В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ИМОМКУЛОВ АНВАР НОРБОБОЕВИЧ

ЧЕКЛИ ЎЛЧОВЛИ АЛГЕБРАЛАРНИ ЭВОЛЮЦИОН АЛГЕБРАЛАР БИЛАН АППРОКСИМАЦИЯЛАШ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

УДК: 512.554

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of thesis abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

ИМОМКУЛОВ АНВАР НОРБОБОЕВИЧ

ЧЕКЛИ ЎЛЧОВЛИ АЛГЕБРАЛАРНИ ЭВОЛЮЦИОН АЛГЕБРАЛАР БИЛАН АППРОКСИМАЦИЯЛАШ

01.01.06 – Алгебра

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.1.PhD/FM315 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Худойбердиев Аброр Хакимович** физика-математика фанлари доктори
	Каримжанов Икболжон Абдулазизович физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD)
Етакчи ташкилот:	**Қорақалпоқ давлат университети**

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «___»_________соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил «___» __________ куни тарқатилди.
(2021 йил «___» ______________даги -рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н

Б.А.Омиров
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар кўпгина ҳолларда ноассоциатив алгебралари ва алгебраик системалар назариясидан фойдаланиб баъзи алгебраларни тадқиқ қилишга келтирилади. Алгебраик воситалар квант механикасидаги элементар зарраларни, қаттиқ моддалар ва кристалларнинг хусусиятларини ўрганишда, популяция генетикаси муаммоларида, иқтисодиётнинг моделлашган муаммоларини таҳлил қилишда ва бошқа масалаларда кенг қўлланилади. Замонавий алгебра чекли группалар ва чекли ўлчовли ассоциатив алгебралар назариясига асосланади. Кейинчалик, алгебраик системаларнинг ривожланиши ҳамда уларнинг математика ва физиканинг бошқа соҳалари билан алоқалари янги алгебраларнинг, жумладан альтернатив, Йордан, Ли, Лейбниц, генетик ва эволюцион алгебраларининг пайдо бўлишига олиб келди. Эволюцион алгебралар генетика популяциясини ўрганишда муҳим аҳамиятга эга. Шунинг учун алгебраларнинг баъзи хоссаларини эволюцион алгебралар билан яқинлаштириш орқали ўрганиш долзарб ва муҳим вазифалардан бири ҳисобланади.

Ҳозирги вақтда жаҳон миқёсида замонавий алгебранинг муҳим йўналишларидан бири эволюцион алгебралар назариясини тадқиқ қилишдир. Эволюцион алгебралар математиканинг бошқа соҳалари, жумладан графлар назарияси (хусусан, тасодифий графлар ва тармоқлар), группалар назарияси, Марков жараёнлари, динамик системалар билан боғлиқ. Эслатиб ўтамизки, эволюцион алгебралар синфи биринчи марта Любич томонидан 1992 йилда (evolutionary algebras номи билан) таклиф қилинган. 2008 йилда Тиан ўзининг монографиясида эволюцион алгебра атамасини ишлатиб, бу алгебраларнинг татбиқлари ва баъзи хоссаларини келтириб ўтган. Шундан сўнг эволюцион алгебраларга қизиқиш кескин ортиб кетди. Шуни таъкидлаш керакки, Тиан тадқиқотларининг асосий йўналиши эволюцион алгебраларнинг татбиқий муаммоларига бағишланган эди. Шу билан бирга чекли ўлчовли алгебраларнинг бирор кўпхиллигини ўрганишга табиий ёндашиш, масалан, структуравий назарияни қуриш у томонидан қаралмаган эди. Структуравий назарияни ўрганишга бағишланган дастлабки натижалар Ш.А.Аюпов, Б.А.Омиров, У.А.Розиков, Ж.М.Ладраларнинг ишларида пайдо бўлди. Хусусан, 2 ўлчовли комплекс эволюцион алгебраларининг таснифи олинган, нильпотент эволюцион алгебраларининг классик хоссалари тавсифланган.

Мамлакатимизда сўнгги йилларда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий татбиқига эга бўлган математика, физика, геология ва биология фанларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, популяцион биология ва генетикада учрайдиган асосий объектлардан бири бўлган эволюцион алгебралар назариясини ривожлантиришга алоҳида эътибор қаратилди. Эволюцион алгебралар ва уларнинг занжирларини ўрганиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Қарор ижросини таъминлашда эволюцион алгебралар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 17 февралдаги «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2789-сонли Қарори, 2017 йил 20 апрелдаги «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2909-сон Қарори, 2019 йил 9 июлдаги «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4387-сонли Қарори ва 2020 йил 7 майдаги «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-4708-сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Сўнгги йилларда классик конструкцияларнинг ноассоциатив муқобиллари математика ва физиканинг кўплаб соҳаларида қўлланилиши билан боғлиқлиги қизиқиш уйғотмоқда. Математик методлар популяция генетикасида узоқ вақтдан бери муваффақиятли қўлланиб келинмоқда. Популяция генетикаси масалаларига математик ёндошув доирасида олиб борилган тадқиқотлар Мендел қонунларига асосланади. Мендел алгебраик нуқтаи назардан ўзининг генетик қонунларини ифодалашни таклиф қиладиган символларни ишлатган. Шундай қилиб, математиклар ва генетиклар бир пайтлар Мендел генетикасини ўрганиш учун ноассоциатив алгебралардан фойдаланганлар ва кейинчалик баъзи бошқа муаллифлар уни “Мендел алгебралар” деб аташган.

Чекли ўлчовли алгебраларни эволюцион алгебралари билан яқинлаштириш тушунчалари ҳали киритилмаган эди. Аммо бу турдаги эволюцион алгебра биринчи марта М.В.Веласко ва У.А.Розиковларнинг “чивинлар популяцияси алгебраси” учун ёзган ишларида киритилган.

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамаси 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сонли қарори.

Ушбу тушунчага тегишли асосий муаммо берилган алгебралар ва уларга мос келадиган эволюцион алгебраларнинг ўхшаш хоссаларини топишдир.

2019 йилнинг октябр ойида Испаниянинг Гранада Университетига амалиёт ўташ пайтимда профессор У.А.Розиков ва профессор В.М.Веласколар (Гранада университети, Испания) муҳокамаси натижасида уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирларини тадқиқ қилиш ғояси илгари сурилди.

М.Касас, М.Ладра ва У.Розиковлар томонидан эволюция алгебралари занжири тушунчаси киритилган ва бундай занжирларнинг кенг синфи қурилган. Бундай занжирларнинг бир нечта хусусиятларини ушбу муаллифлар ва Ш.Н. Муродов, Б.А. Омиров, К.М. Туленбаев ўрганишган.

Икки ўлчовли эволюцион алгебралари занжирларига оид биринчи натижалар Ш.Н.Муродовнинг PhD диссертациясида олинган. Яъни, ушбу диссертацияда муаллиф “жўжа популяцияси”нинг эволюцион алгебралари занжирларини қурган ва “жўжа популяцияси”нинг эволюцион алгебралари занжирларининг вақт динамикасини ўрганган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти В.И.Романовский номидаги Математика институтининг ОТ-F4-82 + ОТ-F4-87 «Операторли ва ноассоциатив алгебралар локал дифференциаллашлари ва автоморфизмлари, чизиқли бўлмаган динамик системаларда фазали ўтиш ва тартибсизлик» + «Евклид ва псевдо-Евклид фазоларидаги эгри чизиқлар ва уларнинг механикада қўлланилиши» (2017-2019 йиллар) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади баъзи чекли ўлчовли алгебраларни эволюцион алгебралар билан аппроксимациясини ва уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирларини тадқиқ этишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

икки ва уч ўлчовли эволюцион алгебралар аппроксимациясини тадқиқ қилиш;

ихтиёрий алгебранинг эволюцион алгебралар билан аппроксимациясининг абсолют нильпотент элементларини тадқиқ қилиш;

нильпотент Лейбниц алгебрасининг эволюцион алгебра билан аппроксимациясини тадқиқ қилиш;

уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирларини тавсифлаш;

эволюцион алгебралар занжирларида бариклик хоссалари, абсолют нильпотент ва идемпотент элементлар тўпламларининг вақтга боғлиқ динамикасини таснифлаш.

Тадқиқотнинг объекти чекли ўлчовли эволюцион ва Лейбниц алгебралардан ҳамда уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети икки ва уч ўлчовли ҳақиқий эволюцион алгебралар, икки ва уч ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебралари, эволюцион алгебраларнинг абсолют ва идемпотент элементлар тўпламидир.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда ассоциатив бўлмаган алгебралар назарияси, ночизиқли динамик системалар назарияси, структуравий таснифлашлар ва инвариантлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ҳақиқий сонлар майдони устида берилган уч ўлчовли эволюцион алгебралари таснифланиб, ва уларнинг идемпотентларига мос келадиган аппроксимацион эволюцион алгебралар ўртасидаги изоморфизмлари қурилган;

нильпотент бўлган эволюцион алгебранинг аппроксимацияси ҳам нильпотент эканлиги исботланган;

икки ва уч ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебраларининг аппроксимацияси нильпотент эволюцион алгебра эканлиги исботланган;

уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирлари ва уларнинг абсолют нильпотент ҳамда идемпотент элементлари тўпламларининг вақтга боғлиқ динамикаси берилган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари. Диссертация назарий характерга эга бўлиб, олинган натижалар ва усулларни олий ўқув юртлари магистрантлари ва докторантлари учун махсус курсларни ўқишда қўллаш мумкин. Бундан ташқари, уч ўлчовли эволюцион алгебраларнинг ҳақиқий майдонда олинган таснифи ва қурилган уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжири ушбу алгебралар ўртасидаги изоморфизмларни текширишга ва биологик ҳамда физик жараёнлар эволюциясини бу алгебралар тилида ўрганишга имкон беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги алгебра, ночизиқли анализ, чизиқли ва эволюцион алгебралар усуллари ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган. Олинган натижаларнинг исботлари математик жиҳатдан тўғри.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, ишда олинган илмий натижалар алгебраларнинг бошқа занжирларини кейинги тадқиқотлари учун ишлатилиши мумкин. Хусусан, ушбу диссертацияда ривожлантирилган техника ва усуллардан барча эволюцион алгебраларининг занжирларини топишда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқотнинг амалий аҳамияти шундаки, олинган натижалардан эволюцион алгебраларининг занжирлари ёрдамида ифодаланадиган биологик ва физик жараёнлар эволюциясини таснифлашда фойдаланиш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Олинган натижалар қуйидаги илмий лойиҳаларида фойдаланилган:

уч ўлчовли эволюцион алгебраларнинг ҳақиқий сонлар майдонида олинган таснифидан MTM2016-76327-C3-2-P (AEI\FEDER, UE) рақамли хорижий лойиҳасида икки ва уч ўлчовли комплекс эволюцион алгебралар таснифини олишда фойдаланилган (Гранада университети, математика факультетининг 2020 йил 30-ноябрдаги маълумотномаси, Испания). Илмий натижанинг қўлланилиши комплекс эволюцион алгебраларнинг сони изоморфизм аниқлигида чеклита эканлигини кўрсатиш имконини берган;

икки ва уч ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебраларининг аппроксимацияси нильпотент эволюцион алгебра эканлигидан ЁФА-Фтех-2018-77 рақамли лойиҳада ярим содда ва нильпотент алгебраларининг когомологик группаларини ўлчамларини аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси фанлар академиясининг 2021 йил 12 январдаги 2/1255-84 сон маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши содда Лейбниц алгебраси учун иккинчи когомологик группасининг тривиаллигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 6 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 8 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 6 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 108 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **“Икки ва уч ўлчовли эволюцион алгебраларни эволюцион алгебралар билан аппроксимациялаш”** деб номланувчи биринчи бобида икки ва уч ўлчовли ҳақиқий эволюцион алгебралар аппроксимациясига доир баъзи хоссалар келтирилган. Икки ўлчовли эволюцион алгебраларни изоморфизм аниқлигидаги таснифи келтириб ўтилган ва уч ўлчовли эволюцион алгебраларни ҳақиқий сонлар майдонида $dimA^2=1$ бўлган ҳолда таснифланган. Шунингдек, уларнинг аппроксимацияси ва улар орасидаги изоморфизмлари ўрганилган.

$(A,\cdot)$ бирор K майдон устидаги алгебра бўлсин. Агар

$$e_i\cdot e_j=0,\ агар\ i\neq j$$
$$e_i\cdot e_i=\sum_k a_{ik}e_k,\ барча\ i\ ларда$$

шартни қаноатлантирувчи $e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots$базис мажуд бўлса у ҳолда бу алгебрага *эволюцион алгебра* дейилади. Бу базисга эса табиий базис дейилади.

Таъкидлаб ўтамизки, ҳар бир эволюцион алгебрага (a_{ik})структуравий константалар *квадрат* матрицаси мос келади. Бу эса умумий алгебра билан таққослаганда эволюцион алгебрани тадқиқ қилишни осонлаштиради. Чунки, умуман олганда алгебранинг кўпайтириш жадвали *кубик* матрица билан берилади.

Чизиқли бўлмаган динамик системани ўрганишда чизиқлаштириш – бу чизиқли бўлмаган акслантиришни чизиқлиси билан аппроксимациялашдир, яъни чизиқли бўлмаган акслантиришни унинг қўзғалмас нуқтасидаги Якобиани қаралади. Диссертацияда чекли ўлчовли алгебрани структуравий константалар кубик матрицасига мос квадратик оператор учун чизиқлаштиришдан фойдаланамиз. Квадратик операторнинг алгебранинг бирор нуқтасидаги Якобианига мос чизиқли оператор ёрдамида эволюцион алгебралар оиласини қурамиз. Берилган умумий алгебра ва унга мос эволюцион алгебралар орасидаги боғланишни келтирамиз.

Энди алгебрани эволюцион алгебра билан аппроксимацияси тушунчасини киритамиз. Бирор K майдон берилган, ҳар бир чекли ўлчовли $\mathcal{A}$ алгебра изоморфизм аниқлигида ўзининг ўлчови (айтайлик m) ва m^3 та структуравий константалари $\gamma_{ij,k}\in K$ билан аниқланади. Бу структуравий константалар $\mathcal{A}$ алгебранинг $\{e_1,\ldots,e_m\}$ базисдаги кўпайтмаларини қуйидаги қоида билан аниқлайди:

$$e_ie_j=\sum_{k=1}^{m}\gamma_{ij,k}e_k.$$

Шундай қилиб, чекли ўлчовли алгебраларнинг кўпайтмалари $(\gamma_{ij,k})$ кубик матрица билан берилади.

Шунингдек, бу матрица ёрдамида $F:K^m\to K^m$ эволюцион оператор қуйидагича аниқланади:

$$F:x_k'=\sum_{i,j}\gamma_{ij,k}x_ix_j,\ k=1,\ldots,m.$$

Умуман олганда, $\mathcal{A}$ алгебра ва F квадратик операторни ўрганиш уларнинг кубик матрицалар орқали аниқланганлиги сабабли мураккаблик туғдиради. Аммо, $\gamma_{ij,k}$ нинг баъзи қийматларини нолга тенглаштириб, тадқиқ қилишни осонлаштириш мумкин. Баъзи бир глобал ва локал хосссаларни ўрганиш учун F операторга ўхшаш чизиқли бўлмаган функциялар, одатда Якобиан ёрдамида чизиқли функцияга "алмаштирилади".

Бу операторнинг x=$(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{A}$ нуқтадаги Якобиани қуйидагичадир:

$$J_F(\mathrm{x}) = \left(\sum_j \gamma_{pj,k} x_j + \sum_i \gamma_{ip,k} x_i \right)_{p,k=1}^n = \left(\sum_{i=1}^n (\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}) x_i \right)_{p,k=1}^n .$$

Бу квадрат матрица бўлганлиги сабабли структуравий матрицаси $J_F(\mathrm{x})$ бўлган эволюцион алгебрани аниқлашимиз мумкин. Бунинг учун қуйидагича

$$\beta_{pk}(\mathrm{x}) = \sum_i (\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}) x_i \qquad (1)$$

белгилаш орқали $E_x = span\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n\}$ эволюцион алгебрани

$$\tilde{e}_i \tilde{e}_j = 0,\ \tilde{e}_i^2 = \sum_k \beta_{ik}(\mathrm{x}) \tilde{e}_k .$$

кўпайтма билан аниқлаймиз.

Таъкидлаб ўтиш жоизки, бу типдаги эволюцион алгебра биринчи марта У.А.Розиков ва М.В.Веласколарнинг мақоласида "чивинлар популяцияси алгебраси" учун аниқланган.

1-Таъриф. *Юқоридагича аниқланган E_{x} эволюцион алгебра $\mathcal{A}$ алгебранинг* x *нуқтадаги аппроксимацияси дейилади*.

Шундай қилиб, $\mathcal{A}$ ва E_{x} орасидаги боғлиқлик (1) тенглик билан аниқланади.

Диссертациянинг **асосий саволи** "Бирор $\mathrm{x} \in \mathcal{A}$ учун E_{x} эволюцион алгебранинг хоссаларини билган ҳолда $(\gamma_{pi,k})_{p,i,k=1}^n$ структуравий константалар матрицасига эга бўлган ва (1) муносабат билан боғланган $\mathcal{A}$ алгебра ҳақида нима дейиш мумкин?"

E ҳақиқий сонлар майдонидаги 2 ўлчовли эволюцион алгебра бўлсин. Бундай алгебралар Ш.Муродов томонидан қуйидагича таснифланган:

Ҳар қандай E икки ўлчовли ҳақиқий эволюцион алгебра қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморфдир:

(i) $dim(E^2) = 1$:

E_1: $e_1 e_1 = e_1$, $e_2 e_2 = 0$;

E_2: $e_1 e_1 = e_1$, $e_2 e_2 = e_1$;

E_3: $e_1 e_1 = e_1 + e_2$, $e_2 e_2 = -e_1 - e_2$;

E_4: $e_1 e_1 = e_2$, $e_2 e_2 = 0$;

E_5: $e_1 e_1 = e_2$, $e_2 e_2 = -e_2$;

(ii) $dim(E^2) = 2$:

$E_6(a_2;a_3)$: $e_1e_1=e_1+a_2e_2$, $e_2e_2=a_3e_1+e_2$; $1-a_2a_3\neq 0$, $a_2,a_3\in\mathbb{R}$. Бундан ташқари $E_6(a_2;a_3)$ алгебра $E_6(a_3;a_2)$ алгебрага изоморфдир.

$E_7(a_4)$: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_2=e_1+a_4e_4$, бу ерда $a_4\in\mathbb{R}$;

Энди бу маълум эволюцион алгебраларнинг ҳақиқий (координаталари ҳақиқий) қўзғалмас нуқталаридаги аппроксимацияларини қурамиз. F эволюцион операторнинг нолмас ҳақиқий қўзғалмас нуқталарини қараймиз. Юқоридаги таснифлашда берилган $E_i, i=1,2,\ldots,7$ эволюцион алгебралар учун F эволюцион операторнинг қўзғалмас нуқталарини $(x_1^0;x_2^0)$ орқали белгилаймиз ва бу қўзғалмас нуқталарга мос эволюцион алгебралар билан бошқа эволюцион алгебраларнинг изоморфизмлари ўрганилади.

$E_i, i=1,2,\ldots,7$ эволюцион алгебраларнинг аппроксимацияларини $\tilde{E}_i$ орқали белгиласак, у ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

1-Теорема.

i) $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ ва $\tilde{E}_5$ эволюцион алгебралар E_1 алгебраа изоморфдир;

ii) $\tilde{E}_6(a_2;a_3)$ алгебра $E_6(b_2;b_3)$ эволюцион алгебрага изоморфдир, бу ерда $b_2=a_3\left(\frac{x_2^0}{x_1^0}\right)^2$, $b_3=a_2\left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^2$;

iii) $\tilde{E}_7(a_4)$ алгебра $E_7(b_4)$ алгебрага изоморфдир, бу ерда $b_4=a_4\sqrt[3]{(\frac{x_2^0}{x_1^0})^2}$.

Энди уч ўлчовли ҳақиқий эволюцион алгебраларни $dim(E^2)=1$ шартда таснифини келтирамиз .

2-Теорема. *Ҳар қандай $dim(E^2)=1$ шарт билан берилган E уч ўлчовли ҳақиқий эволюцион алгебра қуйидаги ўзаро изоморф бўлмаган алгебралардан бирига изоморфдир:*

$$E_1:\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_2:\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\1&1&0\end{pmatrix},\ E_3:\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&-1&0\\-1&-1&0\end{pmatrix},$$

$$E_4:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_5:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ E_6:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\ E_7:\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_8:\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\ E_9:\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\ E_{10}:\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{11}:\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ E_{12}:\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ E_{13}:\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Энди Теорема 2 даги $E_i, i=\overline{1,13}$ эволюцион алгебралар учун F оператор қўзғалмас нуқтасига мос эволюцион алгебралар қурамиз.

$E_i,\ i\in\{1,2,3,\ 11,12,13\}$ эволюцион алгебралар учун F операторнинг нолдан фарқли қўзғалмас нуқталари мавжуд эмас ва $E_i, i=\overline{4,10}$ эволюцион алгебралар учун F оператор нолдан фарқли ягона қўзғалмас нуқтага $(1;0;0)$ эга. Шунинг учун

$$J_F(1;0;0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$J_F(1;0;0)$ матрицали эволюцион алгебра E_4 эволюцион алгебрага изоморфлигини кўриш қийин эмас.

Диссертациянинг **“чекли ўлчовли алгебраларни эволюцион алгебралар билан аппроксимациялаш”** номли иккинчи бобида ихтиёрий чекли ўлчовли алгебра учун эволюцион оперторнинг алгебра нуқтасидаги Якобианига мос эволюцион алгебралар оиласини қурганмиз. Алгебра хоссалари мос эволюцион алгебралар оиласи хоссалари билан қандай боғлиқлигига жавоб берувчи баъзи натижалар олинган. Бундан ташқари, икки ва уч ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебраларига мос эволюцион алгебралари ҳам ўрганилган. Бундай эволюцион алгебралар ҳам нильпотент бўлишлиги исботланган. Шунингдек, бундай эволюцион алгебралар таснифланган.

Структуравий константалар матрицаси $M_{\mathcal{A}}=(\gamma_{pi,k})_{p,i,k=1}^{n}$ бўлган берилган $\mathcal{A}$ алгебра учун

$$I_{\mathcal{A}}=\{p\in\{1,2,...,n\}:\det\Gamma_p\neq 0\},$$

белгилашни оламиз. Бу ерда $\Gamma_p=\left(\gamma_{pi,k}+\gamma_{ip,k}\right)_{i,k=1}^{n}$.

$\mathrm{x}\in\mathcal{A}$ ни фиксирлаб, $a_p\equiv a_p(\mathrm{x})$ орқали (1.1) да аниқланган $(\beta_{pk}(\mathrm{x}))$ матрицанинг p-устунидан ташкил топган векторни белгилаймиз.

3-Теорема. *Берилган $\mathcal{M}_E=\left(a_{pk}\right)$ матрицали тривиал бўлмаган эволюцион алгебра E ва $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}=\left(\gamma_{pi,k}\right)$ матрицали $\mathcal{A}$ алгебра учун (1) ни қаноатлантирувчи $\mathrm{x}\in\mathcal{A}\setminus\{0\}$ элемент фақат ва фақат*

$$\Gamma_p^{-1}\cdot a_p=\Gamma_q^{-1}\cdot a_q,\ \textit{ихтиёрий}\ p,q\in I_{\mathcal{A}}\ \textit{учун}$$

ва

$$\mathrm{rank}\Gamma_p=\mathrm{rank}\left(\Gamma_p,a_p\right),\ \textit{ихтиёрий}\ p=\{1,2,...,n\}\setminus I_{\mathcal{A}}\ \textit{учун}$$

бўлганда мавжуд.

E эволюцион алгебра учун қуйидаги кетма-кетликларни киритамиз

$$E^{[1]}=E^{<1>}=E,\ E^{[k+1]}=E^{[k]}E^{[k]},\ E^{<k+1>}=E^{<k>}E,\ E^{k}=\sum_{i=1}^{k-1}E^{i}E^{k-i},\ k\geq 1.$$

2-Таъриф. *Агар* $E^{<s>}=0$ *шартни қаноатлантирувчи бирор* $s\in\mathbb{N}$ *мавжуд бўлса, у ҳолда* E *эволюцион алгебра ўнг нильпотент дейилади.* $E^{<s>}=0$ *шартни қаноатлантирувчи энг кичик* s *сонига ўнг нилпотентлик индекси дейилади.*

3-Таъриф. *Агар* $E^{n}=0$ *шартни қаноатлантирувчи бирор* $n\in\mathbb{N}$ *мавжуд бўлса, у ҳолда* E *эволюцион алгебра нильпотент (ёки ниль) дейилади.* $E^{n}=0$ *шартни қаноатлантирувчи энг кичик* n *сонига нильпотентлик индекси дейилади.*

Л.М.Камачо ва бошқаларнинг мақоласида эволюцион алгебралар учун нильпотентлик ва ўнг нильпотентлик тушунчалари эквивалент эканлиги исботланган. Бундан ташқари, Ж.М.Казас ва бошқаларнинг мақоласида бундай алгебраларнинг структуравий константалар матрицаси юқори учбурчак (қуйи учбурчак, базис элементларини алмаштиришлар аниқлигида) шаклида бўлиши исботланган, яъни қуйидаги натижа маълум:

Қуйидаги жумлалар n-ўлчовли E *эволюцион алгебралар учун эквивалентдир:*

(a) E *га мос матрицани қуйидагича ёзиш мумкин:*

$$M_E=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n}\\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n}\\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

(b) E *ўнг нильпотент алгебра;*

(c) E *ниль алгебра.*

4-Теорема. E n*- ўлчовли ўнг нильпотент ҳақиқий (комплекс) эволюцион алгебра бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\mathrm{x}\in E$ *учун* E_{x} *эволюцион алгебра ҳам ўнг нильпотентдир.*

Энди берилган алгебрага мос эволюцион алгебрани қуйидагича аниқлаймиз: эволюцион алгебра структуравий константалар матрицасини юқорида аниқланган $J_F(\mathrm{x})$ матрицанинг транспонирлангани сифатида қараймиз, яъни аниқланаётган эволюцион алгебра матрицаси $(\beta_{pk}(\mathrm{x}))_{p,k=1}^{n}$, бу ерда

$$\beta_{pk}(\mathrm{x})=\sum_i(\gamma_{ki,p}+\gamma_{ik,p})x_i. \tag{2}$$

Бу эволюцион алгебра *берилган* A *алгебранинг транспонирланган Якобиан бўйича аппроксимацияси* дейилади ва $E_{A_{\mathrm{x}}}^{T}$ каби белгиланади.

1-Изоҳ. *Ли алгебрасининг (1) (ва (2)) бўйича аппроксимацияси тривиал эволюцион алгебрадир.*

1-Тасдиқ. A *ва* B n*-ўлчовли изоморф эволюцион алгебралар бўлсин. У ҳолда шундай* $\mathrm{x}\in A$ *ва* $\mathrm{y}\in B$ *мавжудки,* $E_{A_{\mathrm{x}}}^{T}\simeq E_{B_{\mathrm{y}}}^{T}$ *бўлади.*

4-Таъриф. *Агар* $x^2 = 0$ *бўлса,* $x \in \mathcal{A}$ *элемент абсолют нильпотент дейилади.*

5-Теорема. *If* x *элемент* $\mathcal{A}$ *алгебранинг абсолют нильпотент элементи бўлса, у ҳолда,* E_x *ҳам абсолют нильпотент элементга эга бўлади.*

6-Теорема. $\mathbb{R}^n$ – $\mathbb{R}$ *майдон устидаги комммутатив алгебра ва* $E_{\hat{x}}$ – $\mathbb{R}^n$ *нинг* $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ *(* $\hat{x}_i \neq 0, i = 1,...,n$ *) нуқтадаги аппроксимацияси бўлсин. У ҳолда* $\mathbb{R}^n$ ***ягона*** *абсолют нильпотент элементга эга бўлиши учун* $E_{\hat{x}}$ ***ягона*** *абсолют нильпотент элементга эга бўлиши зарур ва етарли.*

5-Таъриф. $\mathcal{L}$ *вектор фазо "квадрат қавс" деб аталувчи бичизиқли акслантириш*

$$[-,-] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

билан берилган бўлиб, барча $x, y, z \in \mathcal{L}$ *учун*

$$[x,[y,z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

Лейбниц айниятини қаноатлантирса, $\mathcal{L}$ *га* K *майдондаги Лейбниц алгебраси дейилади.*

Берилган $(\mathcal{L},[-,-])$ Лейбниц алгебраси учун юқори марказий кетма-кетликни қуйидагича аниқлаймиз:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}], k \geq 1.$$

6-Таъриф. *Агар* $\mathcal{L}^n = 0$ *шартни қаноатлантирувчи шундай* $n \in \mathbb{N}$ *мавжуд бўлса, у ҳолда* $\mathcal{L}$ *Лейбниц алгебраси нильпотент дейилади. Шундай* n *ларнинг энг кичигига* $\mathcal{L}$ *алгебранинг нильпотентлик индекси дейилади.*

Икки ва уч ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебралари таснифлари мос равишда Лодэ ва Албеверио, Аюпов, Омиров мақолаларида келтирилган. Қуйидаги натижалар ушбу таснифларни ифодалайди:

$\mathcal{L}$ *икки ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда* $\mathcal{L}$ *абель алгебраси бўлади ёки қуйидаги алгебрага изоморф бўлади.*

$$\mu_1 : [e_1, e_1] = e_2 .$$

$\mathcal{L}$ *уч ўлчовли нильпотент Лейбниц алгебраси бўлсин. У ҳолда* $\mathcal{L}$ *қуйидаги ўзаро изомрф бўлмган алгебралардан бирига изоморф бўлади:*

$\lambda_1 :$ абель,

$\lambda_2 : [e_1, e_1] = e_3$,

$\lambda_3 : [e_1, e_2] = e_3$, $[e_2, e_1] = -e_3$,

$\lambda_4(\alpha) : [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_2] = \alpha e_3$, $[e_1, e_2] = e_3$

$\lambda_5 : [e_2, e_1] = e_3$, $[e_1, e_2] = e_3$,

$\lambda_6 : [e_1, e_1] = e_2$, $[e_2, e_1] = e_3$.

2-Тасдиқ. *Икки ўлчовли нилпотент Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий нуқтасидаги транспонирланган Якобиани бўйича аппроксимацияси ҳам нильпотент эволюцион алгебра бўлади.*

3-Тасдиқ. *Уч ўлчовли нилпотент Лейбниц алгебрасининг ихтиёрий нуқтасидаги транспонирланган Якобиани бўйича аппроксимацияси ҳам нильпотент эволюцион алгебра бўлади*

Диссертациянинг **“Уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирлари”** номли учинчи бобида уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирлари тавсифи олинган ва шу қурилган барча занжирлар учун бариклик хоссаси ўзини вақт бўйича қандай тутиши ўрганилган. Баъзи занжирлар умуман барик бўлмаслиги кўрсатилган. Бошқа (бариклик хоссасининг узилишига эга бўлган) занжирлар учун бариклик хоссасини бошқарувчи функцияларни аниқланди ва бу бошқарувчига қўйилган баъзи шартларда бундай занжирлар барик эмаслигини кўрсатилди. Шунингдек, ушбу бўлимда келтирилган эволюцион алгебралар занжирлари учун абсолют нильпотент ва идемпотент элементлари тўпламларининг вақт бўйича ўзини тутиши ва динамикаси ўрганилган.

$0 \le a < b \le \infty$ учун 3-ўлчовли **эволюцион алгебралар занжирлар**ини (қисқача ЭАЗ) $[a,b]$ кесмада қуйидагича аниқлаймиз:

$$\mathcal{E}_{[a,b]} := \{E^{[s,t]} : a < s < t < b\},$$

бу ерда ҳар бир $E^{[s,t]}$ уч ўлчовли эволюцион алгебранинг структуравий константалар матрицаси $M^{[s,t]}$ (аввалдан тайинланган B базисга мос) қуйидаги

$$M^{[s,t]} = M^{[s,\tau]} M^{[\tau,t]}, \text{ (Колмогоров-Чепмен тенгламаси).} \qquad (3)$$

тенгликни барча $a<s<\tau<t<b$ учун қаноатлантиради. Бу ҳолда биз $\mathcal{M}_{[a,b]} = \{M^{[s,t]} : a < s < t < b\}$ ни $\mathcal{E}_{[a,b]}$ билан боғланган Колмогоров-Чепмен (қисқача К-Ч) занжири деймиз.

Ушбу бобнинг бошида биз уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжири тавсифини берганмиз ва биз уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирини (3) тенгликни қаноатлантирадиган 3×3 матрицаларни топиш орқали курганмиз:

$$\mathcal{M}_0^{[s,t]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}_1^{[s,t]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h(t)\left(\frac{1}{h(s)} + f(s)\right) & h(t)\left(\frac{1}{h(s)} + f(s)\right) & h(t)\left(\frac{1}{h(s)} + f(s)\right) \\ h(t)\left(\frac{1}{h(s)} - g(s)\right) & h(t)\left(\frac{1}{h(s)} - g(s)\right) & h(t)\left(\frac{1}{h(s)} - g(s)\right) \\ h(t)\big(g(s) - f(s)\big) & h(t)\big(g(s) - f(s)\big) & h(t)\big(g(s) - f(s)\big) \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}_2^{[s,t]} = \frac{1}{2}\begin{cases} \begin{pmatrix} 1+\psi(s) & 1+\psi(s) & 1+\psi(s) \\ 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) \\ \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) \end{pmatrix}, & \text{агар } s \le t < a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{агар } t \ge a. \end{cases};$$

$$\mathcal{M}_3^{[s,t]} = \frac{1}{\Phi_n(s)}\begin{pmatrix} f_n(t) & g_n(t) & h_n(t) \\ \varphi_1(s)f_n(t) & \varphi_1(s)g_n(t) & \varphi_1(s)h_n(t) \\ \varphi_2(s)f_n(t) & \varphi_2(s)g_n(t) & \varphi_2(s)h_n(t) \end{pmatrix},$$

бу ерда, $\Phi_n(s) = f_n(s) + \varphi_1(s)g_n(s) + \varphi_2(s)h_n(s) \ne 0.$

$$\mathcal{M}_4^{[s,t]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\varphi(t)}{g(s)} & \dfrac{f(t)}{g(s)} & \dfrac{g(t)}{g(s)} \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{M}_5^{[s,t]} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi(t) & \psi(t) & 1 \end{pmatrix}, if\ s \le t < a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, if\ t \ge a. \end{cases}$$

Шундай қилиб, биз юқорида келтирилган $\mathcal{M}_i^{[s,t]}, i = 0,1,2,3,4,5$ ларга мос $E_i^{[s,t]}, 0 \le s \le t$ ЭАЗларини ҳосил қилдик.

7-Таъриф. *Фараз қилайлик, $E^{[s,t]}$ ЭАЗ (s_0, t_0) вақт оралиғида P хоссага эга бўлсин. Агар шундай $(s,t) \ne (s_0, t_0)$ вақт оралиғи мавжуд бўлиб, бу орлиқда ЭАЗи P хоссага эга бўлмаса, у ҳолда ЭАЗнинг P хоссаси узилишга эга дейилади.*

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\mathcal{T}=\{(s,t):0\le s\le t\};$$
$$\mathcal{T}_P=\{(s,t)\in\mathcal{T}:E^{[s,t]}-P \text{ хоссага эга}\};$$
$$\mathcal{T}_P^0=\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_P=\{(s,t)\in\mathcal{T}:E^{[s,t]}-P \text{ хоссага эга эмас}\}.$$

Бу тўпламлар қуйидаги маъноларга эга:

$\mathcal{T}_P$ – P хосса давомийлиги;

$\mathcal{T}_P^0$ – P хоссанинг йўқолганлик давомийлиги;

$\mathcal{T}$ тўпламнинг $\{\mathcal{T}_P,\mathcal{T}_P^0\}$ жуфтлиги P хосса диаграммаси дейилади.

Масалан, агар P=коммутативлик бўлса, у ҳолда эволюцион алгебра доим коммутатив бўлганлигидан ЭАЗ коммутативлик хоссаси узилишига эга эмас деган хулосага келамиз.

A алгебранинг характери – бу A даги нолмас мультипликатив чизиқли формадир, яъни A ни $\mathbb{R}$ га акслантирувчи нолмас алгебраик гомоморфизмдир. Барча алгебралар ҳам характерга эга бўлавермайди. Масалан, нол кўпайтмали алгебра характерга эга эмас.

8-Таъриф. *A алгебра ва унинг σ характеридан ташкил топган (A,σ) жуфтликка барик алгебра дейилади. σ гомоморфизм A алгебранинг оғирлик (ёки барик) функцияси ва $\sigma(x)$ эса x элементнинг оғирлиги (барик қиймати) дейилади .*

7-Теорема.

- *(Барикмаслик хоссаси узилишининг мавжуд эмаслиги) $E_i^{[s,t]}$, $i=0,3$ алгебралар $(s,t)\in\mathcal{T}$ вақтда барик эмас.*
- *(Бариклик хоссаси узилишининг мавжудлиги) $E_i^{[s,t]}$, $i=1,2,4,5$ ЭАЗлари бариклик хоссаси узилишига эга ва бариклик хоссаси давомийлик тўпламлари қуйидагича*

$$\mathcal{T}_b^{(1)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:g(s)=f(s)=\pm\frac{1}{h(s)}\}\cup\{(s,t)\in\mathcal{T}:g(s)=-f(s)=\frac{1}{h(s)}\};$$
$$\mathcal{T}_b^{(2)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:\varphi(s)=\psi(s)=\pm1\}\cup\{(s,t)\in\mathcal{T}:\varphi(s)=1,\psi(s)=-1\};$$
$$\mathcal{T}_b^{(4)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:g(t)\ne0\};\qquad \mathcal{T}_b^{(5)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:s\le t<a\}.$$

Энди “*абсолют нильпотент элементи ягоналиги*” хоссаси узилиши мавжудлик муаммосига жавоб берамиз.

$\mathcal{T}_{nil}^{(i)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:E_i^{[s,t]}$ ягона абсолют нильпотент элементга эга$\}$,

$\mathcal{T}_{nil}^0=\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_{nil}$.

8-Теорема.

- *$E_i^{[s,t]}$, $i=0,4,5$ ЭАЗлари ихтиёрий $(s,t)\in\mathcal{T}$ вақтда чексиз кўп абсолют нильпотент элементга ;*
- *$E_i^{[s,t]}$, $i=1,2$ ЭАЗлари “абсолют нильпотент элементи ягоналиги” хоссаси узилишига эга ва “абсолют нильпотент элементи ягоналиги” хоссаси давомийлик тўпламлари қуйидагича*

$$\mathcal{T}_{nil}^{(1)} = \{(s,t) \in \mathcal{T} : h(t) \neq 0, f(s) < g(s) < \frac{1}{h(s)}, -f(s) < \frac{1}{h(s)}\};$$
$$\mathcal{T}_{nil}^{(2)} = \{(s,t) \in \mathcal{T} : -1 < \psi(s) < \varphi(s) < 1, t < a\};$$
$$\mathcal{T}_{nil}^{(3)} = \{(s,t) \in \mathcal{T} : f_n(t), g_n(t), h_n(t) - \text{ишоралари бир хил эмас}\}.$$

9-Теорема. (1) $E_0^{[s,t]}$ *алгебра ягона* $(0,0)$ *идемпотент элементга эга.*

(2) $$\mathcal{I}d(E_1^{[s,t]}) = \begin{cases} \{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : h(t) = 0\} \\ \left\{(0,0,0), \left(\frac{h(s)}{h(t)}, \frac{h(s)}{h(t)}, \frac{h(s)}{h(t)}\right)\right\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : h(t) \neq 0\} \end{cases}$$

(3) $$\mathcal{I}d(E_2^{[s,t]}) = \begin{cases} \{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : t \geq a\} \\ \{(0,0,0), (1,1,1)\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : s \leq t < a\} \end{cases}$$

(4)
$$\mathcal{I}d(E_3^{[s,t]}) = \begin{cases} \{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : F(s,t) = 0\} \\ \left\{(0,0,0), (\frac{f_n(t)}{F(s,t)}, \frac{g_n(t)}{F(s,t)}, \frac{h_n(t)}{F(s,t)})\right\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : F(s,t) \neq 0\} \end{cases}$$

where $F(s,t) = f_1(s)(f_n(t) + \psi(s)(g_n(t))^2 + \varphi(s)(h_n(t))^2)$.

(5)
$$\mathcal{I}d(E_4^{[s,t]}) = \begin{cases} \{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : g(t) = 0\} \\ \left\{(0,0,0), (\frac{g(s)}{g(t)}, \frac{g(s)f(t)}{(g(t))^2}, \frac{g(s)\varphi(t)}{(g(t))^2})\right\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : g(t) \neq 0\} \end{cases}$$

(6) $$\mathcal{I}d(E_5^{[s,t]}) = \begin{cases} \{(0,0,0), (1, \psi(t), \varphi(t))\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : s \leq t < a\}, \\ \{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t) \in \{(s,t) \in \mathcal{T} : t \geq a\}. \end{cases}$$

ХУЛОСА

Диссертация иши чекли ўлчовли алгебраларни эволюцион алгебралар билан аппроксимацияси ҳамда уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. ҳақиқий сонлар майдони устида берилган уч ўлчовли эволюцион алгебралар таснифланди, ҳамда икки (уч) ўлчовли эволюцион алгебралар ва уларнинг идемпотентларига мос келадиган эволюцион алгебралар ўртасидаги изоморфизмлар қурилди;
2. ўнг нильпотент бўлган эволюцион алгебра аппроксимацияси ҳам ўнг нильпотент эканлиги исботланган;
3. икки ва уч ўлчовли нилпотент Лейбниц алгебраларининг аппроксимацияси ҳам нильпотент эволюцион алгебра эканлиги

кўрсатилган, бундан ташқари ушбу эволюцион алгебралар таснифи ҳам олинган;

4. уч ўлчовли эволюцион алгебралар занжирлари қурилган;
5. эволюцион алгебралар занжирининг абсолют нильпотент ва идемпотент элементлари тўламларининг вақтга боғлиқ динамикаси ўрганилган.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

IMOMKULOV ANVAR NORBOBOEVICH

APPROXIMATION OF FINITE DIMENSIONAL ALGEBRAS BY EVOLUTION ALGEBRAS

01.01.06-Algebra

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent-2021

The theme of thesis of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.1.PhD/FM315.

Thesis has been prepared at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician
Official opponents:	**Khudoyberdiyev Abror Khakimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Karimjanov Ikboljon Abdulazizovich Doctor of Philosophy (PhD) physical and mathematical sciences
Leading organization:	**Karakalpak State University**

Defense will take place "___"_________ 2021 at_____at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Thesis is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (is registered №___). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of the thesis sent out on «___» _________ 2021 year
(Mailing report № __ on «___» ________ 2021 year)

U.A.Rozikov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

B.A.Omirov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION

Actuality and demand of the theme of the thesis.

Numerous scientific and practical researches conducted worldwide are often brought to the study of some algebras using the non-associative algebras and the theory of algebraic systems. Algebraic tools are very useful in the study of the elementary particles in quantum mechanics, properties of solids and crystals, in problems of population genetics, in the analysis of modeled problems of economics, and in other matters. The foundations of modern algebra are based on the theory of finite groups and finite-dimensional associative algebras. The development of algebraic systems and their relationship to other fields of mathematics and physics led to the emergence of new algebras, including alternative, Jordan, Lie, Leibniz, genetic, and evolution algebras. Evolution algebras are important in the study of genetic populations. Therefore, the study of some properties of algebras by bringing them closer to evolution algebras is one of the actual and important tasks.

Today one of the important directions of modern algebra in the world is the study of the theory of evolution algebras. Evolution algebras are related to other fields of mathematics, including graph theory (especially random graphs and networks), group theory, Markov processes, and dynamical systems. Evolution algebras was first proposed by Lyubich in 1992 (under the name of evolutionary algebra). It should also be noted that Tian used the term evolution algebra in his monograph in 2008 and cited the applications and some properties of these algebras. After that interest in evolutionary algebras has increased dramatically. Note that the main focus of Tian's research was on the applied problems of evolution algebras. However, a natural approach to the study of a variety of finite-dimensional algebras, such as the construction of structural theory, has not been considered by him. Pioneering results devoted to the study of structural theory appeared in the works of Sh.A.Ayupov, B.A. Omirov, U.A. Rozikov and J.M. Ladra. In particular, the classification of 2-dimensional complex evolution algebras is obtained, the classical properties of nilpotent evolution algebras are described.

In recent years, our country has paid increasing attention to mathematics, physics, geology and biological sciences, which have a scientific and practical applications of fundamental sciences. In particular, special attention was paid to the development of the theory of evolution algebras, one of the main objects encountered in population biology and genetics. Significant results have been obtained in the study of evolution algebras and their chains. Investigations on the international level in such important areas as the functional analysis and algebra considered as the main task of fundamental research[2] . At the present time, the development of investigations on the theory of evolution algebras plays an important role in the implementation of this decree.

The subject and object of research of this thesis are in line with tasks identified in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan UP-4947 of February 7, 2017 “On the strategy of action for the further development Of the Republic of Uzbekistan", UP-2789 dated February 17, 2017 “On measures to further improve of the activities of the Academy of Sciences, organization, management and financing of research activities”, PP-3682 from April 27, 2018 “On measures to further improve the system of practical implementation of innovative ideas, technologies and projects" and PP-4387 from July 9, 2019 “On measures to further development of mathematical education and science, total improvement of the activity of the Uzbekistan Academy of Sciences V.I.Romanovsky Institute of Mathematics" and also PD-4708 from May 7, 2020 "On measures to improve the quality of education and research in mathematics" as well as in other regulations related to basic science.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. This study was performed in accordance with the priority areas of science and technology of Republic of Uzbekistan IV, «Mathematics, Mechanics and Computer Science» .

The degree of scrutiny of the problem. In recent years non-associative analogues of classical constructions become of interest in connection with their applications in many branches of mathematics and physics. Mathematical methods have long been successfully used in population genetics. Connection between mathematical research and population genetics is established via Mendel’s laws, where he used symbols that from an algebraic point of view, suggest the expression of his genetic laws. Thus, mathematicians and geneticists once used non-associative algebras to study Mendelian genetics, and later some other authors called it "Mendelian algebras."

The notion of approximation of finite-dimensional algebras by evolution algebras were not introduced yet. But this kind of evolution algebra first was defined in the paper of M.V.Velasco and U.A.Rozikov for an algebra of mosquito population without explicitly mentioning .

The main problems concerning these notions are to find similar properties of given algebras and corresponding evolution algebras.

The investigation of chains of three-dimensional evolution algebras came out from discussions with professor U.A.Rozikov and professor V.M.Velasco

[2] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan at the 2017 year 18 May « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

(University of Granada, Spain) during my visit for internship to University of Granada, Spain, on October, 2019.

By M.Casas, M.Ladra and U.Rozikov a notion of a chain of evolution algebras is introduced and a wide class of such chains is obtained. Several properties of such chains are studied by these authors and Sh.Murodov, B.A. Omirov, K.M. Tulenbayev.

The first results concerning chains of two-dimensional evolution algebras were obtained in the PhD thesis of Sh.Murodov. Moreover, in his thesis the author constructed chains of evolution algebras of a “chicken” population, and also studied the dynamics of the constructed chains of evolution algebras of a “chicken” population.

The connection of the theme of the thesis with the research plans of the higher education institute, where the research on the thesis is carried out. The thesis research fits the aims and scops of the projects OT-F4-82 + OT-F4-87 «Local derivations and automorphisms of operator and nonassociative algebras, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems» + «The theory of global invariants of curves and surfaces in Euclidean and pseudo-Euclidean spaces and its applications in mechanics» at the Institute of Mathematics after named V.I. Romanovskiy (2017-2019).

The aim of the research work: The study of approximation of some finite-dimensional algebras by evolution algebras and to study of chains of three-dimensional evolution algebras.

Research problems:

to investigate approximations of two and three-dimensional evolution algebras;

to investigate absolutely nilpotent elements of approximation of an arbitrary algebra by evolution algebras;

to investigate approximation of nilpotent Leibniz algebras by evolution algebras;

to describe chains of three-dimensional evolution algebras;

to investigate the behavior of the baric property, the behavior of the set of absolutely nilpotent elements and dynamics of the set of idempotent elements depending on the time of chains of the evolution algebras.

The research object: Approximation of finite-dimensional evolution algebras, chains of three-dimensional evolution algebras.

The research subject: two and three-dimensional real evolution algebras, two and three-dimensional nilpotent Leibniz algebras, the set of absolutely nilpotent and idempotent elements of evolution algebras.

Research methods: In the thesis the methods of the theory of non-associative algebras, theory of non-linear dynamical systems, the structural methods and the methods of invariant theory are used.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

a family of three dimensional real evolution algebras are classified and isomorphisms between evolution algebras corresponding to idempotents of two-dimensional (three-dimensional) evolution algebras and two-dimensional (three-dimensional) real evolution algebras are investigated;

it is proved that the approximation algebra of nilpotent evolution algebra is also nilpotent;

it is shown that the approximations of two and three-dimensional nilpotent Leibniz algebras are also nilpotent evolution algebras, moreover, classifications of these evolution algebras are obtained;

chains of three-dimensional evolution algebras and the behaviour and dynamics in time of the set of absolute nilpotent and idempotent elements of the chain of evolution algebras are described.

Practical results of the research. The obtained results and used methods in the dissertation can be taught as a graduate course for masters and doctoral students of higher education institutions. Furthermore, obtained classification of real three-dimensional evolution algebras and constructed chain of three-dimensional evolution algebra allow us to investigate the evolution of coresponding biological and physical systems and the isomorphisms between these algebras.

The reliability of the results of the study. The results have been obtained by using the methods of abstract algebras, non-linear analysis, linear and evolution algebras, as well as the rigorous of mathematical reasoning. The proofs of obtained results are mathematically correct.

Scientific and practical significance of the research results. The scientific significance of the research results is that the scientific results obtained in the study can be used for further study of other chains of algebras. In particular, the techniques and methods developed in this dissertation can be used to find the chains of all evolution algebras. The practical significance of the thesis is that the results can be used in the theory of structure and chains of evolution algebras and to study evolution of biological and physical systems.

Implementation of the research results. The results were used in the following scientific studies:

the obtained classification of three-dimensional evolution algebras over the field of real numbers were used to obtain the classification of two- and three-dimensional complex evolution algebras in the foreign project with number MTM2016-76327-C3-2-P (AEIFEDER, UE) (Implementation letter from

November 30, 2020, University of Granada, Faculty of Mathematics, Spain). The application of the scientific result allowed to show that the number of complex evolution algebras is finite up to isomorphism;

the triviality of the second Leibniz cohomology for a simple Leibniz algebra with self-coefficients was proved in the research project: «Cohomological groups of semi-simple and nilpotent algebras» using the results of the dissertation that evolution algebras, which are approximations of two- and three-dimensional nilpotent Leibniz algebras, are also nilpotent (Reference No. 2/1255-84 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated January 12, 2021).

Approbation of the research results. The main results of the research have been discussed at 6 international and 4 national scientific conferences.

Publications of the research results. On the topic of the thesis, 18 scientific papers were published, 8 of which are included in the list of scientific periodicals proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of theses of the Doctor of Philosophy, including 2 of them published in foreign journals and 6 in national scientific journals and 10 abstracts.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of the introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The total volume of the thesis is 108 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

The **introductory** part includes a justification of the relevance and necessity of the thesis, the relevance of the research to the priorities of science and technology, the review of foreign research on the topic, the degree of scrutiny of the problem, the purpose, objectives, object and subject of research, scientific novelty and practical results, theoretical and practical significance of the results obtained, the statement of research results, published works and information on the structure of the thesis.

In the first chapter of the thesis, titled **"Approximation of two and three-dimensional evolution algebras by evolution algebras"** we give some results concerning approximations of two- and three-dimensional real evolution algebras. We present results on description and classification up to isomorphism of two-dimensional evolution algebras and we classified three-dimensional real evolution algebras in the case $dimA^2 = 1$. Also we have studied their approximations and isomorphisms between them.

Let $(A,\cdot)$ be an algebra over a field K. If it admits a basis $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, such that

$$e_i \cdot e_j = 0, if\ i \neq j$$
$$e_i \cdot e_i = \sum_k a_{ik} e_k,\ for\ any\, i$$

then it is called an evolution algebra and such a basis is called a natural basis.

We note that to every evolution algebra corresponds a *square* matrix (a_{ik}) of structure constants. This makes the investigation of an evolution algebra simpler compared to general algebra. Because, the multiplication table of a general algebra can be given by a *cubic* matrix.

The theory of evolution algebras is well developed. In the study of nonlinear dynamical systems, a linearization means an approximation of the nonlinear mapping by the linear one, i.e. by the Jacobian of the nonlinear mapping at a fixed point. In this thesis we use this linearization for a quadratic operator corresponding to cubic matrix of structure constants of a finite dimensional algebra. By the linear operators (corresponding to Jacobian of the quadratic operator at a point of the algebra) we construct a family of evolution algebras. We give relations between given general algebra and its corresponding evolution algebras.

Now we define an approximation of an algebra by evolution algebra. Given a field K, any finite-dimensional algebra $\mathcal{A}$ can be specified up to isomorphism by giving its dimension (say m), and specifying m^3 structure constants $\gamma_{ij,k} \in K$. These structure constants determine the multiplications in a basis $\{e_1,\dots,e_m\}$ of $\mathcal{A}$ via the following rule:

$$e_i e_j = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ij,k} e_k.$$

Thus the multiplications of a finite-dimensional algebra is given by a cubic matrix $(\gamma_{ij,k})$.

This matrix also defines an evolution operator $F : K^m \to K^m$ as

$$F : x_k' = \sum_{i,j} \gamma_{ij,k} x_i x_j, \ k = 1,\dots,m.$$

In general, the investigation of the algebra $\mathcal{A}$ and the quadratic operator F is difficult, since they are determined by cubic matrices. While this investigation can be simplified by taking some values of $\gamma_{ij,k}$ equal to zero. Non-linear functions, like F, mainly reduced to linear functions (linearization) by Jacobian to prove the local and some global results.

Jacobian of this operator, at $\mathrm{x}=(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathcal{A}$, is the following:

$$J_F(\mathrm{x}) = \left(\sum_j \gamma_{pj,k} x_j + \sum_i \gamma_{ip,k} x_i \right)_{p,k=1}^{n} = \left(\sum_{i=1}^{n} (\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}) x_i \right)_{p,k=1}^{n}.$$

Since this is a square matrix we can define an evolution algebra with structure constants matrix $J_F(\mathrm{x})$. To do this, denote

$$\beta_{pk}(\mathrm{x}) = \sum_i (\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}) x_i \tag{1}$$

and define an evolution algebra $E_x = span\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n\}$ by the multiplication

$$\tilde{e}_i \tilde{e}_j = 0, \ \tilde{e}_i^2 = \sum_k \beta_{ik}(\mathrm{x}) \tilde{e}_k.$$

Note that this kind of evolution algebra first was defined in U.A.Rozikov and V.V.Velasco's paper for an algebra of mosquito population.

Definition 1. *The evolution algebra* E_{x} *defined above is called an approximation of the algebra* $\mathcal{A}$ *at point* x.

Thus (1) is a relation between algebras $\mathcal{A}$ and E_{x}.

The main question of this thesis is "What can we say about algebra $\mathcal{A}$ with matrix of structure constants $(\gamma_{pi,k})_{p,i,k=1}^{n}$ knowing properties of the evolution algebra E_{x} for some $\mathrm{x} \in \mathcal{A}$ with the relation (1)?"

Let E be a 2-dimensional evolution algebra over the field of real numbers. Such algebras are classified by Sherzod Murodov as following:

Any two-dimensional real evolution algebra E *is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:*

(i) $dim(E^2)=1$:

E_1: $e_1e_1=e_1$, $e_2e_2=0$;

E_2: $e_1e_1=e_1$, $e_2e_2=e_1$;

E_3: $e_1e_1=e_1+e_2$, $e_2e_2=-e_1-e_2$;

E_4: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_2=0$;

E_5: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_2=-e_2$;

(ii) $dim(E^2)=2$:

$E_6(a_2;a_3)$: $e_1e_1=e_1+a_2e_2$, $e_2e_2=a_3e_1+e_2$; $1-a_2a_3\neq 0$, $a_2,a_3\in\mathbb{R}$. *Moreover* $E_6(a_2;a_3)$ *is isomorphic to* $E_6(a_3;a_2)$.

$E_7(a_4)$: $e_1e_1=e_2$, $e_2e_2=e_1+a_4e_4$, *where* $a_4\in\mathbb{R}$;

Now we construct approximations of these evolution algebras at the real (coordinates are real) fixed points. We find real non-zero fixed points of the evolution operator F. We denote by $(x_1^0;x_2^0)$ the real non-zero fixed points of the operator F for algebras $E_i, i=1,2,\dots,7$ mentioned in above classification and study isomorphisms of evolution algebras corresponding to these fixed points with other evolution algebras.

If we denote by $\tilde{E}_i$ approximations of $E_i, i=1,2,\dots,7$ then we have the following theorem.

Theorem 1.

$i)$ *Evolution algebras* $\tilde{E}_1$, $\tilde{E}_2$ *and* $\tilde{E}_5$ *are isomorphic to* E_1;

$ii)$ $\tilde{E}_6(a_2;a_3)$ *is isomorphic to the evolution algebra* $E_6(b_2;b_3)$, *where* $b_2=a_3\left(\frac{x_2^0}{x_1^0}\right)^2$, $b_3=a_2\left(\frac{x_1^0}{x_2^0}\right)^2$;

$iii)$ $\tilde{E}_7(a_4)$ *is isomorphic to* $E_7(b_4)$, *where* $b_4=a_4\sqrt[3]{(\frac{x_2^0}{x_1^0})^2}$.

Now we shall consider classification of three dimensional real evolution algebras with $dim(E^2)=1$.

Theorem 2. *Each three-dimensional real evolution algebra* E *with* $dim(E^2)=1$ *is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:*

$$E_1:\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_2:\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\ E_3:\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_4:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_5:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_6:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_7:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_8:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_9:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{10}:\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{11}:\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{12}:\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{13}:\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Now for the evolution algebras $E_i, i=\overline{1,13}$ from Theorem 2 we will construct evolution algebras corresponding to fixed points of the operator F.

There is no non-zero fixed point of the operator F for the evolution algebras $E_i,\ i\in\{1,2,3,\ 11,12,13\}$ and $(1;0;0)$ is the unique fixed point of the operator F for the evolution algebras $E_i, i=\overline{4,10}$. So

$$J_F(1;0;0)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

It is easy to see that the evolution algebra with the matrix $J_F(1;0;0)$ is isomorphic to the evolution algebra E_4.

In the second chapter of the thesis, titled **"Approximation of finite-dimensional algebras by evolution algebras"** for any finite dimensional algebra we construct a family of evolution algebras corresponding to Jacobian of the evolution operator at a point of the algebra. We obtain some results answering the questions - how properties of an algebra depends on the properties of the corresponding family of evolution algebras. Moreover, we consider evolution algebras corresponding to two- and three-dimensional nilpotent Leibniz algebras. We prove that such evolution algebras are nilpotent too. Also we classify such evolution algebras.

For an algebra $\mathcal{A}$ with matrix of structure constants $M_{\mathcal{A}} = (\gamma_{pi,k})_{p,i,k=1}^{n}$, denote

$$I_{\mathcal{A}} = \{p \in \{1,2,...,n\} : \det \Gamma_p \neq 0\},$$

where $\Gamma_p = \left(\gamma_{pi,k} + \gamma_{ip,k}\right)_{i,k=1}^{n}$.

Fix $\mathrm{x} \in \mathcal{A}$ and denote by $a_p = a_p(\mathrm{x})$ the vector considered as p-th column of matrix $(\beta_{pk}(\mathrm{x}))$ defined in (1).

Theorem 3. *For a given non-trivial evolution algebra E with $\mathcal{M}_E = \left(a_{pk}\right)$ and an algebra $\mathcal{A}$ with $\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \left(\gamma_{pi,k}\right)$ there is an element $\mathrm{x} \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ satisfying (1.1) if and only if*

$$\Gamma_p^{-1} \cdot a_p = \Gamma_q^{-1} \cdot a_q, \textit{for any } p,q \in I_{\mathcal{A}}$$

and

$$\mathrm{rank}\Gamma_p = \mathrm{rank}\left(\Gamma_p, a_p\right), \textit{for any } p = \{1,2,...,n\} \setminus I_{\mathcal{A}}.$$

For an evolution algebra E introduce the following sequences

$$E^{[1]} = E^{<1>} = E,\ E^{[k+1]} = E^{[k]}E^{[k]},\ E^{<k+1>} = E^{<k>}E,\ E^{k} = \sum_{i=1}^{k-1} E^{i}E^{k-i},\ k \geq 1.$$

Definition 2. *An evolution algebra E is called right nilpotent if there exists some $s \in \mathbb{N}$ such that $E^{<s>} = 0$. The smallest s such that $E^{<s>} = 0$ is called the index of right nilpotency.*

Definition 3. *An evolution algebra E is called nilpotent (or nil) if there exists some $n \in \mathbb{N}$ such that $E^{n} = 0$. The smallest n such that $E^{n} = 0$ is called the index of nilpotency.*

By L. M. Camacho and others it is proved that the notions of nilpotency and right nilpotency are equivalent for evolution algebras. Moreover, in the paper of J.M. Casas and others it is proved that the matrix of structure constants for such algebras have upper (or lower, up to a permutation of basis elements of the algebra) triangular forms, i.e. the following results are known:

The following statements are equivalent for an n-dimensional evolution algebra E:

(a) The matrix corresponding to E can be written as

$$M_E = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

(b) E is a right nilpotent algebra;

(c) E is a nil algebra.

Theorem 4. *Let E be any right nilpotent n-dimensional real (complex) evolution algebra, then for any $\mathrm{x} \in E$ the evolution algebra E_{x} is right nilpotent.*

We consider evolution algebras corresponding to a given algebra as follows: the matrix of structure constants of the evolution algebra is transposed matrix of $J_F(\mathrm{x})$ which defined above, i.e. matrix of considering evolution algebra is $(\beta_{pk}(\mathrm{x}))_{p,k=1}^{n}$, where

$$\beta_{pk}(\mathrm{x}) = \sum_i (\gamma_{ki,p} + \gamma_{ik,p}) x_i. \tag{2}$$

This evolution algebra is called an *approximation of the given algebra A by transposed Jacobian* and denote by $E^T_{A_\mathrm{x}}$.

Remark 1. *Approximation of a Lie algebra by (1) (and by (2)) is an trivial evolution algebra.*

Proposition 1. *Let A and B be n-dimensional isomorphic evolution algebras. Then there exist $\mathrm{x} \in A$ and $\mathrm{y} \in B$ such that $E^T_{A_\mathrm{x}} \simeq E^T_{B_\mathrm{y}}$.*

Definition 4. *An element $\mathrm{x} \in \mathcal{A}$ is called absolutely nilpotent if* $\mathrm{x}^2 = 0$.

Theorem 5. *If x is absolutely nilpotent element of the algebra $\mathcal{A}$, then E_x also has absolutely nilpotent element.*

Theorem 6. *Let $\mathbb{R}^n$ be a commutative algebra over the field $\mathbb{R}$ and $E_{\hat{\mathrm{x}}}$ be the approximation of $\mathbb{R}^n$ at $\hat{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^n$ with $\hat{x}_i \neq 0$, $i = 1,\dots,n$. Then the algebra $\mathbb{R}^n$ has a **unique** absolutely nilpotent element if and only if the algebra $E_{\hat{x}}$ has a **unique** absolutely nilpotent element.*

Definition 5. *A Leibniz algebra over K is a vector space $\mathcal{L}$ equipped with a bilinear map, called bracket,*

$$[-,-] : \mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$$

satisfying the Leibniz identity:

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y],$$

for all $x, y, z \in \mathcal{L}$.

For a given Leibniz algebra $(\mathcal{L},[-,-])$ we define lower central series as follows:

$$\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}, \mathcal{L}^{k+1} = [\mathcal{L}^k, \mathcal{L}], k \geq 1.$$

Definition 6. *A Leibniz algebra $\mathcal{L}$ said to be nilpotent, if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $\mathcal{L}^n = 0$. The minimal number n such property is said to be the index nilpotency of the algebra $\mathcal{L}$.*

The classification of the two and three dimensional nilpotent Leibniz algebras were obtained in the papers of Loday and Albeverio, Ayupov, Omirov, respectively. The following results contain these classifications.

Let $\mathcal{L}$ be a 2-dimensional nilpotent Leibniz algebra. Then $\mathcal{L}$ is an abelian algebra or it is isomorphic to

$$\mu_1 : [e_1, e_1] = e_2.$$

Let $\mathcal{L}$ be a 3-dimensional nilpotent Leibniz algebra. Then $\mathcal{L}$ is isomorphic to one of the following pairwise non-isomorphic algebras:

λ_1 : abelian,

$\lambda_2 : [e_1, e_1] = e_3,$

$\lambda_3 : [e_1, e_2] = e_3,\ [e_2, e_1] = -e_3,$

$\lambda_4(\alpha) : [e_1, e_1] = e_3, [e_2, e_2] = \alpha e_3,\ [e_1, e_2] = e_3$

$\lambda_5 : [e_2, e_1] = e_3,\ [e_1, e_2] = e_3,$

$\lambda_6 : [e_1, e_1] = e_2,\ [e_2, e_1] = e_3.$

Proposition 2. *Approximation by transposed Jacobian of the 2-dimensional nilpotent Leibniz algebra at any point* $x \in \mathcal{L}$ *is also nilpotent evolution algebra.*

Proposition 3. *Approximation by transposed Jacobian of the 3-dimensional nilpotent Leibniz algebra at any point* $x \in \mathcal{L}$ *is also nilpotent evolution algebra.*

In the third chapter of the thesis, titled **"Chains of three-dimensional evolution algebras"** we give a description of three-dimensional evolution algebras and we construct some chains of three-dimensional evolution algebras and studied behavior of the property of being baric for each chains constructed in this section. We show that some of the chains are never baric. For other chains (which have baric property interruption) we defined a baric property controller function and under some conditions on this controller we prove that the chain is not baric. For each considered chains of evolution algebras in this section we studied the behavior and dynamics of the set of absolutely nilpotent and idempotent elements depending on the time respectively.

For $0 \le a < b \le \infty$, we define a 3-dimensional **chain of evolution algebras (**CEA for short) on $[a, b]$ as

$$\mathcal{E}_{[a,b]} := \{E^{[s,t]} : a < s < t < b\},$$

where every $E^{[s,t]}$ is a 3-dimensional evolution algebra provided with a structure constant matrix $M^{[s,t]}$ (respect to a prefixed natural basis B) satisfying that

$$M^{[s,t]} = M^{[s,\tau]} M^{[\tau,t]}, \text{ (Kolmogorov – Chapman equation).} \tag{3}$$

for any $a<s<\tau<t<b.$ In this case we say that $\mathcal{M}_{[a,b]} = \{M^{[s,t]} : a < s < t < b\}$ is the Kolmogorov-Chapman chain (K-C chain for short) associated to $\mathcal{E}_{[a,b]}$.

In the beginning of the third chapter we have obtained description of chains of three dimensional evolution algebras. And we have constructed some chains of three-dimensional evolution algebras by solving the equation (3) for the 3×3 matrix:

$$\mathcal{M}_0^{[s,t]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}_1^{[s,t]} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h(t)\left(\dfrac{1}{h(s)}+f(s)\right) & h(t)\left(\dfrac{1}{h(s)}+f(s)\right) & h(t)\left(\dfrac{1}{h(s)}+f(s)\right) \\ h(t)\left(\dfrac{1}{h(s)}-g(s)\right) & h(t)\left(\dfrac{1}{h(s)}-g(s)\right) & h(t)\left(\dfrac{1}{h(s)}-g(s)\right) \\ h(t)\left(g(s)-f(s)\right) & h(t)\left(g(s)-f(s)\right) & h(t)\left(g(s)-f(s)\right) \end{pmatrix};$$

$$\mathcal{M}_2^{[s,t]} = \frac{1}{2}\begin{cases} \begin{pmatrix} 1+\psi(s) & 1+\psi(s) & 1+\psi(s) \\ 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) & 1-\varphi(s) \\ \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) & \varphi(s)-\psi(s) \end{pmatrix}, & \text{if } s \le t < a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{if } t \ge a. \end{cases};$$

$$\mathcal{M}_3^{[s,t]} = \frac{1}{\Phi_n(s)}\begin{pmatrix} f_n(t) & g_n(t) & h_n(t) \\ \varphi_1(s)f_n(t) & \varphi_1(s)g_n(t) & \varphi_1(s)h_n(t) \\ \varphi_2(s)f_n(t) & \varphi_2(s)g_n(t) & \varphi_2(s)h_n(t) \end{pmatrix},$$

where, $\Phi_n(s) = f_n(s) + \varphi_1(s)g_n(s) + \varphi_2(s)h_n(s) \neq 0.$

$$\mathcal{M}_4^{[s,t]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{\varphi(t)}{g(s)} & \dfrac{f(t)}{g(s)} & \dfrac{g(t)}{g(s)} \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{M}_5^{[s,t]} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \varphi(t) & \psi(t) & 1 \end{pmatrix}, & \text{if } s \le t < a, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{if } t \ge a. \end{cases}$$

Thus in this case we have CEAs: $E_i^{[s,t]}, 0 \le s \le t$, which correspond to the $\mathcal{M}_i^{[s,t]}, i = 0,1,2,3,4,5$ listed above.

Definition 7. *Assume a CEA, $E^{[s,t]}$, has a property, say P, at pair of times (s_0,t_0); one says that the CEA has P property interruption if there is a pair $(s,t) \neq (s_0,t_0)$ at which the CEA has no the property P.*

Denote

$$\mathcal{T}=\{(s,t):0\le s\le t\};$$
$$\mathcal{T}_P=\{(s,t)\in\mathcal{T}:E^{[s,t]}\text{ has property }P\};$$
$$\mathcal{T}_P^0=\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_P=\{(s,t)\in\mathcal{T}:E^{[s,t]}\text{ has no property }P\}.$$

The sets have the following meaning:

$\mathcal{T}_P$ – is the duration of the property P;

$\mathcal{T}_P^0$ – is the duration of the lost of the property P;

The partition $\{\mathcal{T}_P,\mathcal{T}_P^0\}$ of the set $\mathcal{T}$ is called P property diagram.

For example, if P = commutativity then since any evolution algebra is commutative, we conclude that any CEA has not commutativity property interruption.

A character for an algebra A is a nonzero multiplicative linear form on A, that is, a nonzero algebra homomorphism from A to $\mathbb{R}$. Not every algebra admits a character. For example, an algebra with the zero multiplication has no character.

Definition 8. *A pair (A,σ) consisting of an algebra A and a character σ on A is called a baric algebra. The homomorphism σ is called the weight (or baric) function of A and $\sigma(x)$ the weight (baric value) of x.*

Theorem 7.

• *(There is no non-baric property interruption) The algebras $E_i^{[s,t]}$, $i=0,3$ are not baric for any time $(s,t)\in\mathcal{T}$;*

• *(There is baric property interruption) The CEAs $E_i^{[s,t]}$, $i=1,2,4,5$ have baric property interruption with baric property duration sets as the following*

$$\mathcal{T}_b^{(1)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:g(s)=f(s)=\pm\frac{1}{h(s)}\}\cup\{(s,t)\in\mathcal{T}:g(s)=-f(s)=\frac{1}{h(s)}\};$$
$$\mathcal{T}_b^{(2)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:\varphi(s)=\psi(s)=\pm1\}\cup\{(s,t)\in\mathcal{T}:\varphi(s)=1,\psi(s)=-1\};$$
$$\mathcal{T}_b^{(4)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:g(t)\ne0\};\qquad \mathcal{T}_b^{(5)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:s\le t<a\}.$$

Now we answer to problem of existence of "uniqueness of absolutely nilpotent element" property interruption.

$$\mathcal{T}_{nil}^{(i)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:E_i^{[s,t]}\text{ has unique absolutely nilpotent element}\},$$
$$\mathcal{T}_{nil}^0=\mathcal{T}\setminus\mathcal{T}_{nil}.$$

Theorem 8.

• *The CEAs $E_i^{[s,t]}$, $i=0,4,5$ have infinitely many of absolutely nilpotent elements for any time $(s,t)\in\mathcal{T}$;*

• *The CEAs $E_i^{[s,t]}$, $i=1,2$ have "uniqueness of absolutely nilpotent element" property interruption with the property duration sets as the following*

$$\mathcal{T}_{nil}^{(1)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:h(t)\ne0,f(s)<g(s)<\frac{1}{h(s)},-f(s)<\frac{1}{h(s)}\};$$
$$\mathcal{T}_{nil}^{(2)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}:-1<\psi(s)<\varphi(s)<1,t<a\};$$

$$\mathcal{T}_{nil}^{(3)}=\{(s,t)\in\mathcal{T}: f_n(t),g_n(t),h_n(t)-\text{the signs are different}\}.$$

Theorem 9. (1) *The algebra* $E_0^{[s,t]}$ *has unique idempotent element* $(0,0)$.

(2) $\mathcal{I}d(E_1^{[s,t]})=\begin{cases}\{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: h(t)=0\}\\ \left\{(0,0,0),\left(\dfrac{h(s)}{h(t)},\dfrac{h(s)}{h(t)},\dfrac{h(s)}{h(t)}\right)\right\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: h(t)\neq 0\}\end{cases}$

(3) $\mathcal{I}d(E_2^{[s,t]})=\begin{cases}\{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: t\geq a\}\\ \{(0,0,0),(1,1,1)\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: s\leq t<a\}\end{cases}$

(4)

$$\mathcal{I}d(E_3^{[s,t]})=\begin{cases}\{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: F(s,t)=0\}\\ \left\{(0,0,0),\left(\dfrac{f_n(t)}{F(s,t)},\dfrac{g_n(t)}{F(s,t)},\dfrac{h_n(t)}{F(s,t)}\right)\right\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: F(s,t)\neq 0\}\end{cases}$$

where $F(s,t)=f_1(s)(f_n(t)+\psi(s)(g_n(t))^2+\varphi(s)(h_n(t))^2)$.

(5)

$$\mathcal{I}d(E_4^{[s,t]})=\begin{cases}\{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: g(t)=0\}\\ \left\{(0,0,0),\left(\dfrac{g(s)}{g(t)},\dfrac{g(s)f(t)}{(g(t))^2},\dfrac{g(s)\varphi(t)}{(g(t))^2}\right)\right\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: g(t)\neq 0\}\end{cases}$$

(6) $\mathcal{I}d(E_5^{[s,t]})=\begin{cases}\{(0,0,0),(1,\psi(t),\varphi(t))\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: s\leq t<a\},\\ \{(0,0,0)\}, \text{if } (s,t)\in\{(s,t)\in\mathcal{T}: t\geq a\}.\end{cases}$

CONCLUSIONS

The thesis is devoted to investigation of approximations of finite-dimensional algebras by evolution algebras and chains of three-dimensional evolution algebras.

Basic results of the research are as follows:

1. a family of three dimensional real evolution algebras are classified and isomorphisms between evolution algebras corresponding to idempotents of two-dimensional (three-dimensional) evolution algebras and two-dimensional (three-dimensional) real evolution algebras are investigated;
2. it is proved that the approximation algebra of right nilpotent evolution algebra is also right nilpotent;
3. it is shown that the approximations of two and three-dimensional nilpotent Leibniz algebras are also nilpotent evolution algebras, moreover, classifications of these evolution algebras are obtained;
4. chains of three-dimensional evolution algebras are described;
5. for each chain of three-dimentional evolution algebras the time-dependending dynamics of the set of absolute nilpotent and idempotent elements are investigated.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

ИМОМКУЛОВ АНВАР НОРБОБОЕВИЧ

АППРОКСИМИРОВАНИЕ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЭВОЛЮЦИОННЫМИ АЛГЕБРАМИ

01.01.06 –Алгебра

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент-2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.1.PhD/FM315.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу http://www.ziyonet.uz.

Научный руководитель:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Худойбердиев Аброр Хакимович** доктор физико-математических наук
	Каримжанов Икболжон Абдулазизович доктор философии по физико-математическим наукам (PhD)
Ведущая организация:	**Каракалпакский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____»__________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № ___). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «__» ___________ 2021 года.
(протокол рассылки № __ от «__» __________ 2021 года).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н

Б.А.Омиров
Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

Целью исследования является изучение аппроксимации некоторых конечномерных алгебр эволюционными алгебрами и изучение цепей трёхмерных эволюционных алгебр.

Объект исследования: аппроксимация конечномерных эволюционных алгебр, цепи трёхмерных эволюционных алгебр.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

классифицировано семейство трёхмерных эволюционных алгебр над полем вещественных чисел и построены изоморфизмы между эволюционными алгебрами, соответствующими идемпотентам двумерных (трёхмерных) эволюционных алгебр и двумерными (трёхмерными) вещественными эволюционными алгебрами;

доказано, что аппроксимация нильпотентной эволюционной алгебры также нильпотентна;

показано, что аппроксимации двумерных и трёхмерных нильпотентных алгебр Лейбница также являются нильпотентными эволюционными алгебрами, более того, получены классификации этих эволюционных алгебр;

описаны цепочки трёхмерных эволюционных алгебр и дана динамика в зависимости от времени, множества абсолютно нильпотентных и идемпотентных элементов из каждой цепочки трёхмерных эволюционных алгебр.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

полученная классификация трёхмерных эволюционных алгебр над полем действительных чисел использовалась для получения классификации двумерных и трехмерных эволюционных алгебр в зарубежном проекте под номером MTM2016-76327-C3-2-P (AEIFEDER, UE) (Письмо о реализации от 30 ноября 2020 г., Университет Гранады, факультет математики, Испания). Применение научного результата позволило показать, что количество комплексных эволюционных алгебр конечно с точности изоморфизма;

тривиальность вторых когомологических групп для простой алгебры Лейбница с собственными коэффициентами была доказана в исследовательском проекте «Когомологические группы полупростых и нильпотентных алгебр», используя результат диссертации о том, что эволюционные алгебры, которые являются аппроксимациями двухмерных и трехмерных нильпотентных алгебр Лейбница, также нильпотентны (Справка Академии наук Республики Узбекистан № 2/1255-84 от 12 января 2021 г.).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 108 страниц.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (part I;I часть)

1. Имомкулов А.Н. О структуре трехмерных коммутативных дибарических алгебр. // Доклады Академии Наук республики Узбекистан. 2012. № 6. стр. 6-8. (01.00.00; №7)

2. Имомкулов А.Н. Классификация трехмерных коммутативных дибарических алгебр. // Узбекский математический журнал. 2013. № 4. стр. 26-33. (01.00.00; №6).

3. Imomkulov A.N. Isomorphicity of two dimensional evolution algebras and evolution algebras corresponding to their idempotents. // Uzbek Mathematical Journal. 2018. № 2. p. 63-73. (01.00.00; №6).

4. Imomkulov A.N. Classification of a family of three dimensional real evolution algebras. // TWMS J. Pure Appl. Math. 2019. V.10. №.2. p. 225-238. (WoS)

5. Imomkulov A.N. On absolute nilpotent elements of the evolution algebras corresponding to approximation of finite dimensional algebras. // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2020. № 3. p. 37-41. (01.00.00; № 17).

6. Imomkulov A.N., Rozikov U.A. Approximation of an algebra by evolution algebras. // Uzbek Mathematical Journal. 2020. vol. 3. №3. p. 70-84. (01.00.00; №6).

7. Imomkulov A.N., Velasco M.V. Chain of three-dimensional evolution algebras: A description. // Filomat. 2020. V.34, № 10, 3175–3190. (Scopus IF:1,5)

8. Imomkulov A.N. Behavior and dynamics of the set of absolute nilpotent and idempotent elements of chain of evolution algebras depending on the time. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. 2020. V.3, №4. p. 448-462. (01.00.00; № 18)

II бўлим (part II; II часть)

1. Imomkulov A.N. On the description of some classes of dibaric algebras. International conference "Operators algebras and related topics", 12-14 September. 2012, Tashkent, Uzbekistan. p.141-143.

2. Imomkulov A.N. Isomorphicity of two dimensional evolution algebras and evolution algebras corresponding to their idempotents. Conference "New results of mathematics and their applications", 14-15 May, 2018. Samarkand, Uzbekistan, N.I, p.106-108.

3. Ayupov Sh.A., Imomkulov A.N. Two-dimensional evolution algebras and evolution algebras corresponding to their idempotents. ABSTRACTS of the VI International Scientific Conference “Modern Problems of Applied Mathematics

and Information Technologies-Al-Khorezmiy 2018”, 13-15 September, 2018 p.152.

4. Imomkulov A.N. Three-dimensional evolution algebras and evolution algebras corresponding to their idempotents. Conference "Problems of modern topology and its applications", 11-12 September, 2018, Tashkent, Uzbekistan. p.110-111.

5. Imomkulov A.N. Ikki o’lchovli evolyutsion algebralar va ularning idempotentlariga mos evolyutsion algebralarning izomorfligi. Respublika ilmiy-amaliy konferensiya «XXI asr – intellektual yoshlar asri», 29 march, 2019, Tashkent, Uzbekistan. p.77-78.

6. Imomkulov A.N. Existence of point of the algebra to approximate with the evolution algebra. Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference "Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine", 13-17 May, 2019, Tashkent, Uzbekistan. p.64-65.

7. Rozikov U.A., Imomkulov A.N. Evolution algebras corresponding to some Leibniz algebras. The International Conference “Inverse and ill-Posed Problems”, 2-4 October, 2019, Samarkand, Uzbekistan. p.27-28.

8. Imomkulov A.N. Behavior of the set of absolute nilpotent and idempotent elements of chain of evolution algebras. The International scientific conference on the theme "Modern problem of differential equations and related branches of mathematics", 12-13 March, 2020, Fergana, Uzbekistan. p.143-147.

9. Imomkulov A.N. On absolute nilpotent elements of evolution algebras corresponding to approximation of finite-dimensional algebras. "Matematikaning zamonaviy muammolari" ilmiy onlayn-konferensiya, 20 may 2020, Nukus, Uzbekistan. p.34-35.

10. Rozikov U.A., Imomkulov A.N. On absolute nilpotent elements of approximation of commutative algebra with evolution algebras. International Uzbekistan-Malaysia Conference on "Computational Models and Technologies (CMT2020)” 24-25 August 2020, Tashkent, Uzbekistan. p.126-127.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2021 йил 20 январда таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 50. Буюртма № 8/21.

Гувохнома № 10-3719
"Тошкент кимё технология институти" босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Навоий кўчаси, 32-уй.