В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

СЕЙПУЛЛАЕВ ЖУМАБЕК ХАМИДУЛЛАЕВИЧ

ҲАҚИҚИЙ ҚИРРАЛАРИ СИММЕТРИК ФАЗОЛАРНИНГ ТАСНИФИ ВА УЛАРНИНГ JBW-АЛГЕБРАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАВСИФИГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари доктори (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора (DSc) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor (DSc) on physical-mathematical sciences

Сейпуллаев Жумабек Хамидуллаевич
Ҳақиқий қирралари симметрик фазоларнинг таснифи ва уларнинг JBW-алгебраларнинг геометрик тавсифига татбиқлари…………….. 3

Сейпуллаев Жумабек Хамидуллаевич
Описание вещественных гранево симметричных пространств и их приложения к геометрической характеризации JBW-алгебр ……… 25

Seypullaev Jumabek Khamidullaevich
Description of real facially symmetric spaces and their applications to a geometric characterization of JBW-algebras …………………………… 46

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works …..……………………………………….….. 50

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

СЕЙПУЛЛАЕВ ЖУМАБЕК ХАМИДУЛЛАЕВИЧ

ҲАҚИҚИЙ ҚИРРАЛАРИ СИММЕТРИК ФАЗОЛАРНИНГ ТАСНИФИ ВА УЛАРНИНГ JBW-АЛГЕБРАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАВСИФИГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ – 2021

Физика-математика фанлари доктори (DSc) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.4.DSc/FM85 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Заитов Адилбек Атаханович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Закиров Ботир Сабитович физика-математика фанлари доктори
	Арзикулов Фарходжон Нематжонович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон миллий университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+998 71)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+998 71)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

У.У.Жамилов
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда операторлар алгебраларининг ҳолатлари фазосини геометрик тавсифлаш, яъни С*-алгебралар ва фон Нейман алгебралари, ёки JB-алгебралар ва JBW-алгебраларининг ҳолатлари фазолари бўладиган қаварик тўпламларни аксиоматик тадқиқ қилиш каби масалаларга келтирилади. Я.Фридман ва Б.Руссо томонидан квант механикаси ҳолатларининг геометрик модели сифатида қаралувчи қирралари симметрик фазолар тушунчаси киритилиб, ушбу фазоларни киритишдан асосий мақсад – операторлар алгебраларининг олд қўшма фазоларини геометрик тавсифлаш бўлган. Қирралари симметрик фазоларни геометрик таснифлаш – квант механикасининг статистик ва эҳтимоллик жиҳатларини аксиоматик ўрганишнинг, операторлар алгебралари назариясидаги муаммоларни ҳал этишнинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда қирралари симметрик фазоларни таснифлаш ва ушбу фазолар синфида операторлар алгебраларини тавсифлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. М.Нейл ва Б.Руссо томонидан қирралари симметрик фазолар синфида С*-алгебралар, фон Нейман алгебралар ва JBW*-алгебраларни ўз ичига олган учлик алгебраик структурага асосланган Банах фазоларининг кенгроқ синфи бўлган комплекс JB*-учликларнинг олд қўшма фазолари геометрик тавсифланган. Таъкидлаш жоизки, ҳақиқий операторлар алгебраларини геометрик тавсифлаш масаласи ҳалигача очиқ турибди. Бу борада, қирралари симметрик ҳақиқий фазоларни таснифлаш, олинган натижаларни ушбу фазолар синфида ҳақиқий операторлар алгебраларини тавсифлашга татбиқи мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг квант механикаси ва физикада татбиқига эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда қаварик тўпламнинг модуляр JBW-алгебрасининг, хусусий ҳолда чекли фон Нейман алгебрасининг, нормал ҳолатлари фазосига аффин изоморф бўлишининг соддароқ геометрик шартларини топиш орқали амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида қирралари симметрик фазолар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги ПФ-4947 Фармони, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387 Қарорлари ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708 Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи[2]. JBW-алгебралар, JB*-учликлар ва қирралари симметрик фазолар назариялари бўйича илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Denison University (Granville, USA), Jerusalem College of Technology (Jerusalem, Israel), Mathematisches Institut der Universität Tübingen (Tubingen, Germany), The Queen’s College (Oxford, United Kingdom), Université de Provence and Centre de Physique Théorique (Marseille, France), University College Dublin (Dublin, Ireland), University of Berne (Berne, Switzerland), University of California (Irvine, USA), University of California (Santa Barbara, USA), University of Granada (Granada, Spain), University of Kansas (Lawrence, USA), University of Oslo (Oslo, Norway), Wellesley College (Wellesley, USA)ларида олиб борилмоқда.

Охирги йилларда операторлар алгебраларининг ҳолатлари фазосини геометрик тавсифлаш бўйича олиб борилган илмий тадқиқотлар натижасида қатор долзарб масалалар ечилган. Жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: қавариқ тўпламларнинг типи I бўлган JBW-факторнинг нормал ҳолатлари фазосига, JB-алгебраларнинг ҳолатлари фазосига (University of Oslo, Norway and Wellesley College), C^*-алгебра ҳолатлари фазосига (University of Oslo, Wellesley College), JBW-алгебраларнинг нормал ҳолатлари фазосига (Université de Provence and Centre de Physique Théorique, Wellesley College) аффин изоморф бўлишини таъминлайдиган геометрик шартлар аниқланган. JBW-алгебраларнинг олд қўшма фазоларининг бирлик шари қирраларининг норма бўйича ёпиқлиги исботланган (The Queen’s College), нейтрал қирралари кучли симметрик фазонинг 1-6 типдаги Картан

---

[2] Диссертация мавзуси бўйича хорижий тадқиқотлар шарҳи: Acta Mathematica Hungarica: https://www.springer.com/journal/10474, Journal of Functional Analysis: https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-functional-analysis, Canadian Journal of Mathematics: https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics, ва бошқа манбалар асосида ишлаб чиқилган.

факторларидан бирининг олд қўшма фазосига изометрик бўлишининг геометрик шартлари топилган (Jerusalem College of Technology, University of California), қирралари симметрик фазонинг комплекс JB*-учлик олд қўшма фазосига изометрик бўлишининг геометрик шартлари аниқланган (Denison University, University of California).

Дунёда бугунги кунда Банах фазолари синфида операторлар алгебраларини тавсифлаш бўйича бир қатор изланишлар, жумладан, фон Нейман алгебралари, JBW-алгебралари ва JBW*-учликларнинг олд қўшма фазоларининг геометрик хоссаларини ўрганиш; қавариқ тўпламнинг JBW-алгебранинг, фон Нейман алгебранинг нормал ҳолатлари фазосига аффин изоморф бўлишининг соддароқ геометрик шартларини топиш; қирралари симметрик фазоларнинг геометрик таснифи ва уларнинг бундай фазолар синфидаги операторлар алгебраларининг геометрик тавсифига татбиқлари каби устувор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Квант назариясини аксиоматик ўрганишнинг асосий йўналишларидан бири “қавариқ” ёндашув бўлиб, унинг асосий элементи физик система ҳолатларининг қавариқ тўпламидир. Е.Альфсен, Ф.Щульц, Х.Ханке-Олсен ва Б.Иокумларнинг ишларида қавариқ тўпламларнинг C^*-алгебра, фон Нейман алгебраси ёки JB-алгебраларининг ҳолатлари фазосига аффин изоморф бўлишини таъминлайдиган геометрик шартлар аниқланган. Учлик алгебраик структурага асосланган JB*-учликларнинг асосий назарияси У.Кауп, Т.Данг, Я.Фридман, Б.Руссо, Г.Хорн ва Е.Нехерлар ишларида ёритилган. Е.Альфсен ва Ф.Щульц ишларида келтирилган қавариқ тўпламларнинг геометрик хоссалари JB*-учликларнинг тартибланмаган аналоглари мавжуд эканлигини кўрсатади.

Қирралари симметрик фазоларнинг асосий назарияси Я.Фридман ва Б.Руссонинг ишларида ёритилган бўлиб, комплекс фон Нейман алгебралари, JB*-алгебралари ва умумийроқ бўлган JB*-учликларнинг олд қўшма фазолари нейтрал қирралари кучли симметрик фазо бўлиши исботланган. Кейинчалик, ушбу муаллифлар томонидан JB*-учликларнинг олд қўшма фазосида ўринли бўладиган тўртта табиий ва физик аксиомаларни қаноатлантирувчи келтирилмайдиган, нейтрал қирралари кучли симметрик фазонинг 1-6 типдаги Картан факторларидан бирининг олд қўшма фазосига чизиқли изометрик бўлишини кўрсатган. М.Нейл ва Б.Руссо томонидан қирралари симметрик фазонинг комплекс JB*-учлик олд қўшма фазосига изометрик бўлишининг геометрик шартлари аниқланган. Шунингдек, ихтиёрий нейтрал қирралари кучли симметрик фазонинг атомик ва ноатомик қирралари кучли симметрик фазоларнинг тўғри йиғиндисидан иборат бўлиши исботланган.

Ш.А.Аюпов, Б.Иокум ва Н.Ядгоров ишларида проектив қавариқ тўпламлар деб номланувчи тўпламларнинг геометрик тавсифлари ўрганилган, яъни ушбу тўпламлар қирраларининг панжаралари ўрганилиб, қаварик тўпламнинг модуляр JBW-алгебранинг, хусусий ҳолда чекли фон Нейман алгебранинг, нормал ҳолатлари фазосига аффин изоморф бўлишининг соддароқ геометрик шартлари топилган. Йордан операторлар алгебралари ва C^*-алгебраларининг ҳолатлар фазоларини геометрик тавсифлаш учун Е.Альфсен, Ф.Щульц ва Х.Ханке-Олсен дуал жуфтликлар – тартибланган бирли фазо ва базали нормага эга фазоларни ўрганган. Базали нормага эга фазолар ва қирралари симметрик фазолар орасидаги боғлиқлик эса Н.Ядгоров ва М.Ибрагимовнинг ишларида ўрганилган. Н.Ядгоров томонидан қирралари кучсиз симметрик фазонинг қирралари кучли симметрик фазо бўлиши шарти аниқланган. Н.Ядгоров, К.Кудайбергенов ва М.Ибрагимовлар ишида L_1-фазога изометрик изоморф бўлган қирралари кучли симметрик фазолар таснифи келтирилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим ёки илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87–«Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизиқли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос»+«Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва сиртларнинг глобал инвариантлари назарияси ва унинг механикага татбиқлари» (2017-2019 йиллар) ва Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университетининг ОТ-4-27 «Йордан учликлари фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» (2017-2020 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади мақсади JBW-алгебраларнинг олд қўшма фазоларини геометрик тавсифлаш ва қирралари симметрик бўлган ҳақиқий фазоларни тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

қирралари симметрик фазога қўшма фазо элементининг геометрик трипотент бўлиши шартини аниқлаш;

чекли ўлчамли ҳақиқий қирралари симметрик фазоларни таснифлаш;

атомик абел фон Нейман алгебраларнинг олд қўшма фазоларига изометрик изоморф бўлган қирралари симметрик фазоларни таснифлаш;

JBW-алгебраларнинг олд қўшма фазолари қирралари кучли симметрик фазолар бўлишининг зарур ва етарли шартларини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти. Қирралари кучли симметрик фазолар, қирралари кучсиз симметрик фазолар, JBW-алгебралар, фон Нейман алгебралари.

Тадқиқотнинг предмети. Қирралари симметрик фазолар назарияси, операторлар алгебралари назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари: Тадқиқот ишида функционал анализ, қирралари симметрик фазолар назарияси, Йордан Банах алгебралари назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагиларлдан иборат:

рефлексив комплекс қирралари кучли симметрик фазонинг қўшма фазоси элементи геометрик трипотент бўлиши учун бу элементнинг ортогонал тўлдирувчиси M-ортогонал тўлдирувчиси билан устма-уст тушиши зарур ва етарли эканлиги исботланган;

биргаликдаги Пирс ёйилмасига эга чекли ўлчамли нейтрал қирралари симметрик ҳақиқий фазоларининг чекли ўлчамли Гильберт фазоларининг l_1-йиғиндисига изометрик изоморф эканлиги исботланган;

тўла геометрик трипотентга ва нуқталарнинг бўрттирилганлиги хоссасига эга атомик нейтрал қирралари кучли симметрик фазоларнинг атомик абел фон Нейман алгебраларининг олд қўшма фазоларига изометрик изоморф бўлиши исботланган;

JBW-алгебранинг олд қўшма фазоси қирралари кучли симметрик фазо бўлиши учун бу алгебра абел алгебраси ва типи I_2 бўлган алгебранинг тўғри йиғиндисидан иборат бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари

Чекли ўлчамли нейтрал қирралари кучли симметрик бўлган ҳақиқий фазоларни таснифлашда ҳақиқий чекли ўлчамли нейтрал қирралари кучли симметрик фазонинг ихтиёрий симметрик қирраси симплекс бўлиши қўлланилган;

Спин факторнинг олд қўшма фазоси қирралари кучли симметрик фазо бўлишини кўрсатишда ундаги геометрик трипотентларнинг кўринишларидан фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, қирралари симметрик фазолари назарияси ва операторлар алгебраси назарияси усулларидан фойдаланилган. Олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти қирралари симметрик бўлган ҳақиқий фазолар таснифи ва JBW-алгебраларининг геометрик тавсифидан операторлар алгебраларининг геометрик хоссаларини ўрганишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти биргаликдаги Пирс ёйилмасига эга чекли ўлчамли нейтрал қирралари кучли симметрик ҳақиқий фазоларининг чекли ўлчамли Гильберт фазоларининг l_1-йиғиндисига изометрик изоморф эканлигидан квант назариясини аксиоматик ўрганишда қўлланилиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ҳақиқий қирралари симметрик фазоларнинг таснифи ва уларнинг JBW-алгебраларнинг геометрик тавсифига татбиқлари бўйича олинган натижалар асосида:

атомик қирралари симметрик фазоларнинг таснифидан ОТ-Ф4-31 рақамли грант лойиҳасида атомик симметрик фазо изометрияларини таснифлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 3 декабрдаги 89-03-5051 рақамли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши нокоммутатив L_1-фазолардаги эргодик оқимларнинг деярли текис яқинлашувчи эканлигини исботлаш имконини берган;

JBW-алгебраларнинг геометрик тавсифидан ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87 рақамли грант лойиҳасида *-алгебранинг барча ўз-ўзига қўшма элементларининг Йордан алгебраси Рикарт-Йордан алгебраси бўлганида бирлик элементга эга бўлишини кўрсатишда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академиясининг 2021 йил 4 январь кунги 2-1255-10 рақамли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши йиғиндиси бирга тенг бўлган икки боғламли минимал идемпотентларни ўз ичига олган чекли ўлчовли формал ҳақиқий унитар Йордан алгебраси тўрт ўлчамли бўлганда у спин-факторга изометрик изоморф бўлишини исботлаш имконини берган;

SFS-фазонинг қўшма фазосидаги ортогоналлик ва М-ортогоналлик орасидаги боғлиқлигидан PGC2018-093332-B-I00 рақамли хорижий грант лойиҳасида чекли трипотентларнинг геометрик хоссаларига оид муҳим масалаларни ечишда фойдаланилган (Гранада университетининг 2020 йил 7 декабрдаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижанинг қўлланилиши JBW*-учликдаги унитар ва тўла трипотентларни таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та халқаро ва 8 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 28 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фан доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та мақола, жумладан, 6 таси хорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, тўрт боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 145 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети келтирилган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Дастлабки тушунчалар ва қирралари симметрик фазоларга мисоллар»** номли биринчи бобида диссертациянинг натижаларини баён қилиш учун зарур бўлган қирралари симметрик фазолар назариясининг асосий тушунчалари келтирилган. Шунингдек, қирралари кучли симметрик фазоларга мисол бўлган, JBW*-учлик ва фон Нейман алгебралари олд қўшма фазоларининг баъзи хоссалари келтирилган. Қирралари кучли симметрик фазоларнинг ℓ_1-йиғиндиси қирралари симметрик фазо бўлиши исботланди. Бундан ташқари, қирралари кучли симметрик фазоларнинг ℓ_1-йиғиндиси нейтрал бўлиши учун уларнинг ҳар бирининг нейтраллиги зарур ва етарли эканлиги кўрсатилди.

Айтайлик, Z нормаланган фазо бўлсин. Агар Z фазонинг f ва g элементлари учун

$$\|f+g\|=\|f-g\|=\|f\|+\|g\|$$

тенглиги бажарилса, у ҳолда f ва g элементлари *ортогонал* дейилади ва $f \lozenge g$ каби белгиланади.

Агар f ва g элементлари ортогонал бўлиб, $\|f\|=\|g\|=1$ тенглиги бажарилса, у ҳолда f ни g ва $-g$ билан, ва $-f$ ни g ва $-g$ билан туташтирувчи кесмалар Z фазонинг $Z_1=\left\{f\in Z:\|f\|\le 1\right\}$ бирлик шарининг чегарасида ётади.

Маълумки, A фон Нейман алгебрасидаги f ва g нормал функционаллари ортогонал бўлиши учун, $f(p)=\|p\|$ ва $g(q)=\|q\|$ тенгликларини қаноатлантирувчи p ва q қисмий изометриялар мавжуд бўлиши зарур ва етарли.

F тўплам Z_1 тўпламнинг қавариқ қисм тўплами бўлсин. Агар $g,h\in Z_1$ элементлар ва $\lambda\in(0,1)$ сони учун $\lambda g+(1-\lambda)h\in F$ эканлигидан $g,h\in F$ келиб чиқса, F тўплам *қирра* дейилади.

Агар нормаси бирга тенг бўлган бирор $u\in Z^*$ учун

$$F = F_u = \left\{ f \in Z_1 : \left\langle f , u \right\rangle = 1 \right\}$$

тенглиги бажарилса, у ҳолда F *норма бўйича бўрттирилган қирра* дейилади.

Агар нормаси бирга тенг $u \in Z^*$ функционали учун $\left\langle g, u \right\rangle = 0$ тенглиги барча $g \in F_u^\Diamond$ учун бажарилса, у ҳолда u *проектив бирлик* деб аталади. Бу шуни кўрсатадики, норма бўйича бўрттирилган F_u қирра $F_u^\Diamond$ ортогонал тўлдирувчисига “параллел” бўлади, яъни $\left\langle u, F_u \right\rangle = 1,\ \left\langle u, F_u^\Diamond \right\rangle = 0.$

Симметрик қирранинг қуйидаги таърифи Я. Фридман ва Б. Руссолар томонидан киритилган. У қирралари кучсиз симметрик ҳамда қирралари кучли симметрик фазоларни киритишда асосий тушунча ҳисобланади.

1-таъриф. Агар Z ни Z га акслантирувчи S_u чизиқли изометрия мавжуд бўлиб, $S_u^2 = I$ ва унинг қўзғалмас нуқталари тўплами F_u қирранинг чизиқли қобиғи ёпилмаси $\overline{sp}\, F_u$ ҳамда ортогонал тўлдирувчиси $F_u^\Diamond$ нинг топологик тўғри йиғиндиси билан устма-уст тушса, яъни $\left(\overline{sp}\, F_u \right) \oplus F_u^\Diamond$ дан иборат бўлса, у ҳолда норма бўйича бўрттирилган F_u қирра *симметрик қирра* деб аталади.

Агар $u \in Z^*$ проектив бирлик учун F_u симметрик қирра бўлиб, S_u симметрия учун $S_u^* u = u$ тенглиги бажарилса, у ҳолда u *геометрик трипотент* деб аталади.

SF ва GU билан мос равишда Z_1 нинг барча симметрик қирралари тўплами ва Z^* нинг барча геометрик трипотентлари тўпламини белгилаймиз.

2-таъриф. Ҳақиқий ёки комплекс нормаланган Z фазода Z_1 нинг ҳар бир норма бўйича бўрттирилган қирраси симметрик қирра бўлса, у ҳолда Z фазо *қирралари кучсиз симметрик фазо* (*WFS-фазо*) деб аталади .

WFS-фазода $GU \ni u \to F_u \in SF$ акслантириш геометрик трипотентлар тўплами билан симметрик қирралар тўплами орасида биекция бўлади.

Z WFS-фазосида ҳар бир F_u симметрик қирралар учун $P_k\left(u\right),\ k \in \left\{ 0,1,2 \right\}$ умумлашган Пирс проекторлари қуйидагича аниқланади:

$$P_1(u) = \frac{1}{2}\left(I - S_u \right),\ P_1(u)(Z) = \left\{ f \in Z : S_u f = -f \right\},$$

$P_0\left(u\right)$ ва $P_2\left(u\right)$ лар Z ни мос равишда $F_u^\Diamond$ ва $\overline{sp}\, F_u$ ларга проекциялайди. $P_k\left(u\right),\ k \in \left\{ 0,1,2 \right\}$ умумлашган Пирс проекторлари таърифидан

$$P_2\left(u\right) + P_1\left(u\right) + P_0\left(u\right) = I\ ,$$
$$P_2\left(u\right) - P_1\left(u\right) + P_0\left(u\right) = S_u$$

эканлиги келиб чиқади.

Ушбу $U=Z^*$, $Z_k(u)=P_k(u)(Z)$ и $U_k(u)=P_k(u)^*(U)$, $k\in\{0,1,2\}$ белгилашларни киритамиз.

Агар Z нормаланган фазонинг ҳар бир $f\in Z$ учун $\|Qf\|=\|f\|$ эканлигидан $Qf=f$ келиб чиқса, у ҳолда Q қисқартириб акслантирувчи проектор *нейтрал* дейилади.

Агар Z нормаланган фазода ҳар бир F_u симметрик қиррага мос келувчи $P_2(u)$ проектор нейтрал бўлса, у ҳолда Z *нейтрал фазо* дейилади.

Айтайлик, Z фазо WFS-фазо бўлсин. Агар $x,y\in Z^*$ функционаллари учун $x\in U_2(u)$ ва $y\in U_0(u)$ бўлган $F_u\subset Z_1$ симметрик қирра мавжуд бўлса, у ҳолда бу функционаллар *ортогонал* дейилади ва $(x\lozenge y)$ каби белгиланади.

3-таъриф. Агар ҳар бир норма бўйича бўрттирилган $F_u\subset Z_1$ қирра ва ҳар бир $y\in Z^*$, $\|y\|=1$ элементлар учун $F_u\subset F_y$ эканлигидан $S_u^*y=y$ келиб чиқса, у ҳолда Z қирралари кучсиз симметрик фазо *қирралари кучли симметрик фазо (SFS-фазо)* дейилади, бу ерда S_u – F_u қиррага мос келувчи симметрия.

Z нейтрал SFS-фазода $f\neq 0$ учун v_f орқали $\langle f,v\rangle=\|f\|$ ва $\left\langle v,\{f\}^{\lozenge}\right\rangle=0$ мунособатларни қаноатлантирувчи ягона v геометрик трипотентни белгилаймиз. Агар $f,g\in Z$, у ҳолда $f\lozenge g$ бўлиши учун $v_f\lozenge v_g$ муносабатнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

Айтайлик, ҳар бир $i\in I$ учун $\left(Z_i,\ \|x\|_{Z_i}\right)$ – нормаланган фазо бўлсин. Бу фазоларнинг l_1-йиғиндиси $Z=\bigoplus_{i\in I}^{l_1}Z_i$ орқали белгиланади, яъни Z фазо $\sum_{i\in I}\|x_i\|_{Z_i}<+\infty$ шартини қаноатлантирувчи $x=\{x_i\}_{i\in I}$ кўринишидаги элементлардан иборат, бунда Z даги норма $\|x\|=\sum_{i\in I}\|x_i\|_{Z_i}$ каби аниқланади.

Қуйидаги теорема ўринли.

1-теорема. *Айтайлик, ҳар бир* $i\in I$ *учун* Z_i *– SFS-фазо бўлсин. У ҳолда* $Z=\bigoplus_{i\in I}^{l_1}Z_i$ *ҳам SFS-фазо бўлади.*

Диссертациянинг **«Қирралари кучли симметрик фазоларнинг геометрик трипотентлари хоссалари»** номли иккинчи бобида, қирралари кучли симметрик фазолардаги қирралар ва геометрик трипотентларнинг геометрик хоссалари ўрганилди.

Биринчи параграфда нейтрал қирралари симметрик фазолар бирлик шарлари қирраларининг геометрик хоссалари ўрганилди. Бунда чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучсиз симметрик фазолар бирлик шарларининг барча экстремал нуқталари бўрттирилган нуқта бўлиши, ҳамда чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазоларнинг барча симметрик қирралари симплекс бўлиши кўрсатилди.

4-таъриф. Агар қирралари кучсиз симметрик фазо бирлик шарининг ҳар бир экстремал нуқтаси норма бўйича бўрттирилган нуқта бўлса, у ҳолда бу фазо (PE) (*“нуқталарнинг бўрттирилганлиги”*) хоссага эга дейилади.

Я.Фридман ва Б.Руссо ишида қуйидаги масала қўйилган

1-масала. Айтайлик, Z қирралари кучсиз симметрик фазо бўлсин. Ҳар бир экстремал нуқта норма бўйича бўрттирилган нуқта бўладими?

Қуйидаги теорема параграфнинг асосий натижаси бўлиб, чекли ўлчамли ҳақиқий қирралари кучсиз симметрик фазолар ҳолида юқоридаги масала ижобий ечимга эга эканлигини кўрсатади.

2-теорема. *Агар Z чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучсиз симметрик фазо бўлса, у ҳолда бирлик шарнинг ҳар бир экстремал нуқтаси норма бўйича бўрттирилган нуқта бўлади.*

Умумий ҳолда юқоридаги масала очиқ турибди.

Ушбу бобнинг иккинчи параграфида SFS-фазода чекли геометрик трипотент тушунчаси киритилган бўлиб, унинг баъзи хоссалари аниқланди. Ихтиёрий чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал SFS-фазонинг чекли бўлиши исботланди.

Агар u геометрик трипотент учун

1) $\dim U_2(u) = 1$ бўлса, u *минимал* дейилади;

2) $U_0(u) = \{0\}$ бўлса, u *максимал* дейилади;

3) $U_2(u) = U$ бўлса, u *тўла* дейилади.

Агар $e \in GU$ учун $U_2(e)$ да максимал бўлган ихтиёрий $u \in U_2(e)$ геометрик трипотент $U_2(e)$ да тўла бўлса, у ҳолда e *чекли геометрик трипотент* дейилади. Агар U даги ихтиёрий геометрик трипотент чекли бўлса, у ҳолда биз Z ни *чекли* деймиз.

Қуйидаги теорема ўринли.

3-теорема. *Ихтиёрий чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал SFS-фазо чекли бўлади.*

Учинчи параграфда SFS-фазонинг қўшма фазосидаги ортогоналлик билан М-ортогоналлик тушунчалари орасидаги боғлиқлик ўрганилди. Рефлексив SFS-фазоларда геометрик трипотентларнинг геометрик тавсифи берилди. Рефлексив SFS-фазоларнинг қўшма фазоси бирлик шарининг экстремал нуқталари тўплами максимал геометрик трипотентлар тўплами билан устма-уст тушиши кўрсатилди.

Агар E нормаланган фазонинг x ва y элементлари учун

$$\|x \pm y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

бажарилса, у ҳолда x ва y элементлар *M-ортогонал* дейилади, ва $x \square y$ каби белгиланади.

E нормаланган фазонинг H қисм тўпламининг *М-ортогонал* тўлдирувчиси

$$H^{\square} = \left\{ x \in E : x \square y, \ \ \forall y \in H \right\}$$

каби аниқланади.

Нормаси бирга тенг ҳар бир $x \in E$ элементи учун S_x *уринма диск*

$$S_x = \left\{ y \in E : \ \|x + \lambda y\| = 1, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1 \right\}$$

каби аниқланади.

Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теорема бўлиб, у SFS-фазонинг қўшма фазоси элементлари геометрик трипотент бўлишининг зарур ва етарли шартларини беради.

4-теорема. *Айтайлик, Z рефлексив комплекс қирралари кучли симметрик фазо ва $u \in U$, $\|u\| = 1$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалентдир:*

(a) $u \in GU$;

(b) $u^{\square} \cap U_1 = u^{\Diamond} \cap U_1$;

(c) $u^{\square} \cap U_1 = iu^{\square} \cap U_1$;

(d) $S_u = u^{\Diamond} \cap U_1$.

Қирралари симметрик фазолар назариясида асосий тушунчаларидан бири Я.Фридман ва Б.Руссолар ишида киритилган фазонинг ранги тушунчасидир. Ш.А.Аюпов томонидан берилган ранги бўйича қирралари симметрик фазоларни таснифлаш масаласи қўйилганди. Диссертациянинг **«Қирралари симметрик фазоларнинг геометрик тавсифи»** деб номланган учинчи боби ушбу масалани ечишга бағишланди.

5-таъриф. Агар ўзаро ортогонал геометрик трипотентларнинг ихтиёрий оиласи k натурал сонидан катта бўлмаган қувватга эга бўлиб, k сондаги ўзаро ортогонал геометрик трипотентлардан иборат бўлган камида битта оила мавжуд бўлса, у ҳолда Z *ранги* k *қирралари симметрик фазо* дейилади ва $rank\, Z = k$ каби белгиланади.

Биринчи параграфда ранги n бўлган n ўлчамли ҳақиқий қирралари кучли симметрик фазолар таснифланди, ҳамда унинг L_1-нормали фазо бўлиши кўрсатилди. Иккинчи параграфда Банах фазолари синфида ҳақиқий Гильберт фазолари геометрик тавсифланди.

Учинчи параграфда ранги $n-1$ бўлган n ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазолар таснифланди.

5-теорема. *Айтайлик, Z ранги $n-1$ бўлган n ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазо бўлсин. У ҳолда Z фазо нормаси*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3| + \ldots + |x_n|$$

каби аниқланган R^n *фазога изометрик изоморф бўлади.*

JP хоссасига эга бўлган чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазолар тўртинчи параграфда ўрганилди.

Бунда JP хоссасига эга бўлган ихтиёрий чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазонинг чекли ўлчамли Гильберт фазоларининг l_1-йиғиндисига изометрик изоморф эканлиги исботланди.

Агар ўзаро ортогонал ихтиёрий u ва v геометрик трипотентлар жуфтлиги учун $S_{u+v} = S_u S_v$ тенглиги бажарилса, у ҳолда SFS-фазо *JP* («*биргаликдаги Пирс ёйилмаси*») хоссасига эга дейилади.

Маълумки, R^n фазо ушбу

$$\|f\| = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}} f_j^2},$$

норма бўйича ранги k бўлган JP хоссага эга нейтрал SFS-фазо бўлади, бу ерда $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_{k+1} = n.$

Қуйидаги натижа параграфнинг асосий натижаси бўлиб, JP хоссасига эга бўлган чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал SFS-фазоларини таснифлайди.

6-теорема. *Айтайлик, Z чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазо JP хоссасига эга бўлган бўлсин. У ҳолда*

$$Z \cong \bigoplus_{i=1}^{k} {}^{l_1} H_i,$$

бунда H_i – Гильберт фазоси, $i \in \overline{1,k}$ ва $k = rank\, Z.$

Шундай қилиб, $rank\, Z = 1,\ n-1,\ n$ (ушбу ҳолларнинг ҳар бирида изометрик изоморфизм аниқлигида битта фазо мавжуд) ҳоллардан бошқа $1 < rank\, Z < n-1$ ҳолларда изоморф бўлмаган фазоларнинг сони $\left[\frac{n}{k}\right]$ дан кичик эмас, бу ерда $n = \dim Z,\ k = rank\, Z,\ [t]$ – t сонининг бутун қисми. Бунда, изоморф бўлмаган фазолар сонини қуйидаги рекуррент формула ёрдамида аниқлаш мумкин:

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right) \right).$$

Бешинчи параграфда тўла геометрик трипотентли нейтрал қирралари кучли симметрик фазолар ўрганилди. Атомик коммутатив фон Нейман алгебралари олд қўшма фазоларига изометрик изоморф бўлган қирралари кучли симметрик фазолари таснифланди.

Агар $u,v \in GU$ учун $F_u \subset F_v$ бўлса, у ҳолда $u \le v$ каби ёзилади.

Айтайлик, $e \in GU$ бўлсин. Ушбу

$$L_e = \{u \in GU : u \le e\} \cup \{0\}$$

белгилашни киритамиз.

Маълумки, L_e тўплам "$\le$" тартибга нисбатан тўла ортомодуляр панжара бўлади, бу ерда ортогонал тўлдирувчи $u^\perp = e - u$ кўринишида аниқланади.

Айтайлик, $\mathrm{T} = \{v_i\}_{i \in J}$ оиласи U даги ўзаро ортогонал минимал геометрик трипотентларнинг максимал оиласи бўлсин. Ушбу

$$\ell_1(\mathrm{T}) = \left\{ \{\lambda_i\}_{i\in J} : \sum_{i\in J} |\lambda_i| < +\infty \right\}$$

белгилашни киритамиз. У ҳолда $\ell_1(\mathrm{T})$ қуйидаги норма бўйича Банах фазоси бўлади:

$$\|\{\lambda_i\}_{i\in J}\| = \sum_{i\in J} |\lambda_i|.$$

Агар Z_1 даги ҳар бир F_u симметрик қирра экстремал нуқтага эга бўлса, у ҳолда Z нормаланган фазо *атомик фазо* дейилади.

Қуйидаги теорема ушбу параграфнинг асосий натижаси бўлиб, атомик коммутатив фон Нейман алгебралари олд қўшма фазоларига изометрик изоморф бўлган қирралари кучли симметрик фазоларни таснифлайди.

7-теорема. *Айтайлик, Z атомик нейтрал қирралари кучли симметрик фазоси (PE) хоссасига эга бўлиб, e тўла геометрик трипотенти мавжуд бўлсин. Агар L_e Буль алгебраси бўлса, у ҳолда Z фазо $\ell_1(\mathrm{T})$ фазога изометрик изоморф бўлади, бу ерда T – ўзаро ортогонал минимал геометрик трипотентларнинг максимал оиласи.*

Унитар геометрик трипотентли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазолар ушбу бобнинг олтинчи параграфида ўрганилди.

Агар $F_e \cup F_{-e}$ тўпламнинг қаварик қобиғи Z_1 бирлик шар билан устма-уст тушса, яъни

$$Z_1 = \mathrm{co}(F_e \cup F_{-e}). \qquad (1)$$

бўлса, у ҳолда $e \in GU$ *унитар геометрик трипотент* дейилади.

R^n фазо ушбу

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

норма бўйича SFS-фазо бўлади, бу ерда $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. Агар $e \in \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$ максимал геометрик трипотент бўлса, у ҳолда $e = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, ..., n$; шу билан бирга

$$F_e = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i = 1,\ \varepsilon_i x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n} \right\}$$

норма бўйича бўрттирилган қирра (1) шартни қаноатлантиради, яъни e унитар геометрик трипотент бўлади.

Умумий ҳолда тўғри йиғинди хоссасига эга μ ўлчовли (Ω, Σ, μ) ўлчовли фазони қараймиз, яъни бу фазода шундай $\{\Omega\}_{i \in J} \subset \Sigma,\ 0 < \mu(\Omega_i) < \infty,\ i \in J$ оила мавжудки, $\mu(A) < \infty$ бўлган ихтиёрий $A \in \Sigma$ учун шундай $J_0 \subset J$ саноқли қисм тўплам ва ноль ўлчовли B тўплам бор бўлиб, $A = \bigcup_{i \in J_0} (A \cap \Omega_i) \cup B$ муносабат ўринли бўлади.

Айтайлик, $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ - (Ω, Σ, μ) да интегралланувчи барча ҳақиқий функциялар фазоси бўлсин. Бу фазо $\|f\| = \int_{\Omega} |f(t)| d\mu(t),\ f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ норма бўйича SFS-фазо бўлади.

Агар $e \in L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu) \cong L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ максимал геометрик трипотент бўлса, у ҳолда бирор $A \in \Sigma$ учун $e = \tilde{\chi}_A - \tilde{\chi}_{\Omega / A}$ бўлади, бу ерда $\tilde{\chi}_A$ – A тўпламнинг характеристик функциясини ўз ичига олувчи синф. У ҳолда

$$F_e = \left\{ f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu) : \|f\| = 1,\ \int_{\Omega} e(t) f(t) d\mu(t) = 1 \right\}$$

норма бўйича бўрттирилган қирра (1) шартни қаноатлантиради, яъни e унитар геометрик трипотент бўлади.

Н.Ядгоров, К.Кудайбергенов ва М.Ибрагимовларнинг ишида, агар Z унитар геометрик трипотентга эга ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазо бўлиб, унинг ихтиёрий максимал геометрик трипотенти унитар бўлса, у ҳолда Z фазонинг L_1-фазога изометрик изоморф бўлиши кўрсатилган.

Қуйидаги натижа, юқоридаги теоремада «ихтиёрий максимал геометрик трипотентнинг унитар бўлиши» шартининг ортиқча эканлигини кўрсатади.

1-лемма. *Айтайлик, Z ҳақиқий нейтрал SFS-фазосида унитар геометрик трипотент мавжуд бўлсин. У ҳолда ҳар бир максимал геометрик трипотент унитар бўлади.*

Қуйидаги теорема ушбу параграфнинг асосий натижасидир.

8-теорема. *Айтайлик, Z ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазоси унитар геометрик трипотентга эга бўлсин. У ҳолда тўғри йиғинди хоссасига эга* μ *ўлчовли* (Ω, Σ, μ) *ўлчовли фазо мавжуд бўлиб, Z фазо* $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ *фазога изометрик изоморф бўлади.*

Диссертациянинг **«Ҳақиқий операторлар алгебраларининг геометрик тавсифи»** номли тўртинчи бобида JBW-алгебраларнинг олд қўшма фазоларининг геометрик хоссалари ўрганилди.

Ҳақиқий ёки комплекс A алгебрада (умумий ҳолда ноассоциатив) $a \circ b$ кўпайтма ихтиёрий $a, b \in A$ учун

1) $a \circ b = b \circ a$;

2) $a^2 \circ (b \circ a) = (a^2 \circ b) \circ a$

аксиомаларни қаноатлантирса, у ҳолда A *Йордан алгебраси* дейилади.

Бирлик элементга эга A ҳақиқий Йордан алгебрасида норма аниқланган бўлиб, бу нормага нисбатан у Банах фазоси ҳамда ихтиёрий $a, b \in A$ учун

1) $\|a^2\| = \|a\|^2$;

2) $\|a^2\| \le \|a^2 + b^2\|$;

3) $\|a \circ b\| \le \|a\| \|b\|$

шартлари ўринли бўлса, у ҳолда A ни *JB-алгебра* деб атайди.

Агар A JB-алгебраси олд қўшма фазога эга бўлса, яъни шундай нормаланган A_* фазо мавжуд бўлиб $(A_*)^* = A$ тенглиги ўринли бўлса, у ҳолда A алгебра *JBW-алгебра* дейилади.

Инволютив комплекс Йордан алгебрасида норма аниқланган бўлиб, бу нормага нисбатан у Банах фазоси ҳамда ихтиёрий $a, b \in A$ учун

1) $\|a^*\| = \|a\|$;

2) $\|a \circ b\| \le \|a\| \|b\|$;

3) $\|\{aa^*a\}\| = \|a\|^3$

шартлари ўринли бўлса, у ҳолда A *JB*-алгебра* дейилади, бу ерда

$$\{abc\} = (a \circ b) \circ c + (c \circ b) \circ a - (a \circ c) \circ b, \quad a, b, c \in A.$$

Олд қўшма фазога эга бўлган JB*-алгебра *JBW*-алгебра* дейилади.

Биринчи параграфда фон Нейман алгебраси ҳақиқий қисмининг олд қўшма фазоси ўрганилди.

Бунда фон Нейман алгебраси ҳақиқий (яъни эрмит) қисмининг олд қўшма фазоси қирралари кучли симметрик фазо бўлиши учун унинг абел алгебра билан типи I_2 алгебранинг тўғри йиғиндисидан иборат бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланди.

9-теорема. *Айтайлик, M – фон Нейман алгебраси, $A = M_{sa}$ – M нинг эрмит қисми ва A_* – A нинг олд қўшма фазоси бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалентдир:*

1) A_* фазо SFS-фазо бўлади;

2) $M = M_1 \oplus M_2$, бу ерда M_i – типи I_i $(i = 1,2)$ алгебра.

Иккинчи параграфда ҳақиқий спин-факторларнинг олд қўшма фазолари ўрганилди ва спин-факторнинг олд қўшма фазоси қирралари кучли симметрик фазо бўлиши кўрсатилди.

Айтайлик, A – JBW-алгебра бўлсин. Агар барча $z \in A$ учун $x \circ (z \circ y) = (x \circ z) \circ y$ муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $x, y \in A$ элементлари *биргаликда* дейилади ва $(x \leftrightarrow y)$ каби белгиланади. Ушбу $Z(A) = \{x \in A\colon x \leftrightarrow y, \ \forall y \in A\}$ тўплам A алгебранинг *маркази* дейилади. Агар $Z(A) = \{\lambda \mathbf{1}, \ \lambda \in \mathrm{R}\}$ бўлса, у ҳолда A – *JBW-фактор* дейилади. Ихтиёрий $a \in A$ элемент учун $ea = a$ бўладиган энг кичик марказий $e \in A$ проектор мавжуд. Бу проекторни a *элементнинг марказий ташувчиси* дейилади ва $c(a)$ каби белгиланади.

Агар $c(a) = \mathbf{1}$ бўлса, у ҳолда a элемент *аниқ* дейилади. A JBW-алгебранинг e ва f проекторлари учун $\{ses\} = f$ тенглигини қаноатлантирувчи $s \in A$ симметрия мавжуд бўлса, у ҳолда e ва f лар симметрия орқали боғланган дейилади. Агар $p \in A$ проектор учун $\{pAp\}$ абел алгебраси бўлса, у ҳолда p абел проектори дейилади.

Айтайлик, L – A JBW-алгебранинг барча проекторлари панжараси бўлсин. Агар $e \le g$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $e, g \in L$ ва барча $f \in L$ лар учун $(e \vee f) \wedge g = e \vee (f \wedge g)$ муносабат бажарилса, у ҳолда L ни *модуляр панжара* дейилади.

Агар $e \in A$ проектори учун $[0, e] = \{ f \in L : f \le e \}$ модуляр панжара бўлса, у ҳолда e *модуляр* дейилади.

Агар A JBW-алгебрасининг барча проекторлари панжараси L модуляр бўлса, яъни $\mathbf{1}$ модуляр проектор бўлса, у ҳолда A *модуляр* дейилади.

JBW-алгебраси

1) агар унда аниқ абел проектори мавжуд бўлса, у ҳолда типи I алгебра дейилади;

2) агар у аниқ модуляр проекторга эга ва нолдан ўзгача абел проекторга эга бўлмаса, у ҳолда типи II алгебра дейилади;

3) агар у нолдан ўзгача модуляр проекторга эга бўлмаса, у ҳолда типи III алгебра дейилади.

Айтайлик, H ҳақиқий Гильберт фазоси бўлиб, $x, y \in H$ элементлари скаляр кўпайтмасини $\langle x, y \rangle$ каби белгилайлик. Ушбу

$$A = \mathrm{R} \times H = \{(\alpha, x) : \alpha \in \mathrm{R}, x \in H\}$$

декарт кўпайтмани қараймиз. Унда кўпайтмани

$$(\alpha,x)\circ(\beta,y)=(\alpha\beta+\langle x,y\rangle,\alpha y+\beta x),$$

кўринишида киритамиз, бу ерда $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ x,y\in H.$ A да нормани ушбу

$$\|(\alpha,x)\|=|\alpha|+\|x\|_2\ \ (\alpha\in\mathbb{R},x\in H).$$

формула бўйича аниқлаймиз.

Бу кўпайтма ва нормага нисбатан A тўплам бирлик элементи $\mathbf{1}=(1,0)$ бўлган JBW-фактор бўлади ва у *спин-фактор* деб аталади. Е.Штёрмер томонидан JBW-фактор типи I_2 бўлиши учун унинг спин-фактор бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланган.

Маълумки, $(\mathbb{R}\times H,\|\cdot\|)^*=(\mathbb{R}\times H,\|\cdot\|_\infty)$, бу ерда $\|(\beta,y)\|_\infty=\max\{|\beta|,\|y\|_2\}$. A ва унинг қўшмаси A^* орасидаги иккиланганлик қуйидаги формула билан берилади:

$$\langle(\alpha,x),(\beta,y)\rangle=\alpha\beta+\langle x,y\rangle.$$

Қуйидаги теорема ўринли.

10-теорема. *Айтайлик,* A *спин-фактор бўлсин. У ҳолда* A_* *фазо* SFS*-фазо бўлади.*

Бу теоремани исботлашда қуйидаги лемма муҳим ўрин эгаллайди.

2-лемма. *Айтайлик,* A *спин-фактор бўлсин. У ҳолда ҳар бир* $u\in A$ *геометрик трипотент қуйидаги кўринишлардан бирига эга бўлади:*

а) $u=(\pm1,0)$;

б) $u=(0,a)$, *бу ерда* $\|a\|_2=1$;

в) $u=\left(\pm\frac{1}{2},a\right)$, *бу ерда* $\|a\|_2=\frac{1}{2}$.

Учинчи параграфда JBW-алгебраларнинг олд қўшма фазолари ўрганилди. JBW-алгебранинг олд қўшма фазоси қирралари кучли симметрик фазо бўлиши учун унинг, абел алгебра билан типи I_2 алгебранинг тўғри йиғиндисидан иборат бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботланди.

Маълумки, Йордан алгебралари назариясида ихтиёрий $a\in A$ элемент учун $U_a x=2a\circ(a\circ x)-a^2\circ x$ кўринишида аниқланган U_a оператори муҳим аҳамиятга эга. Ихтиёрий $a\in A$ элемент учун U_a оператори мусбат (яъни $U_a(A^+)\subset A^+$) ва нормал (яъни, агар $x_\alpha\uparrow x,$ бўлса, у ҳолда $U_a x_\alpha\uparrow U_a x$) бўлади. Агар p проектор бўлса, у ҳолда $U_p x=2p\circ(p\circ x)-p\circ x,$ $\|U_p\|\le 1,$ $U_p^2=U_p$ ва $U_p=U_p U_{\mathbf{1}-p}=0$. Ушбу $p\leftrightarrow U_p$ мослик биекция бўлади.

С.Эдвардс ва Г.Руттиманларнинг ишида қуйидаги натижа исботланган:

Айтайлик, B JBW*-алгебра, $A = B_{sa}$ – B нинг барча ўз-ўзига қўшма элементларининг JBW-алгебраси, A_* – A нинг олд қўшма фазоси ҳамда A_{*1} – A_* нинг бирлик шари бўлсин. У ҳолда A_{*1} нинг ҳар бир норма бўйича ёпиқ қирраси F бўрттирилган бўлиб, ушбу

$$F = F_u = \mathrm{co}(\{F_p\} \cup -\{F_q\}), \tag{2}$$

кўринишга эга бўлади, бу ерда p ва q лар A нинг ўзаро ортогонал проекторлари ҳамда $u = p - q$.

Айтайлик, A – JBW-алгебра, A_* – A нинг олд қўшма фазоси ва A_{*1} – A_* нинг бирлик шари бўлсин. У ҳолда (2) бўйича A_{*1} нинг ҳар бир норма бўйича бўрттирилган қирраси F_u учун A_* да $P_k(u)$, $k = 0,2$ проекторлар қуйидаги кўринишда аниқланади:

$$P_2(u)f = U_p^* f + U_q^* f,$$

$$P_0(u)f = U_{\mathbf{1}-p-q}^* f,$$

бу ерда p ва q лар A нинг ўзаро ортогонал проекторлари ҳамда $u = p - q$, $f \in A_*$.

Қуйидаги леммаларда $P_k(u)$, $k = 0,2$ проекторларнинг образлари аниқланади.

3-лемма. A_{*1} *нинг ҳар бир норма бўйича бўрттирилган қирраси* F_u *учун*

$$sp_{\mathrm{R}} F_u = P_2(u)(A_*) = \{f \in A_* : P_2(u)f = f\},$$

муносабат ўринли бўлади, бу ерда p *ва* q *лар* A *нинг ўзаро ортогонал проекторлари ҳамда* $u = p - q$.

4-лемма. A_{*1} *нинг ҳар бир норма бўйича бўрттирилган қирраси* F_u *учун*

$$F_u^{\Diamond} = P_0(u)(A_*) = \{f \in A_* : P_0(u)f = f\},$$

муносабат ўринли бўлади, бу ерда p *ва* q *лар* A *нинг ўзаро ортогонал проекторлари ҳамда* $u = p - q$.

Қуйидаги леммада бу проекторлар ёрдамида бирлик шарнинг ҳар бир норма бўйича бўрттирилган қирраси учун симметрия аниқланади.

5-лемма. A_{*1} *нинг ҳар бир норма бўйича бўрттирилган қирраси* F_u *учун*

$$S_u = 2P_2(u) + 2P_0(u) - I,$$

оператори симметрия бўлиб, унинг қўзғалмас нуқталари тўплами $spF_u \oplus F_u^{\Diamond}$ *бўлади.*

Параграфнинг асосий натижаси қуйидаги теоремадир.

11-теорема. *Айтайлик,* A *JBW-алгебра бўлсин. У ҳолда қуйидаги шартлар эквивалентдир:*

1) A_* *фазо SFS-фазо бўлади;*

2) $A = A_1 \oplus A_2$, *бу ерда* A_1 *– абел алгебраси,* A_2 *– типи* I_2 *алгебра.*

Хусусан, агар A *– типи* $I_n (n \geq 3)$ *ёки* II *ёки* III *бўлган JBW-алгебра бўлса, у ҳолда* A_* *фазо WFS-фазо бўлмайди.*

ХУЛОСА

Диссертация иши ҳақиқий қирралари симметрик фазоларнинг геометрик таснифи ва уларнинг бундай фазолар синфидаги ҳақиқий операторлар алгебраларининг геометрик тавсифига татбиқларига бағишланган.

1. SFS-фазоларида чекли геометрик трипотент тушунчаси киритилиб, унинг баъзи бир хоссалари аниқланди. Ихтиёрий чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал SFS-фазонинг чекли бўлиши исботланди.

2. Нейтрал қирралари симметрик фазолар бирлик шарлари қирраларининг геометрик хоссалари ўрганилди. Бунда чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучсиз симметрик фазолари бирлик шарларининг барча экстремал нуқталари бўрттирилган нуқта бўлиши, ҳамда чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазоларининг барча симметрик қирралари симплекс бўлиши кўрсатилди.

3. SFS-фазонинг қўшма фазосидаги ортогоналлик билан M-ортогоналлик орасидаги боғлиқлик ўрганилди, ҳамда рефлексив SFS-фазоларда геометрик трипотентларнинг геометрик тавсифи берилди. Рефлексив SFS-фазоларнинг қўшма фазоси бирлик шарининг экстремал нуқталари тўплами максимал геометрик трипотентлар тўплами билан устма-уст тушиши кўрсатилди.

4. Банах фазолари синфида ҳақиқий Гильберт фазоларига геометрик тавсиф берилди ва берилган ранги бўйича чекли ўлчамли ҳақиқий қирралари кучли симметрик фазолар таснифланди.

5. JP хоссасига эга бўлган ихтиёрий чекли ўлчамли ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазонинг чекли ўлчамли Гильберт фазоларининг l_1-йиғиндисига изоморф эканлиги исботланди.

6. Атомик коммутатив фон Нейман алгебраси олд қўшма фазосига изометрик изоморф бўлган қирралари кучли симметрик фазолар таснифланди.

7. Унитар трипотентга эга ҳақиқий нейтрал қирралари кучли симметрик фазо $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ фазога изометрик изоморф эканлиги кўрсатилди.

8. JBW-алгебранинг олд қўшма фазоси қирралари кучли симметрик фазо бўлиши учун унинг абел алгебра билан типи I_2 алгебранинг тўғри йиғиндисидан иборатлиги зарур ва етарли эканлиги исботланди.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

СЕЙПУЛЛАЕВ ЖУМАБЕК ХАМИДУЛЛАЕВИЧ

ОПИСАНИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРАНЕВО СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ JBW-АЛГЕБР

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ - 2021

Тема докторский (DSc) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.4.DSc/FM85.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Заитов Адилбек Атаханович** доктор физико-математических наук, профессор
	Закиров Ботир Сабитович доктор физико-математических наук
	Арзикулов Фарходжон Нематжонович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2021 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2021 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

У.У.Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования на мировом уровне, во многих случаях, сводятся к геометрической характеризации пространств состояний операторных алгебр, т.е. к аксиоматической характеризации тех выпуклых множеств, которые являются пространствами состояний C*-алгебр и алгебр фон Неймана, или JB-алгебр и JBW-алгебр. Я.Фридманом и Б.Руссо было введено понятие гранево симметричных пространств, которые рассматриваются как геометрическая модель состояний квантовой механики, основной целью введения которых является геометрическая характеризация предсопряженных пространств операторных алгебр. Описание сильно гранево симметричных пространств является одним из актуальных задач аксиоматического изучения статистических и вероятностных аспектов квантовой механики, и решения проблем теории операторных алгебр.

В настоящее время в мире актуальной является описание гранево симметричных пространств и характеризации операторных алгебр в классе таких пространств. М.Нейлом и Б.Руссо были поучены геометрические характеризации предсопряженных пространств комплексных JB*-троек, которые является широким классом банаховых пространств, основывающиеся на троичной алгебраической структуре, и содержащие в себе C*-алгебры, алгебры фон Неймана и JBW*-алгебры. В то же время геометрическая характеризация вещественных операторных алгебр остается открытым вопросом. В связи с этим, геометрическое описание вещественных гранево симметричных пространств, и применение полученных результатов к характеризациям вещественных операторных алгебр в классе таких пространств является целевым научным исследованием.

В нашей стране особое внимание уделяется актуальным направлениям фундаментальных наук, которые имеют научные и практические применения в квантовой механике и физике. В последние годы значительные результаты были достигнуты при решении практических задач нахождением более простых геометрических условий, при которых выпуклое множество будет аффинно изоморфно пространству нормальных состояний модулярной JBW-алгебры, в частности, конечной алгебры фон Неймана. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным научным направлениям специальности «Алгебра и функциональный анализ» рассматривается как основные задачи и направления деятельности фундаментальных исследований[3]. Развитие теории гранево симметричных пространств для дальнейшего использования результатов исследования в смежных областях науки, играет важную роль в обеспечении реализации данного постановления.

[3]Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии в республике. Исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан, разд. IV «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[4]. Исследования по теории гранево симметричных пространств, JBW-алгебр и JB*-троек, ведутся довольно широко в научных центрах и университетах ведущих стран, в том числе: Denison University (Granville, USA), Jerusalem College of Technology (Jerusalem, Israel), Mathematisches Institut der Universität Tübingen (Tubingen, Germany), The Queen’s College (Oxford, United Kingdom), Université de Provence and Centre de Physique Théorique (Marseille, France), University College Dublin (Dublin, Ireland), University of Berne (Berne, Switzerland), University of California (Irvine, USA) , University of California (Santa Barbara, USA), University of Granada (Granada, Spain), University of Kansas (Lawrence, USA), University of Oslo (Oslo, Norway), Wellesley College (Wellesley, USA).

В последние годы в результате научных исследований связанных с геометрическим описанием пространств состояний операторных алгебр были решены ряд актуальных задач. А именно, были получены следующие результаты: определены геометрические условия на выпуклые множества обеспечивающие их аффинную изоморфность пространству нормальных состояний JBW-фактора типа I, пространству состояний JB-алгебры (University of Oslo, Norway and Wellesley College), пространству состояний C^*-алгебры (University of Oslo, Wellesley College), пространству нормальных состояний JBW-алгебры (Université de Provence and Centre de Physique Théorique, Wellesley College). Доказано, что грани единичного шара предсопряженного пространства JBW-алгебр замкнуты относительно нормы (The Queen’s College), найдены геометрические условия, при которых нейтральное гранево симметричное пространство является изометричным

[4]Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Acta Mathematica Hungarica: https://www.springer.com/journal/10474, Journal of Functional Analysis: https://www.sciencedirect.com/journal/journal-of-functional-analysis, Canadian Journal of Mathematics: https://www.cambridge.org/core/journals/canadian-journal-of-mathematics, также были использованы и другие источники.

предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1-6 (Jerusalem College of Technology, University of California), определены геометрические условия, при которых гранево симметричное пространство является изометричным предсопряженному пространству комплексной JB*-тройки (Denison University, University of California).

В настоящее время в мире продолжаются исследовании по характеризации операторных алгебр в классе банаховых пространств. А именно, ведутся исследования по таким приоритетным научно-исследовательским направлениям как: изучение геометрических свойств предсопряженных пространств алгебр фон Неймана, JBW-алгебр и JBW*-троек; нахождение более простых геометрических условий, при которых выпуклое множество является аффинно изморфным пространству нормальных состояний JBW-алгебр, алгебр фон Неймана; геометрическое описание гранево симметричных пространств, и их приложение к геометрической характеризации операторных алгебр в классе таких пространств.

Степень изученности проблемы. Одним из основных направлений аксиоматического изучения квантовой теории является "выпуклый" подход, основным элементом которого является выпуклые множества состояний физических систем. В работах Е.Альфсена, Ф.Щульца, Х.Ханке-Олсена и Б.Иокума были найдены геометрические условия на выпуклые множества, обеспечивающие их аффинную изоморфность пространству состояний C^*-алгебры, алгебры фон Неймана или JB-алгебры. Базовая теория JB*-троек, основанная на троичной алгебраической структуре, было изложена в работах У.Каупа, Т.Данга, Я.Фридмана, Г.Хорна и Е.Нехера. Геометрические свойства выпуклых множеств, приведенные в работах Е.Альфсена и Ф.Щульца, показывают, что имеются неупорядоченные аналоги JB*-троек.

Основная теория гранево симметричных пространств была развита в работах Я.Фридмана и Б.Руссо. Они доказали, что предсопряженное пространство комплексных алгебр фон Неймана, JB*-алгебр, и более общих JB*-троек являются нейтральными гранево симметричными пространствами. Позже этими авторами было показано, что неприводимое, нейтральное, сильно гранево симметричное пространство линейно изометрично предсопряженному пространству одного из факторов Картана типа 1–6, при условии, что оно удовлетворяет четырем естественным и физическим аксиомам, которые выполняются в предсопряженных пространствах JB*-троек. М.Нейлом и Б.Руссо были найдены геометрические условия, при которых гранево симметричное пространство является изометричным предсопряженному пространству JB*-тройки. Было доказано, что всякое нейтральное сильно гранево симметричное пространство разлагается в прямую сумму атомических и не атомических сильно гранево симметричных пространств.

В работах Ш.А.Аюпова, Б.Иокума и Н.Ядгорова были изучены геометрические характеризации так называемых проективных выпуклых множеств: изучены решетки их граней и найдены простые геометрические условия того, что выпуклое множество будет аффинно изоморфно пространству нормальных состояний модулярной JBW-алгебры, в частности, конечной алгебры фон Неймана. Е.Альфсен, Ф.Щульц, и Х.Ханке-Олсен для характеризации пространств состояний йордановых операторных алгебр и C^*-алгебр изучили дуальные пары – пространство с порядковой единицей и пространство с базовой нормой. Связь между пространствами с базовой нормой и гранево симметричными пространствами была указана Н.Ядгоровым и М.Ибрагимовым. Условие, при котором слабо гранево симметричное пространство является сильно гранево симметричным пространством было получено Н.Ядгоровым. В работе Н.Ядгорова, К.Кудайбергенова и М.Ибрагимова было дано описание сильно гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны L_1-пространству.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения или научно-исследовательской организации, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках научных-исследовательских проектов ОТ-Ф4-82+ОТ-Ф4-87-«Локальные дифференцирования и автоморфизмы операторных и неассоциативных алгебр, фазовые переходы и хаос в линейных динамических системах» + «Теория глобальных инвариантов кривых поверхностей в Евклидовом и псевдо-Евклидовом пространствах и её приложения в механике» института математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан (2017-2019 гг.) и ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции» Каракалпакского Государственного университета им. Бердаха (2017-2020 гг.).

Целью исследования является геометрическая характеризация предсопряжённых пространств JBW-алгебр и исследование вещественных гранево симметричных пространств.

Задачи исследования:

Нахождение условий, при которых элемент сопряженного пространства сильно гранево симметричного пространства является геометрическим трипотентом;

Описание конечномерных вещественных гранево симметричных пространств;

Описание гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны предсопряженному пространству атомических абелевых алгебр фон Неймана;

Установление необходимого и достаточного условия, когда предсопряженные пространства JBW-алгебр являются сильно гранево симметричными пространствами.

Объект исследования. Слабо и сильно гранево симметричные пространства, JBW-алгебры, алгебры фон Неймана.

Предмет исследования. Теория гранево симметричных пространств, теория операторных алгебр.

Методы исследования. В диссертационной работе применены методы функционального анализа, теории гранево симметричных пространств, теории йордановых банаховых алгебр.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

Доказано, что элемент сопряженного пространства рефлексивного комплексного сильно гранево симметричного пространства будет геометрическим трипотентом тогда и только тогда когда ортогональное дополнение этого элемента совпадает с его M-ортогональным дополнением;

Доказано, что конечномерные вещественные нейтральные сильно гранево симметричные пространства, обладающие свойством совместного Пирсовского разложения, изометрически изоморфны l_1-сумме конечномерных гильбертовых пространств;

Доказано, что атомическое нейтральное сильно гранево симметричное пространства с полным геометрическим трипотентом и обладающий свойством выставленности точек изометрически изоморфно предсопряженному пространству атомической абелевой алгебры фон Неймана;

Доказано, что предсопряженное пространство JBW-алгебры является сильно гранево симметричным пространством в том и только том случае, когда эта алгебра есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2.

Практические результаты состоит в следующем:

Факт, что любая симметрическая грань вещественного конечномерного нейтрального сильно гранево симметричного пространства является симплексом было использовано при характеризации вещественного конечномерного нейтрального сильно гранево симметричного пространства;

Утверждение, что предсопряженное пространство спин-фактора является сильно гранево симметричным пространством был показан с помощью видов геометрических трипотентов.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных результатов обоснована применением методов функционального анализа, теории гранево симметричных пространств и операторных алгебр, а также строгостью математических рассуждений и доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость диссертации состоит в том, что полученные результаты, связанные с характеризацией гранево симметричных пространств и геометрической характеризацией JBW-алгебр могут быть использованы при изучении геометрических свойств операторных алгебр.

Практическая значимость исследования характеризуется использованием изометрической изоморфности конечномерых вещественных нейтральных сильно гранево симметричных пространств, обладающих свойством совместного Пирсовского разложения, к l_1-сумме конечномерных гильбертовых пространств при аксиоматическом изучении квантовой теории.

Внедрение результатов исследования. Результаты, полученные при описании вещественных гранево симметричных пространств и их приложении к геометрической характеризации JBW-алгебр были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Описание атомических сильно гранево симметричных пространств было использовано для описания изометрий атомических симметричных пространств в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-31 (справка Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистана от 3 декабря 2020 года за номером 89-03-5051). Использование научного результата позволило доказать почти равномерную сходимость эргодических потоков в некоммутативных L_1-пространствах;

Геометрическая характеризация JBW-алгебр была применена для установления факта, что если йорданова алгебра всех самосопряженных элементов *-алгебры является алгеброй Рикарта-Йордана, то оно будет иметь единичный элемент, в фундаментальном проекте за номером ОТ-Ф4-82 + ОТ-Ф4-87 (справка Академии Наук Республики Узбекистан от 4 января 2021 года за номером 2-1255-10). Применение результатов исследования дало возможность доказать, что четырехмерная формальная вещественная унитарная йорданова алгебра содержащая два связных минимальных идемпотента с суммой **1** изометрически изоморфна спин-фактору.

Связь между ортогональностью в сопряженном пространстве SFS-пространства и M-ортогональностью были использованы в зарубежном проекте за номером PGC2018-093332-B-I00 для решения важных задач, связанных с геометрическими свойствами конечных трипотентов (Справка Университета Гранады, Испания от 7 декабря 2020 г.). Использование результатов позволило проанализировать унитарные и полные трипотенты в JBW*-тройках.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 6 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертационного исследования опубликовано 28 научных работа, из них 14 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора наук, в том числе, из них 6 опубликованы в зарубежных журналах и 8 в республиканских научных изданиях

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 145 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения и примеры гранево симметричных пространств»,** приведены необходимые сведения из теории гранево симметричных пространств, которые необходимы для изложения основных результатов диссертации. Также приведены некоторые свойства предсопряженных пространств к алгебрам фон Неймана и JBW* - тройкам, которые являются примерами сильно гранево симметричных пространств. Доказано, что ℓ_1-сумма сильно гранево симметричных пространств является гранево симметричным пространством. Кроме того, ℓ_1-сумма сильно гранево симметричных пространств является нейтральным тогда и только тогда когда каждая из них нейтральна.

Пусть Z – нормированное пространство. Элементы f и g нормированного пространства Z называются *ортогональными* $\left(f \Diamond g\right)$, если

$$\|f+g\|=\|f-g\|=\|f\|+\|g\|.$$

Если элементы f и g ортогональны и $\|f\|=\|g\|=1$, то отрезки, соединяющие f с g и $-g$, и $-f$ с g и $-g$, лежат на границе единичного шара $Z_1=\left\{f\in Z:\|f\|\leq 1\right\}$ пространства Z.

Отметим, что нормальные функционалы f и g на алгебре фон Неймана являются ортогональными тогда и только тогда, когда существуют ортогональные частичные изометрии p и q в A такие, что $f\left(p\right)=\|p\|$ и $g\left(q\right)=\|q\|$.

Напомним, что выпуклое подмножество F множества Z_1 называется *гранью*, если для $g,h\in Z_1$, $\lambda\in\left(0,1\right)$ из $\lambda g+\left(1-\lambda\right)h\in F$ следует, что $g,h\in F$.

Грань F называется *выставленной по норме*, если $F=F_u=\left\{f\in Z_1:\left\langle f,u\right\rangle=1\right\}$, для некоторого $u\in Z^*$ с $\|u\|=1$.

Элемент $u \in Z^*$ называется *проективной единицей*, если $\|u\|=1$ и $\langle g, u\rangle = 0$ для всех $g \in F_u^\Diamond$. Это означает, что выставленная по норме грань F_u “параллельна” к $F_u^\Diamond$, т.е. $\langle u, F_u\rangle = 1$, $\langle u, F_u^\Diamond\rangle = 0$.

Следующее определение симметричной грани было впервые введено Я.Фридманом и Б.Руссо. Оно является основным понятием для введения слабо и сильно гранево симметричных пространств.

Определение 1. Выставленная по норме грань F_u из Z_1 называется *симметричной гранью*, если существует линейная изометрия S_u из Z на Z с $S_u^2 = I$, множество всех неподвижных точек которой в точности совпадает с прямой топологической суммой замыкания $\overline{sp}\, F_u$ линейной оболочки грани F_u и ее ортогонального дополнения $F_u^\Diamond$, т.е. совпадает с $\left(\overline{sp}\, F_u\right) \oplus F_u^\Diamond$.

Проективная единица $u \in Z^*$ называется *геометрическим трипотентом*, если F_u является симметричной гранью и $S_u^* u = u$ для симметрии S_u.

Через SF и GU обозначим множество симметричных граней Z_1 и множество всех геометрических трипотентов Z^* соответственно.

Определение 2. Вещественное или комплексное нормированное пространство Z называется *слабо гранево симметричным пространством* (*WFS-пространством*), если каждая выставленная по норме грань из Z_1 – симметрична.

На WFS-пространстве Z отображение $GU \ni u \to F_u \in SF$ является биекцией между множествами геометрических трипотентов и симметрических граней.

На WFS-пространстве Z, по каждой симметричной грани F_u определяются *обобщенные Пирсовские проекторы* $P_k(u)$, $k \in \{0,1,2\}$ следующим образом:

$$P_1(u) = \frac{1}{2}\left(I - S_u\right),\ P_1(u)(Z) = \{ f \in Z : S_u f = -f \},$$

$P_0(u)$ и $P_2(u)$ проектируют Z на $F_u^\Diamond$ и $\overline{sp}\, F_u$, соответственно. Из определения обобщенных Пирсовских проекторов $P_k(u)$, $k \in \{0,1,2\}$ вытекает, что

$$P_2(u) + P_1(u) + P_0(u) = I,$$
$$P_2(u) - P_1(u) + P_0(u) = S_u.$$

Обозначим $U = Z^*$, $Z_k(u) = P_k(u)(Z)$ и $U_k(u) = P_k(u)^*(U)$, $k \in \{0,1,2\}$.

Сжимающий проектор Q на нормированном пространстве Z называется *нейтральным*, если для любого $f \in Z$ из $\|Qf\| = \|f\|$ вытекает $Qf = f$.

Нормированное пространство Z называется *нейтральным*, если для каждой симметричной грани F_u соответствующий проектор $P_2(u)$ является нейтральным.

Пусть Z является WFS-пространством. Функционалы $x, y \in Z^*$ называются *ортогональными* $(x \Diamond y)$, если существует симметричная грань $F_u \subset Z_1$ такая, что $x \in U_2(u)$ и $y \in U_0(u)$.

Определение 3. Слабо гранево симметричное пространство называется *сильно гранево симметричным пространством (SFS-пространством)*, если для каждой выставленной по норме грани F_u из Z_1 и каждого $y \in Z^*$ с $\|y\| = 1$ из $F_u \subset F_y$ следует $S_u^* y = y$, где S_u – симметрия соответствующая F_u.

В нейтральном SFS-пространстве Z для $f \neq 0$, через v_f обозначается единственный геометрический трипотент v для которого $\langle f, v \rangle = \|f\|$ и $\left\langle v, \{f\}^{\Diamond} \right\rangle = 0$. Если $f, g \in Z$, то $f \Diamond g$ тогда и только тогда, когда $v_f \Diamond v_g$.

Пусть $\left(Z_i, \|x\|_{Z_i}\right)$ – нормированное пространство для всех $i \in I$. Через $Z = \bigoplus_{i \in I}^{l_1} Z_i$ обозначается l_1-сумма этих пространств, т.е. Z состоит из элементов вида $x = \{x_i\}_{i \in I}$ таких, что $\sum_{i \in I} \|x_i\|_{Z_i} < +\infty$, при этом норма на Z определяется как $\|x\| = \sum_{i \in I} \|x_i\|_{Z_i}$.

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть Z_i – SFS-пространство для всех $i \in I$. Тогда $Z = \bigoplus_{i \in I}^{l_1} Z_i$ также является SFS-пространством.*

Во второй главе диссертации, названной **«Свойства геометрических трипотентов сильно гранево симметричных пространств»**, исследованы геометрические свойства граней и геометрических трипотентов сильно гранево симметричных пространств.

В первом параграфе исследованы геометрические свойства граней единичных шаров нейтрального сильно гранево симметричного пространства. Показано, что всякая экстремальная точка единичного шара вещественного конечномерного нейтрального слабо гранево симметричного пространства является выставленной, и доказано, что всякая симметричная грань вещественного конечномерного нейтрального сильно гранево симметричного пространства является симплексом.

Определение 4. Говорят, что слабо гранево симметричное пространство обладает свойством (PE) (“*выставленности точек*”), если каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой.

В работе Я.Фридманом и Б.Руссо была поставлена следующая

Проблема 1. Пусть Z – слабо граневo симметричное пространство. Является ли каждая экстремальная точка выставленной по норме точкой?

Следующая теорема является основным результатом параграфа, которая дает положительное решение вышеуказанной проблемы в случае вещественного конечномерного слабо граневo симметричного пространства.

Теорема 2. *Если Z – конечномерное нейтральное вещественное слабо граневo симметричное пространство, то каждая экстремальная точка единичного шара является выставленной по норме точкой.*

В общем случае проблема остается открытым.

Во втором параграфе данной главы введено понятие конечного геометрического трипотента в SFS-пространстве, и установлены некоторые его свойства. Доказано, что всякое конечномерное вещественное нейтральное SFS-пространство является конечным.

Геометрический трипотент u называется

1) *минимальным*, если $\dim U_2(u)=1$;

2) *максимальным*, если $U_0(u)=\{0\}$;

3) *полным*, если $U_2(u)=U$.

Назовем геометрический трипотент $e\in GU$ *конечным*, если произвольный геометрический трипотент $u\in U_2(e)$ который максимален в $U_2(e)$ является полным в $U_2(e)$. Если произвольный геометрический трипотент в U конечен, мы скажем, что Z – *конечен***.**

Имеет место следующая

Теорема 3. *Всякое конечномерное нейтральное вещественное SFS-пространство Z является конечным.*

В третьем параграфе изучена связь между M-ортогональностью и ортогональностью в сопряженном пространстве SFS-пространства. Дана геометрическая характеризация геометрических трипотентов в рефлексивных SFS-пространствах. Показано, что множество всех экстремальных точек единичного шара сопряженного пространства рефлексивных SFS-пространств совпадает с множеством максимальных геометрических трипотентов.

Два элемента x и y нормированного пространства E называются *M-ортогональными* и обозначаются как $x\square y$, если

$$\|x\pm y\|=\max\{\|x\|,\|y\|\}.$$

M-ортогональное дополнение (M-дополнение) $H^{\square}$ подмножества H нормированного пространства E определяется как

$$H^{\square} = \{x \in E : x \square y,\ \forall y \in H\}.$$

Для каждого элемента $x \in E$ с единичной нормой *касательный диск* S_x определяется как

$$S_x = \{y \in E :\ \|x + \lambda y\| = 1,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \le 1\}.$$

Основным результатом параграфа является следующая теорема, которая дает необходимое и достаточное условие, когда элементы сопряжённого пространства SFS-пространства являются геометрическими трипотентами.

Теорема 4. *Пусть* Z *– рефлексивное комплексное сильно граневo симметричное пространство и* $u \in U$, $\|u\| = 1$. *Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) $u \in GU$;

(b) $u^{\square} \cap U_1 = u^{\Diamond} \cap U_1$;

(c) $u^{\square} \cap U_1 = iu^{\square} \cap U_1$;

(d) $S_u = u^{\Diamond} \cap U_1$.

Одним из важных понятий в теории гранево симметричных пространствах является понятие ранга пространства, введенное в работе Я.Фридмана и Б.Руссо. Ш.А.Аюповым была поставлена задача об описании гранево симметричных пространств данного ранга. Третья глава диссертации, названной **«Геометрическая характеризация гранево симметричных пространств»** посвящена решению этой задачи.

Определение 5. Гранево симметричное пространство Z называется *пространством ранга* k ($k \in \mathbb{N}$), если всякое семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов имеет мощность не более k, и существует по крайней мере одно семейство взаимно ортогональных геометрических трипотентов содержащее ровно k элементов (обозначение $rank\, Z = k$).

В первом параграфе дано описание вещественных n-мерных сильно гранево симметричных пространств ранга n и показано, что это пространство с L_1-нормой. Во втором параграфе приведены геометрические характеризации вещественных гильбертовых пространств в классе банаховых пространств.

В третьем параграфе получены описания n-мерных вещественных нейтральных сильно гранево симметричных пространств ранга $n-1$.

Теорема 5. *Пусть* Z *–* n*-мерное вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство ранга* $n-1$. *Тогда* Z *изометрически изоморфно пространству* $\mathbb{R}^n$ *с нормой*

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + |x_3| + \ldots + |x_n|.$$

Вещественные конечномерные нейтральные сильно гранево симметричные пространства со свойством JP исследованы в четвертом параграфе. Было показано, что всякое конечномерное нейтральное сильно гранево симметричное пространство со свойством JP изометрически изоморфно l_1-сумме конечномерных гильбертовых пространств.

Говорят, что SFS-пространство обладает *свойством JP* («совместное Пирсовское разложение»), если для любой пары u и v взаимно ортогональных геометрических трипотентов выполняется равенство $S_{u+v} = S_u S_v$.

Отметим, что пространство R^n с нормой

$$\| f \| = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\sum_{j=n_i}^{n_{i+1}} f_j^2},$$

где $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_{k+1} = n,$ является нейтральным SFS-пространством ранга k и обладает свойством JP.

Следующий результат является основным результатом параграфа, и дает описание конечномерных вещественных нейтральных SFS-пространств со свойством JP.

Теорема 6. *Пусть Z – конечномерное вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство со свойством JP. Тогда*

$$Z \cong \bigoplus_{i=1}^{k} {}^{l_1} H_i,$$

где H_i – гильбертово пространство, $i \in \overline{1,k}$ *и* $k = \mathrm{rank} Z$.

Таким образом, в отличии от случая когда $rankZ = 1,\ n-1,\ n$ (в каждом из этих случаев в точности до изометрического изоморфизма существует одно пространство), в случае $1 < rankZ < n-1$ количество не изоморфных пространств не меньше чем $\left[\frac{n}{k}\right]$, где $n = \dim Z,\ k = rankZ,\ [t]$ – целая часть числа t. При, этом количество не изоморфных пространств можно вычислить рекуррентным соотношением:

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \left(p\left(n - \frac{m(3m-1)}{2}\right) + p\left(n - \frac{m(3m+1)}{2}\right)\right).$$

В пятом параграфе изучены нейтральные сильно гранево симметричные пространства с полным геометрическим трипонтентом. Получено описание сильно гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны предсопряженному пространству атомической коммутативной алгебры фон Неймана.

Для $u, v \in GU$ будем писать $u \le v$, если $F_u \subset F_v$.

Пусть $e \in GU$. Обозначим

$$L_e = \{u \in GU : u \le e\} \cup \{0\}.$$

Известно, что относительно порядка "$\le$" множество L_e является полной ортомодулярной решеткой, с ортодополнением $u^{\perp} = e - u$.

Пусть $\mathrm{T} = \{v_i\}_{i \in J}$ – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из U. Положим

$$\ell_1(\mathrm{T}) = \left\{ \{\lambda_i\}_{i \in J} : \sum_{i \in J} |\lambda_i| < +\infty \right\}.$$

Тогда $\ell_1(\mathrm{T})$ – банахово пространство относительно нормы

$$\| \{\lambda_i\}_{i \in J} \| = \sum_{i \in J} |\lambda_i|.$$

Нормированное пространство Z называется *атомическим*, если каждая симметричная грань F_u из Z_1 содержит экстремальную точку.

Следующая теорема является основным результатом параграфа, и дает описание сильно гранево симметричных пространств изометрически изоморфных предсопряженному пространству атомичной коммутативной алгебры фон Неймана.

Теорема 7. *Пусть Z – атомическое нейтральное сильно гранево симметричное пространство с условием (PE) такое, что существует полный геометрический трипотент e. Если L_e – булева алгебра, то Z изометрически изоморфно пространству $\ell_1(\mathrm{T})$, где T – максимальное семейство взаимно ортогональных минимальных геометрических трипотентов из U.*

Вещественные нейтральные сильно гранево симметричные пространства с унитарным геометрическим трипотентом рассмотрены в шестом параграфе данной главы.

Геометрический трипотент $e \in GU$ называется *унитарным*, если выпуклая оболочка множества $F_e \cup F_{-e}$ совпадает с единичным шаром Z_1, т.е.

$$Z_1 = \mathrm{co}(F_e \cup F_{-e}). \tag{1}$$

Пространство R^n с нормой

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

где $x = (x_i) \in \mathrm{R}^n$, является SFS-пространством. Если $e \in \mathrm{R}^n \cong (\mathrm{R}^n)^*$ является максимальным геометрическим трипотентом, то $e = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, ..., n$; и в этом случае выставленная по норме грань

$$F_e = \left\{ x \in \mathrm{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i = 1,\ \varepsilon_i x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n} \right\}$$

удовлетворяет условию (1), т.е. e – унитарен.

В более общем случае рассмотрим измеримое пространство (Ω, Σ, μ) с мерой μ, обладающее свойством прямой суммы, т.е. существует семейство $\{\Omega\}_{i \in J} \subset \Sigma$, $0 < \mu(\Omega_i) < \infty$, $i \in J$, такое, что для любого $A \in \Sigma$ с $\mu(A) < \infty$, существует счетное подмножество $J_0 \subset J$ и множество B нулевой меры, такое что $A = \bigcup_{i \in J_0} (A \cap \Omega_i) \cup B$.

Пусть $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ – пространство всех вещественных интегрируемых функций на (Ω, Σ, μ). Пространство $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ с нормой $\|f\| = \int_{\Omega} |f(t)| \, d\mu(t)$, $f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, является SFS-пространством. Если $e \in L^{\infty}(\Omega, \Sigma, \mu) \cong L_1(\Omega, \Sigma, \mu)^*$ – максимальный геометрический трипотент, то $e = \tilde{\chi}_A - \tilde{\chi}_{\Omega / A}$ для некоторого $A \in \Sigma$, где $\tilde{\chi}_A$ – класс, содержащий характеристическую функцию множества $A \in \Sigma$. Тогда выставленная по норме грань

$$F_e = \left\{ f \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu) : \|f\| = 1,\ \int_{\Omega} e(t) f(t) d\mu(t) = 1 \right\}$$

удовлетворяет условию (1), т.е. e – унитарен.

В работе Н.Ядгорова, К.Кудайбергенова и М.Ибрагимова было установлено, что если Z вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство с унитарным геометрическим трипотентом такое, что всякий максимальный геометрический трипотент является унитарным, то Z изометрически изоморфно L_1-пространству.

Следующий результат показывает, что условие «всякий максимальный геометрический трипотент является унитарным» в вышеуказанной теореме излишен.

Лемма 1. *Пусть Z – вещественное нейтральное SFS-пространство с унитарным геометрическим трипотентом. Тогда каждый максимальный геометрический трипотент унитарен.*

Основным результатом параграфа является следующая

Теорема 8. *Пусть Z вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство с унитарным геометрическим трипотентом. Тогда существует измеримое пространство* (Ω,Σ,μ) *с мерой* μ, *обладающее свойством прямой суммы такое, что пространство Z изометрически изоморфно пространству* $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$.

В четвертой главе диссертации, названной **«Геометрическая характеризация вещественных операторных алгебр»**, исследованы геометрические свойства предсопряженных пространств JBW-алгебр.

Напомним, что *йорданова алгебра* – это вещественная или комплексная алгебра A с умножением $a\circ b$ $\left(a,b\in A\right)$, в общем случае неассоциативная, удовлетворяющая следующим двум аксиомам:

1) $a\circ b=b\circ a$ для любых $a,b\in A$;

2) $a^2\circ(b\circ a)=(a^2\circ b)\circ a$ для любых $a,b\in A$.

Вещественная йорданова алгебра с единицей называется *JB-алгеброй*, если на ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и удовлетворяет условиям:

1) $\left\|a^2\right\|=\left\|a\right\|^2$ для любых $a\in A$;

2) $\left\|a^2\right\|\le\left\|a^2+b^2\right\|$ для любых $a,b\in A$;

3) $\left\|a\circ b\right\|\le\left\|a\right\|\left\|b\right\|$ для любых $a,b\in A$.

JB-алгебра A называется *JBW-алгеброй*, если она обладает предсопряженным пространством, т.е., существует такое нормированное пространство A_*, что $(A_*)^*=A$.

Комплексная йорданова алгебра с инволюцией называется *JB*-алгеброй*, если на ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и удовлетворяет условиям:

1) $\left\|a^*\right\|=\left\|a\right\|$ для любых $a\in A$;

2) $\left\|a\circ b\right\|\le\left\|a\right\|\left\|b\right\|$ для любых $a,b\in A$;

3) $\left\|\left\{aa^*a\right\}\right\|=\left\|a\right\|^3$ для любых $a,b\in A$,

где $\left\{abc\right\}=\left(a\circ b\right)\circ c+\left(c\circ b\right)\circ a-\left(a\circ c\right)\circ b,\quad a,b,c\in A$.

JB*-алгебра A называется *JBW*-алгеброй*, если она обладает предсопряженным пространством.

В первом параграфе изучены предсопряженные пространства вещественной части алгебр фон Неймана. Доказано, что предсопряженное вещественной (т.е. эрмитовой) части алгебры фон Неймана является сильно гранево симметричным пространством в том и только том случае, когда эта алгебра есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2.

Теорема 9. *Пусть* M *– алгебра фон Неймана,* $A=M_{sa}$ *– эрмитова часть* M *и* A_* *– предсопряженное пространство к* A*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A_* *является SFS-пространством;*

2) $M=M_1\oplus M_2$*, где* M_i *– алгебра типа* I_i*,* $i=1,2.$

Во втором параграфе рассмотрены предсопряженные пространства вещественных спин-факторов. Показано, что предсопряженное пространство спин-фактора является сильно гранево симметричным пространством.

Пусть A – JBW-алгебра. Элементы $x,y\in A$ совместны ($x\leftrightarrow y$), если $x\circ(z\circ y)=(x\circ z)\circ y$ для всех $z\in A$. Множество $Z(A)=\{x\in A\colon x\leftrightarrow y,\ \forall y\in A\}$ называется *центром* A. Если $Z(A)=\{\lambda\mathbf{1},\ \lambda\in\mathrm{R}\}$, то A называется *JBW-фактором*. Для любого элемента $a\in A$ существует наименьший центральный проектор $e\in A$ такой, что $ea=a$; он называется *центральным носителем* a и обозначается $c(a)$. Если $c(a)=\mathbf{1}$, то элемент a называется *точным*. Проекторы e и f из JBW-алгебры A называются *связанными через симметрию*, если существует такая симметрия $s\in A$, что $\{ses\}=f$. Проектор $p\in A$ называется *абелевым*, если $\{pAp\}$ – абелев.

Пусть L – решетка всех проекторов JBW-алгебры A. L называется *модулярной решеткой*, если $(e\vee f)\wedge g=e\vee(f\wedge g)$ для всех $e,f,g\in L$ таких, что $e\le g$. Проектор $e\in A$ называется *модулярным*, если $[0,e]=\{f\in L\colon f\le e\}$ является модулярной решеткой. JBW-алгебра A называется *модулярной*, если решетка L всех её проекторов модулярна, т.е. $\mathbf{1}$ является модулярным проектором.

Напомним, что JBW-алгебра A имеет

1) тип I, если в ней существует точный абелев проектор;

2) тип II, если она содержит точный модулярный проектор и не содержит ненулевых абелевых проекторов;

3) тип III, если она не содержит ненулевых модулярных проекторов.

Пусть H – вещественное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle x,y\rangle$, где $x,y\in H$. Рассмотрим декартово произведение

$$A=\mathrm{R}\times H=\{(\alpha,x):\alpha\in\mathrm{R},x\in H\}$$

и определим в A произведение

$$(\alpha,x)\circ(\beta,y)=(\alpha\beta+\langle x,y\rangle,\alpha y+\beta x),$$

где $\alpha,\beta\in\mathrm{R},\ x,y\in H$. Норму в A определим по формуле

$$\|(\alpha,x)\|=|\alpha|+\|x\|_2 \ \ (\alpha\in\mathbb{R}, x\in H).$$

С этим произведением и нормой множество A является JBW-фактором с единицей $\mathbf{1}=(1,0)$ который называется *спин-фактором*. Е.Штёрмер доказал, что JBW-фактор имеет тип I_2 тогда и только тогда, когда он является спин-фактором.

Заметим, что $(\mathbb{R}\times H,\|\cdot\|)^*=(\mathbb{R}\times H,\|\cdot\|_\infty)$ где $\|(\beta,y)\|_\infty=\max\{|\beta|,\|y\|_2\}$. Двойственность между A и его сопряженным A^* задается формулой

$$\langle(\alpha,x),(\beta,y)\rangle=\alpha\beta+\langle x,y\rangle.$$

Имеет место следующая

Теорема 10. *Пусть* A *– спин-фактор. Тогда* A_* *является SFS-пространством.*

Ключевым результатом при доказательстве этой теоремы является следующая

Лемма 2. *Пусть* A *– спин-фактор. Тогда каждый геометрический трипотент* $u\in A$ *имеет один из следующих видов:*

а) $u=(\pm1,0)$;

б) $u=(0,a)$*, где* $\|a\|_2=1$;

в) $u=\left(\pm\frac{1}{2},a\right)$*, где* $\|a\|_2=\frac{1}{2}$.

В третьем параграфе исследованы предсопряженные пространства JBW-алгебр. Доказано, что предсопряженное пространство JBW-алгебры является сильно гранево симметричным пространством в том и только том случае, когда эта алгебра есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2.

Отметим, что в теории йордановых алгебр A важную роль играет оператор U_a, определенный для любого элемента $a\in A$ как $U_a x=2a\circ(a\circ x)-a^2\circ x$. Оператор U_a является положительным (т.е. $U_a(A^+)\subset A^+$) и нормальным (т.е. если $x_\alpha\uparrow x$, то $U_a x_\alpha\uparrow U_a x$) для любого $a\in A$. Если p – проектор, то $U_p x=2p\circ(p\circ x)-p\circ x$, $\|U_p\|\le 1$, $U_p^2=U_p$ и $U_p=U_pU_{\mathbf{1}-p}=0$. Соответствие $p\leftrightarrow U_p$ – биективно.

В работе С.Эдвардса и Г.Руттимана был получен следующий результат:

Пусть B – JBW*-алгебра, $A=B_{sa}$ – JBW-алгебра всех самосопряженных элементов из B, A_* – предсопряженное пространство A и A_{*1} – единичный шар A_*. Тогда всякая замкнутая по норме грань F из A_{*1} является выставленной, и имеет следующий вид

$$F=F_u=\mathrm{co}(\{F_p\}\cup-\{F_q\}),\qquad (2)$$

где $u = p - q,\ \ p$ и q взаимно ортогональные проекторы из A.

Пусть A – JBW-алгебра, A_* – предсопряженное пространства A и A_{*1} – единичный шар A_*. Тогда в силу (2) для каждой выставленной по норме грани F_u из A_{*1} проекторы $P_k(u),\ k = 0,2$ на A_* определяются следующим образом:

$$P_2(u) f = U_p^* f + U_q^* f,$$

$$P_0(u) f = U_{\mathbf{1}-p-q}^* f,$$

где $u = p - q,\ \ p$ и q – взаимно ортогональные проекторы из $A,\ \ f \in A_*$.

В следующих леммах определены образы проекторов $P_k(u),\ k = 0,2$.

Лемма 3. *Для каждой выставленной по норме грани F_u из A_{*1} имеет место*

$$sp_{\mathrm{R}} F_u = P_2(u)(A_*) = \{ f \in A_* : P_2(u) f = f \},$$

где $u = p - q,\ \ p$ и q взаимно ортогональные проекторы из A.

Лемма 4. *Для каждой выставленной по норме грани F_u из A_{*1} имеет место*

$$F_u^{\Diamond} = P_0(u)(A_*) = \{ f \in A_* : P_0(u) f = f \},$$

где $u = p - q,\ \ p$ и q взаимно ортогональные проекторы из A.

В следующей лемме с помощью этих проекторов определена симметрия для каждой выставленной по норме грани из единичного шара.

Лемма 5. *Для каждой выставленной по норме грани F_u из A_{*1} оператор*

$$S_u = 2P_2(u) + 2P_0(u) - I,$$

является симметрией с множеством неподвижных точек $spF_u \oplus F_u^{\Diamond}$.

Основным результатом параграфа является следующая

Теорема 11. *Пусть A – JBW-алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) A_* является SFS-пространством;

2) $A = A_1 \oplus A_2$, где A_1 – абелева, A_2 – алгебра типа I_2.

В частности, если *A – JBW-алгебра типа $I_n (n \geq 3)$ или II или III, то A_* не является WFS-пространством.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена геометрическому описанию вещественных гранево симметричных пространств и их приложению к геометрической характеризации вещественных операторных алгебр в классе таких пространств.

1. Введено понятие конечного геометрического трипотента в SFS-пространствах, и установлены некоторые его свойства. Доказано, что всякое конечномерное вещественное нейтральное SFS-пространство является конечным.

2. Исследованы геометрические свойства граней единичных шаров нейтрального сильно гранево симметричного пространства. Показано, что всякая экстремальная точка единичного шара вещественного конечномерного нейтрального слабо гранево симметричного пространства является выставленной, и доказано, что всякая симметричная грань вещественного конечномерного нейтрального сильно гранево симметричного пространства является симплексом.

3. Изучена связь между M-ортогональностью и ортогональностью в сопряженном пространстве SFS-пространства и дана геометрическая характеризация геометрических трипотентов в рефлексивных SFS-пространствах. Показано, что множество всех экстремальных точек единичного шара сопряженного пространства рефлексивных SFS-пространств совпадает с множеством максимальных геометрических трипотентов.

4. Дана геометрическая характеризация вещественных гильбертовых пространств в классе банаховых пространств и получено описание конечномерных вещественных нейтральных сильно гранево симметричных пространств заданного ранга.

5. Показано, что всякое конечномерное нейтральное сильно гранево симметричное пространство со свойством JP изометрически изоморфно l_1-сумме конечномерных гильбертовых пространств.

6. Получены описания сильно гранево симметричных пространств, которые изометрически изоморфны предсопряженному пространству атомической коммутативной алгебры фон Неймана.

7. Показано, что вещественное нейтральное сильно гранево симметричное пространство с унитарным трипотентом изометрически изоморфно пространству $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

8. Доказано, что предсопряженное пространство JBW-алгебры является сильно гранево симметричным пространством в том и только том случае, когда эта алгебра есть прямая сумма абелевой алгебры и алгебры типа I_2.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

SEYPULLAEV JUMABEK KHAMIDULLAEVICH

DESCRIPTION OF REAL FACIALLY SYMMETRIC SPACES AND THEIR APPLICATIONS TO A GEOMETRIC CHARACTERIZATION OF JBW-ALGEBRAS

01.01.01- Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF SCIENCE (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

The theme of dissertation of doctor (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2020.4.DSc/FM85.

Dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academician
Official opponents:	**Zaitov Adilbek Ataxanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Zakirov Botir Sabitovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Arzikulov Farxodjon Nematjonovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**National university of Uzbekistan**

Defense will take place on «____» ____________ 2021 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (registered for No.____). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2021 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2021 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

U.U.Jamilov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S.

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of research work is the geometric characterization of predual spaces of JBW-algebras and investigation of real facially symmetric spaces and.

The research object: Weakly and strongly facially symmetric spaces, JBW-algebras, von Neumann algebras.

Scientific novelty of the research work: is as follows:

It is proved that an element of a dual space of a reflexive complex strongly facially symmetric space will be a geometric tripotent if and only if the orthogonal complement of this element coincides with its M-orthogonal complement;

It is proved that finite dimensional real neutral strongly facially symmetric spaces, which have the property of joint Peirce decomposition, are isometrically isomorphic to the l_1-sum of finite dimensional Hilbert spaces;

It is proved that an atomic neutral strongly facially symmetric space with a complete geometric tripotent and having the property of point exposure is isometrically isomorphic to the predual space of an atomic Abelian von Neumann algebra;

It is proved that the predual space of an JBW-algebra is a strongly facially symmetric space if and only if this algebra is a direct sum of an Abelian algebra and an algebra of type I_2.

Implementation of the research results. In according to obtained results in the description of real facially symmetric spaces and their application to the geometric characterization of JBW-algebras were used in the following research projects:

The description of atomic strongly facially symmetric spaces was used in the fundamental project OT-F4-31 to describe isometries of atomic symmetric spaces (Certificate of the Ministry of Higher and Secondary Special Education of the Republic of Uzbekistan, December 3, 2020, No. 89-03-5051). The application of the scientific results made it possible to prove the almost uniform convergence of ergodic flows in non-commutative L_1-spaces;

The geometric characterization of JBW-algebras was applied in the fundamental project No.OT-F4-82 + OT-F4-87 to establish the fact that if the Jordan algebra of all self-adjoint elements of a *-algebra is a Ricart-Jordan algebra, then it will have a unit element (Certificate of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, January 4, 2021, No.2-1255-10). The application of the results of the research made it possible to prove that a four-dimensional formal real unitary Jordan algebra containing two connected minimal idempotents with sum **1** is isometrically isomorphic to the spin factor.

The relationship between orthogonality in the dual space of SFS-space and M-orthogonality was used in a foreign project No.PGC2018-093332-B-I00 to solve important problems related to the geometric properties of finite tripotents (Certificate of the University of Granada, Spain. December 7, 2020). The application of the scientific results made it possible to analyze unitary and complete tripotents in JBW*-triples.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 145 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Тлеумуратов С. Ж., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрическое описание предсопряженного пространства к атомической коммутативной алгебре фон Неймана // Математические заметки. – 2013. – Том 93. – Выпуск 5. – С. 737–744. (3. Scopus IF=0.626).
2. Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. Гранево симметричные пространства и предсопряженные эрмитовой части алгебр фон Неймана // Известия вузов. Математика. – 2018. – № 5. – С. 33–40. (3. Scopus IF=0.393)
3. Ибрагимов М. М., Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрическая характеризация JBW-факторы // Владикавказский математический журнал. – 2018. – Том 20. – Выпуск 1. – С. 61–68. (3. Scopus IF=0.443).
4. Seypulaev J. X. Characterizations of geometric tripotents in reflexive complex SFS-spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. –V. 40. – № 12. – P. 2111–2115. (3. Scopus IF=0.42).
5. Кудайбергенов К. К., Сейпуллаев Ж. Х. Характеризация JBW-алгебр с сильно гранево симметричным предсопряженным пространством // Математические заметки. – 2020. – Том 107. – Выпуск 4. – С. 539–549. (3. Scopus IF=0.626).
6. Kudaybergenov K. K., Seypullaev J. X. Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // Siberian Advances in Mathematics. – 2020, – V. 30, – № 2, P. 77–83. (3. Scopus IF=0.23).
7. Ибрагимов М. М., Сейпуллаев Ж. Х. Геометрические свойства единичного шара SFS-пространства конечного ранга // Узбекский математический журнал. – 2005. – № 2. – С. 10–19. (01.00.00; №6).
8. Сейпуллаев Ж. Х. Геометрическая характеризация гильбертовых пространств // Узбекский математический журнал. – 2008. – № 2. – С. 107–112. (01.00.00; №6).
9. Ядгоров Н. Ж., Ибрагимов М. М., Сейпуллаев Ж. Х. О экстремальных точках единичного шара конечномерных гранево симметричных пространств // Узбекский математический журнал. – 2012. – № 4. – С. 167–171. (01.00.00; №6).
10. Ибрагимов М. М., Сейпуллаев Ж. Х. Описание n-мерных вещественных сильно гранево симметричных пространств ранга n-1 // Узбекский математический журнал. – 2015. – № 4. – С. 39–46. (01.00.00; №6).
11. Сейпуллаев Ж. Х. Описание конечномерных вещественных сильно гранево симметричных пространств // Узбекский математический журнал. – 2016. – № 4. – С. 113–118. (01.00.00; №6).

12. Seypullaev J. X., Pirekeev J. X. Orthogonality in an abstract spin-factor // Uzbek Mathematical Journal. – 2018. – № 1. – P. 155–160. (01.00.00; №6).
13. Ibragimov M. M., Seypullaev J. X. The direct sum of the facially symmetric spaces // Uzbek Mathematical Journal. – 2018. – № 3. – P. 73–79. (01.00.00; №6).
14. Seypullaev J. X. Finite strongly facially symmetric spaces // Uzbek Mathematical Journal. – 2020. – № 4. – P. 118–126. (01.00.00; №6).

II бўлим (II часть; part II)

15. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Описание n-мерных вещественных сильно гранево симметричных пространств ранга n-1 // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», – Нукус, 25-27 октября 2009 года. – С. 93-94.
16. Ядгоров Н.Ж., Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. О экстремальных точках единичного шара конечномерных гранево симметричных пространств // Материалы Республиканской научной конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа», – Нукус, 11-12 мая 2012 года. – С. 242–244.
17. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Описание конечномерных вещественных SFS-пространств // Тезисы докладов конференции с участием зарубежных ученных «Алгебра, анализ и квантовая вероятность», – Ташкент, 10-12 сентября 2015 года. – С. 75–76.
18. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Описание единичных шаров гранево симметричных пространств // Материалы Республиканской научной конференции «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа», – Бухара, 26-27 ноября 2015 года. – С. 92–93.
19. Ibragimov M.M., Seypulaev J.X. Strongly facially symmetric spaces with pure state property // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные вопросы анализа», – Карши, 22–23 апреля 2016 года. – С. 295-296.
20. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Геометрическая характеризация вещественных конечномерных спин-факторов // Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий Аль-Хорезмий 2016» – Бухара, 9-10 ноября 2016 года. – С. 75-76.
21. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Гранево симметричные пространства и предсопряженное эрмитовой части алгебр фон Неймана // International Conference on «Nonlinear analysis and its applications», Samarkand, september 19-21, 2016. – P. 25.
22. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Гранево симметричные пространства и предсопряженное JBW-алгебра // Тезисы докладов

конференции с участием зарубежных ученных «Проблемы современной топологии и её приложения», – Ташкент, 11-12 мая 2017 года. – С. 197–198.
23. Ibragimov M.M., Seypulaev J.X. Geometric characterization of JBW-algebras // Abstracts of the Second USA-Uzbekistan conference on «Analysis and Mathematical Physics», Urgench, august 8–12, 2017. – P. 21-22.
24. Сейпуллаев Ж.Х., Пирекеев Ж.Х. Ортогональность в абстрактном спин-факторе // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Новые результаты математики и их приложения», – Самарканд, 14-15 мая 2018 года. – С. 162–163.
25. Ibragimov M.M., Seypulaev J.X. Description of facially symmetric spaces with unitary tripotents // Abstracts of the International scientific conference «Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khorezmiy 2018», Tashkent, September 13–15, 2018. – P. 133–134.
26. Ибрагимов М.М., Сейпуллаев Ж.Х. Прямая сумма гранево симметричных пространств // Международная конференция «Математический анализ и его приложение к современной математической физике», – Самарканд, 17–20 сентября 2018 года. – С. 121–122.
27. Ibragimov M.M., Seypulaev J.X. Notion of finiteness in SFS-spaces // Материалы научной онлайн-конференции «Современные проблемы математики», – Нукус, 20 мая 2020 года. – С. 32–34.
28. Сейпуллаев Ж.Х. Характеризация геометрических трипотентов в комплексных SFS-пространствах // Материалы международной научно-практической онлайн-конференции «Теории функций одного и многих комплексных переменных», – Нукус, 26–28 ноября 2020 года. – С. 80–81.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2021 йил 6 январда таҳрирдан ўтказилди.

Босишга рухсат етилди 18.01.2021. Ҳажми 3.31 босма табоқ.
Бичими 60×84 1/16. Адади 50 нусха.