В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БИРЛАШГАН АРАБ АМИРЛИКЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ, МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

УМБЕРТО ЖИЛ СИЛВА РАФЕЙРО

НОСТАНДАРТ ФУНКЦИОНАЛ ФАЗОЛАР ВА УЛАРНИНГ ГАРМОНИК АНАЛИЗГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

УДК: 517.98

Докторлик (DSc) диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации
Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Изоҳ: Авторефератнинг ўзбек ва рус тилларидаги матнлари В.И.Романовский номидаги Математика институти катта илмий ходими Хакимов Отабек Норбўта ўғли томонидан таржима қилинган.

В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

БИРЛАШГАН АРАБ АМИРЛИКЛАРИ УНИВЕРСИТЕТИ,
МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

УМБЕРТО ЖИЛ СИЛВА РАФЕЙРО

НОСТАНДАРТ ФУНКЦИОНАЛ ФАЗОЛАР ВА УЛАРНИНГ ГАРМОНИК АНАЛИЗГА ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ДОКТОРИ (DSc) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

ТОШКЕНТ–2021

Докторлик диссертацияси В.И.Романовский номидаги Математика институти ва Бирлашган Араб Амирликлари университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, инглиз, рус(резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** физика-математика фанлари доктори, академик
Расмий оппонентлар:	**Альберто Фьоренца** Математика фанлари доктори, профессор
	Чилин Владимир Иванович физика- математика фанлари доктори, профессор,
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	Тбилиси давлат университети қошидаги Андреа Размадзе математика институти (Грузия)

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «___»_________соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174,Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И. Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (______-рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+99871)-207-91-40.

Диссертация автореферати 2021 йил «___» __________ куни тарқатилди.

(2021 йил «___» ______________даги __-рақамли реестр баённомаси).

У.А.Розиков
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

Ж.К.Адашев
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш котиби, ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

У.У.Жамилов
Фан доктори илмий даражасини берувчи
Илмий кенгаш хузуридаги илмий семинар раиси,
ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

КИРИШ (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Охирги йиллардаги тадқиқотлардан маълум бўлмоқдаки, классик функционал фазолар баъзи замонавий масалалар, жумладан, хусусий ҳосилали чизиқсиз тенгламаларнинг ечилувчанлиги, турли физик жараёнларни математик моделлаштириш, суюқликлар механикаси ва чизиқсиз эластиклик назариясида табиий равишда пайдо бўлувчи масалаларга ечим топишда самарали объект ҳисобланмайди. Таъкидлаш керакки, жамланувчанлик тартиби ўзгармас бўлган материалларни Лебег ва Соболев фазолари ёрдамида моделлаштириш самара берса-да, баъзи бир жинсли бўлмаган материаллар учун бу фазолар ёрдамида моделлаштириш самара бермайди. Жамланувчанлик тартиби материалнинг анизотроплигини ўлчаш имконини бериши зарурлиги ўзгарувчан тартибли функциялар фазосини ўрганишга туртки бўлади.

Баъзи замонавий масалалар, жумладан, электрореологик ва термореологик суюқликларни моделлаштириш, тасвирни қайта ишлаш ва ностандарт ўсишга эга дифференциал тенгламаларни тадқиқ этишда ностандарт функционал фазолар (масалан, ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег ва Соболев фазолари, катта Лебег фазоси ва бошқалар) кенг қўлланилмоқда. Математик нуқтаи назардан бундай функционал фазоларни ўрганиш янги ва мураккаб масалаларни келтириб чиқармоқда. Буни асосан гармоник анализдаги операторларнинг чегараланганлиги билан боғлиқ масалаларда учратиш мумкинки, бундай масалаларга аввалдан маълум усулларни қўллаб бўлмайди. Шу боис ностандарт функционал фазоларни тадқиқ қилиш ва гармоник анализнинг юқоридаги масалаларини ечишнинг оптимал усулларини топиш долзарб масалалардан бўлиб қолмоқда.

Жаҳон миқёсида олиб борилаётган фундаментал тадқиқотларнинг[1] аксарияти функционал анализ, гармоник анализ, математик физика, эҳтимоллар назарияси ва динамик системалар назарияси масалаларини тадқиқ этишга қаратилган. Бу соҳаларда кўзланган мақсадга эришиш учун янги функционал фазоларни топиш ва уларни ривожлантириш, олинган натижаларни фаннинг турдош соҳаларида қўллаш муҳим аҳамият касб этади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 20 апрелдаги «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ПҚ-2909 сонли Қарори ва 2018 йил 5 июндаги «Олий таълим муассасаларида таълим сифатини ошириш ва уларни мамлакатда оширилаётган кенг қамровли ислоҳотларда фаол иштирокини таъминлаш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги ПҚ-3775 сонли Қарори ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги «Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида»ги 292-сон қарори

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи.

Ностандарт функционал фазолар ва уларнинг гармоник анализга татбиқлари мавзуси доирасидаги илмий изланишлар етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасалари, жумладан, Алабама университети (АҚШ), Турку университети (Финландия), Токио Метрополитан университети (Япония), Авейро университети (Португалия), Алгарв университети (Португалия), Неапол университети (Италия), Грузия Фанлар академияси (Грузия), Понтифик Ксавиер университети (Колумбия), Жанубий федерал университет (Россия), Бирлашган Араб Амирликлари университети (БАА), Хиросима университети (Япония) ва Арктика университетида (Норвегия) олиб борилмоқда.

Ностандарт функционал фазолар бўйича илмий изланишлар кўплаб тадқиқотчилар томонидан олиб борилаётган бўлса-да, охирги 5 йилда олинган натижалар билан таништириб ўтишни жоиз топдик. Кўтариш хоссаси ва Фурье коэффициентларини ҳисобга олган ҳолда ҳар бир ўзгарувчиси бўйича интегралланувчи Трибер-Лизоркин ва 2-микролокал Бесов фазоларида атом ва молекулалар ёйилмасини ўрганиш (Авейро университети, Португалия), Мусиелак-Орлич фазоларидаги нормаллаштирувчи оператор ва Харди-Литтлвуд максимал функцияларининг чегараланганлик шартларини топиш ҳамда эксрополяция ва интерполяция каби баъзи кўчириш усулларини яратиш (Турку университети, Финландия), бирлик шар ва юқори ярим текисликларда аниқланган аналитик функцияларнинг ностандарт Банах фазоларини тадқиқ қилиш (Алгарв университети, Португалия, Жанубий федерал университет, Россия), катта ва кичик Лебег ҳамда Лоренц фазоларини тадқиқ этиш (Неапол университети, Италия), Штейн типидаги интерполяцияли катта Морри фазосини ўрганиш (Грузия Фанлар академияси, Грузия) ва бошқалар.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазоси 1931 йилда Орлич томонидан киритилган бўлса-да, дастлаб бу фазоларга эътибор унчалик катта бўлмади. Фақат 1950 йиллардаги модуляр фазоларнинг хусусий ҳоли сифатида қаралган Х.Наканонинг ишинигина бу фазоларга эътибор жиҳатидан санаб ўтиш мумкин. Бу функционал фазолар 1970 йиллардаги И.Шарапудиновнинг энг яхши яқинлашиш масалаларига татбиқи сифатида пайдо бўлди. Ўтган асрнинг 80-йилларида эса В.Жиков вариацион ҳисоб масалаларига ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазоларини қўллади. 1991 йилда О.Ковачик ва Я.Ракосник ўзгарувчан кўрсаткичли фазолар назариясига бағишланган мақола чоп эттирди. Бу мақоладан сўнг ўзгарувчан кўрсаткичли фазоларга қизиқиш кескин ортиб кетди ва бу фазоларда тадқиқот олиб борувчи мутахассислар сони сезиларли даражада ошди. Ана шундай олимлар қаторида А.Алмейда, К.Капоне, Д.Круз-Урибе, Л.Денинг, Д.Э.Эдмундс, А.Фиоренца, Ф.Футамура, М.Гаджибеков, П.Харьюлехто, П.Хастё, М.Хабази, В.Кокилашвили, Т.Копалиани, М.Коскеноя, О.Ковачик, Дж.Ланг, В.Латвала, А.Лернер, Дж.М.Мартелл, Ф.Мамедов, А.Месхи, Ю.Мизута, А.Неквинда, К.Дж.Нойгебауэр, В.Пааташвили, М.Пере, К.Перес, Х.Рафейро, Я.Ракосник, М.Ружичка, Н.Самко, С.Самко, Ю.Савано, И.Шарапудинов, Э.Шаргородский, Т.Шимомура, Б.Вакулов, В.Жиков ва бошқаларни санаб ўтиш мумкин. Ўзгарувчан кўрсаткичли Соболев ва Лебег фазолари назарияси тўғрисида Д.В.Круз-Урибе ва А.Фьоренцаларнинг монографияларида, шунингдек, Л.Денинг, П.Хастё, П.Харьюлехто ва М.Ружичкаларнинг монографияларида батафсил маълумот олиш мумкин. Иккинчи монографиянинг катта қисми бундай фазоларнинг каср тартибли дифференциал тенгламалар ва гидродинамикага татбиқларига бағишланган. В.Кокилашвили ва В.Пааташвилининг монографиясида оғирлик қўйилган ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазоларидаги чегараси силлиқ бўлмаган соҳалар учун чегаравий масалаларни ечиш ўрганилган.

Тадқиқотчиларнинг эътиборини тортган яна бир функционал фазолардан бири 1992 йилда Т.Иванц ва К.Сбордонелар томонидан Якобианнинг интегралланувчилиги хоссасини ўрганиш натижасида киритилган катта Лебег фазосидир. Бу фазо турли чизиқсиз дифференциал тенгламаларнинг регулярлик, мавжудлик ва ягоналик масалаларида энг самарали эканлиги ойдинлашди. Бу фазолардаги операторлар назарияси охирги йилларда кўп ўрганилмоқдаки, Г. Анатриелло, К. Капоне, Н. Данелия, Г. Ди Фратто, А. Фьоренца, Л. Греко, Б. Гупта, Т. Иванец, П. Джайн, Г.Е. Караджов, В. Кокилашвили, А. Месхи, Х. Рафейро, Дж. М. Ракотосон, С. Самко, К. Сбордоне, С. Умархаджиев ва бошқалар бу назариянинг ривожига ўз хиссаларини қўшиб келмоқда.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Республикаси Фанлар академияси Математика институтининг ОТ-ФТ-82 «Операторлар ва ноассоциатив алгебраларда локал дифференциаллаш ва автоморфизмлар, ночизикли динамик системаларда фаза алмашишлар ва хаос» (2017-2020) ва Бирлашган Араб Амирликлари университетининг G00002994 «Ностандарт Бергман типидаги фазолар» (2019-2020) мавзусидаги илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади янги ностандарт функционал фазоларни киритиш ва уларда гармоник анализ операторларини тадқиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларини (ЎКБФ) аниқлаш ва унинг баъзи структурали хоссаларини ўрганиш;

ЎКБФдаги баъзи операторларни компактликка ва чегараланганликка текшириш;

ЎКБФда олинган баъзи натижаларни бирлик шар ва юқори ярим текисликдан ҳосил қилинган ўзгарувчан кўрсаткичли Морри фазоларидаги аналитик функцияларга қўллаш;

Евклид фазолари, шунингдек, ўлчов берилган квазиметрик фазолардаги каби умумлашган катта Морри фазоларини аниқлаш ҳамда чегараланганлик метатеоремаларини исботлаш;

Ўзгарувчан кўрсаткичли Винер ва Рисс маъноларидаги чекли вариацияли фазоларни аниқлаш ва уларнинг хоссаларини ўрганиш;

Ўзгарувчан кўрсаткичли Рисс маъносидаги чекли вариацияли фазоларда глобал Липшиц-Немицки операторларини тавсифлаш;

Баъзи функционал фазоларда “хунук” ядроли операторларнинг чегараланганлагини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти: Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазолари, ўзгарувчан кўрсаткичли чекли вариацияли фазолар, умумлашган катта Морри фазолари, Бергман проекцияси, максимал оператор, Рисс потенциал оператори ва Калдерон-Зигмунд оператори.

Тадқиқотнинг предмети: ўлчовли функциялар фазоси, чекли вариацияли функциялар фазоси, аналитик функциялар фазоси, гармоник анализнинг классик операторлари.

Тадқиқотнинг усуллари: Тадқиқот ишида функционал анализ, гармоник анализ, комплекс анализ ва ҳақиқий анализ усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

экстраполяция техникасидан фойдаланиб, ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларида Бергман проекциясининг чегараланганлигини исботланган;

ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларида баъзи операторларнинг (Бергман проекцияси, Березин алмаштиришлари ва Тёплиц оператори) чегараланганлиги исботланган;

Калдерон-Зигмунд типидаги операторлар коммутатори, шунингдек, биржинсли ҳолдаги умумлашган катта Морри фазосида потенциал операторлар коммутатори чегараланганлиги исботланган;

ўзгарувчан кўрсаткичли Рисс маъносидаги чекли вариацияли фазоларда Рисс тасвири ҳақидаги лемма исботланган;

ўзгарувчан кўрсаткичли Рисс маъносидаги чекли вариацияли фазоларда вектор ўлчовлар учун Бохнер-Лебег фазосидаги чизиқли функционаллар тасвирланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари

Киритилган янги методлар Бергман фазолари назариясини ривожлантиришга хизмат қилади. Умумлашган катта Морри фазоларини тадқиқ қилишда киритилган методлардан бу фазолардаги эллиптик тенгламаларнинг ечимларини баҳолашда қўллаш мумкин. Хунук ядроли операторларнинг чегараланганлиги борасида олинган натижалар классик операторлар учун олинган натижаларни хунук ядроли операторларнинг ядросига енгилроқ шартлар қўйилган операторларга келтириб ўрганиш имконини беради.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги. Функционал анализ, гармоник анализ ва функциялар назарияси методларидан фойдаланилган ҳамда олинган натижалар қатъий математик мулоҳазаларга асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти олинган натижалар ва методлардан операторлар назарияси ҳамда ностандарт функционал фазоларни тадқиқ этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Шунингдек, олинган натижаларнинг амалий аҳамияти ностандарт функционал фазоларнинг бевосита татбиқлари кўплиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ностандарт функционал фазолар ва операторлар назарияси бўйича олинган илмий натижалар асосида:

бирлик шарда кирититилган ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазосидаги Калдерон-Зигмунд операторининг чегараланганлигидан хорижий илмий журналларда (Complex Var. Elliptic Equ. 61, No. 8, 1090-1106 (2016), J. Math. Sci., New York 226, No. 4, 344-354 (2017), J. Funct. Spaces 2018, Article ID 8751849, 8 p. (2018)) Лебег фазоларидаги Бергман проектив операторининг чегараланганлигини исботлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши аралаш нормали ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларини киритиш, юқори ярим текисликдаги ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларини тадқиқ этиш ва ўзгарувчан кўрсаткичга қўйилган баъзи шартлар асосида фазонинг Липшиц характеристикасини топиш имконини берган;

ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазосида “осон давом эттириш” тушунчасининг киритилишидан хорижий илмий журналларда (Czech. Math. J. 70, No. 1, 187-204 (2020), Int. J. Math. Math. Sci. 2018, Article ID 1417989, 11 p. (2018), Mediterr. J. Math. 17, No. 1, Paper No. 9, 13 p. (2020)) Бергман проектив операторларининг чегараланганлигини экстраполяция усуллари ёрдамида кўрсатишда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши ўзгарувчан кўрсаткичли Фок фазоларининг баъзи структуравий хоссаларини, ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларидаги чегараланган операторларнинг баъзи синфининг компактлигини ҳамда ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларидаги композиция операторларининг компактлиги ва узлуксизлигини текшириш имконини берган;

ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларидаги баъзи операторларининг чегараланганлигидан хорижий илмий журналларда (Adv. Oper. Theory, 4, No. 4, 738-749(2019), Math. Notes 106, No. 2, 229-234 (2019), Complex Analysis and Operator Theory 13, 275–289 (2019)) комплекс текисликдаги ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазоларидаги баъзи чизиқли операторлар учун модулли тенгсизликларни ҳосил қилишда фойдаланилган. Илмий натижаларнинг қўлланилиши баъзи чизиқли операторлар учун модулли тенгсизликлар ўринли бўлса, кўрсаткичнинг ўзгармас бўлишини исботлаш ҳамда бирлик шардаги аналитик функцияларнинг ўзгарувчан кўрсаткичли Харди фазоларини киритиш ва тадқиқ этиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 9 та халқаро илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Тадқиқот мавзуси бўйича жами 15 та илмий мақла чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон

Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фан доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 14 та (Scopus базасида) мақола ва 1 та нуфузли нашриётда чоп этилган китобнинг боби сифатида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш, бешта боб, хулоса, нашр этилган ишлар ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 210 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган. Шунингдек, бу қисмда диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқотнинг мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазолари ҳақида дастлабки тушунчалар**» номли биринчи бобида ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазолари $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ ҳақида қисқа маълумотлар берилган.

«**Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси**» деб номланган иккинчи бобда ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси аниқланган ва унинг асосий хоссаларини исботланган. Классик Бергман фазоларининг аниқланишидаги усуллар ўзгарувчан ҳолда ўтмаслиги алоҳида таъкидлаш жоиз бўлган жиҳатлардан биридир. Бу муаммодан қутилиш учун ҳақиқий гармоник анализ, ўзгарувчан кўрсаткичли фазолар ва комплекс функциялар методларидан фойдаланамиз. Дастлаб, ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларини таърифлаймиз ва кўрсаткичнинг баъзи шартларида уларнинг Банах фазоси бўлишини кўрсатамиз. Фазоларнинг анизотроплиги муаммосини эса осон кенгайтириш тушунчасини киритиб ҳал этамиз ва ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларидаги аппроксимация масалаларини ечиш учун унинг баъзи хоссаларини исботлаймиз. Бергман проекциясини ўрганамиз ва экстраполяция назариясидан фойдаланиб бу проекциянинг ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси учун ҳам чегараланган бўлишини исботлаймиз. Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазосида Карлесон ўлчовини аниқлаймиз ва тавсифлаймиз. Сўнг бу структурада кўпаювчи ядронинг нормасини баҳолаймиз. Карлесон ўлчови тушунчасидан фойдаланиб ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларидаги Тёплиц операторининг чегараланганлигини тавсифлаймиз ва бу орқали Тёплиц операторининг компактлиги йўқолувчи Карлесон ўлчови тушунчаси билан тавсифланишини кўрсатамиз. Бергман проекциясининг Захарюта ва Юдович тасвиридан фойдаланиб ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларида Бергман проекциясининг (яна бир марта) чегараланганлигини кўрсатиш билан (бу усул орқали биз экстраполяция методини қўллаб бўлмайдиган Орлич ва умумлашган ўзгарувчан кўрсаткичли Морри фазоларининг чегараланганлигини исботлаш имконини беради) бобни якунлаймиз.

$A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазолари қуйидагича киритилади

$$A^{p(\cdot)}(\mathbb{D}) = \{f \text{ аналитик функция ва } \varrho_{p(\cdot)}(f) < \infty\},$$

бу ерда $\varrho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\mathbb{D}} | f(z)|^{p(z)} dA(z)$. Кўрсаткичнинг баъзи шартларида бу фазолар Банах фазоси бўлишини исботлаймиз. Шунингдек, $\gamma_a(f)(z) := f(z)$ баҳолаш функцияси учун баҳони қуйидагича оламиз:

1-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}(\mathbb{D})$ *берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир* $a \in \mathbb{D}$ *учун* γ_a *баҳолаш функцияси чегараланган. Бундан ташқари қуйидаги тенгсизликлар ўринли*

$$\frac{1}{(1-|a|)^{2/p^+}} \lesssim \| \gamma_a \| \lesssim \frac{1}{(1-|a|)^{2/p^-}}.$$

$p \in \mathbb{P}^{\log}(\mathbb{D})$ бўлганда $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ фазодаги кўпҳадларнинг зичлигини ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларидаги функциялар учун аппроксимация теоремасидан фойдаланиб исботлаш мумкин. Аппроксимация теоремаси осон кенгайиш $f_r: \frac{1+r}{2r}\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ тушунчасига асосланганки, бу тушунча қуйидагича аниқланади

$$f_r(z) := \int_{\mathbb{D}} f\,(rw)\eta_r(z-w)dA(w),$$

бу ерда $\rho\mathbb{D}$ ρ кўпайтувчили комплекс бирлик шар ва η_r эса ташувчиси $\frac{1-r}{2r}\overline{\mathbb{D}}$ бўлган C^∞ функция. $z \mapsto f_r(z)$ функция қуйидаги ажойиб хоссаларга эга: (a) $\frac{1+r}{2}\mathbb{D}$ тўпламда аналитик, (b) $r \to 1^-$ бўлганда $f_r(z) \to f(z)$ ўринли,
(c) $z \in \mathbb{D}$ ва $1/2 < r < 1$ учун $f_r(z) \lesssim Mf(z)$ ўринли, бу ерда M максимал оператор, (d) $z \in \mathbb{D}$ ва $1/2 < r < 1$, учун $f_r(z) \in A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ ҳамда $r \to 1^-$ бўлганда $\| f_r - f \|_{A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})} \to 0$ бажарилади.

P Бергман проекторининг чегараланганлигини ўрганамиз. P қуйидагича аниқланади:

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{w}z)^2} dA(w).$$

Одатда $P: L^p(\mathbb{D}) \to A^p(\mathbb{D})$ операторнинг чегараланганлиги баъзи муҳим опереторларнинг чегараланганлигини кўрсатишда қўл келувчи Шур леммасига асосланиб исботланади. Бизнинг ҳолдаги масаланинг табиатидан келиб чиқиб, Беколли ва Бонамининг классик натижаси ва Рубио де Франсианинг экстраполяция ҳақидаги теоремасидан фойдаланиш методини ишлаб чиқдик.

2-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *берилган бўлсин.* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *фазони* $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *фазога акслантирувчи P Бергман проекцияси чегараланган.*

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

3-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *берилган бўлсин. У ҳолда* $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *фазога қўшма фазо* $A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})$ *билан аниқланиши мумкин, бу ерда* $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$. *Ҳар бир* $\phi \in (A^{p(\cdot)}(\mathbb{D}))^*$ *функционал* $\| \phi \| \asymp \| g \|_{A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})}$ *шартни қаноатлантирувчи бирор* $g \in A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})$ *учун қуйидаги ягона тасвирга эга*

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\,(z)\overline{g(z)}dA(z).$$

Берилган $\alpha > -1$ учун α-Березин алмаштиришини ҳар бир $f \in L^1(\mathbb{D})$ да қуйидагича аниқлаймиз

$$B_\alpha f(z) := (\alpha + 1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1 - |z|^2)^{\alpha+2}(1 - |w|^2)^\alpha}{|1 - \bar{w}z|^{4+2\alpha}} f(w)dA(w).$$

Ўзгарувчан кўрсаткичли фазоларда α-Березин алмаштиришининг чегараланганлигини ўрганамиз.

4-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *берилган бўлсин. У ҳолда* $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *фазосидаги* α*-Березин алмаштириши чегараланган.*

Шунингдек, қуйидаги ядро учун юқори чегарани ҳам беришимиз мумкин

$$k_a(z) = \frac{1}{(1 - \bar{a}z)^2}, \qquad a, z \in \mathbb{D}.$$

5-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *бўлсин. У ҳолда шундай* $C > 0$ *ўзгармас сон мавжудки, ҳар бир* $a \in \mathbb{D}$ *учун*

$$\| k_a^{2/p(a)} \|_{A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})} \leq \frac{C}{(1 - |a|^2)^{2/p(a)}}.$$

тенгсизлик ўринли.

Қуйидаги натижа γ_z функционалнинг нормаси учун аввал олинган баҳолашларни яхшилашга хизмат қиалди.

6-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир* $z \in \mathbb{D}$ *учун қуйидаги ўринли*

$$\| \gamma_z \| \asymp \frac{1}{(1 - |z|^2)^{2/p(z)}}.$$

Бу натижа $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ қўшма фазодан ва ҳар бир $f \in A^1(\mathbb{D})$ учун k_z, $a \in \mathbb{D}$ функционалнинг $f(z) = \int_{\mathbb{D}} f\,(w)\overline{k_z(w)}dA(w)$ хоссасидан фойдаланиб, унинг нормасини баҳолаш имконини беради. Шундай қилиб, $\| \gamma_z \| \asymp \| k_z \|_{A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})}$ эквивалентликнинг бажарилиши келиб чиқади. Бу натижа қуйидаги теоремада ўз аксини топган.

7-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир* $z \in \mathbb{D}$ *учун*

$$\| k_z \|_{A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})} \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{2(1-1/p(z))}}$$

ўринли.

Ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазолари учун мослаштирилган Карлесон ўлчовини киритамиз. Агар $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D},\mu)$ фазода узлуксиз ётса, яъни $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{D},\mu)$ у ҳолда мусбат μ Борел ўлчовига ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси учун Карлесон ўлчови дейилади.

8-теорема. *Айтайлик $\mathbb{D}$ шарда чекли, мусбат μ Борел ўлчови ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ берилган бўлсин. У ҳолда μ ўлчов $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ фазода Карлесон ўлчови бўлиши учун шундай $C > 0$ ва $0 < r < 1$ ўзгармас сонлари топилиб, ҳар бир $a \in \mathbb{D}$ учун $\mu(D_r(a)) \leq C|D_r(a)|$ ўринли бўлиши зарур ва етарли, бу ерда $D_r(a)$ псевдо-гиперболик шар.*

Агар $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D},\mu)$ фазода компакт ётса, у ҳолда мусбат μ Борел ўлчовига ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоси учун йўқолувчи Карлесон ўлчови дейилади.

9-теорема. *Айтайлик $\mathbb{D}$ шарда чекли, мусбат μ Борел ўлчови ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ берилган бўлсин. У ҳолда μ ўлчов $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ фазода Карлесон ўлчови бўлиши учун шундай ҳар бир $0 < r < 1$ сон олинганда ҳам$|a| \to 1^-$ бўлганда $\frac{\mu(D_r(a))}{|D_r(a)|} \to 0$ ўринли бўлиши зарур ва етарли.*

Берилган $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$ функция учун кўпҳадлар тўпламида T_φ Тёплиц операторини қуйидагича аниқлаймиз

$$T_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) k_w(z) \varphi(w) dA(w).$$

Карлесон ўлчови ёрдамида Тёплиц операторининг чегараланганлигини тавсифловчи қуйидаги муҳим теорема исботланди.

10-теорема. *Айтайлик $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ ва $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$ берилган бўлсин. Мусбат μ ўлчов $d\mu = \varphi dA$ тенгликни қаноатлантирсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар тенг кучли:*

1. *T_φ оператор $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ да чегараланган;*
2. *$B\varphi$ оператор $\mathbb{D}$ шарда чегараланган;*
3. *μ ўлчов $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ учун Карлесон ўлчовидир.*

Юқоридаги теоремадаги метод орқали Тёплиц операторининг компактлигини йўқолувчи Карлесон ўлчови ёрдамида тавсифлаш мумкин.

11-теорема. *Айтайлик $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ ва $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$ берилган бўлсин. Мусбат μ ўлчов $d\mu = \varphi dA$ тенгликни қаноатлантирсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар тенг кучли:*

1. *T_φ оператор $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ да компакт.*
2. *$|z| \to 1^-$ бўлганда $B\varphi(z) \to 0$ ўринли.*
3. *μ ўлчов $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ да Карлесон ўлчови.*

Шунингдек, Бергман проекцияси тасвирининг Калдерон-Зигмунд сингуляр оператори ёрдамидаги ифодаси ва Калдерон-Зигмунд сингуляр операторининг чегаралланганлигидан фойдаланиб Бергман проекциясининг чегаралланганлигини исботлаймиз:

$$Pf(z) = K_1 f(z) + K_2 f(z),$$

бу ерда K_1 қуйидаги интеграл оператор

$$K_1(z,w) = \left(\chi_{D\left(\frac{0,1}{2}\right)}(z) + \chi_{D(0,1)\backslash D\left(\frac{0,1}{2}\right)}(z)\chi_{D\left(\frac{0,1}{2}\right)}(w)\right) k_w(z),$$

ва

$$K_2 f(z) = \chi_{D(0,1)\backslash D(0,1/2)}(z)\int_{D(0,2)\backslash D(0,1)} \frac{\Omega\left(\frac{\zeta - z}{|\zeta - z|}\right)}{|\zeta - z|^2} g(\zeta) dA(\zeta),$$

$$g(\zeta) = Qf(\zeta)\frac{\zeta^2}{|\zeta|^4},\ \ \zeta \in D_2.$$

Ушбу бобни баъзи изоҳлар ва бўлимгдаги натижалар олинган ишларга иқтибос билан якунлаймиз. Натижалар [5, 6], [7] ва [8] ишларда ўз ифодасини топган.

«**Морри типидаги ностандарт фазолар**» деб номланган учинчи боб (баъзан умумлашган катта Морри фазолари деб ҳам аталувчи) катта Морри фазоларига киришга бағишланган бўлиб, фазони аниқлашдаги ҳар икки параметр катталаштириш жараёнининг предмети ҳисобланади. Морри фазоларидаги баъзи операторларнинг чегараланганлиги ҳақидаги теоремаларнинг янги киритилган фазолардаги муқобили бўлган метатеоремалар исботланди. Шунингдек, ўлчов аниқланган квазиметрик фазоларда Харди-Литтлвуд максимал оператори, Калдерон-Зигмунд оператори ва Рисс типидаги потенциал операторларнинг чегараланганлиги исботланди.

Берилган $1 \leq p < \infty$ ва $0 \leq \lambda < 1$ учун $L^{p,\lambda}(\Omega)$ ўлчовли функцияларнинг Морри фазоси қуйидагича аниқланади

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r\leqslant d}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|^\lambda}\int_{\Omega(x,r)} |f(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

бу ерда d = diam Ω ва $\Omega(x,r) := \Omega \cap B(x,r)$. Берилган $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < \infty$, ва $0 \leq \lambda < 1$ учун қуйидаги функционални қараймиз:

$$\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s) := \sup_{0<\varepsilon<s} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \| f \|_{L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)},$$

бу ерда $0 < s < \min\{p-1, \lambda/\alpha\}$ (бнуда қулайлик учун $\alpha = 0$ бўлганда ҳар қандай λ сонда $\lambda/\alpha := \infty$ деб оламиз).

Айтайлик $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$, ва $0 \leq \lambda < 1$ бўлсин. $L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)$ билан чекли нормага эга ўлчовли функциялар фазосини белгилаймиз:

$$\| f \|_{L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)}: \quad = \Phi^{p,\lambda}_{\theta,\alpha}(f, s_{\max}), \qquad s_{\max} = \min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}.$$

$L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)$ фазони *катта Морри фазоси* деб атаймиз.

Берилган $p, \theta, \lambda, \alpha, f$ параметрлар учун $s \mapsto \Phi^{p,\lambda}_{\theta,\alpha}(f, s)$ камаймайдиган функция. $\sigma < s$ бўлганда $\Phi^{p,\lambda}_{\theta,\alpha}(f, s)$ ни $\Phi^{p,\lambda}_{\theta,\alpha}(f, \sigma)$ орқали қандай баҳоланишини қуйидаги леммада берамиз.

13-лемма. *Айтайлик Ω чегараланган очиқ тўплам бўлсин.* $0 < \sigma < s < min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}$ *учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\Phi^{p,\lambda}_{\theta,\alpha}(f, s) \leq C s^{\frac{\theta}{p-s}} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \Phi^{p,\lambda}_{\theta,\alpha}(f, \sigma),$$

бу ерда C сони n сонига, $p, \lambda, \theta, \alpha$ параметрларга ва d диаметрга боғлиқ бўлиб,, $f, s,$ ва σ ларга боғлиқ эмас.

Бу леммадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

14-лемма. $0 < \sigma < min\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\}$ *учун қуйидаги тенгсизлик бажарилади*

$$\| f \|_{L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)} \leq C \frac{\Phi^{p,\theta}_{\lambda,\alpha}(f, \sigma)}{\sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}}},$$

бу ерда C сони n сонига, $p, \lambda, \theta, \alpha$ параметрларга ва d диаметрга боғлиқ бўлиб,, f ва σ ларга боғлиқ эмас.

Қуйидаги лемма кенг татбиқ этилувчи муҳим натижалардан бири ҳисобланади.

15-лемма. *Айтайлик U оператор (чизиқли бўлиши шарт эмас!) $L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)$ Морри фазосида чегараланган бўлсин, яъни* $0 < \sigma < min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}$ *сон ва етарлича кичик $\varepsilon \in (0, \sigma)$ сонлар учун*

$$\| Uf \|_{L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)} \leq C_{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon} \| f \|_{L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)}$$

тенгсизлик ўринли. Агар $sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon} < \infty$ бажарилса, у ҳолда U оператор $L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)$ катта Морри фазосида ҳам чегараланган, яъни

$$\| Uf \|_{L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)} \leq C \| f \|_{L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)}$$

ва

$$C = \frac{C_0}{\sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon},$$

бу ерда C_0 сони $n, p, \lambda, \theta, \alpha$ ва d сонларига боғлиқ, лекин σ га боғлиқ эмас.

Юқоридаги натижа ва классик Морри фазосидаги чегараланганлик ҳақидаги маълум натижаларга асосланиб қуйидаги теоремани ёзиш мумкин.

16-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$ *ва* $0 \leq \lambda < 1$ *берилган бўлсин. У ҳолда Харди-Литтлвуд максимал оператори $L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)$ катта Морри фазосида чегараланган бўлади.*

17-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ *ва* $0 < \lambda < 1$ *берилган бўлсин. У ҳолда стандарт ядроли T Калдерон-Зигмунд оператори* $L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)$ *катта Морри фазосида чегараланган бўлади.*

Биржинслилик типи бўйича ҳам катта Морри фазосини киритамиз. Бунинг учун баъзи таърифларни бериб ўтиш керак. $X := (X, d, \mu)$ шундай μ тўла ўлчов берилган топологик фазо бўлсинки, ташувчиси компакт бўлган узлуксиз функциялар фазоси $L^1(X, \mu)$ фазода зич ва d эса квазиметрика, яъни $X \times X$ даги номанфий ҳақиқий қийматли d функцияки, қуйидаги хоссаларга эга:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. ҳар бир $x, y, z \in X$ учун шундай $C_t > 0$ ўзгармас сон мавжудки, $d(x, y) \leq C_t[d(x, z) + d(z, y)]$ ўринли;
3. ҳар бир $x, y \in X$ учун шундай $C_s > 0$ сон мавжудки, $d(x, y) \leq C_s \cdot d(y, x)$, ўринли.

X нинг $B(x, r)$ d-шарларини ўзида сақловчи қисм тўпламларининг σ-алгебрасида μ ўлчов берилган бўлсин. Ҳар қандай шар чекли ўлчовга эга деб оламиз, яъни $\mu B(x, r) < \infty$ ва ҳар бир $x \in X$ нинг ихтиёрий V атрофи учун шундай $r > 0$ сон топиладики, $B(x, r) \subset V$ ўринли. Агар x ва r ларга боғлиқ бўлмаган $\alpha, \beta, c > 0$ сонлар топилиб, $\mu B(x, r) \geq cr^{\alpha}$ бажарилса, μ ўлчовни *қуйи α-Алфорс регуляр*, агар $\mu B(x, r) \leq cr^{\beta}$ бажарилса, бу ўлчовни *юқори β-Алфорс регуляр дейилади*. Агар $\alpha = \beta$ бўлса, μ ўлчовга *α-Алфорс регуляр* дейилади.

Агар μ ўлчов иккиланганлик шартини қаноатлантирса, (X, d, μ) учликка биржинсли типдаги фазо дейилади ва қисқача БТФ каби ёзилади.

$1 \leq p < \infty$ ва $0 \leq \lambda < 1$ учун $L^{p,\lambda}(X, \mu)$ Морри фазоси ўлчовли функциялар фазоси сифатида қуйидагича киритилади

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(X,\mu)} := \sup_{\substack{x \in X \\ 0<r<d_X}} \left(\frac{1}{\mu B(x, r)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Баъзан, юқоридаги Морри фазосининг модификациясини ҳам қараймиз, яъни $\mathcal{L}^{p,\lambda}(X, \mu)$ фазо қуйидагича аниқланади

$$\| f \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(X,\mu)} := \sup_{\substack{x \in X \\ 0<r<d_X}} \left(\frac{1}{r^{\gamma\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Биз ҳар доим μ ўлчовни юқори γ-Алфорс регуляри деб оламиз.

БТФ сифатида катта Морри фазоси киритилганидан кейин Евклид фазоларида бўлгани каби редукция леммалари БТФ учун ҳам ўринли эканлигини кўрсатамиз. $[0, \ell]$ да берилган ҳақиқий қийматли номанфий φ функция учун шундай $C \geq 0$ сон топилиб, барча $x \leq y$ қийматларда $\varphi(x) \leq C\varphi(y)$ ўринли бўлса, бу функцияга *деярли ўсувчи* дейилади. Қуйидаги функционални қараймиз

$$\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s) := \sup_{0<\varepsilon<s} \varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \parallel f \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-A(\varepsilon)}(X,\mu)}.$$

18-таъриф. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ *сонлар берилган бўлиб* φ *мусбат чегараланган функция* $lim_{t\to 0+}\varphi(t) = 0$ *шартни қаноатлантирсин. Шунингдек,* A *ҳақиқий қийматли камаймайдиган номанфий функция учун* $lim_{x\to 0+}A(x) = 0$ *ўринли бўлсин.* $L_{\varphi,A}^{p),\lambda)}(X,\mu)$ *билан ўлчовли функцияларнинг шундай фазосини белгилаймизки, улар қуйидаги чекли нормага эга*

$$\parallel f \parallel_{L_{\varphi,A}^{p),\lambda)}(X)} := \Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s_{max}), \quad s_{max} = min\{p-1,a\}$$

бу ерда $a = sup\{x > 0: A(x) \leq \lambda\}$.

Берилган $p,\theta,\lambda,\alpha,f$ параметрлар учун $s \mapsto \Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s)$ камаймайдигпн функция. $\sigma < s$ бўлганда $\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s)$ ни $\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,\sigma)$ орқали қандай баҳоланишини қуйидаги леммада берамиз.

19-лемма. $0 < \sigma < s < s_{max}$ *учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s) \leq C\varphi(\sigma)^{-\frac{1}{p-\sigma}}\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,\sigma),$$

бу ерда C *сони* γ *сонига,* p,λ,φ,A *параметрларга ва* d_X *диаметрга боғлиқ, лекин* $f,s,$ *ва* σ*ларга боғлиқ эмас.*

20-лемма. $0 < \sigma < s_{max}$, *учун Таъриф 18 даги норма учун қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\parallel f \parallel_{L_{\varphi,A}^{p),\lambda)}(X)} \leq C\frac{\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,\sigma)}{\varphi(\sigma)^{\frac{1}{p-\sigma}}},$$

бу ерда C *сони* $\gamma,p,\lambda,\varphi,A$ *ва* d_X *ларга боғлиқ, лекин* f *ва* σ *ларга боғлиқ эмас.*

Чегараланганлиқ ҳақидаги қуйидаги натижа олинди.

21-лемма. *Айтайлик* U *оператор (қисман чизиқли бўлиши шарт эмас!) Морри фазосида чегараланган бўлсин, яъни* $0 < \sigma < s_{max}$ *сон ва етарлича кичик* $\varepsilon \in (0,\sigma]$ *сонлар учун*

$$\parallel Uf \parallel_{L^{q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)}(X)} \leq C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)} \parallel f \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon)}(X)}$$

тенгсизлик ўринли.

Агар

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)} < \infty$$

ва

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} \frac{\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}}{\varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}} < \infty,$$

бажарилса, у ҳолда бу оператор катта Морри фазосида ҳам чегараланган, яъни

$$\parallel Uf \parallel_{L_{\psi,A_2}^{q),\lambda)}(X)} \leq C \parallel f \parallel_{L_{\varphi,A_1}^{p),\lambda)}(X)},$$

$$C = \frac{C_0}{\varphi(\sigma)^{\frac{1}{p-\sigma}}} \mathop{sup}_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)},$$

бу ерда C_0 *сони* $\gamma, p, \lambda, \varphi, A$ *ва* d_X *сонларига боғлиқ, лекин* σ *ва* f *га боғлиқ эмас.*

21-лемманинг натижаси сифатида Калдерон-Зигмунд оператори ва Харди-Литтлвуд максимал операторининг чегараланганлигини исботлаймиз.

22-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$ *ва* $0 \leq \lambda < 1$ *берилган бўлсин. У ҳолда* $L^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)$ *дан* $L^{p),\lambda)}_{\psi,A}(X,\mu)$ *га акслантирувчи Харди-Литтлвуд максимал оператори чегараланган бўлиши учун етарлича кичик* σ *сони топилиб,* $sup_{0<\varepsilon<\sigma}\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}/\varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$ *бажарилиши зарур ва етарли.*

23-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$ *ва* $0 < \lambda < 1$ *берилган бўлсин. У ҳолда* $L^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)$ *катта Морри фазосидаги Т Калдерон-Зигмунд операторининг чегараланган бўлади.*

Катта Морри фазосининг модификациясини қуйидагича аниқлаймиз

$$\parallel f \parallel_{\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)} := \sup_{0<\varepsilon<s_{\max}} \varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \parallel f \parallel_{\mathcal{L}^{p-\varepsilon,\lambda-A(\varepsilon)}(X,\mu)}$$

бу ерда $s_{\max} = \min\{p-1, a\}$ ва $a = \sup\{x > 0: A(x) \leq \lambda\}$. Агар θ мусбат сон учун $\varphi(\varepsilon) := \varepsilon^{\theta}$ бўлса, $\parallel f \parallel_{\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)} =: \parallel f \parallel_{\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta,A}(X,\mu)}$ деб оламиз.

24-таъриф. *Кичик* δ *учун* $(0,\delta]$ *қуйидаги функцияларни аниқлаймиз:*

$$\bar{\phi}(x) := p + \frac{\gamma(x-q)(1-\lambda+A_2(x))}{\gamma(1-\lambda+A_2(x)) - \alpha(x-q)},$$

$$\tilde{\phi}(x) := q - \frac{\gamma(p-x)(1-\lambda+A_1(x))}{\gamma(1-\lambda+A_1(x)) - \alpha(p-x)}$$

$$\bar{A}(x) = 1 - \frac{\alpha(x-q)}{\gamma\big(1-\lambda+A_2(x)\big)}, \qquad \tilde{A}(x) = \frac{1-\lambda+A_1(\eta)}{\gamma(1-\lambda+A_1(\eta)) - (p-\eta)\alpha}$$

$$\phi(x) := \bar{\phi}(x)^{\bar{A}(x)}, \quad \Phi(x) := \tilde{\phi}(x)^{\tilde{A}(x)}, \quad \psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon^{\theta_1}), \quad \Psi(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon^{\theta_1}),$$

бу ерда $\theta_1 > 0$.

Энди Рисс потенциал операторининг чегараланганлиги ҳақидаги натижани келтириб ўтамиз.

25-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < ((1-\lambda)\gamma)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/((1-\lambda)\gamma)$ *берилган бўлсин. Шунингдек,* $\theta_1 > 0$ *ва* $\theta_2 \geq \theta_1\left[1 + \frac{\alpha q}{(1-\lambda)\gamma}\right]$ *берилган.* A_1 *ва* A_2 *функциялар мос равишда* $(0, p-1]$ *ва* $(0, q-1]$ *интервалларда аниқланган номанфий узлуксиз функциялар бўлиб, қуйидаги хоссаларга эга бўлсин:*

1. *Бирор* $\delta > 0$ *сон учун* $A_2 \in C^1((0,\delta])$;
2. $lim_{x\to 0+} A_2(x) = 0$;
3. $0 \leqslant B := \lim\limits_{x\to 0+} \frac{dA_2}{dx}(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$

4. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *бу ерда* $\bar{\phi}^{-1}$ *бирор* $\delta > 0$ *сон учун* $(0,\delta]$ *интервалдаги* $\bar{\phi}$ *функциянинг тескариси.*

У ҳолда I^α *Рисс потенциал оператори* $\left(\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$*-чегараланган.*

26-натижа. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1 - \alpha p$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ *берилган бўлсин. Шунингдек,* $\theta_1 > 0$ *ва* $\theta_2 > \theta_1(1 + \frac{\alpha q}{1-\lambda})$ *берилган.Агар* $\alpha < (1-\lambda)^2/(\alpha q^2)$ *шартни қаноатлантирувчи* α *номанфий сон учун* $A_2(x) = \alpha x$ *ва* $A_1(x) = \alpha\bar{\phi}^{-1}(x)$ *бўлса, у ҳолда* I^α *оператор* $\left(\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$*-чегараланган.*

27-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1 - \alpha p$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$ *берилган бўлсин. Шунингдек* $\theta_1 > 0$ *ва* $\theta_2 > \theta_1(1 + \frac{\alpha q}{1-\lambda})$ *берилган.* A_1 *ва* A_2 *функциялар мос равишда* $(0, p-1]$ *ва* $(0, q-1]$ *интерваллардаги номанфий узлуксиз функциялар бўлиб, қуйидаги хоссаларга эга бўлсин:*

1. *Бирор* $\delta > 0$ *учун* $A_1 \in C^1((0,\delta])$*;*
2. $lim_{x\to 0+} A_1(x) = 0$;
3. $B_1 := lim_{x\to 0+} \frac{dA_1}{dx}(x) \geq 0$;
4. *Бирор* $\delta > 0$ *учун* $(0,\delta]$ *интервалда* $A_2(x) = A_1(\tilde{\phi}^{-1}(x))$ *ўринли.*

У ҳолда I^α *Рисс потенциал оператори* $\left(\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$*-чегараланган.*

Ўлчов ёрдамида аниқланган Рисс типидаги потенциал оператор деганда қуйидаги операторни тушунамиз

$$I^\alpha_\mu f(x) := \int_X \frac{f(y)}{\mu(x, d(x,y))^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

бу ерда $0 < \alpha < 1$.

Бундай операторлар учун қуйидаги натижа олинди.

28-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < (1-\lambda)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/(1-\lambda)$ *берилган бўлсин. Шунингдек,* $\theta_1 > 0$ *ва* $\theta_2 \geq \theta_1\left(1 + \frac{\alpha q}{1-\lambda}\right)$ *берилган.* A_1 *ва* A_2 *функциялар мос равишда* $(0, p-1]$ *ва* $(0, q-1]$ *интерваллардаги номанфий узлуксиз функциялар бўлиб, қуйидаги хоссаларга эга бўлсин:*

1. *Бирор* $\delta > 0$ *учун* $A_2 \in C^1((0,\delta])$;
2. $lim_{x\to 0+} A_2(x) = 0$;
3. $0 \leqslant B := \lim_{x\to 0+} \frac{d}{dx} A_2(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
4. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *бу ерда* $\bar{\phi}^{-1}$ *бирор* $\delta > 0$ *сон учун* $(0,\delta]$ *интервалдаги* $\bar{\phi}$ *функциянинг тескариси.*

У ҳолда I^{α} *Рисс потенциал оператори* $\left(L^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) - L^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$-*чегараланган.*

Шунингдек, биз поетнциал операторларни биржинсли бўлмаган фазоларда ҳам ўрганамиз. (X,d,μ) шундай μ тўла ўлчов берилган топологик фазо бўлсинки, ташувчиси компакт бўлган узлуксиз функциялар фазоси $L^1(X,\mu)$ фазода зич ва d квазиметрика эса стандарт шартларни қаноатлантирсин. Биз ҳар доим $d_X \equiv \mathrm{diam}(X) < \infty$ деб оламиз. Шунингдек, μ ўлчов иккиланганлик шартини қаноатлантирмайди деб ҳисоблаймиз!

Қуйидаги операторни қараймиз

$$(K_{\alpha}f)(x) = \int_X \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y),$$

бу ерда $0 < \alpha < 1$.

Шунингдек, бизга X да қуйидагича модификацияланган максимал оператор керак бўлади

$$(\widetilde{M}f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu B(x_0, N_0 r)} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y),$$

бу ерда $N_0 = C_t(1 + 2C_s)$ ҳамда C_s ва C_t ўзгармаслар d квазиметриканинг аниқланишидаги сонлардир. Бирор b ўзгармас сонни оламиз. $B \equiv B(x,r)$ шар учун bB орқали $B(x,br)$ шарни ёзамиз.

Бизнинг тадқиқотларимизда самарали бўлган модификацияланган Морри фазоларини аниқлаймиз.

29-таъриф. *Айтайлик* $1 < p < \infty$ *ва* $0 \leq \lambda < 1$ *берилган бўлсин. Шунингдек, мусбат ўзгармас* a *сони берилган.* $L^{p,\lambda}(X,\mu)_a$ *билан норма қуйидагича аниқланган модификацияланган Морри фазосини белгилаймиз*

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(X,\mu)_a} = \sup_{x\in X, 0<r} \left(\frac{1}{\mu(aB)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu)_{N_0}$фазони $L^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)_{N_0\overline{a}}$ фазога акслантирувчи K_{α} операторнинг чегараланганлигини ўрганамиз. Бу ерда $L^{p),\lambda)}_{\theta,A}(X,\mu)_a$ фазо қуйидаги норма билан аниқланади

$$\| f \|_{L^{p),\lambda)}_{\theta,A}(X,\mu)_a} = \sup_{0<\varepsilon\leq p-1} \sup_{x,r} \left[\frac{\varepsilon^{\theta}}{\mu B(x,ar)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

30-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < (1-\lambda)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/(1-\lambda)$ *берилган бўлсин. Шунингдек,* $\theta_1 > 0$ *ва* $\theta_2 \geq \theta_1(1 + \alpha q/(1-\lambda))$ *берилган.* A_1 *ва* A_2 *функциялар мос равишда* $(0, p-1]$ *ва* $(0, q-1]$ *интервалларадаги номанфий узлуксиз функциялар бўлиб, қуйидаги хоссаларга эга бўлсин:*

1. *Бирор* $\delta > 0$ *учун* $A_2 \in C^1((0,\delta])$;
2. $lim_{x\to 0+} A_2(x) = 0$;

3. $0 \leqslant B := \lim\limits_{x \to 0+} \frac{d}{dx} A_2(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
4. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *бу ерда* $\bar{\phi}^{-1}$ *бирор* $\delta > 0$ *сон учун* $(0, \delta]$ *интервалдаги* $\bar{\phi}$ *функциянинг тескариси*.

У ҳолда K^{α} *потенциал оператор* $\left(L^{p),\lambda)}_{\theta_1, A_1}(X, \mu)_{N_0} \to L^{q),\lambda)}_{\theta_2, A_2}(X, \mu)_{N_0 \overline{a}}\right)$-*чегараланган.*

31-лемма. *Uва Λ операторлар (қисман чизиқли бўлиши шарт эмас) Морри фазосида $0 < \sigma < s_{max}$ учун ихтиёрий етарлича кичик $\varepsilon \in (0, \sigma]$ сон олинганда ҳам қуйидаги муносабатни қаноатлантирсин*

$$\| Uf \|_{L^{q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)}(X)} \leq C_{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon), q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)} \| \Lambda f \|_{L^{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon)}(X)}.$$

Агар

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon), q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)} < \infty$$

ва

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} \frac{\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}}{\varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}} < \infty,$$

ўринли бўлса, у ҳолда катта Морри фазосида қуйидаги муносабатлар ўринли

$$\| Uf \|_{L^{q),\lambda)}_{\psi, A_2}(X)} \leq C \| \Lambda f \|_{L^{p),\lambda)}_{\varphi, A_1}(X)}$$

$$C = \frac{C_0}{\varphi(\sigma)^{\frac{1}{p-\sigma}}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon), q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)},$$

бу ерда C_0 сони $\gamma, p, \lambda, \varphi, A$ ва d_X ларга боғлиқ, лекин σ ва fга боғлиқ эмас.

$\mathcal{D}(X)$ билан барча чегараланган функциялар тўпламини белгилаймиз.

32-теорема. *Айтайлик $1 < p < \infty$, $\theta > 0$ ва $0 < \lambda < 1$ берилган бўлсин. Шунингдек, Т Калдерон-Зигмунд оператори ва $b \in BMO(X)$ берилган. У ҳолда $[b, T]$ коммутатор оператори $L^{p),\lambda)}_{\theta, A(\cdot)}(X, \mu) \cap \mathcal{D}(X)$ тўпламда чегараланган.*

33-теорема. *I^{α} потенциал оператор ва M максимал оператор берилган бўлсин. Шунингжек, $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < (1-\lambda)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/(1-\lambda)$, $\theta_1 > 0$ ва $\theta_2 \geq \theta_1[1 + \alpha q/(1-\lambda)]$ сонлар берилган. A_1 ва A_2 функциялар мос равишда $(0, p-1]$ ва $(0, q-1]$ интервallардаги номанфий узлуксиз функциялар бўлиб, қуйидаги хоссаларга эга бўлсин:*

1. *Бирор* $\delta > 0$ *учун* $A_2 \in C^1((0, \delta])$;
2. $lim_{x \to 0+} A_2(x) = 0$;
3. $0 \leqslant B := \lim\limits_{x \to 0+} \frac{d}{dx} A_2(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
4. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *бу ерда* $\bar{\phi}^{-1}$ *бирор* $\delta > 0$ *сон учун* $(0, \delta]$ *интервалдаги* $\bar{\phi}$ *функциянинг тескариси*.

Агар $b \in BMO(X)$ бўлса, у ҳолда $L^{p),\lambda)}_{\theta_1, A_1(\cdot)}(X, \mu)$ фазодан $L^{q),\lambda)}_{\theta_2, A_2(\cdot)}(X, \mu)$ фазога $M[b, I^{\alpha}]$ акслантириш чегараланган бўлади.

34-теорема. *Фараз қилайлик, Теорема 33 нинг барча шартлари бажарилсин. У ҳолда* $L^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1(\cdot)}(X,\mu)$ *фазодан* $L^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2(\cdot)}(X,\mu)$ *фазога* $[b,I_\alpha]$ *акслантириш чегараланган бўлади.*

$M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)$ оғирлик қўйилган катта Морри фазосини қуйидагича аниқлаймиз:

$$M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X) = \left\{f: \| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)} < \infty\right\},$$

бу ерда

$$\| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{B\subset X} \frac{1}{(w_2(B))^{\lambda}} \left(\varepsilon^{\theta} \int_B |f(x)|^{p-\varepsilon} w_1(x) d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$w_2(B) = \int_B w_2\,(x)d\mu(x)$, $\mu(X) < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < 1/p$, $\theta > 0$, w_1 ва w_2 лар эса X даги оғирлик функциялари, яъни деярли ҳамма ерда мусбат ва интегралланувчи функциялар. Энди катта Морри фазоларининг бошқа бир турини келтирамиз. Бу ҳолда оғирлик функцияларидан бири нормани аниқлашда кўпайтувчи вазифасини бажаради. Бундай фазо қуйидаги нормага нисбатан аниқланади

$$\| f \|_{\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{B\subset X} \frac{1}{(w_2(B))^{\lambda}} \left(\varepsilon^{\theta} \int_B |f(x) w_1(x)|^{p-\varepsilon} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

Агар $w_1 \equiv w_2 := w$ бўлса, у ҳолда $M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)$ (мос равишда $\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)$) фазони $M^{p),\theta,\lambda}_{w}(X)$ (мос равишда $\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w}(X)$) каби белгилаймиз.

$f: X \to \mathbb{R}$ ўлчовли функциялар синфида аниқланган қисман чизиқли T оператор қуйидаги шартни қаноатлантиради деб ҳисоблаймиз: шундай мусбат c_0 ўзгармас сони мавжудки, компакт ташувчили барча $f \in L^1(X)$ ва $x \notin \operatorname{supp} f$ учун

$$|Tf(x)| \le c_0 \int_X \frac{|f(y)|}{\mu B(x, d(x,y))} d\mu(y).$$

тенгсизлик бажарилади. Бу ҳолда биз T оператор $S(X)$ шартни қаноатлантиради деймиз.

35-теорема. *Айтайлик* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $0 < \lambda < 1/p$, $w \in A_p(X)$ *берилган бўлсин. Агар* T *оператор* $S(X)$ *шартни ва* $1 < r \le p$ *учун* $\mathcal{B}_r(X)$ *шартни қаноатлантирса, у ҳолда*

$$\| Tf \|_{M^{p),\theta,\lambda}_{w}(X)} \le C \, \| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_{w}(X)}, \quad f \in D(X)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

$0 < \alpha < 1$ бўлсин. Агар каср типли T_α қисман чизиқли оператор учун шундай мусбат C сони топилиб, компакт ташувчили барча $f \in L^1(X)$ ва ихтиёрий $x \notin \operatorname{supp} f$ лар олинганда ҳам

$$|T_\alpha f(x)| \le C \int_X \frac{f(y)}{\mu(B(x, d(x,y)))^{1-\alpha}} d\mu(y).$$

тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда бу оператор $S_\alpha(X)$ шартни қаноатлантиради дейилади.

36-таъриф. *$0<\alpha<1$ ва $1<r<1/\alpha$ берилган бўлиб, $s=\frac{r}{1-\alpha r}$ бўлсин. Агар T_α қисман чизиқли оператор учун f га боғлиқмас мусбат C сони мавжуд бўлиб, ҳар бир $w\in A_{1+\frac{s}{r'}}(X)$ оғирлик учун*

$$\parallel T_\alpha(fw^\alpha)\parallel_{L^s_w(X)}\le C\parallel f\parallel_{L^r_w(X)},\quad f\in D(X),$$

Тенгсизлик бажарилса, у ҳолда бу оператор $\mathcal{B}_{\alpha,r,s}(X)$ шартни қаноатлантиради дейилади. Шунингдек, $1<r<s<\infty$ сонлари учун T_α қисман чизиқли оператор ҳар бир $w\in A_{r,s}(X)$ оғирлик олинганда ҳам $L^r_{w^r}(X)$ фазодан $L^s_{w^s}(X)$ фазога чегараланган акслантириш бўлса, у ҳолда бу оператор $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha,r,s}(X)$ шартни қаноатлантиради дейилади.

37-теорема. *Айтайлик $0<\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$ ва $\theta>0$ берилган бўлсин. $q=\frac{p}{1-\alpha p}$ деб оламиз. Шунингдек, $r\le p$, $s\le q$ ва $\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\alpha$ шартларни бажарувчи барча (r,s) жуфтликлар учун T_α қисман чизиқли оператор $S_\alpha(X)$ ва $\mathcal{B}_{\alpha,r,s}(X)$ шартларни қаноатлантирсин. Агар $0<\lambda<1/q$ ва $w\in A_{1+q/p'}(X)$ бўлса, у ҳолда шундай $c>0$ ўзгармас сон мавжудки, барча $f\in M_w^{p),\theta,\lambda}(X)$ учун*

$$\parallel T_\alpha(fw^\alpha)\parallel_{M_w^{q),q\theta/p,\lambda}(X)}\le c\parallel f\parallel_{M_w^{p),\theta,\lambda}(X)},\quad f\in D(X)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

38-теорема. *Айтайлик $0<\alpha<1$, $1<p<1/\alpha$ ва $\theta>0$ берилган бўлсин. $q=\frac{p}{1-\alpha p}$ деб оламиз. Шунингдек, $r\le p$, $s\le q$ ва $\frac{1}{r}-\frac{1}{s}=\alpha$ шартларни бажарувчи барча (r,s) жуфтликлар учун T_α қисман чизиқли оператор $S_\alpha(X)$ ва $\mathcal{B}_{\alpha,r,s}(X)$ шартларни қаноатлантирсин. Агар $0<\lambda<1/q$ ва $w\in A_{1+q/p'}(X)$ бўлса, у ҳолда шундай $c>0$ ўзгармас сон мавжудки, барча $f\in D(X)$ учун*

$$\parallel T_\alpha f\parallel_{\mathcal{M}^{q),q\theta/p,\lambda}_{w,w^q}(X)}\le c\parallel f\parallel_{\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w,w^q}(X)}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Учинчи бобни ҳам боб бўйича баъзи изоҳлар ва натижалар чоп этилган маоқолалар рўйхатини келтириш билан якунлаймиз. Натижалар [9,10,11,12,13] ишларда ўз ифодасини топган.

«**Ўзгарувчан кўрсаткичли чекли вариацияли функциялар фазолар**» деб номланган тўртинчи боб ўзгарувчан кўрсаткичли баъзи чекли вариацияли функциялар фазоларини ўрганишга, Винер ва Рисс маъносидаги фазоларнинг структуравий хоссаларини тадқиқ қилишга бағишланган. Рисс маъносидаги чекли вариацияли фазоларда берилган глобал Липшиц-Немицки операторларининг тавсифини, шунингдек, Рисс тасвири ҳақидаги леммани исботлаймиз. Бобни B Банах фазосида Радон-Никодим теоремасини ишлатмасдан вектор ўлчов учун ўзгарувчан кўрсаткичли Рисс маъносидаги чекли вариацияли функциялар фазосидан фойдаланиб $L^{p(\cdot)}([a,b],B)$ ўзгарувчан кўрсаткичли Бохнер-Лебег фазосидаги чизиқли функционалларни тавсифлаш билан якунлаймиз.

Жоиз функция деб $p_+ < \infty$ шартни қаноатлантирувчи $p\colon [a,b] \to [1,\infty)$ функцияни тушунамиз. Фараз қилайлик p жоиз функция ва $[a,b]$ кесмада бирор $\Pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ бўлаклаш берилган бўлсин. $\mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}$ функционални қуйидагича аниқлаймиз

$$\mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}(f) = \sup_{\Pi^*_{[a,b]}} \sum_{i=1}^{n} |\, f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})} =: \mathring{\varrho}_{(a,b)}(f)$$

бу ерда $\Pi^*_{[a,b]}$ $[a,b]$ кесмадаги бўлаклаш. $\mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}$ функционал қаварик псевдо-модуляр эканлигидан нормани қуйидагича аниқлаш мумкин.

39-таъриф. *p жоиз функция бўлсин. $p(\cdot)$-чекли вариацияли функциялар фазосини қуйидагича аниқлаймиз*

$$BV^{p(\cdot)}([a,b]) = \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f(a) = 0 \quad \wedge \quad \| f \|_{BV^{p(\cdot)}(a,b)} < +\infty \right\}$$

$$\| f \|_{BV^{p(\cdot)}(a,b)} = inf\left\{ \lambda > 0 \mid \mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}.$$

Бу норма Люксембург нормаси дейилади.

$BV^{p(\cdot)}([a,b])$ $p(\cdot)$-чекли вариацияли фазонинг Банах фазо бўлишини, сепарабел эмаслигини, c_0 фазога изоморф қисм фазоси борлигини ва $q(x) \geq p(x)$ учун $BV^{p(\cdot)}[a,b] \hookrightarrow BV^{q(\cdot)}([a,b])$ эканлигини исботлаймиз.

40-теорема. $BV^{p(\cdot)}([a,b])$ *фазодаги ҳар қандай кетма-кетлик ўзгарувчан вариацияда текис чегараланган бўлади ва* $f \in BV^{p(\cdot)}([a,b])$ *функцияга ҳар бир нуқтада яқинлашувчи қисмий кетма-кетликка эга.*

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ функциянинг $p(\cdot)$-*узлуксизлик модули* деб қуйидаги функцияни тушунамиз

$$\omega^{p(\cdot)}_{\delta}(f) = \sup_{\Pi^*_{\delta}} \sum_{i=1}^{n} |\, f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}$$

бу ерда Π^*_{δ} $[a,b]$ кесмадаги узунлиги δ дан ошмайдиган бўлаклаш. Агар $f \in BV^{p(\cdot)}([a,b])$ функция йўқолувчи шартни, яъни $\lim_{\delta\to 0}\omega^{p(\cdot)}_{\delta}(f) = 0$ қаноатлантирса, f функцияга $p(\cdot)$-*абсолют узлуксиз* дейилади. Барча $p(\cdot)$-*абсолют узлуксиз функциялар* фазосини $C^{p(\cdot)}([a,b])$ каби белгилаймиз. Агар p жоиз функция бўлса, у ҳолда $C^{p(\cdot)}([a,b])$ фазо қуйидаги хоссаларга эаг бўлиши исботланган:

- $BV^{p(\cdot)}([a,b])$ фазонинг ёпиқ қисм фазоси;
- Сепаребел фазо.

Рисс маъносидаги ўзгарувчан кўрсаткичли чакли вариацияли фазоларни аниқлашга тайёрмиз.

41-таъриф. $[a,b]$ *кесмада* $\Pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ *бўлаклаш ва* p *жоиз функция берилган бўлсин.* $\sigma^{p(\cdot)}_{[a,b]}, \mathfrak{V}^{p(\cdot)}_{[a,b]} : \mathbb{R}^{[a,b]} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *функционалларни қуйидагича аниқлаймиз*

$$\sigma^{p(\cdot)}_{[a,b]}\left(f, \Pi^*_{[a,b]}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{(t_i - t_{i-1})^{p(x_{i-1})-1}}, \quad \mathfrak{V}^{p(\cdot)}_{[a,b]}(f) = \sup_{\Pi^*_{[a,b]}} \sigma^{p(\cdot)}_{[a,b]}\left(f, \Pi^*_{[a,b]}\right)$$

бу ерда $\Pi^*_{[a,b]}$ $[a,b]$ *интервалдаги шундай бўлаклашки, бу бўлаклашга ҳар бир* i *учун* $t_i \leq x_i \leq t_{i+1}$ *шартни қаноатлантирувчи чекли* $x_0, \ldots, x_{n-1}$ *кетма-кетлик ҳам киради. Рисс маъносидаги чекли* $p(\cdot)$ *вариацияли функциялар фазосини* $\boldsymbol{RBV}^{p(\cdot)}([a,b]) := \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} : \mathfrak{V}^{p(\cdot)}_{[a,b]}(f) < \infty\}$ *каби белгилаймиз.*

Агар p функция $p(\cdot)$-жоиз функция бўлса, $\mathfrak{V}^{p(\cdot)}_{[a,b]}$ нинг қаварик псевдомодуляр эканлигидан $RBV^{p(\cdot)}([a,b]) := \mathbf{RBV}^{p(\cdot)}([a,b])/\mathcal{C}$ фактор фазода норма аниқлаш мумкинлиги келиб чиқади. Бунда $\mathcal{C}$ барча ўзгармас функциялар фазоси.

$$\| f \|_{RBV^{p(\cdot)}([a,b])} = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \mathfrak{V}^{p(\cdot)}_{[a,b]}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}.$$

$RBV^{q(\cdot)}([a,b])$ Банах фазоси эканлиги исботланди ва $p(x) \leq q(x)$ учун $RBV^{q(\cdot)}([a,b]) \hookrightarrow RBV^{p(\cdot)}([a,b])$ ўринлилиги кўрсатилди. Шунингдек, $\mathrm{Lip}([a,b]) \subseteq RBV^{p(\cdot)}([a,b]) \subseteq AC([a,b])$ ҳам ўринли. Бундан ташқари $||| \cdot |||$ $:= \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{RBV^{p(\cdot)}}$ нормага нисбатан $(RBV^{q(\cdot)}([a,b]), ||| \cdot |||)$ Банах алгебраси бўлади.

Рисс нормасини функция ҳосиласининг $L^p(\cdot)$-нормаси билан боғловчи Рисс типидаги теоремани исботлаймиз.

42-теорема. $p \in \mathbb{P}^{log}([a,b])$ *берилган бўлсин. Агар* $f \in AC([a,b])$ *ва* $f' \in L^{p(\cdot)}([a,b])$ *бўлса, у ҳолда* $f \in RBV^{p(\cdot)}([a,b])$. *Шунингдек, қуйидаги ўринли*

$$\| f \|_{RBV^{p(\cdot)}([a,b])} \lesssim \| f' \|_{L^{p(\cdot)}([a,b])}.$$

43-теорема. $f \in RBV^{p(\cdot)}([a,b])$ *ва* $p \in C[a,b]$ *берилган бўлсин. У ҳолда* $f' \in L^{p(\cdot)}([a,b])$ *ва*

$$\mathfrak{V}^{p(\cdot)}_{[a,b]}(f) \geq \int_a^b |f'(t)|^{p(t)} dt,$$

$$\| f' \|_{L^{p(\cdot)}([a,b])} \lesssim \| f \|_{RBV^{p(\cdot)}([a,b])}$$

ўринли бўлади.

Суперпозиция оператори деб ҳам номланувчи Немицки операторини киритамиз. $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функция шундайки, I даги барча t лар учун $\xi \mapsto f(t,\xi)$ узлуксиз функция бўлади. Барча $t \in I$ ва $\varphi: I \to \mathbb{R}$ учун $(F_f\varphi)(t) = f(t, \varphi(t))$ каби аниқланган F_f операторга f асосли Немицки оператори дейилади.

Чекли вариацияли функцияларнинг Рисс фазоларида таъсир қилувчи Немицки операторларини тавсифловчи теоремани исботлаймиз.

44-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}([a,b])$, $q \in \mathbb{P}([a,b])$ *ва* $q(x) \leq p(x)$ *берилган бўлсин.* $RBV_a^{p(\cdot)}([a,b])$ *фазони* $RBV_a^{q(\cdot)}([a,b])$ *фазога акслантирувчи* F_f *Немицки оператори глобал Липшиц бўлиши учун шундай* $g,h \in RBV_a^{q(\cdot)}([a,b])$ *функциялар топилиб,*

$$f(t,y) = g(t)y + h(t), \quad t \in [a,b],\ y \in \mathbb{R}.$$

ўринли бўлиши зарур ва етарли.

Қуйида Чекли вариацияли функцияларнинг Рисс фазоларида таъсир қилувчи глобал Липшиц-Немицки операторларининг асоси ўзгармас бўлишининг етарли шартлари берилади.

45-теорема. *Айтайлик* $p \in \mathbb{P}^{log}([a,b])$, $q \in \mathbb{P}([a,b])$ *ва ихтиёрий* $t \in [a,b]$ *учун* $1 < p_+ < q(t)$ *бўлсин. Агар* $RBV_a^{p(\cdot)}([a,b])$ *фазони* $RBV_a^{q(\cdot)}([a,b])$ *фазога акслантирувчи* F_f *Немицки оператори глобал Липшиц бўлса, у ҳолда ҳар бир* $t \in [a,b]$ *ва* $x \in \mathbb{R}$ *учун* f *функция* $f(t,x) = f(t,0)$ *шартни қаноатлантиради.*

Ушбу бобни B Банах фазосига бошқа шартлар қўймаган ҳолда $L^{p(\cdot)}([a,b],B)$ ўзгарувчан кўрсаткичли Бохнер-Лебег фазосига қўшма фазонинг умумий тавсифини келтириш билан якунлаймиз.

Энди биз $G\colon \mathbb{B}_{[a,b]} \to B^*$ вектор ўлчов билан ишлаймиз. Бунда $\mathbb{B}_{[a,b]}$ $[a,b]$ кесмадаги Борел σ-алгебраси. Фараз қилайлик, $\mathcal{Q} = \{Q\}$ $[a,b]$ кесманинг ихтиёрий ўзаро кесишмайидиган бузилмаган интервалларининг бўлаклаши бўлсин. $p \in \mathbb{P}[a,b]$ учун G нинг $[a,b]$ кесмадаги $p(\cdot)$-Рисс вариациясини қуйидагича аниқлаймиз

$$\mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(G,B^*) = \sup_{\mathcal{Q}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\| G(Q) \|_{B^*}^{p_Q}}{|Q|^{p_Q - 1}}$$

Ва Рисс маъносидаги чекли $p(\cdot)$ вариацияли функциялар фазосини $RBV^{p(\cdot)}([a,b],B^*) := \{G\colon \mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(G,B^*) < \infty\}$ каби белгилаймиз.

46-теорема. $p,q \in \mathcal{B}([a,b])$ *қўшма кўрсаткичли функциялар ва* $p_- > 1$ *бўлсин. У ҳолда* $RBV^{q(\cdot)}([a,b],B^*)$ *фазодан* $(L^{p(\cdot)}([a,b],B))^*$ *фазога акслантирувчи*

$$G \to \ell_G, \quad \ell_G(f) = \int_a^b f dG\,,\ f \in L^{p(\cdot)}([a,b],B)$$

оператор чизиқли изоморфизм ва

$$\| \ell_G \|_{(L^{p(\cdot)}([a,b],B))^*} \asymp \| G \|_{RBV^{q(\cdot)}([a,b],B^*)}.$$

Тўртинчи бобни ҳам боб бўйича баъзи изоҳлар ва натижалар чоп этилган маоқолалар рўйхатини келтириш билан якунлаймиз. Натижалар [1,2,3,4] ишларда ўз ифодасини топган.

«**Хунук ядроли операторлар**» деб номланувчи бешинчи боб баъзи ностандарт функционал фазолардаги хунук ядроли операторларнинг чегараланганлигини ўрганишга бағишланган. Бундай масалаларнинг мураккаблиги шундаки, классик фазоларда операторларнинг чегараланганлигини ўрганиш буриш методига асосланган бўлиб, бу метод ностандарт фазоларда ўтмайди. Шу боис бундай фазолардаги операторларнинг чегараланганлигини текшириш учун янги метод ишлаб чиқиш талаб қиланади. Ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазоларида экстраполяция методи иш берса-да, бошқа ностандарт фазоларда, масалан, Морри фазоларида самарасиз бўлиб қолади. Бизнинг таклиф қилаётган методимиз ҳар бир нуқтада баҳолашга асосланган бўлиб, хатто $\alpha(x)$ ўзгарувчан кўрсаткичли фазоларда ҳам каср максимал операторлар ва потенциал операторларни ўрганиш имконини беради. Ишлаб чиқилган метод фазони масштаблаштириш хоссасига асосланган умумий схемани бериши билан самаралидир. Бу схема хунук ядроли максимал операторни ҳар бир нуқтада баҳолаш билан биргаликда шундай масштабли классик фазолардаги операторларнинг чегараланганлигидан фойдаланиб M_ω операторнинг чегараланганлигини келтириб чиқаришни осонлаштиради. Бу схемани қўллаб Мусиелак-Орлич фазоси, ўзгарувчан кўрсаткичли умумлашган Морри фазоси, умумлашган Орлич-Морри фазоси, қўшимча умумлашган Морри фазоси ва ўзгарувчан кўрсаткичли континуал Герц фазоларидаги хунук ядроли максимал операторларнинг чегараланганлигини исботлаймиз. Бу натижалар хатто ўзгармас кўрсаткичли ҳол учун ҳам янгиликдир.

Энди хунук ядроли максимал операторни келтириб ўтамиз

$$M_\omega f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} |\,\omega(y) f(x-y)|dy,$$

бу ерда ω биржинсли 0-тартибли, p-жамланувчи функция. $M_{\omega,\alpha}$ каср максимал оператор қуйидагича аниқланади

$$M_{\omega,\alpha} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int_{|y|<r} |\,\omega(y)||f(x-y)|dy.$$

Хунук максимал операторни қуйидагича аниқлаймиз

$$M_\omega^\# f(x) = f_\omega^\#(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} |\,\omega(y)||f(x-y) - f_{B(x,r)}|dy$$

бу ерда f_B ўрта қиймат бўлиб, $f_B := \frac{1}{|B|}\int_B f\,(y)dy$ каби аниқланади. Хунук ядроли максимал операторга ўхшаш хунук ядроли α каср тартибли операторни аниқлаймиз

$$I_\omega^{\alpha(x)} f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} f(y)dy.$$

47-лемма. $f \in L_{loc}^{s'}(\mathbb{R}^n),\ s > 1$ *берилган бўлсин. Агар* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ *0-тартибли биржинсли функция бўлса, у ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$M_\omega f(x) \le \frac{\|\,\omega\,\|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}}{n^{\frac{1}{s}}} \left(M(|f|^{s'})(x)\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

48-лемма. *Айтайлик* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ *берилган бўлсин. Шунингдек, ҳар бир нуқтада* $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$ *каби аниқланган* q *функция берилган бўлсин. У ҳолда ҳар бир нуқтада қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$M_{\omega,\alpha}f(x) \leq \left[M_{|\omega|^{\frac{n}{n-\alpha}}}\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)}{q(\cdot)}\frac{n}{n-\alpha}}(x)\right)\right]^{1-\frac{\alpha}{n}}\left(\int_{\Omega}|f(y)|^{p(y)}dy\right)^{\frac{\alpha}{n}}.$$

49-лемма. $\omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ *биржинсли 0-даражали функция учун*

$$|f_{\omega}^{\#}(x)| \leq M_{\omega}f(x) + \frac{1}{n}Mf(x) \parallel \omega \parallel_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}$$

тенгсизлик ўринли.

50-лемма. $f \in L_{loc}^{s'}(\mathbb{R}^n)$, $1 < s < \infty, \omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ *биржинсли 0-тартибли функция ва деярли ҳамма ерда мусбат* $\alpha(x)$ *функция берилган бўлсин. У ҳолда* $\alpha(x) > 0$ *бўлган барча* $x \in \mathbb{R}^n$ *нуқталарда*

$$\left|I_{\omega}^{\alpha(x)}(f\chi_{B(x,r)})(x)\right| \leq \frac{1}{\alpha(x)^{\frac{1}{s}}} \parallel \omega \parallel_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\frac{\alpha(x)}{s}}\left(I^{\alpha(x)}(|f|^{s'}\chi_{B(x,r)})(x)\right)^{\frac{1}{s'}},$$

тенгсизлик ўринли.

51-натижа. $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$,$1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$ *ва* $f \in L_{loc}^{s'}(\mathbb{R}^n)$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик бажарилади*

$$\left|I_{\omega}^{\alpha(x)}(f\chi_{B(x,r)})(x)\right| \lesssim \parallel \omega \parallel_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\alpha(x)}\left(M(|f|^{s'})(x)\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

52-лемма. $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$,$1 < s < \infty$ *ва* $\alpha \in L^{\infty}(\Omega)$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги ўринли*

$$\left|I_{\omega}^{\alpha(x)}(f\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B(x,r)})(x)\right| \lesssim \parallel \omega \parallel_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\frac{\alpha(x)}{s}-\frac{\beta(x)}{s'}}\left(I^{\alpha(x)+\beta(x)}(|f|^{s'}\chi_{\mathbb{R}^n\backslash B(x,r)})\right)^{\frac{1}{s'}}$$

бу ерда β *қуйидагича аниқланган ихтиёрий функция*

$$\inf_{x\in\Omega}\left[\beta(x) - \frac{\alpha(x)}{s-1}\right] > 0$$

ва $C = C(\alpha, s, \beta)$.

53-лемма. Ω *чегараланган очиқ тўплам,* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$,

$$\sup_{x\in\Omega} p(x)\alpha(x) < n,$$

$inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ *ва* $1 < s < \infty$ *берилган бўлсин. У ҳолда қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\left|I_{\omega}^{\alpha(x)}(f\chi_{\Omega\backslash B(x,r)})(x)\right| \leq C \parallel \omega \parallel_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\alpha(x)-\frac{n}{p(x)}} \parallel f \parallel_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

54-лемма. Ω *чегараланган очиқ тўплам,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$ *ва* $sup_{x\in\Omega}[\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n$ *бўлсин. У ҳолда*

$$\left|I_{\omega}^{\alpha(x)}(f\chi_{\Omega\backslash B(x,r)})(x)\right| \lesssim \parallel \omega \parallel_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\alpha(x)-\frac{n-\lambda(x)}{p(x)}},$$

ўринли, бу ерда $\rho_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq 1$.

Юқоридаги тенгсизликлардан ўзгарувчан кўрсаткичли Лебег фазоларида чегараланганлик бўйича қуйидаги натижани оламиз.

55-теорема. *ω биржинсли 0-даражали функция, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq (p')_+$, ва $\frac{p}{s'} \in \mathfrak{P}(\Omega)$ берилган бўлсин. У ҳолда M_ω оператор $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ фазода чегараланган.*

56-теорема. *Айтайлик ω биржинсли 0-даражали функция, $\omega \in L^{\frac{sn}{n-\alpha}}(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq \left[\left((1-\frac{\alpha}{n})q\right)'\right]_+$, $\frac{(1-\alpha/n)q}{s'} \in \mathfrak{P}(\Omega)$ берилган бўлсин. У ҳолда $M_{\omega,\alpha}$оператор $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)\right)$- чегараланган.*

57-теорема *ω биржинсли 0-даражали функция, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq (p')_+$, ва $\frac{p}{s'} \in \mathfrak{P}(\Omega)$ берилган бўлсин. У ҳолда $M_\omega^\#$ оператор $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ фазода чегараланган.*

58-теорема. *Ω чегараланган очиқ тўплам, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $sup_{x\in\Omega}\alpha(x)p(x) < n$, $s \geq (p')_+$, ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$ бўлсин. У ҳолда $I_\omega^{\alpha(x)}$ хунук ядроли каср оператор $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)\right)$-чегараланган, бу ерда $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$.*

59-натижа. *Ω чегараланган очиқ тўплам, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $sup_{x\in\Omega}\alpha(x)p(x) < n$, $s \geq (p')_+$, ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$ бўлсин. У ҳолда $M_{\omega,\alpha(x)}$ хунук ядроли каср оператор $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)\right)$-чегараланган, бу ерда $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$.*

Шу каби натижалар ўзгарувчан кўрсаткичли Морри фазоларида ҳам олинган.

60-теорема. *Ω тўплам $\mathbb{R}^n$ да чегараланган очиқ, $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda_+ < n$, $s \geq (p')_+$, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$ бўлсин. У ҳолда M_ω хунук ядроли максимал оператор $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ фазода чегараланган.*

61-теорема. *Ω чегараланган очиқ тўплам, ω биржинсли 0-даражали функция, $\omega \in L^{\frac{sn}{n-\alpha}}(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq \left[\left((1-\frac{\alpha}{n})q\right)'\right]_+$ ва $\frac{(1-\alpha/n)q}{s'} \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$ бўлсин.У ҳолда $M_{\omega,\alpha}$хунук ядроли каср максимал оператор $\left(L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)\right)$-чегараланган, бу ерда $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$.*

62-теорема. *ω биржинсли 0-даражали функция , $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$,$s \geq (p')_+$, ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$ берилган бўлсин. У ҳолда $M_\omega^\#$ оператор $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$ фазода чегараланган.*

63-теорема. *Ω чегараланган очиқ тўплам, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $sup_{x\in\Omega}[\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n$, $s \geq (p')_+$, ва $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$*

берилган бўлсин. У ҳолда $I_{\omega}^{\alpha(x)}$ *хунук ядроли каср оператор* $\left(L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)\right)$*-чегараланган,бу ерда* $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$.

Янги методни бошқа функционал фазоларга ҳам қўллашимиз мумкин.

64-таъриф. *X фазо $\| f \|_X$ норма аниқланган нормаланган фазо бўлсин. X_s, $s > 0$ фазони $f^s \in X$ шарт билан ҳосил қилинган. X_s фазода каср тартибли қуйидаги норма аниқлаймиз*

$$\| f \|_{X_s} := \| |f|^s \|_X^{\frac{1}{s}}.$$

65-теорема. *$\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$ ва X фазо $\mathbb{R}^n$даги функцияларнинг Банах панжараси бўлсин.Агар максимал оператор $X_{\frac{1}{s'}}$ фазода чегараланган бўлса, у ҳолда M_ω оператор X фазода чегараланган бўлади ва қуйидаги тенгсизлик ўринли*

$$\| M_\omega \|_X \le \frac{\| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}}{n^{\frac{1}{s}}} \| M \|_{X_{\frac{1}{s'}}}^{\frac{1}{s'}}.$$

65-теоремадан фойдаланиб, охирги ўн йилликда кенг ўрганилаётган қуйидаги функционал фазоларда хунук ядроли максимал операторнинг чегараланганлигини айтиш мумкин:

- Мусиелак-Орлич фазолари;
- Ўзгарувчан кўрсаткичли умумлашган Морри фазолари;
- Умумлашган Орлич-Морри фазолари;
- ўзгарувчан кўрсаткичли Герц фазолари;
- катта Лебег фазолари.

Санаб ўтилган фазолардан фақат Мусиелак-Орлич ва ўзгарувчан кўрсаткичли умумлашган Морри фазолари учун олинган натижаларни бериш билан кифояланамиз.

Мусиелак-Орлич фазоси

$$L^{\Phi(\cdot,\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{f \colon \| f \|_{L^{\Phi(\cdot,\cdot)}} < \infty\right\}$$

$\| f \|_{L^{\Phi(\cdot,\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0 \colon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\,(x, \frac{|f(x)|}{\lambda})dx \le 1\}$ норма билан аниқланади, бунда ҳар бир $r \ge 0$ учун $\Phi(\cdot, r)$ ўлчовли функция ва шунингдек, $\Phi \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ Юнг функциясидир.

66-теорема. *$\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ ва $t \mapsto \Phi(x, t^{\frac{1}{s'}})$ қавариқ функция берилган бўлсин. $\Phi(x,t)$ қуйидаги шартларни қаноатлантирсин*

$(A_0(\Phi))$

Шундай $\beta > 0$ сони мавжудки, ҳар бир $x \in \mathbb{R}^n$ учун $\Phi(x,\beta) \le 1$ ва $\Phi(x,\sigma) \ge 1$ ўринли.

$(A_1(\Phi))$

Шундай $\beta \in (0,1)$ сони мавжудки, ҳар бир $t \in [\sigma, (\Phi_B^{-})^{-1}(1/|B|)]$ учун

$$\Phi_B^{+}(\beta t) \le \Phi_B^{-}(t)$$

ўринли, бу ерда $\Phi_B^{-}(t) := inf_{x \in B}\Phi(x,t)$ ва $\Phi_B^{+}(t) := sup_{x \in B}\Phi(x,t)$.

$(A_2(\Phi))$

Шундай $\beta > 0$ сонива $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ функция мавжудки, ҳар бир $t \in [0,\sigma]$ учун $\Phi(x,\beta t) \leq \Phi(y,t) + h(x) + h(y)$ ўринли.

У ҳолда M_ω оператор $L^{\Phi(\cdot,\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ фазода чегараланган.

Энди умумлашган Морри фазосида хунук ядроли операторнинг чегараланганлигини исботлаймиз. Ω тўпламдаги барча ўлчовли функциялар қуйидаги

$$\| f \|_{L^{p(\cdot),\varphi(\cdot,\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{\varphi(x,r)} \| f \|_{L^{p(\cdot)}(\Omega(x,r))} < \infty$$

нормага нисбатан Банах фазоси эди. Бу фазони ўзгарувчан кўрсаткичли умумлашган Морри фазоси деб аталади, бу ерда $\Omega(x,r) := B(x,r) \cap \Omega$.

67-теорема. *$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ чегараланган очиқ тўплам ва $(p_-)' < s < \infty$ учун $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ берилган бўлсин.Агар $\varphi(x,r)$ функция $inf_{x\in\Omega, r>0} \frac{\varphi(x,r)}{r^{\frac{n}{p(x)}}} > 0$ ва*

$$\int_r^{diam(\Omega)} \frac{\varphi(x,t)^{s'}}{t^{\frac{s'n}{p(x)}}} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi(x,r)^{s'}}{r^{\frac{ns'}{p(x)}}},$$

шартларни қаноатлантирса, (бунда $C > 0$ сони x ва r га боғлиқмас) у ҳолда M_ω хунук ядроли максимал оператор $L^{p(\cdot),\varphi(\cdot,\cdot)}(\Omega)$ фазода чегараланган.

Бешинчи бобни ҳам боб бўйича баъзи изоҳлар ва натижалар чоп этилган маоқолалар рўйхатини келтириш билан якунлаймиз. Натижалар [14,15] ишларда ўз ифодасини топган..

ХУЛОСА

1. Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазолари аниқланган ва бундай фазоларда кўпҳадлар тўплами зич эканлиги исботланган.
2. Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларида экстраполяция усулидан фойдаланиб, Бергман проекциясининг чегараланганлигини исботлаш учун осон кенгайиш тушунчаси киритилган.
3. Ўзгарувчан кўрсаткичли Бергман фазоларида кўрсаткичли функция лог-Гёлдер шартини қаноатлантирганда Бергман проекцияси, Березин алмаштириши ва Тёплиц операторининг чегараланганлиги исботланган.
4. Умумлашган катта Морри фазоларида BMO функцияли потенциал оператор коммутатори ва Калдерон-Зигмунд типидаги коммутатор операторининг чегараланганлиги кўрсатилган.
5. Биржинсли типдаги катта Морри фазоларида қисман чизиқли ва қисман чизиқли операторлар коммутаторининг чегараланганлиги исботланган.
6. Ўзгарувчан кўрсаткичли Рисс чекли вариацияли функциялар фазосида Рисс тасвири ҳақидаги теорема исботланган.
7. Ўзгарувчан кўрсаткичли Бохнер-Лебег фазоларидаги чизиқли функционаллар вектор ўлчовлар учун ўзгарувчан кўрсаткичли Рисс маъносидаги чекли вариацияли функциялар фазоси нуқтаи назаридан тавсифланган.

8. Хунук ядроли баъзи операторларнинг чегараланганлигини текшириш учун янги метод ишлаб чиқилган.

Диссертация иши назарий характерга эга бўлиб, унда таклиф этилган методлар ва олинган натижалардан ностандарт функционал фазоларни ва улардаги оперторларни тадқиқ этишда фойдаланиш мумкин. Масалан, ўзгарувчан кўрсаткичли ностандарт аналитик функциялар фазоси, катта фазолар, ўзгарувчан кўрсаткичли чекли вариацияли функционал фазолар, максимал оператор, Калдерон-Зигмунд оператори, Рисс потенциал оператори шулар жумласидан ҳисобланади.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

UNIVERSITY OF UNITED ARABIC EMIRATES AND
INSTITUTE OF MATHEMATICS

HUMBERTO GIL SILVA RAFEIRO

NON-STANDARD FUNCTION SPACES WITH APPLICATION TO HARMONIC ANALYSIS

01.01.01-Mathematical analysis
(Physical and mathematical sciences)

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT-2021

Dissertation has been prepared at the Institute of Mathematics of Academy of Sciences of Uzbekistan and University of United Arabic Emirates (UAE)

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, English, Russian (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/

Scientific consultant:	**Ayupov Shavkat Abdullaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, academican
Official opponents:	**Alberto Fiorenza** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Chilin Vladimir Ivanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	Andrea Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University

Defense will take place “___”_________ 2021 at_____at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky. (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named alter V.I.Romanovsky (is registered №___). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «___» _________ 2021 year
(Mailing report № __ on «___» ________ 2021 year)

U.A.Roziqov
Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.Sc., Professor

J.K.Adashev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, PhD,
Senior researcher

U. U.Jamilov
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.Sc, Senior researcher

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

Actuality and demand of the theme of the dissertation. In the last decades it was observed that classical function spaces are no longer the appropriate ambient space when we attempt to solve some contemporary problems arising naturally in non-linear elasticity theory, fluid mechanics, mathematical modeling of various physical phenomena, and solvability problems of non-linear partial differential equations, to name a few. As an example, we would like to recall that many materials can be modeled efficiently using the Lebesgue and Sobolev spaces, where the order of summability p is constant. For some non-homogeneous materials, these function spaces are not ideal, since the order of summability must measure the anisotropy of the material, thus we should consider function spaces with variable order or summability.

The application of non-standard function spaces (for instance, variable exponent Lebesgue spaces, variable exponent Sobolev spaces, and grand Lebesgue spaces, to name a few) to some contemporary problems is being developed intensively, for instance in the modeling of electrorheological fluids as well as thermorheological fluids, in the study of image processing, and differential equations with non-standard growth. From a purely mathematical point of view, the study of these non-standard function spaces is creating new and challenging problems, especially in questions related to the boundedness of operators from harmonic analysis, since in many instances the known approaches are not applicable to the problem at hand. Consequently, the study of non-standard function spaces and the development of appropriate tools from harmonic analysis is a very active area of research, which attests to the actuality of this dissertation.

Investigations on the international level in such important areas as functional analysis, harmonic analysis, mathematical physics, theory of probability and theory of dynamical systems considered as the main task of fundamental research[1]. In order to ensure the implementation of the decision, it is important to develop new function spaces in order to use scientific results in related fields of sciences.

This dissertation is in line and serves, up to a certain degree, with the tasks described in the Decrees of the President of the Republic of Uzbekistan DP-2909 dated April 20, 2017 «On measures for further development of the system of higher education» and DP-3775 dated June 5, 2018 «On additional measures to improve the quality of education in the higher educational institutions and ensure their active participation in the wide-scale reforms implemented in the country», in addition to other normative legal act on this subject.

---

[1] Decree of Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan « On measures on the organization of activities of the first created scientific research institutions of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan» № 292 dated May 17, 2017.

Connection of research to priority directions of development of science and technologies of the Republic. The research on this thesis was carried out in conformity with the priority direction of development of science and technology in the Republic of Uzbekistan IV. «Mathematics, mechanics and informatics».

Review of foreign research on the topic of the dissertation. Research on the topic of non-standard function spaces and application to harmonic analysis is being developed in many institutions and research centers, including the University of Alabama (USA), University of Turku (Finland), Tokyo Metropolitan University (Japan), University of Aveiro (Portugal), University of Algarve (Portugal), University of Naples (Italy), Georgian Academy of Sciences (Georgia), Pontificia Universidad Javeriana (Colombia), Southern Federal University (Russia), United Arab Emirates University (UAE), Hiroshima University (Japan), and Artic University (Norway).

The topic of non-standard function spaces is being intensively studied by many researchers, we sample a small number of results obtained in the last 5 years: study atomic and molecular decompositions in 2-microlocal Besov and Triebel-Lizorkin spaces with variable integrability, including the lifting property, embeddings and Fourier multipliers (University of Aveiro, Portugal); finding appropriate conditions for the boundedness of the Hardy-Littlewood maximal function and averaging operators in the framework of Musielak-Orlicz spaces and develop some transfer techniques (extrapolation and interpolation) in this framework (University of Turku, Finland); study of non-standard Banach spaces of analytic functions, both in the unit disk and in the upper half-plane (University of Algarve, Portugal and Southern Federal University, Russia); study of grand and small Lebesgue and Lorentz spaces, including embeddings and interpolation (University of Naples, Italy); study of grand Morrey spaces, including Stein type interpolation (Georgian Academy of Sciences, Georgia).

The degree of scrutiny of the problem. The variable exponent Lebesgue spaces were introduced by W. Orlicz in 1931 but these spaces did not attract immediate attention, except in the work of H. Nakano in the 1950s as a particular case of modular spaces. In the 1970s these function spaces appeared in the works of I. Sharapudinov with application to the problem of best approximation, and in the ’80s V. Zhikov applied variable exponent Lebesgue spaces to problems in the calculus of variations. In 1991 O. Kováčik and J. Rákosník published the influential paper in the theory of variable exponent spaces. After this paper, these spaces attracted the attention of many researchers, e.g. A. Almeida, C. Capone, D. Cruz-Uribe, L. Diening, D. E. Edmunds, A. Fiorenza, F. Futamura, M. Hajibayov, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Khabazi†, V. Kokilashvili, T. Kopaliani, M. Koskenoja, O. Kovácik, J. Lang, V. Latvala, A. Lerner, J.M. Martell, F. Mamedov, A. Meskhi, Y. Mizuta, A. Nekvinda, C.J. Neugebauer, V. Paatashvili†, M. Pere, C. Perez, H. Rafeiro, J. Rákosník, M. Růžička, N. Samko, S. Samko, Y. Sawano, I.

Sharapudinov, E. Shargorodsky, T. Shimomura, B. Vakulov, V. Zhikov†, the list is far from complete. The theory of variable exponent and Sobolev Lebesgue spaces can be found clearly in the monograph of D.V. Cruz-Uribe and A. Fiorenza and also in the monograph of L. Diening, P. Hästö, P. Harjulehto, and M. Růžička, where a considerable portion of the latter is devoted to applications to PDEs and fluid dynamics. In the book of V. Kokilashvili and V. Paatashvili, the study of boundary value problems is solved in domains with non-smooth boundaries in the framework of weighted variable exponent Lebesgue spaces.

Another non-standard function space that caught the attention of researchers is the so-called grand Lebesgue space, which was introduced by T. Iwaniec and C. Sbordone in 1992 dealing with the problem of the integrability properties of the Jacobian. These spaces turned out to be appropriate for treating the existence and uniqueness, as well as the regularity problems for various non-linear differential equations. The theory of operators in these spaces have been intensively studied during the last years, we can mention the following researchers: G. Anatriello, C. Capone, N. Danelia, G. Di Fratto A. Fiorenza, L. Greco B. Gupta, T. Iwaniec, P. Jain, G. E. Karadzhov, V. Kokilashvili A. Meskhi, H. Rafeiro, J. M. Rakotoson, S. Samko, C. Sbordone, and S. Umarkhadzhiev, among many others.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The dissertation research is carried out in the Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan OT-F4-82 – “Local differentiation in operator and non-associative algebras and automorphisms, phase transitions and chaos in nonlinear dynamical systems” (2017-2020) and in UAEU (G00002994) “Nonstandard Bergman type spaces” (2019-2020) within the framework of fundamental projects.

The aim of the research work was to introduce new non-standard function spaces, prove the boundedness of several well-known operators of harmonic analysis, and develop new tools to overcome the difficulties arising in these new environments.

Research tasks:

Define variable exponent Bergman spaces (VEBS) and investigate some of its structural properties;

Study the boundedness and compactness of some operators in VEBS;

Extended some of the results obtained in VEBS to the framework of analytic functions belonging to the variable exponent Morrey spaces over the unit disc and the upper half-plane;

Introduce generalized grand Morrey spaces (both in the Euclidean case and in the quasimetric measure space case) and prove a boundedness *metatheorem*;

Define bounded variation spaces with variable parameter, in the Wiener and in the Riesz sense, and study their basic properties;

Characterize global Lipschitz Nemytskii operators in the Riesz-bounded variation space with variable exponent; and

Prove the boundedness of some operators with rough kernel in few non-standard function spaces.

The research object: variable exponent Bergman spaces, variable exponent bounded variation spaces, generalized grand Morrey spaces, Bergman projection, maximal operator, Riesz potential operator, and Calderón-Zygmund operators.

The research subject: spaces of measurable functions, spaces of bounded variation functions, spaces of analytic functions, and classical operators of harmonic analysis.

Research methods: we relied on methods from functional analysis, harmonic analysis, complex analysis, and real analysis.

The scientific novelty of the research is as follows:

Introduction of the notion of mollified dilation in the framework of variable exponent Bergman spaces (VEBS) which allows us to prove the boundedness of the Bergman projection in VEBS through the usage of extrapolation technique;

Proof of the boundedness of several operators (e.g. Bergman projection, Berezin transform, and Toeplitz operator) in VEBS;

Proof that the commutator of Calderón–Zygmund type operators, as well as the commutator of a potential operator with a BMO function, are bounded in a generalized grand Morrey space even in the setting of spaces of homogeneous type;

Proof of a Riesz representation lemma in variable exponent bounded variation spaces in the Riesz sense;

Description of the linear functionals on variable exponent Bochner-Lebesgue spaces in terms of the variable exponent Riesz bounded variation spaces for vector measures.

Practical results of the research. New methods were developed in the theory of Bergman spaces. The methods used in the study of generalized grand Morrey spaces, allows us to obtain interior estimates for solutions of elliptic equations in the framework of generalized grand Morrey spaces. The result, concerning the boundedness of operators with rough kernel, allows us to, essentially, transfer the results of the classical operators to the case of operators with rough kernel under mild conditions on the kernel.

The reliability of the results of the study. Our results have been obtained by using the methods of functional analysis, harmonic analysis, and the theory of functions in conjunction with formal mathematical arguments.

The scientific and practical significance of research results. The scientific value of the research stems from the fact that the results and techniques obtained in the dissertation can be used for further investigation on non-standard function spaces and operator theory in such framework.

The significance of the results, apart from their interesting mathematical structure, lies in the fact that non-standard function spaces appear in applications.

Implementation of the research results. In according to obtained results on non-standard function spaces and operator theory:

introduction of the variable exponent Bergman space (VEBS) in the disc is used to Calderón–Zygmund operators for proving the boundedness of the Bergman projection in Lebesgue spaces on the unit disc in foreign scientific journals (Complex Var. Elliptic Equ. 61, No. 8, 1090-1106 (2016), J. Math. Sci., New York 226, No. 4, 344-354 (2017), J. Funct. Spaces 2018, Article ID 8751849, 8 p. (2018)). The application of the scientific results made it possible to introduce and study the mixed-norm VEBS as well as the study of VEBS on the upper-half-plane, and to obtain a Lipschitz type characterizations of VEBS under appropriate conditions on the variable exponent;

introduction of the notion of mollified dilation in the framework of VEBS which allows us to prove the boundedness of the Bergman projection through the usage of extrapolation technique in the papers of foreign scientific journals (Czech. Math. J. 70, No. 1, 187-204 (2020), Int. J. Math. Math. Sci. 2018, Article ID 1417989, 11 p. (2018), Mediterr. J. Math. 17, No. 1, Paper No. 9, 13 p. (2020)). The application of the scientific results made it possible to introduce and study some structural properties of variable exponent Fock spaces, the study the compactness of some classes of bounded operators on the Bergman space with variable exponent and to investigate the continuity and compactness of composition operators on variable exponent Bergman space;

proof of the boundedness of several operators in VEBS is used to consider the modular inequalities for some linear operators on Lebesgue spaces with variable exponent on the complex plane in the papers of foreign scientific journals (Adv. Oper. Theory, 4, No. 4, 738-749(2019), Math. Notes 106, No. 2, 229-234 (2019), Complex Analysis and Operator Theory 13, 275–289 (2019)). The application of the scientific results made it possible to introduce and study to variable exponent Hardy space of analytic functions on the unit disk, to show that if modular inequality of some linear operators are valid then the variable exponent must be constant.

Approbation of the research results. The results that constitute this dissertation were discussed at 8 international conferences, viz. in the University of Aveiro (Portugal, 2019), Instituto Superior Técnico (Portugal, 2019), American University of Sharjah (UAE, 2019), Southern Federal University (Russia, 2018), Holon Institute of Technology (Israel, 2017), University of Macau (China, 2015), ISAAC 9th Congress (Poland, 2013), and University of Rijeka (Croatia, 2012).

Publications of the research results. The results of this dissertation are published in 15 scientific papers, included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of the doctoral dissertations, 14 of them published in international scientific journals and the remaining publication as a book chapter in a leading publisher.

The structure and volume of the dissertation. The thesis consists of an introduction, five chapters, a conclusion, a list of published works, and a bibliography. Each chapter ends with a section devoted to notes and bibliographic references. The thesis is 210 pages long.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In the «**Introduction**», the relevance of the topic of the thesis is justified.

The first chapter, entitled «**Preliminaries on variable exponent Lebesgue spaces**», gives a concise introduction to the so-called variable exponent Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, for the convenience of the reader and to make the exposition more self-contained.

In the second chapter, termed «**Variable exponent Bergman spaces**», we define variable exponent Bergman spaces and show some fundamental properties. This turned out to be a very interesting topic since the classical approach to Bergman spaces fails in the variable framework. To circumvent this problem, we rely on techniques from real harmonic analysis, variable exponent spaces, and complex function theory. We start by defining variable exponent Bergman spaces and to show that, under suitable conditions on the exponent, they are Banach spaces. To overcome the anisotropy of the space, we introduce the concept of mollified dilation and show some of its properties to deal with the problem of approximation in the variable exponent Bergman spaces. We study the Bergman projection and prove that it remains bounded in the case of variable exponent Bergman spaces using extrapolation theory. We also address the problem of duality in this setting. We define and characterize Carleson measures in the setting of variable exponent Bergman spaces and we further estimate the norm of the reproducing kernels in this framework. Using the notion of Carleson measure, we characterize the boundedness of the Toeplitz operator in the variable exponent Bergman spaces, whereas the compactness of the Toeplitz operator in the aforementioned space is characterized by the notion of vanishing Carleson measures. Using the Zaharjuta and Judovič representation of the Bergman projection, we end this chapter obtaining the boundedness of the Bergman projection (once more) in variable exponent Bergman spaces (this approach allows us to show boundedness for Orlicz spaces and generalized variable exponent Morrey spaces, spaces where the extrapolation technique is not applicable).

We introduce the notion of variable exponent Bergman spaces $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ as

$$A^{p(\cdot)}(\mathbb{D}) = \{f \text{ is an analytic function and } \varrho_{p(\cdot)}(f) < \infty\},$$

where $\varrho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{p(z)} dA(z)$ and we show that, under suitable conditions on the exponent, they are Banach spaces. We also obtain an estimate for the evaluation functional $\gamma_a(f)(z) := f(z)$ in the following way:

Theorem 1. *Let $p \in \mathbb{P}(\mathbb{D})$. Then for every $a \in \mathbb{D}$ the evaluation functional γ_a is bounded. Moreover,*

$$\frac{1}{(1-|a|)^{2/p^+}} \lesssim \| \gamma_a \| \lesssim \frac{1}{(1-|a|)^{2/p^-}}.$$

The density of polynomials in $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ is proved, under the condition $p \in \mathbb{P}^{\log}(\mathbb{D})$. This density is obtained via an approximation theorem for functions in variable exponent Bergman spaces. The approximation theorem relies on the newly introduced notion of mollified dilation $f_r\colon \frac{1+r}{2r}\mathbb{D} \to \mathbb{C}$, which is introduced as

$$f_r(z) := \int_{\mathbb{D}} f\,(rw)\eta_r(z-w)dA(w),$$

where $\rho\mathbb{D}$ stands for the complex unit disk rescaled by a factor of ρ and η_r is an appropriate C^∞ function supported on the set $\frac{1-r}{2r}\overline{\mathbb{D}}$. The function $z \mapsto f_r(z)$, enjoys the following nice properties: (a) it is analytic in $\frac{1+r}{2}\mathbb{D}$, (b) $f_r(z) \to f(z)$ as $r \to 1^-$, (c) for $z \in \mathbb{D}$ and $1/2 < r < 1$ we have $f_r(z) \lesssim Mf(z)$ where M is the maximal operator, and (d) for $z \in \mathbb{D}$ and $1/2 < r < 1$, $f_r(z) \in A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ and $\| f_r - f \|_{A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})} \to$ as $r \to 1^-$.

We also study the boundedness of the Bergman projection P, where P is given by:

$$Pf(z) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-\overline{w}z)^2} dA(w).$$

The usual proof of the boundedness $P\colon L^p(\mathbb{D}) \to A^p(\mathbb{D})$ relies on Schur's lemma to show the boundedness of some auxiliary operators. Due to the nature of our problem, we devised the use of Rubio de Francia extrapolation theorem together with a classical result due to Bekollé and Bonami. We have:

Theorem 2. *Let $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. Then the Bergman projection P is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ onto $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$.*

As a consequence of Theorem 2, we obtain:

Theorem 3. *Let $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. Then the dual space of $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ can be identified with $A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})$, where $1/p(\cdot) + 1/p'(\cdot) = 1$. Each functional $\phi \in (A^{p(\cdot)}(\mathbb{D}))^*$ has a unique representation*

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{D}} f\,(z)\overline{g(z)}dA(z)$$

for some $g \in A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})$ with $\| \phi \| \asymp \| g \|_{A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})}$.

Given $\alpha > -1$ we consider the α-Berezin transform defined for $f \in L^1(\mathbb{D})$ as:

$$B_\alpha f(z) := (\alpha+1)\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\alpha+2}(1-|w|^2)^\alpha}{|1-\bar{w}z|^{4+2\alpha}} f(w)dA(w).$$

We studied the boundedness of the α-Berezin transform in variable exponent spaces, namely:

Theorem 4. *Let $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. Then the α-Berezin transform is bounded on the space $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$.*

We also obtained an upper bound for the kernel

$$k_a(z) = \frac{1}{(1-\bar{a}z)^2}, \qquad a, z \in \mathbb{D}$$

Theorem 5. *Let $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. Then there exists a constant $C > 0$ such that for every $a \in \mathbb{D}$,*

$$\| k_a^{2/p(a)} \|_{A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})} \leq \frac{C}{(1-|a|^2)^{2/p(a)}}.$$

The next result gives an estimate for the norm of the functional γ_z, improving the one previously obtained.

Theorem 6. *Let* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. *Then, for every* $z \in \mathbb{D}$, *we have*

$$\| \gamma_z \| \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{2/p(z)}}.$$

The previous result allows us to get an estimate for the norm of the functions k_z, $a \in \mathbb{D}$ by using the duality of $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ and the fact that the functions k_z, $a \in \mathbb{D}$, satisfy the reproducing property $f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)\overline{k_z(w)}dA(w)$ for every $f \in A^1(\mathbb{D})$. Thus, we following equivalence is valid $\| \gamma_z \| \asymp \| k_z \|_{A^{p'(\cdot)}(\mathbb{D})}$. This result is presented in the following theorem.

Theorem 7. *Let* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. *Then for every* $z \in \mathbb{D}$ *we have that*

$$\| k_z \|_{A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})} \asymp \frac{1}{(1-|z|^2)^{2(1-1/p(z))}}.$$

A notion of Carleson measures adapted to the variable exponent Lebesgue spaces is introduced, namely, we say that a positive Borel measure μ is a *Carleson measure* for the variable exponent Bergman space $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ if $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ is continuously embedded in $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D},\mu)$, i.e. $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D}) \hookrightarrow L^{p(\cdot)}(\mathbb{D},\mu)$. We characterized the Carleson measures in $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$, namely:

Theorem 8. *Let* μ *be a finite, positive Borel measure on* $\mathbb{D}$ *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. *Then* μ *is a Carleson measure for* $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *if and only if there exist constants* $C > 0$ *and* $0 < r < 1$ *such that for every* $a \in \mathbb{D}$, $\mu(D_r(a)) \leq C|D_r(a)|$, *where* $D_r(a)$ *is the pseudo-hyperbolic disk.*

We say that a positive Borel measure μ is a *vanishing Carleson measure* for the variable exponent Bergman space $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ if the space $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ is compactly embedded in $L^{p(\cdot)}(\mathbb{D},\mu)$.

Theorem 9. *Let* μ *be a finite, positive Borel measure on* $\mathbb{D}$ *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$. *Then* μ *is a vanishing Carleson measure for* $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$ *if and only if for every* $0 < r < 1$, $\frac{\mu(D_r(a))}{|D_r(a)|} \to 0$ *as* $|a| \to 1^-$.

Recall that, given a function $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$, we define the Toeplitz operator T_φ on the set of polynomials as

$$T_\varphi f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w)k_w(z)\varphi(w)dA(w).$$

The following characterization of the boundedness of Toeplitz operators in terms of Carleson measures was obtained.

Theorem 10. *Let* $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ *and* $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$. *Denote by* μ *a positive measure such that* $d\mu = \varphi dA$. *Then the following are equivalent:*

5. T_φ *is bounded on* $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$;
6. $B\varphi$ *is bounded on* $\mathbb{D}$;

7. *μ is a Carleson measure for $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$.*

Using similar tools, we can link the notion of compactness of a Toeplitz operator, with Berezin transforms and vanishing Carleson measures, namely:

Theorem 11. *Let $p \in \mathbb{P}^{log}(\mathbb{D})$ and $\varphi \in L^1(\mathbb{D})$. Denote by μ a positive measure such that $d\mu = \varphi dA$. Then the following are equivalent:*

8. *T_φ is compact on $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$.*
9. *$B\varphi(z) \to 0$ as $|z| \to 1^-$.*
10. *μ is a vanishing Carleson measure in $A^{p(\cdot)}(\mathbb{D})$.*

We also prove the boundedness of the Bergman projection via boundedness of Calderón-Zygmund singular operators and the representation of the Bergman projection in terms of the Caldéron-Zygmund singular operator T:

$$Pf(z) = K_1 f(z) + K_2 f(z),$$

where K_1 is the integral operator with bounded kernel

$$K_1(z,w) = \left(\chi_{D\left(\frac{0,1}{2}\right)}(z) + \chi_{D(0,1)\backslash D\left(\frac{0,1}{2}\right)}(z)\chi_{D\left(\frac{0,1}{2}\right)}(w)\right) k_w(z),$$

and

$$K_2 f(z) = \chi_{D(0,1)\backslash D(0,1/2)}(z) \int_{D(0,2)\backslash D(0,1)} \frac{\Omega\left(\frac{\zeta - z}{|\zeta - z|}\right)}{|\zeta - z|^2} g(\zeta) dA(\zeta),$$

and

$$g(\zeta) = Qf(\zeta)\frac{\zeta^2}{|\zeta|^4}, \ \zeta \in D_2.$$

We finish the chapter providing some notes and bibliographic references related to chapter 2. The results obtained in Chapter 2 appeared in Chacón and Rafeiro [5, 6], Chacón, Rafeiro, and Vallejo [7], and Karapetyants, Rafeiro, and Samko [8].

Chapter three, named «**Non-standard Morrey type spaces**», is devoted to the introduction of grand grand Morrey spaces, sometimes denoted simply as generalized grand Morrey spaces, where both parameters defining the space are subject to an aggrandization procedure. A type of metatheorem is proved, which allows us to transfer the boundedness results of some operators from Morrey spaces into the newly introduced spaces. Similar results are obtained in the framework of quasimetric measure spaces, where we obtain the boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator, Calderón-Zygmund operators, as well as the Riesz type potential operator.

For $1 \leq p < \infty$ and $0 \leq \lambda < 1$, the Morrey space $L^{p,\lambda}(\Omega)$ is introduced as the set of all measurable functions such that

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} := \sup_{\substack{x\in\Omega \\ 0<r\leqslant d}} \left(\frac{1}{|B(x,r)|^\lambda}\int_{\Omega(x,r)} |f(y)|^p \mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

where d = diam Ω and $\Omega(x,r) := \Omega \cap B(x,r)$. For $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$, $1 < p < \infty$, and $0 \leq \lambda < 1$, we consider the functional $\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s) := \sup_{0<\varepsilon<s} \varepsilon^{\frac{\theta}{p-\varepsilon}} \parallel f \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)}$, where $0 < s < \min\{p-1, \lambda/\alpha\}$ (we make a convention that the quotient λ/α when $\alpha = 0$ is always $\lambda/\alpha := \infty$ even if $\lambda = 0$).

Let $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$, and $0 \leq \lambda < 1$. By $L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)$ we denote the space of measurable functions having the finite norm

$$\parallel f \parallel_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)}: \ = \Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f, s_{\max}), \qquad s_{\max} = \min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}.$$

The space $L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)$ is entitled *grand grand Morrey space*.

For fixed $p, \theta, \lambda, \alpha, f$ we have that $s \mapsto \Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s)$ is a non-decreasing function, but it is possible to estimate $\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s)$ via $\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,\sigma)$ with $\sigma < s$ as follows.

Lemma 13. *Let Ω be a bounded open set. For $0 < \sigma < s < min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}$ we have that*

$$\Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,s) \leq C s^{\frac{\theta}{p-s}} \sigma^{-\frac{\theta}{p-\sigma}} \Phi_{\theta,\alpha}^{p,\lambda}(f,\sigma),$$

where C depends on n, the parameters $p, \lambda, \theta, \alpha$, and the diameter d, but does not depend on f, s, and σ.

From Lemma 13 we immediately have

Lemma 14. *For $0 < \sigma < min\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\}$, we have*

$$\parallel f \parallel_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)} \leq C \frac{\Phi_{\lambda,\alpha}^{p,\theta}(f,\sigma)}{\sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}}},$$

where C depends on $n, p, \lambda, \theta, \alpha$, and d, but does not depend on f and σ.

The next result, which is a transfer theorem, although simple in form, has very wide applications.

Lemma 15. *Let U be an operator (not necessarily linear!) bounded in the usual Morrey spaces $L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)$:*

$$\parallel Uf \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)} \leq C_{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon} \parallel f \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon}(\Omega)}$$

for all sufficiently small $\varepsilon \in (0,\sigma)$, where $0 < \sigma < min\left\{p-1, \frac{\lambda}{\alpha}\right\}$. If we additionally have $sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon} < \infty$, then the operator U is also bounded in the grand grand Morrey space $L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)$:

$$\parallel Uf \parallel_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)} \leq C \parallel f \parallel_{L_{\theta,\alpha}^{p),\lambda)}(\Omega)}$$

with

$$C = \frac{C_0}{\sigma^{\frac{\theta}{p-\sigma}}} \underset{0<\varepsilon<\sigma}{sup} C_{p-\varepsilon,\lambda-\alpha\varepsilon},$$

where C_0 may depend on $n, p, \lambda, \theta, \alpha$ and d, but does not depend on σ.

Relying on the previous result and previously known boundedness results in the classical Morrey spaces we obtain:

Theorem 16. *Let* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $\alpha \geq 0$, *and* $0 \leq \lambda < 1$. *Then the Hardy-Littlewood maximal operator is bounded in grand grand Morrey spaces* $L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)$.

Theorem 17. *Let* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, *and* $0 < \lambda < 1$. *Then the Calderón-Zygmund operator* T *with the standard kernel is bounded in grand grand Morrey spaces* $L^{p),\lambda)}_{\theta,\alpha}(\Omega)$.

We also introduce grand grand Morrey spaces in the framework of spaces of homogeneous type, we need to recall some definitions. Let $X := (X, d, \mu)$ be a topological space with a complete measure μ such that the space of compactly supported continuous functions is dense in $L^1(X,\mu)$ and d is a quasimetric, i.e. it is a non-negative real-valued function d on $X \times X$ which satisfies the conditions:

11. $d(x,y) = 0$ if and only if $x = y$;
12. there exists a constant $C_t > 0$ such that $d(x,y) \leq C_t[d(x,z) + d(z,y)]$, for all $x, y, z \in X$, and
13. there exists a constant $C_s > 0$ such that $d(x,y) \leq C_s \cdot d(y,x)$, for all $x, y \in X$.

Let μ be a positive measure on the σ-algebra of subsets of X which contains the d-balls $B(x,r)$. Everywhere in the sequel we assume that all the balls have a finite measure, that is, $\mu B(x,r) < \infty$ for all $x \in X$ and $r > 0$ and that for every neighborhood V of $x \in X$, there exists $r > 0$ such that $B(x,r) \subset V$. We say that the measure μ is *lower* α*-Ahlfors regular*, if $\mu B(x,r) \geq cr^{\alpha}$ and *upper* β*-Ahlfors regular* (or, it satisfies the *growth condition of degree* β), if $\mu B(x,r) \leq cr^{\beta}$, where $\alpha, \beta, c > 0$ does not depend on x and r. When $\alpha = \beta$, the measure μ is simply called α*-Ahlfors regular*.

The triplet (X, d, μ), with μ satisfying the doubling condition, is said a *space of homogeneous type*, abbreviated by SHT.

For $1 \leq p < \infty$ and $0 \leq \lambda < 1$, the usual Morrey space $L^{p,\lambda}(X,\mu)$ is introduced as the set of all measurable functions such that

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(X,\mu)} := \sup_{\substack{x\in X \\ 0<r<d_X}} \left(\frac{1}{\mu B(x,r)^{\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Sometimes we will need a modification of the previous Morrey space, namely, we define $\mathcal{L}^{p,\lambda}(X,\mu)$ as

$$\| f \|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(X,\mu)} := \sup_{\substack{x\in X \\ 0<r<d_X}} \left(\frac{1}{r^{\gamma\lambda}} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

We will assume that the measure μ is upper γ-Ahlfors regular.

After introducing grand grand Morrey spaces in the framework of SHT in a slightly more general way as was done in the Euclidean case, we show that the same reduction lemma is valid in the setting of SHT. A real-valued non-negative function

φ defined in $[0,\ell]$ is called *almost increasing* if exists $C \geq 0$ such that $\varphi(x) \leq C\varphi(y)$ for all $x \leq y$. We introduce the following functional

$$\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s) := \sup_{0<\varepsilon<s} \varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \parallel f \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-A(\varepsilon)}(X,\mu)}.$$

Definition 18. *Let* $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$, φ *be a positive bounded function with* $lim_{t\to 0+}\varphi(t) = 0$ *and* A *be a non-decreasing real-valued non-negative function with* $lim_{x\to 0+}A(x) = 0$. *By* $L_{\varphi,A}^{p),\lambda)}(X,\mu)$ *we denote the space of measurable functions having the finite norm*

$$\parallel f \parallel_{L_{\varphi,A}^{p),\lambda)}(X)} := \Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s_{max}), \quad s_{max} = min\{p-1,a\}$$

where $a = sup\{x > 0: A(x) \leq \lambda\}$.

For fixed p,λ,φ,A,f we have that $s \mapsto \Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s)$ is a non-decreasing function, but it is possible to estimate $\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s)$ via $\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,\sigma)$ with $\sigma < s$ as follows.

Lemma 19. *For* $0 < \sigma < s < s_{max}$ *we have that*

$$\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,s) \leq C\varphi(\sigma)^{-\frac{1}{p-\sigma}}\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,\sigma),$$

where C *depends on* γ, *the parameters* p,λ,φ,A, *and the diameter* d_X, *but does not depend on* f,s, *and* σ.

Lemma 20. *For* $0 < \sigma < s_{max}$, *the norm defined in Definition 18 has the following dominant*

$$\parallel f \parallel_{L_{\varphi,A}^{p),\lambda)}(X)} \leq C\frac{\Phi_{\varphi,A}^{p,\lambda}(f,\sigma)}{\varphi(\sigma)^{\frac{1}{p-\sigma}}},$$

where C *depends on* $\gamma,p,\lambda,\varphi,A$ *and* d_X, *but does not depend on* f *and* σ.

The following boundedness result was obtained.

Lemma 21. *Let* U *be an operator (not necessarily sublinear) bounded in the Morrey spaces*

$$\parallel Uf \parallel_{L^{q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)}(X)} \leq C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)} \parallel f \parallel_{L^{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon)}(X)}$$

for all sufficiently small $\varepsilon \in (0,\sigma]$, *where* $0 < \sigma < s_{max}$. *If*

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)} < \infty$$

and

$$\sup_{0<\varepsilon<\sigma} \frac{\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}}{\varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}} < \infty,$$

then it is also bounded in the grand grand Morrey space

$$\parallel Uf \parallel_{L_{\psi,A_2}^{q),\lambda)}(X)} \leq C \parallel f \parallel_{L_{\varphi,A_1}^{p),\lambda)}(X)}$$

with

$$C = \frac{C_0}{\varphi(\sigma)^{\frac{1}{p-\sigma}}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)},$$

where C_0 may depend on $\gamma, p, \lambda, \varphi, A$ and d_X, but does not depend on σ and f.
As an application of the Theorem 21, we obtain boundedness result for the Hardy-Littlewood maximal operator as well as the boundedness for the Calderón-Zygmund operator.

Theorem 22. *Let $1 < p < \infty$ and $0 \leq \lambda < 1$. Then the Hardy-Littlewood maximal operator is bounded from $L^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)$ to $L^{p),\lambda)}_{\psi,A}(X,\mu)$ if exists small σ such that $sup_{0<\varepsilon<\sigma}\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}/\varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} < \infty$.*

Theorem 23. *Let $1 < p < \infty$, and $0 < \lambda < 1$. Then the Calderón-Zygmund operator T bounded in grand grand Morrey spaces $L^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)$.*
We define the modified grand grand Morrey space as

$$\| f \|_{\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)} := \sup_{0<\varepsilon<s_{\max}} \varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \| f \|_{\mathcal{L}^{p-\varepsilon,\lambda-A(\varepsilon)}(X,\mu)}$$

where $s_{\max} = \min\{p-1, a\}$ with $a = \sup\{x > 0 \colon A(x) \leq \lambda\}$. If $\varphi(\varepsilon) := \varepsilon^{\theta}$, when θ is a positive number, we denote $\| f \|_{\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\varphi,A}(X,\mu)} =: \| f \|_{\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta,A}(X,\mu)}$.

Definition 24. *On an interval $(0,\delta]$, δ is small, we define the following functions:*

$$\bar{\phi}(x) := p + \frac{\gamma(x-q)(1-\lambda+A_2(x))}{\gamma(1-\lambda+A_2(x)) - \alpha(x-q)},$$

$$\tilde{\phi}(x) := q - \frac{\gamma(p-x)(1-\lambda+A_1(x))}{\gamma(1-\lambda+A_1(x)) - \alpha(p-x)}$$

$$\bar{A}(x) = 1 - \frac{\alpha(x-q)}{\gamma\big(1-\lambda+A_2(x)\big)}, \qquad \tilde{A}(x) = \frac{1-\lambda+A_1(\eta)}{\gamma(1-\lambda+A_1(\eta)) - (p-\eta)\alpha}$$

$$\phi(x) := \bar{\phi}(x)^{\bar{A}(x)}, \quad \Phi(x) := \tilde{\phi}(x)^{\tilde{A}(x)}, \quad \psi(\varepsilon) = \phi(\varepsilon^{\theta_1}), \quad \Psi(\varepsilon) = \Phi(\varepsilon^{\theta_1}),$$

for $\theta_1 > 0$.
We now state the boundedness result for the Riesz potential operator, namely:

Theorem 25. *Let $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < ((1-\lambda)\gamma)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/((1-\lambda)\gamma)$. Suppose that $\theta_1 > 0$ and that $\theta_2 \geq \theta_1[1 + \alpha q/((1-\lambda)\gamma)]$. Let A_1 and A_2 be continuous non-negative functions on $(0, p-1]$ and $(0, q-1]$ respectively satisfying the conditions:*

14. $A_2 \in C^1((0,\delta])$ *for some positive* $\delta > 0$;
15. $lim_{x\to 0+} A_2(x) = 0$;
16. $0 \leqslant B := \lim\limits_{x\to 0+} \frac{dA_2}{dx}(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
17. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *where $\bar{\phi}^{-1}$ is the inverse of $\bar{\phi}$ on $(0,\delta]$ for some* $\delta > 0$.

Then the Riesz potential operator I^{α} is $\Big(\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\Big)$-bounded.

Corollary 26. *Let $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < ((1-\lambda)\gamma)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/((1-\lambda)\gamma)$. Suppose that $\theta_1 > 0$ and that $\theta_2 \geq \theta_1(1 + \alpha q/(1-\lambda))$. Let $A_2(x) = \alpha x$, where α is a non-negative constant satisfying the condition $\alpha < (1 -$*

$\lambda)^2/(\alpha q^2)$. *Let* $A_1(x) = \alpha\bar{\phi}^{-1}(x)$. *Then* I^α *is* $\left(\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$-*bounded.*

It is also possible to prove a similar result of Theorem 25, but now requiring conditions on the function A_1, namely

Theorem 27. *Let* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \lambda < 1 - \alpha p$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1-\lambda}$. *Suppose that* $\theta_1 > 0$ *and that* $\theta_2 > \theta_1(1 + \frac{\alpha q}{1-\lambda})$. *Let* A_1 *and* A_2 *be continuous non-negative functions on* $(0, p-1]$ *and* $(0, q-1]$ *respectively satisfying the conditions:*

18. $A_1 \in C^1((0,\delta])$ *for some positive* $\delta > 0$;
19. $lim_{x\to 0+} A_1(x) = 0$;
20. $B_1 := lim_{x\to 0+} \frac{dA_1}{dx}(x) \geq 0$;
21. $A_2(x) = A_1(\tilde{\phi}^{-1}(x))$ *on* $(0,\delta]$ *for some* $\delta > 0$.

Then the Riesz potential operator I^α *is* $\left(\mathcal{L}^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) \to \mathcal{L}^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$-*bounded.*

By a *Riesz type potential operator defined via measure*, we mean an operator of the type

$$I^\alpha_\mu f(x) := \int_X \frac{f(y)}{\mu(x, d(x,y))^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

where $0 < \alpha < 1$.

We obtain the following result for such operator.

Theorem 28. *Let* $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < (1-\lambda)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/(1-\lambda)$. *Suppose that* $\theta_1 > 0$ *and that* $\theta_2 \geq \theta_1(1 + \alpha q/(1-\lambda))$. *Let* A_1 *and* A_2 *be continuous non-negative functions on* $(0, p-1]$ *and* $(0, q-1]$ *respectively satisfying the conditions:*

22. $A_2 \in C^1((0,\delta])$ *for some positive* $\delta > 0$;
23. $lim_{x\to 0+} A_2(x) = 0$;
24. $0 \leqslant B := \lim\limits_{x\to 0+} \frac{d}{dx} A_2(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
25. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *where* $\bar{\phi}^{-1}$ *is the inverse of* $\bar{\phi}$ *on* $(0,\delta]$ *for some* $\delta >$ 0.

Then the Riesz potential operator I^α *is* $\left(L^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1}(X,\mu) - L^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2}(X,\mu)\right)$-*bounded.*

We also deal with potential operators in the framework of nonhomogeneous spaces. Namely, let (X, d, μ) be a topological space with a complete measure μ such that the space of compactly supported functions are dense in $L^1(X,\mu)$ and d is a quasimetric satisfying the standard conditions. We will also assume that $d_X \equiv \mathrm{diam}(X) < \infty$. In what follows we do NOT assume that μ is doubling!

Let

$$(K_\alpha f)(x) = \int_X \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y),$$

where $0 < \alpha < 1$.

We need the following *modified* maximal operator on X

$$(\widetilde{M}f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu B(x_0, N_0 r)} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y),$$

where $N_0 = C_t(1 + 2C_s)$ and the constants C_s and C_t are from the definition of quasimetric d. Let b be a constant. We will use the symbol bB for a ball $B(x, br)$, where $B \equiv B(x, r)$.

We now define a modified Morrey space, which will be useful for our purposes.

Definition 29. *Let* $1 < p < \infty$ *and let* $0 \leq \lambda < 1$*. Suppose that* a *is a positive constant. We denote by* $L^{p,\lambda}(X, \mu)_a$ *the modified Morrey space defined by the norm*

$$\| f \|_{L^{p,\lambda}(X,\mu)_a} = \sup_{x \in X, 0 < r} \left(\frac{1}{\mu(aB)^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Let us study the boundedness of the operator K_α from the space $L^{p),\lambda)}_{\theta_1, A_1}(X, \mu)_{N_0}$ to $L^{q),\lambda)}_{\theta_2, A_2}(X, \mu)_{N_0 \overline{a}}$ where the space $L^{p),\lambda)}_{\theta, A}(X, \mu)_a$ is defined by the norm

$$\| f \|_{L^{p),\lambda)}_{\theta,A}(X,\mu)_a} = \sup_{0 < \varepsilon \leq p-1} \sup_{x,r} \left[\frac{\varepsilon^\theta}{\mu B(x, ar)} \int_{B(x,r)} |f(y)|^{p-\varepsilon} d\mu(y) \right]^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

The following results was obtained.

Theorem 30. *Let* $1 < p < \infty,\ 0 < \alpha < (1 - \lambda)/p,\ 0 < \lambda < 1,\ 1/p - 1/q = \alpha/(1 - \lambda)$*. Suppose that* $\theta_1 > 0$ *and that* $\theta_2 \geq \theta_1(1 + \alpha q/(1 - \lambda))$*. Let* A_1 *and* A_2 *be continuous non-negative functions on* $(0, p - 1]$ *and* $(0, q - 1]$ *respectively satisfying the conditions:*

26. $A_2 \in C^1((0, \delta])$ *for some positive* $\delta > 0$;
27. $lim_{x \to 0+} A_2(x) = 0$;
28. $0 \leqslant B := \lim_{x \to 0+} \frac{d}{dx} A_2(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
29. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *where* $\bar{\phi}^{-1}$ *is the inverse of* $\bar{\phi}$ *on* $(0, \delta]$ *for some* $\delta > 0$.

Then the potential operator K^α *is* $\left(L^{p),\lambda)}_{\theta_1, A_1}(X, \mu)_{N_0} \to L^{q),\lambda)}_{\theta_2, A_2}(X, \mu)_{N_0 \overline{a}} \right)$*-bounded.*

We can also show an extended version of the reduction lemma, namely:

Lemma 31. *Let* U *and* Λ *be operators (not necessarily sublinear) satisfying the following relation in Morrey spaces*

$$\| Uf \|_{L^{q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)}(X)} \leq C_{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon), q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)} \| \Lambda f \|_{L^{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon)}(X)}$$

for all sufficiently small $\varepsilon \in (0, \sigma]$, *where* $0 < \sigma < s_{max}$. *If*

$$\sup_{0 < \varepsilon < \sigma} C_{p-\varepsilon, \lambda - A_1(\varepsilon), q-\varepsilon, \lambda - A_2(\varepsilon)} < \infty$$

and

$$\sup_{0 < \varepsilon < \sigma} \frac{\psi(\varepsilon)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}}{\varphi(\varepsilon)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}} < \infty,$$

then the relation is also valid in the generalized grand Morrey space

$$\| Uf \|_{L^{q),\lambda)}_{\psi,A_2}(X)} \leq C \| \Lambda f \|_{L^{p),\lambda)}_{\varphi,A_1}(X)}$$

with

$$C = \frac{C_0}{\varphi(\sigma)^{\frac{1}{p-\sigma}}} \sup_{0<\varepsilon<\sigma} C_{p-\varepsilon,\lambda-A_1(\varepsilon),q-\varepsilon,\lambda-A_2(\varepsilon)},$$

where C_0 may depend on $\gamma, p, \lambda, \varphi, A$ and d_X, but does not depend on σ and f.

In what follows by $\mathcal{D}(X)$ we denote the set of all bounded functions. The following boundedness results were obtained.

Theorem 32. *Let $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, and $0 < \lambda < 1$. Suppose T is a Calderón-Zygmund operator and $b \in BMO(X)$. Then the commutator operator $[b, T]$ is bounded in $L^{p),\lambda)}_{\theta,A(\cdot)}(X,\mu) \cap \mathcal{D}(X)$.*

Theorem 33. *Let I^α be a potential operator and let M be the maximal operator. Assume that $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < (1-\lambda)/p$, $0 < \lambda < 1$, $1/p - 1/q = \alpha/(1-\lambda)$. Suppose that $\theta_1 > 0$ and that $\theta_2 \geq \theta_1[1 + \alpha q/(1-\lambda)]$. Let A_1 and A_2 be continuous non-negative functions on $(0, p-1]$ and $(0, q-1]$ respectively satisfying the conditions:*

30. $A_2 \in C^1((0,\delta])$ *for some positive* $\delta > 0$;
31. $lim_{x\to 0+} A_2(x) = 0$;
32. $0 \leqslant B := \lim\limits_{x\to 0+} \frac{d}{dx} A_2(x) < \frac{(1-\lambda)^2}{\alpha q^2}$
33. $A_1(\eta) = A_2(\bar{\phi}^{-1}(\eta))$, *where* $\bar{\phi}^{-1}$ *is the inverse of* $\bar{\phi}$ *on* $(0,\delta]$ *for some* $\delta > 0$.

If $b \in BMO(X)$, then the operator $M[b, I^\alpha]$ is bounded from the space $L^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1(\cdot)}(X,\mu)$ to $L^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2(\cdot)}(X,\mu)$.

Theorem 34. *Let the conditions of Theorem 33 be fulfilled. Then the commutator $[b, I_\alpha]$ is bounded from $L^{p),\lambda)}_{\theta_1,A_1(\cdot)}(X,\mu)$ to $L^{q),\lambda)}_{\theta_2,A_2(\cdot)}(X,\mu)$.*

We define the weighted grand Morrey space $M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)$ as follows:

$$M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X) = \left\{ f : \| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)} < \infty \right\},$$

where

$$\| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{B\subset X} \frac{1}{(w_2(B))^\lambda} \left(\varepsilon^\theta \int_B |f(x)|^{p-\varepsilon} w_1(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}},$$

$w_2(B) = \int_B w_2\,(x) d\mu(x)$, $\mu(X) < \infty$, $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < 1/p$, $\theta > 0$, and w_1 and w_2 are weight functions on X, i.e. almost everywhere positive and integrable functions on X. Now we define another type of grand Morrey space $\| f \|_{\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)}$. In this case, one of the weight function plays the role of a multiplier in the definition of a norm. This space is defined with respect to the norm:

$$\| f \|_{\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)} := \sup_{0<\varepsilon<p-1} \sup_{B\subset X} \frac{1}{(w_2(B))^\lambda} \left(\varepsilon^\theta \int_B |f(x) w_1(x)|^{p-\varepsilon} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}.$$

If $w_1 \equiv w_2 := w$, then we denote $M^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)$ ($\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w_1,w_2}(X)$, respectively) by $M^{p),\theta,\lambda}_{w}(X)$ ($\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w}(X)$, respectively).

We will assume that a sublinear operator T, defined on a class of measurable functions $f: X \to \mathbb{R}$ satisfies the condition: there is a positive constant c_0 such that for all $f \in L^1(X)$ with compact support and $x \notin \operatorname{supp} f$,

$$|Tf(x)| \le c_0 \int_X \frac{|f(y)|}{\mu B(x, d(x,y))} d\mu(y).$$

In this case, we say that T satisfies condition $S(X)$.

Theorem 35. *Let* $1 < p < \infty$, $\theta > 0$, $0 < \lambda < 1/p$, $w \in A_p(X)$. *If the sublinear operator* T *satisfies condition* $S(X)$ *and condition* $\mathcal{B}_r(X)$ *for* $1 < r \le p$, *then the inequality*

$$\| Tf \|_{M^{p),\theta,\lambda}_w(X)} \le C \| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_w(X)}, \quad f \in D(X)$$

holds.

Let $0 < \alpha < 1$. We say that a sublinear operator T_α of fractional type satisfies the condition $S_\alpha(X)$ if there is a positive constant C such that for all functions $f \in L^1(X)$ with compact supports and all $x \notin \operatorname{supp} f$,

$$|T_\alpha f(x)| \le C \int_X \frac{f(y)}{\mu(B(x, d(x,y))^{1-\alpha}} d\mu(y).$$

Like in the diagonal case, we will also suppose that the sublinear operator T_α is bounded between appropriate weighted Lebesgue spaces.

Definition 36. *Let* $0 < \alpha < 1$ *and* $1 < r < 1/\alpha$. *We set* $s = \frac{r}{1-\alpha r}$. *We say that a sublinear operator* T_α *satisfies the condition* $\mathcal{B}_{\alpha,r,s}(X)$ *if there exists a positive constant* C *independent of* f *such that for every weight* $w \in A_{1+s/r'}(X)$ *the inequality*

$$\| T_\alpha(f w^\alpha) \|_{L^s_w(X)} \le C \| f \|_{L^r_w(X)}, \quad f \in D(X),$$

is fulfilled. Further, we say that a sublinear operator T_α *satisfy the condition* $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha,r,s}(X)$, $1 < r < s < \infty$, *if it is bounded from* $L^r_{w^r}(X)$ *to* $L^s_{w^s}(X)$ *for every weight* $w \in A_{r,s}(X)$.

Theorem 37. *Let* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, *and* $\theta > 0$. *We set* $q = \frac{p}{1-\alpha p}$. *Let sublinear operator* T_α *satisfy the conditions* $S_\alpha(X)$ *and* $\mathcal{B}_{\alpha,r,s}(X)$ *for all* (r,s) *with the condition* $r \le p$, $s \le q$ *and* $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \alpha$. *Suppose that* $0 < \lambda < 1/q$ *and that* $w \in A_{1+q/p'}(X)$. *Then there is a constant* $c > 0$ *such that for all* $f \in M^{p),\theta,\lambda}_w(X)$,

$$\| T_\alpha(f w^\alpha) \|_{M^{q),q\theta/p,\lambda}_w(X)} \le c \| f \|_{M^{p),\theta,\lambda}_w(X)}, \quad f \in D(X).$$

Theorem 38. *Let* $0 < \alpha < 1$, $1 < p < 1/\alpha$, *and* $\theta > 0$. *We set* $q = \frac{p}{1-\alpha p}$. *Suppose that* $0 < \lambda < 1/q$ *and that* $w \in A_{p,q}(X)$. *Let sublinear operator* T_α *satisfy the conditions* $S_\alpha(X)$ *and* $\overline{\mathcal{B}}_{\alpha,r,s}(X)$ *for all pairs* (r,s) *with the condition* $r \le p$, $s \le q$ *and* $\frac{1}{r} - \frac{1}{s} = \alpha$. *Then there is a positive constant* c *such that for all* $f \in D(X)$,

$$\| T_\alpha f \|_{\mathcal{M}^{q),q\theta/p,\lambda}_{w,w^q}(X)} \leq c \| f \|_{\mathcal{M}^{p),\theta,\lambda}_{w,w^q}(X)}.$$

We finish the chapter by providing some notes and bibliographic references related to chapter 4. The results are taken from Kokilashvili, Meskhi, and Rafeiro [9,10,11,12] and Rafeiro [13].

The fourth chapter, entitled «**Bounded variation spaces with variable exponent**», is devoted to the study of some bounded variation spaces with variable exponent and study some structural properties, the spaces are introduced in the Wiener and in the Riesz sense. We characterize global Lipschitz Nemytskii operators in the Riesz bounded variation space with variable exponent and obtain a Riesz representation lemma. We end the chapter characterizing the linear functionals on variable exponent Bochner–Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}([a,b],B)$ in terms of the variable exponent Riesz bounded variation spaces for vector measures, without imposing the Radon–Nikodym property on the Banach space B.

By an *admissible function* we mean a function $p\colon [a,b] \to [1,\infty)$ with $p_+ < \infty$. Let p be an admissible function and $\Pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$ be a partition of the interval $[a,b]$. We define the functional $\mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}$ by

$$\mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}(f) = \sup_{\Pi^*_{[a,b]}} \sum_{i=1}^{n} | f(t_i) - f(t_{i-1}) |^{p(x_{i-1})} =: \mathring{\varrho}_{(a,b)}(f)$$

where $\Pi^*_{[a,b]}$ is a tagged partition of the interval $[a,b]$, i.e. a partition of the interval $[a,b]$ together with a finite sequence of numbers $x_0, \dots, x_{n-1}$ subject to the conditions that for each i, $t_i \leq x_i \leq t_{i+1}$. Since $\mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}$ is a convex pseudo-modular, we can introduce a norm, namely:

Definition 39. *Let p be an admissible function. We define the space of functions of $p(\cdot)$-bounded variation, or the space of functions of variable bounded variation by*

$$BV^{p(\cdot)}([a,b]) = \left\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f(a) = 0 \quad \wedge \quad \| f \|_{BV^{p(\cdot)}(a,b)} < +\infty \right\}$$

where

$$\| f \|_{BV^{p(\cdot)}(a,b)} = inf \left\{ \lambda > 0 \mid \mathring{\mathfrak{V}}^{p(\cdot)}_{[a,b]}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

is the Luxemburg norm.

We prove that the $p(\cdot)$-bounded variation space $BV^{p(\cdot)}([a,b])$ is a Banach space, is non-separable, has a subspace isomorphic to c_0 and satisfy the embedding $BV^{p(\cdot)}[a,b] \hookrightarrow BV^{q(\cdot)}([a,b])$ for functions $q(x) \geq p(x)$. We also prove a Helly principle of choice type result in $BV^{p(\cdot)}([a,b])$ in the following form.

Theorem 40. *Every sequence in $BV^{p(\cdot)}([a,b])$, uniformly bounded in variable variation, has a subsequence convergent pointwise to a function $f \in B$ $V^{p(\cdot)}([a,b])$.*

By the *modulus of $p(\cdot)$-continuity* of the function $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ we mean

$$\omega_{\delta}^{p(\cdot)}(f) = \sup_{\Pi_{\delta}^{*}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}$$

where Π_{δ}^{*} is a tagged partition of $[a,b]$ with mesh, at most, δ. If $f \in BV^{p(\cdot)}([a,b])$ and it satisfies the *vanishing condition* $\lim_{\delta\to 0}\omega_{\delta}^{p(\cdot)}(f) = 0$, we say that f is an *absolutely $p(\cdot)$-continuous function.* The *space of absolutely $p(\cdot)$-continuous functions* will be denoted by $C^{p(\cdot)}([a,b])$. If p is an admissible function then it is proved that $C^{p(\cdot)}([a,b])$ enjoys the following two properties:

- is a closed subspace of the space $BV^{p(\cdot)}([a,b])$,
- is a separable space.

We now introduce variable exponent bounded variation spaces in the Riesz sense.

Definition 41. *Let $\Pi_{[a,b]} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ be a partition of $[a,b]$ and p an admissible function. We define the functionals $\sigma_{[a,b]}^{p(\cdot)}, \mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}\colon \mathbb{R}^{[a,b]} \to \overline{\mathbb{R}}_{+}$ by*

$$\sigma_{[a,b]}^{p(\cdot)}\left(f, \Pi_{[a,b]}^{*}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(t_i) - f(t_{i-1})|^{p(x_{i-1})}}{(t_i - t_{i-1})^{p(x_{i-1})-1}}, \quad \mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(f) = \sup_{\Pi_{[a,b]}^{*}} \sigma_{[a,b]}^{p(\cdot)}\left(f, \Pi_{[a,b]}^{*}\right)$$

where $\Pi_{[a,b]}^{*}$ is a tagged partition of the interval $[a,b]$, i.e. a partition of the interval $[a,b]$ together with a finite sequence of numbers $x_0, \dots, x_{n-1}$ subject to the conditions that for each i, $t_i \le x_i \le t_{i+1}$. We now introduce the space of bounded $p(\cdot)$ variation in Riesz sense as $\boldsymbol{RBV}^{p(\cdot)}([a,b]) := \{f \in \mathbb{R}^{[a,b]} \colon \mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(f) < \infty\}$.

When p is a $p(\cdot)$-admissible function the $\mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}$ is a convex pseudo-modular, which allows us to introduce a norm on the quotient space $RBV^{p(\cdot)}([a,b]) := \mathbf{RBV}^{p(\cdot)}([a,b])/\mathcal{C}$, where $\mathcal{C}$ is the space of all constant functions, viz.

$$\| f \|_{RBV^{p(\cdot)}([a,b])} = \inf\left\{\lambda > 0 \mid \mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\}.$$

It is proved that $RBV^{q(\cdot)}([a,b])$ is a Banach space, for $p(x) \le q(x)$ satisfy the embedding $RBV^{q(\cdot)}([a,b]) \hookrightarrow RBV^{p(\cdot)}([a,b])$, and $\mathrm{Lip}([a,b]) \subseteq RBV^{p(\cdot)}([a,b]) \subseteq AC([a,b])$. Moreover, $(RBV^{q(\cdot)}([a,b]), |||\cdot|||)$ it is a Banach algebra where $|||\cdot||| := \|\cdot\|_{\infty} + \|\cdot\|_{RBV^{p(\cdot)}}$.

We prove a Riesz type theorem, which connects the Riesz norm with the $L^{p}(\cdot)$-norm of the derivative of the function.

Theorem 42. *Let $p \in \mathbb{P}^{log}([a,b])$. If $f \in AC([a,b])$ and $f' \in L^{p(\cdot)}([a,b])$ then $f \in RBV^{p(\cdot)}([a,b])$. Furthermore we have*

$$\| f \|_{RBV^{p(\cdot)}([a,b])} \lesssim \| f' \|_{L^{p(\cdot)}([a,b])}.$$

In the next theorem, the hypothesis on the function p is relaxed.

Theorem 43. *Let $f \in RBV^{p(\cdot)}([a,b])$ and $p \in C[a,b]$. Then $f' \in L^{p(\cdot)}([a,b])$,*

$$\mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(f) \ge \int_{a}^{b} |f'(t)|^{p(t)} dt,$$

and $\| f' \|_{L^{p(\cdot)}([a,b])} \lesssim \| f \|_{RBV^{p(\cdot)}([a,b])}$.

We now introduce the Nemytskii operator, also known as the superposition operator. Let $f: I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function, such that $\xi \mapsto f(t,\xi)$ is a continuous function for all t in I. The operator F_f, defined by $(F_f \varphi)(t) = f(t, \varphi(t))$, for all $t \in I$ and $\varphi: I \to \mathbb{R}$, is called the *Nemytskii operator* based on f.

We characterize the Nemytskii operator whenever it acts between variable Riesz bounded variation spaces, namely:

Theorem 44. *Let* $p \in \mathbb{P}^{log}([a,b])$, $q \in \mathbb{P}([a,b])$, *and* $q(x) \le p(x)$. *The Nemytskii operator* F_f *maps* $RBV_a^{p(\cdot)}([a,b])$ *into* $RBV_a^{q(\cdot)}([a,b])$ *and is globally Lipschitz if and only if there are functions* $g, h \in RBV_a^{q(\cdot)}([a,b])$ *such that*

$$f(t,y) = g(t)y + h(t), \quad t \in [a,b], \ y \in \mathbb{R}.$$

The next result shows that a globally Lipschitz Nemytskii operator acting between Riesz bounded variation spaces is constant when the exponent of the target space is *essentially bigger* than the exponent from the domain space, namely:

Theorem 45. *Let* $p \in \mathbb{P}^{log}([a,b])$, $q \in \mathbb{P}([a,b])$, *and* $1 < p_+ < q(t)$ *for all* $t \in [a,b]$. *If the Nemytskii operator* F_f *maps* $RBV_a^{p(\cdot)}([a,b])$ *into* $RBV_a^{q(\cdot)}([a,b])$ *and is globally Lipschitz, then the function* f *satisfies the condition* $f(t,x) = f(t,0)$ *for* $t \in [a,b]$ *and* $x \in \mathbb{R}$.

We end the chapter providing a general characterization of the dual space of the variable exponent Bochner-Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}([a,b],B)$ without further assumptions on the Banach space B.

We deal from now on with vector measures $G: \mathbb{B}_{[a,b]} \to B^*$, where $\mathbb{B}_{[a,b]}$ is the Borel σ-algebra restricted to the interval $[a,b]$. Let $\mathcal{Q} = \{Q\}$ be a finite partition of $[a,b]$ by any kind of disjoint non-degenerate intervals, and consider $p \in \mathbb{P}[a,b]$. We define the $p(\cdot)$-Riesz variation of G on $[a,b]$ by

$$\mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(G,B^*) = \sup_{\mathcal{Q}} \sum_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\| G(Q) \|_{B^*}^{p_Q}}{|Q|^{p_Q - 1}}$$

and the space of vector measures of bounded $p(\cdot)$ variation in the Riesz sense is introduced as $RBV^{p(\cdot)}([a,b],B^*) := \{G: \mathfrak{V}_{[a,b]}^{p(\cdot)}(G,B^*) < \infty\}$.

Theorem 46. *Let* $p, q \in \mathcal{B}([a,b])$ *be conjugate exponent functions with* $p_- > 1$. *Then, the mapping* $G \to \ell_G$, *from* $RBV^{q(\cdot)}([a,b],B^*)$ *to* $(L^{p(\cdot)}([a,b],B))^*$ *defined by*

$$\ell_G(f) = \int_a^b f dG \,, \ f \in L^{p(\cdot)}([a,b],B)$$

is a linear isomorphism, and

$$\| \ell_G \|_{(L^{p(\cdot)}([a,b],B))^*} \asymp \| G \|_{RBV^{q(\cdot)}([a,b],B^*)}.$$

We finish the chapter by providing some notes and bibliographic references related to chapter 4. The results obtained in Chapter 4 appeared in Castillo, Rafeiro, and Merentes [4], and Castillo, Guzmán, and Rafeiro [1, 2, 3].

The fifth chapter, entitled «**Operators with rough kernel**», is devoted to the study of the boundedness of operators with rough kernel in the framework of some non-standard function spaces. The difficulty of such a study stem from the fact that the classical approach for the boundedness of such operators is based upon the rotation method which is not well suited for the case of non-standard function spaces, thus another approach must be devised. Extrapolation technique can be used in this regard for variable exponent Lebesgue spaces, but it is not robust enough for other function spaces, e.g. Morrey spaces. Our approach is based upon some pointwise estimates which allows us to consider potential and fractional maximal operators even of variable order $\alpha(x)$. The developed approach allow us to suggest a general scheme based on the rescaling properties of the spaces. This scheme, together with the pointwise estimate for the maximal operator with rough kernel, allows us to derive the boundedness of the operator M_ω from the boundedness of the classical maximal operator on the same scale of spaces. Applying this general scheme, we obtain the boundedness of maximal operator with rough kernel in some non-standard function spaces, viz. Musielak–Orlicz spaces, generalized variable exponent Morrey spaces, generalized Orlicz–Morrey spaces, complementary generalized Morrey spaces, and variable exponent continual Herz spaces. These results are new even for the constant exponent case.

Let us recall that the maximal operator with rough kernel is defined as

$$M_\omega f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} |\,\omega(y) f(x-y)| dy,$$

where ω is homogeneous of degree 0 and is a p-summable function. The fractional maximal operator $M_{\omega,\alpha}$ is defined as

$$M_{\omega,\alpha} f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n-\alpha}} \int_{|y|<r} |\,\omega(y)||f(x-y)| dy.$$

We introduced the rough sharp maximal operator as

$$M_\omega^{\#} f(x) = f_\omega^{\#}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} |\,\omega(y)||f(x-y) - f_{B(x,r)}| dy$$

where f_B is the integral average, namely $f_B := \frac{1}{|B|} \int_B f\,(y) dy$. In a similar fashion to the maximal operator with rough kernel, we can define the fractional operator with rough kernel and with variable order α,

$$I_\omega^{\alpha(x)} f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\omega(x-y)}{|x-y|^{n-\alpha(x)}} f(y) dy.$$

We obtained the following pointwise estimates.

Lemma 47. *Let* $f \in L_{loc}^{s'}(\mathbb{R}^n)$, *$\omega$ is a homogeneous function of degree 0, and* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ *with* $s > 1$. *Then*

$$M_\omega f(x) \leq \frac{\| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}}{n^{\frac{1}{s}}} \left(M(|f|^{s'})(x)\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Lemma 48. *Let* $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, *and* q *be defined pointwise by* $1/q(x) = 1/p(x) - \alpha/n$. *Then we have the following pointwise estimate*

$$M_{\omega,\alpha} f(x) \leq \left[M_{|\omega|^{\frac{n}{n-\alpha}}}\left(|f(\cdot)|^{\frac{p(\cdot)\ \ n}{q(\cdot) n-\alpha}}(x)\right)\right]^{1-\frac{\alpha}{n}} \left(\int_\Omega |f(y)|^{p(y)} dy\right)^{\frac{\alpha}{n}}.$$

Lemma 49. *Let* ω *be a homogeneous function of degree 0 and* $\omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$. *Then*

$$|f_\omega^\#(x)| \leq M_\omega f(x) + \frac{1}{n} Mf(x) \| \omega \|_{L^1(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Lemma 50. *Let* $f \in L_{loc}^{s'}(\mathbb{R}^n)$, $1 < s < \infty$, ω *be a homogeneous function of degree 0,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, *and* $\alpha(x) > 0$ *almost everywhere. Then*

$$\left|I_\omega^{\alpha(x)}(f\chi_{B(x,r)})(x)\right| \leq \frac{1}{\alpha(x)^{\frac{1}{s}}} \| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\frac{\alpha(x)}{s}} \left(I^{\alpha(x)}(|f|^{s'} \chi_{B(x,r)})(x)\right)^{\frac{1}{s'}},$$

at all points $x \in \mathbb{R}^n$ *such that* $\alpha(x) > 0$.

Corollary 51. *Let* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$,$1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, *and* $f \in L_{loc}^{s'}(\mathbb{R}^n)$. *Then*

$$\left|I_\omega^{\alpha(x)}(f\chi_{B(x,r)})(x)\right| \lesssim \| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\alpha(x)} \left(M(|f|^{s'})(x)\right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Lemma 52. *Let* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$,$1 < s < \infty$, *and* $\alpha \in L^\infty(\Omega)$. *Then*

$$\left|I_\omega^{\alpha(x)}(f\chi_{\mathbb{R}^n \backslash B(x,r)})(x)\right| \lesssim \| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\frac{\alpha(x)}{s} - \frac{\beta(x)}{s'}} \left(I^{\alpha(x)+\beta(x)}(|f|^{s'} \chi_{\mathbb{R}^n \backslash B(x,r)})\right)^{\frac{1}{s'}}$$

where β *is an arbitrary function chosen so as*

$$\inf_{x\in\Omega} \left[\beta(x) - \frac{\alpha(x)}{s-1}\right] > 0$$

and $C = C(\alpha, s, \beta)$.

Lemma 53. *Let* Ω *be a bounded open set,* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$,

$$\sup_{x\in\Omega} p(x)\alpha(x) < n,$$

$inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$, *and* $1 < s < \infty$. *Then*

$$\left|I_\omega^{\alpha(x)}(f\chi_{\Omega \backslash B(x,r)})(x)\right| \leq C \| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\alpha(x) - \frac{n}{p(x)}} \| f \|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

Lemma 54. *Let* Ω *be a bounded open set,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, *and* $sup_{x\in\Omega}[\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n$. *Then*

$$\left|I_\omega^{\alpha(x)}(f\chi_{\Omega \backslash B(x,r)})(x)\right| \lesssim \| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})} r^{\alpha(x) - \frac{n-\lambda(x)}{p(x)}},$$

when $\rho_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f) \leq 1$.

Using the aforementioned inequalities, we obtain the following boundedness results in the framework of variable exponent Lebesgue spaces.

Theorem 55. *Let ω be a homogeneous function of degree 0,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq (p')_+$, *and* $\frac{p}{s'} \in \mathfrak{P}(\Omega)$. *Then the operator* M_ω *is bounded in the space* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Theorem 56. *Let ω be a homogeneous function of degree 0,* $\omega \in L^{\frac{sn}{n-\alpha}}(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq \left[\left((1-\frac{\alpha}{n})q\right)'\right]_+$, $\frac{(1-\alpha/n)q}{s'} \in \mathfrak{P}(\Omega)$. *Then the operator* $M_{\omega,\alpha}$ *is* $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)\right)$*- bounded.*

Theorem 57. *Let ω be a homogeneous function of degree 0,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq (p')_+$, *and* $\frac{p}{s'} \in \mathfrak{P}(\Omega)$. *Then the operator* $M_\omega^{\#}$ *is bounded in the space* $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

Theorem 58. *Let Ω be a bounded open set,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $sup_{x\in\Omega}\alpha(x)p(x) < n$, $s \geq (p')_+$, *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$. *Then the fractional operator with rough kernel* $I_\omega^{\alpha(x)}$ *is* $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)\right)$*-bounded, where* $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$.

Corollary 59. *Let Ω be a bounded open set,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $sup_{x\in\Omega}\alpha(x)p(x) < n$, $s \geq (p')_+$, *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$. *Then the fractional operator with rough kernel* $M_{\omega,\alpha(x)}$ *is* $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot)}(\Omega)\right)$*-bounded, where* $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n}$.

Similar results were obtained in the framework of variable exponent Morrey spaces.

Theorem 60. *Let Ω be an open bounded set in* $\mathbb{R}^n$, $0 \leq \lambda(x) \leq \lambda_+ < n$, $s \geq (p')_+$, $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$. *Then the maximal operator with rough kernel* M_ω *is bounded in the space* $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$.

Theorem 61. *Let Ω be a bounded open set, ω be a homogeneous function of degree 0,* $\omega \in L^{\frac{sn}{n-\alpha}}(\mathbb{S}^{n-1})$, $s \geq \left[\left((1-\frac{\alpha}{n})q\right)'\right]_+$, *and* $\frac{(1-\alpha/n)q}{s'} \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$. *Then the fractional maximal operator with rough kernel* $M_{\omega,\alpha}$ *is* $\left(L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)\right)$*-bounded, where* $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$.

Theorem 62. *Let ω be a homogeneous function of degree 0,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1}), s \geq (p')_+$, *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$. *Then the operator* $M_\omega^{\#}$ *is bounded in the space* $L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)$.

Theorem 63. *Let Ω be a bounded open set,* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, $inf_{x\in\Omega}\alpha(x) > 0$, $sup_{x\in\Omega}[\lambda(x) + \alpha(x)p(x)] < n$, $s \geq (p')_+$, *and* $p \in \mathbb{P}^{log}(\Omega)$. *Then the fractional operator with rough kernel* $I_\omega^{\alpha(x)}$ *is* $\left(L^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega) \to L^{q(\cdot),\lambda(\cdot)}(\Omega)\right)$*-bounded, where* $\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p(x)} - \frac{\alpha(x)}{n-\lambda(x)}$.

We can extend the previously developed techniques to other function spaces in a unified way.

Definition 64. *Let X be a normed space with the norm* $\| f \|_X$. *Define the space* X_s, $s > 0$ *by the condition* $f^s \in X$. *We can introduce in* X_s *a functional by*

$$\| f \|_{X_s} := \| |f|^s \|_X^{\frac{1}{s}}.$$

We obtained the following boundedness result.

Theorem 65. *Let* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 < s < \infty$, *and* X *be a Banach lattice of functions in* $\mathbb{R}^n$. *If the maximal operator is bounded in the space* $X_{\frac{1}{s'}}$, *then the operator* M_ω *is bounded in the space* X *and*

$$\| M_\omega \|_X \leq \frac{\| \omega \|_{L^s(\mathbb{S}^{n-1})}}{n^{\frac{1}{s}}} \| M \|_{X_{\frac{1}{s'}}}^{\frac{1}{s'}}.$$

From Theorem 65 we obtain the boundedness of maximal operator with rough kernel in the following spaces, popular in the theory of function spaces during last decades:

- Musielak-Orlicz spaces;
- generalized variable exponent Morrey spaces;
- generalized Orlicz-Morrey spaces;
- generalized complementary Morrey spaces;
- variable exponent Herz spaces; and
- grand variable Lebesgue spaces.

We will just mention in detail the case of Musielak-Orlicz space and generalized variable exponent Morrey spaces.

The Musielak-Orlicz space

$$L^{\Phi(\cdot,\cdot)}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \| f \|_{L^{\Phi(\cdot,\cdot)}} < \infty \right\}$$

is defined by the norm $\| f \|_{L^{\Phi(\cdot,\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\,(x, \frac{|f(x)|}{\lambda}) dx \leq 1\}$ and $\Phi(\cdot, r)$ is a measurable function for every $r \geq 0$ and also $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is a Young function in $\mathbb{R}$.

We obtained the following boundedness result.

Theorem 66. *Let* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ *and* $t \mapsto \Phi(x, t^{\frac{1}{s'}})$ *be convex. Then* M_ω *is bounded in the space* $L^{\Phi(\cdot,\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ *if* $\Phi(x,t)$ *satisfy the conditions*

$(A_0(\Phi))$

There exists $\beta > 0$ *such that* $\Phi(x, \beta) \leq 1$ *and* $\Phi(x, \sigma) \geq 1$ *for every* $x \in \mathbb{R}^n$.

$(A_1(\Phi))$

There exists $\beta \in (0,1)$ *such that*

$$\Phi_B^+(\beta t) \leq \Phi_B^-(t)$$

for every $t \in [\sigma, (\Phi_B^-)^{-1}(1/|B|)]$, *where* $\Phi_B^-(t) := inf_{x \in B} \Phi(x,t)$ *and* $\Phi_B^+(t) := sup_{x \in B} \Phi(x,t)$.

$(A_2(\Phi))$

There exist $\beta > 0$ *and* $h \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *such that, for every* $t \in [0, \sigma]$, $\Phi(x, \beta t) \leq \Phi(y, t) + h(x) + h(y)$.

The result on the boundedness of maximal operator with rough kernel in generalized variable exponent Morrey space (Ω) [defined as the space of all f measurable functions for which

$$\| f \|_{L^{p(\cdot),\varphi(\cdot,\cdot)}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega, r>0} \frac{1}{\varphi(x,r)} \| f \|_{L^{p(\cdot)}(\Omega(x,r))} < \infty$$

where $\Omega(x,r) := B(x,r) \cap \Omega$] is as follows.

Theorem 67. *Let* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *be an open bounded set and* $\omega \in L^s(\mathbb{S}^{n-1})$ *for* $(p_-)' < s < \infty$. *If the function* $\varphi(x,r)$ *satisfies* $inf_{x\in\Omega,r>0} \frac{\varphi(x,r)}{r^{\frac{n}{p(x)}}} > 0$ *as well as the condition*

$$\int_r^{diam(\Omega)} \frac{\varphi(x,t)^{s'}}{t^{\frac{s'n}{p(x)}}} \frac{dt}{t} \leq C \frac{\varphi(x,r)^{s'}}{r^{\frac{ns'}{p(x)}}},$$

where $C > 0$ *does not depend on* x *and* r, *then the maximal operator with rough kernel* M_ω *is bounded in the space* $L^{p(\cdot),\varphi(\cdot,\cdot)}(\Omega)$.

We finish the chapter providing some notes and bibliographic references related to Chapter 5. The content of Chapter 5 is taken from Rafeiro and Samko [14, 15].

CONCLUSION

1. The notion of variable exponent Bergman spaces is defined and it is proved that polynomials are dense in the aforementioned function spaces.
2. The notion of mollified dilation is introduced which is used to prove the boundedness of the Bergman projection in variable exponent Bergman spaces through the usage of extrapolation technique.
3. It is proved that several operators, e.g. Bergman projection, Berezin transform, and Toeplitz operator, are bounded in variable exponent Bergman spaces under the log-Hölder condition on the exponent function.
4. It is proved that the commutator of Calderón–Zygmund type operators, as well as the commutator of a potential operator with a BMO function, are bounded in a generalized grand Morrey space even in the setting of spaces of homogeneous type.
5. Boundedness is proved for sublinear operators and commutators of sublinear operators in grand Morrey spaces in the framework of spaces of homogeneous type.
6. A Riesz representation results are obtained in variable exponent bounded variation spaces in the Riesz sense.
7. A description of the linear functionals on variable exponent Bochner-Lebesgue spaces in terms of the variable exponent Riesz bounded variation spaces for vector measures is obtained.
8. A new method to obtain the boundedness of some operators with rough kernel is developed.

The dissertation is theoretical. The results and methods presented in the dissertation can be used in further investigations in the realm of non-standard function spaces and operator theory in these spaces, e.g. variable exponent non-standard analytic function spaces, grandified spaces, variable exponent bounded variation, maximal operator, Calderón-Zygmund operators, and Riesz potential, among other topics.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

**УНИВЕРСИТЕТ ОБЪЕДИНЕННЫХ АРАБСКИХ ЭМИРАТОВ И
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

УМБЕРТО ЖИЛ СИЛЬВА РАФЕЙРО

НЕСТАНДАРТНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ К ГАРМОНИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

01.01.01– Математик анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

ТАШКЕНТ–2021

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского и университете Объединенных Арабских Эмиратов.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Альберто Фьоренца** доктор математических наук, профессор
	Чилин Владимир Иванович доктор физико-математических наук, профессор
	Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Математический институт Андреа Размадзе Тбилисского государственного университета

Защита диссертации состоится «____»__________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № _______). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «__» ___________ 2021 года.

(протокол рассылки № __ от «__» __________ 2021 года).

У.Розиков
Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Ж.Адашев
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н.

У.Жамилов
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Целью исследования является изучение пространства Бергмана с переменным показателем, пространства с ограниченной вариацией с переменным показателем, обобщенные большие пространства Морри, проекция Бергмана, максимальный оператор, потенциальный оператор Рисса, операторы Кальдерона-Зигмунда.

Объект исследования: пространства измеримых функций, пространства функций ограниченной вариации, пространства аналитических функций и классические операторы гармонического анализа.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

введено понятие смягченной дилатации в рамках пространств Бергмана с переменным показателем (ПБПП), которое позволяло доказать ограниченность проекции Бергмана в ПБПП с помощью техники экстраполяции;

доказаны ограниченности нескольких операторов (например, проекции Бергмана, преобразования Березина и оператора Теплица) в ПБПП;

доказаны ограниченности коммутатора типа Кальдерона – Зигмунда, коммутатор потенциального оператора с функцией BMO в обобщенном пространстве большого Морри;

доказаны леммы о представлении Рисса в пространствах ограниченной вариации с переменным показателем в смысле Рисса;

описаны линейные функционалы в пространстве Бохнера-Лебега с переменным показателем в терминах пространств ограниченной вариации Рисса с переменным показателем для векторных мер.

Внедрение результатов исследования. На основании полученных результатов по нестандартных функциональных пространств и теории операторов:

введенное пространство переменной экспоненты пространсва Бергмана (VEBS) в круге используется операторами Кальдерона – Зигмунда для доказательства ограниченности проекции Бергмана в пространствах Лебега на единичный круг в зарубежных научных журналах (Complex Var. Elliptic Equ. 61, No. 8, 1090-1106 (2016), J. Math. Sci., New York 226, No. 4, 344-354 (2017), J. Funct. Spaces 2018, Article ID 8751849, 8 p. (2018)). Применение этих научных результатов позволило ввести и изучить VEBS со смешанной нормой, а также изучить VEBS на верхней полуплоскости и получить характеристики VEBS типа Липшица при соответствующих условиях на переменную экспоненту;

введение понятия смягченной дилатации в рамках VEBS, что позволяет доказать ограниченность проекции Бергмана с помощью техники экстраполяции в статьях зарубежных научных журналов (Czech. Math. J. 70, No. 1, 187 -204 (2020), Int. J. Math. Math. Sci.2018, ID статьи 1417989, 11 стр. (2018), Mediterr. J. Math.17, No. 1, Paper No. 9, 13 p. (2020)). Применение научных результатов позволило ввести и изучить некоторые структурные свойства пространств Фока с переменной экспонентой, изучить компактность некоторых классов ограниченных операторов в пространстве Бергмана с переменной экспонентой, а также исследовать непрерывность и компактность композиции операторов в пространстве Бергмана с переменной экспонентой;

доказательство ограниченности нескольких операторов в VEBS используется для рассмотрения модулярных неравенств для некоторых линейных операторов в пространствах Лебега с переменной экспонентой на комплексной плоскости в статьях зарубежных научных журналов (Adv. Oper. Theory, 4, No. 4, 738-749 (2019), Math. Notes 106, No. 2, 229-234 (2019), Complex Analysis and Operator Theory 13, 275–289 (2019)). Применение научных результатов позволило ввести и изучить пространство Харди с переменной экспонентой аналитических функций на единичном круге, чтобы показать, что если справедливо модульное неравенство некоторых линейных операторов, то переменный показатель степени должен быть постоянным.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пять глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 210 страницы.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I бўлим (part I; 1 часть)

1. R. E. Castillo, O. M. Guzmán, and H. Rafeiro. Linear functionals on variable exponent Bochner-Lebesgue spaces // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. 30.3 (2019), pp. 583–597. (3. Scopus IF: 1.7).
2. R. E. Castillo, O. M. Guzmán, and H. Rafeiro. Nemytskii operator in Riesz bounded variation spaces with variable exponent // Mediterr. J. Math. 14.1 (2017), Paper No. 2, 11. (3. Scopus IF: 1.2).
3. R. E. Castillo, O. M. Guzmán, and H. Rafeiro. Variable exponent bounded variation spaces in the Riesz sense // Nonlinear Anal. 132 (2016), pp. 173–182. (2. Journal IF: 1.58).
4. R. E. Castillo, N. Merentes, and H. Rafeiro. Bounded variation spaces with p-variable // Mediterr. J. Math. 11.4 (2014), pp. 1069–1079. (3. Scopus IF: 1.2).
5. G. R. Chacón and H. Rafeiro. Toeplitz operators on variable exponent Bergman spaces // Mediterr. J. Math. 13.5 (2016), pp. 3525–3536. (3. Scopus IF: 1.2).
6. G. R. Chacón and H. Rafeiro. Variable exponent Bergman spaces // Nonlinear Anal. 105 (2014), pp. 41–49. (2. Journal IF: 1.58).
7. G. R. Chacón, H. Rafeiro, and J. C. Vallejo. Carleson measures for variable exponent Bergman spaces // Complex Anal. Oper. Theory 11.7 (2017), pp. 1623–1638. (3. Scopus IF: 1.3).
8. Karapetyants, H. Rafeiro, and S. Samko. Boundedness of the Bergman projection and some properties of Bergman type spaces // Complex Anal. Oper. Theory 13.1 (2019), pp. 275–289. (3. Scopus IF: 1.3).
9. V. Kokilashvili, A. Meskhi, and H. Rafeiro. Boundedness of commutators of singular and potential operators in generalized grand Morrey spaces and some applications // Studia Math. 217.2 (2013), pp. 159–178. (3. Scopus IF: 1.4).
10. V. Kokilashvili, A. Meskhi, and H. Rafeiro. Boundedness of sublinear operators in weighted grand Morrey spaces // Math. Notes. 102.5 (2017), pp. 664–676. (3. Scopus IF: 0.7).
11. V. Kokilashvili, A. Meskhi, and H. Rafeiro. Commutators of sublinear operators in grand Morrey spaces // Studia Sci. Math. Hungar. 56.2 (2019), pp. 211–232. (3. Scopus IF: 0.7).
12. V. Kokilashvili, A. Meskhi, and H. Rafeiro. Riesz type potential operators in generalized grand Morrey spaces // Georgian Math. J. 20.1 (2013), pp. 43–64. (3. Scopus IF: 0.6).
13. H. Rafeiro. A note on boundedness of operators in grand grand Morrey spaces // Advances in harmonic analysis and operator theory. Vol. 229. Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel, 2013, pp. 349–356.
14. H. Rafeiro and S. Samko. Maximal operator with rough kernel in variable Musielak-Morrey-Orlicz type spaces, variable Herz spaces and grand variable

Lebesgue spaces // Integral Equations Operator Theory 89.1 (2017), pp. 111–124. (3. Scopus IF: 1.4).

15. H. Rafeiro and S. Samko. On maximal and potential operators with rough kernels in variable exponent spaces // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat.Appl. 27.3 (2016), pp. 309–325. (3. Scopus IF: 1.7).

II бўлим (Part 2; 2 часть)

16. Nonstandard bounded variation spaces. In: 12th International ISAAC Congress, 2 August 2019, Aveiro, Portugal.
17. Bergman projection on non-standard function spaces. In: Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis-VIII, 24 April 2018, Rostov-on-Don, Russia.
18. Maximal and Riesz potential operators with rough kernel in non-standard function spaces. In: Complex and Harmonic Analysis III Int’l Conference in Memory of Uri Srebro, 5 June 2017, Holon, Israel.
19. Generalized Morrey spaces and fractional integral operators. In: 10th International ISAAC Congress, 4 August 2015, Macau, China.
20. Operators with rough kernels in variable exponent spaces. In: Swedish-Georgian Conference in Analysis & Dynamical Systems, 17 July 2015, Tbilisi, Georgia.
21. Riesz potential operator in continual variable exponents Herz spaces. In: ICNPAA 2014 World Congress: 10th International Conference on Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences, 15 July 2014, Narvik, Norway.
22. Riesz type potential operators in generalized grand Morrey spaces. In: ISAAC2013 - International Society for Analysis and Applications, 5 August 2013, Krakow, Poland
23. Generalized grand Morrey spaces and boundedness of some classical operators. In: Function Spaces X, 11 July 2012, Poznan, Poland.
24. Grand grand Morrey spaces and boundedness of some classical operators. In: 5th Croatian Mathematical Congress, June 19, 2012, Rijeka, Croatia.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида 2021 йил
20 январда таҳрирдан ўтказилди.

Бичими: 84х60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табоғи: 2,75. Адади 50. Буюртма № 9/21.

Гувохнома № 10-3719
“Тошкент кимё технология институти” босмахонасида чоп этилган.
Босмахона манзили: 100011, Тошкент ш., Навоий кўчаси, 32-уй.