**В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**БЕГЖАНОВА КАМИЛА УСНАТДИНОВНА**

# КУЧСИЗ АДДИТИВ ФУНКЦИОНАЛЛАР ФАЗОСИ АФФИН ГОМЕОМОРФИЗМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

**01.01.01 – Математик анализ**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**ТОШКЕНТ – 2021**

**УДК: 517.98**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences**

**В.И.РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ**

**ҚОРАҚАЛПОҚ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ**

**БЕГЖАНОВА КАМИЛА УСНАТДИНОВНА**

# КУЧСИЗ АДДИТИВ ФУНКЦИОНАЛЛАР ФАЗОСИ АФФИН ГОМЕОМОРФИЗМЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

**01.01.01 – Математик анализ**

**ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ**

**ТОШКЕНТ – 2021**

**Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.2.PhD/FM205 рақам билан рўйхатга олинган.**

Диссертация Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://kengash.mathinst.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим порталида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

| | |
|---|---|
| **Илмий раҳбар:** | **Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор |
| **Расмий оппонентлар:** | **Заитов Адилбек Атаханович**<br>физика-математика фанлари доктори, профессор<br>**Жамилов Уйғун Умурович**<br>физика-математика фанлари доктори, катта илмий ходим |
| **Етакчи ташкилот:** | **Ўзбекистон Миллий университети** |

Диссертация ҳимояси В.И.Романовский номидаги Математика Институти ҳузуридаги DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+998 71)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Диссертация билан В.И.Романовский номидаги Математика Институтининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4б-уй. Тел.: (+998 71)-207-91-40).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

**У.А.Розиков**
Илмий даражалар берувчи
Илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., профессор

**Ж.К.Адашев**
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.н., катта илмий ходим

**У.У.Жамилов**
Илмий даражалар берувчи Илмий
кенгаш ҳузуридаги Илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., катта илмий ходим

## КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

**Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати.** Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда бирор компактда берилган ҳақиқий қийматли узлуксиз функциялар фазосида аниқланган кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосини тавсифлашга оид масалаларга келтирилади. Кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосининг геометрик хоссаларини уларнинг тавсифига асосланиб ўрганиш ҳамда ушбу фазо ва унинг қавариқ қисм тўпламлари аффин гомеоморфизмларини кўринишини аниқлаш муҳим аҳамиятга эга. Узлуксиз функцияларнинг Банах панжарасида кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоларини геометрик тавсифлаш – квант механикасининг статистик ва эҳтимоллик жиҳатларини аксиоматик ўрганишдаги муаммоларни ҳал этишнинг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоларини тавсифлаш ва уларнинг аффин гомеоморфизмларининг кўринишларини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Берилган компактнинг бўш бўлмаган барча ёпиқ қисм тўпламларининг фазосини ушбу компактдаги кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосига гомеоморф жойлаштириш мумкинлиги маълум. Таъкидлаш жоизки, нуқталарда яқинлашиш топологиясида кучсиз аддитив функционаллар фазосини чекли ўлчамли фазоларда геометрик тавсифлаш масаласи ҳалигача очиқ турибди. Бу борада, кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси аффин гомеоморфимзларини кўринишини аниқлаш, ва уларни ушбу фазоларни метрикалаштиришга татбиқи мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда, айниқса кейинги йилларда фундаментал фанлар, жумладан квант механикаси ва физикада татбиқига эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда икки нуқтали компакт бўлганда ушбу комапктдаги кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси чекли ўлчамли ва қавариқ компакт тўплам бўлиши кўрсатилган ҳамда кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосининг алгебраик ва топологик хусусиятларини аниқлаш орқали амалий муаммоларни ҳал этиш борасида салмоқли натижаларга эришилди. “Функционал анализ, геометрия ва топология” фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалари ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Илмий натижалардан илм-фаннинг турдош соҳаларида фойдаланиш мақсадида кучсиз аддитив функционаллар назариясини ривожлантириш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

**Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги.** Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

**Муаммонинг ўрганилганлик даражаси.** Л.Б.Шапиро ишида $X$ компактдаги барча ҳақиқий номанфий узлуксиз функциялар конусидаги барча кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган ярим аддитив ярим мультипликатив мусбат бир жинсли функционаллар фазоси, $X$ компактнинг бўш бўлмаган барча ёпиқ қисм тўпламларининг фазосига гомеоморф эканлиги исботланган. Т.Радул томонидан нуқталарда яқинлашиш топологияси киритилган кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосининг компакт бўлиши кўрсатилган ҳамда барча эҳтимоллик ўлчовлар фазоси, барча бўш бўлмаган ёпиқ қисм тўпламлар фазоси, қўшилишлар гиперфазоси ҳамда суперкенгайишлар фазолари кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосига гомеоморф жойлаштирилиши исботланган.

Кучсиз аддитив функционаллар назариясини тадқиқ қилиш усулларини сиғимлар фазоси хоссаларини аниқлашда муваффақиятли қўллаш мумкин. Сиғимлар француз математиги Г.Шоке томонидан ўлчовнинг табиий умумлашуви сифатида киритилган ва ноаниқлик шартларида ечимлар қабул қилиш назариясида сиғимларни татбиқ қилиш услуби яратилган. Л.Джоу ишида эса сиғимларнинг юқори ярим узлуксизлиги шартлари аниқланиб, кучсиз топология киритилган компактдаги ярим узлуксиз сиғимлар фазоси компакт бўлиши кўрсатилган. М.М.Заричный ва О.Р.Никифорчиннинг ишларида компакт хаусдорф фазолардаги сиғимларнинг алгебраик ва топологик хоссалари кўрсатилган.

Кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси ва унинг ҳар хил қисм фазоларининг топологик хусусиятлари С.Альбеверио, Ш.А.Аюпов, Р.Б.Бешимов, Д.Е.Давлетов, Г.Ф.Джаббаров, А.А.Заитов, Л.Карчевска ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган. С.Альбеверио, Ш.А.Аюпов ва А.А.Заитовларнинг ишида $X$ Тихонов фазосида аниқлаган кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган Радон функционаллари фазосини $X$ фазони салмоғига тенглиги исботланган. Р.Б.Бешимов компакт ташувчига эга бўлган барча кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосининг $C_p(C_b(X))$ фазонинг қавариқ қисм фазоси бўлишини исботлаган. Бешимов, Н.К.Мамадалиевлар ишида эса $OS_R : Tych \to Tych$ функторининг Тихонов фазолари ва уларнинг узлуксиз акслантиришлари категориясида нормаль бўлиши кўрсатилган. Г.Ф.Джаббаров томонидан текисликдаги кучсиз аддитив мусбат бир жинсли функционаллар фазосининг тавсифи олинган.

**Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.** Диссертация тадқиқоти Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университетининг №ОТ-4-27 «Йордан учликлари фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» мавзусидаги илмий лойиҳа доирасида бажарилган (2017-2020 йиллар).

**Тадқиқотнинг мақсади** кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси ва унинг қавариқ қисм фазоларининг аффин гомеоморфизмларини тавсифини аниқлашдан иборат.

**Тадқиқотнинг вазифалари:**

текисликдаги кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосини тавсифлаш;

кучсиз аддитив функционаллар фазосининг ва сиғимлар фазосининг аффин гомеоморфизмларининг аниқ кўринишини топиш;

аффин гомеоморфизмларнинг метрик компактда берилган кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган ва ярим аддитив функционаллар фазоларини метрикалаштиришга татбиқ қилиш.

**Тадқиқотнинг объектини** кучсиз аддитив функционаллар, ярим аддитив функционаллар, мусбат бир жинсли функционаллар, сиғимлар фазоси ташкил этади.

**Тадқиқотнинг предмети** Ночизиқли функционаллар назарияси, қавариқ компакт тўпламлар назарияси, сиғимлар назарияси, панжаравий гомеоморф функционаллар назарияси, метрикалаштириш назарияси.

**Тадқиқотнинг усуллари.** Тадқиқотда функционал анализ ва ночизиқли функционаллар назарияси усулларидан фойдаланилган.

**Тадқиқотнинг илмий янгилиги** қуйидагилардан иборат:

кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси ҳақиқий чегараланган ўлчовли функциялар синфининг Банах фазоси бирлик шарининг ўнг қисмига аффин гомеоморф эканлиги исботланган;

ярим аддитив функционаллар фазосининг юқори чегарасини сақловчи аффин гомеоморфизмининг ва компактда берилган сиғимлар фазосининг панжаравий аффин гомеоморфизмининг аниқ кўриниши топилган;

компакт фазодаги метриканинг ушбу компактдаги ярим аддитив функционаллар фазосига давоми бўладиган метрика аниқланган;

кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси метрик фазо бўлиши исботланган.

**Тадқиқотнинг амалий натижалари** қуйидагилардан иборат:

ярим аддитив функционаллар фазосини метрикалашда ушбу фазонинг юқори чегарасини сақловчи аффин гомеоморфизмининг аниқ кўриниши қўлланилган;

кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси ҳақиқий чегараланган ўлчовли функциялар синфининг Банах фазоси бирлик шарининг ўнг қисмига аффин гомеоморф эканлигидан ташувчиси иккитадан кўп бўлмаган нуқталардан ташкил топган барча кучсиз аддитив функционаллар тўпламини тавсифлашда фойдаланилган.

**Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги** функционал анализ, кучсиз аддитив функционаллар назарияси усулларидан фойдаланилгани ҳамда олинган натижалар математик жиҳатдан тўғри исботланганлиги билан изоҳланади.

**Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти.** Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти кучсиз аддитив функционаллар фазоси аффин гомеоморфизмининг аниқ кўринишидан ночизиқли функционаллар фазосининг геометрик хоссаларини тадқиқига қўллаш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосининг қавариқ қисм тўпламларининг аффин гоеоморфизми кўринишидан кучсиз аддитив функционаллар фазосида метрика қуришда қўлланилиши билан изоҳланади.

**Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши.** Кучсиз аддитив функционаллар фазоси аффин гомеоморфизмлари ва уларнинг татбиқлари бўйича олинган натижалар асосида:

кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосини тавсифидан №17-51-12064 рақамли «Оптимал бошқариш масалалари ва дифференциал тенгламалар назариясидаги тартиб билан мувофиқлашувчи операторлар» мавзусидаги хорижий грант лойиҳасида вектор панжаралардаги аддитив операторларни тадкиқ қилишда фойдаланилган (К.Л.Хетагуров номидаги Шимолий Осетия давлат университетининг 2021 йил 1 мартдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши вектор панжаралардаги ортогонал аддитив операторларнинг тартибли чегараланганлигини исботлаш имконини берган;

кучсиз аддитив функционаллар фазоси ва унинг қисм фазоларининг аффин гомеоморф эканлигидан Ф-4-42 рақамли «Ярим аддитив r-силлиқ ва Радон функционаллари фазосининг кардинал ва топологик хоссалари» мавзусидаги фундаментал илмий лойиҳада Радон функционаллар фазосининг муҳим инвариантларидан бўлган салмоғини аниқлашда фойдаланилган (Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 30 октябрдаги 89-03-4303 сонли маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши Радон фазолари категориясида ҳаракатланувчи кучсиз аддитив функционалларнинг топологик, категорик, геометрик ва кардинал хоссаларини тадқиқ қилиш имконини берган.

**Тадқиқот натижаларининг апробацияси.** Тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 5 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

**Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги.** Тадқиқот мавзуси бўйича жами 15 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг фалсафа доктори диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 6 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган

**Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми.** Диссертация кириш қисми, уч боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 80 бетни ташкил этган.

## ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

**Кириш** қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Кучсиз аддитив тартибни сақловчи функционаллар фазоси»** деб номланувчи биринчи бобида, узлуксиз функциялар фазоси $C(X)$ да аниқланган кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси ҳақидаги зарур таърифлар ва тушунчалар келтирилган.

Айтайлик, $X$ компакт тўплам бўлсин. $C(X)$ орқали нуқтавий алгебраик амаллар ва тенг ўлчамли норма, яъни $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in X\}$ нормали узлуксиз $f : X \to \mathbf{R}$ функциялар фазосини белгилаймиз. Ҳар бир $c \in \mathbf{R}$ учун $c_X$ орқали $c_X(x) = c, \quad x \in X$ формула бўйича аниқланган ўзгармас функцияни белгилаймиз. Айтайлик, $\phi, \psi \in C(X)$ бўлсин. $\phi \le \psi$ тенгсизлик эса барча $x \in X$ лар учун $\phi(x) \le \psi(x)$ тенгсизлик бажарилишини ифодалайди.

$X$ компактнинг бўш бўлмаган ёпиқ қисм тўплами $F$ учун $\lambda_F : C(X)_+ \to \mathbb{R}_+$ функционални

$$\lambda_F(\phi) = \max\{\phi(x) : x \in F\}, \ \phi \in C(X). \tag{1}$$

қоида бўйича аниқлаймиз. $\lambda_F$ функционал қуйидаги хоссаларга эга: кучсиз аддитив; тартибни сақлайди; нормаланган; мусбат бир жинсли; ярим аддитив; ярим мултипликатив.

1992 йили Л.Б.Шапиро тескарисини, яъни $C(X)_+$ даги ҳар қандай кучсиз аддитив, тартибни сақловчи, нормаланган, мусбат бир жинсли, ярим аддитив, ярим мултипликатив функционал (1) кўринишга эга бўлишини аниқлаган.

1998 йили Т.Радул ўхшаш хусусиятларга эга функционаллар фазосининг топологик хоссаларини тадқиқ қилишни бошлаган.

**1-таъриф.** $\nu : C(X) \to \mathbf{R}$ функционали, агар:

барча $\phi \in C(X)$ ва $c \in \mathbf{R}$ учун $\nu(\phi + c_X) = \nu(\phi) + c \cdot \nu(1_X)$ тенглик бажарилса, *кучсиз аддитив*;

барча $\phi, \psi \in C(X)$ лар учун $\phi \le \psi$ тенгсизликдан $\nu(\phi) \le \nu(\psi)$ тенгсизлик келиб чиқса, *тартибни сақловчи*;

$\nu(1_X) = 1$ бўлса, *нормаланган*;

барча $\varphi \in C(X)$, $t \in \mathbf{R}$, $t \ge 0$ ларда $\nu(t\phi) = t\nu(\phi)$ тенглик бажарилса, *мусбат бир жинсли*;

барча $\phi, \psi \in C(X)$ лар учун $\nu(\phi + \psi) \le \nu(\phi) + \nu(\psi)$ тенгсизлик ўринли бўлса, *ярим аддитив* дейилади.

$X$ компакт учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$O(X)$ – $C(X)$ даги барча кучсиз аддитив, тартибни сақловчи нормаланган функционаллар тўплами;

$OH(X)$ – $O(X)$ дан олинган барча мусбат бир жинсли функционаллар тўплами;

$OS(X)$ – $OH(X)$ дан олинган барча ярим аддитив функционаллар тўплами.

$F(X)$ тўпламда, бу ерда $F = O,\ OH,\ OS$ нуқталарда яқинлашиш топологиясини қараймиз, хусусий ҳолда $\nu \in F(X)$ функционалнинг атрофлари базасини

$$\langle \nu : \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \varepsilon \rangle = \left\{ \nu' \in F(X) : \left| \nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i) \right| < \varepsilon,\ i = \overline{1,k} \right\},$$

кўринишдаги тўпламлар ташкил этади, бу ерда $\varepsilon > 0$, $\varphi_i \in C(X)$, $i = \overline{1,k}$.

Маълумки, исталган $X$ компакт учун $F(X)$ фазо қавариқ компакт бўлади, бу ерда $F = O,\ OH,\ OS$.

$P(X)$ орқали $C(X)$ даги барча нормаланган мусбат чизиқли функционаллар тўпламини белгилаймиз. Маълумки,

$$P(X) \subset OS(X) \subset OH(X) \subset O(X).$$

Айтайлик, $A$ – $X$ компактнинг ёпиқ фазоси бўлсин. Агарда $f|_A = g|_A$ шартини қаноатлантирувчи барча $f, g \in C(X)$ лар учун $\nu(f) = \nu(g)$ тенглиги бажарилса, у ҳолда $\nu \in O(X)$ функционали $A$ да *жамланган* дейилади. $\nu$ функционал жамланган бўлувчи энг кичик ёпиқ $A \subset X$ тўпламга $\nu \in O(X)$ функционалнинг *ташувчиси* дейилади ва $\operatorname{supp}\nu$ каби белгиланади, яъни

$$\operatorname{supp}\nu = \bigcap \{ A :\ \nu - A \text{ да жамланган} \}.$$

Айтайлик, $A$ ва $B$ лар – $E$ топологик фазонинг қавариқ қисм тўпламлари бўлсин. $T:A\to B$ акслантириш учун барча $x,y\in A$ ва $\alpha\in[0,1]$ ларда

$$T(\alpha x+(1-\alpha)y)=\alpha T(x)+(1-\alpha)T(y)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда унга *аффин акслантириш* дейилади.

Бунда, агар $T:A\to B$ акслантириш ўзаро бир қийматли ва ўзаро узлуксиз бўлса, у ҳолда унга *аффин гомеоморфизм* дейилади.

Тадқиқот ишининг **«Кучсиз аддитив функционаллар фазоси ва унинг қисм фазоларининг аффин гомеоморфизмлари»** деб номланувчи иккинчи бобида, кучсиз аддитив функционаллар фазоси ва унинг қисм фазоларининг аффин гомеоморфизмлари ўрганилган. $O(\mathbf{2})$ фазонинг тавсифи олинди, $O(\mathbf{2})$ ва $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$ фазоларининг аффин гомеоморфлиги исботланган. $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$ фазонинг $O(\mathbf{2})$ фазога аффин гомеоморфизмининг аниқ кўриниши аниқланди. Ярим аддитив функционаллар фазосининг юқори чегарани сақловчи гомеоморфизмлари қаралди. Компактдаги барча сиғимларнинг қавариқ компактларининг панжаравий аффин гомеоморфизмлари тавсифи олинди.

Эслатиб ўтамизки, $n$-нуқтали компакт $\mathbf{n}=\{0,1,2,...,n-1\}, n\in\mathbb{N}$, учун $C(\mathbf{n})$ фазо $\mathbf{R}^n$ фазога изоморфдир, бу ердаги изоморфизм қуйидаги қоида бўйича берилади: $f\in C(\mathbf{n})\to\left(f(0),f(1),...,f(n-1)\right)\in\mathbf{R}^n$.

Маълумки, Г.Ф.Джаббаровнинг ишида $OH(\mathbf{2})$ фазо текис квадратга аффин гомеоморф эканлиги ва $OH(\mathbf{n})$ нинг барча $n\geq 3$ ларда чексиз ўлчовли бўлиши кўрсатилган.

Фараз қилайлик, $L_\infty(\mathbf{R})$ ва $L_1(\mathbf{R})$ мос равишда – $\mathbf{R}$ даги ҳақиқий аниқ чегараланган ўлчовли функциялар синфининг ва ҳақиқий интегралланувчи функциялар синфининг банах фазолари бўлсин. Шунингдек, $L_\infty(\mathbf{R})$ фазо $L_1(\mathbf{R})$ фазонинг қўшма фазосига изометрик изоморф бўлганлигидан,

$$L_\infty(\mathbf{R})_1^+=\left\{f\in L_\infty(\mathbf{R}):0\leq f\leq\mathbf{1}\right\},$$

тўплами *-кучсиз компакт тўплам бўлади, бу ерда $\mathbf{1}$ – $L_\infty(\mathbf{R})$ даги бирлик.

Қуйидаги теорема ушбу параграфнинг асосий натижаси ҳисобланади.

**1-теорема.** $O(\mathbf{2})$ *фазо* $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$ *фазога аффин гомеоморф, бунда* $L_\infty(\mathbf{R})_1^+\to O(\mathbf{2})$ *гомеоморфизм ушбу*

$$\mu(x,y)=\int_0^{x-y}\varphi(t)\,dt+y,\qquad \varphi\in L_\infty(\mathbf{R})_1^+. \tag{2}$$

*қоида бўйича берилади.*

$O_2(X)$ орқали ташувчиси иккитадан кўп бўлмаган нуқталардан ташкил топган барча $\mu\in O(X)$ функционаллар тўпламини белгилаймиз.

Келгуси тасдиқ $O_2(X)$ тўпламнинг тавсифини беради.

**1-тасдиқ.** *Айтайлик, $X$ компакт фазо бўлсин. У ҳолда ҳар қандай* $\mu\in O_2(X)$ *функционал қуйидаги кўринишга эга бўлади:*

$$\mu(f) = \int_{0}^{f(x_1)-f(x_2)} \varphi(t)\,dt + f(x_2), \tag{3}$$

бу ерда $\operatorname{supp}\mu = \{x_1, x_2\}$, $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R})_1^+$.

$K$ қавариқ компакт учун $cc(K)$ орқали унинг барча бўш бўлмаган қавариқ ёпиқ қисм тўпламларини белгилаймиз.

Агарда $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$ лар учун $T(\nu_1 \vee \nu_2) = T(\nu_1) \vee T(\nu_2)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $T : OS(X) \to OS(Y)$ акслантиришга юқори чегарани сақловчи акслантириш деб атаймиз.

Айтайлик, $f : X \to Y$ – узлуксиз акслантириш бўлсин. У ҳолда

$$OS(f) : OS(X) \to OS(Y)$$

асклантириш юқори чегарани сақловчи гомеоморфизм бўлади.

**2-теорема.** *Агарда* $T : OS(X) \to OS(Y)$ *акслантириш юқори чегарани сақловчи гомеоморфизм бўлса, у ҳолда шундай* $g : X \to Y$ *гомеоморфизм мавжуд бўлиб,* $T = OS(g)$ *тенглик бажарилади.*

$X = \mathbf{2}$ икки нуқтали дискрет фазо учун $O(\mathbf{2})$ фазонинг $OS(g)$ кўринишда ифодаланмайдиган аффин акслантиришига мисол келтирилган.

Ҳар бир $X$ компакт учун $exp(X)$ орқали $X$ нинг барча бўш бўлмаган ёпиқ қисм тўпламларини белгилаймиз.

Агарда $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ қуйидаги бешта хоссани қаноатлантирса:

a) $\mu(\varphi) \geq 0$, барча $\varphi \geq 0$ лар учун;

b) $\mu(1_X) = 1$;

c) $\mu(k\varphi) = k\mu(\varphi)$, барча $\varphi \in C(X)$ ва $k \in \mathrm{R}_+$ лар учун;

d) $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$, ҳар бир $\varphi, \psi \in C(X)$ комонотон функциялар жуфтлиги учун;

e) $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$, $\varphi \leq \psi$ шарти билан ҳар бир $\varphi, \psi \in C(X)$ лар учун бажарилса, у ҳолда $\mu$ – *Шоке интеграли* дейилади.

a) – e) хоссаларга эга бўлган ҳар қандай $\mu : C(X) \to \mathrm{R}$ функционал қуйидаги

$$c(F) = \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in C_+(X),\ \varphi(x) \geq 1,\ \forall x \in F\}$$

формула билан аниқланадиган $c \in M(X)$ учун Шоке интеграли бўлади.

Демак, биз эндиги мулоҳазаларда барча Шоке интеграллари тўплами ва компактдаги сиғимларни тенглаштиришимиз мумкин.

Ўзгармас функция ҳар қандай функцияга комонотон бўлади, у ҳолда Шоке интегралининг икки комонотон функциялар учун аддитивлигидан кучсиз аддитив бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$M(X) \subset OH(X) \subset O(X).$$

$c_1, c_2 \in M(X)$ лар учун

$$(c_1 \vee c_2)(F) = \max\{c_1(F), c_2(F)\} \quad \text{ва} \quad (c_1 \wedge c_2)(F) = \min\{c_1(F), c_2(F)\}$$

деб қараймиз, бу ерда $F \in exp(X)$.

Маълумки, $M(X)\times M(X)$ дан $M(X)$ га

$$(c_1,c_2)\to c_1\vee c_2$$

ва

$$(c_1,c_2)\to c_1\wedge c_2$$

қоида бўйича аниқланган иккита акслантириш узлуксиздир. Бунда $(M(X),\vee,\wedge)$ учлик панжара бўлади.

$\Phi: M(X)\to M(X)$ акслантириш *панжаравий акслантириш* дейилади, агарда барча $c_1,c_2\in M(X)$ лар учун

$$\Phi(c_1\vee c_2)=\Phi(c_1)\vee\Phi(c_2) \qquad \text{ва} \qquad \Phi(c_1\wedge c_2)=\Phi(c_1)\wedge\Phi(c_2)$$

тенгликлар бажарилса.

**3-теорема.** Айтайлик, $X$ – *компакт ва* $\Phi: M(X)\to M(X)$ *аффин гомеоморфизм бўлсин. Қуйидаги тасдиқлар эквивалент бўлади:*

*а)* $\Phi$ *панжаравий гомеоморфизм бўлади;*

*б) шундай* $f: X\to X$ *гомеоморфизм мавжуд бўлиб,* $\Phi=M(f)$ *тенглик ўринлидир.*

**1-мисол.** Айтайлик, $X=\mathbf{2}$ – икки нуқтали дискрет фазо бўлсин. $c\in M(\mathbf{2})$ учун қуйидаги сонларни аниқлаймиз:

$$\alpha_i=c(\{i\}),\ i=1,2.$$

$c\in M(\mathbf{2})$, у ҳолда $0\le\alpha_i\le 1,\ i=1,2$. Равшанки, $M(\mathbf{2})$ қавариқ компактнинг $[0,1]\times[0,1]$ квадратга

$$c\in M(\mathbf{2})\to(\alpha_1,\alpha_2)\in[0,1]\times[0,1]$$

қоида билан аниқланган акслантириши аффин гомеоморфизм бўлиб топилади. Шундай қилиб, $M(\mathbf{2})$ қавариқ компакт $[0,1]\times[0,1]$ квадратга аффин гомеоморф ва биз уларни тенглаштиришимиз мумкин. Шунинг учун квадрат учларида

$$(1,0)\mapsto(1,1),\quad (0,1)\mapsto(0,0),\quad (0,0)\mapsto(0,1),\quad (1,1)\mapsto(1,0)$$

қоида бўйича аниқланган квадрат аффин гомеоморфизми $T: M(\mathbf{2})\to M(\mathbf{2})$ аффин гомеоморфизмини беради.

Ҳар қандай $g:\mathbf{2}\to\mathbf{2}$ гомеоморфизм учун $M(g): M(\mathbf{2})\to M(\mathbf{2})$ аффин гомеоморфизм $\{(1,0),(0,1)\}$ тўпламни ўзига ўтказади. Шундай экан, $T$ ни $M(g)$ кўринишида ифодалаб бўлмайди.

Тадқиқот ишининг **«Кучсиз аддитив функционаллар фазоси ва унинг қисм фазоларини метризациялаш»** деб номланувчи учинчи бобида ярим аддитив ва кучсиз аддитив функционаллар фазоларини метрикалаштириш масалалари тадқиқ этилган бўлиб, бунда метрик компактдаги метрикани давом эттирувчи сифатида қаралади, $OS(X)$ фазода метрика аниқланган, $X$ компактдаги кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционалларнинг $O(X)$ фазосида Канторович–Рубинштейн метрикасининг ўзгартирилган аналоги қурилган ва $\rho_O$ метрика $O(X)$ тўпламда нуқталарда яқинлашиш топологиясини яратиши исботланган.

Эслатиб ўтамизки, ҳар бир $A \in cc(P(X))$ қисм тўплам

$$\nu_A(\varphi) = \sup\{\mu(\varphi): \ \mu \in A\}, \quad \varphi \in C(X),$$

функционални аниқлайди, бундан ташқари,

$$A \in cc(P(X)) \mapsto \nu_A \in OS(X) \tag{4}$$

мослик $cc(P(X))$ ва $OS(X)$ фазолари орасидаги аффин гомеоморфизмни беради.

Айтайлик, $X$ ва $Y$ – компакт метрик фазолар, $f : X \to Y$ – эса улар орасидаги узлуксиз акслантириш бўлсин. Эслатиб ўтамиз, $OS(f): OS(X) \to OS(Y)$ акслантириш

$$OS(f)(\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f), \quad \mu \in OS(X), \phi \in C(X)$$

қоида бўйича аниқланади. Қуйидаги мослик ҳам ўринлидир:

$$OS(f)(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)}. \tag{5}$$

Энди биз $OS(X)$ фазони $X$ метрик компакт бўлган ҳолатда метрикалаштирамиз. Айтайлик, $X_1, X_2, X_3 -$ $X$ компактнинг нусхалари бўлсин. Ушбу

$$X_{123} = X_1 \times X_2 \times X_3, \quad X_{ij} = X_i \times X_j,$$

белгилашларни киритамиз ва айтайлик,

$$p_{ij} : X_{123} \to X_{ij}, \quad p_k^{ij} : X_{ij} \to X_k$$

табиий проекцияларга тенг бўлсин, бу ерда $k \in \{i, j\}, i < j$ деб қаралади.

Айтайлик, $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$. Ушбу $\nu \in OS(X_{12})$ функционал $(\nu_1, \nu_2)$-*мақбул* дейилади, агарда

$$OS(p_i^{12})(\nu) = \nu_i, \quad i = 1, 2$$

тенглик бажарилса.

Барча $(\nu_1, \nu_2)$-мақбул функционаллар тўпламини $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$ орқали белгилаймиз.

**1-лемма**. *Айтайлик,* $\nu_i = \nu_A, \quad i = 1, 2.$ *У ҳолда*

$$P(p_i^{12})(C) = A_i, \quad i = 1, 2$$

*Бўладиган ҳар қандай* $C \in cc(P(X_{12}))$ *учун* $\nu_C \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$ *ўринлидир. Хусусан,* $\nu_{A_1 \otimes A_2} \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$, *бу ерда* $A_1 \otimes A_2 = \{\mu_1 \otimes \mu_2 : \mu_i \in A_i, i = 1, 2\}.$

**2-лемма.** *Айтайлик,* $\nu_2 \in OS(X_2)$, $\nu_{12} \in OS(X_{12})$, $\nu_{23} \in OS(X_{23})$ *функционаллари учун*

$$OS(p_2^{12})(\nu_{12}) = \nu_2 = OS(p_2^{23})(\nu_{23}).$$

*бўлсин. У ҳолда шундай* $\nu \in OS(X_{123})$ *функционали мавжуд бўлиб,*

$$OS(p_{12})(\nu) = \nu_{12}, \quad OS(p_{23})(\nu) = \nu_{23}$$

*бажарилади.*

Ушбу $\rho = \rho_X$ метрикали $X$ компакт учун $OS(X)$ компактда $\rho_{OS} = \rho_{OS(X)}$ масофа функциясини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\rho_{OS}(\nu_1, \nu_2) = \inf\left\{\nu\left(\rho\left(x_1, x_2\right)\right) : \nu \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)\right\}. \qquad (6)$$

**3-лемма.** Шундай $(\nu_1, \nu_2)$*-мақбул* $\nu_{12}$ *функционали мавжуд бўлиб,*

$$\rho_{OS}(\nu_1, \nu_2) = \nu_{12}\left(\rho\left(x_1, x_2\right)\right)$$

*бажарилади.*

**4-лемма.** *Айтайлик,* $\nu \in OS(X_{12})$ *ва* $\nu(\rho) = 0$. *У ҳолда*

$$OS\left(p_1^{12}\right)(\nu) = OS\left(p_2^{12}\right)(\nu).$$

**4-теорема.** $\rho_{OS}$ *функцияси,* $OS(X)$ *тўпламда* $\rho$ *метрикани давом эттирувчи метрика бўлади, яъни барча* $x, y \in X$ *лар учун* $\rho(x, y) = \rho_{OS}(x, y)$. *Бунда* $diamOS(X) = diamX$.

**1-изоҳ.** $P(X)$ фазоси учун $\rho_P$ метриканинг таърифи Л.В.Канторович томонидан таклиф қилинган.

$P(X)$ даги бошқа $\rho_1$ метрикани Л.В.Канторович ва Г.Ш.Рубинштейнлар таклиф қилган. Бу метрика ўхшаш тарзда аниқланади:

$$\rho_1(\nu_1, \nu_2) = \inf\left\{\nu\left(\rho\left(x_1, x_2\right)\right) : \nu \in \Lambda_1(\nu_1, \nu_2)\right\},$$

бу ерда $\Lambda_1 = \left\{\nu \in P\left(X^2\right) : P\left(p_1^{12}\right)(\nu) - P\left(p_2^{12}\right)(\nu) = \nu_1 - \nu_2\right\}$. Бундан ташқари, мазкур норма $C(X)$ фазодаги барча чизиқли узлуксиз функционалларнинг чизиқли фазосидаги норма орқали аниқланади. $P(X)$ да бу метрикалар устма-уст тушади. Канторович метрикаси экстремал масалаларда бир қанча қўлланилишларга эга.

(6) формулага ўхшаш тарзда аниқланган $\rho_{OH}$ функция $OH(X)$ фазода ҳатто псевдометрика ҳам бўлмаслиги мисолда кўрсатилган.

Айтайлик, $\rho_P$ – $P(X)$ фазода (6) формула каби берилган Канторович метрикаси бўлсин. $cc\left(P(X)\right)$ фазода

$$\rho_H(A, B) = \max\left\{\max_{\mu \in A} \rho_P(\mu, B), \max_{\lambda \in B} \rho_P(\lambda, A)\right\}, \ A, B \in cc(P(X))$$

қоида бўйича аниқланган Хаусдорф метрикасини қараймиз.

Қуйидаги теорема асосий натижа ҳисобланади.

**5-теорема.** (4) *кўринишда аниқланган акслантириш* $\left(cc(P(X)), \rho_H\right)$ *ва* $\left(OS(X), \rho_{OS}\right)$ *фазолари орасидаги аффин гомеоморфизм бўлади.*

Қуйидаги натижа келиб чиқади.

**1-натижа.** $\rho_{OS}$ *метрика* $OS(X)$ *да нуқталарда яқинлашиш топологиясини ҳосил қилади.*

Айтайлик, $(X, \rho)$ – метрик компакт. Ҳар бир $k \in \mathbb{N}$ учун

$$\mathrm{Lip}_k(X) = \left\{\varphi : X \to \mathbf{R} \mid \ \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \le k\rho(x, y), \ \forall x, y \in X\right\}$$

ва $\mathrm{Lip}(X)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{Lip}_k(X)$ белгилашни киритамиз. $\rho_k : O(X)\times O(X)\to \mathbf{R}$ функциясини

$$\rho_k(\mu,\nu)=\sup\{|\mu(\phi)-\nu(\phi)| : \phi\in \mathrm{Lip}_k(X)\},\quad \mu,\nu\in O(X). \tag{7}$$

тенглик билан аниқлаймиз.

**5-лемма.** *Ҳар бир $k\in\mathbb{N}$ учун (7) тенглик билан аниқланган $\rho_k$ функция $O(X)$ да псевдометрика бўлади.*

$\rho_O : O(X)\times O(X)\to \mathbf{R}$ функциясини

$$\rho_O(\mu,\nu)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k-1}\rho_k(\mu,\nu),\qquad \mu,\nu\in O(X) \tag{8}$$

тенглик билан аниқлаймиз.

**6-лемма.** *(8) тенглик билан аниқланган $\rho_O$ функция $O(X)$ да метрика бўлади.*

Қуйидаги теорема асосий натижа бўлиб ҳисобланади.

**6-теорема.** *$\rho_O$ метрика $O(X)$ да нуқталарда яқинлашиш топологиясини яратади.*

**2-натижа.** *$\rho_O$ метриканинг $F(X)$ даги қисилиши $F(X)$ да нуқталарда яқинлашиш топологиясини яратади, бу ерда $F=P, OS, OH$.*

**2-изоҳ.** В.В.Федорчук метрикаланувчи, тенг ўлчамли метрикаланувчи ва мукаммал метрикаланувчи функтор тушунчаларини киритди ва бундай функторларнинг чексиз итерацияларини тадқиқ қилди. Хусусан, эҳтимоллик ўлчовлари функторининг мукаммал метрикаланувчи бўлиши аниқланди. М.М.Заричний, О.Р.Никифорчинлар сиғимлар фазосини метрикалаштиришни ўргандилар. Г.Ф.Джаббаров мусбат бир жинсли функционаллар функтори қисм функторларининг мукаммал метрикаланувчи бўлиши шартларини тадқиқ қилди. Идемпотентли эҳтимоллик ўлчовлари фазоси метрикалаш А.А.Заитов томонидан кўрсатилди. Эслатиб ўтамизки, кучсиз аддитив функционаллар функторини мукаммал метрикалаш масаласи очиқ қолмоқда.

Шуни ҳам эслатиб ўтиш жоизки, бир нуқтали бўлмаган $(X,\rho)$ метрик компакт учун (7) формула бўйича аниқланган $\rho_k$ $(k\geq 1)$ функция метрика бўлмайди.

## ХУЛОСА

Ушбу диссертация кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазосининг аффин гомеоморфизмларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. $O(\mathbf{2})$ фазонинг $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$ фазога аффин гомеоморфизми аниқланди, $O(\mathbf{2})$ фазонинг $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$ фазога аффин гомеоморф эканлиги исботланди ва $L_\infty(\mathbf{R})_1^+ \to O(\mathbf{2})$ гомеоморфизмнинг аниқ кўриниши кўрсатилди.

2. Ҳар қандай юқори чегарани сақловчи $\Phi : OS(X) \to OS(Y)$ аффин гомеоморфизми учун шундай $f : X \to Y$ гомеоморфизми мавжуд бўлиб, $\Phi = OS(f)$ тенгликнинг бажарилиши исботланди. Шу билан бирга, сиғимлар фазолари панжаравий аффин гомеоморфизмларининг умумий кўриниши топилди.

3. Ярим аддитив ва кучсиз аддитив функционаллар фазосида метрика аниқланди.

4. $X$ метрик компактдаги кучсиз аддитив тартибни сақловчи нормаланган функционаллар фазоси $O(X)$ да Канторович-Рубинштейн метрикасининг ўзгартирилган аналоги қурилди. $\rho_O$ метриканинг $O(X)$ да нуқталарда яқинлашиш топологиясини яратиши исботланди.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

**КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**БЕГЖАНОВА КАМИЛА УСНАТДИНОВНА**

# АФФИННЫЕ ГОМЕОМОРФИЗМЫ ПРОСТРАНСТВА СЛАБОАДДИТИВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

**01.01.01 – Математический анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**ТАШКЕНТ-2021**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.2.PhD/FM205.**

Диссертация выполнена в Каракалпакском государственном университете имени Бердаха.

Автореферат диссертации на трёх языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Заитов Адилбек Атаханович**<br>доктор физико-математических наук, профессор |
| | **Жамилов Уйгун Умурович**<br>доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник |
| **Ведущая организация:** | **Национальный университет Узбекистана** |

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4б. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2021 года.

(протокол рассылки №________ от «____» _______________2021 года).

**У.А.Розиков**
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

**Ж.К.Адашев**
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, к.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

**У.У.Жамилов**
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный
сотрудник

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии(PhD))

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Во всем мире многие научные и практические исследования, проводимые в различных областях математики в большинстве случаев, приводится к задачам описания пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов, определенных на пространстве действительнозначных функций, заданных на некотором компакте. Исследование геометрических свойств пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на основе его описания, а также определение видов аффинного гомеоморфизма пространства и его выпуклых подмножеств является актуальной задачей. Геометрическое описание пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на Банаховой решетке непрерывных функций является одним из важных задач решения проблем аксиоматического исследования статистических и вероятностных аспектов квантовой механики.

В настоящее время во всем мире актуальной является задача описания пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов и определения явных видов их аффинных гомеоморфизмов. Известно, что пространство всех непустых замкнутых подмножеств заданного компакта гомеоморфно вложим в пространство слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на этом компакте.Отметим, что задача геометрического описания пространства слабо аддитивных функционалов на конечномерных пространствах в топологии поточечной сходимости остается открытой. В связи с этим, определение явных видов аффинных гомеоморфизмов пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов, и приложения полученных результатов к метризации этих пространств, считается целевым научным исследованием.

В нашей стране, особенно в последние годы особое внимание уделяется фундаментальным дисциплинам, в частности актуальным направлениям которые имеют приложения к квантовой механике и физике. В частности, в последние годы было показано, что в случае двух точечного компакта пространство слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на этом компакте является выпуклым компактным множеством, а также, достигнуты весомые результаты при решении задач посредством определения алгебраических и топологических свойств пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов. Проведение исследований на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Функциональный анализ, геометрия и алгебра» обозначены как основные цели и направления деятельности математики. В целях использования научных результатов в смежных областях науки важной считается развитие теории слабо аддитивных функционалов.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** В работе Л.Б.Шапиро было доказано, что пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, полуаддитивных, полумультипликативных, положительно-однородных функционалов на компакте $X$, является гомеоморфным пространству всех непустых замкнутых подмножеств компакта $X$.Т. Радул показал, что пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, функционалов, снабженное топологией поточечной сходимости, является компактом, и пространство всех вероятностных мер, пространство всех непустых замкнутых подмножеств, гиперпространство включений и пространство суперрасширения гомеоморфны вложимы в пространство всех слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, функционалов.

Методы исследования теории слабо аддитивных функционалов можно успешно применить при изучении свойств пространства емкостей. Емкости были введены французским математиком Г.Шоке как естественное обобщение мер и были разработаны методы приложения емкостей в теории принятия решений в условиях неопределенности. В работе Л.Джоу были определены верхние полунепрерывные емкости и показано, что пространство полунепрерывных емкостей на компакте, снабженное слабой топологией, также является компактом. Алгебраические и топологические свойства емкостей на компактном хаусдорфовом пространстве были показаны в работах М.М.Заричнего и О.Р.Никифорчина.

Исследованию алгебраических и топологических свойств пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов и их различных подпространств были посвящены работы С.Альбеверио, Ш.А.Аюпова, Р.Б.Бешимова, Д.Е.Давлетова, Г.Ф.Джаббарова, А.А.Заитова, Л.Карчевска и др. В работе С.Альбеверио, Ш.А.Аюпова и А.А.Заитова было доказано, что пространство слабо аддитивных, сохраняющих порядок нормированных Радоновых функционалов определенных на пространстве

Тихонова $X$ равно весу пространства $X$. Р.Б.Бешимов доказал, что пространство слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных, функционалов, имеющий компактный носитель, является выпуклым подпространством пространства $C_p(C_b(X))$. В работе Р.Б.Бешимова, Н.К.Мамадалиева было показано, что функтор $OS_R : Tych \to Tych$ является нормальным в пространстве Тихонова и в категории их непрерывных отображений. Г.Ф.Джаббаровым получено описание пространства слабо аддитивных, положительно однородных функционалов на плоскости.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялась диссертация.** Исследование выполнено в соответствии с планом научного проекта ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции» Каракалпакского государственного университета им. Бердаха (2017-2020 гг.).

**Цель исследования.** Определение описания аффинных гомеоморфизмов пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов и их выпуклых подпространств.

**Задачи исследования:**

описание пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов на плоскости;

нахождение явного вида аффинных гомеоморфизмов пространства слабо аддитивных функционалов и пространства емкостей;

приложения аффинных гомеоморфизмов к метризации пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов и полуаддитивных функционалов заданных на метрическом компакте.

**Объект исследования** – слабо аддитивные функционалы, полуаддитивные функционалы, положительно-однородные функционалы, пространство емкостей.

**Предмет исследования** – теория нелинейных функционалов, теория выпуклых компактов, теория емкостей, теория решеточных гомеоморфных функционалов, теория метризации.

**Методы исследования.** В диссертации применены методы функционального анализа и теории нелинейных функционалов.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

доказано, что пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов аффинно гомеоморфно положительной части единичного шара банахова пространства классов действительных существенно ограниченных измеримых функций;

найден явный вид аффинного гомеоморфизма сохраняющего верхние грани пространства полуаддитивных функционалов, и явный вид решеточного аффинного гомеоморфизма пространства емкостей, заданных на компакте;

построена метрика на пространстве полуаддитивных функционалов, продолжающей метрику исходного компакта;

доказано, что пространство слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов является метрическим пространством.

**Практические результаты исследования** состоит в следующем:

для метризации пространства полуаддитивных функционалов был использован явный вид аффинного гомеоморфизма, сохраняющие верхние грани этого пространства;

для описания множества всех слабо аддитивных функционалов, носители которых состоят не более чем из двух точек, была использована аффинная гомеоморфность пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов к положительной части единичного шара Банахова пространства классов действительных существенно ограниченных измеримых функций.

**Достоверность результатов исследования** обоснована использованием методов функционального анализа, теории слабо аддитивных функционалов, а также строгостью математических рассуждений.

**Научная и практическая значимость результатов исследования.**

Научная значимость результатов исследования могут быть обоснованы применением явного вида аффинного гомеоморфизма пространства слабо аддитивных функционалов в исследовании геометрических свойств пространства нелинейных функционалов.

Практическая значимость результатов исследования могут быть обоснованы использованием общего вида аффинных гомеоморфизмов выпуклых подмножеств пространства слабо аддитивных, сохраняющих порядок, нормированных функционалов для построения метрики в пространстве слабо аддитивных функционалов.

**Внедрение результатов исследования.** Результаты, связанные с аффинными гомеоморфизмами пространства слабо аддитивных функционалов и их приложений были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

описание пространства всех слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов было использовано в зарубежном проекте №17-51-12064 «Операторы, согласованные с порядком, в задачах оптимального управления и в теории дифференциальных уравнений» для исследования аддитивных операторов в векторных решетках (Справка Северо-Осетинского государственного университета имени К.Л.Хетагурова от 1 марта 2021 г.). Использование научного результата позволило доказать порядковую ограниченность ортогональных аддитивных операторов в векторных решетках;

аффинная гомеоморфность пространства слабо аддитивных функционалов и его подпространств было использовано в проекте Ф-4-42 «Кардинальные и топологические свойства пространства полуаддитивных r-гладких и Радоновых функционалов» для определения одного из важных инвариантов пространства Радоновых функционалов – веса (Справка Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан за номером 89-03-4303 от 30 октября 2020 года). Использование научного результата позволило исследовать топологические, категорные, геометрические и кардинальные свойства слабо аддитивных функционалов, действующих в категориях пространства Радона.

**Апробация результатов исследования.** Основное содержание диссертации обсуждалось на 3 международных и 5 республиканских научных конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликовано 15 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии, в том числе, из них 2 опубликованы в зарубежных журналах, 4 в республиканских научных изданиях.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и наименований использованной литературы. Полный объем диссертации составляет 80 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Пространство слабо аддитивных сохраняющих порядок функционалов»**, приведены необходимые определения и понятия о пространстве слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов, определенных на пространстве непрерывных функций $C(X)$.

Пусть $X-$ компакт. Через $C(X)$ обозначим пространство всех непрерывных функций $f:X\to\mathbf{R}$ с поточечными алгебраическими операциями и равномерной нормой, т.е. с нормой $\|f\|=\max\left\{\left|f\left(x\right)\right|:x\in X\right\}$. Для каждого $c\in\mathbf{R}$ через $c_X$ обозначим постоянную функцию, определяемую по формуле $c_X\left(x\right)=c,\quad x\in X$. Пусть $\phi,\psi\in C(X)$. Неравенство $\phi\le\psi$ означает, что $\phi(x)\le\psi(x)$ для всех $x\in X$.

Для непустого замкнутого подмножества $F$ компакта $X$ определим функционал $\lambda_F:C(X)_+\to\mathbb{R}_+$ по правилу

$$\lambda_F(\phi)=\max\{\phi(x):x\in F\},\ \phi\in C(X). \qquad (1)$$

Функционал $\lambda_F$ обладает следующими свойствами: слабо аддитивен; сохраняет порядок; нормирован; положительно-однороден; полуаддитивен; полумультипликативен.

В 1992 году Л.Б.Шапиро установил обратное, а именно, всякий слабо аддитивный, сохраняющий порядок, нормированный, положительно-однородный, полуаддитивный, полумультипликативый функционал на $C(X)_+$ имеет вид (1).

В 1998 году Т.Радул инициировал исследование топологических свойств пространства функционалов с подобными свойствами.

**Определение 1.** Функционал $\nu : C(X) \to \mathbf{R}$ называется:

слабо аддитивным, если для всех $\phi \in C(X)$ и $c \in \mathbf{R}$ выполняется равенство $\nu(\phi + c_X) = \nu(\phi) + c \cdot \nu(1_X)$;

сохраняющим порядок, если для всех $\phi, \psi \in C(X)$ из $\phi \le \psi$ вытекает $\nu(\phi) \le \nu(\psi)$;

нормированным, если $\nu(1_X) = 1$;

положительно-однородным, если $\nu(t\phi) = t\nu(\phi)$ при всех $\phi \in C(X)$, $t \in \mathbf{R}$, $t \ge 0$;

полуаддитивным, если $\nu(\phi + \psi) \le \nu(\phi) + \nu(\psi)$ при всех $\phi, \psi \in C(X)$.

Для компакта $X$ вводим следующие обозначения:

$O(X)$ – множество всех слабо аддитивных, сохраняющий порядок и нормированных функционалов на $C(X)$;

$OH(X)$ – множество всех положительно-однородных функционалов из $O(X)$;

$OS(X)$ – множество всех полуаддитивных функционалов из $OH(X)$;

Рассмотрим на множестве $F(X)$, где $F = O,\ OH,\ OS$, топологию поточечной сходимости, в частности, базу окрестностей функционала $\nu \in F(X)$ образуют множества вида

$$\langle \nu ; \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_k, \varepsilon \rangle = \left\{ \nu' \in F(X) : \left| \nu'(\varphi_i) - \nu(\varphi_i) \right| < \varepsilon, i = \overline{1,k} \right\},$$

где $\varepsilon > 0, \varphi_i \in C(X)$, $i = \overline{1,k}$, $k \in \mathbb{N}$.

Известно, что для произвольного компакта $X$ пространство $F(X)$, где $F = O,\ OH,\ OS$, является выпуклым компактом.

Через $P(X)$ обозначим множество всех нормированных, положительных линейных функционалов на $C(X)$. Ясно

$$P(X) \subset OS(X) \subset OH(X) \subset O(X).$$

Пусть $A$ – замкнутое пространство компакта $X$. Скажем, что функционал $\nu \in O(X)$ сосредоточен на $A$, если $\nu(f) = \nu(g)$ для всех $f, g \in C(X)$ с $f|_A = g|_A$. Наименьшее по включению замкнутое множество $A \subset X$ на котором функционал $\nu$ сосредоточен, называется носителем функционала $\nu \in O(X)$ и обозначается $\operatorname{supp}\nu$, т.е.,

$$\operatorname{supp}\nu = \bigcap \{A:\ \nu - \text{сосредоточен на } A\}.$$

Пусть $A$ и $B$ – выпуклые подмножества линейного топологического пространства $E$. Отображение $T: A \to B$ называется аффинным, если

$$T(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha T(x) + (1-\alpha)T(y)$$

для всех $x, y \in A$ и $\alpha \in [0,1]$.

При этом, если отображение $T: A \to B$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением, то оно называется аффинным гомеоморфизмом.

Во второй главе диссертации, названной **«Аффинные гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов и их подпространств»**, изучены аффинные гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов и их подпространств**.** Получено описание пространства $O(\mathbf{2})$ и показан явный вид аффинного гомеоморфизма из $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$ на $O(\mathbf{2})$. Рассмотрены сохраняющие грани гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов. Получено описание решеточных аффинных гомеоморфизмов выпуклого компакта всех емкостей на компакте.

Отметим, что для $n$-точечного компакта $\mathbf{n} = \{1, 2, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$, пространство $C(\mathbf{n})$ изоморфно пространству $\mathbf{R}^n$, при этом изоморфизм задается по правилу $f \in C(\mathbf{n}) \to \big(f(1), f(2), ..., f(n)\big) \in \mathbf{R}^n$.

Отметим, что в работе Г.Ф.Джаббарова было показано, что пространство $OH(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно плоскому квадрату и $OH(\mathbf{n})$ является бесконечномерным для всех $n \geq 3$.

Пусть $L_\infty(\mathbf{R})$ и $L_1(\mathbf{R})$ − банахово пространство классов действительных существенно ограниченных измеримых и классов действительных интегрируемых функций на $\mathbf{R}$, соответственно. Поскольку пространство $L_\infty(\mathbf{R})$ изометрически изоморфно сопряженному пространству пространства $L_1(\mathbf{R})$, то

$$L_\infty(\mathbf{R})_1^+ = \{f \in L_\infty(\mathbf{R}) : 0 \leq f \leq \mathbf{1}\},$$

где, $\mathbf{1}$ – единица в $L_\infty(\mathbf{R})$, является *-слабо компактным множеством.

Основным результатом настоящего параграфа является следующая

**Теорема 1**. *Пространство $O(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно пространству $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$, при этом гомеоморфизм $L_\infty(\mathbf{R})_1^+ \to O(\mathbf{2})$ задается по правилу*

$$\mu(x, y) = \int_0^{x-y} \varphi(t)\,dt + y, \qquad \varphi \in L_\infty(\mathbf{R})_1^+. \tag{2}$$

Через $O_2(X)$ обозначим множество всех функционалов $\mu \in O(X)$, носители которых состоят не более чем из двух точек.

Следующее утверждение дает описание множества $O_2(X)$.

**Предложение 1.** *Пусть* $X$ *− компакт. Тогда всякий функционал* $\mu \in O_2(X)$ *имеет вид*

$$\mu(f) = \int_0^{f(x_1)-f(x_2)} \varphi(t)dt + f(x_2), \tag{3}$$

где, $\mathrm{supp}\mu = \{x_1, x_2\}$, $\varphi \in L_\infty(\mathbf{R})_1^+$.

Для выпуклого компакта $K$ через $cc(K)$ обозначим пространство всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств.

Отображение $T : OS(X) \to OS(Y)$ назовем сохраняющим верхние грани, если для $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$ имеет место

$$T(\nu_1 \vee \nu_2) = T(\nu_1) \vee T(\nu_2).$$

Пусть $f : X \to Y$ – непрерывное отображение. Тогда отображение

$$OS(f) : OS(X) \to OS(Y)$$

является сохраняющим верхние грани гомеоморфизмом.

**Теорема 2.** *Если* $T : OS(X) \to OS(Y)$ *сохраняющее верхние грани гомеоморфизм, то существует гомеоморфизм* $g : X \to Y$ *такой, что* $T = OS(g)$.

Для двухточечного дискретного пространства $X = \mathbf{2}$ приведен пример аффинного отображения пространства $O(\mathbf{2})$ которое не может быть представлено в виде $OS(g)$.

Для каждого компакта $X$ мы обозначаем через $exp(X)$ пространство всех непустых замкнутых подмножеств $X$.

Если $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим пяти свойствам:

a) $\mu(\varphi) \geq 0$ для всех $\varphi \geq 0$;

b) $\mu(1_X) = 1$;

c) $\mu(k\varphi) = k\mu(\varphi)$ для всех $\varphi \in C(X)$ и $k \in \mathrm{R}_+$;

d) $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ для каждой пары комонотонных функций $\varphi, \psi \in C(X)$;

e) $\mu(\varphi) \leq \mu(\psi)$ для каждой пары $\varphi, \psi \in C(X)$ с условием $\varphi \leq \psi$, тогда $\mu$ называется интегралом Шоке.

Каждый функционал $\mu : C(X) \to \mathrm{R}$ со свойствами a) – e) является интегралом Шоке для емкости $c \in M(X)$ определяемой, по формуле

$$c(F) = \inf\{\mu(\varphi) : \varphi \in C_+(X),\ \varphi(x) \geq 1,\ \forall x \in F\}.$$

Таким образом, в дальнейшем мы можем отождествлять множество всех интегралов Шоке и емкостей на компакте.

Так как постоянная функция комонотонна любой функции, то аддитивность интеграла Шоке для двух комонотонных функций влечет, что интеграл Шоке является слабо аддитивным. Таким образом,

$$M(X) \subset OH(X) \subset O(X).$$

Для $c_1, c_2 \in M(X)$ положим

$$(c_1 \vee c_2)(F) = \max\{c_1(F), c_2(F)\} \quad \text{и} \quad (c_1 \wedge c_2)(F) = \min\{c_1(F), c_2(F)\},$$

где $F \in exp(X)$.

Известно, что следующие два отображения из $M(X) \times M(X)$ в $M(X)$ определенные, по правилам

$$(c_1, c_2) \to c_1 \vee c_2$$

и

$$(c_1, c_2) \to c_1 \wedge c_2$$

непрерывны. При этом, тройка $(M(X), \vee, \wedge)$ является решеткой.

Отображение $\Phi : M(X) \to M(X)$ называется решеточным, если

$$\Phi(c_1 \vee c_2) = \Phi(c_1) \vee \Phi(c_2) \quad \text{и} \quad \Phi(c_1 \wedge c_2) = \Phi(c_1) \wedge \Phi(c_2)$$

для всех $c_1, c_2 \in M(X)$.

**Теорема 3.** *Пусть $X$ – компакт и $\Phi : M(X) \to M(X)$ является аффинным гомеоморфизмом. Следующие утверждения эквивалентны:*

*a) $\Phi$ является решеточным гомеоморфизмом;*

*b) существует гомеоморфизм $f : X \to X$ такой, что $\Phi = M(f)$.*

**Пример 1.** Пусть $X = \mathbf{2}$ – двухточечное дискретное пространство. Для каждого $c \in M(\mathbf{2})$ определим следующие числа

$$\alpha_i = c(\{i\}),\ i = 1, 2.$$

Так как $c \in M(\mathbf{2})$, то $0 \le \alpha_i \le 1,\ i = 1, 2$. Ясно, что отображение выпуклого компакта $M(\mathbf{2})$ в квадрат $[0,1] \times [0,1]$ определенный, по правилу

$$c \in M(\mathbf{2}) \to (\alpha_1, \alpha_2) \in [0,1] \times [0,1]$$

является аффинным гомеоморфизмом. Следовательно, $M(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно квадрату $[0,1] \times [0,1]$, и мы можем их отождествлять. Поэтому аффинное отображение квадрата заданное на её вершинах по правилу

$$(1,0) \mapsto (1,1), \quad (0,1) \mapsto (0,0), \quad (0,0) \mapsto (0,1), \quad (1,1) \mapsto (1,0)$$

задает также аффинный гомеоморфизм $T : M(\mathbf{2}) \to M(\mathbf{2})$. Для всякого гомеоморфизма $g : \mathbf{2} \to \mathbf{2}$ аффинный гомеоморфизм $M(g) : M(\mathbf{2}) \to M(\mathbf{2})$ переводит множество $\{(1,0), (0,1)\}$ в себя. Следовательно, $T$ не может быть представлен в виде $M(g)$.

В третьей главе диссертации, названной **«Метризация пространства слабо аддитивных функционалов и их подпространств»**, исследованы вопросы метризаций пространства полуаддитивных и слабо аддитивных функционалов, продолжающие исходную метрику заданной на метрическом компакте, определена метрика на пространстве $OS(X)$, построен аналог модифицированной метрики Канторовича–Рубинштейна на пространстве $O(X)$ слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов на метрическом компакте $X$ и доказана, что метрика $\rho_O$, порождает топологию поточечной сходимости на $O(X)$.

Напомним, что каждое подмножество $A \in cc(P(X))$ определяет функционал

$$\nu_A(\varphi) = \sup\{\mu(\varphi): \ \mu \in A\}, \quad \varphi \in C(X),$$

более того, соответствие

$$A \in cc(P(X)) \mapsto \nu_A \in OS(X) \tag{4}$$

задает аффинный гомеоморфизм между пространствами $cc(P(X))$ и $OS(X)$.

Пусть $X$ и $Y$ – компактные метрические пространства, а $f : X \to Y$ – непрерывное отображение между ними. Напомним, что отображение $OS(f): OS(X) \to OS(Y)$ определяется по правилу

$$OS(f)(\mu)(\phi) = \mu(\phi \circ f), \quad \mu \in OS(X), \phi \in C(X).$$

Мы также часто будем использовать следующее соотношение

$$OS(f)(\nu_A) = \nu_{P(f)(A)}. \tag{5}$$

Теперь зададим метризацию пространства $OS(X)$, в случае когда $X$ – метрический компакт. Пусть $X_1, X_2, X_3$ – экземпляры одного и того же компакта $X$. Положим

$$X_{123} = X_1 \times X_2 \times X_3, \quad X_{ij} = X_i \times X_j,$$

и пусть

$$p_{ij} : X_{123} \to X_{ij}, \quad p_k^{ij} : X_{ij} \to X_k$$

равны естественным проектированиям, где предполагается, что $k \in \{i, j\}, i < j$.

Пусть $\nu_1, \nu_2 \in OS(X)$. Функционал $\nu \in OS(X_{12})$ назовем $(\nu_1, \nu_2)$-допустимым, если

$$OS(p_i^{12})(\nu) = \nu_i, \quad i = 1, 2.$$

Множество всех $(\nu_1, \nu_2)$-допустимых функционалов обозначим через $\Lambda(\nu_1, \nu_2)$.

**Лемма 1**. *Пусть* $\nu_i = \nu_A, \quad i = 1, 2.$ *Тогда для всякого* $C \in cc(P(X_{12}))$, *что,*

$$P(p_i^{12})(C) = A_i, \quad i = 1, 2$$

*имеет место* $\nu_C \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$. *В частности,* $\nu_{A_1 \otimes A_2} \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)$, *где* $A_1 \otimes A_2 = \{\mu_1 \otimes \mu_2 : \mu_i \in A_i, i = 1, 2\}$.

**Лемма 2.** *Пусть функционалы* $\nu_2 \in OS(X_2), \nu_{12} \in OS(X_{12}), \nu_{23} \in OS(X_{23})$ *таковы, что*

$$OS(p_2^{12})(\nu_{12}) = \nu_2 = OS(p_2^{23})(\nu_{23}).$$

*Тогда существует такой функционал* $\nu \in OS(X_{123})$, *что*

$$OS(p_{12})(\nu) = \nu_{12}, \quad OS(p_{23})(\nu) = \nu_{23}.$$

Для компакта $X$ с метрикой $\rho = \rho_X$ определим функцию расстояния $\rho_{OS} = \rho_{OS(X)}$ на компакте $OS(X)$ следующим образом:

$$\rho_{OS}(\nu_1, \nu_2) = \inf\left\{\nu\left(\rho(x_1, x_2)\right) : \nu \in \Lambda(\nu_1, \nu_2)\right\}. \qquad (6)$$

**Лемма 3.** *Существует такой $(\nu_1, \nu_2)$-допустимый функционал $\nu_{12}$, что*

$$\rho_{OS}(\nu_1, \nu_2) = \nu_{12}\left(\rho(x_1, x_2)\right).$$

**Лемма 4.** *Пусть $\nu \in OS(X_{12})$ и $\nu(\rho) = 0$. Тогда*

$$OS\left(p_1^{12}\right)(\nu) = OS\left(p_2^{12}\right)(\nu).$$

**Теорема 4.** Функция $\rho_{OS}$ является метрикой на множестве $OS(X)$, продолжающей метрику $\rho$, т.е.

$$\rho(x, y) = \rho_{OS}(\delta_x, \delta_y)$$

для всех $x, y \in X$. Более того, $diamOS(X) = diamX$.

**Замечание 1.** Определение метрики $\rho_P$ для пространства $P(X)$ предложено Л.В.Канторовичом.

Другую метрику $\rho_1$ на $P(X)$ предложили Л.В.Канторович и Г.Ш.Рубинштейн. Эта метрика определяется аналогичным образом:

$$\rho_1(\nu_1, \nu_2) = \inf\left\{\nu\left(\rho(x_1, x_2)\right) : \nu \in \Lambda_1(\nu_1, \nu_2)\right\},$$

где $\Lambda_1 = \left\{\nu \in P(X^2) : P\left(p_1^{12}\right)(\nu) - P\left(p_2^{12}\right)(\nu) = \nu_1 - \nu_2\right\}$. Более того, она порождается нормой на линейной пространстве всех непрерывных линейных функционалов на $C(X)$. На $P(X)$ эти метрики совпадают. Метрика Канторовича имеет многочисленные приложения в экстремальных задачах.

На примере показано, что в пространстве $OH(X)$ функция $\rho_{OH}$, определенная аналогично формуле (6) не является даже псевдометрикой.

Пусть $\rho_P$ – метрика Канторовича на пространстве $P(X)$, которая задается аналогично (6). Рассмотрим метрику Хаусдорфа на пространстве $cc\left(P(X)\right)$, определяемое, по правилу

$$\rho_H(A, B) = \max\left\{\max_{\mu \in A} \rho_P(\mu, B), \max_{\lambda \in B} \rho_P(\lambda, A)\right\}, \ A, B \in cc(P(X)).$$

Основным результатом является следующая

**Теорема 5.** *Отображение, определенное по правилу (4) является аффинным гомеоморфизмом между $\left(cc(P(X)), \rho_H\right)$ и $\left(OS(X), \rho_{OS}\right)$.*

Следовательно, вытекает следующее

**Следствие 1.** *Метрика $\rho_{OS}$ порождает на $OS(X)$ топологию поточечной сходимости.*

Пусть $(X, \rho)$ – метрический компакт. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\mathrm{Lip}_k(X) = \left\{\varphi : X \to \mathbf{R} \mid \left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \le k\rho(x, y), \ \forall x, y \in X\right\}$$

и $\mathrm{Lip}(X)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\mathrm{Lip}_k(X)$. Определим функцию $\rho_k : O(X)\times O(X)\to \mathbf{R}$ по правилу

$$\rho_k(\mu,\nu)=\sup\left\{\left|\mu(\phi)-\nu(\phi)\right| : \phi\in \mathrm{Lip}_k(X)\right\},\quad \mu,\nu\in O(X). \tag{7}$$

**Лемма 5.** *Для каждого $k\in$ функция $\rho_k$, определенная по правилу (7) является псевдометрикой на $O(X)$.*

Определим функцию $\rho_O : O(X)\times O(X)\to \mathbf{R}$ по правилу

$$\rho_O(\mu,\nu)=\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k-1}\rho_k(\mu,\nu),\qquad \mu,\nu\in O(X) \tag{8}$$

**Лемма 6.** *Функция $\rho_O$,определенная по правилу (8), является метрикой на $O(X)$.*

Следующая теорема является основным результатом.

**Теорема 6.** *Метрика $\rho_O$ порождает топологию поточечной сходимости на $O(X)$.*

**Следствие 2.** *Сужение метрики $\rho_O$ на $F(X)$ порождает топологию поточечной сходимости на $F(X)$, где $F=P, OS, OH$.*

**Замечание 2.** В.В.Федорчук ввёл понятия метризуемого, равномерно метризуемого и совершенно метризуемого функтора и исследовал бесконечные итераций таких функторов. В частности, было установлено, что функтор вероятностных мер является совершенно метризуемым. М.М.Заричный, О.Р.Никифорчин изучили метризацию пространства емкостей. Г.Ф.Джаббаров исследовал условия совершенной метризуемости подфункторов функтора положительно-однородных функционалов. Метризация пространства идемпотентных вероятностных мер была получена А.А.Заитовым. Отметим, что совершенная метризуемость функтора слабо аддитивных функционалов остается открытым вопросом.

Отметим, что для не одноточечного метрического компакта $(X,\rho)$ функция $\rho_k$ $(k\geq 1)$, определенное, по формуле (7) не является метрикой.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертация посвящена изучению аффинных гомеоморфизмов пространства слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Определены аффинные гомеоморфизмы пространства $O(\mathbf{2})$ пространству $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$, доказано, что пространство $O(\mathbf{2})$ аффинно гомеоморфно пространству $L_\infty(\mathbf{R})_1^+$, и указан явный вид аффинного гомеоморфизма $L_\infty(\mathbf{R})_1^+\to O(\mathbf{2})$.

2. Доказано, что для всякого аффинного гомеоморфизма $\Phi : OS(X) \to OS(Y)$ сохраняющие верхние грани, существует гомеоморфизм $f : X \to Y$ такой, что $\Phi = OS(f)$. Также найден общий вид решеточных аффинных гомеоморфизмов пространства емкостей.

3. Определены метрики на пространстве полуаддитивных и слабо аддитивных функционалов.

4. Построен аналог модифицированной метрики Канторовича–Рубинштейна на пространстве $O(X)$ слабо аддитивных сохраняющих порядок нормированных функционалов на метрическом компакте $X$, доказана, что метрика $\rho_O$, порождает топологию поточечной сходимости на $O(X)$.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES**
**DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS**

**KARAKALPAK STATE UNIVERSITY**

**BEKZHANOVA KAMILA USNATDINOVNA**

# AFFINE HOMEOMORFISMS OF THE SPACE OF WEAKLY ADDITIVE FUNCTIONALS AND THEIR APPLICATIONS

**01.01.01-Mathematical analysis**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**TASHKENT-2021**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.2.PhD/FM205.**

Dissertation has been prepared at the Karakalpak State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

**Scientific supervisor:** **Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

**Official opponents:** **Adilbek Atakhanovich Zaitov**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

**Jamilov Uygun Umurovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher

**Leading organization:** **National University of Uzbekistan**

Defense will take place on «____» ____________ 2021 at ____ at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at V.I. Romanovsky Institute of Mathematics (registered for No.____). (Address: University str. 4b, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2021 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2021 year)

**U.A.Rozikov**
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

**J.K.Adashev**
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.F.-M.S.

**U.U.Jamilov**
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S.

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of research work** is to definition of a description of affine homeomorphisms of the space of weakly additive order-preserving normed functionals and their convex subspaces.

**The object of the research work** is the weakly additive functionals, semi-additive functionals, positively homogeneous functionals, space of capacities.

**Scientific novelty of the research work** are as follows:

it is proved that the spaces of weakly additive, order-preserving, normalized functionals are affinely homeomorphic to the positive part of the unit ball of the Banach space of classes of real essentially bounded measurable functions;

an explicit form of an affine homeomorphism of the space of semi-additive functionals preserving the upper bounds is found, and an explicit form of a lattice affine homeomorphism of the space of capacities given on a compactum;

a metric was constructed on the space of semi-additive functionals, which continues the metric of the original compact;

it is proved that the space of weakly additive, order-preserving, normed functionals is a metric space.

**Implementation of the research results.** The results were used in the following scientific studies:

the description of the space of all weakly additive order-preserving normalized functionals was used in the foreign project No. 17-51-12064 "Operators consistent with the order in optimal control problems and in the theory of differential equations" to study additive operators in vector lattices (Reference of the North Ossetian State University named after K.L. Khetagurov dated March 1, 2021). The use of the scientific result made it possible to prove the ordinal boundedness of orthogonal additive operators in vector lattices;

the affine homeomorphism of the space of weakly additive functionals and its subspaces was used in the project F-4-42 "Cardinal and topological properties of the space of semi-additive r-smooth and Radon functionals" to determine one of the important invariants of the space of Radon functionals - the weight education of the Republic of Uzbekistan under the number 89-03-4303 dated October 30, 2020). The use of the scientific result made it possible to investigate the topological, categorical, geometric and cardinal properties of weakly additive functionals acting in the categories of the Radon space.

**The structure and volume of the thesis.** The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 80 pages.

## ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ

## СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
## LIST OF PUBLISHED WORKS

### I бўлим (I часть; part I)

1. Кудайбергенов К.К., Бегжанова К.У. Метризация пространства полуаддитивных функционалов // Узбекский математический журнал. 2010.№4. С. 82–92. (01.00.00; №6).
2. Бегжанова К.У. Решеточные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов // Узбекский математический журнал. 2011. №4. С. 52–58. (01.00.00; №6).
3. Кудайбергенов К.К., Бегжанова К.У. Описание слабо аддитивных функционалов на плоскости, сохраняющих порядок // Владикавказский математический журнал (Vladikavkaz mathematical journal). 2011. Том 13. Выпуск 1. С. 31-37. (3.Scopus IF=0.2).
4. Bekzhanova K. Metrization of a space of weakly additive functionals // Russian Mathematics, 2018, Vol. 62, No. 3, pp. 1–5. (3.Scopus IF=0.6).
5. Kudaybergenov K., Begjanova K. Lattice affine homeomorphisms of the pace of capacities // Science and education in Karakalpakstan. 2019. №4. C. 28-34.(01.00.00; №11).
6. Begjanova K. Extreme boundary of the space of weakly additive order preserving functionals on the plane // Science and education in Karakalpakstan. 2019. №4. C. 25-27. (01.00.00; №11).

### II бўлим (II часть; part II)

7. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Вестник Каракалпакского государственного университета имени Бердаха. 2016. №2. С. 5-7.
8. Бегжанова К.У. Решеточные гомеоморфизмы пространства полуаддитивных функционалов // Материалы Республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа». Нукус. 9-10 май 2012 г. С.41-43.
9. Бегжанова К.У. Гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов с конечными носителями // Материалы международной конференций «Прикладной и геометрический анализ». Самарканд. 22-25 сентябрь 2014 г. С. 38.
10. Бегжанова К.У. Гомеоморфизмы пространства слабо аддитивных функционалов с конечными носителями // Материалы научной конференции «Актуальные вопросы геометрии и её приложения». Ташкент. 27-28 октябрь 2014 г. С. 66-69.

11. Бегжанова К.У. Экстремальная граница пространства слабо аддитивных сохраняющий порядок функционалов на плоскости // “Ёш олимлар” Республика илмий-амалий конференцияси. Термиз, 29-30 январь 2016 г. 117-118.
12. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Материалы межвузовской конференции «Актуальные проблемы и решение естественных и точных наук». Нукус. 20-21 апрель 2017 г. С.15-17.
13. Begjanova K.U. Lattice affine homeomorphisms of the space of capacities // Сборник тезисов научной онлайн – конференции «Современные проблемы математики». Нукус. 20-май 2020 г. С.26-27.
14. Бегжанова К.У. Решеточные аффинные гомеоморфизмы пространства емкостей // Материалы международной конференций «Frontier in mathematics and computer sciences». Ташкент. 12-15 октябрь 2020 г. С.176.
15. Бегжанова К.У. Метризация пространства слабо аддитивных функционалов // Материалы международной научно-практической онлайн-конференции “Теории функций одного и многих комплексных переменных”. Нукус. 26-28 ноябрь 2020. С.45-46.