=\oint\left(\vec{a}d\vec{l}_i\right) \tag{4}$$

hamma elementlari bo'yicha yig'ib chiqamiz, ya`ni

$$\sum_{i=1}^{n}\left(rot\vec{a}\vec{s}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\oint\left(\vec{a}d\vec{l}_i\right) \tag{5}$$

qo'shni sirtlarda umumiy tomonlar qarama-qarshi yo'nalmali bo'lganidan umumiy tomon bo'ylab vektordan olingan integrallar yig'indisi nolga teng. $\sum_{i=1}^{n}\oint_i\to\oint$ tashqi kontur bo'yicha integral. (5) da chap tomon integral yig'indi. Shuning uchun

$$rot\left(\vec{a}d\vec{s}\right)=\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right) \tag{6}$$

(6) Stoks formulasidir. Ushbu formulani quyidagi teorema ko'rinishida ifodalaylik.

Teorema. Biror kontur bo'yicha olingan vektorning integrali shu kontur bilan chegaralangan sirt orqali vektor uyurmasining oqimiga tengdir

Vektor uyurmasining komponentlari uchun

$$rot_z\vec{a}=\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y};\qquad rot_x\vec{a}=\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}; \tag{7}$$

ifodalarni keltirib chiqarish mumkin. U holda

$$rot\vec{a}=rot_z\vec{a}\vec{i}+rot_y\vec{a}\vec{j}+rot_x\vec{a}\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix} \tag{8}$$

Stoks formulasini koordinat ko'rinishda yozaylik.

$$\oint_{(l)}\left(\vec{a}d\vec{l}\right)=\oint a_xdx+a_ydy+a_zdz=$$

$$\iint_{(S)}\left\{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)cos\alpha+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)cos\beta+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)cos\gamma\right\}^2 ds \tag{9}$$

ko'ramizki,

$$\oint\left(\vec{a}d\vec{l}\right)=\iint_{(S)}rot\left(\vec{a}d\vec{s}\right) \tag{10}$$

<u>Xossalari:</u> 1) $rot\left(\varphi\vec{a}\right)=\varphi rot\vec{a}+\left[grad\varphi\vec{a}\right]$

2) $rot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=rot\vec{a}+rot\vec{b}$

3) $rotgradu=0$

5.Egri chiziqli koordinatalar. Fazo nuqtasini affin va dekart koordinatalar orqali aniqlash va har bir nuqta bilan koordinatalar deb ataluvchi (x,y,z) sonlar uchligi orasida moslik o'rnatish analitik geometriyadan ma`lum.

Fazoda turlicha koordinatalar sistemasini o'rnatib, ularga bog'liq ravishda nuqta koordinatalarini aniqlash va ushbu koordinatalar orasidagi funktsional munosabatni tahlil etish muhim geometrik tekshirishlardir.

R nuqtaga u^1, u^2, u^3 sonlar uchligi yoki $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$, $\bar{u}^3$ sonlar uchligini mos keltiraylik $u^1, u^2, u^3 - P$ nuqtaning dekart koordinatalari $\bar{u}^1$, $\bar{u}^2$, $\bar{u}^3$ esa sferik koordinatalari bo'lishi mumkin.

$$\bar{u}^i = \varphi_i \left(u^1, u^2, u^3\right) \qquad (1) \qquad\qquad u^i = \psi_i \left(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3\right) \qquad (2)$$

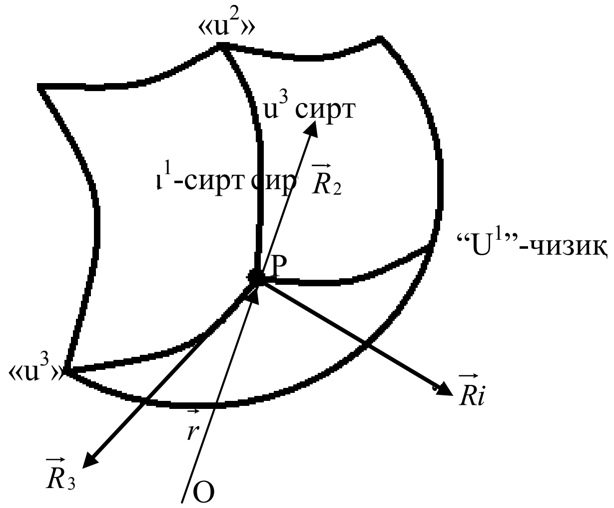
orqali turlicha koordinatalar orasidagi munosabatni ifodalaylik. (1) va (2) R nuqta koordinatalarini almashtirish formulalaridir.

φ_i *ва* ψ_i funktsiyalardan bir qiymatlilik uzluksizlik va barcha argumentlar bo'yicha 1-tartibli uzluksiz xususiy ùosilalarning mavjudligi talab qilinadi. Bunga qo'shimcha almashtirishning funktsional determinanti (yakobiani) fazoning tekshiriladigan qismida nolga teng bo'lmasligi lozim, ya`ni

$$J = \frac{D\left(\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3\right)}{D\left(u^1, u^2, u^3\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^3} \\ \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^3}{\partial u^3} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3)$$

O qutb tanlaylik. $\vec{OP} = \vec{R}$ $\quad P$ nuqta radius vektori bo'lsin. $\vec{R} = \vec{R}(P)$ uchun $(u) = \left(u^1,\ u^2,\ u^3\right)$ koordinatalar sistemasini o'rnatsak $\vec{R}$ ni $P(u^1, u^2, u^3)$ nuqtaning u^i koordinatalari bo'yicha differentsiallab uchta $\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^i}$ $(i = 1, 2, 3)$ vektorlarni aniqlaymiz.

R nuqta koordinatalaridan ikkitasini fiksirlab uchinchisi o'zgartirilsa R nuqta koordinat chiziqlarini chizadi.



Biz "u^i" - koordinat chiziqlarini hosil qilamiz. $(u^1), (u^2), (u^3) -$ chiziqlar kesishib koordinat chiziqlar to'rini tashkil etadi. $\vec{R}i$ vektorlar "u^i" chiziqlarning R nuqtadagi komplanar bo'lmagan urinma vektorlaridir. Kordinat chiziqlarining kesishishidan hosil bo'lgan sirtlarni koordinat sirtlari deyiladi.

Radius vektor $\vec{R}$ egri chiziqli koordinatalar "u^i" larning funktsiyasi bo'lganligidan

$$d\vec{R} = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^3} du^3 \qquad (4)$$

"u^i" - chiziqlarning R nuqtadagi urinma birlik vektorlarini $\vec{e}_i$ – belgilasak $\frac{\partial \vec{R}}{\partial u^i} = \vec{R}_i$

vektorlar $\vec{e}_i$ – larga kollinear bo'lib $\vec{R}_i = k_i \vec{e}_i$ (5)

u holda

$$d\vec{R} = k_i du^i \vec{e}_i = k_1 du^1 \vec{e}_1 + k_2 du^2 \vec{e}_2 + k_3 du^3 \vec{e}_3 \qquad (6)$$

k_i – larni Lame koeffitsientlari deyiladi.

$\vec{e_1}$ va $\vec{e_2}$ vektorlar u^3 - sirtning urinma tekisligida yotib, unga $\vec{e_3}$ - vektor ortogonal. U holda $\vec{e_3}$ skalyar maydon u^3 ning gradienti bilan kollinear.

$$\vec{e}_3 = k_3 grad \quad u^3 \Rightarrow \left|grad \quad u^3\right| = \frac{1}{k_3} \quad \text{ёки} \quad k^3 = \frac{1}{\left|grad \quad u^3\right|} = \left|\vec{R}_3\right| \qquad (7)$$

Shuningdek

$$k_1 = \left|\vec{R}_1\right|, k_2 = \left|\vec{R}_2\right| \qquad (8)$$

Endi skalyar maydon $u(u^1, u^3, u^3)$ ning gradienti uchun hisoblash formulasini aniqlaylik.

$$grad\ u\left(u^1, u^2, u^3\right) = \frac{\partial u}{\partial u^1} grad\ u^1 + \frac{\partial u}{\partial u^2} grad\ u^2 + \frac{\partial u}{\partial u^3} grad\ u^3 = \frac{1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial u^1}\vec{e}_1 + \frac{1}{k_2}\frac{\partial u}{\partial u^2}\vec{e}_2 + \frac{1}{k_3}\frac{\partial u}{\partial u^3}\vec{e}_3$$

yakuniy

$$grad\ u\left(u^1, u^2, u^3\right) = \frac{\vec{e}_1}{k_1}\frac{\partial u}{\partial u^1} + \frac{\vec{e}_2}{k_2}\frac{\partial u}{\partial u^2} + \frac{\vec{e}_3}{k_3}\frac{\partial u}{\partial u^3} \qquad (9)$$

formula aniqlanadi.

3-6-Ma'ruza.

Kompleks sonlar va ular ustida amallar. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar

Reja:

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya ta'rifi.
2. Bir kiymatli va ko'p kiymatli funktsiyalar.
3. Aniklanish soxasi.
4. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarning geometrik ma'nosi.
5. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning limiti va uzluksizligi.

Tayanch so'zlar:

Kompleks o'zgaruvchili funktsiya, argument, bir qiymatli, ko'p qiymatli funktsiya

Biz z қ x + iy ko'rinishidagi kompleks sonlar va ular ustida amallar xususida to'xtalib o'tgan edik. Endi argumenti kompleks o'zgaruvchiga bog'liq funktsiyani ko'ramiz.

Ta'rif: Agar E to'plamdan olingan xar bir z қ x + iy songa biror qonun bo'yicha tayin bir w қ u + iv kompleks son mos kelsa, u xolda E to'plamda funktsiya berilgan deyiladi va w қ f(z) ko'rinishida yoziladi.

Demak, bu ta'rifdan ko'rinadiki, z қ x + iy argument, ya'ni erkli o'zgaruvchi, w қ u + iv esa uning funktsiyasidir. E to'plamdagi xar bir son z argumentning qiymatidan iborat bo'lib, u to'plam w қ f(z) funktsiyaning aniklanish soxasi deyiladi. Agar z ning xar bir kiymatiga w ning birgina kiymati mos kelsa , w қ f(z) funktsiya <u>*bir qiymatli,*</u> aks xolda <u>*ko'p qiymatli*</u> funktsiya deyiladi.

Masalan, w қ z^2 , $w = \frac{1}{z}$, w қ $3z^5$ funktsiyalar bir qiymatli, w қ $\sqrt{z}$, w қ $\sqrt[4]{z}$, w қ $\frac{1}{\sqrt[5]{z-1}}$ esa ko'p qiymatli funktsiyalardir. Ma'lumki z berilgan bo'lsa, x va u lar berilgan bo'ladi. Yuqoridagi ta'rifga ko'ra w қ f(z) berilgan bo'lsa u va v lar berilgan demakdir. Ravshanki, u va v lar xam x va y larning funktsiyasidir:

W қ f(z) қ u(x,y) + iv(x,y); (1)

SHunday qilib: $\left.\begin{matrix} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{matrix}\right\}$ (2)

Ya'ni, bitta w қ f(z) munosabat ikkita (2) munosabatga ekvivalentdir. Biz kelgusida funktsiyani w қ f(z) va w қ u + iv (z қ x + iy) ikki xil ko'rinishida xam ishlatamiz. Agar bizga kompleks o'zgaruvchining elementar funktsiyalari berilgan bo'lsa, ularni (1) ko'rinishidan (2) ko'rinishiga sodda amallar yordamida o'tkazib, f(z) funktsiyaning xaqiqiy va mavxum qismlarini
ajratish mumkin.

Misollar:

1. w қ z^2 berilgan bo'lsin. Bundan

u + iv қ w z^2 қ $(x + iy)^2$ қ $x^2 - y^2 + 2ixy$

u қ $x^2 - y^2$, v қ 2xy (3)

xosil bo'ladi, bu funktsiyani aniqlanish soxasi E to'la kompleks tekislikdan iboratdir.

2. w қ $\frac{1}{z}$ berilgan bo'lsa, w қ $\frac{1}{z}$ қ $\frac{1}{x+iy}$ қ $\frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$;

u қ $\frac{x}{x^2+y^2}$ va v қ $-\frac{y}{x^2+y^2}$ kelib chiqadi, bu funktsiyaning aniqlanish soxasi tekislikning, noldan boshqa, xamma nuqtalaridan iborat, chunki z $\neq 0$, w қ $\frac{1}{z}$ funktsiya uchun aniqlanish soxa.

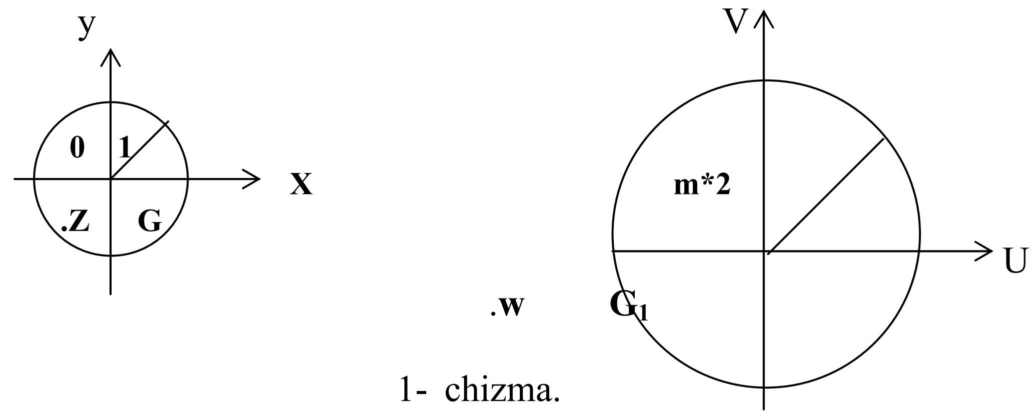
Xar bir kompleks songa tekislikda tayin bir nuqtaning mos kelishligidan foydalanib kompleks o'zgaruvchi funktsiyaning geometrik ma'nosini aniqlaymiz. Buning uchun z ning qiymatlariga tegishli nuqtalarni (z) tekislikka, w қ f(z) funktsiyaning qiymatlariga tegishli nuqtalarni esa (w) tekislikka joylaymiz. U vaqtda(z) tekislikdagi E to'plamdan olingan xar bir z nuqtaga (w) tekislikda biror w nuqta mos keladi. Natijada E to'plamni aksi w tekislikka tushib biror E_1 to'plamni xosil qiladi.

Agar w қ f(z) funktsiya E to'plamda bir qiymatli funktsiya bo'lsa va E ning ikkita turli nuqtasiga E_1 ning xamma vaqt ikkita turli nuqtalari mos kelsa (ya'ni $z_1 \neq z_2$ da $f(z_1) \neq f(z_2)$) akslantirish o'zaro bir qiymatli, f(z) esa E soxada bir varaқli funktsiya deyiladi.

Odatda E_1 to'plam E ni aksi, E esa E_1 ning asli deyiladi.
+uyidagi sodda akslantirishlar bilan tanishib chiqaylik.

1. w қ mz , (m > 0) funktsiya yordamidagi akslantirishni tekshiramiz.
E to'plam sifatida $|z| \le 1$ yopiqbirlik doirani qaraylik. Bu bizga G to'plamni beradi. U xolda $|w| = |mz| = m|z| \le m$ ga ega bo'lamiz.

Bu esa G_1 ni tashkil qilib, u m radiusli doiradan iboratdir. m қ 2 deb olib shakl chizamiz. (1-chizma).



1- chizma.

Xususiy xolda $|z| = 1$ aylana obrazi $|w| = m$ aylanadan iborat bo'ladi.

2. w қ z^2 funktsiya yordamida bo'ladigan akslantirishni aniqlaylik.
Muavr formulasiga asosan

$$Z^2 \text{ қ } [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

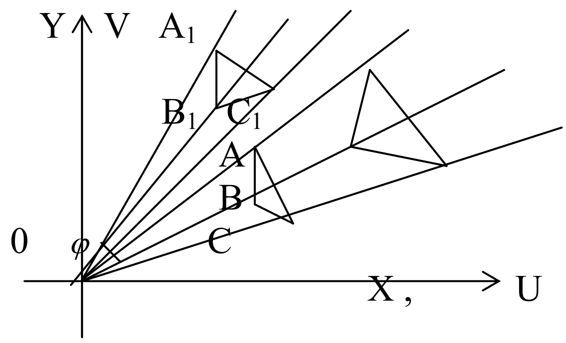
$$w = p(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ deb olsak}$$

$$p = r^2 \text{ va } \theta = 2\varphi$$

tenglikka ega bo'lamiz. Ma'lumki $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ va $|w| = p$, $\arg w = \theta$.
Demak, z ning w obrazini topish uchun r o'rniga $p = r^2$ va φ o'rniga $\theta = 2\varphi$ olish kerak. Boshqacha aytganda z vektorni φ burchakka burib, $r = |z|$ marta cho'zish (agar $r\langle 1$ bo'lsa, қisish) kerak ekan.

Xususan, G deb $|z| \le \frac{1}{2}$ doirani olsak, G_1 soxa $|w| = |z|^2 \le \frac{1}{4}$ doiradan iborat bo'ladi.

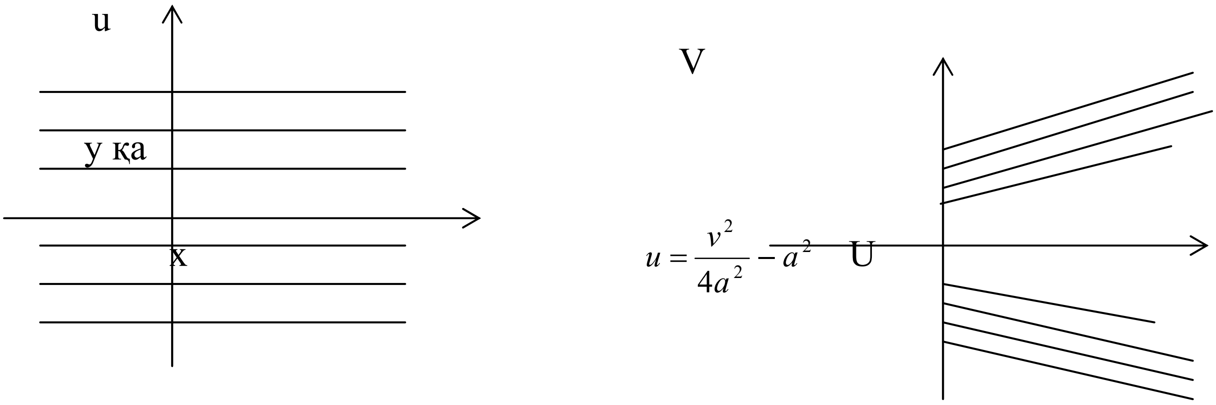
Agar G sifatida AVS uchburchak olsak, uning G_1 aksi o'sha uchburchakka o'xshash $A_1V_1S_1$ uchburchak bo'lib, oldingi uchburchakka nisbatan $r = |z|$ қadar siljigan va soat strelkasiga teskari yo'nalishda φ burchakka burilgan bo'ladi. (2-chizma).



qulaylik uchun XOY va UOV koordinatalar sistemasi bitta qilib olindi.

2. $w = z^2$ funktsiya yordamida (z) tekislikdagi OX o'qqaparallel y қa chiziqlar oilasining (w) tekislikdagi aksi қanday chiziqlardan iborat bo'lishi aniqlansin.

Ma'lumki z қ x + iy , w қ u + iv dan u қ $x^2 - y^2$, v қ 2xy (3) tenglik kelib chiqadi. y қ a ekanidan u қ $x^2 - a^2$, v қ 2ax yoki xar ikki tenglidan x ni yo'qotib $u = \frac{u^2}{4a^2} - a^2$ bo'ladi. Parametr a ga turlicha xaqiqiy qiymatlar berilsa, bu tenglama xaqiqiy o'qqa simmetrik parabolalar oilasini tasvirlaydi. (3-chizma).



3-chizma

Demak y қ a to'g'richiziqlar oilasining aksi parabolalar oilasidan iborat ekan. Agar w қ z^2 funktsiya o'rniga boshqa bir funktsiya olsak, u xolda yқ a ning aksi, shubxasiz, boshqa egri chiziqlar oilasi bo'lar edi.

w қ z^3 funktsiya uқa chiziklar oilasini kanday chizikka utkazadi?

Endi biz OX o'qiningaksi (w) tekislikda қanday chiziqdan iborat bo'lishini tekshirib ko'raylik. Uning uchun y қ 0 (3) ga қo'ysak

$$u = x^2 \geq 0 \quad , \quad v = 0$$

Bu esa OU o'qiningmusbat tamonini bildiradi. Demak, OX o'q, ya'ni y қ 0 chiziqning obrazi OU o'qiningfaқat musbat tomonidan iborat ekan.

Xuddi mana shu usulda OY o'qqaparallel bo'lgan x қ a to'g'richiziqlar oilasini w қ z^2 funktsiya yordami bilan (w) tekislikka aks ettirilsa,

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$$

parabolalar oilasi xosil bo'lib, ularning uchlari OU o'qiningo'ng tomoniga joylashgan bo'ladi. SHuningdek, x қ 0 o'qning aksi esa OU o'qning manfiy tomonidan iborat bo'lib qoladi.

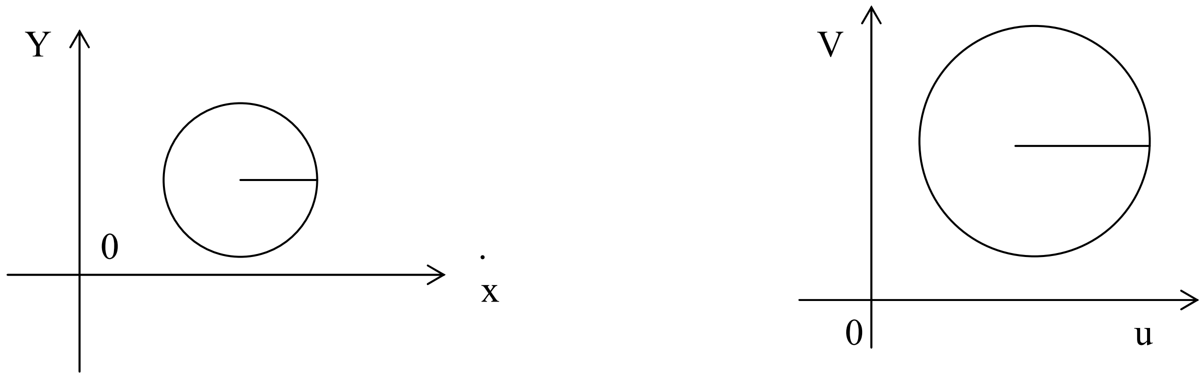
3. Funktsiyaning limiti va uzluksizligi.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiya uchun limit tushunchasini ko'rib o'tamiz. Agar z_0 atrofida G ga tegishli (z_0 dan boshqa) aqalli bitta nuqta bo'lsa, shu z nuqtaga G uchun limit nuqta bo'ladi. Umuman z_0 nuqta G ga tegishli bo'lmasligi xam mumkin.

Ta'rif: Agar tayin A kompleks son va istalgancha kichik ε > 0 son uchun shunday $\delta(\varepsilon)$> 0 son topish mumkin bo'lsaki, $|z - z_0|$ < δ tengsizlikni қanoatlantiradigan xamma z lar uchun $|f(z)-a|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A son f(z) funktsiyaning z o'zgaruvchi z_0 ga intilgandagi limiti deyiladi va қuyidagicha yoziladi.

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A \qquad (4)$$

Ya'ni: xar qanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta(\varepsilon)$ musbat son topish mumkin bo'lsaki, z_0 nuqtaning δ atrofi ichidan olingan G ga tegishli (z_0 dan farqli) barcha nuqtalarga mos bo'lgan G_1 ga tegishli w қ f(z) nuqtalar A nuqtaning ε – atrofi ichida joylashgan bo'lsa, A son f(z) ning z o'zgaruvchi z_0 ga intilgandagi limiti deyiladi. (6- chizma).



6- chizma .

$A=B+Ci$, $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ va z_0 қ x_0 + iy_0 bo'lsin. U xolda (4) kompleks munosabat quyidagi ikkita xaqiqiy munosabatlarga ekvivalent bo'ladi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=B \quad , \qquad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=C$$

Bundan ko'rinadiki xaqiqiy o'zgaruvchining fukntsiyasi ustidagi sodda amallar kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar uchun xam o'rinli bo'ladi.

Z_0 yoki A yoki bu sonlarning xar ikkalasi xam cheksiz katta sonlar bo'lsa,

$$\lim_{z\to\infty} f(z)=A \qquad (5)$$

tenglik, $\varepsilon > 0$ kichik son uchun yetarlicha katta M musbat son topish mumkin

$$|z|>M \qquad (6)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi z ning barcha G ga tegishli qiymatlari uchun f(z) funktsiya $|f(z)-A|<\varepsilon$ tengsizlik qanoatlantiriladi, A қ ∞ bo'lgan xol xam xuddi shunga o'xshash ta'riflanadi.

Ta'rif: Agar xar қanday kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ sonni topish mumkin bo'lsaki, $|z-z_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha z lar uchun $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0) \qquad (7)$$

bo’lsa, u xolda w қ f(z) funktsiya z_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Soddaroқ aytganda funktsiya bir tomondan z_0 nuqtada chekli A limitiga ega bo’lishi va ikkinchi tomondan, o’sha limit z_0 nuqtadagi $f(z_0)$ xususiy qiymatiga teng bo’lishi shart ekan.

Matematik analizdagi kabi uzluksizlikni Δz orqali ifodalaymiz. Buning uchun, quyidagilarni kiritamiz:

w қ f(z), w_0 қ $f(z_0)$ z қ x + iy z_0 қ $x_0 + iy_0$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ va $z - z_0 = \Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $f(z) - f(z_0) = w - w_0 = \Delta w$,

ya’ni:

$$z = z_0 + \Delta z \ , \qquad \Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

U xolda f(z) funktsiyaning z_0 nuqtada uzluksizligini quyidagicha ta’riflash mumkin.

Agar xar qanday kichik $\varepsilon > 0$ uchun $\delta > 0$ ni ko’rsatish mumkin bo’lsaki, $|\Delta z| < \delta$ bo’lganda

$$|\Delta w| < \varepsilon \text{ ya’ni, } \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0 \qquad (8)$$

bo’lsa, f(z) funktsiya z_0 nuqtada uzluksiz bo’ladi.

Xaqiqiy o’zgaruvchini funktsiyasi kabi bu ikki ta’rif o’zaro ekvivalentidir, ya’ni birini o’rinli bo’lishidan ikkinchisini o’rinli ekani bevosita kelib chiqadi.

Umumiy xoldagi uzluksizlik tushunchasi bilan tanishdik, endi funktsiyaning xaqiqiy va mavxum qismlarini ajratib, sungra uzluksizligini tekshiramiz. Agar

$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ desak, u xolda Δwқf(z_0+Δz)-f(z_0)қ$[u(x_0 + \Delta x, y + \Delta y)]$+iv($x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$)]-

-[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]қ[u($x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$)-u($x_0$,$y_0$)+iv($x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$)

v(x_0,y_0)]қ$\Delta u + i\Delta v$ ya’ni , $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$

xamda

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) \qquad \Delta v = v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)$$

Bularga asosan (8) dan :

$$\lim_{\Delta z \to 0} (\Delta u + i\Delta v) = \lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta u = 0 \quad \text{va} \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta v = 0 \qquad (9)$$

(9) tengliklar u(x,y), v(x,y) funktsiyalarning (x_0,y_0) nuqtada uzluksizligini bildiradi.

SHunday qilib,kompleks uzgaruvchili w қ f(z) funktsiyaning z_0 қ $x_0 + iy_0$ nuqtadagi uzluksizligidan,uning xaqiqiy va mavxum qismlarini(x_0,y_0) nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi va aksincha (9) dan (8) kelib chiqadi.

Agar berilgan w қ f(z) funktsiya G soxaning xar bir nuqtasida uzluksiz bulsa, u xolda funktsiya G soxada uzluksiz deyiladi.

1- misol. w қ z^2 . z_0 қ x_0 + iy_0 ixtiyoriy uzgarmas son quzg'almas nuqta).

$$\Delta w = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0\Delta z + \Delta z^2$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\Delta z \to 0} \left[2z_0\Delta z + \Delta z^2\right] = 0$$ demak,w қ z^2 funktsiya tekislikning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz ekan.

2-misol w қ z қ x - iy bulsa, $\Delta w = \Delta x - i\Delta y$,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0.$$

Demak, bu funktsiya xam tekislikning barcha chekli nuqtalarida uzluksiz.

3- misol. $w = \frac{1}{z}$ $\Delta w = \frac{1}{z_0 + \Delta z} - \frac{1}{z_0} = \frac{-\Delta z}{z_0(z_0 + \Delta z)}$. Agar $z_0 \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \Delta w = -\frac{1}{z_0} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{z_0 + \Delta z} = 0.$$

Demak, $\frac{1}{z}$ funktsiya tekislikning z_0 қ 0 dan boshqa barcha nuqtalarda uzluksiz.

4-misol. w қ 3xy – 5(x + y^2)i. Bu misolda u қ 3xy v қ -5(x + y^2)

$\Delta u = 3[(x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy] = 3[x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y], \Delta v = -5\left[x + \Delta x + (y + \Delta y)^2 - (x + y^2)\right] = -5\left[\Delta x + 2y\Delta y + \Delta y^2\right]$. Endi $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ nolga intiltirsak, Δx va Δy xam nolga intiladi, u xolda $\lim \Delta u = 0$, $\lim \Delta v = 0$, demak $\lim \Delta v = \lim(\Delta u + i\Delta v = 0.)$.

Bundan funktsiyani ixtiyoriy chekli (x,y) nuqtada uzluksizligi kelib chiqadi.

Kompleks tekislikdagi biror G soxada aniqlangan bir qiymatli w қ f(z) funktsiya berilgan bo'lib, $z_0 \in G$ bo'lsin. Bizga ma'lumki, argumentning z orttirmasi $\Delta z = z - z_0$ ayirmadan iborat bo'lib, funktsiyaning unga mos orttirmasi esa $\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

1-ta'rif: Agar Δz ni xar qanday yo'l (qonun) bilan nolga yaqinlashtirilganda xam $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbat faqat birgina aniq limitga intilsa, shu limit f(z) funktsiyaning z_0 nuqtadagi xosilasi deyiladi:

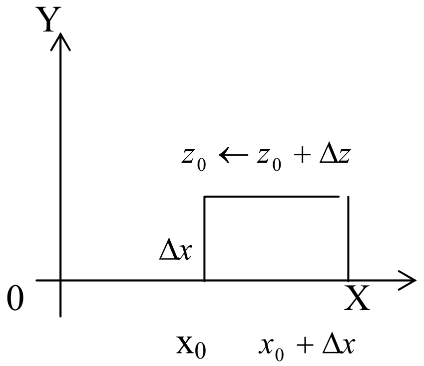
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad (10)$$

Bu xosila qisqacha $w', f'(z_0), \frac{dw}{dz}, \frac{df}{dz}$ ko'rinishida belgilanadi. Endi quyidagi w қ f(z) қ u(x,y) + iv(x,y), $\Delta w = \Delta u + i\Delta v, \Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tengliklarga asosan (10) ni ushbu ko'rinishda yozish xam mumkin

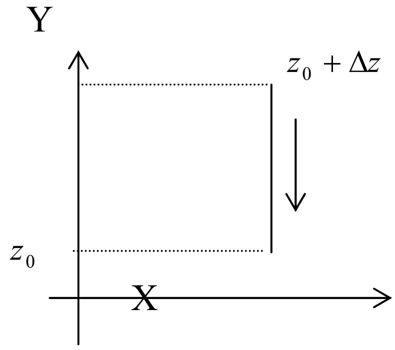
$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \qquad (11)$$

2-ta'rif: Agar w қ f(z) funktsiya z_0 nuqtada xosilaga ega bo'lsa, uni bu nuqtada differentsiallanuvchi funktsiya deyiladi.

Agar funktsiya z_0 nuqtada xosilaga ega bo'lsa, (10) limit mavjud bo'lib, u $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ning qanday qonun bilan nolga intilishiga mutlaqo bog'liq emasligi ta'rifdan ko'rinadi. SHu sababli biz $z_0 + \Delta z$ nuqtani OX o'qiga prarallel bo'lgan yo'l bilan z_0 nuqtaga yaqinlashtiramiz. U xolda $\Delta z = \Delta x$, ya'ni $\Delta y = 0$ deb olamiz.(7-chizma).



7- chizma



8-chizma

(10) dan: $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ (13)

Xuddi shu kabi $\Delta x = 0$, ya'ni $\Delta z = i\Delta y$ deb olsak, Δz ning nolga intilishi uchun $z_0 + \Delta z$ nuqta z_0 nuqtaga OY ga parallel yo'l bilan yaqinlashishi kerak.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0}\left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (14)$$

Oxirgi (13) va (14) tengliklarda

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{yoki} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (15)$$

(15) tenglik Dalamber – Eyler sharti, ba'zi adabiyotlarda esa Koshi – Riman sharti deb ataladi.

SHunday qilib, agar w қ f(z) funktsiya z_0 nuqtada xosilaga ega bo'lsa, bundan (15) **zaruriy shartlar** kelib chiqarar ekan. Boshqacha aytganda, w қ f(z) z_0 nuqtada differintsiallanuvchi bo'lsa, u xolda

a) $(x_0;y_0)$ nuqtada $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ xususiy xosilalar mavjud bo'ladi.

b) Koshi – Riman (15) sharti bajariladi.

Etarlilik sharti. Agar biror ikki argumentli f(x,y) funktsiya $(x_0;y_0)$ nuqtada xususiy xosilaga ega bo'lsa xam, undan funktsiyaning o'sha nuqtada to'la differintsialga ega degan natija kelib chiqmasligi bizga ma'lum. SHuning uchun u(x,y) va v(x,y) funktsiyalarga qo'shimcha talab qo'yamiz, ya'ni ular (x_0,y_0) nuqtada differentsiallanuvchi, deb faraz qilamiz. U xolda (x_0,y_0) nuqtadagi orttirmalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1|\Delta z| \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2|\Delta z| \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

(16) dagi $|\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \alpha_1$ va α_2 cheksiz kichik miqdorlardir.

(16) ga asoslanib

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta x+\frac{\Delta v}{\Delta y}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)+(\alpha_1+i\alpha_2)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}$$

tenglikni yozish mumkin. (15) berilgan deb faraz qilganimiz uchun $\frac{\partial u}{\partial y}$ o'rniga $-\frac{\partial v}{\partial x}$ ni $\frac{\partial v}{\partial y}$ o'rniga $\frac{\partial u}{\partial x}$ ni qo'ysak,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y\right)+\left(\alpha_1+i\alpha_2\right)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y}$$ ni xosil qilamiz. Bu tenglikda i^2 q -1 ekanini e'tiborga olib quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+\left(\alpha_1+i\alpha_2\right)|\Delta z|}{\Delta x+i\Delta y},$$

bundan esa, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ ekanini eslasak

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\alpha_1+i\alpha_2\right)\frac{|\Delta z|}{\Delta z}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Ma'lumki $$\left|\frac{|\Delta z|}{\Delta z}\right|=\frac{|\Delta z|}{|\Delta z|}=1,$$

shu sababli Δz nolga intiladi:

$$\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right|=|\alpha_1+i\alpha_2|\to 0.$$

So'ngi tenglikning ma'nosi quyidagidan iboratdir:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

SHunday qilib, biz ushbu teoremani isbot qildik.

Teorema: Biror G soxada aniqlangan f(z) қ u(x,y) + iv(x,y) funktsiyaning shu soxaga tegishli, z_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun u(x,y) va v(x,y) funktsiyalarning o'sha nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishligi xamda $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ shartlarni bajarilishi zarur va yetarlidir.

(14) va (15) formulalardan wқf(z) funktsiyani xosilasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

5-misol. w қ z қ x – iy . Bu funktsiya tekislikni barcha nuqtalarida uzluksiz edi. U қ x , v қ -y ekanligidan $\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=-1,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0$ xosil bo'ladi, bundan esa $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}.$

Koshi – Riman sharti buzildi, demak funktsiyani xosilasi mavjud emas.

6- misol.

w қ 3xy – 5(x + y^2)i u қ 3xy v қ -5(x + y^2).

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3y,\frac{\partial v}{\partial y}=-10y,\frac{\partial u}{\partial y}=3x,\frac{\partial v}{\partial x}=-5$$

Koshi – Riman shartiga ko'ra 3y қ -10y , 3x қ 5 .

Bu tengliklar faqat y қ 0, x қ $\frac{5}{3}$ qiymatlarda o'rinli. Demak, funktsiya ($\frac{5}{3}$;0) , ya'ni $z_0=\frac{5}{3}$ nuqtada xosilaga ega bo'ladi.

Agar bir qiymatli w q f(z) funktsiya G soxaning barcha nuqtalarida differintsiallanuvchi, ya'ni xosilaga ega bo'lsa, u funktsiya o'sha soxada analitik deyiladi.

7-misol. w қ z^2 + z funktsiyani wқu + iv ko'rinishiga keltiring va analitik ekanini tekshiring, agar analitik bo'lsa z_0 қ 2 – i nuqtadagi xosila topilsin.

Echish. w қ $(x + iy)^2$ + (x + iy) қ x^2 + 2xyi +$(iy)^2$ + x + iy қ x^2 – y^2 + x + (2xy + y)i u қ x^2 + x - y^2 , v қ 2xy + y ga ega bo'lamiz.

Xususiy xosilalarni topsak

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+1 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2x+1$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ dan 2x + 1 q 2x + 1

$-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$ dan -2y q -2y

Koshi – Riman sharti bajarildi.

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ formulani biriga qo'yib

$w'=2x+1+i2y=2x+2yi+1$ natija xosil bo'ladi. z_0 қ 2 – i da x_0 қ 2, yқ-1 ekanidan $w'_{|z_0}=2\cdot 2+2\cdot(-1)i+1=4+1-2i=5-2i.$

Demak, $w'_{|z_0}=5-2i.$

Endi xosilani geometrik ma'nosiga to'xtalib o'tamiz.

w қ f(z) funktsiya XOY tekislikdagi biror G soxada analitik bo'lsin,ya'ni bu soxaning xar bir z nuqtasiga w funktsiyaning aniq bir qiymati mos kelib, bu w қ u + iv qiymatga mos UOZ tekislikda yangi G_1 soxani xosil qilsin.

Xosilani geomitrik ma'nosini tekshirish uchun uning moduli va argumentning geometrik ma'nosini aloxida qarash kerak.

f(z) funktsiya z nuqtada xosilaga ega va $f'(z)\neq 0$ deb olaylik.

w қ f(z) funktsiya yordamida G soxadagi M(z) nuqta G_1 soxadagi M_1(z) nuqtaga va N(z + Δz) nuqta N_1(z + Δz) nuqtaga o'tsin. M_1N_1 kesmani MN kesmaga nisbatini qaraylik;

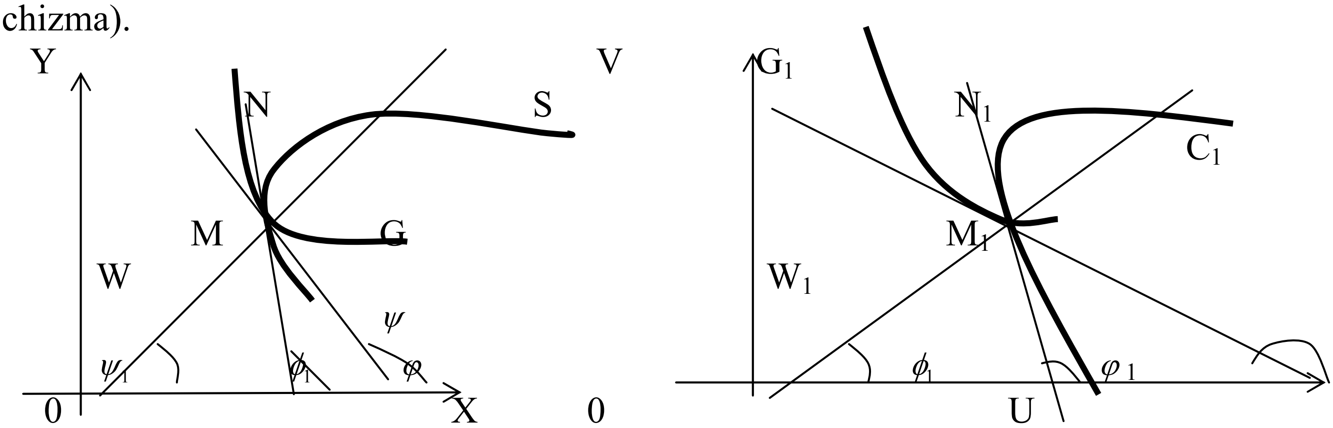
$$\frac{M_1N_1}{MN}=\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \text{ yoki } \frac{M_1N_1}{MN}=\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|.$$

Xosilaning ta'rifiga ko'ra.

$$\lim_{N\to M}\frac{M_1N_1}{MN}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\left|f'(z)\right|. \qquad (16)$$

Agar $f'(z)=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ desak, $r=\left|f'(z)\right|,. \qquad \alpha=\arg f'(z)$

(16) dan nuqtadagi xosilaning moduli $r=\left|f'(z)\right|=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ yo’nalishiga bog’liq emasligi, ya’ni z nuqtadan xar bir tomonga chiqarilgan kesmalar W nuqtada bir xil cho’zilar (siqilar) ekan. Bu xossa teng cho’ziluvchanlik xossasi deyiladi.(9-chizma).



9- chizma.

Endi xosila argumentini qaraylik. w қ f(z) funktsiya M va N nuqtalardan o’tuvchi C chiziqni M_1 va N_1 nuqtalardan o’tuvchi C_1 chiziqqa o’tkazadi, deb faraz qilaylik. Kasrning argumenti surat va maxraj argumentlari ayirmasiga teng ekanidan

$$\arg f'(z)=\alpha=\lim(arcg\Delta w-\arg\Delta z)=\lim(\phi_1-\varphi_1),$$

ya’ni MN va M_1N_1 kesuvchilar og’ish burchaklarining ayirmasiga teng. Δz nolga intilganda kecuvchilar urinmalarga o’tgani uchun

$$\alpha=\arg f'(z)=\phi-\varphi, \qquad (17)$$

bu esa z nuqtaga o’tkazilgan urinma w nuqtada qanday burchakka burilganini ko’rsatadi.

Endi z nuqtadan o’tuvchi G chiziq shu funktsiya vositasida G_1 chiziqqa akslantirilsin. Bu chiziqqa nisbatan xam

$$\beta=\arg f'(z)=\Psi-\varphi. \qquad (18)$$

Qaralyotgan funktsiya analitik bo’lgani uchun qaysi bir chiziq bo’ylab nuqtaga yaqinlashmaylik (17) va (18) dan

$$\alpha=\beta \qquad (19)$$

bu z nuqtadan chiqqan barcha chiziqlar bir xil burchakka burilishini ko’rsatadi.

SHunday qilib, analitik funktsiya vositasida bajariladigan akslantirish fnuktsiyaning xosilasi $f'(z)\neq 0$ barcha nuqtalarda

1) burchakni saqlash
2) teng cho’ziluvchanlik

xossasiga ega ekan. Bunday akslantirish konform akslantirish deyiladi.

Biz e^x funktsiyani

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x. \qquad (20)$$

ko’rinishida aniqlagan edik.

Kompleks soxada xam e^x funktsiyani xuddi yuqoridagi kabi aniqlash mumkin. Tayin z қ x + iy kompleks son uchun

$$a_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

ketma – ketlik limitini mavjudligini isbotlaymiz xamda shu limitni xisoblaymiz.

Ravshanki

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1 + \frac{x}{n}, Jm\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \frac{y}{n}.$$

Buni e’tiborga olsak,

$$|a_n| = \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = \left(\sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}}\right)^n = \left(1 + \frac{2x}{n} + \frac{x^2 + y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}, \arg a_n = n \bullet \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = narctg\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Birinchi ifoda $\frac{x^2 + y^2}{n^2}$ xadni tashlab yuborishimiz mumkin chunki $n \to \infty$ da y , $\frac{2x}{n}$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor bo’ladi; cheksiz kichik $arctg\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$ ni unga ekvivalent bo’lgan $\frac{y}{n + x}$ bilan almashtirib quyidagini topamiz;

$$\lim_{n \to \infty}|a_n| = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \to \infty}\left[\left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{\frac{n}{2x}}\right]^x = e^x \tag{21}$$

$$\lim_{n \to \infty}\arg a_n = \lim_{n \to \infty}\frac{ny}{n + x} = y. \tag{22}$$

SHunday qilib (21), (22) limitlarning mavjudligi kelib chiqadi.

Demak,

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

chunki $$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Ixtiyoriy z қ x + iy kompleks son uchun ye^z ko’rsatkichli funktsiyani ushbu

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{23}$$

munosabat bilan aniqlaymiz. Bundan $\left|e^z\right| = e^x$ va $Arge^z$ ning qiymatlaridan biri y ga teng x қ 0 da esa eyler formulasi xosil bo’ladi.

Endi kompleks o’zgaruvchining ko’rsatkichli funktsiyasi e^z ning xossalarini ko’raylik:

1) z xaqiqiy bo’lganda e^z funktsiya e^x ning barcha xossalariga ega.
2) Bu funktsiya butun tekislikda analitik
3) Oddiy differentsiallash formulasi saqlanadi: $\left(e^z\right)' = e^z$.
4) Ko’rsatkichli funktsiyaning asosiy xossasi qo’shish teoremasi saqlanadi:

$$e^{z_1} \bullet e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}.$$

Bu xossalardan 4- sini isbotiga to'xtalib o'tamiz:

$$e^{z_1} \bullet e^{z_2} = e^{x_1}\left(\cos y_1 + i\sin y_1\right) \bullet e^{x_2}\left(\cos y_2 + i\sin y_2\right) =$$
$$e^{x_1+x_2}\left[\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\right] =$$
$$e^{x_1+x_2}\left(\cos(y_1 + y_2) + i\sin(y_1 + y_2)\right) = e^{z_1+z_2}.$$

1-4-xossalardan tashqari faqat kompleks o'zgaruvchining ko'rsatkichli funktsiyasiga xos, davriylik bo'lib, uning asosiy davri sof mavxum son $2\pi i$ ga teng. Xaqiqatdan xam, ixtiyoriy butun k uchun

$$e^{z+2k\pi i} = e^{z} \bullet e^{2k\pi i} = e^{z}.$$

chunki Eyler formulasiga ko'ra $e^{2\pi k i} = 1$.

Ixtiyoriy kompleks son z uchun trigonametrik funktsiyalar

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (23)$$

tenglik bilan aniqlanadi.
Bundan esa

$$tgz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}, \qquad ctgz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}. \qquad (24)$$

formulalar bilan aniqlanadi. Bu funktsiyalar cosz va sinz funktsiyalar nolga aylanmaydigan nuqtalarda analitik funktsiyalardir. (24) formula bilan aniqlangan tgz va ctgz funktsiyalar davriy ekanini va davri π ekanini, (23) formula bilan aniqlangan sinz va cosz funktsiyalar xam davriy bo'lib davri 2π ekanini ko'rsatish qiyin emas. sinz va cosz funktsiyalar juft va toqligi xam sodda kelib chiqadi

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z, \cos(z + 2\pi) = \cos z,$$
$$\sin(-z) = -\sin z, \cos(-z) = \cos z$$

Xaqiqiy o'zgaruvchining trigonometrik funktsiyalari orasidagi munosabatlarni barcha formulalar kompleks soxada xam o'rinlidir. Sinus uchun yiғindi xaqidagi teoremani tekshirib ko'raylik:

$$\sin z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \sin z_2 = \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} +$$
$$\frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2)$$

Xuddi shunday usul bilan ushbu formulani xosil qilamiz:

$$\cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 = \cos(z_1 + z_2).$$

YuQoridagi munosabatlardan:

$$\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \qquad \sin(z + \pi) = -\sin z$$
$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z, \qquad \cos(z + \pi) = -\cos z$$

formulani va istalgan z uchun $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ ekanini osongina ko'rsatish mumkin. Endi sinz va cosz funktsiyalarni qaysi nuqtada nolga aylanishini tekshirib ko'raylik. Faraz qilaylik, sinz қ 0 bo'lsin. U xolda $e^{iz} - e^{-iz} = 0$ yoki e^{2iz} қ 1. Z қ x + iy desak, $e^{2i(x + iy)}$ қ 1 yoki ye^{-2u} ye^{2ix} қ 1 bundan e^{-2y} қ 1, 2x қ $2k\pi$ .Tenglik xosil qilamiz. Demak,y қ 0 , xқ $k\pi$ SHunday qilib, sinz funktsiya $z = k\pi$ nuqtalarda nolga aylanadi, bunda $k = 0, \pm 1 \pm 2, ...$

Xuddi shu usulda cosz қ 0 bo'lishi uchun $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ bo'lish zarurligini ko'rsatish mumkin.

(23) formuladan $\sin' z = \cos z, \cos' z = -\sin z$

differintsiallash formulalari o'rinli. Ammo, xaqiqiy o'zgaruvchining barcha xossalari xam kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funktsiyada saqlana bermaydi. Masalan, xar qanday z uchun $|\sin z|$ va $|\cos z|$ birdan ortmaydi deb tasdiқlash mumkin emas. Xaqiqatan xam, agar (23) da

z қ i desak, $\sin i = \frac{e - e^{-1}}{2x} i \approx 1{,}17520i, \cos i = \frac{e + e^{-1}}{2} = 1{,}54308,$ ya'ni $|\sin i| > 1, |\cos i| > 1.$

Kompleks argumentli giporbolik funktsiyalar deb quyidagilarni qabul qilamiz:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, thz = \frac{shz}{chz}, cthz = \frac{chz}{shz} \qquad (25)$$

bunda z қ x + iy – kompleks o'zgaruvchi (23) formuladagi z o'rniga iz ni qo'ysak:

$$\sin iz = \frac{e^{i^2 z} - e^{-i^2 z}}{2i} = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2i} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2i},$$

tenglikni xar ikki tomonini (-i) ga ko'paytirib

shz қ -isiniz (26)

munosabat kelib chiqadi.

Mana shu usulda

Chz қ cosiz , thz қ -itgiz, cthz қ ictgiz (27)

formulani oson xosil qilinadi.

Bu formulalar giperbolik funktsiyalarni trigonometrik funktsiyalar orqali ifoda qilinishini ko'rsatadi.

Xuddi shuningdek (25) formuladan

$$\sin z = -ishiz, \cos z = chiz, tgz = -itgiz, ctgz = ictgiz. \qquad (28)$$

ayniyatlarni xosil qilish mumkin.

e^w қ z (29)

funktsiyani, xar ikki tomonini logarifmlab

w қ Lnz (30)

kompleks soxadagi logorifmik funktsiya deb ataluvchi funktsiyaga ega bo'lamiz. Ma'lumki (29) da w o'rniga xar qanday son qo'ysak xam $e^w \neq 0$ bo'ladi, shu sababli $z \neq 0$ uchun so'z yuritamiz.

Agar w va z larni W қ u + iv , $z = re^{i\varphi}$ ko'rinishda yozsak , (29) dan ushbu $e^{u+iv} = re^{i\varphi}$ yoki $e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi}$ tenglamaga ega bo'lamiz. Bundan e^u қ r yoki u қ lnr , $v = \varphi + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Demak, $w = u + iv \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$

yoki (30) ga asosan:

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi) \qquad (31)$$

bunda $r = |z|, \varphi + 2k\pi = Argz.$

SHuning uchun ba'zan (31) tenglik

$$Lnz = \ln|z| + iArgz$$

ko'rinishida xam yoziladi; k ķ 0 bo'lgan xolni, ya'ni lnr + iφ ni logorifmning bosh qiymati deyiladi va lnz orqali belgilanadi:

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi \qquad (32)$$

Buni e'tiborga olib, (31) tenglikni quyidagicha xam yozish mumkin

$$Lnz = \ln z + 2k\pi i \qquad (33)$$

(33) ga e'tibor qilsak z ning xar bir qiymatiga logorifmning cheksiz ko'p qiymati mos kelishini ko'ramiz, chunki $k = 0,\pm 1,\pm 2,...$ SHuning uchun xam agar biz z ni erkli o'zgaruvchi, ya'ni argument deb qabul qilsak, u xolda (30) dagi logorifmik funktsiya ko'p qiymatli bo'ladi.

Endi (33) ning ba'zi xususiy xollarini ko'rib chiqaylik.

1) z ķ m > 0 son bo'lsin. U xolda $r = |z| = |m| = m, \varphi = \arg m = 0$ bo'ladi.

Bularni e'tiborga olsak $Lnm = \ln m + 2k\pi i$ qiymatga ega bo'lamiz.Elementar matematikada shu qiymatlardan k ķ 0 bo'lgan xoli, ya'ni lnm ishlatiladi. Agar Lnm ning barcha qiymatlarini yozsak quyidagicha bo'ladi:

$$..,\ln m - 4\pi i, \ln m - 2\pi i, \ln m, \ln m + 2\pi i, \ln m + 4\pi i,...$$

2) m ķ -m manfiy son bo'lsin, deb faraz qilaylik. U xolda

$$r = |z| = |-m| = m.$$

bularni (33) ga qo'ysak,

$$Ln(-m) = \ln m + i(\pi + 2k\pi)$$

yoki

$$..., \ln m - \pi i, \ln m + \pi i, \ln m + 3\pi i,...$$

Buning bosh qiymati

$$\ln(-m) = \ln m + \pi i$$

ya'ni manfiy sonning logarifmi kompleks sondan iborat. Xaqiqiy sonlar soxasida esa manfiy sonning logarifmi mavjud emas.

Bizga ma'lum bo'lgan logarifmga tegishli teoremalar kompleks soxada xam o'rinli bo'ladi.

1. $Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$

2. $Ln\dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2.$

Bu teoremaning isbotlari xam elementar matematikadagidan farq qilmaganligi uchun birinchisini isbotlash bilan chegaralanamiz. Faraz qilaylik

$$.e^{w_1} = z_1, \quad e^{w_2} = z_2$$

ya'ni

$$w_1 = Lnz_1, w_2 =| Lnz_2$$

Bundan, logorifmning ta'rifiga ko'ra

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = w_1 + w_2,$$

ya'ni

$$Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2.$$

shuni isboti talab qilingan edi.

8-misol. Ln(-1) ķ ?

Dastlab (-1) ni trigonometrik yoki ko'rsatkichli shaklda yozib olamiz

$$-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi},$$

demak, (31) ga asosan:

$$Ln(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2k\pi) = (2k+1)\pi i,$$

chunki

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. SHunday qilib, (-1) ning logorifmlari

$$..., -3\pi i, -\pi i, \pi i, 3\pi i, ...$$

sof mavxum sonlardan iborat bo'lib, juftma-juft o'zaro qo'shma sonlardir.

9-misol. Lni қ ?

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ya'ni

$$r = |i| = 1, \varphi = \arg i = \frac{\pi}{2},$$
$$Lni = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Uz-uzini tekshirish uchun savollar.

1. Kompleks o'zgaruvchili kursatkichli funktsiya va ularni xossalarini ayting.
2. Kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funktsiya va ularni xossalarini ayting.
3. Kompleks o'zgaruvchili logarifmik funktsiya va ularni xossalarini ayting.

7-9-Ma'ruza

Operatsion hisob.

Operatsion hisob. Laplas tasviri.

Ukuv moduli birliklari:

1. Laplas tasvir, original va tasvir.
2. Boshlang'ich funktsiyaga shartlar.
3. O'zgarmas sonni tasvir belgisidan chiqarish va yig'indini tasviri.

Aniklashtirilgan o'kuv maqsadlari:

Talabalar ushbu mavzuni uzlashtirgandan sung:

1. Laplas tasvir formulasini biladi.
2. Xosmas integral mavjud bo'lishi uchun boshlang'ich funktsiyaga qo'yilgan shartlarni biladi.
3. Tasvirni yagonaligi xaqidagi teoremani biladi.
4. Tasvirni xossalarini biladi.

1. Kirish. Operatsion hisob matematik analizning muhim sohalaridan biridir. Fizika, mexanika, elektrotexnika va boshqa fanlarda turli masalalarni yechishda operatsion hisob usullaridan keng foydalaniladi. Operatsion hisob hozirgi zamon avtomatika va telemexanikasida ayniqsa keng qo'llaniladi. Operatsion hisob usullari koeffitsientlari o'zgarmas bo'lgan chiziqli differentsial tenglamalarni yechishda muvaffaqiyat bilan qo'llaniladi. Bu usulda differentsial tenglamalarning xususiy yechimini, umumiy yechimini va ixtiyoriy o'zgarmaslarni topib o'tirmasdan, oson va bevosita topishga imkon beradi. Bu usullarni asosiy g'oyasi berilgan differentsial tenglamadan yordamchi algebraik tenglamaga o'tishdadir, bu yordamchi tenglamani tuzishda boshlang'ich shartlar sistemasi ham hisobga olinadi. Yordamchi algebraik tenglama yechimidan teskari almashtirish bajarish dastlabki berilgan differentsial tenglamaning izlanayotgan xususiy yechimini topishga imkon beradi.

2. Boshlang'ich funktsiya va uning tasviri.

Boshlang'ich funktsiya (original) deb quyidagi shartrlarni qanoatlantiruvchi $f(t)$ funktsiya qabul qilinadi:

1) Istalgan chekli intervalda $f(t)$ va $f'(t)$ chekli sondan ko'p bo'lmagan birinchi tur uzilish nuqtalarga (chekli sakrashlarga) ega.

2) $t<0$ uchun $f(t)=0$.

3) $f(t)$ funktsiya ko'rsatkichli funktsiyadan tez o'smaydi, ya'ni shunday t ga bog'liq bo'lmagan musbat haqiqiy o'zgarmas M va S_0 sonlari mavjudki, bunda yetarlicha katta t lar uchun

$$|f(t)| \le Me^{S_0 t} \qquad (1)$$

tengsizlik bajariladi. Bunda S_0 originalning o'sish tartibini ko'rsatuvchi son. Original o'zgarmas bo'lsa, $S_0=0$ deb qabul qilish mumkin.

Operatsion hisob fizikada tadbiq qilingani uchun bu qabul qilingan shartlar fizik hodisalarda aks etishini ko'rish qiyin emas. Masalan, t ni vaqt deb qaralsa, 1) va 3) shartlar fizik miqdorning (masalan, temperaturaning) bo'laklab o'zgarishini va shuningdek, chegaralanganligini ifodalaydi. Ko'pincha masalalarda boshlang'ich moment $(t=0)$ga qadar fizik miqdorning o'zgarishi hisobga olinmaganligi sababli, 2) t<0 shartda $f(t)=0$ deb olinishi tabiiydir (matematika nuqtai nazaridan qulaylik uchun).

$f(t)$ funktsiyaning haqiqiy o'zgaruvchi t ning kompleks funktsiyasi e^{-pt} ga ko'paytmasini,ya'ni

$$e^{-pt}\cdot f(t) \qquad (Pqa+ib,\ a>0) \qquad (2)$$

ni qaraymiz.(2) funktsiya haqiqiy o'zgaruvchi t ning kompleks funktsiyasidir:

$$e^{-pt}f(t)=e^{-(a+ib)t}f(t)=a^{-at}f(t)e^{-ibt}=e^{-at}f(t)(\cos bt - i\sin bt)=$$

$$=e^{-at}f(t)\cos t - ie^{-at}f(t)\sin bt\,.$$

So'ngra ushbu xosmas integralni qaraymiz:

$$\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos btdt - i\int_0^\infty e^{-at}f(t)\sin btdt \qquad (3)$$

Agar $f(t)$ funktsiya (1) tengsizlikni qanoatlantirsa va $a<S_0$ bo'lsa, (3) ning o'ng qismida turgan integral mavjud va ular absolyut yaqinlashuvchi.

Haqiqatan:

$$\left|\int_0^\infty e^{-at}f(t)\cos btdt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-at}f(t)\cos bt\right|dt < M\int_0^\infty e^{-at}e^{s_0 t}dt = M\int_0^\infty e^{-(a-s_0)t}dt =$$

$$=\frac{+M}{a-s_0}\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-(a-s_0)t}d(a-s_0)t=\frac{-M}{a-s_0}\lim_{c\to\infty}e^{-(a-s_0)t}\Big|_0^c=$$

$$=-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{a}-\mathrm{s}_0}\lim_{c\to\infty}\mathrm{e}^{-(\mathrm{a}-\mathrm{s}_0)\mathrm{c}}+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{a}-\mathrm{s}_0}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{a}-\mathrm{s}_0}.$$

Ikkinchi integral ham shu tariqa baholanadi. Demak, $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ integral mavjud. Bu integral p ning bironta funktsiyasini aniqlaydi, u funktsiyani $F(p)$ bilan belgilaymiz:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \qquad (4)$$

Ta'rif. Kompleks $p=a+ib$ o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-pt}dt=L\{f(t)\}$$ tenglik bilan

aniqlangan $F(p)$ funktsiyaga $f(t)$ funktsiyani tasviri deyiladi, $f(t)$ o'zi esa $F(p)$-ni originali deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$F(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}f(t)$ tasvir-original, (5)

yoki $f(t)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}F(p)$ original-tasvir, (6)

Ba'zi kitoblarda (4) formula bilan aniklangan tasvir Laplas tasvir deb yuritiladi.

$$L\{f(t)\}=F(p) \qquad (7)$$

Yagonalik teoremasi. Agar ikkita uzluksiz funktsiya $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ bitta L -tasvir $F(p)$ ga ega bo'lsa, u funktsiyalar aynan tengdir.

Teoremani isboti aniq integralga asosan oson kelib chiqadi.

Laplas tasvirni quyidagi xossalarini keltirib o'tamiz:

1^0. $L[c\cdot f(t)]=c\cdot L[f(t)]$

O'zgarmas sonni tasvir belgisidan chiqarish mumkin.

Isboti. $L[c\cdot f(t)]=\int_0^\infty c\cdot f(t)e^{-pt}dt=c\cdot\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=c\cdot L[f(t)]$

2^0. $L[f(t)+g(t)]=F(p)+G(p)$

Yig'indini tasviri tasvirlar yig'indisiga teng.

Isboti.

$$L[f(t)+g(t)]=\int_0^\infty[f(t)+g(t)]e^{-pt}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt+\int_0^\infty g(t)e^{-pt}dt=L[f(t)]+L[g(t)]=F(p)+G(p)$$

Yagonalik teoremasini isbot qiling.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Laplas tasvir formulasini yozing.
2. Xosmas integralni mavjudlik shartlarini ayting.
3. Yagonalik teoremasini ayting.
4. Tasvirni dastlabki xossalarini ayting.

6-ma’ruza: Ba’zi funktsiyalarning tasvirlari. Operatsion xisobning ba’zi teoremalari.

Ukuv moduli birliklari:

1. Xevisaydaning birlik funktsiyasi va uni tasviri.
2. sinat va cosat tasvirlari.
3. Siljish teoremasi.
4. Tasvirga ko’ra aslini topish.

Aniklashtirilgan ukuv maksadlari:

Talabalar ushbu mavzuni uzlashtirgandan sung:

1. Birlik funktsiya tasvirini biladi.
2. sinat va cosat tasvirini biladi.
3. Siljish teoremasini va undan foydalanishni biladi.
4. Tasviri ma’lum funktsiyani aslini topishni biladi.

$\tau_0(t),\ \sin t,\ \cos t$ funktsiyalarning tasviri.

1. $f(t)$ funktsiya bunday aniqlangan:

$t \geq 0$ bo’lganda $f(t) = 1$,

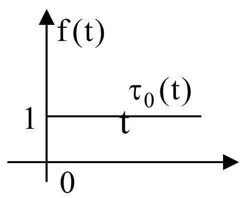
$t < 0$ bo’lganda $f(t) = 0$.

$f(t)$ funktsiya Xevisaydaning birlik funktsiyasi deyiladi va $\tau_0(t)$ bilan belgilanadi.

$$\tau_0(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0. t \prec 0 \end{cases}$$

Xevisayda funktsiyasining L tasvirini topamiz:

$$L\{\tau_0(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt}dt = -\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}$$ Demak,



$$1 \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{p} \qquad (8)$$

yoki

$$\tau_0(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{p}$$

2. $f(t) = \sin t$ bo’lsin, u holda

$$L\{\sin t\} = \int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt = \left| \begin{matrix} u = \sin t, & du = \cos t dt \\ dv = e^{-pt}dt, & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty + \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \cos t, & du = -\sin t dt \\ dv = e^{-pt}dt, & v = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{matrix} \right| = \frac{1}{p}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\cos t\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt \right] =$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin t dt\,.$$

Bundan $$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin t dt=\frac{1}{p^2}$$

yoki

$$\int_0^{\infty} e^{-pt}\sin t dt=\frac{1}{p^2+1}$$

Demak, $$\sin t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{p^2+1} \qquad (9)$$

3. $f(t)=\cos t$ bo'lsin, u vaqtda

$$L\{\cos t\}=\int_0^{\infty} e^{-pt}\cos t dt=\frac{p}{p^2+1}$$

Demak,

$$\cos t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{p}{p^2+1} \qquad (10)$$

Masshtabi o'zgartirilgan erkli o'zgaruvchili funktsiyaning tasviri $\sin at$, $\cos at$ funktsiyalarning tasviri.

$f(at)$ funktsiyaning (bu yerda $a>0$) tasvirini qaraymiz: $L\{f(at)\}=\int_0^{\infty} e^{-pt}f(at)dt$. $z=at\Rightarrow dz=adt$. U vaqtda

$$L\{f(at)\}=\int_0^{\infty}\frac{1}{a}e^{-\frac{p}{a}z}f(z)\,dz=\frac{1}{a}\int_0^{\infty}e^{-\frac{p}{a}z}f(z)\,dz=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

SHunday qilib

$$F(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$$

bo'lsa

$$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(at) \qquad (11)$$

bo'ladi.

10-Misol. $\sin at$ funktsiyaning tasvirini toping.

(9) formulaga ko'ra $$\sin t \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{p^2+1}$$

(11) formulaga ko'ra $$\sin at \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}=\frac{a}{p^2+a^2} \qquad (12)$$

11-Misol. $\cos at$ funktsiyaning tasvirini toping.

$$\cos at \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2+1}=\frac{p}{p^2+a^2} \qquad (13)$$

12-Misol. Ushbu $f(t)=3\sin 4t-2\cos 5t$ funktsiyaning tasviri topilsin.

$$L\{f(t)\}=3\frac{4}{p^2+16}-2\frac{p}{p^2+25}=\frac{12}{p^2+16}-\frac{2p}{p^2+25}$$

13-Misol.Tasviri ushbu formula $F(p)=\frac{5}{p^2+4}+\frac{20p}{p^2+9}$

bilan ifodalangan boshlang'ich funktsiya topilsin.

$$F(p)=\frac{5}{p^2+4}+\frac{20p}{p^2+9}=\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{p^2+2^2}+20\frac{p}{p^2+3^2}$$

Demak, $f(t)=\frac{5}{2}\sin 2t+20\cos 3t$. Bu funktsiya yagonalik teoremasiga asosan berilgan $F(p)$ ga mos birdan-bir boshlang'ich funktsiyadir.

Siljish teoremasi. Agar $F(p)$ funktsiya $f(t)$ funktsiyaning tasviri bo'lsa, $F(p+\alpha)$ funktsiya $e^{-\alpha t}f(t)$ funktsiyaning tasviridir, ya'ni

agar $F(p)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\to}}f(t)$ bo'lsa,

$$F(p+\alpha)\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\to}}e^{-\alpha t}f(t) \text{ bo'ladi.} \qquad (15)$$

(Bu yerda $\operatorname{Re}(p+\alpha)>S_0$ deb faraz qilinadi).

Isbot. $e^{-\alpha t}f(t)$ funktsiyaning tasvirini topamiz:

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt-\alpha t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}f(t)\,dt$$

SHunday qilib

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=F(p+\alpha)$$

$e^{-\alpha t}$, $\operatorname{sh}\alpha t$, $\operatorname{ch}\alpha t$, $e^{-\alpha t}\sin at$, $e^{-\alpha t}\cos at$ funktsiyaning tasvirlari.

1) $L\{e^{-\alpha t}\}=F(p+\alpha)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{-\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}dt=\frac{1}{p+\alpha}$

Demak, $$\frac{1}{p+\alpha}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\to}}e^{-\alpha t} \qquad (16)$$

2) SHuningdek $L\{e^{\alpha t}\}=\int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt=\frac{1}{p-\alpha}$

$$\frac{1}{p-\alpha}\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\to}}e^{\alpha t} \qquad (17)$$

3) $\operatorname{sh}\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t})\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$

$$\operatorname{sh}\alpha t\underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}}\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \qquad (18)$$

$$ch\alpha t=\frac{1}{2}(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t})\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}+\frac{1}{p+\alpha}\right)=\frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$ch\alpha t\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}\frac{p}{p^2-\alpha^2} \qquad (19)$$

$$4)\ L\left\{e^{-\alpha t}\sin at\right\}=\int_0^{\infty}e^{-pt}e^{-\alpha t}\sin at\,dt=$$

$$=\int_0^{\infty}e^{-(p+\alpha)t}\sin at dt=\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$$

$$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}e^{-\alpha t}\sin at \qquad (20)$$

$$\frac{p}{(p+\alpha)^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}e^{-\alpha t}\cos at \qquad (21)$$

14-Misol.Tasviri ushbu formula $F(p)=\frac{7}{p^2+10p+41}$ bilan berilgan boshlang'ich funktsiya topilsin.

Echish. $\frac{7}{p^2+10p+41}=\frac{7}{(p+5)^2+16}=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(p+5)^2+4^2}$

SHunday qilib.

$$F(p)=\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{(p+5)^2+4^2}$$

Demak,

$$F(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}\frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t\,.$$

15-Misol. Tasviri ushbu formula $F(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+10}$ bilan berilgan boshlang'ich funktsiyani toping.

$$\frac{p+3}{p^2+2p+10}=\frac{(p+1)+2}{(p+1)^2+9}=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{(p+1)^2+3^2}=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+1)+3^2}$$

Shunday qilib,

$$F(p)=\frac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{(p+1)+3^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}e^{-t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$$

.

Tasviri berilgan xolda aslini topish amalini aniqmas integraldagi qaysi usul bilan taqqoslash mumkin?

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Birlik funktsiyasi va uni tasvirini yozing.
2. sinat va cosat larni tasvirini yozing.
3. Siljish teoremasini ayting.
4. Berilgan tasvirga ko'ra aslini topish ketma-ketligini ayting.

7-ma'ruza: Originalni differentsiallash va integrallash.

Ukuv moduli birliklari:

1. Originalni differentsiallash.
2. Originalni integrallash.
3. Tasvir jadvali.

Aniklashtirilgan ukuv maksadlari:

Talabalar ushbu mavzuni uzlashtirgandan sung:

1. Xosilani tasvirini biladi.
2. Integralni tasvirini biladi.
3. Tasvir jadvalini bilib foydalana oladi.

1. Originallarni differentsiallash.

$F(p)$ ushbu $f(t)$ originalning tasviri bo'lsin. $f'(t)$ xosilaning tasvirini topish talab etilsin.

Teorema. Agar $f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} F(p)$ va $f'(t)$ original bo'lsa, u holda

$$f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pF(p) - f(0) \qquad (22)$$

tenglik urinli bo'ladi.

Isboti. Tasvirni aniqlovchi formulaga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt} dt$$

Hosil qilingan integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$u = e^{-pt}, \ dv = f'(t)\, dt,$$

bu yerdan $du = -pe^{-pt}dt$, $v = f(t)$. U holda

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f'(t) e^{-pt} dt = \lim_{b\to\infty} \left[f(t)\, e^{-pt} \Big|_0^b + p\int_0^b f(t)\, e^{-pt} dt \right] =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[f(b)\, e^{-pb} - f(0) + p\int_0^b f(t)\, e^{-pt} dt \right] = p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt - f(0).$$

CHunki $\lim\limits_{b\to\infty} f(b) \cdot e^{-pb} = 0$.

Biroq $\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt} dt = F(p)$.

Demak, $f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pF(p) - f(0)$

Xususan, agar $f(0) = 0$ bo'lsa, u holda

$$f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pF(p) \qquad (23)$$

(22) formulani ikkinchi hosila $f''(t)$ ga qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pF_1(p) - f'(0).$$

$F_1(p)$ bu yerda $f'(t)$ ning tasviri. Biroq (22) formulaga ko'ra $F_1(p)=pF(p)-f(0)$, shuning uchun

$$f''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p[F(p)-f(0)]-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0) \qquad (24).$$

Xuddi shunga o'xshash

$$f'''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p\left[p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\right]-f''(0)=$$

$$=p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f(0)$$

(22) formulani $n-1$ marta tadbiq qilib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$f^{(n)}(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-$$

$$-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0) \qquad (25)$$

Xususan, agar $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$ bo'lsa, u holda

$$f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} pF(p)$$

$$f''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2F(p)$$

$$f^{(n)}(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^nF(p)$$

Mavjudlik teoremasida ko'rsatilishicha, $p\to\infty$ da ($\operatorname{Re}p=S\to\infty$ shartda) har qanday originalning tasviri nolga intiladi. SHuning uchun agar $f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} F_1(p)$ bo'lsa, u holda $p\to\infty$ da $F_1(p)\to 0$. Biroq (22) formulaga ko'ra $F_1(p)=pF(p)-f(0)$.

Demak, $p\to\infty$ da quyidagiga egamiz:

$$\lim_{p\to\infty}F_1(p)=\lim_{p\to\infty}[p\cdot F(p)-f(0)]=0$$

SHunday qilib,

$$f(0)=\lim_{p\to\infty}pF(p) \qquad (26)$$

Bu formula $f(t)$ originalning boshlang'ich qiymatini originalni hisoblab o'tirmasdan uning $F(p)$ tasvir bo'yicha topishga imkon beradi.

16-Misol. $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ tasvir berilgan. Originalning boshlang'ich qiymati $f(0)$ ni toping.

Echilishi. (26) formuladan,

$$f(0)=\lim_{p\to\infty}pF(p)=\lim_{p\to\infty}\frac{p^2}{p^2+1}=1$$

(10) formuladan $\dfrac{p}{p^2+1}$ tasvirga $\cos t$ original mos kelishini va $t=0$ da 1 ga tengligini qayd qilamiz.

2. Originallarni integrallash.

$F(p)$ $f(t)$ originalning tasviri bo'lsin. Originaldan olingan integralning tasvirini topish talab qilinadi.

Teorema. Agar $f(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} F(p)$ bo’lsa, u holda $\int_0^t f(t)\,dx \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{F(p)}{p}$.

Isboti. $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$ funktsiya original ekanini ko’rsatish mumkin. Uning tasviri $\Phi(p)$ bo’lsin:

$$g(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} \Phi(p) \qquad (27).$$

$g(0) = \int_0^0 f(x)\,dx = 0$ bo’lgani uchun hosilani tasviridan quyidagiga egamiz:

$$g'(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} p\Phi(p).$$

Biroq

$$g'(t) = \frac{d\int_0^t f(x)\,dx}{dt} = f(t) \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} F(p)$$

Demak, $F(p) = p\,\Phi(p)$. Bundan $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$, yoki $\int_0^t f(x)\,dx \underset{\bullet}{\overset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{F(p)}{p}$.

(27) munosabat originalni integrallash operatsiyasi tasvir ustida algebraik amal bajarishga, chunonchi, uni p ga bo’lishga mos kelishini bildiradi. Olingan natijalarni jamlab originallar va ularning tasvirlari jadvalini keltiramiz.

№	Original $f(t)$	Tasvir $F(p)$	№	Original $f(t)$	Tasvir $F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$	7	$e^{-\alpha t}\sin at$	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	8	$e^{-\alpha t}\cos at$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a}$
3	$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	9	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	10	$t^n e^{-\alpha t}$	$\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
5	$\mathrm{sh}\,at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	11	$t\sin at$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
6	$\mathrm{ch}\,at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	12	$t\cos at$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$

Bu jadvalga yana quyidagilarni ham qo’shish mumkin:

13. $f(\alpha t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ 14. $e^{-\alpha t} f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} F(p+\alpha)$

15. $f'(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p\,F(p) - f(0)$, 16. $f''(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2\,F(p) - pf(0) - f'(0)$

17. $\int_0^t f(x)\,dx \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{1}{p} F(p)$ 18. $f(t-\tau) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} e^{-p\tau} F(p)$

Keltirilgan jadvaldan foydalanib berilgan funktsiya-originalning tasvirini yoki aksincha keltirilgan tasvirga ko'ra uning aslini-originalini topish mumkin.

10-12-formulalarni keltirib chiqaring.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ixtiyoriy tartibli xosilani tasviri formulasini yozing.
2. Originalni integrallash formulasini yozing .
3. Tasvir jadvalini yozing.

8-ma'ruza: O'zgarmas koeffitsientli chizikli differentsial tenglamalarni integrallash.

Ukuv moduli birliklari:

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsentli tenglamani tasviri .
2. Differentsial tenglamaga mos operatorli algebraik tenglama.
3. Operatorli tenglamani aslini topish.
4. Mexanik tebranishlarning differentsial tenglamasi va uni yechimi.

Aniklashtirilgan ukuv maksadlari:

Talabalar ushbu mavzuni uzlashtirgandan sung:

1. Ikkinchi tartibli differentsial tenglamani tasvirini topishni biladi.
2. Tasvirni operatorli tenglamaga keltirishni biladi.
3. Operatorli tenglamani aslini topish orqali, yechimni xosil qila oladi.
4. Mexanik tebranishlarni tenglamasini xosil qilib, uni tasvir yordamida yechishni biladi.

Biz o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differentsial tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish usuli bilan tanishgan edik.

Bu masalaning Laplas operatorini qo'llashga asoslangan ancha sodda yechish usulini bayon qilamiz.

Soddalik uchun ikkinchi tartibli chiziqli differentsial tenglama bilan cheklanamiz. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli ikkinchi tartibli differentsial tenglama berilgan bo'lsin:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t) \qquad (24)$$

bu yerda a_1 va a_2- xaqiqiy sonlar. Bu tenglamaning $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ (bu yerda y_0 va y'_0 berilgan sonlar,) boshlang'ich shartlarnini qanoatlantiruvchi $y(t)$ xususiy yechimini topish talab qilinadi.

Izlanayotgan $y(t)$ yechim, uning $y'(t)$ va $y''(t)$ hosilalari, differentsial tenglamaning o'ng tomoni $f(t)$ originallar bo'lsin deb faraz qilaylik.

$y(t) \leftarrow \bar{y}$, $f(t) \leftarrow F(p)$ deb belgilab va (22)-(24) formulalardan foydalanib, $y'(t)$ va $y''(t)$ tasvirlarini topamiz:

$$y'(t) \leftarrow p\bar{y} - y_0, \quad y'' \leftarrow p^2\bar{y} - py_0 - y'_0$$

CHiziqlilik xossasiga ko'ra (24) tenglamada tasvirlarga o'tamiz:

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) \leftarrow p^2\bar{y} - py_0 - y'_0 + a_1(p\bar{y} - y_0) + a_2\bar{y} = F(p)$$

yoki $$(p^2 + a_1 p + a_2)\bar{y} = F(p) + py_0 + y'_0 + a_1 y_0 \qquad (25)$$

(25) tenglama yordamchi tenglama yoki (24) differentsial tenglamaga mos tasvirlardagi tenglama deyiladi. SHunday qilib, $y(t)$ original uchun (24) differentsial tenglama o'rniga uning $\bar{y}$ tasviri uchun (25) chiziqli algebraik tenglamani xosil qildik.

(25) tenglamadan

$$\bar{y} = \frac{F(p) + py_0 + y'_0 + a_1 y_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \qquad (26)$$

(26) formula (25) tenglamaning operator yechimi deb ataluvchi yechimini beradi. Original $y(t)$ uchun (26) formula bilan aniqlanadigan $\bar{y}$ funktsiya tasvir bo'ladi. Ana shu $y(t)$ (24) differentsial tenglamaning izlanayotgan yechimi bo'ladi.

17-misol. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$ differentsial tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimini toping.

Echilishi. $L[y'' - 3y' + 2y] = L[2e^{3t}]$

$$L[y''] = p^2\bar{y} - pf(0) - f'(0) = p^2\bar{y} - p - 3$$

$$L[y'] = p\bar{y} - y(0) = p\bar{y} - 1$$

$$2L[e^{3t}] = \frac{2}{p-3}$$

topilganlarni tenglamaga qo'yib:

$$p^2\bar{y} - p - 3 - 3p\bar{y} + 3 + 2\bar{y} = \frac{2}{p-3}$$

$$\bar{y}(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p-3} + p$$

$\bar{y}(p^2 - 3p + 2) = \dfrac{p^2 - 3p + 2}{p-3}$ yoki $\bar{y} = \dfrac{p^2 - 3p + 2}{(p-3)(p^2 - 3p + 2)}$ bundan esa $\bar{y} = \dfrac{1}{p-3}$. Har ikki tomonni aslini topsak $y(t) = e^{3t}$ yechim hosil bo'ladi.

18-misol. $y'' + 4y = \sin t$ differentsial tenglamani $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

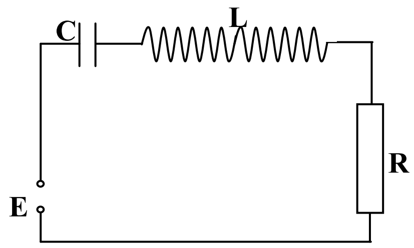
Echish. Jadvaldagi (3) formuladan o'ng tomonning tasvirini topamiz, $\sin t \leftarrow \dfrac{1}{p^2 + 1}$.

$L[y'' + 4y] = p^2\bar{y} - py(0) - y'(0) + 4\bar{y} = p^2\bar{y} - p - 1 + 4\bar{y}$ topilganlarni tenglamaga qo’ysak:

$$p^2\bar{y}+4\bar{y}-p-1=\frac{1}{p^2+1} \qquad \text{yoki}$$

$$\bar{y}(p^2+4)=\frac{1}{p^2+1}+p+1$$

$$\bar{y}=\frac{1+p^3+p^2+p+1}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{p^3+p^2+p+2}{(p^2+1)(p^2+4)}$$



1-расм

Xosil bo’lgan ifodada shakl almashtirib, uni sodda kasrlarga ajratamiz, natijada

$$\bar{y}=\frac{p+\frac{2}{3}}{p^2+4}+\frac{1}{3(p^2+1)} \quad \text{yoki} \quad \bar{y}=\frac{p}{p^2+4}+\frac{2}{3(p^2+4)}+\frac{1}{3(p^2+1)}$$

So’ngra

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\frac{1}{3}\sin t\,, \quad \frac{p}{p^2+4}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\cos 2t\,, \text{ va } \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{p^2+4}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\frac{1}{3}\sin 2t$$

bo’lgani uchun:

$$y(t)=\frac{1}{3}\sin t+\cos 2t+\frac{1}{3}\sin 2t.$$ yechimini topamiz

Mexanikadan ma’lumki, massasi m bo’lgan moddiy nuqtaning tebranishi ushbu differentsial tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{1}{m}f_1(t) \qquad (27)$$

bu yerda x-nuqtaning biror xolatdan chetlanishi, k-elastik sistemaning qattiqligi, harakatga qarshilik kuchi tezlikning birinchi darajasiga proportsional, (λ-proportsionallik koeffitsienti), $f_1(t)$-tashqi kuch. Bir erkinlik darajaga ega bo’lgan boshqa mexanik sistemalarning kichik tebranishlari ham (27) tipdagi tenglamaning yechimi orqali ifodalanadi.

Masalan, elastik o’qdagi maxovikning aylanma tebranishi ham shu tenglamaga olib keladi, bunda x-maxovikning aylanish burchagi, m-maxovikning inertsia momenti, k-o’qning buralma qattiqligi, $m\,f_1(t)$ tashqi kuchlarning aylanish o’qiga nisbatan momenti. (27) tipdagi tenglamalar faqat mexanik tebranishlarnigina emas, balki elektr zanjiridagi hodisalarni ham ifodalaydi.

L-induktivlik, R-qarshilik, C-sig’imdan iborat bo’lgan elektr zanjiri berilgan bo’lib, unga E-elektr yurituvchi kuch (e.yu.k) qo’yilgan bo’lsin (1-chizma).

Zanjirdagi tokni J bilan kondensator zaryadini Q bilan belgilaymiz; elektrotexnikadan ma’lumki J va Q ushbu tenglamalarni qanoatlantiradi:

$$L\frac{di}{dt}+RJ+\frac{Q}{C}=E \qquad (28)$$

$$\frac{dQ}{dt}=J \qquad (29)$$

(29) tenglamadan.

$$\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{dJ}{dt} \qquad (29')$$

(29) va $(29')$ ni (28) ga qo'yib, Q uchun (27) tipdagi tenglamani hosil qilamiz:

$$L\frac{d^2Q}{dt}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{1}{C}Q=E \qquad (30)$$

(28) tenglamani ikki tomondan differentsiallab va (29) tenglamadan foydalanib, J ni aniqlash uchun ushbu tenglamani hosil qilamiz.

$$L\frac{d^2J}{dt^2}+R\frac{dJ}{dt}+\frac{1}{C}J=\frac{dE}{dt} \qquad (31)$$

(30), (31) tenglamalar (27) tipdagi tenglamalardir.

Tebranishlar differentsial tenglamasini yechish.

Tebranishlar tenglamasini ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}+a_2x=f(t) \qquad (32)$$

bu yerda noma'lum funktsiya x ning a_1, a_2 koeffitsientlarning va $f(t)$ funktsiyaning mexanik va fizik ma'nolarini (27), (30) va (31) tenglamalarni solishtirish yo'li bilan aniqlash oson.

(32) tenglamaning $t=0$ da $x=x_0,\ x'=x'_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimini topamiz. Buning uchun (32) ning tasvirini topib yordamchi tenglama tuzamiz.

$$\bar{x}(p^2+a_1p+a_2)=x_0p+x'_0+a_1x_0+F(p), \qquad (33)$$

bu yerda $F(p)$ funktsiya $f(t)$ funktsiyaning tasviri. (33) dan

$$\bar{x}=\frac{x_0p+x'_0+a_1x_0+F(p)}{p^2+a_1p+a_2} \qquad (34)$$

CHunonchi (30) tenglamaning $t=0$ da $Q=Q_0,\ Q'=Q'_0$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $Q(t)$ yechimi uchun tasviri ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\bar{Q}(p)=\frac{L(Q_0p+Q'_0)+RQ_0}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}+\frac{\bar{E}(p)}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}$$

Echimning xarakteri kvadrat uchhad $p^2+a_1p+a_2$ ning ildizlari kompleks, haqiqiy har-xil, yoki haqiqiy bir xil bo'lishiga juda bog'liqdir. Uchhadning ildizlari kompleks, ya'ni $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_2<0$ bo'lgan holni to'la qarab chiqamiz. Boshqa hollar shu ravishda qaraladi.

Ikki funktsiya yig'indisining tasviri ular tasvirlarining yig'indisiga teng bo'lgani uchun

$$\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}\ \dot{\rightarrow}\ e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[A\cos t\bullet\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}+\frac{B-\frac{Aa_1}{2}}{\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}}\cdot\sin t\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}\right] \qquad (35)$$

formulaga asosan

$$\frac{x_0 p + x_1^0 + a_1 x_0}{p^2 + a_1 p + a_2} \xrightarrow{\bullet} e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \cdot \sin t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\right] \qquad (36)$$

Endi $\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$ kasrga mos boshlang'ich funktsiyani topamiz. Bu yerda

$\frac{1}{p^2 + a_1 p + a_2} \xrightarrow{\bullet} \frac{e^{-\frac{a_1}{2}}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \cdot \sin t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$, $F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$ ekanini e'tiborga olib, kompozitsiyalash formulasiga

$$F_1(p) \cdot F_2(p) \xrightarrow{\bullet} \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau)\, d\tau$$

asosan ushbuni xosil qilamiz:

$$\frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \cdot \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \cdot \sin(t - \tau)\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau \qquad (37)$$

(36) va (37) e'tiborga olib (34) dan

$$x(t) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[x_0 \cos t\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{x_0' + \frac{x_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \cdot \sin t\sqrt{a_2^2 - \frac{a_1^2}{4}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}} \int_0^t f(\tau)\, e^{-\frac{a_1}{2}(t-\tau)} \cdot \sin(t - \tau)\sqrt{a_2^2 - \frac{a_1^2}{4}}\, d\tau \qquad (38)$$

Agar tashqi kuch $f(t) = 0$ bo'lsa, ya'ni bir erkin mexanik yoki elektr tebranishlarni qarayotgan bo'lsak, yechim (38) ifodaning birinchi qo'shiluvchisidan iborat bo'ladi. Agar boshlang'ich shartlar $x_0 = x_0' = 0$ bo'lsa, yechim (38) tenglikning ikkinchi qo'shiluvchisidan iborat bo'ladi.

$\boxed{\text{M.T}}$ **17-misolni oddiy differentsial tenglamani xarakteristik tenglamasi orqali yeching va yechimlarni solishtiring**

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar:

1. Ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsientli differentsial tenglamani tasvirini yozing.
2. tasvirni operatorga nisbatan yechimini yozilsin.
3. Operatorli tenglamadan yechimni hosil qiling.
4. Mexanik tebranishni differentsial tenglamasini yozib tasvir yordamida yechish bosqichlarini ayting.

10-11-Ma'ruza

Matematik fizika tenglamalari nazariyasining elementlari.

Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili kvazichiziqli xususiy hosilali differrensial tenglamalarni kanonik korinishga keltirish.

Reja:

1. Erkli o'zgaruvchilarni almashtirish.
2. Elliptik tipdagi tenglamalarning kanonik shakli.
3. Giperbolik tipdagi tenglamalarning kanonik shakli.
4. Parabolik tipdagi tenglamalarning kanonik shakli.

Tayanch so'zlar:

erkli uzgaruvchi, differentsial tenglama, kvazichizikli tenglama, elliptik tip, giperbolik tip, parabolik tip.

Ikkinchi tartibli kvazichiziqli

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x,u,u_{x_1},u_{x_2},...,u_{x_n}) = 0 \qquad (5)$$

differensial tenglama uchun (4) forma

$$Q(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\lambda_i \cdot \lambda_j \qquad (6)$$

kvadratik formadan iborat. (5) tenglamani erkli o'zgaruvchilarni almashtirib uni soddaroq ko'rinishga keltirishga harakat qilamiz.

$x = (x_1, x_2,..., x_n)$ o'rniga $y = y(x)$ ya'ni

$$y_k = y_k(x_1, x_2,..., x_n) \qquad k = \overline{1,n}$$

ya'ni

$$y_k = \beta_{k_1}x_1 + \beta_{k_2}x_2 + ... + \beta_{k_n}x_n \quad k = \overline{1,n}$$

$y_k(x) \in C^2(D)$ va ushbu yakobian

$$\frac{D(y_1, y_2,..., y_n)}{D(x_1, x_2,..., x_n)} \neq 0$$

deb hisoblaymiz. U holda

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} = \sum_{k,e=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_e \partial y_k}\cdot\frac{\partial y_e}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}$$

Buni (5) tenglamaga qo'yib ushbu tenglamaga kelamiz

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\left\{\sum_{k,e=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial y_e \partial y_k}\cdot\frac{\partial y_e}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\cdot\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}\right\} + \overline{\Phi_0}(y,u,u_{y_1},...,u_{y_n}) = 0$$

Yoki

$$\sum_{k,e=1}^{n}\overline{A}_{k,e}(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y_e \partial y_k}+\Phi_1(y,u,u_{y_1},...,u_{y_n})=0 \tag{7}$$

Bu erda

$$\overline{A}_{k,e}(y)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x)\cdot\frac{\partial y_e}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial y_k}{\partial x_i} \tag{8}$$

$$\Phi_1(y,u,u_{y_1},...,u_{y_n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x)\cdot\frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i}+\overline{\Phi_0}(y,u,u_{y_1},...,u_{y_n})$$

(5) tenglama tekshirilayotgan D sohada x_0 nuqtani olamiz, va ushbu belgilashlarni kiritamiz.

$$y_0=y(x_0), \qquad \beta_{ki}=\frac{\partial y_k(x_0)}{\partial x_i}$$

U holda (8) forma x_0 nuqtada quyidagicha yoziladi

$$\overline{A}_{k,e}(y_0)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x)\beta_{e,j}\beta_{k,i} \tag{9}$$

(6) kvadratik formani x_0 nuqtada yozib olamiz

$$Q=\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x_0)\lambda_i\cdot\lambda_j \tag{10}$$

Maxsus bo’lmagan ushbu

$$\lambda_i=\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,i}\zeta_k \text{ , } \det(\beta_{k,i})\neq 0 \tag{11}$$

affin almashtirish yordamida (10) kvadratik forma

$$Q=\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x_0)\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_{k,i}\zeta_k\right)\cdot\left(\sum_{e=1}^{n}\beta_{e,i}\zeta_e\right)=\sum_{k,e=1}^{n}\zeta_k\zeta_e\left(\sum_{i,j=1}^{n}A_{i,j}(x_0)\cdot\beta_{ki}\cdot\beta_{ej}\right)=$$

$$=\sum_{k,e=1}^{n}\overline{A}_{ke}(y_0)\zeta_k\zeta_e \tag{12}$$

ga keladi.

Bu kvadratik formaning koeffitsientlari ham (9) formula bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, (5) tenglamani x_0 nuqtada x o’zgaruvchilar o’rniga yangi $y=y(x)$ o’zgaruvchilar kiritib soddalashtirish uchun shu nuqtada (10) kvadratik formani maxsus bo’lmagan (11) chiziqli almashtirish yordami bilan soddalashtirihs yetarlidir.

Algebra kursida isbot qilinadiki, hamma vaqt shunday maxsus bo’lmagan (11) almashtirish mavjud bo’lib, uning yordami bilan (10) kvadratik forma quyidagi ko’rinishga olib kelinadi.

$$Q=\sum_{k=1}^{n}\mu_k\zeta_k{}^2 \tag{13}$$

bu erda μ_k $k=1,...,n$ koeffitsientlar 1,-1,0 qiymatlarni qabul qiladi. Shu bilan birga masbat (manfiy) koeffitsientlar soni (inertsiya indeksi) va nolga bo'lgan koeffitsiyentlar soni (forma defekti) affin almashtirishga nisbatan invuriant, ya'ni bu sonlar faqat (10) forma bilan aniqlanib, (11) almashtirishning tanlab olinishiga bog'liq bo'lmaydi.

Bu narsa (5) differensial tenglama $A_{i,j}(x)$ koeffitsiyentlarning x_0 nuqtada qabul qiladigan qiymatlariga qarab, klassifikatsiya qilish imkonini beradi.

Yuqorida aytilganlarga asosan (7) tenglama

$$\sum_{k=1}^{n}\mu_k u_{y_k y_k} + \overline{\Phi}(y,u,u_{y_1},...,u_{y_n}) = 0 \qquad (14)$$

ko'rinishda yoziladi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamaning aralash hosilalar qatnashmagan bunday ko'rinishi, odatda uning kanonik korinishi deyiladi.

(5) tenglamani bitta nuqtada emas, xech bo'lmaganda $x_0 \in D$ nuqtaning biror kichik atrofida kanonik ko'rinishga olib keluvchi mumkinmi degan savol tug'uladi.

Bu savolga ijobiy javob faqat $n = 2$ bo'lgandagina ma'lum. Bu xolni biz alohida ko'ramiz. Agar barcha $\mu_k = 1$ yoki barcha $\mu_k = -1$ $k = 1,\dots,n$ bolsa yani Q forma mos ravishda musbat yoki manfiy aniqlangan (gefinit) bo'lsa, (5) tenglama $x \in D$ nuqtada elliptik tipdagi yoki elliptik tenglama deyiladi.

Agar μ_k koyffisientlardan bittasi manfiy, qolganlari musbat (yoki aksincha) bo'lsa, (5) tenglama $x \in D$ nuqtada giperbolik tenglama deb ataladi. μ_k koyffisientlardan ikkitasi, $1 < 2 < n-1$, musbat, qolgan $n-2$ tasi manfiy bo'lsa, (5) tenglamaga ultragiperbolik tipdagi tenglama deyiladi.

Agar koyffisientlardan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, (5) tenglama keng manoda $x \in D$ nuqtada parabolik tenglama deb ataladi. Agar (5) tenglama D sohaning xar bir nuqtasida elliptik, giperbolik yoki parabolik bo'lsa, u xolda D sohada mos ravishda elliptik, giperbolik yoki parabolik tipdagi tenglama deb ataladi.

Eslatib o'tamiz, A matritsaning xarakteristik sonlar ushbu

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Algebraik tenglamaning ildizlaridan iborat, bu erda E - birllik matritsa

(5) tenglama berilgan D sohaning ixtiyoriy x nuqtaning A matritsa xarakteristik sonlarning ishorasini aniqlab, (5) tenglamani qaysi tipga tegishli ekanligini aniqlab olish mumkin.

Ushbu

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x) \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} = 0$$

tenglama (5) differentsial tanglama xarakteristik tenglamasi deyiladi. Agar $\varpi(x_1, x_2, ..., x_n)$ funktsiya xarakteristikalar tenglamasini qanoatlantirsa

$$\varpi(x_1, x_2, ..., x_n) = c \quad c = const$$

tenglama bilan aniqlangan sirt berilgan (5) differentsial tenglamani xarakteristik sirti yoki xarakteristikasi deyiladi.

O'zgaruvchlar soni ikkita bo'lganda xarakteristik egri chiziq haqida so'z boradi.

O'zingizni sinab ko'ring

1. ***Xususiy hosilali differensiyal tenglamaga ta'rif bering, ularning echimi deb qanday funksiyasiga aytamiz.***
2. ***Kvazi chiziqli tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi.***
3. Ikkinchi tartibli chiziqli xususiy hosilali differensial tenglamani klassifikatsiyalang.
4. $\det(A - \lambda E) = 0$ xarakteristik sonlarining ishorasi nimani aniqlaydi.

1. Erkli o'zgaruvchilarni almashtirish.

Ikkinchi tartibli ikki o'zgaruvchili kvazichiziqli xususiy hosilali differrensial tenglamalarning shunday xususiyati borki ularni bir nuqtada emas balki butun bir sohada ham kanonik korinishga keltirish mumkin va sohaning nuqtalarida tenglama tipi o'zgarmaydi.

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

$$A^2(x, y) + B^2(x, y) + C^2(x, y) \neq 0$$

Tenglamani matritsasini yozib olamiz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

va matritsaning xarakteristik sonlari tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi.

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$\lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2 = 0$$

va tenglama haqiqiy echimga ega

$$\lambda_{1,2} = \frac{A+C \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC-B^2)}}{2} = \frac{A+C \pm \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2}$$

va ildizlar ya‘ni λ_1 va λ_2 bir xil ishorli agar $AC - B^2 > 0$ bo‘lsa; har xil ishorali agar $AC - B^2 < 0$ bo‘lsa; ildizlardan biri nolga teng agar $AC - B^2 = 0$ bo‘lsa. Bu erdan (1) tenglamani

1) $AC - B^2 > 0$ bo’lsa tenglama elliptik tipda

2) $AC - B^2 < 0$ bolsa tenglama giperbolik tipda

3) $AC - B^2 = 0$ bo’lsa tenglamani parabolik tipda ekanligi kelib chiqadi.

$$A\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

xarakteristik tenglamani bu holda oddiy differentsial tenglamaga olib kelish mumkin. $\omega(x,y)$ -(2) tenglamaning echimi bo‘lsin. Ushbu xarakteristikani qaraymiz

$$\omega(x,y) = const$$

shu xarakteristika yo‘nalishi bo’ylab ushbu munosabat o‘rinlidir.

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\omega}{\partial y}dy = 0$$

toki

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} : \frac{\partial\omega}{\partial y} = -dy : dx \qquad (3)$$

(3) ga asosan (2) tenglama birinchi tartibli oddiy differensial tenglama ko‘rinishini oladi.

$$A\cdot dy^2 - 2B\cdot dy\cdot dx + C\cdot dx^2 = 0 \qquad (4)$$

Teskarisi agar $\omega(x,y) = C$ (4) tenglamaning umumi echimi bo‘lsa, u holda $\omega(x,y)$ funktsiya (2) tenglamaning echimi bo‘ladi (4) tenglama ushbu ikkita tenglamaga ajraladi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \qquad (5)$$

(1) tenglamada erkli o‘zgaruvchilarni quyidagicha almashtiraylik.

$\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ u holda (1) tenglama ushbu ko‘rinishni oladi

$$\overline{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\overline{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \cdot \partial \eta} + \overline{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \overline{\Phi}\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (6)$$

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \qquad (7)$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \qquad (8)$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (9)$$

Bevosita o‘rniga qo‘yish bilan isbotlash mumkini

$$\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C} = (B^2 - AC)\cdot(\Im)^2$$

yani xosmas almashtirish tenglama tipini o‘zgartirmaydi. Hozircha $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ almashtirishlar ixtiyoriy almashtirishlar edi.

2. Elliptik tipdagi tenglamalarning kanonik shakli.

Faraz qilaylik (1) tenglama elliptik tipga tegishli bo’lsin. U holda (5) tenglama ikkita qo‘shma echimga ega bo‘lib

$$\omega(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y) = c \qquad (10)$$

(5) tenglamani birinchisini umumiy integral bo‘lsin. (10) ni (2) xarakteristik tenglamaga qo‘yib ushbu tenglikka ega bo‘lamiz

$$A\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial \omega}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 = 0$$

$$A(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2B(\xi_x + i\eta_x)\cdot(\xi_y + i\eta_y) + C(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0$$

yoki

$$A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2-(A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+\eta_y)^2+i\cdot 2(A\xi_x\eta_x+B(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+C\xi_y\eta_y)=0$$

yoki kompleks sonlarning nolga tengligi xossasidan

$$A\xi_x^2+2B\xi_x\xi_y+C\xi_y^2=A\eta_x^2+2B\eta_x\eta_y+C\eta_y{}^2$$

$$A\xi_x\eta_x+2B(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y)+C\xi_y\eta_y=0$$

Bundan $\overline{A}=\overline{C}\,,\overline{B}=0$ ya'ni tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{\overline{A}}\overline{\Phi}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0 \qquad (11)$$

Shunday qilib $AC-B^2>0$ bo'lganda (5) tenglamani yechib $\xi(x,y)+i\eta(x,y)=c$ umumiy echimga ko'ra $\xi=\xi(x,y)\,,\eta=\eta(x,y)$ almashtirish bajarib tenglamani (11) ko'rinishga olib kelish mumkin

3. Giperbolik tipdagi tenglamalarning kanonik shakli.

(1) tenglama uchun $AC-B^2<0$ bolsin. U holda (5) tenglama ikkita echimga ega va ularning umumiy integrallari ushbu ko'rinishda bo'lsin

$$\begin{aligned}\omega_1(x,y)&=\xi(x,y)=c\\ \omega_2(x,y)&=\eta(x,y)=c\end{aligned} \qquad (12)$$

u holda (12) ga asosan

$$A\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2=0$$

va

$$A\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+2B\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+C\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2=0$$

tengliklar o'rinlidir. Demak

$$\overline{A}=\overline{C}=0$$

Shundae qilib (6) tenglama ushbu ko'rinishni oladi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\cdot\partial\eta}+\frac{1}{2\overline{B}}\overline{\Phi}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0 \qquad (13)$$

endi $\alpha=\xi+\eta,\ \beta=\xi-\eta$ almashtirish bajarib ushbu tenglamaga kelamiz

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}+\overline{\overline{\Phi}}\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)=0 \qquad (14)$$

Bu giperbolik tipdagi tenglamaning kanonik ko'rinishidir.

4. Parabolik tipdagi tenglamalarning kanonik shakli.

Faraz qilaylik (1) tenglama uchun $AC-B^2=0$ bo'lsin. U holda (5) tenglamalar bitta $\xi(x,y)=const$ umumiy integralga ega bo'ladi. (1) tenglamada $\xi=\xi(x,y)$ deb $\eta=\eta(x,y)$-ixtiyoriy (lekin $\xi=\xi(x,y)$ bilan

$\dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0$ munosabatda bo‘lgan funksiya) almashtirish bajaramiz u holda $\overline{A}=0$ va $\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}=(B^2-AC)\cdot\Im^2$ tenglikdan $\overline{B}^2-\overline{A}\overline{C}=0$ kelib chiqadi, bundan esa $\overline{B}=0$, lekin $\overline{C}\neq 0$, demak (6) tenglama

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\overline{\overline{\Phi}}\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=0$$

kanonik shakilga ega bo’lamiz.

1. Tor haqida tushuncha.

Tor deganda erkin egiladigan ingichka ip tushuniladi, boshqacha aytganda, tor shunday qattiq jisimki, uning uzunligi boshqa o‘lchamlaridan ancha ortiq bo‘ladi.

Torning chekkli nuqtalari mahkamlangan, o‘zi esa qattiq tortilgan bo‘lsin. Agar tor muvozanat holatidan chetlashtirilsa tor tebrana boshlaydi. Biz tor tebranishini bir tekislikda ro‘y beradi deb faraz qilamiz.

Bu tekislikda to‘g’ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini olamiz xou. ox o‘qini torning boshlang‘ich tinch holati bo‘yicha yo‘naltiramiz. U holda u torning muvozanat holatidan siljishini beradi. Tor tebranish jarayonida u-chetlanish x va t ga bog‘liq bo‘ladi ya’ni $u=u(x,t)$. Har bir fiksirlangan t vaqitda $u(x,t)-$funksiya grafigi tor tebranishi grafigini beradi, $\frac{\partial u}{\partial x}=u_x(x,t)$ esa bu grafikning x nuqtasiga o‘tkazilgan urinma burchak koeffisiyentini beradi. $u_t(x,t)-$harakat tezligi $u_{tt}(x,t)$ harakat tezlanishi.

Bizning maqsadimiz tor harakatini beruvchi $u(x,t)-$funksiya qanoatlantradigan tenglama tuzish. Buning uchun ba’zi bir cheklanishlar qilamiz

1. Tor absayut egiluvchan. Torga ta’sir qilinib turgan taranglik kuchi etarli katta deb faraz qilamiz. Shu sababli torning egilganda qarshiligini taranglikka nisbatan hisobga olamsa ham bo‘ladi.

Agar torning biror nuqtadan bir tomonga yotuvchi qismi olib tashlansa, u holda olib tashlangan qismining ta‘sirini almashtiruvchi taranglik kuchi. Shu nuqtada torning urunmasi bo‘yicha yo‘nalgan bo‘ladi.

Torni cho‘ziluvchan emas deb faraz qilamiz va u Guk qonuniga bo‘ysinadi, ya‘ni taranglik kuchini o‘zgarish miqdori torning uzunligini o‘zgarishiga proporsionaldir. Torni bir jinsli deb faraz qilamiz va uning chiziqli zichligini ρ orqali belgilaymiz (birlik uzunlikka to‘g‘ri keluvchi massa).

Torga $o\,u$ o‘qiga parallel kuchlar ta‘sir etadi deb faraz qilamiz ular tor bo‘ylab harakat qiladi va x, t ga bog‘liq, ularning zichligini $g(x,t)$ deb belgillaymiz. Muhitning qarshilik kuchi e‘tiborga olinmaydi. Biz faqat torning kichik tebranishlarini o‘rganamiz.

2. Tor tebranish tenglamasini keltirib chiqarish.

Agar $\alpha(x,t)$ orqali torning x nuqtasida t vaqtda o‘tkazilgan urinmasini ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan tashkil etgan burchagini belgilasak u holda torning kichik tebranishi

$$\alpha^2(x,t) \approx 0 \tag{1}$$

ekanligini ko‘zda tutadi.

$\sin\alpha$ ning Makloren qatoriga yoyilmasiga asosan

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

demak (1) shartga asosan

$$\sin\alpha \approx \alpha \tag{2}$$

Bu erdan

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \approx 2\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\alpha^2}{2}$$

demak $\cos\alpha \approx 1$.

$$tg\alpha - \sin\alpha = tg\alpha(1-\cos\alpha) \approx 0$$

bu erdan

$$tg\alpha \approx \sin\alpha$$

Lekin

$$\frac{\partial u}{\partial x} = tg\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx \alpha^2$$

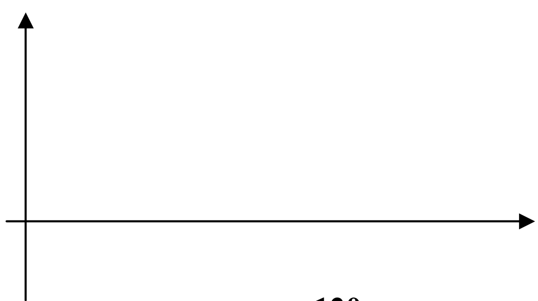
Bu erda

$$\overline{M_1M_2} = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1$$

ya’ni kichik tebranishlar tor qisimlari cho‘zilmaydi va qisqarmaydi.

Endi taranglik kuchi T ni o‘zgarmas ekanligini ko‘rsatamiz, ya’ni T ni x va t ga bog‘liq emasligini isbotlaymiz.

Buning uchun torning M_1M_2 bo‘lagini olamiz



t momentda tashlab yuborilgan bo‘laklar ta‘sirini T_1 va T_2 taranglik kuchlari bilan almashtiramiz shartga ko‘ra tor nuqtalari bir tekislikda harakat qilmoqda demak tashqi kuchlar ham $o\,u$ o‘qiga parallel yo‘nalishda ta’sir ko‘rsatadi. Bu kuchlarning ox o‘qdagi proeksiyasi nolga teng

$$-T_1\cos\alpha_1 + T_2\cos\alpha_2 = 0$$
$$\cos\alpha_1 \approx 1, \cos\alpha_2 \approx 1$$

demak $T_1 = T_2$ M_1 va M_2 nuqtalar uchun M_1 va M_2 nuqtalar ixtiyoriy bo‘lgani uchun ixtiyoriy x uchun t momentga $T(x,t) = T(t)$.

Lekin Guk qonuniga ko‘ra

$$T(t) = K(x_2 - x_1) = const$$

demak

$$T(x,t) = T_0 = const$$

Endi tor tebranishi tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun torning cheksiz kichik M_1M_2 bo‘lagini olamiz va uning ox o‘qdagi proeksiyasi $[x, x+dx]$ bo‘lsin. Unda taranglik kuchlari T_1 va T_2 ta‘sir etadi. Bu kuchlarning $o\,u$ o‘qidagi proeksiyasi

$$-T_1\sin\alpha_1 + T_2\sin\alpha_2 = T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

Lekin

$$\sin\alpha_1 \approx tg\alpha_1 = u'_x(x,t)$$
$$\sin\alpha_2 \approx tg\alpha_2 = u'_x(x+dx,t)$$

Demak

$$T_0(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) = T_0[u'_x(x+dx,t) - u'_x(x,t)] = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

t momentda torning $\overline{M_1M_2}$ qismiga ta‘sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning teng t’sir etuvchisini F orqali belgilaymiz. Demak

$$F \approx g(x,t)\overline{M_1M_2} = g(x,t)dx$$

$g(x,t)$ - birlik uzunlikka ta’sir etuvchi kuchlar zichligi.

Endi M_1M_2 qisim uchun Nyu’tonning ikkinchi qonunini qo‘llaymiz. Bu qonunga ko‘ra M_1M_2 uchastka massasini tezlanish ko‘paytmasi. burcha ta’sir etuvshi kuchlar yig‘indisiga teng. Agar ρ-tor zichligi bo‘lsa, u holda

$$\rho\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx + g(x,t)dx$$

yoki dx ga qisqartirib

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\rho}g(x,t) \qquad (4)$$

bu erda $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$

(4) tenglamaga tor tebranish tenglamasi deyiladi yoki bir o'lchovli to'lqin tenglamasi deyiladi.

3. **Koshi masalasi va uning qo'yilishida xarakteristikalarning roli.**

(1) tenglama uchun Koshi masalasi bunday qo'yiladi:

Koshi masalasi: $c^2(t>0)\cap c(t\geq 0)$ sinfga tegishli, $t>0$ yarim fazoda (1) tenglamani va $t=+0$ da

$$u\Big|_{t=+0} = u_0(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=+0} = u_1(x) \tag{4}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,t)$ funksiya topilsin.

(2) tenglama uchun Koshi masalasi quyidagicha qo'yiladi.

Koshi masalasi: $c^2(t>0)\cap c(t\geq 0)$ sinfga tegishli, $t>0$ yarim fazoda (2) tenglamani va

$$u\Big|_{t=+0} = u_0(x) \tag{5}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya topilsin.

Keltirilgan Koshi masalasini umumlashtirish mumkin. Shu maqsadda $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchili ikkinchi tartibli ushbu kvazichiziqli differensial tenglamani tekshiramiz:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \hat{O}\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{6}$$

Etarli siliq S : $\omega(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sirt va bu sirtga urunma bo'lmagan, uning har bir nuqtasida biror ℓ yo'nalish berilgan bo'lsin.

Koshi masalasi: S sirtning biror atrofida (6) tenglamani va

$$u\Big|_S = u_0(x)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial e}\Big|_S = u_1(x) \tag{7}$$

Koshi shartlarini qanoatlantiruvchi $u(x)$ funksiya topilsin. Bu umumlashtirilgan Koshi masalasidir.

Koshi masalasi qo'yilishida S sirtni xarakteristik sirt bo'lmasligi muhimdir. Agar S sirt xarakteristik sirt bo'lsa, boshlang'ich shartlarda verilgan $\varphi_0(x)$ va $\varphi_1(x)$ funksiyalar o'zaro bog'langan bo'lib qoladi. Demak xarakteristik sirtda boshlang'ich shartlarni ixtiyoriy berilishi mumkin emas. Bu holda Koshi masalasi umuman echimga ega bo'lsa ham u yagona bo'lmaydi.

Misol: Ushbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \tag{8}$$

tenglamaning

$$u(x)\big|_{y=0}=\varphi_0(x)\ ,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=\varphi_1(x) \qquad (9)$$

boshlang‘ich shrtlarni qanoatlantruvchi echimi topilsin.
Ravshanki, $x=const, y=const$ to‘g‘ri chiziqlar oilasi, jumladan $y=0$ ham berilgan tenglamaning xarakteristikalardan iborat. Demak boshlang‘ich shartlar xarakteristikada berilyapti tekshirilayotgan tenglamaning umumiy echimi

$$u(x,y)=f_1(x)+f_2(x) \qquad (10)$$

dan iborat. Umumiylikka ziton etkazmay $f_2(0)=0$ deb hisoblashimiz mumkin.

Boshlang‘ich shartlarga asosan

$$u(x)\big|_{y=+0}=f_1(x)=\varphi_0(x);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=+0}=f_2'(y)\big|_{y=0}=\varphi_1(x)$$

Agar $\varphi_1(x)\neq const$ bo‘lsa oxirgi tenglikning bajarilishi mumkin amas, bu holda Koshi masalasi echimga ega bo‘lmaydi.

Shunday qilib, $\varphi_1(x)=const=a$ bo’l gandagina Koshi masalasi echimga ega bo‘ladi. Bu holda

$$f_2(y)=ay+c(y)$$

bu erda $c(y)\in c^2(y\geq 0)$ sinifga tegishli va $c(0)=c^2(0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiya.
Agar $\varphi_0(x)\in c^2$ bo’lsa, Koshi masalasining echimi mavjud bo‘lib, u echim

$$u(x,y)=\varphi_0(y)=ay+c(y) \qquad (11)$$

formula bilan aniqlanadi lekin echim yagona emas.

O‘zingizni sinab ko‘ring.

1. Ikkinchi tartibli, ikki o‘zgaruvchili kvazi chiziqli tenglamaning xarakteristik tenglamasini yozing.
2. Elliptik tipdagi tenglama uchun uni kanonik ko‘rinishga keltirish uchun qanday almashtirish bajarish kerak.
3. Giperbolik tipdagi tenglamani kanonik ko‘rinishga keltirish uchun qanday almashtirish bajarish kerak.
4. Parabolik tipdagi tenglamani kanonik ko‘rinishga keltirish uchun qanday almashtirish bajarish kerak.

$f(b)=B$ bo‘lib, $A \neq B$ bo‘lsa, u holda A va B sonlari orasida yotuvchi istalgan C son uchun (a,b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqta uchun

$$f(c)=C$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

12-16-Ma’ruza

Ehtimollar nazariyasi elementlari
Kombinatorika elementlari.
Nьyuton binomi.

O’quv moduli birliklari:

1. Urinlashtirishlar.
2. Urin almashtirishlar.
3. Kombinatsiyalar.
4. Nьyuton binomi.

Aniqlashtirilgan o’quv maqsadlari:

Talabalar ushbu mavzuni to’la o’zlashtirgach:

1. *n* ta elementdan *k* tadan o’rinlashtirishlar tushunchasini biladi, ularning sonini xisoblay oladi.
2. *n* ta elementdan o’rin almashtirishlar sonini xisoblay oladi.
3. *n* ta elementdan *k* tadan kombinatsiyalar sonini xisoblay oladi.
4. Nьyuton binomi formulasini biladi.
5. Kombinatorika formulalarida keltirilgan kattaliklarni taqribiy xisoblay oladi.

Bizga elementlarining soni *n* ta bulgan tuplam berilgan bulsin. Bu tuplamning *k* ta elementdan tuzilgan xar kanday tartiblangan kism tuplamiga *n* ta elementdan *k* ta element olib tuzilgan urinlashtirish deymiz. Barcha shunday urinlashtirishlar soni A_n^k kabi belgilanadi.

Teorema: *n* ta elementdan *k* tadan elementlarni urinlashtirishlar soni.

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k-1), \quad k>0 \qquad (1)$$

ga teng, yaьni urinlashtirishlar soni *n* dan n-*k*+1 gacha bulgan ketma–ket natural sonlar kupaytmasiga teng.

Isboti: Berilgan to’plamdan birinchi elementni *n* xil usulda tanlash mumkin.

Birinchi elementni *n* xil usulda tanlash mumkin bulgani xolda, ikkinchi elementni *n*-1 xil usulda tanlash mumkin. Bu imkoniyatlar birgalikda birinchi ikkilikni *n*(*n*-1) xil usulda tanlash imkoniyatini beradi.

Ikkita dastlabki elementlar tanlab olingandan sung uchinchi elementni *n*-2 xil usulda tanlash mumkin, negaki bu paytda tuplamning tanlanishi mumkin bulgan elementlar soni *n*-2 tadan iborat va xokazo.

Mana shunday xisob yuritib oxirgi *k*-elementni *n*-*k*+1 xil usulda tanlash mumkinligini kuramiz.

Negaki, *k*-elementni tanlash vaktida tuplamda *n*-*k*+1 ta element kolgan buladi.

SHunday kilib,

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

tenglik urinli.

1-misol. Guruhdagi 22 talabadan sardor, uning muovini va deoriy gazeta muxarririni saylash kerak. SHu uchta talabani necha usul bilan saylash mumkin.

Echish. $A_{22}^{3}=\frac{22!}{19!}=20\cdot 21\cdot 22=9240$

n ta elementdan *n* ta element olib urinlashtirishlar, urniga kuyishlar yoki permutatsiyalar deyiladi.

n elementdan barcha permutatsiyalar soni P_n kabi belgilanadi.

Teorema: n ta elementdan urin almashtirishlar soni

$$R_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

ga teng.

Isboti: Oldingi teoremadan $k=n$ da kelib chikadi.

2-misol. 2,3,4,5,7 va 9 raqamlari ishtirokida nechta turli raqamli 6 xonali son hosil qilish mumkin.

Echish. $P_6 = 61 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$

n ta elementli tuplam berilgan bulsin. Uning *k* ta elementli xar kanday kism tuplami *n* ta elementdan *k* tadan olib tuzilgan kombinatsiyasi deyiladi. Barcha shunday kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi.

Teorema: *n* ta elementdan *k* tadan olib tuzilgan barcha kombinatsiyalar soni

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-\kappa)!\,\kappa!}$$

ga teng.

Isboti: Ta'rifga kura, barcha tartiblangan, *k* ta elementdan tuzilgan kism tuplamlar soni C_n^k ga teng. SHu kism tuplam elementlarini urinlashtirishlar sonini karaylik. Xar bir kombinatsiyada *k* tadan element bulgani uchun ularning xar birini *k*! xil usul bilan urinlarini almashtirish mumkin.

U xolda bu tuplamda A_n^k urinlashtirishlar soni

$$A_n^k = k!\cdot C_n^k\ , \qquad C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

ga teng.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ ni xisobga olib $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ ga kelamiz.

Kuyidagi tengliklar urinli:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$, 2. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$ $(k<n)$, 3. $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

3-misol. Aylanaga ixtiyoriy 13 ta nuqtadan uchlari shu nuqtalarda bo'lgan nechta uchburchak o'tkazish mumkin.

Echish. $C_{13}^{3} = \frac{13!}{10!3!} = \frac{11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3} = 22\cdot 13 = 286$

M.S.

1-3 formulalarni matematik induktsiya usuli yordamida isbot qiling.

Ushbu

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + .. + C_n^k a^{n-k}b^k + ... + C_n^n b^n \qquad (4)$$

formula Nьyuton binomi deb yuritiladi. Bu formulani matematik induktsiya usuli yordamida isbotlash mumkin.

Kombinatorika formulalari bilan xisob-kitob yuritganda n soni katta bulganda xisoblashlar birmuncha murakkablashib ketadi. SHu munosabat bilan $n!$ sonini xisoblashda ushbu

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

formuladan foydalanish mumkin. Bu formula Stirling formulasi deyiladi.

Xodisa tushunchasi extimollar nazariyasining asosiy tushunchasi xisoblanadi.

Xodisa deganda muayyan sharoitda yuz berishi yoki yuz bermasligi mumkin bulgan xar kanday vokeani tushunamiz. Xodisalarni A, B, C, … xarflari bilan belgilaymiz.

Misollar:

A - tangani tashlashda gerb tomoni tushishi,
V - shashkoltoshni tashlaganda 6 ochkolik tomoni tushishi,
S - uk uzishda nishonga tegish,
D - muayyan kunda yomgir yogishi.

Albatta yuz beradigan xodisa mukarrar xodisa deyiladi.
Mutlako yuz bermaydigan xodisa mumkin bulmagan xodisa deyiladi.
A-biror xodisa bo'lsin. A xodisaga karama-karshi xodisa deb A ning yuz

bermasligidan iborat xodisani tushunamiz va uni $\overline{A}$ bilan belgilaymiz.

Masalan, tangani tashlashda gerb tushishi xodisasini A desak, unga karama-karshi $\overline{A}$ xodisa shu tashlashda rakamli tomonning tushishidan iborat.

Agar bir necha xodisalardan xech kaysi ikkitasining bir vaktning uzida yuz berishi mumkin bulmasa, bu xodisalar birgalikda bulmagan xodisalar deyiladi.

Misollar:

1. Tangani bir marta tashlashda xam gerb, xam rakam tomonlar tushishi,
2. Uk uzishda bir vaktning uzida xam nishonga tegizish, xam tegiza olmaslik,
3. SHashkoltoshni tashlaganda birdaniga 1, 2, 3, 4, 5, 6 raqamlarni tushishi.

Agar sinovlarda A, B, … , L xodisalardan xech biri ruy berish nuktai nazaridan ustunlikka ega bulmasa, bu xodisalar teng imkoniyatli deyiladi.

Masalan, tangani tashlashda gerb tomon tushishi yoki rakam tomoni tushishi teng imkoniyatli xodisalardir.

Agar xar bir sinov natijasida A, B, . . . , L xodisalardan kamida bittasini ruy berishi mukarrar bulsa, bu xodisalar xodisalarning tulik gruppasini tashkil etadi deyiladi.

Misollar :

1. Uk uzishda nishonga tegizish va tegiza olmaslik xodisalari.
2. SHashkoltoshni tashlashda 1, 2, 3, 4, 5, 6 ochkolar chikish xodisalari.

SHunday xodisalar sistemasini kursatish mumkinki, bu sistemaning xodisalari tuliq gruppani tashkil etib, birgalikdamas, teng imkoniyatlidir.

Bunga misol kilib shashkoltoshni tashlashda 1, 2, 3, 4, 5, 6 sonlarining tushish xodisalari tuplamini kursatish mumkin.

$A_1,...,A_n$ xodisalar sistemasi teng imkoniyatli birgalikdamas tulik gruppani tashkil etuvchi sistema bulsin. A xodisa $A_1,...,A_n$ lardan birortasi yuz berganda sodir bulsin . Bunday xolda biz A_i xodisa A xodisani ergashtiradi yoki A xodisaning yuz berishiga kulaylik tugdiradi deymiz.

Aytaylik, qaralayotgan n ta $A_1,...,A_n$ xodisalardan m tasi A xodisaning sodir bulishi uchun kulaylik tugdirsin.

1-Ta'rif: A xodisaning sodir bulishining extimolligi deb, unga kulaylik tugdiruvchi xodisalar sonining teng imkoniyatli barcha xodisalarning soniga nisbatiga aytiladi.

A xodisa ro'y berishi extimolligini R(A) bilan belgilasak taьrifga ko'ra

$$R(A)=\frac{m}{n} \qquad (1)$$

ga ega bo'lamiz. Bu extimollikning klassik taьrifi deb ataladi.

Taьrifdan bevosita xar qanday A xodisa uchun

$$0 \le P(A) \le 1$$

ni kuramiz.

Misollar:

1. 36 ta karta dastasidan bitta karta olinadi. CHillik chiqish extimoli topilsin.

Echilishi:

A xodisa chillik karta chikish xodisasi bo'lsin. Barcha imkoniyatlar soni n=36 bo'lib, shu A xodisaga kulaylik tugdiruvchi imkoniyatlar soni $m = 9$ ga teng. SHunga ko'ra

$$P = P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

2. Ikkita tanga tashlangan. Xar ikala tangada gerb tomon tushish ixtimoli topilsin.

Echilishi.

Imkoniyatlarni qarab chiqamiz.

1) Gerb; Gerb,
2) Gerb; Raqam,
3) Raqam; Raqam,
4) Raqam; Gerb.

Ko'ramizki yuqoridagi belgilashlarda n=4, m=1 bo'lib

$$P=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$$

3. N ta maxsulotdan M tasi yaroqsizligi ma'lum. SHu maxsulotlardan tasodifiy ravishda n ta maxsulot tanlab olinadi. SHu tanlangan maxsulotlar ichida rosa m tasi yaroqsiz bo'lishi extimolini toping.

Echilishi:

Imkoniyatlarning umumiy soni C_N^n ga teng. Kulaylik tugdiruvchi imkoniyatlar soni esa $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ ga teng .SHunga asosan

$$P(A)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Biz klassik ta'rifda tulik gruppaga kiruvchi xodisalar sonini chekli deb xisob kildik. Birok amalda cheksiz sondagi xodisalar bilan xam ish kurishga tugri keladi. SHuningdek xodisalar uchun teng imkoniyatlilik printsipini xam xar doim qo'llash mumkin bulavermaydi va xokazo.

Bu kabi xolatlar klassik ta'rifning ma'lum bir ma'noda cheklanganligini kursatadi. Bunday vaziyatlarda extimolning statistik taьrifiga murojaat kilinadi.

SHu munosabat bilan xodisaning nisbiy chastotasi tushunchasini kiritamiz.

2-taьrif: Xodisaning nisbiy chastotasi deb xodisa ruy bergan sinashlar sonining ja'mi sinashlar soniga nisbatiga aytiladi.

A xodisaning nisbiy chastotasini W(A) kabi belgilaymiz. U xolda $W(A)=\frac{m}{n}$ bulib, bunda m - xodisaning ruy berishlari soni, n - ja'mi sinashlar soni.

4-misol. Yilning 135 kunida yog'ingarchilik bo'lgan bo'lsa, yog'ingarchilikning yillik nisbiy chastotasi topilsin.

Echish. $W(A)=\frac{135}{365}=\frac{27}{73}$

Nisbiy chastota va extimollik uzaro boglik tushunchalardir. n soni etarlicha katta bulganda nisbiy chastotani extimollik sifatida kabul kilish mumkin, ya'ni $\lim_{n\to\infty} W(A)=P(A)$

Bu extimolning statistik ta'rifidir.

Extimolning geometrik taьrifi kuyidagicha kiritiladi.

Aytaylik D - biror chekli soxa bulsin. Bu soxaga nukta tashlanadi. Bunda nuktaning teng ulchovli bulaklarga tushish extimollari teng deb xisob kilinadi.

3-taьrif: Nuktaning $D_1 \subset D$ bulgan xar kanday D_1 soxaga tushish extimoli deb, D_1 soxa ulchovining D soxa ulchoviga nisbatiga aytiladi. Bu extimolni $R(D_1)$ deb belgilaymiz. U xolda taьrifga asosan

$R(D_1)=\frac{\text{УлчовD}_1}{\text{УлчовD}}$ urinli. Xususan D, D_1 lar tekislikda karalsa, $R(D_1)=\frac{S_{D_1}}{S_D}$,

bunda S_{D_1}, S_D lar tegishli yuzalar.

5-misol. R radiusli doiraga kvadrat ichki chizilgan. Tashlangan zarrani kvadratga tushish ehtimoli topilsin.

Yechish. $S_Д=\pi R^2$ $\quad S_{кв}=a^2=2R^2$ $\quad P(A)=\frac{S_{кв}}{S_Д}=\frac{2R^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}=\frac{2}{3{,}14}$

A va B xodisalarning yigindisi deb A yoki B xodisaning ruy berishidan iborat bulgan xodisaga aytiladi va bu xodisani A+B kabi yoziladi. Boshkacha kilib aytganda A va B xodisalarning yigindisi deb bu xodisalardan kamida bittasining ruy berishidan iborat bulgan xodisaga aytiladi.

$A_1, \dots, A_n$ xodisalarning yigindisi xam shu kabi ta'riflanadi.

Teorema: Birgalikda bulmagan A va V xodisalar yigindisidan iborat A+V xodisaning ruy berishi extimolligi

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (1)$$

ga teng.

Isboti : $P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$ bulsin.

A va V xodisalar birgalikda bulmaganligidan, teorema shartidagi xolatda A+V xodisa sodir bulishi A, V lardan fakat bittasi ruy berishidan iborat xodisani bildiradi, yaьni A, V larning bir vaktda sodir bulishi extimolligi 0 ga teng. U xolda

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

Bu teoremani n ta sondagi $A_1, \dots, A_n$ xodisalar uchun umumlashtirish mumkin . U xolda

$$P(A_1+\dots+A_n) = P(A_1)+\dots+P(A_n). \qquad (2)$$

Bunda, $A_1, \dots, A_n$ lar birgalikda bulmagan xodisalar.

1-natija: Agar $A_1, \dots, A_n$ xodisalar birgalikda bulmagan xodisalarning tulik sistemasini tashkil etsa, u xolda

$$R(A_1) + . . . + R(A_n) = 1. \qquad (3)$$

Isboti: Teoremaga asosan, $P(A_1+\ldots+A_n)=1$ ni xisobga olib, $P(A_1+\ldots+A_n)= P(A_1) +\ldots+P(A_n) = 1$ ga kelamiz.

2-natija: Karama-karshi xodisalarning yigindisining extimoli 1 ga teng, ya'ni

$$R(A) + R(\overline{A}) = 1. \qquad (4)$$

Isbotlangan teorema A va V xodisalar birgalikda bulmagandagina urinli.

1-misol: O'zaro kesishmaydigan 3 ta qismga ajratilgan yuzadan iborat nishonga qarata o'q otilmoqda. O'qni shu ajratilgan yuzalarga tegish extimoli mos ravishda $P(A_1)=0{,}05$, $P(A_2)=0{,}1$, $P(A_3)=0{,}17$,bo'lsa o'qni yuzaga tegish extimolini toping.

Echilishi: (2) formulaga asosan

$$P(A)=P(A_1+A_2+A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=0{,}05+0{,}1+0{,}17=0{,}32.$$

A va V xodisalar birgalikda bulganda A+V ning extimolligi

$$R(A+V) = R(A)+R(V)–R(A\cdot V)$$

formula bilan xisoblanadi. R(A·V) yozuvning mazmuni keyingi punktda yoritiladi.

Extimolliklarni kupaytirish teoremasi.

A va V xodisalarning kupaytmasi deb A va V xodisalarning bir vaktning uzida ruy berishidan iborat bulgan xodisaga aytiladi va uni A·V kabi yoziladi.

A·V kupaytmaning ruy berish extimoli A, V xodisalarning boglik yoki erkliligi bilan boglik.

Agar A xodisaning sodir bulishi, V xodisaning sodir bulgan yoki sodir bulmaganligiga boglik bulmasa biz A xodisani V xodisaga boglik emas yoki erkli deymiz.

Agar A xodisaning sodir bulishi V xodisaning ruy berishi yoki ruy bermasligiga boglik bulsa, bu xodisalar boglik xodisalar deyiladi.

Buni misolda tushuntiramiz:

1. Tajriba tangani tashlashdan iborat bulib, A - tanganing gerb tomoni tushishi, V - tanganing rakam tomoni tushishini bildirsin. Bu yerda A va V xodisalar bir-biriga boglik emas.
2. Yashikda 1 ta kora va 2 ta ok sharlar bor. Ikki kishi bir donadan sharni olmokda. A - birinchi kishida ok shar chikishi, V - ikkinchi kishida ok shar chikishi xodisalar bulsin. Bu yerda V vokea xakida biror ma'lumot bulgunga, kadar A vokeaning ruy berish extimoli $^2/_3$ ga teng. Agar V vokea yuz bergan bulsa, u xolda A vokea ruy berish extimoli $^1/_2$ ga teng. Bu misolda kurinadiki A ning yuz berishi V ga boglik ekan.

Boglik bulmagan xodisalar uchun ushbu teorema urinli.

Teorema: Ikkita erkli xodisaning birgalikda ruy berish extimoli shu xodisalar extimollarning kupaytmasiga teng:

$$R(A\cdot V)= R(A) \cdot R(V) \qquad (5)$$

Isboti: Isbotni klassik ta'rif asosida keltiramiz:

n – sinashning A xodisa ruy beradigan yoki ruy bermaydigan imkoniyatlari soni.

n_1 – A xodisa ruy berishiga kulaylik tugdiruvchi imkoniyatlar soni $n_1 \le n$.

m – sinashdagi V xodisa ruy beradigan yoki ruy bermaydigan imkoniyatlar soni.

m_1 – V xodisa ruy berishiga kulaylik tugdiruvchi imkoniyatlar soni deb xisoblaylik, $m_1 \prec m$

U xolda ja’mi sinashlar soni m·n ga teng bulib, bu sinashlarda A va V, $\overline{A}$ va V, A va $\overline{B}$, $\overline{A}$ va $\overline{B}$ xollar ruy berishi mumkin. Bulardan A va V bir vaktda yuz berishining kulay imkoniyatlari soni $n_1 \cdot m_1$ ga teng.

SHunga kura

$$R(A\cdot V)=\frac{n_1 \cdot m_1}{n \cdot m}=\frac{n_1}{n}\cdot\frac{m_1}{m}=R(A)\cdot R(V).$$

2-misol: Ikki mergan bir vaqtda nishonga o’q uzmoqda. Agar birinchi merganning nishonga o’qni tekkizish extimoli $P(A_1)=5/6$ bo’lib,

ikkinchi merganning nishonga o’qni tekkizish extimoli $P(A_2)=8/9$ bo’lsa, nishonga ikkala o’qni tegish extimolini xisoblang.

Echilishi: (5) formulaga asosan

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}=\frac{40}{54}=\frac{20}{27}.$$

Bu teoremani bir necha xodisalarga nisbatan tatbik kilish uchun birgalikda boglikmaslik tushunchasini kiritamiz.

Bir necha xodisalardan xar biri, kolganlarining istalgan kombinatsiyasi bilan erkli bulsa, bu xodisalar birgalikda erkli deyiladi.

SHu urinda bir necha xodisalarning juft-jufti bilan erkli ekanligidan ularning birgalikda erkli bulishi kelib chikmaydi.

Kiritilgan bu ta’rif ushbu tasdiqni yuqorida keltirilgan teoremaning natijasi sifatida qarash imkonini beradi:

Natija: $A_1, \ldots, A_n$ birgalikda erkli xodisalar uchun

$$P(A_1\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n) \qquad (6)$$

o’rinli.

Xech bulmaganda bitta xodisaning ruy berish extimoli

Teorema: Birgalikda boglik bulmagan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ xodisalardan xech bulmaganda bittasining ruy berish extimoli

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n) \qquad (7)$$

ga teng.

Isboti: A bilan $A_1, \ldots, A_n$ lardan kamida bittasining ruy berish xodisasini belgilaylik. Ta’rifga kura $\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n$ xodisa $A_1, \ldots, A_n$ larning xech birining ro’y bermasligidan iborat xodisadir. A bilan $\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n$ xodisalar birgalikda bulmagan xodisalar bulganligidan

$$P(A)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n)=1.$$

Bundan kupaytirish teoremasiga asosan

$$P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)$$

ga kelamiz.

3-misol: Oldingi 2-misoldagi shartlarda xech bo’lmaganda bitta o’qning nishonga tegish extimolini xisoblang.

Echilishi: SHartga ko’ra $P(A_1)=\frac{5}{6}$ va $P(A_2)=\frac{8}{9}$ bo’lganligidan,

$P(\overline{A_1}) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ va $P(\overline{A_2}) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$ **ekanligini ko'ramiz. Bundan (7) formulaga asosan** $P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} = 1 - \frac{1}{54} = \frac{53}{54}$.

2- va 3-misollardan ko'rinadiki merganlar tomonidan otilgan o'qlardan xech bo'lmaganda bittasining nishonga tegish extimoli ularning xar ikkalasining nishonga tegish extimolidan anchagina katta bo'lar ekan.

Boglik xodisalar extimollarini kupaytirish.

A va V xodisalar boglik bulsin. Bu vaziyatda shartli extimol tushunchasini kiritamiz.

V xodisaning A xodisa ruy berdi deb faraz kilingandagi extimolini biz shartli extimol deb aytamiz va uni $R_A(V)$ kabi belgilaymiz.

Misol. Yashikda 3 ta ok va 3 ta kora shar bor. A - yashikdan olingan shar kora bulishi, V - yashikdan olingan shar ok bulishi xodisasi bulsin. Olingan shar yashikka kaytarib solinmaydi. Birinchi sinashda kora shar olindi, ya'ni A xodisa yuz berdi. U xolda $R_A(V)$ q $\frac{3}{5}$ ga teng.

Teorema: Ikkita boglik xodisaning birgalikda ruy berish extimoli ulardan birining extimolini shu xodisa ruy berdi degan farazda xisoblangan ikkinchi xodisaning shartli extimoliga kupaytmasiga teng:

$$R(A \cdot V) = R(A) \cdot R_A(V) = R_V(A) \cdot R(V). \qquad (8)$$

Isboti:

n – cinashlarning A xodisa ruy beradigan yoki ruy bermaydigan ja'mi soni.

n_1– sinashlardan A xodisaning ruy berishiga kulaylik tugdiradiganlari soni.

m– sinashlarning A xodisa ruy berdi degan farazda V xodisa ruy berishiga kulaylik tugdiradiganlari soni bulsin.

U xolda

$$R(A \cdot V) = \frac{m}{n} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m}{n_1} = R(A) \cdot R_A(V)$$

Natija: Agar $A_1, \ldots, A_n$ xodisalar boglik xodisalar bulsa,

$$P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n)$$

tenglik urinli.

4-misol: Stanokdan yaroqli maxsulot chiqish extimoli 0,9 ga teng. Yaroqlilari ichidan 1-sortli chiqishi extimoli 0,8 ga teng. Stanokdan 1-sortli maxsulotni chiqishi extimolini toping.

Echilishi: V – yaroqli maxsulot chiqishi, A – 1-sortli maxsulot chiqishi deb belgilasak: $R(V)=0,9$; $R_A(V)=0,8$. (8) formulaga asosan $P(A \cdot B) = 0,9 \cdot 0,8 = 0,72.$

To'la extimol formulasi.

Aytaylik A xodisa tulik gruppa tashkil etuvchi birgalikda bulmagan $V_1, V_2, \ldots, V_n$ xodisalardan bittasining ruy berganlik shartida yuz bersin. Bu xodisalarning $R(V_1), \ldots, R(V_n)$ extimolliklari va A xodisaning $P_{B_1}(A), \ldots, P_{B_n}(A)$ shartli extimolliklari ma'lum bulsin. SHu vaziyatda A xodisaning ruy berish extimoli ushbu teorema asosida xisoblanadi.

Teorema: Tulik gruppa tashkil etuvchi, birgalikda bulmagan $V_1, \ldots, V_n$ xodisalardan bittasining ruy berganlik shartidagina ruy beradigan *A* xodisaning extimolligi

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A) \quad (10)$$

ga teng.

Isboti: SHartga kura A xodisa ruy berishi uchun birgalikda bulmagan $V_1,...,V_n$ xodisalardan bittasi ruy berishi kerak . Bu birgalikda bulmagan $V_1A,\ V_2A\ ,...,V_nA$ xodisalardan kaysidir birining ruy berishini bildiradi, negaki, $V_1,...,V_n$ xodisalar birgalikda bo'lmaganligidan $V_1A,\ V_2A\ ,...,V_nA$ xodisalar sistemasi xam birgalikdamasdir. Birgalikdamas xodisalar uchun kushish teoremasiga kura

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+...+P(B_nA)$$

SHu yerda A va V_i , $i=\overline{1,n}$ lar boglikligini va $P(B_i\cdot A)=P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)$

ni xisobga olib,

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

ga kelamiz.

Bu formulaga tula extimol formulasi deyiladi.

5-misol: Do'konga ikkita zavodda tayyorlangan elektr lampochkalari keltirildi. Ulardan 60%i 1-zavodda, 40%i 2-zavodda tayyorlangan. 1-zavodda tayyorlangan xar 100 ta lampochkadan 90 tasi, 2-zavodda tayyorlangan lampochkalardan esa xar 100 tadan 80 tasi standartga tug'ri kelishi ma'lum. Tavakkaligi olingan lampochkaning standartga mos kelishi extimolini toping.

Echilishi: Bu yerda va umuman shu turdagi masalalarni yechishda sodir bo'layotgan xodisa ikki bosqichda kechishini nazarda tutish lozim. Birinchi bosqichda, yoki 1-zavod, yoki 2-zavodda tayyorlangan maxsulot tanlanmoqda deyishimiz mumkin. Ikkinchi bosqichdagi yuz beradigan xodisa esa qo'limizdagi maxsulot standartga javob berishi yoki bermasligadan iborat. Birinchi bosqich, shartli ravishda, ikkita xodisadan iborat deb xisob qilib bu xodisalarni B_1 va B_2 lar bilan belgilaymiz. Odatda bu xodisalarni gipotezalar deb ataladi. Ikkinchi bosqichdagi standart lampochka chiqish xodisasini A bilan belgilasak, quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$P(B_1)=\frac{60}{100}=0{,}6;\ P(B_2)=\frac{40}{100}=0{,}4: \quad P_{B_1}(A)=\frac{90}{100}=0{,}9;\ P_{B_2}(A)=\frac{80}{100}=0{,}8.$$

U xolda to'la extimol formulasiga asosan izlanayotgan $P(A)$ extimollik quyidagicha xisoblanishi mumkin:

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=0{,}6\cdot 0{,}9+0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}54+0{,}32=0{,}86$$

Beyes formulasi.

Aytaylik, A xodisa birgalikda bulmagan va tula gruppa tashkil etuvchi $V_1,V_2,...,V_n$ xodisalardan biri ruy berish shartidagina ruy berishi mumkin bulsin. $V_1,...,V_n$ xodisalardan kaysi biri ruy berishi oldindan ma'lum bulmagani uchun ularni gipotezalar deymiz. Ularning ruy berishi extimoli $R(V_1),R(V_2),...,R(V_n)$ lar bulsin.

Bu vaziyatda A xodisaning ruy berish extimoli tula extimol formulasiga asosan

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+...+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A)$$

ga teng.

Sinov utkazilib A xodisa ruy berdi deylik.

Gipotezalarning extimoli kanday uzgarganligini aniklash masalasini kuyaylik. Boshkacha aytganda

$$R_A(V_1),\ R_A(V_2),\ .\ .\ .\ ,\ R_A(V_n)$$

shartli extimollarni izlaylik.

$R_A(V_1)$ uchun kuyidagiga egamiz.

$$R(A\cdot V_1)=R(A)\cdot R_A(V_1)=R(V_1)\cdot P_{B_1}(A).$$

Bundan $R_A(V_1)=\dfrac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}$ ga kelamiz . SHu yerda $R(A)$ ning yukoridagi ifodasini xisobga olib

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)}$$

ni topamiz.

Kolgan gipotezalarning A ga nisbatan shartli extimolliklarini xam shu kabi xisoblash mumkin.

Umumiy formula

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A)}\,. \qquad (11)$$

Bu formula Beyes formulasi deb yuritiladi.

6-misol: Tajribada 3 ta gipotezalar mavjud bulib, ularning ehtimolliklari mos ravishda $R(V_1)=0,15$; $R(V_2)=0,22$; $R(V_3)=0,34$ bo'lsin. A xodisani ro'y berishining shartli extimolliklari mos ravishda $P_{B_1}(A)=0,7; P_{B_2}(A)=0,1; P_{B_3}(A)=0,9.$ A xodisa ro'y bergan bo'lsa, $P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3)$ shartli extimolliklar xisoblansin.

Echilishi: (11) formulaga asosan

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)}=\frac{0,15\cdot 0,7}{0,15\cdot 0,7+0,22\cdot 0,1+0,34\cdot 0,9}=$$

$$=\frac{0,105}{0,433}\approx 0,24.$$

$$P_A(B_2)=\frac{0,22\cdot 0,1}{0,433}=\frac{0,022}{0,433}\approx 0,05. \quad P_A(B_3)=\frac{0,34\cdot 0,9}{0,433}=\frac{0,306}{0,433}\approx 0,71.$$

Agar bir nechta sinash utkazilayotgan bulib, xar bir sinashda A xodisaning ruy berish extimoli boshka sinashlar natijasiga boglik bulmasa, bunday sinashlar A ga nisbatan erkli deyiladi.

Aytaylik, n ta erkli sinashlar utkazilayotgan bulsin. Bu sinashlardan xar birida A xodisa ruy berishi yoki ruy bermasligi lozim bulsin. A ning ruy berish extimoli xar safar bir xil R(A)=r bulsin. U xolda A ning ruy bermaslik extimoli R($\overline{A}$)=q, q=1-r ga teng.

Teorema A hodisaning n ta sinovda m marta ro'y berish, $\overline{A}$ hodisani esa $(n-m)$ marta ro'y berish ehtimoli $P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$

formula bilan hisoblanadi.

Isbot. Bu n ta sinovlarda A xodisaning rosa m marta yuz berishi extimolligini topish masalasini karaylik. SHunga e'tiborimizni karatamizki, bu sinovlarda A xodisaning kay tartibda, ya'ni n ga kiruvchi sinovlarning nechanchisida ruy berishining bizga axamiyati yuk. Muximi uning rosa m marta ruy berishidir. Bu vaziyatda A xodisaning rosa m marta ruy berib, n-m marta ruy bermasligidan iborat murakkab xodisaning extimolligi, extimollarni kupaytirish formulasiga kura

$$p^{m} \cdot q^{n-m}$$

ga teng.

Birok, biz aytgan murakkab xodisa n ta sinov ichida xar xil taksimlanishi mumkin, ya'ni xar xil tartibda yuzaga kelishi mumkin. Bunday taksimlanishlar soni C_n^m ga teng.

SHuni xisobga olib,

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} \qquad (1)$$

ni topamiz. Bu formula Bernulli formulasi deyiladi.

$P_n(m)$ yozuv o'rniga $P\left(x = \frac{m}{n}\right)$ yozuvdan xam foydalanishimiz mumkin. Teoremani isbotlash davomida biz A xodisaning n ta erkli sinovlar seriyasida sodir bo'lishining $x = m/n$ nisbiy chastotasi uchun taqsimot qonunini, ya'ni xar bir $x = m/n$ $, 0 \le m \le n,$ nisbiy chastota bilan $P\left(x = m/n\right)$ extimollik o'rtasidagi bog'lanishdan iborat qonuniyatni xosil qildik. Bu qonuniyatni jadval shaklida ifodalashimiz mumkin.

X	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	…	$\frac{m}{n}$	…	$\frac{n}{n}$
$P\left(x = \frac{m}{n}\right)$	$1 \cdot q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	$1 \cdot p^n$

Aytilgan taksimot *binomial taksimot* deyiladi. Biz bu kabi taqsimotlarning xususiyatlariga keyinroq qaytamiz.

(1) formuladan foydalangan xolda, shunday n ta erkli sinovlarda A xodisaning kamida k marta yuz berishi extimolligi $P\left(x = \frac{k}{n}\right)$ uchun ushbu tengliklar o'rinli ekanligini ko'rishimiz mumkin:

- xodisaning kamida bir marta ro'y berish extimolligi:

$$P\left(x \ge \frac{1}{n}\right) = 1 - P\left(x = \frac{0}{n}\right) = 1 - q^n.$$

- xodisaning kamida k marta ro'y berish extimolligi:

$$P\left(x \ge \frac{k}{n}\right) = \sum_{m=k}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$$

yoki

$$P\left(x \ge \frac{k}{n}\right) = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

1-misol: Tanga 6 marta tashlanmoqda. Gerbli tomon tushish xodisasi uchun taqsimot qonunini tuzing.

Echilishi: Bu vaziyatda *p=0,5; q=0,5.* (1) formulaga asosan

$$P\left(x=\frac{0}{6}\right)=C_6^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64},\quad P\left(x=\frac{1}{6}\right)=C_6^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32},$$

$$P\left(x=\frac{2}{6}\right)=C_6^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64},$$

$$P\left(x=\frac{3}{6}\right)=C_6^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{16},$$

$$P\left(x=\frac{4}{6}\right)=C_6^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64},$$

$$P\left(x=\frac{5}{6}\right)=C_6^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{3}{32},$$

$$P\left(x=\frac{6}{6}\right)=C_6^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{64}.$$

Topilgan kattaliklardan foydalanib ushbu jadvalni tuzamiz.

X	$\frac{0}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{6}$
P(x)	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

Bu jadval izlanayotgan taqsimot qonunini ifodalaydi.

M.S

Nima uchun jadvalda faqat $x\geq0$ uchun qiymatlar keltirilgan?.

Muavr–Laplasning lokal limit va integral teoremalari.

Bernulli sxemasi buyicha sinashlardagi $P_n(m)$ extimollikni xisoblash katta *n* larda murakkablashib ketadi. Bunday xollarda Laplasning lokal limit teoremasi deb ataluvchi ushbu teoremadan foydalaniladi.

Teorema: Agar xar bir sinashda A xodisaning ruy berish extimoli *r* uzgarmas bulib, nolь va birdan farkli bulsa, u xolda *n* ta sinashlarda A xodisaning rosa *m* marta ruy berish extimoli $R_n(m)$ kuyidagiga teng:

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x),\quad \text{bu yerda } x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}. \qquad (2)$$

Teoremada keltirilgan $\varphi(x)$ funktsiya $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ kurinishda bulib, bu funktsiyaning kiymatlarini ma’lumotnomalardan topish mumkin.

2-misol: Merganning bir marta o’q uzishda o’qni nishonga tekkizish extimoli *r*=0,2 ga teng. 100 ta o’q uzilganda nishonga rosa 20 marta o’q tegishi extimolini toping.

Echilishi: Aytilgan extimollikni (2) formuladan foydalanib topishimiz mumkin. Bu yerda p=0,2; q=0,8; m=20 bo'lganligidan $\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=4$ va $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{20-100\cdot 0{,}2}{4}=0.$ $\varphi(x)$ funktsiyaning qiymatlari jadvalidan $\varphi(0)\approx 0{,}40$ ni topamiz. SHunga ko'ra $P_{100}(20)\approx 0{,}40\cdot\frac{1}{4}=0{,}1.$

n ta erkli sinovlarda A xodisaning kamida m_1 marta va kupi bilan m_2 marta ruy berishi extimoli

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x'')-\Phi(x') \qquad (3)$$

formula yordamida xisoblanadi, bu yerda

$$x'=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}} \quad \text{va} \quad x''=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

F(x) funktsiya esa $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ tenglik bilan aniklanadi. Uning kiymatlari xam ma'lumotnomalarda keltiriladi. Bu tasdik *Laplasning integral teoremasi* deyiladi.

3-misol: Tasodifan tanlangan maxsulotning yaroqsiz chiqish extimoli r=0,2 ga teng. Tekshirish uchun olingan 400 ta maxsulot ichida 70 tadan 100 tagacha yaroqsiz maxsulot bo'lishi extimolligini toping.

Echilishi: Masalaning yechimini (3) formuladan foydalanib topishimiz mumkin. Bu yerda p=0,2; q=0,8; p=400; m_1=70 m_2q100 bo'lganligidan $\sqrt{npq}=\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}=4$ va

$$x'=\frac{70-400\cdot 0.2}{4}=-2.5, \quad x_2\,\frac{100-400\cdot 0.2}{4}=5$$

$$P_{400}(70{,}100)=\phi(5)-\phi(-2{,}5)=\phi(5)+\phi(2{,}5)=0{,}5+0{,}49=0{,}99$$

Yana xar birida A xodisaning ruy berishi extimoli p ga teng bulgan ($0<p<1$) n ta erkli sinash utkazilmokda deb xisoblaylik . SHunday sinovlarda m/n nisbiy chastotaning uzgarmas r extimoldan chetlanishi oldindan berilgan $\varepsilon>0$ dan katta bulmaslik extimolini topish masalasini kuyaylik.

Bu extimollikni $\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)$ bilan belgilaymiz.

Bu extimollik

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \qquad (4)$$

formula bilan xisoblanadi.

4-misol: Xodisaning 600 ta erkli sinovlarning xar birida ro'y berish extimoli 0,7 ga teng. Xodisa ro'y berishi nisbiy chastotasining uning oldindan ma'lum bo'lgan extimolidan chetlaninishi absolyut kattaligi bo'yicha 0,03 dan ortiq bo'lmaslik extimolini toping.

Echilishi: Masala shartiga ko'ra, n=600; p=0,7; q=1-0,7=0,3; ε=0,03.

$\mathrm{P}\left(\left|\frac{m}{600}-0{,}7\right|\le 0{,}03\right)$ extimollikni topish lozim. (4) formulaga asosan

$$P\left(\left| \frac{m}{600} - 0{,}7 \right| \leq 0{,}03 \right) \approx 2\Phi\left(0{,}03 \cdot \sqrt{\frac{600}{0{,}7 \cdot 0{,}3}} \right) = 2\Phi(1{,}60) = 2 \cdot 0{,}445 = 0{,}89.$$

Izlanayotgan extimollik 0,89 ga teng ekan.

n ta boglikmas sinovlar seriyasida A xodisaning ruy berishining eng katta extimollik soni m_0 ushbu

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \qquad (5)$$

formula yordamida topiladi.

5-misol: Korxonada ishlab chiqarilayotgan maxsulotlar ichida oliy navli maxsulotlar 31% ni tashkil etadi. Konveerdan xozirgina chiqqan maxsulotlardan 75 tasi ixtiyoriy ravishda tanlab olindi. SHu tasodifan olingan maxsulotlar ichida ko'pi bilan nechta oliy navli maxsulot bo'lishi mumkinligini aniqlang.

Echilishi: Masala shartiga asosan, n=75; p=0,31; q=1-0,31=0,69.
(5) formulaga asosan,

$$75 \cdot 0{,}31 - 0{,}69 \leq m_0 \leq 75 \cdot 0{,}31 + 0{,}31, \quad 22{,}56 \leq m_0 \leq 23{,}56.$$

Bu tengsizliklardan $m_0 = 23$ deyishimiz mumkin.

Puasson formulasi.

Yuqorida biz, Bernulli sxemasi buyicha sinashlardagi $P_n(m)$ extimollikni xisoblash uchun yetarlicha katta n larda Laplasning lokal limit teoremasi deb ataluvchi teoremadan foydalanishimiz mumkinligini aytdik. Biroq, teoremada aytilgan p, q lardan birortasi yetarlicha kichik sonni tashkil etganda (masalan, p<0,01 bo'lganda) bu formula yordamida topilgan $P_n(m)$ kattalikning aniqligi juda pasayib ketadi va shu munosabat bilan bunday vaziyatlarda Puasson teoremasi deb ataluvchi ushbu teoremadan foydalaniladi.

Teorema: Agar n ta erkli sinashlarning xar birida A xodisaning ruy berish extimoli r shunday sinovlarning soniga bog'liq bo'lib, $n \to \infty$ da $p \to 0$ bo'lgani xolda, $n \cdot p = \lambda = const.$ bulsa, u xolda shu n ta sinashlarda A xodisaning rosa m marta ruy berish extimoli $R_n(m)$ uchun ushbu munosabat o'rinli:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}. \qquad (6)$$

6-misol: Do'konga fabrikadan 500 dona sifatli maxsulot jo'natildi. Maxsulot sifatining yo'lda buzilishi extimoli xar bir maxsulot uchun 0,002 ga teng. Do'konga 3 ta sifatsiz maxsulot yetib kelishi extimolini toping.

Echilishi: Masala shartlaridan Puasson formulasidan foydalanish lozimligini ko'rsatmoqda. SHartga asosan, n=500; p=0,02; t=3. SHularga ko'ra λ=500·0,002=1. Izlanayotgan extimollik

$$P_{500}(3) = \frac{1}{3!} \cdot e^{-1} \approx 0{,}06.$$

Agar tasodifiy mikdor kabul kilishi mumkin bulgan kiymatlar chekli yoki sanokli bulsa, biz bu tasodifiy mikdorni diskret tasodifiy mikdor deymiz. 1-, 2- misollarimizdagi tasodifiy mikdorlar diskret tasodifiy miqdorlardir.

Uzluksiz tasodifiy mikdor deb chekli yoki cheksiz oralikdagi barcha kiymatlarni kabul kilishi mumkin bulgan tasodifiy mikdorga aytiladi.

Xar doim tasodifiy mikdor xakida suz ketganda bu mikdorning ma'lum bir kattalikni ma'lum bir extimollik bilan kabul kilishini nazarda tutamiz.

Kuyida diskret tasodifiy mikdorlar bilan boglik ba'zi tushunchalarni karab chikamiz.

Aytaylik X tasodifiy mikdor $x_1,\ldots,x_k,\ \ldots$ − kiymatlarni mos ravishda $r_1,\ldots,r_k,\ldots$ extimolliklar bilan kabul kilsin. X ning kabul kilishi mumkin bulgan kiymatlar va shu kiymatlarni kabul kilish extimolligi orasidagi funktsional boglanish X tasodifiy mikdorning taksimot konuni deyiladi.

Taksimot konunini jadval kurinishda

X	x_1	x_2	...	...	x_k	...
R	p_1	r_2	...	...	r_k	...

kabi tasvirlash mumkin .

Taksimot konuni grafik usulda, shuningdek $p_k = f(x_k)$ kabi analitik kurinishda xam tasvirlanishi mumkin.

Bunda $p_1 + \ldots + p_k + \ldots = 1$ deb xisoblaymiz.

Diskret tasodifiy mikdorning matematik kutilmasi.

Ushbu

X	x_1	...	x_k	...	x_n
$P\ (x{=}x_k)$	r_1	...	r_k	...	r_n

taksimot konuni bilan berilgan X tasodifiy mikdorni kuraylik.

Ta’rif: X tasodifiy mikdorning matematik kutilmasi deb uning barcha kabul kilishi mumkin bulgan kiymatlarini shu kiymatlar extimolliklariga kupaytmalarining yigindisiga aytiladi va uni M[X] yoki m_x kabi belgilanadi:

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, \qquad (1)$$

bunda $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

Agar X ning kiymatlari cheksiz ketma-ketlikni tashkil etsa,

$$M[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n + \ldots,$$

katorni karaymiz. Bunda, yakinlashuvchi buladigan katorlarnigina karaymiz .

Misol: 10 000 dona lotereya biletlari chikarilgan bulib, ular ichida 1 000 000 sumlik 1 ta yutuk, 100 000 sumlik 10 ta yutuk va 1000 sumlik 100 ta yutuk kuyilgan. X tasodifiy yutuk (tasodifiy mikdor) ning taksimot konunini va matematik kutilmasini 1 dona lotereya bileti egasi uchun keltirib chikaring.

Echilishi: Bilet egasi uzining 1 dona bileti bilan 0, 1000, 100000, 1 000 000 sumlik yutuklar egasi bulishi mumkin. Bu yutuklarga ega bulishning extimolliklari mos ravishda 0,9889, 0,01, 0,001, 0,0001 larga teng . SHunga kura taksimot konuni

X	0	1000	100 000	1 000 000
P	0,9889	0,01	0,001	0,0001

jadval bilan berilishi mumkin .

Bu yerda X - tasodifiy yutukning matematik kutilmasi

$$M(X) = 0\cdot 0{,}9889+1000\cdot 0{,}01+100000\cdot 0{,}001+1000000\cdot 0.0001=210.$$

ni tashkil kiladi. SHunga asosan M(X)=210 sumni 1 ta lotereya biletining adolatli baxosi deyish mumkin.

Matematik kutilma sodda til bilan aytganda tasodifiy mikdor urta xisobda kanday kiymat kabul kilishi lozimligini kursatuvchi kattalikdir.

Masalan, taxlil kilingan shu lotereya xakidagi misolda lotereya egasi millionlab sumlarni yoki umuman yutuksiz kolishini emas, balki uzining lotereyasi bilan 210 sumni kutishi aklga muvofikrok buladi. (Albatta, lotereya soxibini bunga ishontirish oson ish emas). Negaki, bu uyindan kutilayotgan natija matematik nuktai–nazardan 210 sumni tashkil etadi. Buni matematik kutilma kursatib turibdi.

Teorema: Sinovlar soni yetarlicha katta bulganda diskret X tasodifiy mikdorning matematik kutilmasi uning barcha kiymatlarining urta arifmetigiga takriban tengdir.

Isboti: Aytaylik, n ta sinovlar utkazilib, ularda X mikdor m_1 marta x_1 kiymatni, m_2 marta x_2 kiymatni va xokazo m_k marta x_k kiymatni kabul kilsin. SHunday kilib, $m_1+m_2+...+m_k=n$.

U xolda X tomonidan kabul kilingan kiymatlarning urta arifmetigi

$$X_{ypma}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k}{n},$$

yoki

$$X_{ypma}=x_1\cdot\frac{m_1}{n}+x_2\cdot\frac{m_2}{n}+...+x_k\cdot\frac{m_k}{n}$$

$\frac{m_i}{n},\quad i=\overline{1,k}$ kattalik X mikdor x_i kiymatni kabul kilishining nisbiy chastotasidan iborat ekanidan

$$X_{ypma}=x_1\cdot W_1+x_2\cdot W_2+...+x_k\cdot W_k$$

deb xam yozish mumkin. Birok, sinovlar soni yetarlicha katta bulganda

$W_i\approx p_i,\quad i=\overline{1,k}$ bulganidan

$$X_{ypma}\approx x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+...+x_k\cdot p_k$$

yoki $X_{urta}\approx M(x)$ ga kelamiz.

Diskret tasodifiy mikdorning matematik kutilmasining eng sodda xossalarini keltiramiz.

1. Uzgarmas S kattalikning matematik kutilmasi shu kattalikka teng.

Isboti: S kattalikni r=1 extimollik bilan S ni kabul kiluvchi diskret tasodifiy mikdor sifatida karash mumkin. SHunga kura

$$M(S)=S\cdot 1=S.$$

2. O'zgarmas kupaytuvchini matematik kutilma belgisidan tashkariga chikarish mumkin, ya'ni

$$M(c\cdot X)=c\cdot M(X).$$

Isboti:

$$M(cX)=sx_1r_1+\ldots+sx_kr_k=s(x_1r_1+\ldots+x_kr_k)=cM(X).$$

Matematik kutilma bilan bog'liq bo'lgan ushbu muxim teoremani oldinrok isbotlangan kushish teoremasining natijasi sifatida karash mumkin.

Teorema: n ta erkli sinashda A xodisa ruy berishlari sonining matematik kutilishi sinashlar sonini xar bir sinashda xodisaning ruy berish extimoliga kupaytirilganiga teng:

$$M(X)=np. \qquad (2)$$

Isboti: X tasodifiy mikdor - n ta erkli sinashda A xodisaning ro'y berishlari soni bulsin. U xolda X ni n ta $X_1+\ldots+X_n$ tasodifiy mikdorlar yigindisi sifatida karash mumkin. Bunda, X_i – i-sinovda A xodisaning ruy berish soni. U xolda

$$M(X)=M(X_1+\ldots+X_n)=M(X_1)+\ldots+M(X_n).$$

Xodisaning bitta sinovda ruy berish sonining matematik kutilmasi shu xodisaning extimoliga teng. SHunga kura, $M(X_1)=r,\ldots,M(X_n)=R$. Bulardan $M(X)=\underbrace{p+\ldots+p}_{n\ \text{та}}=n\cdot p$.

Diskret tasodifiy mikdorning dispersiyasi (sochilishi).

Aytaylik, X tasodifiy mikdor berilgan bo'lib, $M(X)$ uning matematik kutilishi bulsin. $X-M(X)$ ayirma tasodifiy mikdorni karaymiz . Bu ayirmani chetlanish deb aytamiz .

X	x_1	x_2	. . .	x_k
R	ρ_1	ρ_2	. . .	ρ_k

jadval X ning taksimot konunini ifodalasin.

$X-M(X)$ tasodifiy mikdor xam x_i ni r_i extimollik bilan kabul kiladi , negaki M(X) uzgarmas kattalikdir. SHunga kura X–M(X) ning taksimot konuni

$X-M(X)$	$x_1-M(X)$	. . .	$x_k-M(X)$
P	p_1	. . .	p_k

dan iborat buladi.

Teorema: CHetlanishning matematik kutilmasi 0 ga teng:

$$M(X-M(X))=0.$$

Isboti: Matematik kutilmaning xossalaridan foydalanib kuyidagilarni yozish mumkin.

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

Diskret X tasodifiy mikdorning dispersiyasi deb tasodifiy mikdorni uzining matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi:

$$D(X)=M[X-M(X)]^2 . \qquad (3)$$

Dispersiya - taksimotda tasodifiy mikdorning urtacha kiymatga nisbatan kay darajada tarkok ekanligini kursatuvchi kattalikdir.

Dispersiya kanchalik katta bulsa tarkoklik shuncha katta buladi. Masalan, uzgarmas kattalikning dispersiyasi nolga teng.

Biz yukorida kurgan lotereyalar xakidagi masalada dispersiya ancha katta bulib,

D(X)=109965899,51 ga teng.

Tasodifiy mikdor dispersiyasi kuyidagi xossalarga ega.

1. S uzgarmas mikdorning dispersiyasi 0 ga teng.

$$D(S)=0.$$

2. Uzgarmas kupaytuvchini kvadratga kutarib, dispersiya belgisidan tashkariga chikarish mumkin.

$$D(SX)=S^2\cdot D(X).$$

Ushbu teorema urinli.

Teorema: Xar birida A xodisaning ruy berish extimoli r ga teng bulgan n ta erkli sinashda bu xodisa ruy berishlari sonining dispersiyasi

$$D(X)=npq=np(1-p) \qquad (4)$$

ga teng.

Dispersiyani xisoblash uchun (3) formuladan foydalanish biroz noqulay, shuning uchun bu formulani soddalashtiramiz.

$$D(X)=M[X-M(X)]^2=M[X^2-2\cdot X\cdot M(X)+M^2(X)]=$$
$$=M(X^2)-2\cdot M(X)\cdot M(X)+M^2(X)=M(X^2)-2\cdot M^2(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$$

Ya'ni,

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X). \qquad (5)$$

Biz tenglikni isbotlash davomida $M(X)$, $M(X^2)$, $M^2(X)$ kattaliklarning o'zgarmas kattaliklar ekanligidan va matematik kutilmaning asosiy xossalaridan foydalandik. Xosil qilingan bu formula xisoblashlarda birmuncha qulaydir.

X tasodifiy mikdorning urtacha kvadratik chetlanishi deb, dispersiyadan olingan kvadrat ildizga aytiladi.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \qquad (6)$$

Tasodifiy mikdorning urtacha kvadratik chetlanishi taksimotda xosil buladigan sonlarning urta kiymatdan kay darajaga fark kilishini kursatuvchi kattalikdir.

Masalan, lotereya xakidagi masalada urtacha kvadratik chetlanish xam yetarlicha kattaligini kuramiz.

2-misol: Taqsimot qonuni

x_k	2	3	4
p_k	0,5	0,4	0,1

ko'rinishida berilgan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi va o'rta kvadratik chetlanishi xisoblansin.

Echilishi:

(1) formulaga ko'ra $M(X)=x_1r_1+x_2r_2+x_3r_3=2\cdot 0,5+3\cdot 0,4+4\cdot 0,1=2,6$.

(5) formulaga ko'ra

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=x_1^2\cdot p_1+x_2^2\cdot p_2+x_3^3\cdot p_3-M^2(X)=2^2\cdot 0,5+3^2\cdot 0,4++4^2\cdot 0,1-2,6^2=2+3,6+1,6-6,76=0,44$.

(6) formuladan foydalanib o'rtacha kvadratik chetlanishni topamiz:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,44}\approx 0,66.$$

Ilgari aytib utganimizdek X tasodifiy mikdor, agar uning kabul kiladigan kiymatlari biror (a, b) cheksiz yoki chekli oralikni butunlay tuldirsa, uzluksiz tasodifiy mikdor deyiladi. Bunda xar bir sinovda X tasodifiy mikdor anik bir $x\in(a,b)$ kiymatni kabul kiladi deb xisoblanadi.

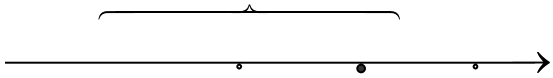
Ravshanki, uzluksiz tasodifiy mikdorning taksimot konunini diskret tasodifiy mikdor uchun aniklangan usullarda aniklab bulmaydi. SHu maksadda taksimotning integral funktsiyasi kiritiladi.

Aytaylik x xakikiy son bulsin. X ning x dan kichik kiymatlarni kabul kilishi xodisani karaylik. Bu xodisaning, ya'ni X < x bulish xodisasining extimolini F(x) bilan belgilaylik. x ning uzgarishi bilan F(x) xam uzgaradi, ya'ni u x ning funktsiyasidir.

Taksimotning integral funktsiyasi deb, xar bir x kiymat uchun X tasodifiy mikdorning x dan kichik kiymat kabul kilish extimolini aniklovchi F(x) funktsiyaga aytiladi, ya'ni

$$F(x)=R(X<x). \qquad (1)$$

Bu tenglikning geometrik talkini kuyidagicha:



0 X x

F(x) funktsiya tasodifiy mikdorning son ukida x nuktadan chapda yotuvchi nukta bilan tasvirlanadigan kiymat kabul kilish extimolidir.

Kiritilgan yangi tushunchalar uzluksiz tasodifiy mikdorning ta'rifini aniklashtirish imkonini beradi.

Tasodiy mikdor taksimotining integral funktsiyasi uzluksiz differentsiallanuvchi bulsa, tasodifiy mikdorni uzluksiz deyiladi.

Integral funktsiya kuyidagi xossalarga ega.

1-xossa: $0 \leq F(x) \leq 1$.

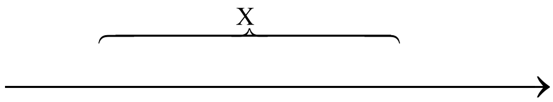
Isboti: F(**x**) ning extimoliy ta'rifidan kelib chikadi.

2-xossa: F(**x**) kamaymaydigan funktsiyadir, ya'ni agar $x_2 > x_1$ bulsa, u xolda

$F(x_2) \leq F(x_1)$.

Isboti.

X mikdor x_2 dan kichik kiymat kabul kilish xodisasini karaylik.



0 x_1 x_2 x_3

Bu xodisani ikkita birgalikda bulmagan, $X < x_1$ buladigan va $x_1 \leq X < x_2$ buladigan xodisalar yigindisi sifatida karash mumkin. U xolda extimolliklarni kushish teoremasiga asosan

$$R(X<x_2)=R(X<x_1)+R(x_1 \leq X<x_2)$$

tenglik urinli. Bundan

$$R(x_1 \leq X<x_2)=R(X<x_2)-R(X<x_1)$$

yoki ta'rifga asosan

$$R(x_1 \leq X<x_2)=F(x_2)-F(x_1).$$

CHap tomondagi ifoda extimollikni ifodalagani uchun noldan kichik emas. SHunga kura

$F(x_2)-F(x_1) \geq 0$, ya'ni $F(x_2) \geq F(x_1)$.

Isbot davomidagi muloxazalardan kuyidagi natijalarga kelamiz.

1-natija: Tasodifiy mikdorning (a,b) intervalda yotuvchi kiymatni kabul kilish extimoli integral funktsiyaning shu intervaldagi orttirmasiga teng:

$$R\ (a \leq X<b)=F(b)-F(a). \qquad (2)$$

2-natija: X tasodifiy mikdorning tayin bitta x_I kiymat kabul kilish extimoli nolga teng.

Isboti: 1-natijada aytilgan interval asosida $a=x_1$, $b=x_1+\Delta x$ desak (2) tenglik quyidagi ko'rinishga keladi:

$$R(x_1 \leq X < x_1+\Delta x)=F(x_1+\Delta x)-F(x_1).$$

Δx ni 0 ga intiltiramiz. F(x) uzluksiz funktsiya bulganidan $\Delta x \to 0$ da $[F(x_1+\Delta x)-F(x_1)] \to 0$. Bundan $R(X=x_1)=0$ ga kelamiz.

3-xossa: Agar tasodifiy mikdorning mumkin bulgan kiymatlari (a,b) intervalga tegishli bulsa, u xolda

1. $x \leq a$ da $F(x)=0$. 2. $x \geq b$ da $F(x)=1$.

Navbatda taksimotning differentsial funktsiyasi - zichlik funktsiya bilan tanishamiz.

Taksimotning $f(x)$ differentsial funktsiyasi deb, integral funktsiya F(x) dan olingan 1-tartibli $f(x)=F'(x)$ xosilaga aytiladi.

Differentsial funktsiyaning moxiyatini ushbu teorema orkali ochib beriladi.

Teorema: X tasodifiy mikdorning (a,b) intervalga tegishli kiymat kabul kilish extimoli differentsial funktsiyadan *a* dan *b* gacha olingan anik integralga teng:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3)$$

Isboti: Avval isbotlangan

R ($a \le X < b$)=F(b)-F(a).

tenglikdan foydalanamiz. Nьyuton-Leybnits formulasiga asosan

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

R($a \le X < b$)=R($a < X < b$) ni xisobga olib

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

formulani xosil kilamiz. Teorema isbotlandi.

f(x) differentsial funktsiyani bilgan xolda integral funktsiyani kuyidagi formula buyicha topish mumkin:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx \qquad (4)$$

Xakikatan xam, *F(x)* funktsiya ta'rifi *F(x)=R(X<x)* ni esga olib, undagi (X<*x*) tengsizlikni -∞<X<*x* kurinishda yozish mumkin.

U xolda oldingi teoremada *a*=-∞, *b*=*x* decak

$$P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

ga kelamiz. Bundan F(x)=R(-∞<X< x) ni xisobga olib,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

ga kelamiz.

Differentsial funktsiya kuyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Differentsial funktsiya manfiy emas, ya'ni

$$f(x) \ge 0.$$

Isbot: Integral funktsiya kamaymaydigan funktsiya bulganligidan uning xosilasi $F'(x) = f(x)$ manfiy emas.

2-xossa. Differentsial funktsiyadan -∞ dan ∞ gacha olingan xosmas integral 1 ga teng, ya'ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad (5)$$

Isboti: Aytilgan integral, X tasodifiy mikdorning -∞ dan ∞ gacha oralikdagi kiymatlarni kabul kilishini ifodalaydi. Bunday xodisa mukarrar bulib, uning extimoli 1 ga teng.

Uzluksiz tasodifiy mikdorning sonli xarakteristikalari kuyidagicha aniklanadi.

Mumkin bulgan kiymatlari [*a,b*] kesmaga tegishli bulgan X uzluksiz tasodifiy mikdorning matematik kutilishi deb

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx \qquad (6)$$

anik integralga aytiladi.

Uning dispersiyasi

$$D(X) = \int_a^b [x - M(x)]^2 \cdot f(x)dx \qquad (7)$$

tenglik bilan aniklanadi.

M. T.

Dispersiya uchun

$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X)$ formula o'rinli bo'lishini isbotlang.

Uzluksiz tasodifiy mikdorning urtacha kvadratik chetlanishi deb

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (8)$$

kattalikka aytiladi.

Misol: Uzluksiz tasodifiy miqdor

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{агар} \quad x \le 0 \\ x^2 & \text{агар} \quad 0 \prec x \le 1 \\ 1 & \text{агар} \quad x \succ 1 \end{cases}$$

integral funktsiya bilan berilgan. $f(x)$ - zichlik funktsiyani, $M(X)$ -matematik kutilmani, $D(X)$ - dispersiyani, $\sigma(X)$ - o'rta kvadratik chetlanishni toping.

Echilishi: $f(x) = F'(x)$ tenglikka asosan

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{агар} \quad x \le 0 \\ 2x & \text{агар} \quad 0 \prec x \le 1 \\ 1 & \text{агар} \quad x \succ 1 \end{cases}$$

differentsial funktsiyani topib olamiz.

Matematik kutilmani (6) formuladan foydalanib xisoblaymiz:

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2xdx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Dispersiyani xisoblash uchun ushbu formuladan foydalanamiz:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(x)]^2 \cdot f(x)dx = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X).$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx - M^2(X) = \int_0^1 x^2 \cdot 2xdx - M^2(X) = 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 - \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

$\sigma(X)$ - o'rta kvadratik chetlanishni (8) formulaga asosan xisoblaymiz.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

O’z-o’zini tekshirish uchun savollar:

1. Uzluksiz tasodifiy mikdorni ta’riflang.
2. Uzluksiz tasodifiy mikdorning integral funktsiyasini aniqlovchi tenglikni yozib, uning xossalarini ayting.
3. Uzluksiz tasodifiy mikdorning zichlik funktsiyani yozib, uning xossalarini ayting.
4. Uzluksiz tasodifiy mikdorning matematik kutilmasi, dispersiyasi, urtacha kvadratik chetlanishi formulalarini yozing.

17-18-Ma’ruza
Matematik statistika elementlari

Bosh tuplam. Tanlanma va uni xosil kilish usullari. Matematik statistikaning asosiy masalalari. Variatsion kator. Empirik taksimot funktsiyasi.

O’quv moduli birliklari:

1. Matematik statistikaning asosiy masalasi.
2. Bosh to’plam. Tanlanma to’plash va uni xosil kilish.
3. Variatsion qator. Empirik taqsimot funktsiyasi.

Aniqlashtirilgan o’quv maqsadlari.

Talabalar ushbu mavzuni to’la o’zlashtirgach:

1. Matematik statistikani asosiy masalasini biladi.
2. Bosh va tanlanma to’plash va ularni xosil qilishni biladi.
3. Variatsion qatorni va empirik taqsimot funktsiyasini biladi.

Matematik statistikaning asosiy masalalari.

Statistika tabiatda va jamiyatda kechadigan ommaviy xodisalarni urganadi. Matematik statistikaning vazifasi statistik ma’lumotlarni tuplash ularni taxlil kilish va shu asosda ba’zi bir xulosalar chikarishdan iboratdir.

Kuyidagilarni matematik statistikaning asosiy masalalari deb xisoblash mumkin.

1. Statistik ma’lumotlarga asoslanib tasodifiy mikdor yoki tasodifiy mikdorlar sistemasining taksimot konunini aniklash.
2. Gipotezalarning xakikatga yakinligini tekshirish masalasi.
3. Taksimotning noma’lum parametrlarini izlash masalasi.

Matematik statistika urganadigan masalalar albatta sanalgan masalalar bilan tugamaydi.

Bosh tuplam. Tanlanma tuplam va uni xosil kilish usullari.

Aytaylik kandaydir bir jinsli ob’ektlar tuplami shu tuplam elementlarining biron-bir sifat yoki son belgiga ega bulish yoki ega bulmaslik nuktai-nazaridan tekshirilayotgan bulsin. Kupgina xollarda bu ob’ektlarning xammasini tekshirib chikishning imkoni bulmaydi. SHuning uchun ma’lum bir sondagi ob’ektlar tekshirish uchun ajratib olinadi.

Tanlanma tuplam yoki oddiy kilib tanlanma deb tasodifiy ravishda ajratib olingan ob’ektlar tuplamiga aytiladi.

Bosh tuplam deb tanlanma ajratiladigan ob’ektlar tuplamiga aytiladi.

Bosh tuplam yoki tanlanma tuplamning *xajmi* deganda bu tuplamlardagi ob’ektlar (elementlar) sonini tushuniladi.

Misol: Tekshirish uchun 1000 ta detaldan 100 tasini ajratib olingan bulsin. Bu yerda bosh tuplam 1000 ta detaldan iborat bulib, tanlanma tuplam 100 ta detaldan iborat. Ularning xajmlari mos ravishda N=1000 va n=100 ni tashkil etadi. SHu urinda bosh tuplamning xususiyatlari xakida tanlanma tuplamga nisbatan baxo berilishini nazarda tutilsa, tanlanma tuplamni tuzish usuli muxim axamiyatga ega bulishini kurish kiyin emas.

Agar tanlanma tuplam bosh tuplamni deyarli barcha xususiyatlarini uzida saklasa, u xolda bunday tanlanma vakolatli tanlanma deyiladi.

Variatsion kator. Empirik taksimot funktsiyasi.

Aytaylik, bosh tuplamdan tanlanma olinib, bunda x_1 kiymat n_1 marta x_2 kiymat n_2 marta va xokazo x_i kiymat n_i marta kuzatilgan bulsin.

$$\underbrace{\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{n_1\ \text{марта}},\ \underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{n_2\ \text{марта}},\ \ldots\ \underbrace{x_i,x_i\ldots,x_i}_{n_i\ \text{марта}},\ \ldots,\ \underbrace{x_k,x_k\ldots,x_k}_{n_k\ \text{марта}}}_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n\ \text{та синов}}$$

SHu vaziyatda kuzatilgan x_i kiymatlar *variantalar* deyiladi.

$x_1, x_2,\ldots,x_k$ larni usib borish tartibida $x_1,x_2,\ldots,x_k$ kurinishda yozib chiksak, xosil bulgan kator *variatsion* kator deyiladi.

n_i songa x_i kiymatning *chastotasi* deyiladi.

n_i chastotaning n tanlanma xajmiga nisbati $W_i = \frac{n_i}{n}$ ga x_i kiymatning nisbiy chastotasi deyiladi.

Bu yerda kuyidagilar urinli:

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i = \frac{1}{n}\cdot n = 1$$

Ya'ni, nisbiy chastotalar yigindisi 1 ga teng.

Bu yerda $x_1,\ldots, x_k$ larni X tasodifiy mikdorning kabul kilgan kiymatlari sifatida karashimiz mumkin.

Aytaylik, X diskret tasodifiy mikdor bulsin.

Ushbu

X	x_1	...	x_k
W	$W_1 = \frac{n_1}{n}$	...	$W_k = \frac{n_k}{n}$

jadvalga X ning empirik yoki statistik taksimoti deyiladi.

Kupincha X ning empirik yoki statistik taksimoti deganda

X	x_1	...	x_k
n_x	n_1	...	n_k

jadvalni xam nazarda tutiladi.

X tasodifiy mikdor uzluksiz bulganda uning statistik taksimoti

I	(ξ_0, ξ_1)	(ξ_1,ξ_2)	...	(ξ_{k-1}, ξ_k)

W	W_1	W_2	...	W_k

jadval yordamida beriladi. Bunda, W_i - X ning (ξ_{i-1},ξ_i) intervaldagi kiymatlarni kabul kilish chastotasi.

X tasodifiy mikdorning x dan kichik kiymatlarni kabul kilishi, ya'ni X<x bo'lish xodisasini karaylik. n marta kuzatishlar utkazilganda X ning x dan kichik kiymatlar kabul kilishi xodisasining chastotasini n_x bilan belgilaylik.

U xolda X<x xodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ ga teng. x uzgarganda bu nisbiy chastota xam uzgaradi, ya'ni nisbiy chastota x ning funktsiyasidir. Bu funktsiya tajriba yuli bilan aniklanadi va shunga kura empirik funktsiya deyiladi.

Taksimotning empirik funktsiyasi (tanlanmaning taksimot funktsiyasi) deb xar bir x kiymat uchun X < x xodisaning nisbiy chastotasini aniklaydigan $F^*(x)$ funktsiyaga aytiladi:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bu yerda, n – tanlanma xajmi, n_x - x dan kichik variantalar soni.

Empirik funktsiyaning asosiy xossalari:

1. $0\le F^*(x)\le 1$.
2. $F^*(x)$ – kamaymaydigan funktsiyadir.
3. Agar x_1 eng kichik varianta, x_k eng katta varianta bulsa, u xolda

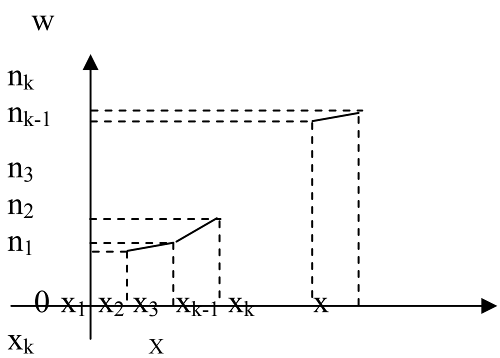
$x<x_1$ bulganda $F^*(x)=0$, $x<x_k$ bulganda $F^*(x)=1$.

Tanlanma xajmi n yetarlicha katta bulganda Bernulli teoremasiga kura $F^*(x)$ empirik funktsiya F(x) integral funktsiyaga extimol buyicha yakinlashadi.

Poligon va gistogramma.

X tasodifiy mikdor diskret bulgan xolda uning statistik taksimoti poligonlar yordamida berilishi mumkin.

CHastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1,n_1),...,(x_k,n_k)$ nuktalarni tutashtiradigan sinik chiziklardan iborat figuraga aytamiz.



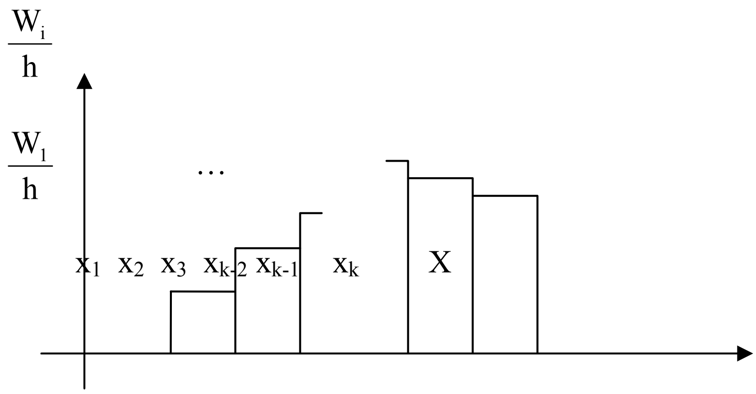
SHuningdek $(x_1,w_1),..., (x_k,w_k)$ nuktalarni birlashtirib nisbiy chastotalar poligonini qurish mumkin.

X tasodifiy mikdor uzluksiz bulgan xolda statistik taksimot uchun gistogramma quriladi.

Bu xolda barcha kuzatilgan nuktalar yotadigan intervalni uzunligi h bulgan bir necha kichik kismiy intervallarga bulib chikiladi va i-intervalga tushgan variantalarning chastotalar yigindisi n_i topiladi.

CHastotalar gistogrammasi deb, asoslari h-uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga teng bulgan tugri turtburchaklardan iborat pogonaviy figuraga aytiladi. i - kismiy tugri turtburchakning yuzi $h\frac{n_i}{h}=n_i$, i-intervalga tushgan variantalarning chastotalari yigindisiga teng. Gistogrammaning yuzi barcha chastotalar yigindisiga, ya'ni tanlanma xajmi n ga teng .

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{h}$ nisbatga teng bulgan tugri turtburchaklardan iborat pogonasimon figuraga aytiladi. i - kismiy tugri turtburchakning yuzi $h\cdot\frac{W_i}{h}=W_i$ ga, ya'ni i-intervalga tushgan variantalarning nisbiy chastotalari yigindisiga teng. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yigindisiga ya'ni, birga teng.



Taksimot parametrlarining statistik baxolari.

Biz kuzatish natijalariga asoslanib statistik taksimotning empirik funktsiyasini, poligon va gistogrammalarni tuzishimiz mumkin.

Bunda navbatdagi masala bulib taksimot konunlari va parametrlarini aniklash urtaga chikadi. SHu bilan birga tanlanma tuplam elementlari, ya'ni sinovlar soni kancha kup bulsa, biz kuyilgan masalani shunchalik katta aniklikda xal etishimiz mumkin buladi.

Lekin, amaliyotda ma'lum bir ob'ektiv sabablarga kura cheklangan mikdordagi sinovlar, ya'ni statistik material bilan ish kurishga tugri keladi. SHu urinda mavjud statistik materialdan imkon kadar unumli foydalanish zarurati paydo buladi. Amaliyotda kupincha urganilayotgan jarayonning fizik tabiatidan kelib chikkan xolda taksimot konuni xakida oldindan taxminan bulsada suz yuritish mumkin bulib, shu taksimotning parametrlarini aniklash lozim buladi. Bu parametrlar matematik kutilma, dispersiya va xokazolardan iborat.

Biz kuyida cheklangan statistik material asosida taksimot konunlarini, ular bilan boglik bulgan noma'lum parametrlarni topish masalalari bilan tanishamiz.

SHuni aloxida ta'kidlash lozimki, izlanayotgan parametrning cheklangan sondagi sinovlar yordamida xosil kilingan xar kanday kiymatining uzi tasodifiylik elementlarini uz ichiga oladi. Izlanayotgan parametrning mana shunday takribiy, tasodifiy kiymatini biz shu parametrning *statistik baxosi* deymiz.

Masalan, tasodifiy mikdorning n ta erkli sinovlardagi matematik kutilmasining baxosi sifatida urta kiymatni olishimiz mumkin, negaki bu kattalik yetarlicha katta n larda matematik kutilmaga extimol buyicha yakinlashadi.

Boshka tomondan karaganda noma’lum parametrning statistik baxosini kuzatish natijalarining funktsiyasi sifatida xam karash mumkin. SHunga kura nazariy taksimotning noma’lum parametrining baxosini topish uchun, kuzatish natijalari buyicha shunday funktsiyani tuzish kerak buladiki, bu funktsiyaning kiymatlari baxolanayotgan parametrning kiymatlarini bersin.

Kuyida shunday baxolardan eng muximlari bulgan tanlanma urta kiymat va tanlanma dispersiyalar bilan tanishamiz.

Tanlanma urta kiymat.

Agar xajmi n ga teng bulgan tanlanmaning son kiymatlari $x_1, x_2, ..., x_n$ bulib, ular xar xil bulsalar, u xolda tanlanma urta kiymat sifatida

$$\bar{x}_T = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

kattalikni olinadi.

Agar xajmi *n* ga teng bulgan tanlanma uchun $x_1, x_2, ..., x_k$ kiymatlar mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalar bilan olingan bulsa, u xolda

$$\bar{x}_T = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{n}$$

yoki

$$\overline{x}_T = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}$$

tengliklar yordamida aniklanadi. Bu yerda albatta $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Tanlanma dispersiya.

Yukoridagi kabi *n* xajmli $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma olinganda, bu kiymatlar xar xil bulganda tanlanma dispersiya sifatida

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_T)^2}{n}$$

kattalikni olinadi.

Agar n xajmli tanlanmada $x_1, x_2, ..., x_k$ kiymatlar mos ravishda $n_1, n_2, ..., n_k$ chastotalar bilan katnashgan bulsa, u xolda

$$D_T = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x}_T)^2}{n}$$

tenglikdan foydalanish mumkin.

Baxoning anikligi, ishonchlilik extimoli, ishonchlilik intervali.

Biz ilgari statistik parametrlarni funktsiyalar sifatida karash mumkinligi xakida gapirgan edik. SHu masalaga oydinlik kiritaylik.

Aytaylik X tasodifiy mikdor berilgan bulib, uning taksimot konuni noma'lum a statistik parametrga ega bulsin. X tasodifiy mikdor xar birida ma'lum bir kiymatlarni kabul kilgan n ta erkli sinovlar natijalariga kura a parametrning munosib baxosini topish masalasini kuraylik.

Tasodifiy mikdorning kuzatilgan kiymatlarini

$$X_1, X_2, ..., X_n \qquad (1)$$

lar bilan belgilaylik. Bu yerda $X_1, X_2, ..., X_n$ larning xar birini X tasodifiy mikdorning «nusxa»lari sifatida karash mumkin va bunda ulardan xar birining taksimot konuni X niki bilan bir xildir.

a parametrning baxosini $\widetilde{a}$ deb belgilaylik. U xolda (1) statistik material asosida xisoblanadigan xar kanday $\widetilde{a}$ baxo $X_1, X_2, ..., X_n$ larning funktsiyasidan iborat buladi, ya'ni

$$\widetilde{a} = \widetilde{a}(X_1, X_2, ..., X_n)$$

va albatta, bu vaziyatda $\widetilde{a}$ xam tasodifiy mikdordan iborat buladi. $\widetilde{a}$ ning taksimot konuni esa birinchi navbatda X ning taksimot konuniga, shu jumladan a noma'lum parametrga, sungra sinovlar soni n ga boglik buladi.

$\widetilde{a}$ baxoga, u ma'lum ma'noda «sifatli» baxo bulishi uchun bajarilishi lozim bulgan kator talablarni kuyamiz:

Asosli baxo deb sinovlar soni n ortib borganda baxolanayotgan parametrga extimol buyicha yakinlashuvchi baxoga aytamiz.

Biz a parametr urniga uning $\widetilde{a}$ baxosidan foydalanganimizda, mumkin kadar kamayish yoki kupayish tomonga sistematik xatolarga yul kuymasligimiz lozim, ya'ni

$$M(\widetilde{a}) = a$$

bulishi lozim. Biz bunday baxoni **siljimagan baxo** deymiz. Aks xolda $\widetilde{a}$ baxoni **siljigan baxo** deymiz.

SHuningdek biz baxoga uning dispersiyasi mumkin kadar kichik bulishlik talabini kuyamiz. Bunday eng kichik dispersiyaga ega bulgan baxoni biz **effektiv baxo** deymiz.

Baxoning anikligi, ishonchliligi tushunchalarini kiritish maksadida nuktaviy va interval baxo tushunchalarini kiritamiz.

Nuktaviy baxo deb, bitta son bilan aniklanadigan baxoga aytiladi.

Interval baxo deb ikkita son intervalning uchlari bilan aniklanadigan baxoga aytiladi.

Tanlanma xajmi kichik bulganda nuktaviy baxo baxolanyotgan parametrdan ancha fark kilishi va demak, birmuncha sezilarli xatolarga olib kelishi mumkin. Bunday vaziyatlarda interval baxodan foydalanish maksadga muvofik buladi.

Tanlanma ma'lumotlariga asosan $\widetilde{a}$ noma'lum a parametrning baxosi bulgan bulsin Bu xolda $|a-\widetilde{a}|$ ayirmaning kiymati kancha kichik bulsa, $\widetilde{a}$ kattalik a parametrni shunchalik anik baxolashi tabiiy. Boshkacha kilib aytganda $\delta>0$ bulgani xolda $|a-\widetilde{a}|<\delta$ bulsa, va shu vaziyatda δ ni kanchalik kichik tanlash mumkin bulsa, $\widetilde{a}$ baxo shunchalik anik buladi. Ya'ni,

δ son baxoning anikligini ifodalaydi.

Birok, $\widetilde{a}$ baxoning tasodifiy mikdor ekanligi $\widetilde{a}$ ning $|a-\widetilde{a}|<\delta$ tengsizlikni kanoatlantirishi yoki kanoatlantirmasligi xakida gapirish nourin bulishini kursatadi.

SHu munosabat bilan $|a-\widetilde{a}|<\delta$ tengsizlikni urinli bulishi extimoli γ xakida gapirish mumkin. Simvolik kurinishda bu extimollikni

$$P(|a-\widetilde{a}|<\delta)=\gamma$$

kabi yozish mumkin. Bu extimollik **ishonchlilik extimoli** deyiladi.

$|a-\widetilde{a}|<\delta$ tengsizlikni u bilan teng kuchli

$$-\delta<a-\widetilde{a}<\delta \quad \text{yoki} \quad \widetilde{a}-\delta<a<\widetilde{a}+\delta$$

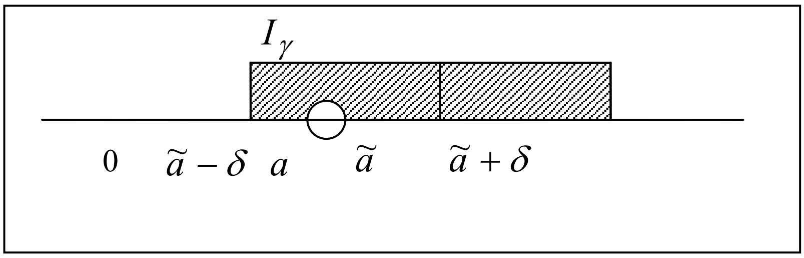
bilan almashtirib yukoridagi extimollikni

$$P[\widetilde{a}-\delta<a<\widetilde{a}+\delta]=\gamma$$

kurinishida yozish mumkin. Oxirgi tenglik ushbu ta'rifni keltirish imkonini beradi.

Ishonchlilik intervali deb noma'lum a parametrni berilgan γ ishonchlilik extimoli bilan koplaydigan $(\widetilde{a}-\delta,\ \widetilde{a}+\delta)$ intervalga aytiladi.

SHu urinda ta'rifda katnashayotgan a kattalik uzgarmas, $\widetilde{a}$ esa tasodifiy mikdor bulganidan ta'rifni a ning $(\widetilde{a}-\delta,\ \widetilde{a}+\delta)$ intervalga tushishi ma'nosida emas, balki shu interval a ni koplab tushishi ma'nosida tushunish kerak. Buni chizmada kuyidagicha tasvirlash mumkin.



Bu yerda, $I_\gamma=(\widetilde{a}-\delta,\ \widetilde{a}+\delta)$.

Kuyida ishonchlilik intervalini topish bilan boglik bir masalani kurib chikamiz.

Aytaylik X tasodifiy mikdor normal taksimlangan va uning urtacha kvadratik chetlanishi σ bulsin. Noma'lum a matematik kutilmani tanlanma urta kiymat $\bar{x}$ orkali baxolash lozim bulsin. SHu a noma'lum parametrni γ ishonchlilik bilan koplaydigan ishonchli intervalni topish masalasini karaylik.

$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning kiymatlarini $X_1, X_2, ..., X_n$ tasodifiy mikdorlar deb, shu tanlanma buyicha $\bar{x}$ tanlanma urta kiymatni esa $\overline{X}$ deb belgilaylik.

Katta sonlar konuniga kura X tasodifiy mikdor normal taksimlangan bulsa, u xolda erkli sinovlarda $\overline{X}$ ning uzgarishi xam normal taksimlangan buladi. U xolda $\overline{X}$ taksimotning parametrlari kuyidagicha buladi:

$$M(\overline{X})=a, \qquad \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Masala shartiga asosan

$$P\left(|\overline{X}-a|<\delta\right)=\gamma$$

bulishini talab kilamiz. Bunda γ - berilgan ishonchlilik. Bizga normal taksimlangan X tasodifiy mikdorning matematik kutilmasi uchun

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}) \qquad (2)$$

formula ma'lum. Bunda Φ - laplas funktsiyasi bo'lib, u ilgari ta'kidlaganimizdek

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

formula yordamida xisoblanadi.

(2) formulada X ni $\overline{X}$ bilan va σ ni $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ bilan almashtirsak

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma})=2\Phi(t)$$

ni xosil kilamiz. Bunda $t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$. Bu tenglikdan $\delta=t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ni topib

$$P(|\overline{X}-a|<t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t)$$

deb yozish mumkin. *R* extimollik γ ga tengligini xisobga olib

$$P(\overline{x}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t)=\gamma$$

formulani xosil kilamiz. Bu formulada tanlanma o'rta qiymatni yana $\overline{x}$ bilan belgilashga qaytdik

Bu formula $(\overline{x}-t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ishonchlilik intervali *a* parametrni γ ishonchlilik bilan koplaydi degan ma'noni bildiradi. Bu yerda *t* son $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ tenglikdan jadvalga kura aniklanadi.

Baxoning anikligi $\delta=t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ga teng.

Tanlanma urta kiymat va tanlanma dispersiyani xisoblashning kupaytmalar usuli.

Kuyida tanlanmada variantalar teng uzoklikda joylashgan xolda tanlanma urta kiymat va tanlanma dispersiyani xisoblashning kulay usuli bilan tanishamiz.

Teng uzoklikda joylashgan variantalar deb h ayirmali arifmetik progressiya tashkil etadigan variantalarga aytiladi.

SHartli variantalar deb

$$u_i=\frac{x_i-C}{h}$$

tenglik bilan aniklanadigan variantalarga aytiladi. Bu yerda C sifatida ixtiyoriy variantani (odatda urtarokda joylashgan) variantani olish mumkin va uni soxta nolь deb aytiladi.

Biz karaydigan usuldagi asosiy goya dastlabki variantalarni shartli variantalar bilan almashtirishga asoslangan.

Ushbu tushunchani kiritamiz.

k - tartibli shartli empirik moment deb

$$M_k^* = \frac{\sum n_i u_i^k}{n} = \frac{\sum n_i (\frac{x_i - C}{h})^k}{n}$$

kattalikka aytiladi.

Xususan, 1-tartibli shartli empirik moment uchun

$$M_1^* = \frac{\sum n_i (\frac{x_i - C}{h})}{n} = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} - C \cdot \frac{\sum n_i}{n} \right] = \frac{1}{h} (\bar{x}_{\text{T}} - C)$$

tenglik o'rinli.

Bu yerdan $\bar{x}_{\text{T}}$ tanlanma urta kiymat uchun

$$\bar{x}_{\text{T}} = M_1^* \cdot h + C \qquad (2)$$

tenglikni xosil kilamiz.

Xuddi shu kabi tanlanma dispersiya uchun

$$D_{\text{T}} = \left\lfloor M_2^* - (M_1^*)^2 \right\rfloor \cdot h^2 \qquad (3)$$

formulani xosil kilamiz.

Kiritilgan bu tushunchalar yordamida $\bar{x}_{\text{T}}$ va D_{T} larni osonlik bilan topish mumkin. Xisoblashlarni jadvalda bajarish kulay. Buning uchun

1) Birinchi ustunga tanlanmaning variantalari usib borish tartibida yoziladi.
2) Ikkinchi ustunga variantalarni chastotalari yoziladi.
3) Uchinchi ustunga shartli variantalar u_i lar yoziladi.
4) Turtinchi ustunga $n_i \cdot u_i$ lar yoziladi va ular pastda jamlanadi.
5) Beshinchi ustunga $n_i \cdot u_i^2$ lar yoziladi va ular pastda jamlanadi.
6) Oltinchi ustunga $n_i \cdot (u_i+1)^2$ lar xisoblanib yoziladi va ular pastda jamlanadi.

Jadval tuldirilgandan sung xosil bulgan $\sum n_i \cdot u_i$, $\sum n_i \cdot u_i^2$ yigindilardan foydalanib (2), (3) formulalar yordamida $\bar{x}_{\text{T}}$ va D_{T} lar topiladi.

Bu yerda oltinchi ustun xisoblashlarni nazorat kilish uchun ishlatiladi va agar xisoblash natijalariga asosan

$$\sum n_i (u_i + 1)^2 = \sum n_i \cdot u_i^2 + 2 \sum n_i \cdot u_i + n$$

urinli bulsa xisoblashlar tugri bajarilgan deyish mumkin.

Misol. Kupaytmalar usulida ushbu statistik taksimotning tanlanma urta kiymati va dispersiyasini toping.

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Echilishi:

Soxta nolь sifatida c=11,0 ni tanlab shartli variantalarga utamiz.

u_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5

n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Asosiy jadvalni tuldiramiz.

x_i	n_i	u_i	$n_i u_i$	$n_i u_i^2$	$n_i(u_i+1)^2$
1	2	3	4	5	6
10,2	2	-4	-8	32	18
10,4	3	-3	-9	27	12
10,6	8	-2	-16	32	8
10,8	13	-1	-13	13	0
11,0	25	0	A_1 = -46	0	25
11,2	20	1	20	20	80
11,4	12	2	24	48	108
11,6	10	3	30	90	160
11,8	6	4	24	96	150
12,0	1	5	5	25	36
			A_2 = 103		
	n=100		$\sum n_i u_i$ =57	$\sum n_i u_i^2$ =383	$\sum n_i(u_i+1)^2$ = =597

Bu natijalardan

$$M_1^* = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{57}{100} = 0{,}57; \qquad M_2^* = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} = \frac{383}{100} = 3{,}83;$$

$$\bar{x}_T = M_1^* h + c = 0{,}57 \cdot 0{,}2 + 11{,}0 = 11{,}1;$$

$$D_T = [M_2^* - (M_1^*)^2] \cdot h^2 = [3{,}83 - 0{,}57^2] \cdot 0{,}2^2 = 0{,}14 .$$

VI. AMALIY MASHG'ULOTLAR UCHUN MATERIALLAR

3.KOMPLEKS SONLARNING MODULI VA ARGUMENT

$f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning umumiy ko'rinishi.

$u(x,y)$ $f(z)$ funktsiyaning xaqiqiy qismi

$v(x,y)$ $f(z)$ funkiyaning mavhum qismi

1-masala. $f(z) = z^2 + z$ funktsiya berilgan.

$f(1+i)$, $f(2-i)$, $f(-1)$, $f(i)$ lar topilsin.

Echish.

$f(1+i) = (1+i)^2 + (1+i) = 1 + 3i$

$f(2-i) = (2-i)^2 + (2-i) = 5(1-i)$

$f(-1)=(-1)^2+(-1)=0$

$f(i)=i^2+i=-1+i$

2-masala. $w=\dfrac{1}{z}$, $(z\neq 0)$ funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Echish.

z ўрнига $z=x+iy$ ни қўйиб , махражни компексликдан озод қиламиз.

$$w=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$$

Демак,

$$u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}\quad,\qquad v(x,y)=-\frac{y}{x^2+y^2}\quad;$$

3-masala.

$w=\bar{z}-iz^2$ funktsiya berilgan. Funktsiyaning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

Echish.

Ma'lumki, $z=x+iy$ va $\bar{z}=x-iy$ lar o'zaro qo'shma sonlardir.

$$w=(x-iy)-i(x+iy)^2=(x-iy)-i(x^2+i2xy-y^2)=(x+2xy)-i(x^2-y^2+y)$$

Demak, $u=x+2xy$, $v=-(x^2-y^2+y)$

4-masala. Ushbu $\operatorname{Re} z\geq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar qanday to'plamni aniqlaydi?

Echish. Ma'lumki ,

$z=x+iy$, $\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(x+iy)=x$

$\operatorname{Re} z\geq 1$ dan $x\geq 1$

Bu esa $x=1$ to'g'ri chiziq va uning o'ng tomonida yotuvchi nuqtalar to'plamidir.

5. $f(z)=z^2-iz^2$ funktsiya berilgan.

а) $f(1+i)$, *б*) $f(-i)$, *в*) $f(5-3i)$ lar topilsin.

6. $f(z)=z^2$ funktsiya berilgan.Ushbu xususiy qiymatlarini toping:

   а) $f(2+3i)$, *б*) $f(-1-i)$, *в*) $f(a+ib)$

7. $w=z^2$ funktsiyaning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping.
8. $w=\dfrac{z+i}{z-i}$, $(z\neq i)$ funktsiyaning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping.

9. $w=\dfrac{1+i\bar{z}}{1+z}$ funktsiyaning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping.

10. $w=iz^2-\bar{z}$ funktsiyaning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping.

11. Ushbu $Im(z)\prec 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar qanday to'plamni aniqlaydi ?

12. Ushbu $-1<Im\ z<2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qanday soxani tashkil etadi ?

13. Ushbu $4\le|z-1|+|z+1|\le 8$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini aniqlang. (chizmasini chizing)

14. Ushbu $\frac{1}{4}<Re(\frac{1}{z})+Im(\frac{1}{z})<\frac{1}{2}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar tuplamini aniqlang. (chizmada tasvirlang)

----

15. $f(z)=\dfrac{z}{\bar{z}}$ funktsiya berilgan. +uyidagilarni toping:

$a)\ f(1+i)\qquad б)\ f(-i)\qquad в)\ f(-2+4i)$

16. $f(z)=(z+i)^2$ funktsiya berilgan. +uyidagilarni toping.

$a)\ f(i)\quad б)\ f(-i)\quad в)\ f(7+6i)$

4. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKTSIYALAR, ULARNING ANIQLANISH SOHASI.

17. $w=z^2+i$ funktsiyaning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping.

18. $w=\dfrac{z}{\bar{z}}$ funktsiyaning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping.

19. $Re\ z\le -1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar tuplamini aniqlang.

20. $1\le Im\, z\le 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar tuplamini aniqlang.

5. Koshi-Riman sharti. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalarning integrali va uni hisoblash

Agar $\omega=u(x,y)+iv(x,y)$ kompleks funktsiya uchun

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ - Koshi - Riman sharti bajarilsa,

$\omega=f(z)$ funktsiyaning hosilasi

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$

formulalarning biri bilan hisoblanadi va bunday fuktsiyalar analitik funktsiyalar deyiladi.

Ba'zi elementar funktsiyalarning hosilasi jadvali

1) $c' = 0$ $c -$ ихтиёрий комплекс сон

2) $z' = 1$

3) $(z^n)' = n \cdot z^{n-1}$

4) $(e^z)' = e^z$

5) $(\ln z)' = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

6) $(\sin z)' = \cos z$

7) $(\cos z)' = -\sin z$

8) $(tg\, z)' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1 + tg^2 z$

9) $(ctg\, z)' = -\frac{1}{\sin^2 z} = -(1 + ctg^2 z)$

10) $(\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$

11) $(\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$

12) $(arctg\, z)' = \frac{1}{1 + z^2}$

13) $(Sh\, z)' = ch\, z$

14) $(Ch\, z)' = sh\, z$

21- masala: $f(z) = y + xi$ funktsiyaning hosilasi mavjudmi?

Echish: $u = y, v = x$ bo'lgani uchun

Koshi Riman shartini tekshiramiz.

$$\frac{du}{dx} = (y)'_x = 0 \qquad \frac{dv}{dx} = (x)'_x = 1$$

$$\frac{du}{dy} = (y)'_y = 1 \qquad \frac{dv}{dy} = (x)'_y = 0$$

Bunda, $\frac{du}{dy} \neq -\frac{dv}{dx}$ shart buzildi.

Demak, funktsiyaning hosilasi mavjud emas.

22 - masala: $w = z^2$ funktsiyaning hosilasini toping?

Echish: $w = z^2 = (x)^2 + (iy)^2 + 2ixy$, $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

Bundan, $\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = 2x$, $\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dx} = -2y$

Ya'ni, Koshi -Riman sharti bajarildi, demak, hosila mavjud.

$$w' = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z \quad (z^2)' = 2z$$

23- masala: $w = 3x^2 - 5y^2 + i2xy$ funktsiyaning hosilasini toping?

Echish: $u = 3x^2 - 5y^2, v = 2xy$

$$\frac{du}{dx} = 6x, \qquad \frac{du}{dy} = -10y, \qquad \frac{dv}{dx} = 2y, \qquad \frac{dv}{dy} = 2x$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy} \quad дан \quad 6x=2x, \quad 4x=0 \Rightarrow x=0 \qquad x=0$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{dv}{dx} \quad дан \quad -10y=-2y, \quad 8y=0 \Rightarrow x=0 \quad y=0$$

Demak, funktsiya faqat (0; 0) nuqtadagina ya'ni, z *x$_0$]iy$_0$*0 dagina hosilaga ega ekan.

SHu hosilani topamiz: $w^1=f^1(0)=(\frac{du}{dx}+i\frac{dv}{dx})_{z=0}=(6x+2iy)_{z=0}=0$

24 - masala: $f(z)=z\cdot\bar{z}$ funktsiya analitik bo'ladimi?

Echish:

$$f(z)=z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2;$$

$u=x^2+y^2, \ v=0$, $\frac{du}{dx}=2x, \frac{du}{dy}=2y, \quad \frac{dv}{dx}=0, \ \frac{dv}{dy}=0$

Koshi-Riman sharti buzildi, ya'ni $2x\neq 0$, $2y\neq 0$

Demak, funktsiya analitik emas

25- masala: $f(z)=(x^2-y^2)+2xyi$ funktsiya analitik bo'ladimi?

Echish: $u=x^2-y^2, \ v=2xy$, $\frac{du}{dx}=2x \quad \frac{du}{dy}=-2y \quad \frac{dv}{dk}=2y, \ \frac{dv}{dy}=2x$

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}, \qquad \frac{dv}{dx}=-\frac{du}{dy}$$

Koshi Riman sharti bajarildi. Demak, funktsiya analitik

26- masala: $f(z)-$analitik funktsiyaning mavhum qismi $v(x,y)=x+y$ bo'lsa, funktsiyani toping.

Echish: SHartga ko'ra, $\frac{dv}{dy}=1$, bo'lgani uchun, Koshi -Riman shartiga ko'ra

$$\frac{du}{dx}=1 \ , \ u=x+\varphi(y) \ , \ \frac{du}{dy}=\varphi'(y), \quad \frac{dv}{dx}=1 \quad \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}\Rightarrow\varphi^1(y)=-1$$

Integrallasak, $\varphi\ (y)=-y+c$.

Demak, $u=x-y+c$, bundan $f(z)=x-y+c+i(x+y)$.

27. $f(z)=(x^2+y^2)-2xyi$ funktsiyaning hosilasi mavjudmi?

28. $f(z)=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$ funktsiya analitik bo'lsa, uning hosilasini toping?

29 $w=e^z$ funktsiyani hosilasi funktsiyaning o'ziga tengliligini ko'rsating.

30. $\omega=\dfrac{1}{x+iy}$ funktsiyani analitiklikka tekshiring.

31. $f(z)$ analitik funktsiya bo'lib, $u(x,y)=x^2-y^2-x$ berilgan, $f(z)$ funktsiyani toping.

32. $u=x^2-y^2+2x$, $f(i)=2i-1$ bo'lib, $f(z)$ analitik bo'lsa, funktsiyani aniqlang.

33. +uyidagi kompleks argumentli funktsiyalarni hosilalarini toping.

a) $f(z)=z\cdot e^{-z}$ v) $f(z)=\dfrac{e^{-z}+1}{e^z-1}$ s) $f(z)=\dfrac{1}{tgz+ctgz}$

34. $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ funktsiyani analitiklikka tekshiring.

35. $f(z)=\sin x\cdot chy+i\cos x\cdot shy$ funktsiyaning hosilasi mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa uni toping.

36. λ ning qanday qiymatida $f(z)=y+\lambda xi$ analitik bo'ladi.

37. Agar $f(z)$ analitik bo'lib $u=2^x\cos(y\ln 2)$ bo'lsa, funktsiyani aniqlang.

38. a ning qanday qiymatida $f(z)=a\vec{z},\ (\bar{z}=x-iy)$ funktsiya differentsiallanuvchi bo'ladi.

6. KOMPLEKS HADLI QATORLAR.

$\omega=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$ kompleks o'zgaruvchili ko'rsatkichli funktsiyaning xossalari:

1) z xaqiqiy bo'lganda e^z funktsiya e^x ning barcha xossalariga ega.

2) Funktsiya butun tekislikda analitik

3) $(e^z)'=e^z$

4) $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$

Kompleks o'zgaruvchili trigonometrik funktsiyalar:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$tgz=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} \qquad ctgz=\frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}$$

xossalari:

1) $f(z)=\sin z$ - toq funktsiya

2) $f(z)=\cos z$ - juft funktsiya

3) $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1$

4) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_2\sin z_1$

5) $\cos^2 z+\sin^2 z=1$

Kompleks o’zgaruvchili giperbolik funktsiyalar

$$sh\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}\ ,\quad ch\,z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}\ ,\quad th\,z=\frac{shz}{chz}\ ,\qquad cth\,z=\frac{chz}{shz}$$

Giperbolik va trigonometrik funktsiyalar orasidagi bog’lanish

$$shz=\frac{1}{i}\sin iz\ ,\quad Ch\,z=\cos iz\ ,\quad th\,z=-itgiz\ ,\quad cth\,z=i\,ctg\,iz$$

Kompleks o’zgaruvchili logarifmik funktsiya

$$w=Lnz\ ,\quad Lnz=\ln|z\ |+iArg\,z\ \text{ yoki }\quad Lnz=\ln z+2k\pi i$$

Kompleks o'zgaruvchili logarifmik funktsiyalarning xossalari

1) $Ln(z_1 \cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$

2) $Ln\dfrac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2$

39- masala: $e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ni xisoblang.

Echish

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} * \; Cos(-\frac{\pi}{2}) + i\,Sin(-\frac{\pi}{2}) = 0 - i \cdot 1 = -i$$

Demak, $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$

40- masala: $f(z) = Cos(2+i)$ ning xaqiqiy va mavhum qismlarini toping

Echish

$$Cos(2+i) = \frac{1}{2}\left[(e^{i(2+i)} + e^{-i(2+i)})\ \right] = \frac{1}{2}\left[(e^{-1} \cdot e^{2i} + e \ \cdot e^{-2i}\ \right]$$

Eyler formulasiga ko'ra, $e^{2i} = Cos2 + iSin2,$ $\qquad e^{-2i} = Cos2 - iSin2$

Bularga asosan ixchamlasak,

$$Cos(2+i) = \frac{1}{2}\left[(e + e^{-1})Cos2 - i(e - e^{-1})Sin2\right]$$

41- masala: +uyidagi ayniyatni isbotlang: $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

Isboti. $\sin 2z = \dfrac{1}{2i}\left[e^{2iz} - e^{-2iz}\right] = \dfrac{1}{2i}\left[(e^{iz})^2 - (e^{-iz})^2\right] = \dfrac{1}{2i}\left[(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz} + e^{-iz})\right] =$

$$= 2\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} = 2\sin z \cos z$$

42- masala: $sh(-2+i)$ ning qiymatini xisoblang.

Echish. $sh(-2+i) = \dfrac{1}{2}\left[e^{-2+i} + e^{-(-2+i)}\right] = \dfrac{1}{2}\left[e^{-2}e^{i} + e^{2}e^{-i}\right]$

$e^{i} = \cos 1 + i\sin 1$ va $e^{-i} = \cos 1 - i\sin 1$ ga asosan, $sh(-2+i) = i\sin 1ch2 - \cos 1sh2$

43- masala: $\cos(1+i)$ ni qiymatini toping.

Echish:

$$\cos(1+i) = ch\, i(1+i) = ch\, i(-1+i) = \frac{1}{2}\left[e^{-1+i} + e^{-(-1+i)}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-1}(\cos 1 + i\sin 1) + e(\cos 1 - i\sin 1)\right] = \cos 1\frac{e+e^{-1}}{2} - i\sin 1\frac{e-e^{-1}}{2}$$

bundan, $\cos(1+i) = \cos 1 ch1 - i\sin 1 sh1$

44- masala: Ushbu tenglikni to'g'riligini isbotlang.

$$ch^2 z - sh^2 z = 1, \qquad z = x + iy$$

Echish.

$$ch^2 z - sh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(e^{2z} + 2 + e^{-2z}\right) - \left(e^{2z} - 2 + e^{-2z}\right)\right] = \frac{1}{4}\cdot 4 = 1$$

45-masala. Ushbu tenglamani yeching: $\cos z = 2$

Echish.

$$\cos z = \frac{1}{2}\left[e^{iz} + e^{-iz}\right] = 2 \quad \text{yoki} \quad e^{iz} + e^{-iz} = 4$$

$e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0$, $e^{iz} = \omega$ deb olsak , $\omega^2 - 4\omega + 1 = 0$ dan, $\omega = 2 \pm \sqrt{3}$

Demak, $\omega = e^{iz} = 2 \pm \sqrt{3} \;\Rightarrow\; iz = \ln(2 \pm \sqrt{3}) \qquad z = \frac{1}{i}\ln(2 \pm \sqrt{3})$.

46. Xisoblang a) $e^2 + i$ b) $e^2 - 2i$

47. Xisoblang a) $e^{-3} - 4i$ b) $e^{-3} + i$

48. $sin(3-i)$ ni qiymatini toping.

49. Ushbu tenglikni to'g'riligini isbot qiling: $tg\,2z = \dfrac{2tg\, z}{1 - tg^2 z}$

50. Hisoblang a) $\mathrm{ch}\,\mathrm{i}$ б) $\sin(1+i)$

51.+uyidagi kompleks sonlarni haqiqiy va mavhum qismlarini aniqlang:

a) Sin(z-i) б) $\mathrm{Sh}(\ln 3 + \frac{\pi}{4}\mathrm{i})$

7.LAPLAS ALMASHTIRILISHI, UNING XOSSALARI

$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = L\{f(t)\}$ $F(p)$-tasvir, $f(t)$- original

$F(p) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longrightarrow}} f(t)$ tasvir - original

$f(t) \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{\longleftarrow}} F(p)$ original - tasvir

$L\{f(t)\} = F(p)$

80- masala: $f(t)=\begin{cases} t\geq 0\, \textit{булганда}\;\; f(t)=1 \\ t<0\, \textit{булганда}\;\; f(t)=0 \end{cases}$ funktsiyani tasvirini toping.

Echish: $L\{f(t)\}=\int\limits_0^\infty e^{-pt}dt=-\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^\infty=\frac{1}{p}.$

Demak, $1 \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p}$ ekan.

81-masala: $f(t)=\sin t$ funktsiyani tasvirini toping.

Echish:

$$L\{\sin t\}=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt=\begin{vmatrix} u=\sin t,\ du=\cos t\,dt \\ dv=e^{-pt}dt, v=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{vmatrix}=-\frac{1}{p}e^{-pt}\sin t\Big|_0^\infty+$$

$$\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cos t\,dt=\frac{1}{p}\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cos t\,dt=\begin{vmatrix} u=\cos t & du=-\sin t\,dt \\ dv=e^{-pt}\ dt & v=-\frac{1}{p}e^{-pt}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{p}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\cos t\Big|_0^\infty-\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt\right]=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt;$$

Bundan $\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{1}{p^2}$ yoki $\int\limits_0^\infty e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{1}{p^2+1}$

Demak, $\sin t \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p^2+1};$

82-masala: $f(t)=e^{-\alpha t}$ funktsiya tasviri topilsin.

Echish: $L\{e^{-\alpha t}\}=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot e^{-\alpha t}dt=\int\limits_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}dt=\frac{1}{p+\alpha}$

Demak, $e^{-\alpha t} \xleftarrow{\cdot} \frac{1}{p+\alpha}$

Berilgan funktsiyalarni tasvirlari topilsin.

83. $f(t)=\cos t$
84. $f(t)=\sin 3t$
85. $f(t)=\cos 6t$
86. $f(t)=e^{3t}$
87. $f(t)=sh\,t$
88. $f(t)=ch\,3t$
89. $f(t)=e^{-3t}\sin t$
90. $f(t)=e^{2t}\cos t$
91. $f(t)=t^3$
92. $f(t)=t^2$

Berilgan funktsiyalarni tasvirlari topilsin.

93. $f(t)=\cos 2t$

94. $f(t)=\sin 5t$

95. $f(t)=e^{-5}t$

96. $f(t)=sh\,5t$

97. $f(t)=e^{t}\cos t$

98. $f(t)=t^{4}$

99. $f(t)=t^{2}$

Oliy algebra elementlari

Quyidagi determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & -1 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \\ -6 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

Quyidagi determinantlarni soddalashtiring va hisoblang.

7. $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ -a & a & a \\ a & -a & -a \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} 4 & -12 & 20 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

Determinantni qator elementlari bo`yicha yoyib hisoblang.

11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -4 & 7 \\ -3 & 12 & -15 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yeching.

16. $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x-3y=-2 \\ 2x-6y=-1 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x+y-5z=0 \\ 3x+2y+z=14 \\ 2x+3y+4z=16 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x+2y-z=-6 \\ 2x-y+z=0 \\ x-4y+3z=6 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ 3x+5y-z=-1 \\ x+y+3z=3 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} 2x+z+t=9 \\ 3y-2z+3t=12 \\ -2x+y-z+t=1 \\ 5x+2y-3t=-3 \end{cases}$

Tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.

22. $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x - 3y + z = 5 \\ x + 2z = 5 \\ 4x + 2y - z = -9 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

25-misol. Agar $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ bulsa, $3A + 4B$ ni toping.

26-misol. $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, AB va BA matritsalarini topin

A matritsa uchun A^{-1} teskari matritsani toping

27. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 28. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 29. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Tenglamalar sistemasini matritsa usulida yeching.

30. $\begin{cases} 3x - y + z = 12 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$ 31. $\begin{cases} 3x + 2y - z = -6 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 4y + 3z = 6 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 5x - 2y + 4z = 4 \end{cases}$

Vektorlar algebrasl elementlari

33. Tekislikda uchlari $O(0;0)$, $A(2a;0)$ va $B(a;-a)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchak berilgan. Shu uchburchakning OB tomoni bilan OM medianasi orasidagi burchak topilsin.

34. $a = 2i + j$ va $b = -2j + k$ vektorlarda yasalgan parallelogramm diognallari orasidagi burchak topilsin.

35. $(2i - j)j + (j - 2k)k + (i - 2k)^2$ ifodadagi qavslar ochilsin.

36. Agar $|\vec{a}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 4$ va $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$ bo`lsa $3\vec{a} + \alpha\vec{b}$ va $\vec{a} - 2\vec{b}$ vektorlar $\alpha$ ning qanday qiymatlarida o`zaro perpendikulyar bo`ladi?

37. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning koordinatalari berilgan: $\vec{a} = 7\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ Bu vektorlarning skalyar ko`paytmasini toping.

38. Uchlari $A(-1;5;1)$, $B(1;1;-2)$ va $C(-3;3;2)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchak berilgan. $AC$ tomonni davom ettirishdan hosil bo`lgan tashqi burchakni aniqlang.

39. Uchlari $A(7;3;4)$; $B(1;0;6)$ va $C(4;5;-2)$ nuqtalarda bo`lgan uchburchak yuzi hisoblansin.

40. $\vec{a} = 2\vec{j} + \vec{k}$ va $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{k}$ vektorlarda parallelogramm yasalsin. hamda uning yuzi va balandligi aniqlansin.

41. Ushbu

1) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \overline{\vec{j} \times \vec{k}} + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$:

2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$:

3) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;

4) $2\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{i} \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (\vec{i} \times \vec{j})$

ifodalar qavslarni ochib soddalashtirilsin.

42. $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$ vektorlarda parallepiped yasalsin hamda uning hajmi hisoblansin. Berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar qanday bog`lamni tashkil etadi?

43. Uchlari $O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0)$ va $C(1;2;4)$ nuqtalarda bo`lgan piramida yasalsin hamda uning hajmi, $ABC$ yog`ining yuzi va shu yoqqa tushirilgan balandligi hisoblansin.

44. $A(2;-1;-2)$, $B(1;2;1)$, $C(2;3;0)$ va $D(5;0;-6)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishi ko`rsatilsin.

Tekislikda analitik geometriya

1. Uchburchak uchlarining koordinatalari A(-1:2), B(5;6) va C(1;3) bo`lsa,uning tomonlari uzunliklarini toping.
2. Uchlari A(3;8) va B(-5;14) nuqtalarda bo`lgan kesma uzunligini aniqlang.
3. Uchlari A(-3;-3), B(-1;3) va C(11;-1) nuqtalarda bo`lgan uchburchakni to`g`ri burchakli ekanini ko`rsating.
4. C(2;3) nuqta AB kesmaning o`rtasida yotsa, B(7;5) bo`lsa A nuqtaning koordinatasini toping.
5. A(-2;5) va B(4;17)-AB kesmaning uchlarining koordinatalari.Shu kesmada yotuvchi C nuqtadan A gacha masofa B nuqtagacha masofadan 2 marta katta.
C nuqtaning koordinatalarini toping.
6. Uchlari 0(0;0), A(8;0) va B(0;6) nuqtalarda bo`lgan uchburchakning OC medianasi va OD bissektrisasining uzunliklarini toping.
7. Uchburchak tomonlarining o`rtalari $A_1(1;6)$, $B_1(3;-2)$, $C_1(-4;2)$ nuqtalarda bo`lsa,uning uchlarini koordinatalarini toping.
8. Uchburchakning uchlarining koordinatalari berilgan:A(4;2), B(9;4) va C(7;6).Bu uchburchak yuzini toping.
9. Uchburchakning ikki uchining koordinatalari A(5;1) va B(-2;2), uchinchi uchi OX o`qida yotadi.Uchburchak yuzi 10 kv.birlikka teng.Uning uchinchi uchini koordinatasini toping.
10. O(0;0), M(3;0) va N(0;4) uchburchak tomonlarining o`rtalari bo`lsa,uchburchak yuzini aniqlang.
11. To`g`ri chiziq $\frac{x+2\sqrt{5}}{4} + \frac{y-2\sqrt{5}}{2} = 0$ tenglama bilan berilgan.To`g`ri chiziqni
1) umumiy 2) Kesmalar bo`yicha 3) Normal tenglamalarni yozing.
12. $4x + 3y - 36 = 0$ to`g`ri chiziq va koordinata o`qlari bilan chegaralangan uchburchak yuzini toping.
13. $20x + 21y = 0$ tenglama bilan berilgan to`g`ri chiziqni kesmalar bo`yicha tenglamasini yozish mumkinmi?
14.To`g`ri chiziqlarni yasang:
1) $4x - 5y + 15 = 0$, 2) $2x - y = 0$, 3) $7x - 10 = 0$, 4) $2y + 3 = 0$
15. Koordinatalar boshidan va A(-2;-3)nuqtadan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.
16. A(2;5) nuqtadan o`tib,ordinatalar o`qidan $b = 7$ kesma ajartuvchi to`g`ri chizik tenglamasini tuzing.
17. A(1;2) va B(4;3) nuqtalardan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing va bu to`g`ri chiziqning koordinata o`qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlang.
18. $x - y - 4 = 0$ va $2x - 11y + 37 = 0$ to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan xamda koordinatalar boshidan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.
19. Uchburchak tomonlarini tenglamalari berilgan.

$5x-2y-11=0,\ \ x+2y+5=0$ va $x-2y+1=0$ uchburchak yuzini toping.

20.Quyidagi $1)3x-2y+12=0 \quad 2)y=4x-2 \quad 3)y=-x+1$ to`g`ri chiziqlarning koordinata o`qlaridan ajratgan kesmalarini toping.

21. m va n larning qanday qiymatlarida $(m-3n-2)x+(2m+4n-1)y-3m+n-2=0$ to`g`ri chiziq Ox o`qni 3 ,Oy o`qni –2 birlikda kesib o`tadi.

22. Uchburchak uchlarining koordinatalari berilgan: $A(4;6)\quad B(-4;0)\quad C(-1;-4)$

a) uning uchchala tomonini
b) C uchidan o`tkazilgan medianasini
v) B burchagi bissektrisasining

tenglamalarini tuzing.

23. A(2;1) nuqtadan o`tib $y=3x-4$ to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

24. A(5;-4) nuqtadan o`tuvchi va $3x+2y-7=0$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar bo`lgan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

25. Quyidagi to`g`ri chiziqlar orasidagi burchaklarni aniqlang:

$$1)\begin{cases}6x-3y+5=0\\2x-6y-3=0\end{cases}\quad 2)\begin{cases}\dfrac{x}{4}-\dfrac{y}{5}=1\\\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{18}=1\end{cases}\quad 3)\begin{cases}\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{7}=1\\\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{3}=1\end{cases}$$

26. To`g`ri burchakli teng yonli uchburchak gipotenuzaning tenglamasini $y=3x+5$ va to`g`ri burchak uchining koordinatalari C(4;-1), katetlari tenglamalarini tuzing va uchburchak uchlarini koordinatalarini toping.

27. A(2,5) nuqtadan $6x+8y-6=0$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofa topilsin.

28. $5x-12y-13=0$ to`g`ri chiziqqa parallel bo`lib,undan 3 birlikda masofada yotuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

29. M(1;2) nuqtadan $20x-21y-58=0$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofani toping.

30. m ning qanday qiymatida $7x-2y-5=0,\quad x+7y-8=0$ va $mx+my-8=0$ to`g`ri chiziqlar bir nuqtada kesishadi?

31. $x+2y+3=0$ va $2x+3y+4=0$ to`g`ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan $5x+8y=0$ ga parallel o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

32. M(a;b) nuqtadan $x+y+c=0$ to`g`ri chiziqqa parallel o`tuvchi tenglamasini tuzilsin.

33. M(5;1) nuqtadan o`tib $2x+y-4=0$ to`g`ri chiziq bilan $\dfrac{\pi}{4}$ burchak hosil qiluvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

34. Aylananing ushbu tenglamalariga ko`ra uning markazi va radiusini aniqlang.

$1)x^2+y^2-8x+6y=0$

$2)x^2+y^2+10x-4y+29=0$

35. A(-1;1) va B(1;-3) nuqtalardan o`tib markazi $2x-y+1=0$ to`g`ri chiziqda yotgan aylana tenglamasini tuzing.

36. $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ aylana berilgan.Uning (5;5) nuqtasidan o`tuvchi urinma tenglamasini tuzing.

37. A(1;2), B(0;-1) va C(-3;0) nuqtalardan o`tuvchi aylana tenglamasini tuzing.

38. $x^2+y^2-6x=0$ aylana va $x+y=0$ to`g`ri chiziq kesishish nuqtasini aniqlang.

39. $x^2+y^2-3x-y=0$ va $3x^2+3y^2+2x+y=0$ aylanalarning kesishish nuqtalaridan o`tuvchi to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.

40. Koordinata o`qlariga simmetrik bo`lgan ellips $A(4;1)$ va $B(\frac{5\sqrt{5}}{3};-2)$ nuqtalardan o`tadi.Ellips tenglamasini tuzing.

41. M(7;1),N(-5;4),P(4;5) nuqtalar $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsga nisbatan qanday xolatda joylashadi?.

42. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ ellipsning $2x-y-9=0$ to`g`ri chiziq bilan kesishish nuqtasining koordinatalarini toping.

43. $x=\pm 8$ to`g`ri chiziqlar kichik o`qi 8 ga teng bo`lgan ellipsning direktrissalaridir.Shu ellipsning tenglamasini toping.

44. $x^2+9y^2-45=0$ *ва* $x^2+9y^2-6x-27=0$ ellipslarning kesishish nuqtalarini toping va tenglamalarni kanonik ko`rinishga keltiring

45. Agar ellipsning 1)fokuslar orasidagi masofa 8 ga teng bo`lib,kichik yarim o`qi bқ3 2) katta yarim o`qi aқ6,ekssentrisiteti $\varepsilon=0{,}5$ bo`lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.

46.$16x^2-9y^2-144=0$ giperbolaning uchlarini,fokuslarini toping:

47.Xaqiqiy o`qi 6 ga,fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo`lgan giperbolaning eng sodda tenglamasini tuzing.

48.Giperbolaning yarim o`qlari yig`indisi 17 ga,ekssentrisiteti $\varepsilon=\frac{13}{12}$ ga teng.Giperbola tenglamasini tuzing va fokuslarini koordinatalarini toping.

49. Giperbolaning assimptotalari $y=\pm\frac{3}{4}x$ to`g`ri chiziqlardan iborat,fokuslaridan biri (-10;0) nuqtada joylashgan,Giperbola tenglamasini tuzing va uning ekssentirsitetini toping.

50.Giperbola $\frac{x^2}{289}+\frac{y^2}{225}=1$ ellipsning fokuslaridan o`tishi ma`lum , fokuslari esa bu ellipsning uchlarida joylashgan.Giperbolaning tenglamasini tuzing.

51. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{4}=1$ giperbolaning 1) $x+6y=0$ 2) $x-3y=0$ to`g`ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalarini toping.

52.Quyidagi parabolalarning fokusi koordinatalarini toping va direktrissasi tenglamasini yozing:

$1)\, y^2=8x,\;\; 2)\, y^2=-12x,\;\; 3)\; x^2=10y,\;\; 4)\, x^2=-16y$

53. Uchi koordinatalar boshida va fokusining koordinatalari
1)(0;4) , 2)(6;0) bo`lgan parabola tenglamasi tuzilsin.

54. Uchi koordinatalar boshida,direktrissasi $2x-3=0$ bo`lgan parabola tenglamasi tuzilsin va fokusini aniqlang.

55. $y^2=36x$ parabolada direktrissadan 13 ga teng masofada M(x,y) nuqta olingan.Bu nuqtadan parabola uchigacha bo`lgan masofani toping.

56. $y^2=9x$ parabolani

$1)\; 3x+y-6=0,\;\; 2)\; 2x-y+5=0,\;\; 3)\; y-6=0$

to`g`ri chiziqlar bilan kesishish nuqtasini toping.

Fazoda analitik geometriya

57. Quyidagi tekisliklarni yasang:

$1)5x-2y+3z-10=0,\;\; 2)3x+2y-z=0,\;\; 3)3x+2z=6,\;\; 4)2y-z=0$

58. $M_1(0;1;3)$ va $M_2(2;4;5)$ nuqtalardan o`tuvchi va OX o`qqa parallel tekislik tenglamasini yozing va tekislikni yasang.

59. OX o`qidan va $M_1(0;-2;3)$ nuqtadan o`tuvchi tekislik tenglamasini yozing va tekislikni yasang.
60. $1) x+2y+2z-8=0$ *va* $x+y-6=0$, $2) x+2z-6=0$ *va* $x+2y-4=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.
61. (2;2;-2) nuqtadan o`tuvchi va $x-2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislikni toping.
62. $M_1(-1;-2;0)$ va $M_2(1;1;2)$ nuqtadan o`tuvchi hamda $x+2y+2z-4=0$ tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasini yozing.
63. $M_1(1;-1;2)$, $M_2(2;1;2)$ va $M_3(\_1;1;4)$ nuqtalardan o`tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
64.OZ o`qdan o`tib, $2x+y-\sqrt{5}z=0$ tekislik bilan 60° li burchak tashkil etuvchi tekislik tenglamasini tuzing.
65. $4x+3y-5z-8=0$ va $4x+3y-5z+12=0$ parallel tekisliklar orasidagi masofani toping.
66. (4;3;0) nuqtadan $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ va $M_3(3;0;1)$ nuqtalardan o`tuvchi tekislikkacha bo`lgan masofani toping.
67. 1) $x+y-z-2=0$ 2) $3x+5y-4z+7=0$ **tekislik tenglamalarini normal ko'rinishga keltiring.**
68. M(-2;1;-1) nuqtadan o`tuvchi va $\vec{P}(1,-2,3)$ vektorga parallel bo`lgan to`g`ri chiziq tenglamasini tuzing.
69. $\begin{cases} x-y+z-4=0 \\ 2x+y-2z+5=0 \end{cases}$ va $\begin{cases} x+y+z-4=0 \\ 2x+3y-z-6=0 \end{cases}$ to`g`ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:
70. (-4;3;0) nuqtadan o`tuvchi va $\begin{cases} x-2y+z=4 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ to`g`ri chiziqqa parallel bo`lgan to`g`ri chiziq tenglamasini yozing.
71. N(2;-1;3) nuqtadan $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{5}$ to`g`ri chiziqqacha bo`lgan masofani toping.
72. $y=3x-1,\ 2z=-3x+2$ to`g`ri chiziq bilan $2x+y+z-4=0$ tekislik orasidagi burchakni toping.
73. (-1;2;-3) nuqtadan o`tuvchi va $x=2,\ y-z=1$ to`g`ri chiziqqa perpendikulyar tekislik teneglamasini yozing.
74. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{3}$ to`g`ri chiziqdan va (3;4;0) nuqtadan o`tuvchi tekislikning tenglamasini yozing.
75. $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ va $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ parallel to`g`ri chiziqlardan o`tuvchi tekislikning tenglamasini yozing.
76. $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+2 \\ z=1-t \end{cases}$ to`g`ri chiziqning $3x-2y+z=3$ tekislik bilan kesishgan nuqtasini toping.
77. (3;1;-1) nuqtaning $x+2y+3z-30=0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

Boshlang'ich analiz

1. Agar ketma-ketlikning n-hadi a_n quyidagi ko`rinishga ega bo`lsa, uning dastlabki 5 ta hadini yozing:

1) $\frac{1}{4n-1}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{1}{4n-1}$; 3) $\frac{2^n+1}{2^n}$; 4) $\frac{2+(-1)^{n-1}}{n}$;

2. Ketma-ketlikning berildgan dastlabki hadlari bo`yicha uning n-hadini yozing:

1) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},...;$ 2) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},...;$ 3) $1,\frac{\sqrt{2}}{1\cdot 2},\frac{\sqrt{3}}{1\cdot 2\cdot 3},\frac{\sqrt{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},...;$

4) $\frac{1}{4},-\frac{2}{9},\frac{3}{16},-\frac{4}{25},...;$ 5) $1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\frac{1}{6},7,\frac{1}{8},...;$

3. Umumiy hadi quyidagicha bo`lgan $\{a_n\}$ ketma-ketlikning o`suvchi yoki kamayuvchi bo`lishini aniqlang:

1) $a_n=\frac{n^2+1}{n};$ 2) $a_n=\frac{n^2+2n+7}{n^2+2n+8};$ 3) $a_n=\sqrt[3]{n+1}-\sqrt{n};$

4. Umumiy hadi quyidagicha bo`lgan $\{a_n\}$ ketma-ketlik chegaralanganmi?

1) $a_n=(-1)^n\cdot n^2;$ 2) $a_n=n^2-2n;$ 3) $a_n=\frac{n-3n^2}{n+1};$ 4) $a_n=\frac{2^n}{n!};$

5-7-topshiriqlarda tenglikni limit ta`rifiga asosan isbotlang:

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-4}{n+6}=1;$ 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n}{n^2+1}=0;$ 7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-11n+3}{2n^2-4n+5}=\frac{1}{2};$

17-22-topshiriqlarda limitlarni toping:

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n-2};$ 9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+3}{4-3n-9n^2};$ 10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}};$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n-2}};$ 12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right);$ 13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^5;$

14. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ funksiya berilgan. $f(0),\ f(1),\ f(-3)$ larni toping.

15. $y(x)=x^2$ funksiya berilgan.Quyidagilarni toping:

1) $f(-x);$ 2) $f(x-1);$ 3) $f\left(\frac{1}{x}\right).$

16. $f(x)=\begin{cases}2+x, & агар\ \ x>0,\\ 5, & агар\ \ x=0,\\ 2^x, & агар\ \ x<0,\end{cases}$ funksiya berilgan. $f(-2),\ f(0),\ f(1),\ f(3)$ larni toping.

17-19-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

17. $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x};$ 18. $f(x)=\arccos\left(\frac{x}{2}-1\right);$ 19. $f(x)=\frac{x-2}{\cos 2x};$

20-24- topshiriqlarda berilgan funksiyalarning o`zgarish sohasini toping:

20. $f(x)=|x|+1;$ 21. $f(x)=\frac{5}{x};$ 22. $f(x)=\sqrt{16-x^2};$ 23. $f(x)=-x^2+8x-13;$

24. $f(x)=1-3\cos x;$

25-34-topshiriqlarda limitlarni toping.

25. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+1}{2x+1};$ 26. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-3x+2};$ 27. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1};$ 28. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x^2+1};$ 30. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2+1};$ 31. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49};$ 32. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right);$

33*. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi}{2}x;$ 34*. $\lim\limits_{x\to 5-0}10^{\frac{1}{x-5}};$

35-43-topshiriqlarda limitlarni toping.

35. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin x}{x};$ 36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x};$ 37. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};$ 38. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h};$

39. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$; 40. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; 41*. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; 42 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$; 43. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

44-46opshiriqlarda berilgan funksiyalar o`zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo`lishini ta`rif bo`yicha isbotlang.

44. $y=x^2-2x$; 45. $y=1-x^3$; 46 $y=\dfrac{1}{x^2+1}$;

47-53-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning xarakterini tekshiring.

47. $y=\dfrac{1}{2-x}$; 48. $y=\dfrac{1}{(x+5)^2}$; 49. $y=\dfrac{2}{x^2-1}$; 50. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$; 51 $y=\dfrac{3}{x^2-1}$;

52 $y=\dfrac{\sin x}{x}$; 52 $y=\begin{cases}x^2, & агар \quad x\le 1\\ x+1 & агар \quad x>1\end{cases}$; 53. $y=\begin{cases}x-1, & агар \quad x<-1\\ 0, & агар \quad -1\le x<0,\\ \sqrt{x}, & агар \quad x\ge 0\end{cases}$

54-56--topshiriqlarda berilgan funksiyalarning ishora saqlash intervallarini toping.

54. $y=\dfrac{x}{x-1}$; 55. $y=\dfrac{5^x-25}{x}$; 56. $y=\lg x+1$;

57-58-topshiriqlarda hosila ta`rifidan foydalanib, berilgan funksiyalarning hosilalarini toping.

57. $y=5x+3$, 58. $y=x^2+3x-2$,

59. $\varphi(x)=\dfrac{8}{x}$ funksiya berilgan. $\varphi'(-2)=\varphi'(2)$ ekanligini ko`rsating.

60. $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emasligini ko`rsating.

62-71-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning hosilalarini asosiy elementar funksiyalar hosilalari jadvalidan va differensiallash qoidalaridan foydalanib toping.

62. $y=-5x+3$. 63. $y=11x^3+2x^2-0{,}95$. 64. $y=2x^5-4x^3-3x^2+\dfrac{1}{2}x-1$.

65. $y=-9x^3+0{,}2x^2-0{,}1x+5$. 66. $s=5t^{\frac{1}{2}}-2t^{-\frac{2}{3}}+3t^{-1}$. 67. $y=-6\sqrt{x}+\dfrac{3}{x}$.

68. $y=(4x^3-2x^2-5x)(x^2-7x)$. 69. $y=(9-2x)(2x^3-9x^2+1)$.

70. $y=\dfrac{x^2+2x}{3-4x}$, 71. $y=x^2tgx$.

72. $f(x)=5x^2-16\sqrt{x}+7$ funksiya berilgan. $f'(1), f'(4), f'\left(\frac{1}{4}\right)$ larni toping.

73-87-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning hosilasini toping.

73. $y=\dfrac{9^x-1}{9^x+1}$. 74. $s=\dfrac{3ctgt}{e^t-1}$. 75. $y=8\sqrt[4]{x^3}-3\log_9 x$. 76. $y=arcctg\,2\sqrt{x}$.

77. $y=\ln^3 x$. 78. $y=\sqrt[3]{2+\log_2 x}$. 79. $y=\ln\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1}}$. 80. $y=arctg\ln x$.

81. $y=\sqrt{1-e^x}$. 82. $y=\ln(\arcsin x-x)$. 83. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. 84. $y=\sin 8x\cdot\ln\dfrac{x}{8}$.

85. $y=arctg\dfrac{x-1}{x+1}$. 86. $y=e^{\cos 5x}$. 87. $y=\arcsin(2\ln^3 x)$.

88-90-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning hosilasini logarifmik differensiallash yordamida toping.

88. $y=x^{x+1}$. 89. $y=(\cos 2x)^{\sin x}$. 90. $y=\left(\frac{1}{x}\right)^{\arcsin x}$.

91*. $y=\sqrt[5]{\frac{(1-x^2)\cos x}{(x^2+1)^3}}$ funksiya uchun $y'(0)$ ni hisoblang.

92-104-topshiriqlarda berilgan oshkormas funksiyalarning $y'=\frac{dy}{dx}$ hosilasini toping.

92. $3x+7y-15=0$. 93. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. 94. $\cos(x+y)=y$.

95. $arctg(x+y)=x$. 96. $xy^2-6x+5y$ к 0 97*. $5^x+5^y=5^{x+y}$.

98. $\begin{cases} x=3t-2 \\ y=t^3+t \end{cases}$, 99. $\begin{cases} x=\sqrt[3]{t} \\ y=\sqrt[4]{t} \end{cases}$, 100. $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=arcctgt \end{cases}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-\frac{1}{6}}$ ni toping.

101. $\begin{cases} x=\frac{3t}{1+t^3} \\ y=\frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$ va $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$ larni toping. 102. $\begin{cases} x=t^2+3 \\ y=t^5-7 \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}$ toping.

103. $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}$ i toping. 104. $\begin{cases} x=e^{-\varphi} \\ y=e^{3\varphi} \end{cases}$, $\frac{dy}{dx}$ toping.

105-110-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning hosilasini toping.

105. $y=sh^2x$. 106. $y=x-thx$. 107. $y=2\sqrt{chx-1}$.

108. $y=\ln(thx)$. 109. $y=\arcsin(thx)$. 110. $y=\sqrt{1+sh^2 4x}$.

111-114-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning differensialini toping.

111. $y=\ln(1+x^2)$. 112. $y=5^{x^2}\arccos\frac{1}{x}$. 113. $y=\sin^2 x$. 114. $y=\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

115-117-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

115 $y=3x^4-5x^3+2x^2-x$. 116. $y=\frac{1}{x-1}$ .117. $y=\ln tgx$. 118. $y=\frac{1}{6}(e^{3x}+e^{-3x})$.

119*. $y=\sin x$ funksiyaning n-tartibli hosilasini toping.

120. Agar $y=x(\ln x-1)$ bo`lsa, dy, d^2y, d^3y larni toping.

121-123- topshiriqlarda berilgan ifodalarning taqribiy qiymatini toping.

121. $\sqrt[4]{17}$. 122. $\lg 10{,}08$. 123. $tg 44^o 52'$.

149-154-topshiriqlarda berilgan limitlarni Lopital qoidasidan foydalanib toping.

148. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$. 150. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. 151. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$ 152. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}$.

153. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$ 154.155. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$ 156 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$ 157 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$,

158. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$, 159 . $\lim\limits_{x\to 0}x^x$, 160. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

161. $f(x)=\ln x$ funksiyaning x-1 ning darajalari bo`yicha $(x-1)^2$ hadgacha yoying.

162. $f(x)=e^{3x}$ funksiyani $x-3$ ning darajalari bo`yicha to`rtinchi darajali ko`phadga yoying.

163-164-.topshiriqlarda berilgan ifodaning qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblang.

163. $\cos 41^o$. .164. $\sqrt[3]{121}$.

181. $y=x-\sin x$ funksiya butun son o`qida o`suvchi ekanligini isbotlang.

182-185-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning monotonlik intervallarini toping.

182. $y=x^2-4x+7$; 183. $y=1-x^3+x^2$; 184. $y=\frac{x^2-x+4}{x-1}$;

185. $y=x^2\ln x$.

186. $y=\frac{1}{x^2}$ funksiya ekstremumlarga ega emasligini ko`rsating.

187-191-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning ekstremumlarini tekshiring.

187. $y=x^2-5x+3$; 188. $y=(x-1)^2(x-5)^2$; 189. $y=\frac{5x}{1+x^2}$;

190. $y=\frac{x^2+1}{x}$; 191*. $y=\frac{\ln x}{x}$;

192-194-topshiriqlarda berilgan funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

192. $y=2x^2-8x+1$, $[0,3]$ kesmada. 193. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $(-\infty,+\infty)$ intervalda

194. Radiusi R bo`lgan yarim doiraga eng katta perimetrli to`g`ri to`rtburchakni ichki chizing.

214-216 topshiriqlarda funksiya grafigi qavariqligini botiqligini va bukilish nuqtalarini toping.

214. $y=x^4-10x^3+36x^2-31x-37$.

215. $y=\ln(1+x^2)$. 216. $y=x\ln x$.

217-222 topshiriqlarda berilgan egri chiziqlarning asimptotalarini toping.

217. $y=\frac{x}{x^2-4x+3}$, 218. $y=\frac{x^3}{x^2+9}$, 219. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$,

220. $y=x-2+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$, 221. $\begin{cases}x=t,\\ y=t+2arctgt\end{cases}$, 222. $r=\frac{a}{\varphi}$.

223-387- topshiriqlarda berilgan funksiyalarni tekshiring va ularning grafigini yasang.

223. $y=\frac{1}{x^2-1}$, 224. $y=\frac{1}{1+x^2}$, 225. $y=\frac{1}{x^3-1}$, 226. $y=\frac{8-x^3}{x^2}$

227. $y=e^x-x$, 228. $y=x-\ln x$.

Aniqmas integrallar

Quyidagi integrallarni hisoblang

1. $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$

2. $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx$

3. $\int\frac{x-2}{x^3}dx$

4. $\int\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^3}dx$

5. $\int\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$

6. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)dx$

7. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx$

8. $\int(2-3x)^5dx$

9. $\int\frac{dx}{1+9x^2}$

10. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

11. $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

12. $\int\frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$

13. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$

14. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

15. $\int(2tgx+3ctgx)^2dx$

16. $\int x\cos x^2 dx$ 17. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$ 18. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{1+x^4}}$

19. $\int x\sqrt{2-3x^2}dx$ 20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+4)}$ 21. $\int tg^2 axdx$

Quyidagi integrallarni o`rniga quyish usuli bilan hisoblang.

22. $\int \sqrt{4-x^2}dx$ 23. $\int \frac{(\arcsin x)^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 24. $\int \sin(2-3x)dx$ 25. $\int \frac{xdx}{1+x^2}$

Quyidagi integrallarni bo`laklab integrallang

26. $\int x\ln xdx$ 27. $\int \arcsin xdx$ 27. $\int x^2 arctgxdx$ 28. $\int (x+1)e^x dx$

29. $\int e^{2x}\cos xdx$ 30. $\int (x-1)\ln xdx$ 31. $\int \arccos xdx$

Quyidagi integrallarni hisoblang

32. $\int \frac{x^3}{x-2}dx$ **33.** $\int \frac{xdx}{(x-1)^2}$

34. $\int \frac{xdx}{2x^2+x-3}$ **35.** $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$

36. $\int \frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$ **37.** $\int \frac{5x+3}{x^2+10x+29}dx$

38. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+2x^3+3}$ **39.** $\int \frac{dx}{(x^2+2)^3}$

41. $\int \frac{2x+3}{(x^2+2x+5)^2}dx$ **42.** $\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$

43. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}dx$ **44.** $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$

45*. $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$ **46*.** $\int \frac{dx}{(x^2-6x+10)^3}$

Quyidagi integrallarni hisoblang

7. $\int (1+2\cos x)^2 dx$ 48. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

49. $\int (1-\sin 2x)^2 dx$

50. $\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x} dx$

51. $\int \cos^4 x dx$

52. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx$

53. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$

54. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

55. $\int x\sqrt{a-x}dx$

56. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$

57. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}$

58. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax-x^2}}$

59. $\int tg^3 x dx$

60 $\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x dx$

61. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$

62. $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$

63. $\int \sin^5 x dx$

64. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$

65. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

66. $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

67. $\int \frac{xdx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$

68. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{1+x^3}}$

69. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$

Aniq integrallar

Quyidagi integrallarni hisoblang

70. $\int_1^3 x^3 dx$,

71. $\int_1^4 \sqrt{x}dx$,

72. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$,

73. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx$,

74. $\int_0^3 e^{\frac{x}{3}} dx$,

75. $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$,

76. $\int 3x^2 dx$,

77. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$,

78. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$,

79. $\int_0^1 \frac{dz}{(2z+1)^3}$,

80. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} dx$,

81. $\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx$,

82. $\int_{\pi/8}^{\pi/4} ctg^2 x dx$,

83. $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x-1}}$

84. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$,

85. $\int_0^{\sqrt{a}} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$,

91. $\int_0^{\pi/2} x^2\sqrt{9-x^2}dx$,

86. $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^5}$,

87. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$,

88. $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$,

89. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{2x-1}$, 90. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosxdx}{1+\sin^2 x}$, 91. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}dx$, 92. $\int\limits_0^{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)dx$,

93. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{x^2dx}{1-4x^3}$, 94. $\int\limits_0^{0.5} e^{\sin \pi x}\cos \pi x dx$, 95. $\int\limits_0^{0.5} 2e^{\sin x}\cos x dx$

Aniq integrallarni bo`laklab integrallash yordamida hisoblang. $\int\limits_0^1 arctgxdx$,

96. $\int\limits_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$,

97. $\int\limits_0^1 xe^{3x}dx$,

98. $\int\limits_0^1 \ln(x+1)dx$,

99. $\int\limits_{-1}^1 xarctgxdx$,

100. $\int\limits_1^e x^2 \ln xdx$,

102. $\int\limits_0^{\pi/2} e^x \cos xdx$, 103. $\int\limits_0^1 x\sin xdx$, 104. $\int\limits_1^e \sqrt[4]{x}\ln xdx$,

105. $\int\limits_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$, 106. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos xdx$, 107. $\int\limits_0^1 xarctgxdx$

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan sohani yuzini toping.

108. $y=-x^2, x+y+2=0$,

109. $x=12\cos t+5\sin t, y=5\cos t-12\sin t$,

110. $y=16/x^2, y=17-x^2$ (I - CHorak) ,

111. $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ (astroida) ,

112. $y^2=4x^3, y=2x^2$,

113. $xy=20, x^2+y^2=41$ (I - CHorak) ,

114. $y=\sin x, y=\cos x, x=0$,

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarni koordinata o`qlari atrofida aylantirishidan hosil bo`lgan jismlarning hajmini toping.

115. $xy=9, y=3, y=9$ 0y o`k atrofida ,

116. $y=10-x^2, \quad y=x^2+2$ 0y o`qi atrofida,

117. $y=4-x^2, \quad 2x+y-4=0$ 0x o`qi atrofida,

118. $x^2+y^2=a^2$ 0*x* o`qi atrofida,

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarni koordinata o`qlari atrofida aylantirishidan hosil bo`lgan jismlarning hajmini toping.

119. $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, *x*қ0, *y*қ0, (*x*>0) 0*x* o`k atrofida ,

120. *x*^{2}–*y*^{2}қ4, yқ2 0y o`k atrofida ,

121. $y = \frac{1}{4}x^2$ egri chiziqning OU o`qi atrofida $y = 1$ $y = 5$ chegaralarda aylanishidan
,

122. $y = x^3$ kubik parabolaning OU o`qi atrofida $y = 1$ $y = 8$,

Quyidagi egri chiziqlar yoylari uzunliklarini hisoblang.

117. *y*қln(sin*x*), $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

118. $x = \frac{1}{3}t^3 - t, \quad y = t^2 + 2, \quad 0 \le t \le 3$

119. $x = e^t \cos t.,\quad y = e^t \sin t \qquad t = 0 \qquad t = \ln \pi$

Egri chiziq yoyining 0x o`qi atrofida aylanishdan hosil bo`lgan jism sirti yuzini hisoblang.

120. *y*қx^3, $0 \le x \le \frac{1}{2}$

121. *x*қ*t*-sin*t*, *y*қ1-cos*t* (bir arkasi)

122. $y = \frac{64}{x^2 + 16}, \quad x^2 = 8y$ 0*x* o`q atrofida

123 . хқа cos^{3}t, уқа sin^{3}t tenglama bilan berilgan astroidani statik momenti va inersiya momentini toping (2 chorak)

124 . уқ4-х^2 va уқ3 chiziqlar bilan chegarlangan parabolik segmentning Ox o`qiga nisbatan inersiya momentini toping.

125. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ egri chiziq va Ox o`qi bilan chegaralangan yarim aylanani og`irlik markazi koordinatalarini toping.

126. хқ0, $x = \frac{\pi}{2}$, уқ0, уқcosx chiziqlar bilan chegaralangan sohani og`irlik markazi koordinatalarini toping. .

127. уқ4-х^2 parabola va уқо чизиқ bilan chegaralangan sohani og`irlik markazi koordinatalarini toping. .

Xosmas integrallar

Xosmas integrallarni hisoblang va yaqinlashuvchilikka tekshiring

128. $\int_0^{+\infty} \frac{ardtgx}{1 + x^2} dx$

129. $\int_0^2 \frac{x^5}{4 - x^2} dx$

130. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$

131. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4 + x^2}$

132. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$

133. $\int_0^1 x \lim^2 x dx$

Quyidagi integralni to`g`ri to`rtburchak formulasi yordamida hisoblang.

134. $\int_0^{2n} x\sin x dx$

Quyidagi integrallarni trapesiya formulasi yordamida hisoblang.

135. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, \quad (n=12)$ 136. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx, \quad (n=6)$

Quyidagi integrallarni Simpson formulasi yordamida hisoblang.

137. $\int_1^9 \sqrt{x}dx, \quad (n=4)$ 138. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}\,dx, \quad (n=6)$

Ko`p o`zgaruvchili funksiyalar

Funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1. $z=\frac{4}{x^2+y^2}$ 2. $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 3. $z=\sqrt{xy}$ j: $xy \geq 0$

4. $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 5. $z=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ 6. $z=\frac{xy}{y-x}$

7. $z=\ln(y^2-4x+8)$ 8. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ 9. $Z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

10. $z=\ln(x+2y)$ 11. $Z=\frac{1}{xy-2}$ 12. $Z=x^2y-\sqrt{y}$

Funksiyaning xususiy hosilalarini toping

13. $z=x-y$ 14. $z=x^3y-y^3x$ 15. $z=\frac{U}{V}+\frac{V}{U}$

16. $z=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ 17. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$ 18. $z=arctg\frac{x}{y}$

19. $u=x^y$ $\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\ell nx}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2y;$ ekanini isbot qiling.

To`liq differensialini toping

20. $z=x^2y$ 21. $z=\frac{x+y}{x-y}$ 22. $z=arctg(xy)$

23. $u=x^{yz}$ 24. $z=\sin(xy)$ 25. $Z=\frac{xy}{x-y}$

26. $z=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ 27. $Z=e^{\frac{s}{t}}$ 28. $U=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

29. $z=\frac{x^2}{1-2y}$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalar topilsin.

30. $z=\frac{xy}{x-y}$ funksiya berilgan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2}{x-y}$ ekanligi isbot qilinsin.

31. $z=x^y$ funksiya berilgan $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ ekanligi isbot qilinsin.

32. $z=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$ funksiya berilgan $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ larni toping.

33. $z=\ell n(x^2+y^2)$ $\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=?$

34. $u=e^{x-2y}$; $x=\sin t$; $y=t^3$; $\frac{du}{dt}=?$:

35. $u=z^2+y^2+zy$; $z=\sin t$; $y=e^t$; $\frac{du}{dt}=?$

36. $z=x^2\ell ny$; $x=\frac{u}{v}$; $y=3u-2v$; $\frac{\partial z}{\partial u}=?$; $\frac{\partial z}{\partial v}=?$

37. $z=\frac{x^2}{y}$; $x=u-2v$; $y=v+2u$; $\frac{\partial z}{\partial u}=?$; $\frac{\partial z}{\partial v}=?$.

38. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$; $\frac{dy}{dx}=?$

39. $x^2+y^2+z^2-6x=0$; $\frac{\partial z}{\partial x}=?$; $\frac{\partial z}{\partial y}=?$.

40. $x^2-4y^2=4$; $\frac{dy}{dx}$ topilsin.

41. $xy+\ell ny+\ell nx=0$; $\frac{dy}{dx}$ topilsin.

42. $y+x=e^{\frac{y}{x}}$; $\frac{dy}{dx}$ topilsin.

43. $x^2+y^2+z^2-2zx=a^2$; $\frac{\partial z}{\partial x}$; $\frac{dz}{dy}$ topilsin.

44. $z=4(x-y)-x^2-y^2$ funksiya berilgan ekstremumini toping.

45. $z=x^2+xy+y^2+x-y-1$ ekstremumini toping.

46. $x=y=\frac{a}{\sqrt[3]{3}}$ nuqta $z=x^2+xy+y^2+\frac{a^3}{x}+\frac{a^2}{y}$ funksiyaning minimum nuqtasi ekanligini ko`rsating.

47. $z=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$ ekstremumini toping.

Ikki o`lchovli integrallar

Quyidagi integrallarni hisoblang

48. Hisoblang. $\int_0^{2\pi} cos^2 x dx \int_0^a y dy$

49. Hisoblang. $\int_1^3 dx \int_{x^3}^{x} (x-y)dy$

50. $\iint_D y \ln x dxdy$ D soha quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan. $xy=1, \quad y=\sqrt{x} \quad x=2$

Quyida berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzini hisoblang

51. $x=y^2-2y \quad x+y=0$

52. $y=2-x \quad y^2=4x+4$

53. $y^2=4x-x^2 \quad y^2=2x$

54. $3x^2=25x \quad 5x^2=9y$

Quyida berilgan chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzini hisoblang

55. $y^2+2y-3x+1=0, \quad 3x-3y-7=0$

56. $y=4x-x^2 \quad y=2x^2-5x$

Egri chiziqli integrallarni hisoblash

Quyidagi egri chiziqli integrallar hisoblansin

57. $\int_L (x^2+y^2)dx+ydy$ egri chiziqli integralni hisoblang. Bu yerda L $y=e^x$ egri chiziqning A(0;1) nuqtalardan B(1;e) bo`lgan yoyini hisoblang.

58. $\int y^2dx+2xy\,dy$ *интеграл* $x=a\cos t_1 \; y=a\sin t$ aylana bo`yicha.

59. $\int ydx-xdy$ *интеграл* $x=\cos t_1 \quad y=a\sin t$ ellips yoyi bo`yicha.

60. $\int\left(\frac{x}{x^2+y^2}dx-\frac{y}{x^2+y^2}dy\right)$ integral markazi koordinatalar boshida bo`lgan aylana bo`yicha.

61. $\int\frac{ydx+xdy}{x^2y^2}$ integral $y=x$ to`g`ri chiziqning $x=1$ dan $x=2$ gacha kesmasi bo`yicha.

62. $\int yzdx+xzdy+xydz$ integral t 0 dan 2π gacha o`zgarganida $x=a\cos t \quad y=a\sin t$, $z=rt$ chizig`ining yoyi bo`yicha.

Sonli qatorlar

Berilgan qatorlar uchun yaqinlashishning zaruriy sharti bajariladimi

1. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+...;$

2. $2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+...+\frac{n+1}{n}+...;$

3. $\frac{2}{1}+\frac{5}{8}+\frac{10}{27}+\frac{17}{64}+...+\frac{n^2+1}{n^3}+...;$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+9)\cdot arcsin\frac{1}{n^2+5}.$

5 . $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

Berilgan qatorlarni yaqinlashuvchi ekanini ko`rsating va yig`indisini toping.

6. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+...;$

7. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+...;$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(1+n)^2}$ 9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

Berilgan qatorlarni taqqoslash alomatlaridan foydalanib, yaqinlashishi tekshirilsin

10. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 2^5}+...+\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}+...$

11. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+...+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+...$

12. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\frac{4}{15}+\frac{5}{24}...+\frac{n+1}{(n+2)n}+...$

13. $\frac{1}{1+5}+\frac{1}{1+5^2}+\frac{1}{1+5^3}+...+\frac{1}{1+5^n}+...$

14. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{8}+...+\sin\frac{\pi}{2^n}+...$

Berilgan qatorlarni Dalamber alomatidan foydalanib yaqinlashishi tekshirilsin

15. $tg\frac{\pi}{4}+2tg\frac{\pi}{8}+3tg\frac{\pi}{16}+...+n\cdot tg\frac{\pi}{2^{n+1}}+...$

16. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+...+\frac{2\cdot 5\cdot 8...(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9...(4n-3)}+...;$

17. $sin\frac{\pi}{2}+4\,sin\frac{\pi}{4}+9\,sin\frac{\pi}{8}+...+n^2\cdot sin\frac{\pi}{2^n}+...$

18. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{27\cdot 6}+...+\frac{1\cdot 3\cdot 5...(2n-1)}{3^n\cdot n!}+...;$

19. $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{(\sqrt{3})^2}+\frac{5}{(\sqrt{3})^3}+...+\frac{2n-1}{(\sqrt{3})^n}+...;$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n+1)\cdot 2^n}$ 21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{(3n+4)\cdot 3^n}$

Koshi alomatiga asosan quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin

22. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+...+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+...$

23. $arcsin 1 + arcsin^2 \frac{1}{2} + arcsin^3 \frac{1}{3} + ... + arcsin^n \frac{1}{n} + ...$

24. $\frac{1}{ln 2} + \frac{1}{ln^2 3} + \frac{1}{ln^3 4} + \frac{1}{ln^4 5} + ... + \frac{1}{ln^n (n+1)} + ...$

25. $arctg 1 + arctg^2 \frac{1}{2} + arctg^3 \frac{1}{3} + ... + arctg^n \frac{1}{n} + ...$

26. $\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^5 + ... + \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1} + ...;$

27. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \cdot \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2};$ 28. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n.$

Integral alomati bilan quyidagi qatorlarning yaqinlashishi tekshirilsin

29. $\frac{1}{2\ln^2 2} + \frac{1}{3\ln^2 3} + \frac{1}{4\ln^2 4} + ...;$ 30. $\frac{e^{-\sqrt{1}}}{\sqrt{1}} + \frac{e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} + ...;$

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)};$ 32. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}};$

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$ 34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

35. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^4-9}$

Ishorasi navbatlashuvchi qatorlar

Berilgan qatorlarni yaqinlashishi aniqlansin:

36. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} ...;$

37. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} ...;$

38. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - ... + (-1)^n \frac{1}{n^2+1} + ...;$

39. $1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - ... + (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5} + ...;$

40. $\sqrt{\frac{1}{101}} - \sqrt{\frac{1}{201}} + \sqrt{\frac{1}{301}} - \sqrt{\frac{1}{401}} + ... + (-1)^{n-1} \sqrt{\frac{1}{100n+1}} + ...$

41. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\frac{1}{17}-...+(-1)^n\,\frac{1}{n^2+1}+...;$

42. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdots\cdots(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots$

43. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+...;$

Funksional qatorlar

44. Ushbu $\frac{4-x}{7x+2}+\frac{1}{3}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^3+...;$ funksional qatorning $x=0$ va $x=1$ nuqtalarda yaqinlashishi tekshirilsin.

45. Ushbu $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^4}+\frac{1}{1+x^6}+..;$ funksional qatorning yaqinlashishi tekshirilsin va yaqinlashish sohasi topilsin.

Berilgan funksional qatorlarning yaqinlashish intervalini toping.

46. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\frac{x^5}{\sqrt{5}}+...+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+...$

47. $\frac{x}{1+x}+\frac{x^2}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^4}{1+x^8}+\frac{x^5}{1+x^{10}}+...+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+...$

48. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\frac{1}{1+x^4}+...+\frac{1}{1+x^n}+...$

49. $\frac{\cos x}{e^x}+\frac{\cos 2x}{e^{2x}}+\frac{\cos 3x}{e^{3x}}+\frac{\cos 4x}{e^{4x}}+\frac{\cos 5x}{e^{5x}}+...+\frac{\cos nx}{e^{nx}}+..$

50. $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\frac{\sin\ 3x}{3^2}+\frac{\sin 4x}{4^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}+...+\frac{\sin nx}{n^2}+..$

51. $e^{-x}+e^{-4x}+e^{-9x}+e^{-16x}+...+e^{-n^2x}+...$

Berilgan darajali qatorlarning yaqinlashish intervali aniqlansin va intervalining chegaralarida ham qatorni yaqinlashishi tekshirilsin:

52. $1+\frac{1}{3\cdot 2}x+\frac{1}{3^2\cdot 3}x^2+\frac{1}{3^2\cdot 4}x^3+...\frac{1}{3^n\cdot(n+1)}x^n+;$

53. $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-...+(-1)^n\,\frac{x^n}{n}+...$

54. $x+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+\frac{x^4}{4000}+...+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+...$

55. $1+2x^2+4x^4+...+2^{n-1}x^{2(n-1)}+...$

56. $x+4x^2+27x^3+256x^4...+(n\cdot x)^n+...$

57. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{(2n)!}$; 58. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(n+1)\cdot 7^{n-1}}$; 59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n n}{(n+1)2^n}$;

Oddiy differensial tenglamalar

Quyidagi differensial tenglamalarni yeching

1. $x(y^2-4)dx+ydy=0$ 2. $y'\cos x=y/\ln y,\ y(0)=1$ 3. $y'=tgx\cdot tgy$

4. $(1+x^2)dy+ydx=0$, $y(1)=1$ 5. $\ln(\cos y)dx+xtgy\ dy=0$

6. $\frac{yy'}{x}+e^y=0$, $y(1)=0$ 7. $y/y'=\ln y$, $y(2)=1$ 8. $y'+\sin(x+y)=\sin(x-y)$

9. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0$ 10. $y'=2^{x-y}$, $y(-3)=-5$

11. $y'=sh(x+y)+sh(x-y)$ 12. $x(y^6+1)dx+y^2(x^4+1)dy=0,\ y(0)=1$.

Quyidagi bir jinsli tenglamalarni yeching.

13. $(x^2+2xy)dx+xydy=0$ 14. $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x},\ y(1)=\frac{\pi}{2}$

15. $xy'\sin(\frac{y}{x})+x=y\sin(\frac{y}{x})$ 16. $xy+y^2=(2x^2+xy)\cdot y'$

17. $xyy'=y^2+2x^2$ 18. $y`=(\frac{y}{x})+\cos(\frac{y}{x})$

19. $(x^2+y^2)dx-xydy=0$ 20. $(x+y+2)dx+(2x+2y-1)dy=0$

21. $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0$ 22. $2(x+y)dy+(3x+3y^{-1})dx=0, y(0)=2$

23. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0$ 24. $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0$

Quyidagi chiziqli tenglamalarni yeching

25. $y'cos^2x+y=tgx,\ y(0)=0$ 26. $y'-ythx=ch^2x$

27. $y'+\frac{xy}{1-x^2}=\arcsin x+x$ 28. $xy'-y=x^2\cos x$

29. $y'+2xy=xe^{-x^2}$ 30. $y'cosx+y=1-\sin x$

31. $y'+\frac{y}{x}=x^2y^4$ 32. $(x^2\ln y-x)y'=y$

33. $y'+\frac{2y}{x}=3x^2y^{4/3}$ 34. $y'-\frac{y}{x-1}=\frac{y^2}{x-1}$

35. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$

36. $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x$, $y(0) = 1$

37. $ydx + \left(x + x^2 y^2\right)dy = 0$

Quyidagi differensial tenglamalarning chap tomonlari to`liq differensialdan iborat ekanligi tekshirilsin va tenglamalar yechilsin

38. $\left(e^x + y + \sin y\right)dx + \left(e^y + x + x\cos y\right)dy = 0$

39. $\left(x + y - 1\right)dx + \left(e^y + x\right)dy = 0$

40. $2xydx + \left(x^2 - y^2\right)dy = 0$

41. $\left(2 - 9xy^2\right)xdx + \left(4y^2 - 6x^3\right)ydy = 0$

42. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

43. $\left(10xy - 8y + 1\right)dx + \left(5x^2 - 8x + 3\right)dy = 0$

44. $3\mathrm{x}^2(1 + \mathrm{lny})\mathrm{dx} = (2y - \dfrac{x^3}{y})dy$

45. $2x\cos^2 ydx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$

Quyidagi differensial tenglamalarning integrallovchi ko`paytuvchilari topilsin va tenglamalar yechilsin

46. $\left(x^2 - y\right)dx + xdy = 0$

47. $y^2dx + \left(yx - 1\right)dy = 0$

48. $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + ydy = 0$

49. $xy^2\left(xy' + y\right) = 1$

50. $\left(x^2 + 3\ln y\right)ydx = xdy$

51. $2xtgydx + \left(x^2 - 2\sin y\right)dy = 0$

52. $\left(e^{2x} - y^2\right)dx + ydy = 0$

53. $\left(1 + 3x^2 \sin y\right)dx - xctgydy = 0$

54. $\left(\sin x + e^y\right)dx + \cos xdy = 0$

Quyidagi tenglamalarni yeching

55. $y^{IV}=cos^2 x\ ,\ y(0)=\dfrac{1}{32}\ ,\ y'(0)=0\ ,\ y''(0)=\dfrac{1}{8}\ ,\ y'''(0)=0.$

56. $y'''=x\sin x\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0\ ,\ y''(0)=2.$

57. $y'''\sin^4 x=\sin 2x.$ 59. $y''=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x.$

58. $y'''=xe^{-x}\ ,\ y(0)=0\ ,y'(0)=2\ ,y''(0)=2.$

59. $y'''=\dfrac{6}{x^3}\ ,\ y(1)=2\ ,\ y'(1)=1\ ,\ y''(1)=1.$

60. $y''=4\cos 2x\ ,\ y(0)=0\ ,\ y'(0)=0.$

61. $y''=\dfrac{1}{1+x^2}.$ 64. $y''=\dfrac{1}{\cos^2 x}\ ,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\ln\sqrt{2}\ ,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1.$

62. $y'''=x^{-2}.$ 66. $y^{IV}=\cos x.$ 67. $y''=\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

63. $y''=xe^x\ ,\ y(0)=1\ ,\ y'(0)=2.$

64. $y''=\sin 2x\ ,\ y(0)=6\ ,\ y'(0)=0.$

Quyidagi tenglamalarni yeching

65. $x^3y''+x^2y'=1$

66. $y''+y'tgx=\sin 2x$

67. $y''x\ln x=y'$

68. $xy''-y'=e^x\cdot x^2$

69. $y''+2xy'^2=0$

70. $(1-x^2)y''-xy'=2$

71. $2xy'''\cdot y''=y''^2-a^2$

72. $(1+x^2)y''+1+y'^2=0$

73. $x^2y''=y'^2$

74. $y''(e^x+1)+y'=0$

75. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3$

76. $y''tgx=y'+1$

77. $xy''+y'+x=0$

78. $y''-\dfrac{1}{x-1}y'=x(x-1),\ y(2)=1,\ y'(2)=-1$

79. $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$

80. $(1-x^2)y''+xy'=2$

81. $y\cdot y''+y'^2=0$

82. $y''+2y(y')^3=0$

83. $y''tgy=2y'^2$

84. $y''(2y+3)-2y'^2=0$

85. $y(1-\ln y)y''+(1+\ln y)y'^2=0$

86. $y''(1+y)=y'^2+y'$

87. $yy''+y=y'^2$

88. $y'^2+2yy''=0$

89. $yy''-y'^2=0$ va $y(0)=1,\quad y'(0)=2$

90. Egrilik radiusining oy o`qdagi proeksiyasi o`zgarmas a bo`lib $ox$ o`q bilan esa koordinata boshida kesishuvchi egri chiziq tenglamasini tuzing.

91. Suyuqlikka tashlangan m massali jism o`z og`irligi tufayli cho`ka boshladi. Agar suyuqlik qarshiligi jism tezligiga proporsional bo`lsa, harakat qonunini toping.

92. $2y\,y''=(y')^2$ 93. $2y\,y''=1+y'^2$ 94. $y''=y'/\sqrt{y}$

95. $y''y^3=1$ 96. $y\cdot y''=y'^2+y^2\,ln\,y$

97. $y_1=shx$ va $y_2=chx$ funksiyalar $y''-y=0$ tenglamaning xususiy yechimlari bo`lsa, ular fundamental sistema tashkil etadimi?

98. $y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{1}{4x^2}\right)y=0$, $x\neq 0,$ tenglamaning $y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}\sin x,\ y_2=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos x$ xususiy yechimlaridan umumiy yechim tuzib bo`ladimi?

Quyida berilgan funksiyalar o`zining aniqlanish sohasida chiziqli erkli bo`lishi yoki bo`lmasligini aniqlang:

99. $x+1$, $2x+1$, $x+2.$

100. $2x^2+1$, x^2-1, $x+2.$

101. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+a}$, $\sqrt{x+2a}$

102. $ln(2x)$, $ln(3x)$, $ln(4x)$

103. $y_1=e^{-2x}$ va $y_2=e^x$ funksiyalari $y''+y'-2y=0$ tenglamaning xususiy yechimlari bo`lsa, umumiy yechim tuzilsin.

104. $y_1=1$ va $y_2=e^{2x}$ funksiyalar $y''-2y'=0$ tenglamaga, xususiy yechim bo`lishini va fundamental sistema tashkil etishini ko`rsating.

105. $y''-4y'+5y=0$ tenglama uchun $y_1=e^{2x}\cos x$, $y_2=e^{2x}\sin x$ funksiyalar xususiy yechim bo`lsa, ularni fundamental sistema tashkil etishini ko`rsating va umumiy yechimni yozing.

106. $y''-y=0$ tenglamaga $y_1=e^{-x}$ xususiy yechim bo`lsa y_2 - ikkinchi xususiy yechimni toping va umumiy yechimni yozing.

Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlari topilsin

112. $y''-4y'+3y=0$ 113. $y''-4y'+4y=0$

114. $y''-4y'+13y=0$ 115. $y''-4y=0$

116. $y''+4y=0$ 117. $y''+4y'=0$

111. $y''-y'-2y=0$ 119. $y''+25y=0$

120. $y''-y'=0$ 121. $y''+4y'+4y=0$

122. $y^{IV}-2y'''+y''=0$ 123. $y^{IV}+a^4y=0$

124. $y^{IV}+5y''+4y=0$ 125. $y''-3y'+2y=0,$

126. $y''+2ay'+a^2=0,$ 127. $y''+2y'+5y=0,$

121. $x''(t)-2x'(t)-3x(t)=0,$ 129. $x''(t)+w^2x(t)=0,\ (w=const)$

130. $s''(t)+as'(t)=0,\ (a=const)$

Quyidagi tenglamalarning boshlang`ich yoki chetki shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin

131. $y''+5y'+6y=0,\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=-6$

132. $y''-10y'+25y=0,\qquad y(0)=0,\qquad y'(0)=1$

133. $y''-2y'+10y=0,\qquad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=0,\qquad y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=e^{\frac{\pi}{6}}$

134. $y''+3y'=0,\qquad y(0)=1,\qquad y'(0)=2$

135. $y''+9y=0,\qquad y(0)=0,\qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

136. $y''+y=0,\qquad y(0)=1,\qquad y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$

137. $9y''+y=0,\qquad y\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2,\qquad y'\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0.$

131. $y''-y=0,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=4.$

139. $y''+2y'+2y=0,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=1.$

Quyidagi tenglamalarni yeching

140. $y''-2y'+y=e^{2x}$

141. $y''-4y=8x^3$

142. $y''+3y'+2y=sin\,2x+2\,cos\,2x$

143. $y''+y=x+2e^x$

144. $y''+3y'=9x$

145. $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5$

146. $y''-3y'+2y=e^x$

147. $y''+5y'+6y=e^{-x}+e^{-2x}$

141. $y'''+y''=6x+e^{-x}$

149. $y''+y'-2y=6x^2$

150. $y''-5y'+6y=13\,sin\,3x$

151. $y''+2y'+y=e^x$

152. $y''+y'+2{,}5y=25\,cos\,2x$

153. $4y''-y=x^3-24x$

154. $y''-4y'+3y=e^{5x},\ y(0)=3,\ y'(0)=9$

155. $y''-8y'+16y=e^{4x},\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

156. $y''+y=cos\,3x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=4,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

157. $2y''-y'=1,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

151. $y''+4y=sin\,2x+1,\quad y(0)=\frac{1}{4},\quad y'(0)=0$

159. $y''+4y=cos\,2x,\quad y(0)=y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

160. $y''-y=2shx,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$

161. $y''-4y'+8y=61e^{2x}\,sin\,x,\ y(0)=0,\ y'(0)=4$

Matematik-fizika tenglamalari.

Kanonik ko`rinishga keltiring.

162. $x^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}+y^2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

163. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}+3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial x}+6\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$

164. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 165.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\cdot\partial y}-3\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\partial z}{\partial x}+6\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$

Quyidagi (217-237) masalalarda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamaning

$u=|_{t=0}=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=F(x)$ boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi Dalamber usuli bilan yechimi topilsin.

166. $f(x)=x(2-x),\qquad F(x)=e^{-x}$

167. $f(x)=\cos x,\qquad F(x)=\sin x$

168. $f(x)=e^{-x},\qquad F(x)=sin^2 x$

169. $f(x)=x(2-x),\qquad F(x)=e^{x}$

222. $f(x)=e^{x},\qquad F(x)=4x$

223. $f(x)=cos\ x,\qquad F(x)=cos^2 x$

224. $f(x)=sin\ x,\qquad F(x)=8x^3$

225. $f(x)=x^2,\qquad F(x)=sin\ x$

226. $f(x)=sin^2 x,\qquad F(x)=cos\,x$

227. $f(x)=e^{2x},\qquad F(x)=x^3$

228. $u|_{t=0}=x^2,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0$ boshlang`ich shartlarni bajaruvchi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani Dalamber usuli bilan yeching.

229.Dalamber usuli bilan $u|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=x$ boshlang`ich shartlarni bajaruvchi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani yechimini toping.

230 $u|_{t=0}=x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=-x$ bo`lsa, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani yechimini toping.

231. $u|_{t=0}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=-x$ bo`lsa $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani yechimini toping.

232. $u|_{t=0}=\sin x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=1$ boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani $t=\frac{\pi}{2a}$ vaqtdagi yechimini toping.

233. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ tenglamani $t=\pi$ vaqtdagi $u|_{t=0}=\sin x,\quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=\cos x$ boshlang`ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

234. Uchlari xq0 va xql da mahkamlangan boshlang`ich holati OAV siniq chiziqni ifodalovchi torning ixtiyoriy t vaqtdagi holatini boshlang`ich tezligi 0 bo`lgan xolda aniqlang.

235. Uchlari xq0 va xql da maxkamlangan torning boshlang`ich og`ishi nolga teng bo`lib, boshlang`ich tezligi esa $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} \cos\frac{\pi\left(x-\frac{l}{2}\right)}{h}, & агар \quad \left|x-\frac{l}{2}\right|<\frac{h}{2} \\ 0, & агар \quad \left|x-\frac{l}{2}\right|>\frac{h}{2} \end{cases}$ formula bilan aniqlansa, torning ixtiyoriy t vaqtdagi xolatini aniqlang.

236. Uchlari xq0 va xq1 da maxkamlangan boshlang`ich xolati $u=h\left(x^4-2x^3+x\right)$ ni ifodalovchi boshlang`ich tezligi 0 bo`lgan torning ixtiyoriy t vaqtdagi xolatni aniqlang.

237. Uchlari xқ0 va xқ3 ga maxkamlangan, boshlang`ich xolati OAB siniq chiziqni ifodalovchi torning ixtiyoriy t vaqtdagi xolatni aniqlang. Bunda O(0,0) , A(2,-1), B(3,0) koordinatalarga ega.

238. Uchlari xқ0 va xқl da maxkamlangan, torni dastlabki og`ishi 0 o`lib, boshlang`ich tezligi esa

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{cases} v_0 \ ,агар & \left|x-\frac{l}{2}\right|<\frac{h}{2} \\ 0, \ агар & \left|ч-\frac{l}{2}\right|>\frac{h}{2} \end{cases}$$

formula bilan ifodalansa torning ixtiyoriy t vaqtdagi xolatni aniqlang.

239. Uzunligi ℓ ga teng, tashqi muhit ta`siridan muxofazalangan va $u|_{t=0}=f(x)=\frac{cx(l-x)}{l^2}$ boshlang`ich temperaturaga ega bo`lgan bir jismli sterjen berilgan. Sterjenning oxirlari nolga teng temperaturada tutib turiladi. Sterjenning $t \succ 0$ vaqtdagi temperaturasi topilsin.

240. Agar sterjenning $u|_{t=0}=f(x)=\frac{2\pi}{l}x-\sin\frac{2\pi x}{l}$ boshlang`ich temperaturasi berilgan va oxirlari issiqlikdan muxofazalangan ya`ni, $\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0}=\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l}=0$ bo`lsa, uzunligi ℓ ga teng va sirti ham issiqlikdan muhofazalangan sterjenda temperatura taqsimotini toping.

241. Agar uzunligi ℓ ga teng sirti issiqlikdan muhofazalangan sterjenning boshlag`ich temperaturasi $f(x)=\begin{cases} \frac{2u_0}{l}, \ агар & 0\le x\le\frac{l}{2} \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), \ агар & \frac{l}{2}<x<l \end{cases}$ bo`lib, sterjenning uchlari ham issiqlikdan muxofazalangan bo`lsa, shu sterjenda issiqlik taqsimotini toping.

242-244-masalalarda doira ichida Laplas tenglamasini qanoatlantiruvchi va doira chegarasida

$u\Big|_{r=1} = f(\varphi)$ funksiyaga teng bo`lgan garmonik funksiya topilsin.

242. $f(\varphi) = cos^2\varphi$ 243. $f(\varphi) = sin^3\varphi$ 244. $f(\varphi) = cos^4\varphi$

Ehtimolar nazariyasi va matematik statistika

1. Domino toshlarining to'liq majmuasidan (21 ta tosh) tavakkaliga bittasi olinadi. Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping.
A) olingan toshda 6 ochko bo'lishi; B) olingan toshda 5 ochko yoki 4 ochko bo'lishi;
C) chiqqan ochkolar yig'indisi 7 ga teng bo'lishi;
2. Tavakkaliga 20 dan katta bo'lmagan natural son tanlanganda uning 20 ning bo'luvchisi bo'lishi ehtimolligini toping.
3. Raqamlari har xil ikki xonali son o'ylangan. O'ylangan son:
A) tasodifan aytilgan ikki xonali son bo'lishi;
B) raqamlari har xil bo'lgan tasodifan aytilgan ikki xonali son bo'lishi ehtimolligini aniqlang;
4. Alohida kartochkalarga 1,2,3,4,5,6,7,1,9 raqamlari yozilgan. Kartochklar yaxshilab aralashtirilgach, tavakalliga to'rttasi olinadi va ketma-ket qator qilib teriladi. Hosil bo'lgan son 1234 bo'lishi ehtimolligini toping.
5. Qutida 100 ta lampochka bo'lib, ularning 10 tasi yaroqsiz. Tavakkaliga 4 ta lampochka olinadi. Olingan lampochkalar ichida:
A) yaroqsizlari yo'q bo'lishi; B) yaroqsizlari yo'q bo'lishi ehtimolligini toping;
6. R radiusli doiraga nuqta tashlanadi. Bu nuqta doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushishi ehtimolligini toping.
7. Tavakkaliga har biri 2 dan katta bo'lmagan ikkita x va y musbat son olinganda bu sonlarning ko'paytmasi xy birdan katta bo'lmasligi, y/x bo'linma esa ikkidan katta bo'lmasligi ehtimolligini toping.
8. Tankka qarshi minalar to'g'ri chiziq bo'ylab har 15 m ga joylashtirilgan. Endi 3 m bo'lgan tank bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar yo'nalishda kelmoqda. Tankning minaga duch kelishi ehtimolligini toping.
9. Buyum partiyasini sinashda yaroqli buyumlar nisbiy chastotasi 0,9 ga teng bo'ldi. Agar hammasi bo'lib, 200 ta buyum tekshirilgan bo'lsa, yaroqli buyumlar sonini toping.
10. Barcha yoqlari bo'yalgan kub 1000 ta teng "kubcha"larga arralangan. Tavakkaliga olingan "kubcha"ning ikkita yog'i bo'yalgan bo'lishi ehtimolligini toping.
11. Yashiqda 31 ta birinchi nav va 6 ta ikkinchi nav detal bor. Tavakkaliga 3 ta detal olinadi:
A) olingan uchchala detal birinchi nav bo'lishi; B) Olingan detallarning hech bo'lmaganda bitta- tasi birinchi nav bo'lishi ehtimolligini toping.
12. Tavakkaliga olingan telefon nomeri beshta raqamdan iborat. Unda:
A) hamma raqamlar har xil bo'lishi; B) Hamma raqamlar toq bo'lishi ehtimolligini toping.

13. Sharga kub ichki chizilgan. Nuqta tavakkaliga sharga tashlanadi. Nuqtaning kubga tushishi ehtimolligini toping.
14. Qutida 100 ta bir xil detal bo`lib, ulardan 25 tasi bo`yalgan. Tavakkaliga olingan bitta detalning bo`yalgan bo`lish ehtimolini toping?
15. Qutida tashlash ishtirokchilari qutidan 1 dan 100 gacha nomerlangan jeton oladilar. Tavakkaliga olingan birinchi jetondan 5 raqami uchramaslik ehtimolini toping?
16. Xaltachala 5 ta bir xil kub bor. Har bir kubning barcha omonlariga o, p, r, s, t xarflarining biri yozilgan. Bittalab olingan va chiqish tartibida «bir qator qilib» terilgan kublarda «sport» so`zini o`qish mumkinligi ehtimolini toping?
17. Bitta o'q uzishda nishonga tegish ehtimolligi birinchi nergan uchun P ga, ikkinchi mergan uchun 0,7 ga teng. Merganlar bir vaqtda o'q uzishganda rosa bittta o'qning nishonga tegish ehtimolligi0,31 ga tengligi ma'lum bo'lsa, P ni toping.
18. Merganning bitta o'q uzishida 10 ochko urish ehtimolligi 0,05 ga, 9 ochko urish ehtimolligi 0,2 ga, 1 ochko urish ehtimolligi 0,6 ga teng. Bitta o'q uzildi. Quyidagi hodisalarning ehtimolligini toping. A – 1 dan kam bo'lmagan ochko urilgan; B- 1 dan ko'p ochko urilgan.
19. Ustaxonada uchta stanog ishlayapti. Smena davomida birinchi stanokning sozlashi talab etish ehtimolligi 0.15 ga, ikkinchi stanok uchun 0,1 ga, uchinchi stanok uchun esa 0,12 ga teng. Stanoklar baravariga (bir paytda) sozlashni talab etmaydi deb hisoblab, Smena davomida hech bo'lmaganda bitta stanok sozlashni talab etish ehtimolligini toping.
20. Yashikda 15 ta detal bo'lib, ularning 10 tasi bo'yalgan. Yig'uvchi tavakkaliga 3 ta detal oladi. Olingan detallarning barchasi bo'yalgan bo'lishi ehtimolligini toping.
21. Biror fizikaviy kattalikni bir marta o'lchashda berilgan aniqlikdan katta bo'lgan xatolikka yo'l qo'yilishi ehtimolligi 0,4 ga teng. Uchta bog'liq bo'lmagan o'lchash o'tkazildi. Bu o'lchashlar- ning faqat bittasida yo'l qo'yilgan xato berilgan aniqlikdan katta bo'lishi ehtimolligini toping.
22. Talaba 25 ta imtixon savollaridan 20 tasiga tayyorlanishga ulgurdi.Talaba tavakkaliga olingan uchta savolning kamida ikkitasini bilishi ehtimolligini toping.
23. Yig'ish sexiga uchta avtomatdan detallar kelib tushadi. Birinchi avtomat 0,3%, ikkinchisi 0,2%, uchinchi 0,4% yaroqsiz detal ishlab chiqarishi ma'lum. Agar birinchi avtomatdan 1000 ta, ikkinchisidan 2000 ta, uchinchisidan 2500 ta detal kelib tushgani ma'lum bo'lsa, yig'ish sexiga yaroqsiz detal kelib tushganligi ehtimolligini toping.
24. Benzin qo'yish bekati yonidan yengil va yuk mashinalari o'tib turadi. Ularning 60% ini yuk mashinalari tashkil etadi. O'tib ketayotgan mashinaning benzin olish uchun to'xtash ehtimolli yuk mashinasi uchun 0,1 ga, yengil mashina uchun esa 0,2 ga teng. Benzin qo'yish bekatiga benzin quyib olish uchun mashina kelib to'xtadi. Bu yuk mashinasi ekanligini ehtimolligini toping.
25.Ikki mergan nishonga qarata o`q uzmoqda. Bitta o`q uzishda nishonga tekkizish extimoli birinchi mergan uchun 0,1; ikkinchi mergan uchun 0,7 ga teng. Bir yo`la o`q uzishda
merganlardan faqat bittasining nishonga tekkizish hodisasi ehtimolini toping.

26. Uchta mergan nishonga qarata o`q uzmoqda birinchisi nishonga tekkizish extimoli 0,7; ikkinchisiniki 0,1; uchinchisiniki 0,9 ga teng. Uchalasi birdaniga o`q uzsa:

a) faqat bittasini nishonga tekkizish hodisasi extimolini toping.

b) xech bo`lmasa bittasini nishonga tekkizish xodisasi ehtimolini toping.

v) uchchalasini birdaniga nishonga tekkizish hodisasi ehtimolini toping.

27. O'yin soqqasi 10 marta tashlanganda uchga karrali ochkolar kamida 2 marta, o'pi bilan besh marta tushishi ehtimolligini toping.

28. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimolligi 0,1 ga teng. 100 marta o'q uzilganda nishonga rosa 75 marta tegish ehtimolligini toping.

29. t vaqt ichida bitta kondensatorning ishdan chiqishi ehtimolligi 0,2 ga teng. t vaqt ichida 100 ta bir- biriga bog'liqsiz ishlovchi kondensatordan:

A) kamida 20 tasi ishdan chiqishi; B) 21 tadan kami ishdan chiqishi;

C) 14 tadan 21 tagachasining ishdan chiqishi ehtimolligini toping.

30. Do'kon 1000 shisha ma'danli suv oldi. Tashib keltirishda 1 ta shishaning sinib qolishi ehtimolligi 0,0003 ga teng. Do'konga keltirilgan shisha idishlarning:

A) rosa 2 tasi B) 2 tadan kami C) 2 tadan ko'pi

D) Hech bo'lmaganda bittasi singan bo'lishi ehtimolligini toping.

31. Tovarshunos buyumlarning 24 ta namunasini ko'rib chiqadi. Har bir namunaning sotishga yaroqli deb topilish ehtimolligi 0,6 ga teng. Tovarshunos sotishga yaroqli deb topgan namunalarning eng ehtimolli sonini toping.

32. Uzunligi a bo'lgan AB kesmaga Tavakkaliga 5 ta nuqta tashlanadi. Bunda 2 ta nuqta A nuqtadan x dan kichik masofada, 3 ta nuqta A dan x dan katta masofada yotish ehtimolligini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimolligi kesma uzunligiga proporsional va uning joylashishiga bog'liq emas.

33. Bitta o'q uzilganda nishonga tegish ehtimolligi 0,1 ga teng. 100 marta o'q uzilganda nishonga 75 tadan kam bo'magan 15 tadan ko' bo'lmagan tegishlar sonining ehtimolligini toping.

34. A hodisaning 900 ta bog`liqmas sinovning har birida ro`y berish ehtimoli $p = 0{,}8$ ga teng. A hodisaning 750 marta ro`y berish ehtimolligini toping.

35. X tasodifiy miqdorning ehtimolliklar zichligi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x \le 0 \\ ax, \text{ agar } 0 < x \le 2 \\ 0, \text{ agar } x > 2 \end{cases}$$

A) a ni toping;

B) Taqsimot funksiyani $F(x)$ toping;

C) $f(x)$ va $F(x)$ funksiyaniing grafigini chizing.

36. X tasodifiy miqdor [0;2] kesmada tekis taqsimot qonuniga ega,

A) ehtimolliklar zichkigi $f(x)$ va taqsimot funksiyasi $F(x)$ ni toping; B) 0<x<0,5 hodisaning ehtimolligini toping. C) $f(x)$ va $F(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizing.

37. Ushbu

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblang

38. Qutida 7 ta shar bo'lib, ularning to'rttasi oq, qolganlari qora. Qutidan tavakkaliga 3 ta shar olinadi. X - olingan oq sharlar soni $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ni toping.

39. ikkita o'yin soqqasi baravariga 2 marta tashlanadi. X -ikkala o'yin soqqasidagi tushgan juft ochkolar soni. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ larini toping.

40. X - uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar x } \le 0 \\ 2x, \text{ agar } 0 < x \le 1 \\ 0, \text{ agar x } > 1 \end{cases} \qquad M(X),\ D(X),\ \sigma(X) \text{ larini toping.}$$

41. Nishonga qarata 4 ta oq uzildi. Har bir otishda oqning nishonga tegish ehtimoli 0,1 ga teng. Nishonga tegishlar sonining $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ni toping.

42. X - uzluksiz tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar x } \le -\frac{\pi}{2} \\ 0{,}5\cos x, \text{ agar } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, \text{ agar x } > \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad M(X),\ D(X),\ \sigma(X) \text{ larini toping.}$$

43. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha bosh to`plam o`rta qiymatining siljimagan $\overline{X}_T$ bahosini toping.

X_i	2	4	1
n_i	7	3	5

44. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha tanlanma dispersiyasini toping.

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

45. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha bosh to`plam o`rta qiymatining siljimagan $\overline{X}_T$ bahosini toping.

X_i	2	5	7	10
n_i	16	12	1	14

46. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini yasang.

X_i	1	2	4	5	1
n_i	5	10	15	7	3

47. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha chastotalar va nisbiy chastotalar poligonini yasang.

X_i	3	5	1	12
n_i	6	12	6	15

48. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

$X_i - X_{i+1}$	5-10	10-15	15-20	20-25

n_i	2	6	12	10

49. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo`yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang.

$X_i - X_{i+1}$	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
n_i	2	4	1	4	2