ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

БОЗОРОВ ЖЎРАБЕК ТОҒАЙМУРОТОВИЧ

МАТРИЦАВИЙ СОҲАЛАРДА КАРЛЕМАН ФОРМУЛАЛАРИ ВА ГОЛОМОРФ ДАВОМ ЭТТИРИШ МЕЗОНЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши – 2021

УДК: 517.55

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ
ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

БОЗОРОВ ЖЎРАБЕК ТОҒАЙМУРОТОВИЧ

МАТРИЦАВИЙ СОҲАЛАРДА КАРЛЕМАН ФОРМУЛАЛАРИ ВА ГОЛОМОРФ ДАВОМ ЭТТИРИШ МЕЗОНЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.3.PhD/FM206 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Қарши давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифаси (qarshidu uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим тармоғида (www ziyonet uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Шоимкулов Баходир Аллабердиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Имамкулов Седнер Акрамович** физика-математика фанлари доктори
	Курбанов Бухарбай Турганбаевич физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Қарши давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «21» январь соат 14:00 даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Қарши давлат университети, Физика-математика факультети (102-хона).

Диссертация билан Қарши давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225 34 13).

Диссертация автореферати 2021 йил «08» январь куни тарқатилди.
(2021 йил «08» январь даги 1 рақамли реестр баённомаси).

Ю.Х.Эшкобилов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д., профессор

А.А.Имомов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д. (DSc), доцент

А.А.Имомов
Илмий даражалар берувчи илмий кенгаш
ҳузуридаги илмий семинар раиси ўринбосари,
ф.-м.ф.д. (DSc), доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида ўтказилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар айрим ҳолларда кўп комплекс ўзгарувчили ва матрица ўзгарувчили голоморф функцияларнинг хоссаларини ўрганишга келтирилади. Интеграл формулалар кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясини қуришда ва унинг татбиқларида кучли конструктив аппарат ҳисобланади. Улар голоморф функцияларнинг соҳа ичидаги қиймати билан соҳа чегараси ёки соҳа чегарасининг қисмидаги қийматлари орасидаги боғлиқлиги масалаларида ва голоморф давом эттириш масалаларида асос бўлиб ҳисобланади. Шунинг учун кўп комплекс ўзгарувчили голоморф функциялар назариясида ва унинг татбиқларида интеграл формулаларни тадқиқ қилиш долзарб йўналишлардан бири ҳисобланади.

Дунё миқёсида ҳозирги кунда матрица ўзгарувчили голоморф функцияларнинг интеграл формулаларини ва уларнинг татбиқларини топиш масалаларига қизиқиш ортди. Бу матрица ўзгарувчили функциялар интеграл формулалари назарияси усулларининг алгебра, математик физика ва бошқа фанлар бўлимларида қўлланиши билан боғлиқ. Бунда умумлашган интеграл формулаларни топиш, уларни махсус соҳаларда голоморф давом эттириш ва голоморф тиклаш масалаларида қўллаш ва уларнинг татбиқларини тадқиқ қилиш мақсадли илмий ишлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқларга эга бўлган кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назариясининг долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, кўп ўзгарувчили комплекс анализда умумлашган интеграл формулалар топиш ва классик теоремаларнинг умумлашмаларини исботлашга доир масалаларга алоҳида эътибор қаратилди. Бундай масалаларни ечишда бизнинг олимлар томонидан классик теоремалар аналоглари ва умумлашган интеграл формулалар олиш йўли билан голоморф функцияларни соҳа чегарасининг қисмидаги қийматлари ёрдамида тиклаш, соҳа чегараси қисмида берилган функцияни голоморф давом эттириш масалаларини ечишда яхши натижаларга эришилган. "Функционал анализ, математик анализ ва кўп ўзгарувчили комплекс анализ фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари" этиб белгиланди[1]. Қарорнинг ижросини таъминлашда, комплекс анализ, алгебра масалаларини ҳал этишда интеграл формулалар билан бир қаторда кўп комплекс ўзгарувчили функцияларни тиклаш ва голоморф давом эттириш назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сон қарори

Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора тадбирлари тўғрисида»ги, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чоратадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устивор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Комплекс анализ усулларини фаннинг бошқа соҳаларига қўлланилиши ортганлиги муносабати билан ҳозирда классик масалага айланган голоморф функцияларни соҳа ичида унинг соҳа чегарасининг қисмидаги қийматлари бўйича тиклаш масаласи юзага келган.

Бу йўналишда бир ўлчамли ҳолда биринчи натижа 1926 йилда Т.Карлеман томонидан хусусий ҳолда олинган. Карлеман формуласи Г.М.Голузин ва В.И.Крилов томонидан "ёрдамчи функсия" функция киритиш усули ёрдамида комплекс текисликдаги ихтиёрий бир боғламли соҳалар учун умумлаштирилди. М.М.Лаврентьев ядрони аппроксимациялаш усулини таклиф этди. Кўп ўлчовли ҳолда голоморф функцияларни унинг чегара қисмидаги қийматлари бўйича тикловчи Карлеман формулалари Д.Патил, Ш.А.Даутов и Е.С.Мкртчян, Л.А.Айзенберг, А.М.Кытманов и Т.Н.Никитина, Ш.Ярмухамедов, Г.Худайберганов, С.Косбергенов, Б.А.Шоимқулов, Б.Курбанов ва бошқаларнинг ишларида олинган. Бунда А.М.Кытманов томонидан келтирилган бир жинсли соҳа автоморфизмларига асосланган усулни алоҳида таъкидлаш лозим.

Кўп ўлчовли комплекс анализда мавжуд бўлган интеграл формулалар бир ўлчамли ҳолда Коши интеграл формуласига хос бўлган хусусиятларга бир вақтда эга эмас: универсалликга, яъни тхтиёрий соҳа учун ўринлилик ва ядронинг голоморфлиги хусусиятларига. Масалан, ядроси голоморф бўлмаган Мартинелли-Бохнер интеграл формуласи чегараси бўлакли-силлиқ ихтиёрий соҳа учун ўринли, ядроси голоморф бўлган Вейл формуласи фақат махсус соҳалар синфи учун ўринли. Татбиқларда голоморф ядроли интеграл формулалар анча самаралироқ. Бундай формулалар Г.М.Хенкин ва Рамирез де Ареллан томонидан қатьий псевдоқавариқ соҳалар учун, Л.А.Айзенберг томонидан доиравий соҳалар учун олинган. Матрицалар фазосида шунга ўхшаш формулалар Хуа Ло-кен, Г.Худойберганов, Б.А.Шоимкулов ва бошқаларнинг ишларида олинган.

Комплекс анализнинг юқори қизиқишга эга масалаларидан яна бири бутун чегарада эмас, балки унинг бир қисмида берилган функцияни голоморф давом эттириш шартларини аниқлаш масаласидир. Комплекс текисликдаги бирлик доира бўлган ҳолда Г.Ц.Тумаркин чегаранинг мусбат ўлчовли тўпламида берилган функцияни полиномлар кетма-кетлиги билан аппроксимациялашга асосланиб бирлик доирага голоморф давом эттириш критериясини олди. Унинг натижасини Голузин-Крилов усули ёрдамида Д.Патил умумлаштирди. М.Крейн ва П.Я.Нудельман ҳақиқий ўқнинг кесмасида берилган функцияни пастки ярим текисликка голоморф давом эттириш масаласини ечишди. А.Штейнер бошқа усулларни қўллаб, сўнги олимлар натижасининг умумлашмасини келтирди. Кўп ўлчовли ҳолда натижалар Н.Н.Тарханов, Л.А.Айзенберг, Г.М.Хенкин, Е.М.Чирка, А.Садуллаев, У.Рудин, В.С.Владимиров, А.М.Кытманов, Г.Худойберганов, С.Косбергенов, Б.А.Шоимкулов ва бошқаларнинг ишларида олинган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлари режасидаги Ф-4-31 «Плюрипотенциаллар назарияси ва кўп ўлчовли анализда интеграл формулалар» (2012-2016 йиллар) ва Қарши давлат университети илмий-тадқиқот ишлар режасидаги ОТ-Ф-4-03 “Узлуксиз ҳамда дискрет вақтли аниқ динамик системалар, қисмий интеграл операторлар спектрлари” (2017-2020 йиллар) фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади матрицавий поликругда ва классик соҳалар декарт кўпайтмасида голоморф функциялар учун Карлеман формуласини олиш, махсус аналитик матрицавий полиэдрда Вейл формуласи ва Руше теоремасининг вариантларидан бирини олиш, остовда ёки остовнинг қисмида берилган функцияни поликругга ва матрицавий поликругга голоморф давом эттириш масалаларини ўрганишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

матрицавий поликругда Карлеман формуласини олиш;

классик соҳалар декарт кўпайтмасида Карлеман формуласини олиш;

$\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазода махсус аналитик матрицавий полиэдрни аниқлаш ва ва унинг асосий хоссаларини ўрганиш;

$\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги махсус аналитик матрицавий полиэдрда Вейль формуласининг аналогини олиш;

$\mathbb{C}^n[m\times m]$ фазодаги махсус аналитик матрицавий полиэдрда Руше теоремасининг вариантларидан бирини исботлаш;

оддий ва матрицавий поликругда Коши типидаги интеграл учун “сакраш ҳақидаги” теоремаларни исботлаш;

оддий ва матрицавий поликруглар остовларида берилган функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремаларни исботлаш;

оддий ва матрицавий поликруг остовининг қисмида берилган функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги теоремаларни исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Матрицавий поликруг, классик соҳалар декарт кўпайтмаси, махсус аналитик матрицавий полиэдр, Карлеман формуласи, Вейл формуласи, Руше теоремаси, функсияларни голоморф давом эттириш.

Тадқиқотнинг предмети. Матрицавий поликруг ва классик соҳалар декарт кўпайтмаси учун Карлеман формулалари, матрицавий полиэдр учун Вейль формуласи, поликруг ва матрицавий поликругларнинг остовидан ва остовининг қисмидан голоморф давом эттириш.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида кўп ўзгарувчили комплекс анализ ва матрица ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

матрицавий поликругда Карлеман формуласи олинган;

классик соҳалар декарт кўпайтмасида Карлеман формуласи олинган;

$\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ фазода махсус аналитик матрицавий полиэдр таърифи келтирилган ва унинг асосий хоссалари ўрганилган;

махсус аналитик матрицавий полиэдрда Вейль формуласининг аналоги олинган;

махсус аналитик матрицавий полиэдрда Руше теоремасининг вариантларидан бири исботланган;

оддий ва матрицавий поликругда Коши типидаги интеграл учун "сакраш ҳақидаги" теоремалар исботланган;

оддий ва матрицавий поликругларнинг остовида берилган функцияларни голоморф давом эттириш ҳақида теоремалар исботланган;

оддий ва матрицавий поликруглар остовининг қисмида берилган функцияларни голоморф давом эттириш ҳақидаги мезонлар топилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

исботланган Карлеман формулаларидан ва Вейль формуласи ҳамда голоморф давом эттириш мезонларидан матрицавий функциялар назариясининг мос келувчи масалаларида, шу билан бир қаторда комплекс анализ масалаларини ечишда ва уларнинг татбиқларида фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функциялар назариясининг интеграл формулалар, локал қолдиқ, қаторларга ёйиш усулларидан ҳамда голоморф акслантиришлар хоссаларидан фойдаланилган математик мулоҳазалар ва исботларнинг қатъийлиги билан асослангган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқотда олинган натижаларнинг илмий аҳамияти улардан чегарада ёки чегаранинг қисмида берилган функцияларни тиклаш ва голоморф давом эттириш масалаларида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертация натижаларининг амалий аҳамияти олинган формулалар ёрдамида соҳанинг бутун чегарасида ёки чегаранинг бир қисмида берилган функцияни соҳа нуқталарида голоморф тиклаш мумкин ҳамда улардан остовдан ёки остовнинг қисмидан голоморф давом эттиришда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Матрицавий соҳаларда карлеман формулалари ва голоморф давом эттириш мезонларини ўрганиш бўйича олиб борилган тадқиқотнинг илмий натижалари асосида:

матрицавий поликруг ва классик соҳалар Декарт кўпайтмасида Карлеман формулаларидан, махсус аналитик матрицавий полиэдрда Вейль формуласи аналоги ва Руше теоремасининг бир вариантидан ҳамда голоморф давом эттириш мезонларидан Сибир федерал университети математика ва фундаментал информатика институти илмий ходимлари томонидан РФФИ, 18-51-41011 Узб_т. “Многомерный комплексный анализ” мавзусидаги амалий лойиҳада фойдаланилган (Сибир федераль университетининг 2020 йил 25 ноябрдаги №8302-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши махсус соҳаларда голоморф функцияларнинг хоссаларини ўрганиш имконини берган;

матрицавий соҳаларда Карлеман формулалари ва $\mathbb{C}^n$ фазодаги бирлик поликругда голоморф давом эттириш мезонлари билан боғлиқ илмий хулосалардан Хоразм Маъмун академиясининг Ф4-ФА-0-16928 рақамли “Комплекс потенциаллар назариясида плюрирегулярлик хусусиятлари ва мосланган манбали чекли дифференциал айирмали тенгламалар” мавзусидаги фундаментал лойиҳада фойдаланилган (Ўзбекистон Республика Фанлар академиясининг 2020 йил 21 декабрдаги №2/1255-2895-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши комплекс фазоларда голоморф қавариқ қобиқларини аниқлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 4 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 10 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та, жумладан 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертацияънинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат бўлиб, 94 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар рўйхати ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Дастлабки тушунчалар”** деб номланувчи биринчи бобда асосий белгилашлар ва зарур бошланғич маълумотлар келтирилган, шу ўринда диссертацияънинг асосий натижаларини баён қилишда керак бўладиган муҳим таърифлар ва теоремалар келтирилган бўлиб, иккинчи параграфида масаланинг қўйилиши келтириб ўтилган.

Диссертациянинг иккинчи боби **“Матрицавий соҳаларда Карлеман интеграл формулалари ва Вейл формуласи”** деб номланиб, бу бобда матрицавий бирлик поликруг ва ҳар хил классик соҳаларнинг декарт кўпайтмаси учун Карлеман формуласи ўрганилган, шу билан бирга махсус аналитик матрицавий полиэдрда Вейл формуласи ва Руше теоремасининг вариантларидан бири ўрганилган.

2.1 параграфда Харди синфига тегишли функцияларнинг матрицавий поликруг остовининг қисмида берилган қиймати орқали шу соҳанинг ихтиёрий ички нуқтасида қийматини тиклашдан фойдаланиб, матрицавий поликругда интеграл формула олинган.

Матрицавий бирлик поликруг $T_n = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : Z^j \left(Z^j \right)^* < I, j = \overline{1,n} \right\}$, нинг $A \in T_n$ ва 0 нуқталарини ўзаро мос қўювчи автоморфизмини қараймиз. Бу автоморфизм

$$\Phi_A(Z) = \left(\Phi_A^1(Z^1), ..., \Phi_A^n(Z^n) \right)$$

кўринишда бўлиб, бунда

$$\Phi_A^j(Z^j) = Q^j(Z^j - A^j)(I - (A^j)^* Z^j)^{-1}(R^j)^{-1}, \; j = 1, 2, ..., n,$$

Q^j ва $R^j - [m \times m]$ - матрицалар

$$\bar{Q}^j \left(I - \bar{A}^j A^{j'} \right) Q^{j'} = I,$$

$$\bar{R}^j \left(I - A^{j'} \bar{A}^j \right) R^{j'} = I,$$

$$Q^j A^j + A^j R^j = 0$$

шартларни қаноатлантиради.

Бизга $E = \left(E^1, ..., E^n \right) \subset S(T_n)$ мусбат ўлчовли $\mu E > 0$ тўплам берилган бўлсин. $S\left(T_n\right)$ остовнинг $\mathbb{C}^{n-1}\left[m \times m \right]$ фазодаги проекциясини $S\left(T_{n-1}\right)$ орқали белгилаймиз. $S\left(T_{n-1}\right)$ тўпламнинг нуқталарини эса $\xi = \left(\xi^2, ..., \xi^n \right)$ орқали белгилаймиз.

Қуйидаги тўпламларни аниқлаб оламиз

$$E_{0,\xi} = \left\{ Z : Z \in E, \Phi_0^1(Z^1) = \theta, \Phi_0^j(Z^j) = \theta \Phi_0^j(\xi^j), j = \overline{2,n}, \theta \in S(\tau) \right\},$$

$$\tilde{E}_0 = \left\{ Z \in E : \mu_1 E_{0,\xi} > 0 \right\}.$$

$E_{0.\xi}$ ва $\tilde{E}_0$ мусбат ўлчовли тўпламлар бўлиб, уларнинг декарт кўпайтмаси E тўпламни беради, яъни $E = E_{0,\xi} \times \tilde{E}_0$.

Қуйидаги ёрдамчи функцияни киритамиз: $\varphi_0 = \exp\psi_0$, бунда

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E^1_{0,\xi^1}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta} \tag{1}$$

ва

$$E^1_{0,\xi^1} = \left\{ \xi^1 \in E_{0,\xi} : \xi^1 = \lambda\zeta, |\lambda| = 1 \right\},$$

юқоридаги тўплам учун $E^1_{0,\xi^1} \times \tilde{E}_{0,\xi} = E_{0,\xi}$ тенглик ўринли.

Аввал бу параграфдаги асосий теоремани исботлашда ишлатиладиган леммани келтирамиз.

Лемма 1. *Айтайлик* $f \in H^1(T_n)$, $E \subset S(T_n)$, $\mu(E) > 0$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринли*

$$f(0) = \frac{m}{\int\limits_{\tilde{E}_o} d\mu_{n-1}} \lim_{l \to \infty} \int\limits_E f(Z) \left[\frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu.$$

Энди қуйидаги тўпламни қараймиз

$$E_{A,\xi} = \left\{ Z : Z \in E, \Phi^1_A(Z^1) = \theta, \Phi^j_A(\xi^j) = \theta\Phi^j_A(\xi^j), j = \overline{2,n}, \theta \in S(\tau) \right\}.$$

Бу тўплам деярли барча A ва $\grave{\xi}$ лар учун μ_1 ўлчов бўйича мусбат ўлчовли. Бу $\left\{ \grave{\xi} : \grave{\xi} \in S(T_{n-1}), \mu_1 E_{A,\xi} > 0 \right\}$ тўпламни $\tilde{E}_A$ орқали белгилаймиз, бу тўпламнинг Фубин теоремасига кўра $(mn - m)-$ ўлчамли Лебег ўлчови мусбат. Тушунарлики $E_{A,\xi} \times \tilde{E}_A = E$ бўлади.

Худди юқоридагидек ёрдамчи функция киритиб оламиз

$$\varphi_A = \exp\psi_A, \ \psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E^1_{A^1,W^1}} \frac{\eta + \lambda}{\eta - \lambda} \frac{d\eta}{\eta},$$

бунда

$$E_{A^1,W^1} = \left\{ \xi^1 \in E^1, \xi = \left(\Phi^1_A\right)^{-1} \left(\lambda \left(\Phi^1_A\right)^{-1}(w) \right), |\lambda| = 1 \right\}, \ W \in \Phi^1_A(SU(m)).$$

Бу параграфдаги асосий натижа қуйидаги теоремадан иборат.

Теорема 1. *Айтайлик* $f \in H^1(T_n)$, $E \subset S(T_n)$, $\mu(E) > 0$ *берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $A \in T_n$ *нуқта учун қуйидаги формула ўринли*

$$f(A) = \frac{m}{\mu_{mn-m}(\Phi^{-1}_A(\tilde{E}_A))\mu\left(\Phi^{-1}_A(\tilde{E}_{A,\xi})\right)} \times$$

$$\times \lim_{l \to \infty} \int\limits_E f(Z) \left[\frac{\varphi_A(Z)}{\varphi_A(A)} \right]^l \prod_{j=1}^n H\left(A^j, \bar{Z}^j\right) d\mu(Z)$$

бунда

$$H(A^j,\overline{Z}^j)=\frac{1}{\det(I^{(m)}-A^jZ^j)^m}$$ *умумлашган доира учун Коши-Сеге ядроси.*

2.2 параграфда классик соҳалар декарт кўпайтмаси кўринишида ифодаланган соҳа учун Карлеман формуласи олинган.

Айтайлик D соҳа D_1 ва D_2 классик соҳалар декарт кўпайтмаси кўринишида аниқланган бўлсин:

$$D=D_1\times D_2=\{Z=(Z^1,Z^2):Z^1\in D_1,Z^2\in D_2\},$$

D соҳанинг остови S ҳам D_1 ва D_2 соҳалар остовлари S_1 ва S_2 ларнинг декарт кўпайтмаси орқали аниқланади: $S=S_1\times S_2$.

D_1 ва D_2 соҳалар автоморфизмларидан фойдаланиб D соҳа автоморфизмини қурамиз.

Маълумки, D_1 соҳа автоморфизми

$$W_1=W_{1,A^1}=Q^1(Z^1-A^1)\left(I-\left(A^1\right)^*Z^1\right)(R^1)^{-1},$$

бунда A^1- $[m\times k]$ тартибли матрица, Q^1- $[m\times m]$ тартибли матрица ва R^1- $[k\times k]$ тартибли матрицалар бўлиб, улар

$$\overline{Q^1}\left(I-\overline{A^1}\left(A^1\right)'\right)\left(Q^1\right)'=I^{(m)},$$

$$\overline{R^1}\left(I-\left(A^1\right)'\overline{A^1}\right)\left(R^1\right)'=I^{(m)},$$

$$Q^1A^1+A^1R^1=0$$

шартларни қаноатлантиради.

D_2 соҳа автоморфизми қуйидагича

$$W_2=W_{2,A^2}=R^2(Z^2-A^2)(I-\overline{A^2}Z^2)^{-1}\left(\overline{R^2}\right)^{-1},$$

бунда A^2,R^2 матрицалар

$$\overline{R^2}\left(I-\overline{A^2}\left(A^2\right)'\right)\left(R^2\right)'=I,$$

$$R^2A^2+A^2R^2=0$$

шартларни бажаради.

W_1 ва W_2 автоморфизмлардан фойдаланиб D соҳа автоморфизмини қуйидагича қурамиз

$$W=(W_1,W_2).$$

У ҳолда W автоморфизм $0\in D$ нуқтани $A=(\mathrm{A}^1,\mathrm{A}^2)\in D$ нуқтага ўтказади ва аксинча.

$E_0\subset S(D)$, $\mu(E_0)>0$ тўплам аниқлаймиз

$$E_{0,\xi}=\left\{Z\in E_0:W_{1,0}(Z^1)=\theta,W_{2,0}(Z^2)=\theta W_{2,0}(\xi^2),\theta\in S(D_1)\right\},$$

$$\tilde{E}_0=\left\{Z\in E_0:\mu_1E_{0,\xi}>0\right\}.$$

Қуйидагича ёрдамчи функция қурамиз $\varphi_0 = \exp\psi_0$ ва

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E^1_{0,\xi^1}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta}$$

бунда E^1_{0,ξ^1} – худди (1) каби аниқланган.

Бу белгилашлар учун қуйидаги лемма ўринли.

Лемма 2. *Айтайлик* $f \in H^1(D)$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринли*

$$f(0) = \frac{k}{\mu_2(\tilde{E}_o)\mu_{(u)}}\lim_{l\to\infty}\int\limits_{E_0} f(Z)\left[\frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)}\right]^l d\mu.$$

$E \subset S$ Лебег ўлчови $\mu(E) > 0$ бўлган тўплам бўлсин.

Қуйидаги тўпламларни қараймиз

$$E_{A,\xi} = \left\{Z : Z \in E; W_{A^1}(Z^1) = \theta, W_{A^2}(Z^2) = \theta W_{A^2}(\xi)\right\},$$

$$\tilde{E}_A = \left\{Z : Z \in S, \mu_1 E_{A,\xi} > 0\right\}.$$

Фубини теоремасига кўра $\tilde{E}_A$ тўпламнинг $n(n+1)/2$– ўлчовли Лебег ўлчови мусбат.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз

$$\varphi_A = \exp\psi_A, \text{ где}$$

$$\psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_{A_1,\Phi_1}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta},$$

$$E_{A^1,W^1} = \left\{\xi \in E_{A,\xi}, \xi = \left(W_{1,A^1}\right)^{-1}\left(\lambda\left(W_{1,A^1}\right)^{-1}(w)\right), |\lambda| = 1\right\}, w \in W_{1,A^1}(S_1).$$

$\tilde{E}_{A^1}$ – тўплам E_{A^1,W_1} тўпламнинг тўлдирувчиси, яъни $E_{A,\xi} = E_{A^1,W_1} \times \tilde{E}_{A^1}$.

2.2 параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадан иборат.

Теорема 2. *Айтайлик* $f \in H^1(D)$, $E \subset S(D)$, $\mu(E) > 0$ *берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $A \in D$ *нуқта учун қуйидаги формула ўринли*

$$f(A) = \frac{k}{\mu\left(E_A\right)\mu\left(\tilde{E}_{A_1}\right)}\lim_{l\to\infty}\int\limits_E f(\xi)\left[\varphi(\xi)\left\{\varphi(A)\right\}^{-1}\right]^l H(\xi, A)d\mu$$

бунда

$$H(\xi, A) = H_1(\xi^1, A^1)H_2(\xi^2, A^2),$$

$H_j(\xi^j, A^j)$ – D_j, $j = 1,2$ *соҳа учун Коши – Сеге ядроси.*

2.3 параграфда $\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ фазодаги махсус аналитик матрицавий полиэдрда голоморф функциялар учун Вейл формуласи ва Руше теоремасининг вариантларидан бири олинган.

Интеграл формулалар асосида локал қолдиқ тушунчаси ётади. Шунинг учун аввал бизнинг ҳолда локал қолдиқ таърифини келтирамиз.

Бизга $a \in \mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ нуқтанинг бирор атрофи U_a ва

$$f = \left(f^1, f^2, \ldots, f^n\right) : \mathbb{C}^n\left[m\times m\right] \to \mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$$

U_a да голоморф акслантириш берилган бўлсин, бунда f^j $(j=\overline{1,n})$ $m\times m$ тартибли матрица ва f акслантириш учун a нуқта яккаланган нол. U_a атрофда ётувчи ва f акслантириш нолини сақловчи циклни $\Gamma_{f,\varepsilon}=\left\{Z\in U_a: f^j\left(f^j\right)^*=\varepsilon^2 I,\, j=\overline{1,n}\right\}$ орқали белгилаймиз.

Ушбу $h(z):U_a\to \mathbb{C}$ голоморф функциянинг a нуқтадаги $f(z)$ акслантиришга нисбатан локал чегирмасини

$$\underset{a}{res}\, _f(h)=\int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}}\frac{hd\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\det^m f^j}$$

формула орқали аниқлаймиз.

Энди махсус аналитик матрицавий полиэдр таърифини киритамиз. Айтайлик $G\subset \mathbb{C}^n[m\times m]$ қандайдир соҳа ва G соҳада голоморф

$$f:\mathbb{C}^n[m\times m]\to \mathbb{C}^n[m\times m] \qquad (2)$$

акслантириш берилган бўлсин.

r радиусли матрицавий поликруг қараймиз:

$$T_{n,r}=\left\{Z:Z^j\left(Z^j\right)^*<r^2I,\, j=\overline{1,n}\right\},\ r\in \mathbb{R}_+,$$

ва унинг прообразани $f^{-1}(T_{n,r})=\left\{Z:f^j(Z)\left(f^j(Z)\right)^*<r^2I,\, j=\overline{1,n}\right\}$ орқали белгилаймиз.

Агар ушбу $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ тўплам G соҳага нисбатан компакт (яъни $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)\Subset G$) бўлса, у ҳолда $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ тўпламни f акслантириш билан боғлиқ полиэдрик тўплам дейилади.

Лемма 3. *Ихтиёрий полиэдрик тўплам $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)=\Pi_{f,r}$ чекли сондаги боғламли компоненталардан ташкил топган.*

Таъриф. *Полиэдрик тўплам $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ нинг боғламли компонентасини махсус аналитик матрицавий полиэдр деб атаймиз.*

Махсус аналитик матрицавий полиэдрни $\Pi_{f,r}$ орқали белгилаймиз.

$\Pi_{f,r}$ соҳанинг остови

$$\Gamma_{f,r}=\left\{\xi:f^j(\xi)\left(f^j(\xi)\right)^*=r^2I,\, j=\overline{1,n}\right\}$$

каби аниқланади. Юқорида киритилган тушунчалар учун қуйидаги лемма ўринли.

Лемма 4. $\Pi_{f,r}$ *махсус аналитик матрицавий полиэдрнинг* $\Gamma_{f,r}$ *остови деярли барча* $r>0$ *сонлар учун силлиқ бўлади.*

Бундан буёғига $\Gamma_{f,r}$ остовни фақат силлиқ деб ҳисоблаймиз. Қуйидаги теорема ўринли.

Теорема 3. *Айтайлик* $\Pi_{f,r}$ *махсус аналитик матрицавий полиэдр* $f \in A^n\left(\Pi_{f,r}\right)$ *акслантириш ёрдамида аниқланган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\varphi \in A_c\left(\Pi_{f,r}\right)$ *функция учун қуйидаги формула ўринли бўлади*

$$C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{\varphi(\xi)df}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m\left(f^j(\xi)\right)} = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f)\varphi(a) ,$$

бунда $E_f = \left\{Z : Z \in \Pi_{f,r}, f(Z) = 0\right\}$ - f *акслантиришнинг ноллари тўплами,* $C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{d\xi}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m\left(\xi^j\right)} = 1$.

Махсус аналитик матрицавий полиэдр $\Pi_{f,r}$ нинг бирор U атрофида Хефер теоремасига кўра шундай $P_\nu^k(\xi, z) \in O(U \times U)$ функциялар топиладики, барча $(\xi, z) \in (U \times U)$ нуқталар учун

$$f_k(\xi) - f_k(z) = \sum_{l=1}^{nm^2} (\xi_l - z_l) P_l^k(\xi, z), k = \overline{1, nm^2}$$

тенгликлар бажарилади.

$[nm^2 \times nm^2]$ тартибли $\left\|P_l^k\right\|$ матрицанинг детерминантини $H(\xi, Z)$ орқали белгилаймиз.

Бу параграфнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

Теорема 4. *Агар* $f \in O\left(\overline{\Pi}_{f,r}\right)$ *бўлса, у ҳолда ихтиёрий* $Z \in \Pi_{f,r}$ *учун қуйидаги интеграл формула ўринли бўлади*

$$h(Z) = \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi) H(\xi, Z) d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m\left(f^j(\xi) - f^j(Z)\right)} .$$

Исботланган теоремадан модулнинг максимум принсипи келиб чиқади.

Натижа 1. *Агар* $h \in O\left(\overline{\Pi}_{f,r}\right)$ *бўлса, у ҳолда* h *функция ўзининг модул бўйича максимум қийматини* $\Gamma_{f,r}$ *да эришади.*

Энди махсус аналитик матрицавий полиэдр учун Руше теоремасининг вариантларидан бирини исботлаймиз.

Бизга (2) акслантириш берилган бўлсин.

Теорема 5. *Айтайлик* $g \in A^n(\overline{\Pi}_{f,r})$ *акслантириш* $\Gamma_{f,r}$ *да қуйидаги тенгсизликларни бажарсин*

$$|g_k| < \frac{|f_k|}{m\sqrt{n}}, \quad 1 \le k \le nm^2.$$

У ҳолда $f(Z)$ *ва* $f(Z)+g(Z)$ *акслантиришлар* $\Pi_{f,r}$ *соҳада бир хил сондаги ноларга эга бўлади.*

Диссертациянинг учинчи боби **“Соҳа чегарасининг қисмида берилган функцияларни соҳа ичига голоморф давом эттириш масалалари ҳақида”** деб номланиб, бу бобда мос равишда бирлик ва матрицавий бирлик поликруг остовида ёки остовнинг бир қисмида берилган функцияларни голоморф давом эттириш масалалари ўрганилган.

Учинчи бобнинг 3.1 параграфида бирлик поликруг остовида ва остовнинг бир қисмида берилган функцияларни голоморф давом эттириш мезонлари топилган.

Айтайлик $f \in L^2(T^n)$ функция берилган бўлсин. Қуйидаги Коши типидаги интегрални қараймиз:

$$F(z) = \int_{T^n} \frac{f(\xi)\,dm_n}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\overline{\xi}_k z_k\right)}. \qquad (3)$$

Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$D_\beta = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : (-1)^{\beta_1}\left(|z_1|-1\right) < 0, (-1)^{\beta_2}\left(|z_2|-1\right) < 0, \ldots, (-1)^{\beta_n}\left(|z_n|-1\right) < 0 \right\},$$

бунда $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n), |\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$, $\beta_j = \overline{0,1},\ j = \overline{1,n}$. Тушунарлики (3) интеграл D_β соҳаларнинг ҳар бирида маънога эга ва $D_{(0,0,\ldots,0)} = U^n$. (3) интегралнинг D_β соҳалардаги қийматларини мос равишда $F_\beta(z)$ лар орқали белгилаб оламиз. (3) формуланинг ядосини D_β соҳаларда қаторга ёйиш орқали қуйидаги муносабатга эга бўламиз

$$F_\beta(z) = (-1)^{|\beta|} \sum_\alpha c_\beta(\alpha) z^{(-1)^\beta \alpha},$$

бунда

$$c_\beta(\alpha) = \int_{T^n} f(\xi)\,\xi^{(-1)^\beta \alpha} dm_n,$$

қатор коэффициенти ва $z^{(-1)^\beta \alpha} = z_1^{(-1)^{\beta_1}\alpha_1} z_2^{(-1)^{\beta_2}\alpha_2} \ldots z_n^{(-1)^{\beta_n}\alpha_n}$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Қуйидагича масала қараймиз: айтайлик $f(\xi) \in L^2(T^n, dm_n)$ бўлсин. Қандай шарт бажарилганда бу функция бирлик поликругга голоморф давом этади?

Аввал бу параграфнинг асосий натижаларини исботлашда фойдаланиладиган (3) кўринишдаги Коши типидаги интегралнинг сакраши ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Теорема 6. *Айтайлик* $f(\xi) \in L^2(T^n, dm_n)$ *бўлсин. У ҳолда барча* $F_\beta(z) \in H^2(D_\beta)$ *функциялар* T^n *нинг деярли ҳамма жойида радиаль лимит қийматларга эга ва қуйидаги тенглик ўринли бўлади*

$$F_{(0,0,\ldots,0)}(z)\Big|_{T^n}+\sum_{\beta,|\beta|>0}\Big[(-1)^{|\beta|}F_\beta(z)\Big]\Big|_{T^n}=f(\xi).$$

3.1 параграфнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

Теорема 7. *Айтайлик* $f\in L^2\left(T^n,dm_n\right)$ *бўлсин. У ҳолда* T^n *нинг деярли ҳамма жойида радиаль лимит қийматлари* $f(\xi)$ *билан устма-уст тушувчи* $F\in H^2\left(D_{(0,0,\ldots,0)}\right)$ *функция мавжуд бўлиши учун* $F_\beta(z)=0$ *шартларнинг* D_β $(|\beta|>0)$ *соҳаларда бажарилиши зарур ва етарли.*

3.1 параграфдаги кейинги теорема умумийроқ масалани ҳал қилади: поликруг остовида эмас фақат унинг қисмида берилган функция қандай шартларни бажарганда поликругга голоморф давом этади. Бу масалани ечими қуйидаги теорема.

Теорема 8. *Айтайлик* $\Gamma\subset T^n$ *очиқ тўлам ва* $F_\beta(z)=0$ $(0<|\beta|<n)$ *бўлсин. У ҳолда* $f\in L^2\left(T^n,dm_n\right)$ *функция* $D_{(0,0,\ldots,0)}$ *соҳага голоморф давом этиши учун* $F_{(1,1,\ldots,1)}(z)$ *функциянинг* $D_{(1,1,\ldots,1)}$ *соҳадан* Γ *орқали* $D_{(0,0,\ldots,0)}$ *соҳага голоморф давом этиши зарур ва етарли.*

Учинчи бобнингг 3.2 параграфида матрицавий бирлик поликруг остовида ва остовнинг бир қисмида берилган функцияларни матрицавий поликругга голоморф давом эттириш мезонлари топилган.

Матрицавий бирлик поликруг қараймиз

$$T_n=\left\{Z\in\mathbb{C}^n[m\times m]:Z^j\left(Z^j\right)^*<I,\ j=1,\ldots,n\right\},$$

унинг остови қуйидагича $S(T_n)=\left\{Z\in\mathbb{C}^n[m\times m]:Z^j\left(Z^j\right)^*=I,\ j=1,2,\ldots,n\right\}$.

Матрицавий бирлик поликруг тўла доиравий соҳа бўлганлиги учун Картан теоремасига кўра бу соҳада ортогонал функциялар системаси мавжуд ва бу функциялар системаси қуйидагича:

$$\left\{\Phi_\alpha^{(k)}(Z)\right\}=\left\{\prod_{j=1}^n\frac{\psi_{\alpha,j}^{(k)}\left(Z^j\right)}{\sqrt{\rho_{\alpha,j}}},Z^j\in\tau\right\},\tag{4}$$

$$\left\{\Psi_\alpha^{(k)}(Z)\right\}=\left\{\prod_{j=1}^n\frac{\psi_{\alpha,j}^{(k)}\left(Z^j\right)}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}},Z^j\in\tau\right\}\tag{5}$$

бўлиб, мос равишда $O^2(T_n)$ ва $H^2\left(S(T_n),d\mu\right)$ фазоларда ортонормал функциялар системаси бўлади.

(3) кўринишдаги Коши типидаги интегралнинг аналоги Бохнер – Хуа Ло-кен типидаги интеграл бўлиб, қуйидагича кўринишда:

$$F(Z) = \int\limits_{S(T_n)} \frac{f(\xi)\,d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m\left(I - Z^j\left(\xi^j\right)^*\right)}. \tag{6}$$

Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$\Delta_\beta = \Big\{ Z \in \mathbb{C}^n[m\times m] : (-1)^{\beta_1}\left(Z^1\left(Z^1\right)^* - I\right) < 0, (-1)^{\beta_2}\left(Z^2\left(Z^2\right)^* - I\right) < 0, \ldots$$

$$\ldots, (-1)^{\beta_n}\left(Z^n\left(Z^n\right)^* - I\right) < 0 \Big\},$$

бунда $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\right)$ - мултииндекс, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$, $\beta_j = \overline{0,1}$, $j = \overline{1,n}$. тушунарлики, агар $\beta = (0,0,\ldots,0)$, у ҳолда $\Delta_{(0,0,\ldots,0)} = T_n$ бўлади. Ҳар бир Δ_β соҳада Бохнер – Хуа Ло-кен типидаги (6) интеграл маънога эга. (6) интегралнинг мос равишда Δ_β $(Z \in \Delta_\beta)$ соҳалардаги қийматларини $F_\beta(Z)$ лар орқали белгилаймиз.

(4) ва (5) системалардаги $\psi^{(k)}_{\alpha,j}(Z)$ функцияларнинг ҳар бири j бўйича қуйидаги тенгликни қаноатлантиради

$$\psi^{(k)}_{\alpha,j}(\xi) = \psi^{(k)}_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m,j}(\xi) = \psi^{(k)}_{\alpha_1-\alpha_m,\alpha_2-\alpha_m,\ldots,\alpha_{m-1}-\alpha_m,0,j}(\xi)\left(\det\xi\right)^{\alpha_m} \tag{7}$$

(α ихтиёрий бўлганда ва ихтиёрий $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_m$ тартиб учун ўринли), бу муносабат $F_\beta(Z)$ функцияларни кенгроқ ўрганиш имконини беради.

Агар $f(\xi) \in L^2\left(S(T_n), d\mu\right)$ бўлса, у ҳолда юқорида келтирилган муносабатлардан қуйидаги қаторларга эга бўламиз

$$F_{(0,0,\ldots,0)}(Z) = \sum_{\alpha_1\ge\ldots\ge\alpha_m\ge 0} \sum_{k=1}^{N(\alpha)} A^{(k)}_\alpha \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi^{(k)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m,j}\left(Z^j\right)}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}} = \sum_{\alpha_1\ge\ldots\ge\alpha_m\ge 0} \sum_{k=1}^{N(\alpha)} A^{(k)}_\alpha \Psi^{(k)}_\alpha(Z), \tag{8}$$

$$F_\beta(Z) = (-1)^{m|\beta|} \sum_{\alpha_1\ge\ldots\ge\alpha_m\ge 0} \sum_{k=1}^{N(\alpha)} A^{(k)}_{\alpha,\beta} \prod_{j=1}^{n} \frac{\psi^{(k)}_{\alpha_1+\beta_j(-\alpha_m-m-\alpha_1),\ldots,\alpha_m+\beta_j(-\alpha_1-m-\alpha_m),j}\left(Z^j\right)^{(-1)^{\beta_j}}}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}} =$$

$$= (-1)^{m|\beta|} \sum_{\alpha} \sum_{k=1}^{N(\alpha)} A^{(k)}_{\alpha,\beta} \Psi^{(k)}_{\alpha,\beta}\left(W_\beta(Z)\right), \tag{9}$$

бунда

$$A^{(k)}_{\alpha,\beta} = \left(\frac{(2\pi)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{1!2!\ldots(m-1)!}\right)^n \int\limits_{S(T_n)} f(\xi) \prod_{j=1}^{n} \overline{\frac{\psi^{(k)}_{\alpha_1+\beta_j(-\alpha_m-m-\alpha_1),\ldots,\alpha_m+\beta_j(-\alpha_1-m-\alpha_m),j}\left(\xi^j\right)^{(-1)^{\beta_j}}}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}}}\, \dot{\xi} =$$

$$= \int\limits_{S(T_n)} f(\xi)\, \overline{\Psi^{(k)}_{\alpha,\beta}\left(W_\beta(\xi)\right)}\, d\mu(\xi).$$

Аниқланган ортогонал функциялар системасидан ҳар бир j бўйича (7) тенгликни қаноатлантирувчи, аммо (8) ва (9) қаторларда қатнашмаган функциларни $\{\tilde{\Psi}\}$ орқали белгилаб оламиз.

Бизга матрицавий поликруг остови $S(T_n)$ да $f(\xi)\in L^2(S(T_n),d\mu)$ функция берилган бўлсин. Қуйидагича масалани қараймиз: бу функция қандай шартларни бажарганда матрицавий поликруг $T_n=\Delta_{(0,0,\ldots,0)}$ га голоморф давом этади?

Аввал асосий натижаларни исботлашда керак бўладиган, (6) кўринишдаги Бохнер – Хуа Ло-кен типидаги интеграл учун сакраш ҳақидаги теоремани келтирамиз.

Теорема 9. *Айтайлик $f(\xi)\in L^2(S(T_n),d\mu)$ функция $S(T_n)$ остовда $\{\tilde{\Psi}\}$ функциялар системасига ортогонал бўлсин. У ҳолда $F_\beta(Z)$ функциялар $H^2(\Delta_\beta)$ синфга тегишли бўлиб, улар $S(T_n)$ нинг деярли ҳамма жойида радиал лимит қийматларга эга ва қуйидаги тенглик ўринли бўлади*

$$F_{(0,0,\ldots,0)}(Z)\Big|_{S(T_n)}+\sum_{\beta}\left[(-1)^{m|\beta|}F_\beta(Z)\Big|_{S(T_n)}\right]=f(\xi).$$

3.2 параграфнинг муҳим натижаларидан бири қуйидагича:

Теорема 10. *Айтайлик $f(\xi)\in L^2(S(T_n),d\mu)$ бўлсин. У ҳолда $S(T_n)$ остовнинг деярли ҳамма жойида $f(\xi)$ функция билан устма-уст тушувчи $F(Z)\in H^2(\Delta_{(0,0,\ldots,0)})$ функция мавжуд бўлиши учун $f(\xi)$ функциянинг $\{\tilde{\Psi}\}$ ортогонал функциялар системасига ортогонал ва $F_\beta(Z)$ функцияларнинг $\Delta_\beta,|\beta|>0$ соҳаларда ноль бўлиши зарур ва етарли.*

3.2 параграфнинг кейинги теоремаси худди 3.1 параграфдаги каби матрицавий бирлик поликруг остовининг қисмида берилган функцияни шу соҳага голоморф давом эттириш масаласини ҳал қилади.

Теорема 11. *Айтайлик $\Gamma\subset S(T_n)$ очиқ тўплам, $f\in L^2(\mathrm{S}(T_n),d\mu)$ функция $\{\tilde{\Psi}\}$ системага ортогонал ва $F_\beta(z)=0$ ($0<|\beta|<n$) бўлсин. У ҳолда $f\in L^2(\mathrm{S}(T_n),d\mu)$ функция $\Delta_{(0,0,\ldots,0)}$ соҳага голоморф давом этиши учун $F_{(1,1,\ldots,1)}(z)$ функциянинг $\Delta_{(1,1,\ldots,1)}$ соҳадан Γ орқали $\Delta_{(0,0,\ldots,0)}$ соҳага голоморф давом этиши зарур ва етарли.*

Такидлаш жоизки, 8 ва 11 теоремаларда мос равишда $D_{(1,1,\ldots,1)}$ ва $\Delta_{(1,1,\ldots,1)}$ соҳалар ўрнига D_β ва Δ_β ($0<|\beta|<n$) соҳалардан хоҳлаган бирини олиш мумкин.

ХУЛОСА

Диссертация ишида матрицавий соҳаларда Карлеман формулалари, махсус соҳа учун Вейл формуласи, поликруг ва матрицавий поликругда голоморф давом эттириш мезонлари исботланган. Олинган натижалар, махсус матрицавий соҳаларда голоморф функцияларнинг хоссаларини ўрганиш имкониятини беради.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

матрицавий поликругда Карлеман формуласи олинган;

классик соҳаларнинг декарт кўпайтмасида Карлеман формуласи олинган;

$\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ фазода махсус аналитик матрицавий полиэдр таърифи берилган ва унинг асосий хоссалари ўрганилган;

$\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ фазодаги махсус аналитик матрицавий полиэдр учун Вейл формуласининг аналоги олинган;

$\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ фазодаги махсус аналитик матрицавий полиэдр учун Руше теоремасининг вариантларидан бири исботланган;

оддий поликруг ва матрицавий поликругда Коши типидаги интеграллар учун “сакраш ҳақидаги” теоремалар исботланган;

оддий поликруг ва матрийавий поликруг остовларида берилган функциялар учун голоморф давом эттириш ҳақида теоремалар исботланган;

оддий поликруг ва матрийавий поликруг остовларининг қисмида берилган функциялар учун голоморф давом эттириш мезонлари топилган.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

БОЗОРОВ ЖУРАБЕК ТОГАЙМУРАТОВИЧ

ФОРМУЛЫ КАРЛЕМАНА И КРИТЕРИИ ГОЛОМОРФНОЙ ПРОДОЛЖИМОСТИ В МАТРИЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Карши – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико– математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.3.PhD/FM206.

Диссертация выполнена в Каршинском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (qarshidu.uz) и на информационно образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Шаимкулов Баходир Аллабердиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Имамкулов Севдиер Акрамович** доктор физико-математических наук
	Курбанов Бухарбай Турганбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете. (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Каршинский государственный университет, Физико-математический факультет (кабинет 102).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственно университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2021 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2021 года).

Ю.Х.Эшкабилов
Заместитель председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

А.А.Имамов
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н. (DCs), доцент

А.А.Имамов
Заместитель председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м.н. (DCs), доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования в комплексном анализе, проводимые на мировом уровне, сводятся к изучению свойств голоморфных функций многих и матричных переменных. Интегральные представления являются важным инструментом при построении теории многомерного комплексного анализа и в ее применениях. Они служат основой исследований в задачах зависимости значений голоморфных функций внутри области от ее значений на границе или на части границы области и в задачах голоморфного продолжения. Поэтому исследование интегральных представлений и их применений в теории голоморфных функций многомерного переменного является одним из актуальных направлений.

В настоящее время в мире вырос интерес к задачам нахождения и применения интегральных представлений голоморфных функций от матриц. Это связано с применением методов теории интегральных представлений функции от матриц к задачам алгебры, математической физики и других разделов науки. При этом нахождение обобщений интегральных представлений, исследование их применений в задачах восстановления и голоморфного продолжения в специальных областях считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение, к которым относится и теория функций комплексных переменных, в том числе, задачи нахождения обобщенных интегральных формул и доказательство аналогов классических теорем в многомерном комплексном анализе. Нашими учёными достигнуты весомые результаты в решении таких задач, как восстановление голоморфных функций с помощью их значений на части границы, голоморфное продолжение функций с части границы, полученное путем обобщений интегральных представлений и аналогов классических теорем. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям функционального анализа, математического анализа и комплексного анализа многих переменных установлено основной задачей и направлением деятельности[1]. Развитие теории восстановления голоморфных функций многих переменных и голоморфного продолжения вместе с интегральными представлениями играет важную роль в решении многих задач комплексного анализа, алгебры, а также для реализации указанного постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года.

Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № УП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В связи расширением применения методов комплексного анализа в других разделах науки, возникла задача, которая стала классической: восстановление голоморфных функций внутри области по их значениям на части её границы.

В этом направлении, в одномерном случае первый результат получен Т.Карлеманом в 1926 году, в одном частном случае Г.М.Голузин и В.И.Крылов обобщили формулу Карлемана на произвольные односвязные области комплексной плоскости, использовав метод введения «гасящей» функции. Для решения этой задачи М.М.Лаврентьев предложил метод аппроксимации ядра. В многомерном случае формулы Карлемана получены в работах Д.Патила, Ш.А.Даутова и Е.С.Мкртчяна, Л.А.Айзенберга, А.М.Кытманова и Т.Н.Никитиной, Ш.Ярмухамедова, Г.Худайберганова, С.Косбергенова, Б.А.Шаимкулова, Б.Курбанова и других. Здесь особо следует отметить метод, предложенный А.М.Кытмановым, основанный на автоморфизмах однородных областей.

Существующие интегральные представления в многомерном анализе не обладают одновременно теми свойствами, что характерны для интегральной формулы Коши в одномерном случае: универсальностью, т.е. применяемостью для произвольных областей, и голоморфностью ядра. Например, представление Мартинелли-Бохнера, ядро которого не голоморфно, применимо для произвольных областей с кусочно-гладкой границей, представление Вейля с голоморфным ядром применимо только для специального класса областей. В приложениях особенно эффективны интегральные представления с голоморфным ядром. Такие представления получены для строго псевдовыпуклых областей Г.М.Хенкином и Рамирезом де Арелланом, для круговых областей – Л.А.Айзенбергом. Аналогичные формулы в пространстве матриц получены в работах Хуа Ло-кена, Г.Худайберганова, Б.А.Шаимкулова и других.

Ещё одной задачей комплексного анализа, которая привлекает повышенный интерес, является выяснение условий голоморфного продолжения функции, заданной не на всей границе, а только на ее части. В случае единичного круга комплексной плоскости Г.Ц.Тумаркин получил критерий голоморфного продолжения в единичный круг функции, заданной на множестве положительной меры его границы, основанный на аппроксимации специальной последовательностью полиномов рассматриваемой функции. Его результат обобщил Д.Патил, используя метод Голузина-Крылова. М.Крейн и П.Я.Нудельман решили задачу голоморфного продолжения в нижнюю полуплоскость функции, заданной на отрезке действительной оси. Используя другие методы, А.Штейнер привёл обобщение результатов последних. В многомерном случае результаты были получены в работах Н.Н.Тарханова, Л.А.Айзенберга, Г.М.Хенкина, Е.М.Чирки, А.Садуллаева, У.Рудина, В.С.Владимирова, А.М.Кытманова, Г.Худойберганова, С.Косбергенова, Б.А.Шаимкулова и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, в котором выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планами научных исследований по грантам Ф-4-31 «Теория плюрипотенциала и интегральные представления в многомерном анализе» (2012-2016 гг.) Национального университета Узбекистана и ОТ-Ф-4-03 «Конкретные динамические системы с непрерывными и дискретными временем, спектры частично интегральных операторов» (2017-2020 гг.) Каршинского государственного университета.

Целью исследования является нахождение формулы Карлемана для функций, голоморфных в матричном поликруге и в декартовом произведении классических областей, получение формулы Вейля и один из вариантов теоремы Руше в специальном аналитическом матричном полиэдре, исследование задачи голоморфного продолжения функции, заданной на остове или на части остова, в поликруг и матричный поликруг.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

получение формулы Карлемана в матричном поликруге;

получение формулы Карлемана в декартовом произведении классических областей;

определение специального аналитического матричного полиэдра в пространстве $\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ и исследование его основных свойств;

получение аналога формулы Вейля в специальном аналитическом матричном полиэдре в $\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$;

доказательство одного из вариантов теоремы Руше в специальном аналитическом матричном полиэдре в $\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$;

доказательство теоремы «о скачке» интеграла типа Коши в обычном и матричном поликруге;

доказательство теоремы о голоморфном продолжении для функции, заданной на остове поликруга и матричного поликруга;

доказательство теоремы о голоморфном продолжении функции, заданной на части остова поликруга и матричного поликруга.

Объект исследования. Матричный поликруг, декартово произведение классических областей, специальный аналитический матричный полиэдр, формула Карлемана, формула Вейля, теорема Руше, голоморфное продолжение функций.

Предмет исследования. Формулы Карлемана для матричного поликруга и декартово произведение классических областей, формула Вейля для специального аналитического матричного полиэдра, голоморфное продолжение с остова и с части остова поликруга и матричного поликруга.

Методика исследования. В диссертационной работе использованы методы многомерного комплексного анализа и теории функции от матриц.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получена формула Карлемана в матричном поликруге;

получена формула Карлемана в декартовом произведении классических областей;

дано определение специального аналитического матричного полиэдра в пространстве $\mathbb{C}^n\left[m\times m\right]$ и исследованы его основные свойства;

получен аналог формулы Вейля в специальном аналитическом матричном полиэдре;

доказан один из вариантов теоремы Руше в специальном аналитическом матричном полиэдре;

доказаны теоремы «о скачке» интеграла типа Коши в обычном и матричном поликруге;

доказаны теоремы о голоморфном продолжении функции, заданной на остове поликруга и матричного поликруга;

найдены критерии голоморфной продолжимости функции, заданной на части остова поликруга и матричного поликруга.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения доказанных формул Карлемана и формулы Вейля, критерий голоморфного продолжения к исследованию соответствующих задач теории функций от матриц, а также к задачам математической физики и геофизики.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием методов теории функций: интегральные формулы, локальные вычеты, разложение в ряд, а также свойств голоморфных отображений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных результатов исследования заключается в возможности их применения к задачам восстановления и голоморфного продолжения функций, заданных на границе или на её части.

Практическая значимость результатов диссертации заключается в возможности с помощью полученных формул восстанавливать голоморфные функции в точках областей, заданных на всей или на части их границы, а также в их применяемости при голоморфном продолжении с остова или с части остова.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов исследования формул Карлемана и критериев голоморфной продолжимости в матричных областях:

полученные в научных исследованиях формулы Карлемана в матричном поликруге и в декартовом произведении классических областей, аналог формулы Вейля и один из вариантов теоремы Руше в специальном аналитическом матричном полиэдре а также критерии голоморфного продолжения функций были использованы сотрудниками Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета в рамках научных исследований по гранту РФФИ, 18-51-41011 Узб_т, «Многомерный комплексный анализ» (Справка №8302 Сибирского федерального университета от 25 ноября 2020 года). Применение научных результатов позволило изучить свойства голоморфных функций в специальных областях;

научные результаты, связанные с формулой Карлемана в матричных областях и критериями голоморфного продолжения в единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$, были использованы сотрудниками Хорезмской Академии Мамун в рамках научных исследований по гранту Ф4-ФА-0-16928 «Свойства плюрирегулярности в комплексной теории потенциала и дифференциально-разностные уравнения с модифицированными источниками» (Справка №2/1255-2895 Академии Наук Республики Узбекистана от 21 декабря 2020 года). Применение научного результата было использовано при обнаружение голоморфных выпуклых оболочек в комплексных пространствах.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 6 научно-практических конференциях, в том числе на 4 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 10 научных работ из них 4 - в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание степени доктора философии, в том числе, 1 - в зарубежном журнале и 3 - в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Общее число страниц диссертационной работы – 94.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных и отечественных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации **“Предварительные сведения”** приведены основные обозначения и необходимые сведения, которые включают в себя определения и теоремы, важные для изложения текста диссертации, а также постановка задач исследования.

Вторая глава диссертации **«Интегральные формулы Карлемана и формула Вейля в матричных областях»** посвящена изучению формулы Карлемана в единичном матричном поликруге и в декартовом произведении различных классических областей из пространства матриц, а также получению формулы Вейля и один из вариантов теоремы Руше в специальном аналитическом матричном полиэдре.

В параграфе 2.1 получена интегральная формула в матричном поликруге, позволяющая восстановить значение функции из класса Харди во внутренних точках матричного поликруга по ее значениям на части остова.

Пусть нам задан матричный единичный поликруг

$$T_n = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : Z^j \left(Z^j \right)^* < I,\ j = \overline{1,n} \right\},$$

$S\left(T_n\right) = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n \left[m \times m \right] : Z^j \left(Z^j \right)^* = I,\ j = \overline{1,n} \right\}$ - остов поликруга T_n. Его автоморфизм, переставляющий точки $A \in T_n$ и 0, имеет вид

$$\Phi_A(Z) = \left(\Phi_A^1(Z^1), ..., \Phi_A^n(Z^n) \right),$$

где

$$\Phi_A^j(Z^j) = Q^j (Z^j - A^j)(I - (A^j)^* Z^j)^{-1} (R^j)^{-1},\ j = 1,2,...,n,$$

Q^j и $R^j - [m \times m]$ матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\bar{Q}^j \left(I - \bar{A}^j A^{j'} \right) Q^{j'} = I,$$

$$\bar{R}^j \left(I - A^{j'} \bar{A}^j \right) R^{j'} = I,$$

$$Q^j A^j + A^j R^j = 0.$$

Пусть $E = \left(E^1, ..., E^n \right) \subset S(T_n)$ и $\mu E > 0$. Проекцию остова $S\left(T_n\right)$ на пространство $\mathbb{C}^{n-1}\left[m \times m \right]$ обозначим через $S\left(T_{n-1}\right)$. Точки $S\left(T_{n-1}\right)$ обозначим через $\xi = \left(\xi^2, ..., \xi^n \right)$.

Определим множества

$$E_{0,\xi} = \left\{ Z : Z \in E, \Phi_0^1(Z^1) = \theta, \Phi_0^j(Z^j) = \theta \Phi_0^j(\xi^j), j = \overline{2,n}, \theta \in S(\tau) \right\},$$

$$\tilde{E}_0 = \left\{ Z \in E : \mu_1 E_{0,\xi} > 0 \right\}.$$

Множества $E_{0.\xi}$ и $\tilde{E}_0$ являются подмножествами, множество E и их декартово произведение $E_{0,\xi} \times \tilde{E}_0$ совпадают с множеством E, т.е. $E = E_{0,\xi} \times \tilde{E}_0$.

Введем вспомогательную функцию $\varphi_0 = \exp\psi_0$, где

$$\psi_0(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E^1_{0,\xi^1}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda} \frac{d\eta}{\eta}, \tag{1}$$

$E^1_{0,\xi^1} = \left\{ \xi^1 \in E_{0,\xi} : \xi^1 = \lambda\zeta, |\lambda| = 1 \right\}$, и $E^1_{0,\xi^1} \times \tilde{E}_{0,\xi} = E_{0,\xi}$.

Сначала доказывается следующая лемма, которая используется при доказательстве основной теоремы параграфа.

Лемма 1. *Пусть* $f \in H^1(T_n)$, $E \subset S(T_n)$, $\mu(E) > 0$. *Тогда справедлива следующая формула*

$$f(0) = \frac{m}{\int\limits_{\tilde{E}_o} d\mu_{n-1} \int\limits_{\tilde{E}_{0,\xi}} d\mu_0} \lim_{l\to\infty} \int\limits_E f(Z) \left[\frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)} \right]^l d\mu.$$

Рассмотрим множество

$$E_{A,\xi} = \left\{ Z : Z \in E, \Phi^1_A(Z^1) = \theta, \Phi^j_A(\xi^j) = \theta\Phi^j_A(\xi^j), j = \overline{2,n}, \theta \in S(\tau) \right\},$$

которое измеримо относительно меры μ_1. Обозначим $\tilde{E}_A = \left\{ `\xi : `\xi \in S(T_{n-1}), \mu_1 E_{A,\xi} > 0 \right\}$. Очевидно, что $E_{A,\xi} \times \tilde{E}_A = E$. Из теоремы Фубини следует, что $(mn-m)-$ мерная мера Лебега множества $\tilde{E}_A$ положительна.

Аналогично предыдущему, введем вспомогательную функцию

$$\varphi_A = \exp\psi_A, \; \psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E^1_{A^1,W^1}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda} \frac{d\eta}{\eta},$$

где

$$E_{A^1,w^1} = \left\{ \xi^1 \in E^1, \xi = \left(\Phi^1_A\right)^{-1} \left(\lambda \left(\Phi^1_A\right)^{-1} (w^1) \right), |\lambda| = 1 \right\}, \; w^1 \in \Phi^1_A(SU(m)).$$

Основной в этом параграфе является следующая

Теорема 1. *Пусть* $f \in H^1(T_n)$, $E \subset S(T_n)$, $\mu(E) > 0$. *Тогда для любой точки* $A \in T_n$ *верна формула*

$$f(A) = \frac{m}{\mu_{mn-m}(\Phi^{-1}_A(\tilde{E}_A))\mu\left(\Phi^{-1}_A(\tilde{E}_{A,\xi})\right)} \times$$

$$\times \lim_{l\to\infty} \int\limits_E f(Z) \left[\frac{\varphi_A(Z)}{\varphi_A(A)} \right]^l \prod_{j=1}^n H\left(A^j, \bar{Z}^j\right) d\mu(Z),$$

где $H(A^j,\overline{Z}^j)=\dfrac{1}{\det(I^{(m)}-A^jZ^j)^m}$ *есть ядро Коши-Сеге для (матричного) обобщенного круга.*

В параграфе 2.2 исследована формула Карлемана в областях, представляющих собой декартово произведение классических областей из пространства матриц.

Пусть область D определена как декартово произведение классических областей первого и второго типа D_1 и D_2:

$$D=D_1\times D_2=\{Z=(Z^1,Z^2):Z^1\in D_1,Z^2\in D_2\},$$

Остов области D представляет собой декартово произведение остовов S_1 и S_2, соответственно областей D_1 и D_2: $S=S_1\times S_2$.

Известно, что автоморфизм области D_1 имеет вид

$$W_1=W_{1,A^1}=Q^1(Z^1-A^1)\left(I-\left(A^1\right)^*Z^1\right)(R^1)^{-1},$$

где A^1- матрица $[m\times k]$, Q^1- матрица $[m\times m]$ и R^1- матрица $[k\times k]$ порядка, удовлетворяющие условия:

$$\overline{Q^1}\left(I-\overline{A^1}\left(A^1\right)'\right)\left(Q^1\right)'=I^{(m)},$$

$$\overline{R^1}\left(I-\left(A^1\right)'\overline{A^1}\right)\left(R^1\right)'=I^{(m)},$$

$$Q^1A^1+A^1R^1=0\,.$$

А автоморфизм области D_2, имеет следующий вид

$$W_2=W_{2,A^2}=R^2(Z^2-A^2)(I-\overline{A^2}Z^2)^{-1}\left(\overline{R^2}\right)^{-1},$$

где A^2,R^2 матрицы, удовлетворяющие условия

$$\overline{R^2}\left(I-\overline{A^2}\left(A^2\right)'\right)\left(R^2\right)'=I\,,$$

$$R^2A^2+A^2R^2=0\,.$$

С помощью W_1 и W_2 построим автоморфизм области D в виде

$$W=(W_1,W_2)\,.$$

Это автоморфизм W переводит точку $0\in D$ к точке $A=(\mathrm{A}^1,\mathrm{A}^2)\in D$, и обратное, точку A к точке 0: $W\left(A\right)=0$, $W\left(0\right)=A$.

Рассмотрим множество $E_0\subset S(D)$, $\mu(E_0)>0$ и определим множества

$$E_{0,\xi}=\left\{Z\in E_0:W_{1,0}(Z^1)=\theta,W_{2,0}(Z^2)=\theta W_{2,0}(\xi^2),\theta\in S(D_1)\right\},$$

$$\tilde{E}_0=\left\{Z\in E_0:\mu_1E_{0,\xi}>0\right\}.$$

Построим следующую функцию $\varphi_0=\exp\psi_0$ и

$$\psi_0(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E^1_{0,\xi^1}}\frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta}\;,$$

где E^1_{0,ξ^1} – определяется так же, как в (1).

Лемма 2. *Пусть* $f \in H^1(D)$. *Тогда справедлива следующая формула*

$$f(0) = \frac{k}{\mu_2(\tilde{E}_o)\mu_{(u)}} \lim_{l\to\infty} \int_{E_0} f(Z)\left[\frac{\varphi_0(\xi)}{\varphi_0(0)}\right]^l d\mu .$$

Пусть, $E \subset S$ - множество с положительной лебеговой мерой: $\mu(E) > 0$.

Рассмотрим множества

$$E_{A,\xi} = \left\{Z : Z \in E; W_{A^1}(Z^1) = \theta, W_{A^2}(Z^2) = \theta W_{A^2}(\xi)\right\},$$

$$\tilde{E}_A = \left\{Z : Z \in S, \mu_1 E_{A,\xi} > 0\right\}.$$

По теореме Фубини, $n(n+1)/2-$ мерная мера Лебега множества $\tilde{E}_A$ положительна.

Обозначим

$$\varphi_A = \exp\psi_A \text{, где}$$

$$\psi_A(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{E_{A^1,\zeta^1}} \frac{\eta+\lambda}{\eta-\lambda}\frac{d\eta}{\eta},$$

$$E_{A^1,\zeta^1} = \left\{\xi \in E_{A,\xi}, \xi = \left(W_{1,A^1}\right)^{-1}\left(\lambda\left(W_{1,A^1}\right)^{-1}(\zeta)\right), |\lambda| = 1\right\}, \zeta \in W_{1,A^1}(S_1).$$

Пусть $\tilde{E}_{A^1}$ – дополнение к E_{A^1,ζ^1}, т.е. $E_{A,\xi} = E_{A^1,\zeta^1} \times \tilde{E}_{A^1}$. Основной в параграфе 2.2 является следующая

Теорема 2. *Пусть* $f \in H^1(D)$, $E \subset S(D)$, $\mu(E) > 0$. *Тогда для любой точки* $A \in D$ *верна формула*

$$f(A) = \frac{k}{\mu\left(\tilde{E}_A\right)\mu\left(\tilde{E}_{A^1}\right)} \lim_{l\to\infty} \int_E f(\xi)\left[\varphi(\xi)\left\{\varphi(A)\right\}^{-1}\right]^l H(\xi, A)d\mu ,$$

где

$$H(\xi, A) = H_1(\xi^1, A^1)H_2(\xi^2, A^2),$$

$H_j(\xi^j, A^j)$ – *ядро Коши-Сеге для области* D_j, $j = 1,2$.

В параграфе 2.3 получены формула Вейля и один из вариантов теоремы Руше для функций, голоморфных в специальном аналитическом матричном полиэдре.

В основе интегральных формул лежит понятие локального вычета. Сначала определяется локальный вычет для нашего случая.

Пусть, U_a - некоторая окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n[m\times m]$,

$$f = \left(f^1, f^2, ..., f^n\right) : \mathbb{C}^n[m\times m] \to \mathbb{C}^n[m\times m] -$$

голоморфное отображение в U_a, где f^j $(j = \overline{1,n})$ $m\times m$ матрица и f имеет в точке a изолированный нуль. Обозначим цикл, содержащий нули отображения f и лежащий в U_a, через $\Gamma_{f,\varepsilon} = \left\{Z \in U_a : f^j\left(f^j\right)^* = \varepsilon^2 I, j = \overline{1,n}\right\}$.

Для ростка $h : U_a \to \mathbb{C}$ *и отображения* $f(z)$ *действие локального вычета в точке* a *определим по формуле*

$$\underset{a}{res}_f(h) = \int\limits_{\Gamma_{f,\varepsilon}} \frac{h d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m f^j} .$$

Введем понятие специального аналитического матричного полиэдра в пространстве $\mathbb{C}^n[m \times m]$. Пусть, $G \subset \mathbb{C}^n[m \times m]$ - некоторая область и на G дано голоморфное отображение

$$f : \mathbb{C}^n[m \times m] \to \mathbb{C}^n[m \times m]. \qquad (2)$$

Рассмотрим матричный поликруг радиуса r:

$$T_{n,r} = \left\{ Z : Z^j \left(Z^j \right)^* < r^2 I, j = \overline{1,n} \right\},\ r \in \mathbb{R}_+,$$

и обозначим его прообраз через $f^{-1}(T_{n,r}) = \left\{ Z : f^j(Z) \left(f^j(Z) \right)^* < r^2 I, j = \overline{1,n} \right\}$.

Если множество $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ *компактно в* G: $f^{-1}\left(T_{n,r}\right) \Subset G$, *то* $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ *называется матричным полиэдрическим множеством, ассоциированным с отображением* f.

Имеет место следующие утверждение.

Лемма 3. *Любое полиэдрическое множество* $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ *состоит из конечного числа связных компонент.*

Определение. *Связная компонента матричного полиэдрического множества* $f^{-1}\left(T_{n,r}\right)$ *называется специальным аналитическим матричным полиэдром.*

Специальный аналитический матричный полиэдр обозначим через $\Pi_{f,r}$. Остовом специального аналитического матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$ называется множество $\Gamma_{f,r} = \left\{ \xi : f^j(\xi) \left(f^j(\xi) \right)^* = r^2 I, j = \overline{1,n} \right\}$.

Верна следующая

Лемма 4. *Остов* $\Gamma_{f,r}$ *специального аналитического матричного полиэдра* $\Pi_{f,r}$ *является гладким почти при всех* $r > 0$.

В дальнейшем будем считать остов $\Gamma_{f,r}$ гладким. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть* $\Pi_{f,r}$ *- специальный аналитический матричный полиэдр, определенный с помощью отображения* $f \in A^n\left(\Pi_{f,r}\right)$. *Тогда для произвольной функции* $\varphi \in A_c\left(\Pi_{f,r}\right)$ *справедлива формула*

$$C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{\varphi(\xi) df}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m \left(f^j(\xi) \right)} = \sum_{a \in E_f} \mu_a(f) \varphi(a),$$

где $E_f = \{Z : Z \in \Pi_{f,r}, f(Z) = 0\}$ *- множество нулей* f, $C_n \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{d\xi}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m(\xi^j)} = 1$.

По известной теореме Хефера, что для некоторой окрестности U области $\Pi_{f,r}$ существуют голоморфные в $(U \times U)$ функции $P_\nu^k(\xi, z)$, такие, что при всех $(\xi, z) \in (U \times U)$ имеют место равенства

$$f_k(\xi) - f_k(z) = \sum_{l=1}^{nm^2} (\xi_l - z_l) P_l^k(\xi, z), \; k = \overline{1, nm^2}.$$

Определитель матрицы $\left\| P_l^k \right\|$ порядка $[nm^2 \times nm^2]$ обозначим через $H(\xi, Z)$.

Основной в параграфе является

Теорема 4. *Если* h *- голоморфная функция в области* $\overline{\Pi}_{f,r}$, *то для любой* $Z \in \Pi_{f,r}$ *справедлива интегральная формула*

$$h(Z) = \int\limits_{\Gamma_{f,r}} \frac{h(\xi) H(\xi, Z) d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^{n} \det^m\left(f^j(\xi) - f^j(Z)\right)}.$$

Из доказанной теоремы следует аналог принципа максимума модуля.

Следствие 1. *Если* h *- голоморфная функция в области* $\overline{\Pi}_{f,r}$, *то она достигает своего максимального значения по модулю на* $\Gamma_{f,r}$.

Далее доказывается один из вариантов классической теоремы Руше для специального аналитического матричного полиэдра $\Pi_{f,r}$.

Пусть дано отображение (2).

Теорема 5. Пусть отображение $g \in A^n(\overline{\Pi}_{f,r})$ удовлетворяет на $\Gamma_{f,r}$ неравенства

$$|g_k| < \frac{|f_k|}{m\sqrt{n}}, \quad 1 \le k \le nm^2.$$

Тогда отображения $f(Z)$ и $f(Z) + g(Z)$ имеют в $\Pi_{f,r}$ одинаковое число нулей.

В третьей главе диссертации «**О задачах голоморфного продолжения в область функций, заданных на части её границы**» изучена задача о голоморфном продолжении функции, заданной на остове или на части остова единичного и матричного единичного поликруга, в соответствующие области.

В параграфе 3.1 третьей главы найдены критерии голоморфной продолжимости функции, заданной на остове и на части остова единичного поликруга.

Пусть дана функция $f \in L^2(T^n)$. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$F(z)=\int\limits_{T^n}\frac{f(\xi)\,dm_n}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\overline{\xi}_k z_k\right)}. \qquad (3)$$

Введем следующие обозначения:

$$D_\beta=\left\{z\in\mathbb{C}^n:(-1)^{\beta_1}\left(|z_1|-1\right)<0,(-1)^{\beta_2}\left(|z_2|-1\right)<0,\ldots,(-1)^{\beta_n}\left(|z_n|-1\right)<0\right\},$$

где $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$, $|\beta|=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, $\beta_j=\overline{0,1}$, $j=\overline{1,n}$. Очевидно, что интеграл (3) имеет смысл в каждой из областей D_β и $D_{(0,0,\ldots,0)}=U^n$. Через $F_\beta(z)$ обозначим значение интеграла (3) в соответствующей области D_β.

Рассмотрим следующую задачу: пусть $f(\xi)\in L^2\left(T^n,dm_n\right)$. При каких условиях эта функция может быть голоморфно продолжена в поликруг?

При решении задачи сначала доказывается теорема о скачке интеграла типа Коши (3), которая используется при доказательстве основной теоремы данного параграфа.

Теорема 6. *Пусть* $f(\xi)\in L^2\left(T^n,dm_n\right)$. *Тогда все функции* $F_\beta(z)\in H^2\left(D_\beta\right)$ *имеют почти всюду на* T^n *радиальные пределы и верно равенство*

$$F_{(0,0,\ldots,0)}(z)\Big|_{T^n}+\sum_{\beta,|\beta|>0}\left[(-1)^{|\beta|}F_\beta(z)\right]\Big|_{T^n}=f(\xi).$$

Основной в параграфе 3.1 является

Теорема 7. *Пусть* $f\in L^2\left(T^n,dm_n\right)$. *Для того, чтобы существовала функция* $F\in H^2\left(D_{(0,0,\ldots,0)}\right)$, *радиальные граничные значения которой почти всюду на* T^n *совпадают с* $f(\xi)$, *необходимо и достаточно выполнение условия* $F_\beta(z)=0$ *в* D_β *при* $|\beta|>0$.

Следующая теорема параграфа 3.1 решает более общую задачу о возможности голоморфного продолжения в поликруг функции, заданной не на всем остове, а только на его части. А именно, справедлива

Теорема 8. *Пусть* $\Gamma\subset T^n$ *- открытое множество и* $F_\beta(z)=0$ *(* $0<|\beta|<n$*). Тогда для того, чтобы* $f\in L^2\left(T^n,dm_n\right)$ *голоморфно продолжалась в* $D_{(0,0,\ldots,0)}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $F_{(1,1,\ldots,1)}(z)$ *голоморфно продолжалась из* $D_{(1,1,\ldots,1)}$ *через* Γ *в область* $D_{(0,0,\ldots,0)}$.

В параграфе 3.2 третьей главы найдены критерии голоморфного продолжения функции, заданной на остове и на части остова матричного единичного поликруга.

Рассмотрим матричный единичный поликруг

$$T_n = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : Z^j \left(Z^j \right)^* < I, j = 1,...,n \right\},$$

его остов является $S\left(T_n\right) = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : Z^j \left(Z^j \right)^* = I, j = 1,2,...,n \right\}$.

Так как матричный единичный поликруг является полной круговой областью, по теореме Картана в нем существует система ортогональных функций. Система функций

$$\left\{ \Phi_\alpha^{(k)}(Z) \right\} = \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{\psi_{\alpha,j}^{(k)}\left(Z^j\right)}{\sqrt{\rho_{\alpha,j}}}, Z^j \in \tau \right\}, \tag{4}$$

$$\left\{ \Psi_\alpha^{(k)}(Z) \right\} = \left\{ \prod_{j=1}^n \frac{\psi_{\alpha,j}^{(k)}\left(Z^j\right)}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}}, Z^j \in \tau \right\} \tag{5}$$

является системой ортонормированных функций на пространствах $O^2\left(T_n\right)$ и $H^2\left(S\left(T_n\right), d\mu\right)$ соответственно.

Аналог интеграла типа Коши (3), который называется интегралом типа Бохнера – Хуа Ло-кена, имеет вид

$$F(Z) = \int\limits_{S(T_n)} \frac{f(\xi)\, d\mu(\xi)}{\prod\limits_{j=1}^n \det^m \left(I - Z^j \left(\xi^j\right)^* \right)}. \tag{6}$$

Введем следующее обозначения:

$$\Delta_\beta = \left\{ Z \in \mathbb{C}^n [m \times m] : (-1)^{\beta_1} \left(Z^1 \left(Z^1\right)^* - I \right) < 0, (-1)^{\beta_2} \left(Z^2 \left(Z^2\right)^* - I \right) < 0, ... \right.$$
$$\left. ..., (-1)^{\beta_n} \left(Z^n \left(Z^n\right)^* - I \right) < 0 \right\},$$

где $\beta = \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right)$ – мульти индекс, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$, $\beta_j = \overline{0,1}$, $j = \overline{1,n}$. Очевидно, что если $\beta = (0,0,...,0)$, то $\Delta_{(0,0,...,0)} = T_n$. В каждой области Δ_β имеет смысл интеграл Бохнера – Хуа Ло-кена. Значение интеграла (6) в соответствующих областях Δ_β ($Z \in \Delta_\beta$) обозначим через $F_\beta(Z)$.

Все функции $\psi_{\alpha,j}^{(k)}(Z)$ из системы ортонормированных функций (4) и (5) по каждой j удовлетворяют равенство

$$\psi_{\alpha,j}^{(k)}(\xi) = \psi_{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,j}^{(k)}(\xi) = \psi_{\alpha_1-\alpha_m,\alpha_2-\alpha_m,...,\alpha_{m-1}-\alpha_m,0,j}^{(k)}(\xi)\left(\det \xi\right)^{\alpha_m} \tag{7}$$

(равенство имеет место при любом значении α и для любых $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_m$), что дает возможности более широкого изучения функций $F_\beta(Z)$.

Если $f(\xi)\in L^2\left(S(T_n),d\mu\right)$, то с помощью вышеизложенного имеем следующее разложение

$$F_{(0,0,\dots,0)}(Z)=\sum_{\alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_m\geq 0}\sum_{k=1}^{N(\alpha)}A_{\alpha}^{(k)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_m,j}^{(k)}\left(Z^j\right)}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}}=\sum_{\alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_m\geq 0}\sum_{k=1}^{N(\alpha)}A_{\alpha}^{(k)}\Psi_{\alpha}^{(k)}(Z),\qquad(8)$$

$$F_{\beta}(Z)=(-1)^{m|\beta|}\sum_{\alpha_1\geq\ldots\geq\alpha_m\geq 0}\sum_{k=1}^{N(\alpha)}A_{\alpha,\beta}^{(k)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\psi_{\alpha_1+\beta_j(-\alpha_m-m-\alpha_1),\dots,\alpha_m+\beta_j(-\alpha_1-m-\alpha_m),j}^{(k)}\left(Z^j\right)^{(-1)^{\beta_j}}}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}}=$$

$$=(-1)^{m|\beta|}\sum_{\alpha}\sum_{k=1}^{N(\alpha)}A_{\alpha,\beta}^{(k)}\Psi_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(W_{\beta}(Z)\right),\qquad(9)$$

где

$$A_{\alpha,\beta}^{(k)}=\left(\frac{(2\pi)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{1!2!\ldots(m-1)!}\right)^{n}\int_{S(T_n)}f(\xi)\prod_{j=1}^{n}\overline{\frac{\psi_{\alpha_1+\beta_j(-\alpha_m-m-\alpha_1),\dots,\alpha_m+\beta_j(-\alpha_1-m-\alpha_m),j}^{(k)}\left(\xi^j\right)^{(-1)^{\beta_j}}}{\sqrt{\sigma_{\alpha,j}}}}\,\xi=$$

$$=\int_{S(T_n)}f(\xi)\overline{\Psi_{\alpha,\beta}^{(k)}\left(W_{\beta}(\xi)\right)}d\mu(\xi).$$

Систему ортогональных функций, удовлетворяющих для каждого j равенство (7), но не участвующих в разложении (8) и (9), обозначим через $\{\tilde{\Psi}\}$.

Пусть нам на остове матричного поликруга $S(T_n)$ задана функция $f(\xi)\in L^2\left(S(T_n),d\mu\right)$. Исследуем следующую задачу: при выполнении каких условий эта функция голоморфно продолжается в матричный поликруг $T_n=\Delta_{(0,0,\dots,0)}$.

Сначала доказывается теорема о скачке интеграла типа Коши (6), которая существенна при доказательстве основных теорем данного параграфа.

Теорема 9. *Пусть функция* $f(\xi)\in L^2\left(S(T_n),d\mu\right)$ *ортогональна к системе* $\{\tilde{\Psi}\}$ *на* $S(T_n)$. *Тогда функция* $F_{\beta}(Z)\in H^2\left(\Delta_{\beta}\right)$ *имеет радиальные предельные значения почти всюду на* $S(T_n)$, *а также имеет место равенство*

$$F_{(0,0,\dots,0)}(Z)\Big|_{S(T_n)}+\sum_{\beta}\left[(-1)^{m|\beta|}F_{\beta}(Z)\Big|_{S(T_n)}\right]=f(\xi).$$

Одной из основных в параграфе 3.2 является

Теорема 10. *Пусть* $f(\xi)\in L^2\left(S(T_n),d\mu\right)$. *Для того, чтобы существовала функция* $F(Z)\in H^2\left(\Delta_{(0,0,\dots,0)}\right)$, *совпадающая почти всюду на* $S(T_n)$ *с функцией* $f(\xi)$, *необходимо и достаточно ортогональности* *функции* $f(\xi)$ *к системе* $\{\tilde{\Psi}\}$ *и равности нулю функций* $F_\beta(Z)$ *в области* $\Delta_\beta, |\beta| > 0$.

Следующая теорема параграфа 3.2 аналогична и, как в предыдущем случае, решает задачу о возможности голоморфного продолжения в матричный единичный поликруг функции, заданной не на всем остове, а только на его части.

Теорема 11. *Пусть* $\Gamma \subset S(T_n)$ *- открытое множество, функция* $f \in L^2(\mathrm{S}(T_n), d\mu)$ *ортогональна к системе* $\{\tilde{\Psi}\}$ *и* $F_\beta(z) = 0$ *(*$0 < |\beta| < n$*). Тогда для того, чтобы* $f \in L^2(\mathrm{S}(T_n), d\mu)$ *голоморфно продолжалась в* $\Delta_{(0,0,\ldots,0)}$*, необходимо и достаточно, чтобы* $F_{(1,1,\ldots,1)}(z)$ *голоморфно продолжалась из* $\Delta_{(1,1,\ldots,1)}$ *через* Γ *в область* $\Delta_{(0,0,\ldots,0)}$.

Заметим, что вместо $D_{(1,1,\ldots,1)}$ и $\Delta_{(1,1,\ldots,1)}$ в теоремах 8 и 11, можно взять любую из областей D_β и Δ_β ($0 < |\beta| < n$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены формулы Карлемана в матричных областях, формула Вейля в специальной области, доказаны критерии голоморфной продолжимости в обычном и матричном поликруге. Полученные результаты позволяют изучать свойств голоморфных функций в специальных матричных областях.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

получена формула Карлемана в матричном поликруге;

получена формула Карлемана в декартовом произведении классических областей;

дано определение специального аналитического матричного полиэдра в пространство $\mathbb{C}^n[m\times m]$ и исследованы его основные свойства;

получен аналог формулы Вейля в специальном аналитическом матричном полиэдре в $\mathbb{C}^n[m\times m]$;

доказан один из вариантов теоремы Руше в специальном аналитическом матричном полиэдре в $\mathbb{C}^n[m\times m]$;

доказаны теоремы «о скачке» интеграла типа Коши в обычном и матричном поликруге;

доказаны теоремы о голоморфном продолжении для функции, заданной на остове поликруга и матричного поликруга;

найдены критерии голоморфно продолжимости функции, заданной на части остова поликруга и матричного поликруга.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIK DEGREES PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 KARSHI STATE UNIVERSITY

KARSHI STATE UNIVERSITY

BOZOROV JURABEK TOGAYMUROTOVICH

CARLEMAN'S FORMULAS AND CRITERIA FOR HOLOMORPHIC CONTINUITY IN MATRIX DOMAINS

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2020.3.PhD/FM206.

Dissertation has been prepared at Karshi State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (qarshidu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Shoimkulov Bakhodir Allaberdievich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	**Imamkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of physical and mathematical sciences
	Kurbanov Bukharbay Turganbayevich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent
Leading organization:	**National University of Uzbekistan**

Defense will take place «____» ____________2021 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225 34 13, fax: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Karshi State University, Faculty of Physics and Mathematics (room 102).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered №_____). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225 34 13).

Abstract of dissertation sent out on «____» ______________2021 year.
(Mailing report №___________ on «____» ______________2021 year).

Yu.X.Eshkabilov
Deputy Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., professor

A.A.Imamov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees, D.F-M.S., docent

A.A.Imamov
Deputy Chairman of scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F-M.S., docent

INTRODUCTION (abstract of (PhD) thesis)

The aims of the research work are to find the Carleman formula for functions that are holomorphic in the matrix polydisk and in the Cartesian product of classical domains, to obtain the Weyl formula and one of the versions of the Rouche theorem in a special analytic matrix polyhedron, to study the problem of holomorphic continuation of a function given on the skeleton or on a part of the skeleton to a polydisk and matrix polydisk.

The objects of the research work are the Cartesian product of classical domains, special analytic matrix polyhedron in the space $\mathbb{C}^n\left[m \times m\right]$, Carleman's formula, Weyl's formula, Rouche's theorem, holomorphic continuation of functions.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the Carleman formula in the matrix polydisk is obtained;

the Carleman formula was obtained in the Cartesian product of the classical domains;

a definition of a special analytical matrix polyhedron in the space $\mathbb{C}^n\left[m \times m\right]$ is given and its main properties are investigated;

an analogue of Weyl's formula is obtained in a special analytical matrix polyhedron;

a version of Rouche's theorem in special analytical matrix polyhedron is proved;

theorems on the “jump” of the Cauchy-type integral in the ordinary and matrix polydisks are proved;

theorems on the holomorphic continuation of a function defined on the skeleton of a polydisk and a matrix polydisk are proved;

theorems on the holomorphic continuation of a functions given on a part of the usual and matrix polydisks skeleton are proved.

Implementation of the research results. The Carleman formulas obtained in scientific research in the matrix polydisk and in the Cartesian product of classical domains, an analogue of the Weyl formula and one of the versions of the Rouche theorem in a special analytical matrix polyhedron, as well as criteria for holomorphic continuation of functions were used by the staff of the Institute of Mathematics and Fundamental Informatics of the Siberian Federal University in the framework of scientific research under the grant of the Russian Foundation for Basic Research, 18-51-41011 Uzbek_t, “Multidimensional complex analysis” (Reference No. 8302 of the Siberian Federal University dated November 25, 2020). The use of scientific results made it possible to study the properties of holomorphic functions in special domains;

scientific results related to the Carleman formula in matrix domains and criteria for holomorphic continuation into a unit polydisk of space were used by the staff of the Khorezm Academy of Mamun in the framework of scientific research under the grant F4-FA-0-16928 “Pluriregularity properties in complex potential theory and differential-difference equations with modified sources”

(Reference No. 2/1255-2895 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated December 21, 2020). Application of the scientific result was used in the detection of holomorphic convex hulls in complex spaces.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 94 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Shoimkulov B. A., Bozorov J.T. Carleman's Formula for a Matrix Polydisk // Journal of Siberian Federal University. Mathematics Physics. – 2015. – No8(2). – P. 371-374 (3. Scopus. IF=0,150) (01.00.00; №59).

2. Бозоров Ж.Т. Формула Карлемана для декартова произведения классических областей // УзМЖ. – 2016. №3. – С. 41-45 (01.00.00; №6).

3. Shoimkulov B. A., Bozorov J.T. The Weil formula and the Rouche principle in $\mathbb{C}^n\left[m \times m\right]$ // UzMJ. – 2020. №1. – P. 123-128 (01.00.00; №6).

4. Шаимкулов Б.А., Бозоров Ж.Т. Условия голоморфной продолжимости в поликруг функций, заданных на остове поликруга // Бюллетень Института Математики. – 2020. №3. – С. 199-203.

II бўлим (2 часть; part 2)

5. Шаимкулов Б.А., Бозоров Ж.Т. Формула Карлемана в матричном поликруге // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2014», Самарканд, 15-17 сентября, – 2014, – С. 148-149.

6. Бозоров Ж.Т. О формуле Карлемана в произведении матричных областей // Тезисы докладов. Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. Алгебра, анализ и квантовая вероятность, 10-12 сентября, – 2015 года. – С. 61-63.

7. Шаимкулов Б.А., Бозоров Ж.Т. Формула Вейля для специалных полиэдров // V Международная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016», Бухара, 9-10-ноября, – 2016, – С. 306-307.

8. Bozorov J.T. On Rouche's theorem in $\mathbb{C}^n\left[m \times m\right]$ // Abstracts of the VI international scientific conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018", Tashkent, 13-15-september, – 2018. – P. 138.

9. Шаимкулов Б.А., Бозоров Ж.Т. Критерий голоморфной продолжимости функций, заданных на остове поликруга // Республиканская научная конференция «Актуальные проблемы и применения анализа» КарГУ, г. Карши, 4-5 октябрь, – 2019. – С. 49-50.

10. Бозоров Ж.Т. Задача о голоморфном продолжении в матричном поликруге // Abstracts of the International Online Conference. Frontier in mathematics and computer science, October 12-15, – 2020. Tashkent. – P. 139-140.

Автореферат Қарши давлат университетининг “ҚарДУ хабарлари” илмий-назарий, услубий журнали таҳририятида таҳрирдан ўтказилди (31.12.2020 йил).

Гувоҳнома № 14-061

31.12.2020. Босишга рухсат этилди.
Офсет босма қоғози. Қоғоз бичими 60x84 1/16.
“Times” гарнитураси. Офсет босма усули.
Ҳисоб-нашриёт т. 3.2 Шартли б.т. 3,7.
Адади 60 нусха. Буюртма №.47.

Қарши давлат университети
кичик босмахонасида чоп этилди.