ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

НОДИРОВ ШОҲРУҲ ДИЛМУРОДОВИЧ

$\mathbb{R}^2$ ДА НОЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ МУСБАТ ҚЎЗҒАЛМАС НУҚТАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши – 2021

УДК 517.968.4

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

НОДИРОВ ШОҲРУҲ ДИЛМУРОДОВИЧ

$\mathbb{R}^2$ ДА НОЧИЗИҚЛИ ОПЕРАТОРЛАРНИНГ МУСБАТ ҚЎЗҒАЛМАС НУҚТАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Қарши – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2020.2.PhD/FM210 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Қарши давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгашнинг веб-саҳифаси (qarshidu.uz) ва «ZiyoNet» Ахборот таълим тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Жамилов Уйғун Умурович** физика-математика фанлари доктори
	Эшмаматова Дилфуза Бахромовна физика-математика фанлари номзоди, доцент
Етакчи ташкилот:	Ўзбекистон Миллий университети

Диссертация ҳимояси Қарши давлат университети ҳузуридаги PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Қарши давлат университети, Физика-математика факультети, 102-хона.

Диссертация билан Қарши давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 180103, Қарши ш., Кўчабоғ кўчаси, 17-уй. Тел.: (+998 75) 225 34 13).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

Б.А.Шоимқулов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.А.Имомов
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.д. (DSc), доцент

А.А.Имомов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси
ўринбосари, ф.-м.ф.д. (DSc), доцент

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳонда олиб борилаётган кўплаб тадқиқотлар аксарият ҳолларда ночизиқли операторларнинг қўзғалмас нуқталарини назарияси масалаларига келтирилади. Ночизиқли операторларнинг қўзғалмас нуқталари дифференциал тенгламалар, динамик системалар назарияси, иқтисодиёт, биология, термодинамика, статистик механика ва бошқа турли соҳалардаги турли ночизиқли масалаларда қўлланилади. Қўзғалмас нуқталарни тадқиқ этиш усуллари ночизиқли интеграл тенгламаларнинг ечимларини анализ қилиш, шунингдек, Гаммерштейн типидаги ночизиқли интеграл операторларнинг қўзғалмас нуқталарини аниқлаш ва уларни Гиббс ўлчовлари назариясига боғлиқ хулосалар чиқариш муҳим аҳамият касб этади.

Дунёда статистик механика ва физика моделлари учун Гиббс ўлчовларини, Гаммерштейн типидаги ночизиқли интеграл операторининг қўзғалмас нуқталари тўпламини таснифлаш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Бу борада, Кэли дарахтида аниқланган спин қийматлари континуум тўпламдан олинган моделлар учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари ва фазавий ўтишлар Гаммерштейн типидаги интеграл операторининг мусбат қўзғалмас нуқталарини аниқлаш, Гаммерштейн типидаги интеграл операторининг қўзғалмас нуқталари мавжудлиги ва ягоналигини ҳамда уларнинг сонини баҳоловчи шартларини топишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда илмий ва амалий татбиққа эга бўлган Гиббс ўлчовлари ҳамда ночизиқли динамик системалар назариясига боғлиқ бўлган фундаментал йўналишларга, хусусан, статистик механика, генетика, динамик системалар назарияси ва ночизиқли операторларнинг қўзғалмас нуқталари назариясини ривожлантириш бўйича муҳим натижаларга эришилмоқда. Таъкидлаш жоизки, бу каби назарияларга бўлган қизиқиш Кэли дарахтида аниқланган Гиббс ўлчовларини қуриш масаласи билан ҳам асосланади. «Функционал анализ, динамик системалар назарияси, интеграл тенгламалар фанларининг устувор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари» этиб белгиланди[1]. Бу борада ночизиқли операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталари назариясини ривожлантириш, трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари сонини ва симплекда аниқланган қатъий мусбат кубик стохастик операторнинг қўзғалмас нуқталарини аниқлаш илмий аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий тадқиқот ишларини

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий-тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори

ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Биринчи бўлиб 2010 йил У.А.Разиков ва Ю.Х.Эшкабиловларнинг ишида ночизиқли интеграл операторнинг мусбат қўзғалмас нуқталари, спин қийматлари тўплами континуум бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовлари назариясида муҳим аҳамиятга эга эканлиги келтирилган. Шундан сўнг охирги ўн йилда Кэли дарахтида бу каби моделлар учун Гиббс ўлчовлари катта қизиқиш билан ўрганилди. Кэли дарахтида спин қийматлари тўплами континуум тўпламдан иборат бўлган моделлар учун Гиббс ўлчовлари Ю.Х.Эшкабилов, У.А.Розиков, Г.И.Ботиров, Ф.Х.Ҳайдаров, Б.Жанель, С.Кульске ва бошқаларнинг ишларида ўрганилган ва ривожлантирилган. Ю.Х.Эшкабилов, У.А.Розиков, ва Ф.Х.Ҳайдаровнинг ишларида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўпламини таснифлаш Гаммерштейн типидаги интеграл операторининг мусбат қўзғалмас нуқталарини анализ қилишга келтирилган.

Г.И.Ботиров Б.Жанель, С.Кульскеларнинг ишларида модел ҳақиқий қийматли параметрга боғлиқ равишда қаралган ва бундай моделлар учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини тўпламини таснифловчи параметрнинг қийматига шартлар топилган. Бу каби масалалар $\mathbb{R}^2$ даги конусда аниқланган ночизиқли операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталарини тадқиқ этишга келтирилган. Бундай операторларнинг қўзғалмас нуқталарини тадқиқ этиш учун аниқ бир ёндашувнинг мавжуд эмаслиги масаланинг янада мураккаб эканлигини кўрсатади. Диссертация ишида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовларини тадқиқ этиш натижасида келиб чиққан ва $\mathbb{R}^2$ даги конусда аниқланган операторларнинг қўзғалмас нуқталарини анализ қилиш учун умумий ёндашувлар келтирилган ва натижалар олинган.

Бундай операторлар стохастик кўринишда бир ўлчамли симплексда ҳам учрайди. Маълумки, симплексда аниқланган ночизиқли стохастик операторларга бўлган қизиқиш, генетик популяциянинг эволюцияси масалалари билан характерланади. Симплексда аниқланган квадратик стохастик операторининг қўзғалмас нуқталари характери ва хоссаларини тадқиқ этишга доир Р.Н.Ганиходжаев, Н.Н.Ганиходжаев, У.А.Розиков, Ф.М.Мухаммедов, У.У.Жамилов ва бошқаларнинг ишлари мавжуд. Чекли ўлчамли симплексда аниқланган кубик стохастик операторларнинг қўзғалмас нуқталарининг хоссалари ва траекториясининг ҳолатларига бағишланган У.А.Розиков, У.У.Жамилов, М.Ладра, А.Ю.Хамраев, Ф.А.Шахиди ва бошқаларнинг ишлари мавжуд.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация Қарши давлат университети илмий-тадқиқот ишлар режасидаги ОТ-Ф-4-03 “Узлуксиз ҳамда дискрет вақтли аниқ динамик системалар, қисмий интеграл операторлар спектрлари” (2017-2020 йиллар) ва Ўзбекистон Миллий университети илмий-тадқиқот ишлари режасидаги ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 “Z^d панжарада ва Γ^k Кэли дарахтларида гамильтонианлар спектрлари ва Гиббс ўлчовлари” (2018-2019 йиллар) номли фундаментал лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади икки ўлчамли ҳақиқий сонлар фазосидаги ночизиқли Q_k $(k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ операторнинг тривиал бўлмаган мусбат қўзғалмас нуқталари сонини аниқлашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

ажралувчи ядроли Гаммерштейн типидаги интеграл тенгламанинг мусбат ечимларини аниқлаш;

$\mathbb{R}^2$ да аниқланган ночизиқли Q_k операторнинг мусбат қўзғалмас нуқталарини аниқлаш;

Q_2 квадратик, Q_3 кубик ва Q_4 квартик операторларининг мусбат қўзғалмас нуқталари сонини тадқиқ этиш;

квадратик, кубик ва квартик операторларининг мусбат қўзғалмас нуқталари сони учун етарли шартлар олиш;

симплексда аниқланган қатъий мусбат кубик стохастик операторнинг қўзғалмас нуқталарини сонини баҳолаш учун етарли шартлар олиш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари, Гаммерштейн типидаги интеграл оператор, икки ўлчамли ҳақиқий сонлар фазосидаги ночизиқли оператор, бир ўлчамли симплексда аниқланган кубик стохастик оператор, ҳақиқий коэффициентли $k+1$-даражали кўпҳад олинди.

Тадқиқотнинг предметини Кэли дарахтида аниқланган спин қийматлари континуум қувватли тўпламдан иборат бўлган модел, ажралувчи ядро, қўзғалмас нуқталар, кўпҳаднинг мусбат илдизлари ташкил этади.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертация ишида функционал анализ, математик анализ, алгебра, кўпҳадлар назарияси ва ночизиқли операторлар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат**:**

икки ўлчамли ҳақиқий сонлар фазосида аниқланган ночизиқли оператор ҳамда Гаммерштейн типидаги интеграл операторларининг мусбат қўзғалмас нуқталари орасида боғланиш топилган;

икки ўлчамли ҳақиқий сонлар фазосида аниқланган квадратик, кубик ҳамда квартик операторларининг тривиал бўлмаган мусбат қўзғалмас нуқталарининг ягоналик шартлари топилган;

квадратик, кубик ҳамда квартик операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталари сонини баҳолаш учун етарли шартлар олинган;

бир ўлчамли симплексда аниқланган қатъий мусбат коэффицентли кубик стохастик операторнинг қўзғалмас нуқталари сонини баҳоловчи етарли шартлар олинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

статистик механикадаги физик системалар учун фазавий ўтишларга доир натижалар олинган ва трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари сони аниқланган;

кубик стохастик операторланинг қўзғалмас нуқтаси ҳақидаги натижаларни биологик системанинг эволюцион ҳолатини характерловчи динамик системаларда қўллаш мумкин.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги Гиббс ўлчовлари назариясининг фундаментал натижаларини қўллаш, функционал анализ усуллари, ҳақиқий аргументли функциялар назарияси, кўпҳадлар назариясининг маълум хоссаларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги, исботланган теоремаларнинг шартлари бажарилиши учун мисоллар келтирилганлиги, Wolfram Mathematica 10 ва Maple 15 каби математик дастурлар ёрдамида текширилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўрганилаётган ночизиқли операторнинг қўзғалмас нуқталари сони Гаммерштейн типидаги интеграл тенгламаснинг ечимлари сонини характерлаши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, ночизиқли операторнинг қўзғалмас нуқталари сони статистик механика ва физика моделлари учун фазавий ўтишларнинг мавжудлигини характерловчи трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари сонини ифодаланиши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Ночизиқли операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталарига доир олинган илмий натижалари асосида:

икки ўлчамли ҳақиқий сонлар фазосида аниқланган ночизиқли оператор ҳамда Гаммерштейн типидаги интеграл операторларининг мусбат қўзғалмас нуқталари орасида боғланишдан ва икки ўлчамли ҳақиқий сонлар фазосида аниқланган квадратик, кубик ҳамда квартик операторларининг мусбат қўзғалмас нуқталарининг ягоналик ҳамда ягона бўлмаслиги каби натижалардан ЁФА-Фтех-2018-78 рақамли “Аменабел бўлмаган графларда динамик ва термодинамик системалар” лойиҳада фойдаланилган (Фанлар академиясининг 2020 йил 9 декабрдаги №2/1255-2767-сон маълумотномаси). Натижада Гаммерштейн типидаги ночизиқли интеграл тенгламаларнинг камида иккита мусбат ечимга эга бўладиган ядроларнинг мавжудлиги, статистик механика моделлари учун, фазавий ўтишлар мавжудлигини таҳлил қилиш имконини берган;

квадратик, кубик ва квартик операторларнинг ҳамда бир ўлчамли симплексда аниқланган қатъий мусбат коэффицентли кубик стохастик операторнинг мусбат қўзғалмас нуқталари сонини баҳоловчи етарли шартларига оид илмий хулосаларидан ЁФ-4-8 рақамли “Математик ва статистик физиканинг ноклассик масалалари” мавзусидаги фундаментал лойиҳада фойдаланилган. (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 25 ноябрдаги 89-03-4924-сон маълумотномаси). Натижада статистик механика моделларининг трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари тўпламини таснифлашга эквивалент бўлган ночизиқли интеграл тенгламаларнинг мусбат ечимлари сонини таҳлил қилиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 4 та халқаро ва 3 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 11 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий аттестация комиссиясининг диссертациялар асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та, жумладан 2 таси хорижий ва 2 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертацияъннинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиѐтлар рўйхатидан иборат бўлиб, 108 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ҳақида маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Ночизиқли операторларнинг қўзғалмас нуқталари ва Гиббс ўлчовлари»** деб номланган биринчи бобида диссертацияни баён қилиш учун муҳим бўлган асосий белгилашлар, таърифлар ва теоремаларни ўз ичига олувчи керакли маълумотлар ҳамда тадқиқот масаласи баён этилган.

Биринчи бобнинг биринчи параграфида $k \in \mathbb{N}$ тартибли Кэли дарахтида аниқланган спин қийматлари континуум қувватли тўпламдан иборат моделлар учун Гиббс ўлчовлари назарияси бўйича керакли таърифлар ва тушунчалар келтирилган.

$\Gamma^k = (V, L)$ билан k-тартибли Кэли дарахтини белгилайлик, яъни циклсиз, ҳар бир учидан $k+1$та қирралар чиқувчи чексиз граф. Бу ерда V

билан дарахтнинг учлари тўплами ва L билан эса қирралари тўплами белгиланган. Биз дарахтнинг учларидаги спин ўзгарувчилари қийматлари $[0,1]$ тўпламдан олинган моделни қараймиз. $A \subset V$ тўпламда аниқланган $\sigma_A : A \to [0,1]$ акслантириш A тўпламда аниқланган конфигурация дейилади. A да аниқланган барча конфигурациялар тўпламини $\Omega_A = [0,1]^A$ билан белгилайлик. V да аниқланган барча конфигурациялар тўпламини эса $\Omega := [0,1]^V$ билан белгилаймиз.

Қуйидаги кўринишдаги:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x),\sigma(y)}, \ \sigma \in \Omega_V, \tag{1}$$

моделни қарайлик, бу ерда $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ва $\xi : (u,v) \in [0,1]^2 \to \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ чегараланган, ўлчовли функция. $\langle x, y \rangle$ билан қўшни учлар белгиланган.

$[0,1]$ да узлуксиз фунгциялар фазосида қуйидаги конусни аниқлаймиз:

$$C_+[0,1] = \left\{ f(t) \in C[0,1] : f(t) \geq 0, \forall t \in [0,1] \right\}.$$

1.2 параграфда конусдаги ночизиқли мусбат операторли тенгламалар назариясига доир баъзи тушунчалар ва натижалар баён этилган. $C\left[0,1\right]$ даги, яъни $\left[0,1\right]$ да узлуксиз функциялар фазосидаги конусда аниқланган Гаммерштейн типидаги интеграл оператор қаралган.

k $\geq$ 2 учун $C_+[0,1]$ конусда H_k Гаммерштейн типидаги интеграл операторини қараймиз:

$$\left(H_k f\right)(t) = \int_0^1 K(t,u) f^k(u) du,$$

бу ерда $K(t,u) = \exp(J\beta\xi_{tu}) > 0, \ t,u \in [0,1], \ \beta = \dfrac{1}{T}, T > 0$ температура.

Ю.Х.Эшкабилов, У.А.Розиков и Ф.Х.Ҳайдаровнинг (2012, 2013) ишларидан олинган натижалардан фойдаланган ҳолда тенгламанинг мусбат ечимлари ва Гаммерштейн типидаги H_k операторнинг $C_+[0,1]$ конусдаги тривиал бўлмаган мусбат қўзғалмас нуқталари сони ва (1) модел учун трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари сони тенг эканлиги ҳақида лемма исботланган.

1.3 параграфда диссертация ишига қўйилган масала ҳақида баён этилган.

$k \geq 2$ ҳолатда Гаммерштейн типидаги H_k интеграл оператори, $K(t,u)$ ядро қатъий мусбат, ажралувчи бўлган ҳолда қаралган, яъни

$$K(t,u) = \phi_1(t)\varphi_1(u) + \phi_2(t)\varphi_2(u), \tag{2}$$

бу ерда $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ и $\psi_1(t), \psi_2(t)$ функциялар $C_+^0[0,1] = C_+[0,1] \setminus \left\{\theta = 0\right\}$ да аниқланган бўлиб мос жуфтликлари билан ўзаро чизиқли боғлиқсиз.

Куйидагича белгилашларни киритамиз:

$$\mathbb{R}_+^2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y\geq 0\right\},\ \mathbb{R}_>^2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0, y>0\right\}.$$

$\mathbb{R}_+^2$ конусда қуйидаги $\mathcal{Q}_k$ $(k\geq 2)$ ночизиқли операторни аниқлайлик:

$$\mathcal{Q}_k(x,y)=\left(\sum_{i=0}^{k}C_k^i a_i x^{k-i}y^i,\ \sum_{i=0}^{k}C_k^i b_i x^{k-i}y^i\right),$$

бу ерда $C_k^i=\dfrac{k!}{(k-i)!i!}$ (биномиал коэффициент), $a_i>0, b_i>0$ барча $i\in\{0,1,...,k\}$ лар учун.

Ушбу параграфда ядроси (2) кўринишдаги Гаммерштейн типидаги H_k интеграл операторининг мусбат қўзғалмас нуқталари, $\mathcal{Q}_k$ операторининг мусбат қўзғалмас нуқталари ёрдамида бир қийматли аниқланиши ҳақидаги лемма исботланган, бу ерда

$$a_i=\int_0^1\varphi_1(u)\phi_1^{k-i}(u)\phi_2^i(u)du,\ b_i=\int_0^1\varphi_2(u)\phi_1^{k-i}(u)\phi_2^i(u)du, i=\overline{0,k}.$$

Қуйидаги $k+1$ даражали $P_{k+1}(\xi)$ кўпҳадни қарайлик:

$$P_{k+1}(\xi)=\mu_0\xi^{k+1}+\mu_1\xi^k+....+\mu_k\xi+\mu_{k+1}.$$

бу ерда

$$\mu_0=a_k,\ \mu_i=\frac{k!}{(k-1)!(i-1)!}\Big(\frac{a_{i-1}}{k-i+1}-\frac{b_i}{i}\Big),\ i=\overline{1,k},\ \mu_{k+1}=-b_0.$$

Лемма 1. *Агар $\omega=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}_>^2$ $\mathcal{Q}_k$ операторнинг қўзғалмас нуқтаси бўлса, у ҳолда $\xi_0=\dfrac{y_0}{x_0}$*

$$P_{k+1}(\xi)=0 \tag{3}$$

тенгламанинг мусбат илдизи бўлади.

Лемма 2. *Агар ξ_0 (3) тенгламанинг мусбат илдизи бўлса, у ҳолда $\omega_0=(x_0,\xi_0x_0)\in\mathbb{R}_>^2$ нуқта $\mathcal{Q}_k$ операторнинг қўзғалмас нуқтаси бўлади, бу ерда*

$$x_0=\frac{1}{\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^{k}C_k^i a_i\xi_0^i}}.$$

Натижа 1. *$\mathcal{Q}_k$ операторнинг $\mathbb{R}_>^2$ даги қўзғалмас нуқталари сони, $P_{k+1}(\xi)$ кўпҳаднинг мусбат илдизлари сони билан устма-уст тушади.*

Эслатиб ўтамиз, $\mathcal{Q}_k$ операторнинг $\mathbb{R}_>^2$ даги мусбат илдизлари сони Γ_k Кэли дарахтидаги H (1) моделнинг

$$\xi_{t,u}(\beta)=\frac{1}{J\beta}\ln\left(\phi_1(t)\varphi_1(u)+\phi_2(t)\varphi_2(u)\right).$$

функция ёрдамида аниқланган трансляцион-инвариант Гиббс ўлчовлари сонини беради.

Теорема 1. *$\mathcal{Q}_k$ оператор $\mathbb{R}^2_>$ да камида битта кўзғалмас нуқтага эга.*

Диссертациянинг **«R^2 да ночизиқли операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталари»** деб номланган иккинчи бобида $\mathcal{Q}_2,\mathcal{Q}_3$ ва $\mathcal{Q}_4$ ночизиқли операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталари сони тадқиқ этилган.

$N^{fix}_>\left(\mathcal{Q}_k\right)$ орқали $\mathcal{Q}_k$ операторнинг тривиал бўлмаган мусбат қўзғалмас нуқталари сонини белгилаймиз.

2.1 параграфда $\mathcal{Q}_2$ квадратик операторнинг мусбат қўзғалмас нуқталари сони тадқиқ этилган. $\mathcal{Q}_2$ квадратик оператор $\mathbb{R}^2_>$ да учтагача қўзғалмас нуқтага эга бўлиши исботланган.

$D=\mu_1^2-3\mu_0\mu_2$ каби белгилаш киритамиз ва $D>0$ бўлганда қуйидаги сонларни аниқлаймиз:

$$\alpha=-\frac{\mu_1+\sqrt{D}}{3\mu_0},\ \beta=-\frac{\mu_1-\sqrt{D}}{3\mu_0}.$$

Таъкидлаш жоизки, $D>0$ бўлган ҳолатда $\alpha<\beta$ муносабат ўринли.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфининг асосий натижалари қуйидаги теоремаларда ифодаланган.

Теорема 2. *Айтайлик, $D>0$ ва $\alpha>0$ бўлсин. Агар қуйидаги шарлардан бироптаси бажарилса:*

(f) $P_3(\alpha)=0,$

(g) $P_3(\beta)=0,$

у ҳолда $\mathcal{Q}_2$ квадратик оператор $\mathbb{R}^2_>$ да иккита қўзғалмас нуқтага эга, яъни $N^>_{fix}(\mathcal{Q}_2)=2$.

Теорема 3. *Айтайлик, $D>0$ ва $\alpha>0$ бўлсин. Агар қуйидаги шарт бажарилса*

(h) $P_3(\alpha)>0, P_3(\beta)<0$,

у ҳолда $\mathcal{Q}_2$ квадратик оператори $\mathbb{R}^2_>$ да учта қўзғалмас нуқтага эга, яъни $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_2)=3$.

Таъкидлаш жоизки, диссертацияда $\mathcal{Q}_2$ квадратик операторни мусбат қўзғалмас нуқталари ягоналиги учун ҳам теоремалар исботланган ва теоремаларнинг шартлари бажарилиши учун мисоллар келтирилган.

2.2 параграфда $\mathcal{Q}_3$ кубик операторининг мусбат қўзғалмас нуқталари сони тадқиқ этилган. Исботланган теоремаларнинг шартлари бажарилиши учун мисоллар келтирилган.

Қуйидаги сонни аниқлаймиз:

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^{3}+\left(\frac{q}{2}\right)^{2},$$

бу ерда

$$p=-\frac{3\mu_1^2}{16\mu_0^2}+\frac{3\mu_2}{2\mu_0},\ q=\frac{\mu_1^3}{32\mu_0^3}-\frac{3\mu_1\mu_2}{8\mu_0^2}+\frac{\mu_3}{4\mu_0}.$$

Теорема 4. *Айтайлик, $Q \geq 0$ бўлсин. У ҳолда $\mathcal{Q}_3$ кубик оператор $\mathbb{R}^2_>$ да ягона қўзғалмас нуқтага эга, яъни $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3)=1$.*

$Q \leq 0$ ҳолда ушбу сонларни киритамиз:

$$\theta_k=2\sqrt{-\frac{p}{3}}cos\left(\frac{\alpha+2\pi(k-2)}{3}\right),\ k=\overline{1,2,3},$$

бу ерда

$$\cos\alpha=-\frac{q}{2}\left(-\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}},\ \alpha\in[0,\pi].$$

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$\gamma_1=\theta_3-\frac{\mu_1}{4\mu_0},\ \gamma_2=\theta_1-\frac{\mu_1}{4\mu_0},\ \gamma_3=\theta_2-\frac{\mu_1}{4\mu_0}.$$

2.2 параграфнинг асосий натижалари қуйидаги теоремаларда ифодаланади.

Теорема 5. *Айтайлик, $Q<0$ ва $\gamma_2>0$ бўлсин. Агар қуйидаги шартлардан бирортаси бажарилса:*

(d) $P_4(\gamma_2)=0,$

(e) $P_4(\gamma_3)=0,$

у ҳолда $\mathcal{Q}_3$ кубик оператор $\mathbb{R}^2_>$ да иккита қўзғалмас нуқтага эга, яъни $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3)=2.$

Теорема 6. *Айтайлик, $Q<0$ ва $\gamma_2>0$ бўлсин. Агар қуйидаги шарт ўринли бўлса*

(f) $P_4(\gamma_2)>0,\ P_4(\gamma_3)<0,$

у ҳолда, $\mathcal{Q}_3$ кубик оператор $\mathbb{R}^2_>$ да учта қўзғалмас нуқтага эга, яъни $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3)=3.$

2.3 параграфда $\mathcal{Q}_4$ квартик операторнинг $\mathbb{R}^2_>$ даги қўзғалмас нуқталари тадқиқ этилган. Таъкидлаб ўтиш жоизки, $\mathcal{Q}_4$ квартик оператор $\mathbb{R}^2_>$ да бештагача қўзғалмас нуқтага эга бўлиши исботланган.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$a=-\frac{p^2}{12}-r,\ b=-\frac{p^3}{108}+\frac{pr}{3}-\frac{q^2}{8},$$

бу ерда

$$p=\frac{15\mu_0\mu_2-6\mu_1^2}{25\mu_0^2},\ q=\frac{50\mu_0^2\mu_3+8\mu_1^3-30\mu_0\mu_1\mu_2}{125\mu_0^3},$$
$$r=\frac{15\mu_0\mu_1^2\mu_2-50\mu_0^2\mu_1\mu_3-3\mu_1^4-125\mu_0^3\mu_4}{625\mu_0^4}.$$

Ушбу сонни аниқлаймиз:

$$Q=\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

$Q<0$ бўлганда, қуйидаги сонни киритамиз:

$$z_0=2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{p}{3},$$

бу ерда $\cos\alpha=-\frac{b}{2}\left(-\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}},\alpha\in[0,\pi]$.

Қуйидагича белгилашларни киритамиз:

$$\xi_{1,2}^{ext}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2z_0}\pm\sqrt{2z_0-4\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}\right)-\frac{\mu_1}{5\mu_0},$$
$$\xi_{3,4}^{ext}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2z_0}\pm\sqrt{2z_0-4\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}\right)-\frac{\mu_1}{5\mu_0}.$$

Таъкидлаш жоизки, $z_0>0$ бўлганда $\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}$ сонлар ҳақиқий бўлади.

$z_0>0$ бўлганда, қуйидаги сонларни аниқлаймиз:

$$\xi_{min}=\min\{\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}\},\ \xi_{max}=\max\{\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}\}.$$

Теорема 7. *Айтайлик,* $Q<0$, $z_0>0$, $\xi_{min}>0$ *бўлсин. Агар* $P_5(\xi)$ *кўпҳад қуйидаги шартлардан бирини қаноатлантирса:*

(a) $P_5(\xi_{min})=0$,

(b) $P_5(\xi_{max})=0$,

у ҳолда $\mathcal{Q}_4$ *оператор* $\mathbb{R}^2_>$ *да камида иккита қўзғалмас нуқтага эга, яъни* $N^{fix}_>(\mathcal{Q})\geq 2$.

Айтайлик, $Q<0$, $z_0>0$ бўлсин. Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\mathfrak{A}=\{\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}\},$$
$$\lambda_1=\xi_{min},\ \lambda_2=\min\left(\mathfrak{A}\setminus\{\xi_{min}\}\right),\ \lambda_3=\max\left(\mathfrak{A}\setminus\{\xi_{max}\}\right),\ \lambda_4=\xi_{max}.$$

$\mathcal{Q}_4$ квартик операторнинг $\mathbb{R}^2_>$ даги қўзғалмас нуқталари сонини тадқиқ этиш жараёнида олинган натижалар қуйида жадвал (1-жадвалга қаранг) кўринишида келтирилган:

1-Жадвал

Айтайлик, $Q<0$, $z_0>0$, $\lambda_1>0$ муносабат ўринли бўлсин.		
№	Етарли шартлар	$N_{>}^{fix}(\mathcal{Q}_4)$
1.	$P_5(\lambda_1)<0,\ P_5(\lambda_3)<0$	1
2.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_3)<0$	2
3.	$P_5(\lambda_1)<0,\ P_5(\lambda_3)=0$	
4.	$P_5(\lambda_2)>0,\ P_5(\lambda_4)=0$	
5.	$P_5(\lambda_2)=0,\ P_5(\lambda_4)>0$	
6.	$P_5(\lambda_2)>0,\ P_5(\lambda_4)=0$	
7.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_4)=0$	3
8.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_3)=0$	
9.	$P_5(\lambda_2)=0,\ P_5(\lambda_4)=0$	
10.	$P_5(\lambda_2)>0,\ P_5(\lambda_4)<0$	
11.	$P_5(\lambda_1)<0,\ P_5(\lambda_3)>0,\ P_5(\lambda_4)<0$	
12.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_2)<0,\ P_5(\lambda_4)>0$	
13.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_3)>0, P_5(\lambda_4)<0$	4
14.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_3)=0$	
15.	$P_5(\lambda_2)=0,\ P_5(\lambda_4)<0$	
16.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_2)<0, P_5(\lambda_4)=0$	
17.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_2)<0, P_5(\lambda_3)>0,\ P_5(\lambda_4)<0$	5

Диссертациянинг **«Симплексда қатъий мусбат кубик стохастик операторининг қўзғалмас нуқталари»** номли учинчи бобида қатъий мусбат коэффициентли кубик стохастик операторининг қўзғалмас нуқталари бир ўлчамли симплексда ўрганилган. Олинган теоремаларнинг шартлари бажарилиши учун мисоллар келтирилган.

3.1 параграфда зарурий тушунчалар ва таърифлар келтириб ўтилган бўлиб, симплексда аниқланган кубик стохастик операторининг қўзғалмас нуқталарини анализ қилиш учун бир қанча хоссалар келтириб ўтилган.

Бизга $E=\{1,2,3,...,n\}$ тўплам берилган бўлсин. Қуйидаги

$$S^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0, \forall i\in E, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$$

тўплам $(n-1)$-ўлчамли симплекс дейилади. $S_>^{n-1}$ орқали S^{n-1} симплекснинг ички нуқталарини белгилаймиз, яъни

$$S_>^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i>0, \forall i\in E, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}.$$

Кубик стохастик оператор $\mathcal{C}:S^{n-1}\to S^{n-1}$, қуйидагича аниқланади: $\mathcal{C}x=x'$, яъни

$$x_l' = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \; l \in E.$$

бу ерда $P_{jik,l} = P_{ijk,l} = P_{kij,l} = P_{kji,l} = P_{ikj,l} = P_{jki,l} \geq 0, \; \forall i,j,k,l \in E, \; \sum_{l=1}^{n} P_{ijk,l} = 1.$

Ушбу $a_{ij} = P_{iij,1}, \; b_{ij} = P_{iij,2}, \; i,j \in E = \{1,2\}$ белгилашларни киритамиз. У ҳолда, бир ўлчамли сиплексда қатъий мусбат кубик стохастик оператор (КСО) $\mathcal{C}$ қуйидаги кўринишга келади:

$$\mathcal{C}(x,y) = (a_{11}x^3 + 3a_{12}x^2y + 3a_{21}xy^2 + a_{22}y^3, b_{11}x^3 + 3b_{12}x^2y + 3b_{21}xy^2 + b_{22}y^3), \quad (4)$$

бу ерда $a_{ij} > 0, \; b_{ij} > 0, \; a_{ij} + b_{ij} = 1, \; i,j \in \{1,2\}.$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$c_0 = a_{11} - a_{22} + 3(a_{21} - a_{12}), c_1 = 3a_{22} + 3a_{12} - 6a_{21}, \; c_2 = 3a_{21} - 3a_{22} - 1, c_3 = a_{22}.$$

Ушбу учинчи даражали кўпҳадни аниқлаймиз:

$$P_3(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3. \quad (5)$$

(4) КСОнинг бир ўлчамли симплексда қўзғалмас нуқталари тўпламини $\mathrm{Fix}(\mathcal{C})$ орқали белгилаймиз, яъни $\mathrm{Fix}(\mathcal{C}) = \{\omega \in S^1 : \mathcal{C}\omega = \omega\}$. Маълумки, $|\mathrm{Fix}(\mathcal{C})|$ (4) КСОининг бир ўлчамли симплексдаги қўзғалмас нуқталари сонини беради.

Лемма 3. (4) *КСО* S^1 *даги қўзғалмас нуқталари сони* (5) *кўпҳаднинг* $(0,1)$ *интервалдаги илдизлари сони билан устма-уст тушади.*

Натижа 2. *Агар* $x_0 \in (0,1)$ *нуқта* (5) *кўпҳаднинг илдизи бўлса, у ҳолда* $\omega_0 = (x_0, 1 - x_0)$ *нуқта (4) КСОнинг* $S^1_>$ *даги қўзғалмас нуқтаси бўлади.*

Лемма 4. (5) *кўпҳад* $(0,1)$ *интервалда камида битта илдизга эга.*

3.2 параграфда (4) КСОнинг симплексдаги қўзғалмас нуқталари ўрганилган. Таъкидлаш жоизки, (4) КСО S^1 да учтагача қўзғалмас нуқтага эга эканлиги исботланган.

Теорема 8. *Айтайлик,* $c_0 \geq 0$ *бўлсин. У ҳолда* (4) *КСО* $S^1_>$ *да ягона қўзғалмас нуқтага эга, яни* $|\mathrm{Fix}(\mathcal{C})| = 1$.

Лемма 5. *Агар қуйидаги муносабатлардан бири бажарилса*,

1. $c_0 < 0, c_1 < 0, c_2 < 0,$
2. $c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 > 0,$
3. $c_0 < 0, c_1 < 0, c_2 > 0,$

у ҳолда (4) *КСО* $S^1_>$ *да ягона қўзғалмас нуқтага эга, яъни* $|Fix(\mathcal{C})| = 1$.

Ушбу

$$c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 < 0, \quad (6)$$

ҳолда (4) КСО $S^1_>$ да учтагача қўзғалмас нуқтага эга бўлади, яъни $1 \leq |\mathrm{Fix}(\mathcal{C})| \leq 3$.

$\Delta := c_1^2 - 3c_0c_2$ каби белгилаш киритамиз.

$\Delta > 0$ ҳолатда α ва β сонларни аниқлаймиз:

$$\alpha = \frac{-c_1 + \sqrt{\Delta}}{3c_0},\ \beta = \frac{-c_1 - \sqrt{\Delta}}{3c_0}.$$

Қуйида келтирилувчи 9 ва 10 теоремаларда (6) муносабатлар ўринли деб фараз қиламиз.

Теорема 9. *Айтайлик,* $\Delta > 0,\ \ \beta < 1$ *ўринли бўлсин. Агар* (5) *кўпҳад учун қуйидаги шартлардан бирортаси ўринли бўлса,*

$(c)\ \ P_3(\alpha) = 0,$

$(d)\ \ P_3(\beta) = 0$

у ҳолда (4) *КСО* $S^1_>$ *да иккита қўзғалмас нуқтага эга, яъни* $|\,\mathrm{Fix}(\mathcal{C})\,| = 2$.

Теорема 10. *Айтайлик,* $\Delta > 0,\ \ \beta < 1$ *муносабатлар ўринли бўлсин. Агар* (5) *кўпҳад учун қуйидаги шарт бажарилса,*

$(e)\ \ P_3(\alpha) < 0$ *ва* $P_3(\beta) > 0,$

у ҳолда (4) *КСО* $S^1_>$ *да учта қўзғалмас нуқтага эга, яъни* $|\,\mathrm{Fix}(\mathcal{C})\,| = 3$.

3.3 параграфда исботланган теоремаларнинг етарли шартлари бажарилишига мисоллар келтирилган, шу билан бирга, (4) КСОнинг коэффициентлари учун $S^1_>$ да битта ёки учта қўзғалмас нуқтага эга бўладиган шартлар топилган.

Энди (4) КСОнинг коэффициентлари

$$a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21} = 1 \tag{7}$$

шартни қаноатлантирсин деб фараз қилайлик.

Қуйидаги белгилашни киритамиз:

$$\Delta = 2 - (3a_{12} + a_{22}).$$

$\Delta \neq 0$ ҳолда қуйидаги сонни аниқлаймиз:

$$D^* = 1 - 4 \cdot \frac{a_{22}}{|\Delta|}.$$

Теорема 11. *Айтайлик,* (7) *шарт бажарилсин. Агар қуйидаги*

$(e)\ \ \Delta \geq 0,$

$(f)\ \ \Delta < 0, D^* \leq 0,$

шартлардан бирортаси бажарилса, у ҳолда (4) КСО S^1 *да ягона* $\omega_0 = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ *қўзғалмас нуқтага эга.*

Теорема 12. *Айтайлик,* (7) *шарт бажарилсин. Агар* $\Delta < 0$, $D^* > 0$ *муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда* (4) *КСО* S^1 *да учта қўзғалмас нуқтага эга ва улар қуйидаги кўринишда бўлади:*

$$\omega_1^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D^*}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D^*}}{2}\right),\ \omega_2^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right),\ \omega_3^* = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D^*}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D^*}}{2}\right).$$

ХУЛОСА

Диссертация иши ажралувчи ядроли Гаммерштейн типидаги H_k интеграл операторниг мусбат қўзғалмас нуқталарини тадқиқ этишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

(2) ажралувчи ядроли H_k $(k \geq 2)$ Гаммерштейн интеграл операторини мусбат қўзғалмас нуқталарини тадқиқ этиш масаласи $\mathbb{R}^2$ фазодаги $\mathcal{Q}_k$ $(k \geq 2)$ операторнинг мусбат қўзғалмас нуқталарини тадқиқ этиш масаласига келтирилган;

$\mathbb{R}^2$ фазодаги $\mathcal{Q}_k$ операторнинг мусбат қўзғалмас нуқталари $k+1$даражали P_{k+1} кўпҳаднинг мусбат илдизлари ёрдамида бир қийматли аниқланиши исботланган;

$\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ ва $\mathcal{Q}_4$ операторларнинг мусбат қўзғалмас нуқталарини сони учун етарли шартлар олинган. Теореманинг етарли шартлари бажарилишига мисоллар келтирилган;

қатъий мусбат $\mathcal{C}$ КСОнинг бир ўлчамли симплексда қўзғалмас нуқталари сони ўрганилган;

симплексдаги қатъий мусбат $\mathcal{C}$ КСОнинг қўзғалмас нуқталари сонини баҳолаш учун етарли шартлар олинган;

қатъий мусбат $\mathcal{C}$ КСОнинг қўзғалмас нуқталари ягона ва учта бўлиши учун коэффициентларга шартлар топилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

НОДИРОВ ШОХРУХ ДИЛМУРОДОВИЧ

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА $\mathbb{R}^2$ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Карши – 2021

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2020.2.PhD/FM210.

Диссертация выполнена в Каршинском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (qarshidu.uz) и на информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Эшкабилов Юсуп Халбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Жамилов Уйгун Умурович** доктор физико-математических наук
	Эшмаматова Дилфуза Бахромовна кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	Национальный университет Узбекистана

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете. (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Каршинский государственный университет, физико-математический факультет, аудитория 102.

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственно университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2021 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2021 года).

Б.А.Шаимкулов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.А.Имомов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н. (DSc), доцент

А.А.Имомов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н. (DSc), доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные проблемы, исследуемые в мире, в большинстве случаев сводятся к изучению неподвижных точек нелинейных операторов. Такие точки применяются в различных нелинейных задачах во многих областях, таких как дифференциальные уравнения, теория динамических систем, экономика, биология, термодинамика, статистическая механика и т.д. Методы исследований неподвижных точек являются полезными инструментами для анализа решений нелинейных интегральных уравнений. В частности, определение неподвижных точек нелинейных интегральных операторов типа Гаммерштейна и их применения в теории меры Гиббса являются актуальными исследованиями.

В настоящее время проводятся глубокие научные исследования по изучению мер Гиббса для моделей статистической механики и физики, описанию множеств неподвижных точек нелинейных операторов типа Гаммерштейна. При этом большое внимание уделяется определению трансляционно-инвариантных мер Гиббса и фазовых переходов для моделей на дереве Кэли с континуальным множеством значений спина и положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна, нахождению условий существования и единственности, и определению количества неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна.

В нашей стране достигаются значительные результаты в развитии фундаментальных направлений, связанных с теорией мер Гиббса и нелинейных динамических систем, имеющих научные и практические приложения, в частности, статистической механики, генетики, теории динамических систем, теории неподвижных точек нелинейных операторов. Следует отметить, что интерес к таким теориям также основан на проблеме построения меры Гиббса, идентифицированной на дереве Кэли. Постановлением Кабинета Министров обозначены «Основные задачи и направления научных исследований на уровне международных стандартов в приоритетных областях функционального анализа, теории динамических систем и интегральных уравнений»[1]. В этой связи, развитие теории положительных неподвижных точек нелинейных операторов, определение количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса и неподвижных точек строго положительного кубического стохастического оператора, определенного в симплексе, имеют важное научное значение.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № УП-2789 «О мерах

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В 2010 году в работе У.А.Розикова и Ю.Х.Эшкабилова впервые было показано, что положительные неподвижные точки нелинейных интегральных операторов играют решающую роль в теории мер Гиббса для моделей с континуальным множеством значения спина. С тех пор, в течение последних десяти лет, все возрастающее внимание уделяется изучению меры Гиббса для таких моделей на дереве Кэли. Теория построения мер Гиббса для моделей с континуальным множеством значений спина на дереве Кэли изучалась и развивалась в работах Ю.Х. Эшкабилов, У.А.Розикова, Г.И.Ботирова, Ф.Х.Хайдарова, Б.Жанель, С.Кульске и др. В работах Ю.Х.Эшкабилова, У.А.Розикова, Ф.Х.Хайдарова проблема описания трансляционно-инвариантных мер Гиббса была сведена к анализу положительных неподвижных точек нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна.

В работах Г.И.Ботиров, Б.Жанель, С.Кульске была рассмотрена модель с вещественным параметром и найдены условия на значение параметра, описывающего множество трансляционно-инвариантных мер Гиббса данной модели. Такие задачи сводятся к изучению положительных неподвижных точек нелинейных операторов на конусе в $\mathbb{R}^2$. Отсутствие единого подхода к изучению неподвижных точек для таких операторов увеличивало сложность таких задач. В диссертационной работе разработаны общие подходы и получены результаты, позволяющие анализировать неподвижные точки нелинейных операторов на конусе из $\mathbb{R}^2$, возникающих в процессе исследования трансляционно-инвариантных мер Гиббса.

Такие операторы также встречаются в стохастической форме в одномерном симплексе. Отметим, что интерес к теории нелинейных стохастических операторов на симплексе обусловлен ее актуальностью в задачах популяционной генетики. Имеются многочисленные публикации Р.Н.Ганиходжаева, Н.Н.Ганиходжаева, У.А.Розикова, Ф.М.Мухаммедова, У.У.Жамилова и др. по исследованию свойств и характеров неподвижных точек квадратичных стохастических операторов, заданных на симплексе. Свойства неподвижных точек и поведение траектории кубических стохастических операторов на конечномерном симплексе, исследованы в работах У.А.Розикова, У.У.Жамилова, М.Ладры, А.Ю.Хамроева, Ф.А.Шахиди и других авторов.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения высшего образования, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ОТ-Ф-4-03 «Конкретные динамические системы с непрерывными и дискретными времени, спектры частично интегральных операторов», Каршинский государственный университет (2017–2020 гг.), ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 «Меры Гиббса и спектры гамильтонианов на решетках Z^d и на деревьях Кэли Γ^k», Национальный университет Узбекистана (2018–2019 гг.).

Целью исследования является определение количества нетривиальных положительных неподвижных точек нелинейного оператора $\mathcal{Q}_k$ $(k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ на двумерном вещественном пространстве, возникающего в теории меры Гиббса.

Задачи исследования, решаемые в данной диссертации, следующие:

определение положительных решений интегральных уравнений типа Гаммерштейна с вырожденными ядрами;

исследование положительных неподвижных точек нелинейного оператора $\mathcal{Q}_k$ на $\mathbb{R}^2$;

определение количества положительных неподвижных точек квадратичного оператора $\mathcal{Q}_2$, кубического оператора $\mathcal{Q}_3$ и квартического оператора $\mathcal{Q}_4$;

нахождение достаточных условий для количества неподвижных точек квадратичного, кубического и квартического операторов;

найти количество неподвижных точек строго положительных кубических стохастических операторов на симплексе.

Объект исследования – трансляционно-инвариантные меры Гиббса, интегральные операторы типа Гаммерштейна, нелинейные операторы в двумерном вещественном пространстве, кубические стохастические операторы на одномерном симплексе, многочлен степени $k+1$ с вещественными коэффициентами.

Предмет исследования – модель с континуальным множеством значений спина на дереве Кэли, вырожденное ядро, неподвижные точки, положительные корни многочлена.

Методы исследования. В диссертации используются методы функционального анализа, математического анализа, алгебры, теория многочленов и теория нелинейных операторов.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

установлена связь между положительными неподвижными точками нелинейного оператора на двумерном вещественном пространстве и интегрального оператора типа Гаммерштейна;

получены условия единственности нетривиальных положительных неподвижных точек квадратичного, кубического и квартического операторов;

найдены достаточные условия для количества положительных неподвижных точек квадратичного, кубического и квартического операторов;

найдено количество неподвижных точек кубических стохастических операторов со строго положительными коэффициентами на симплексе.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

полученные результаты применяются к изучению количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса и фазовых переходов для физических систем в статистической механике;

результаты, касающиеся неподвижных точек кубических стохастических операторов, можно использовать в исследовании динамической системы, характеризирующей эволюцию состояния биологической системы.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием известных методов в теории полиномов, применением фундаментальных результатов теории мер Гиббса, а также методов функционального анализа, теории функций вещественного аргумента. Приведены примеры для выполнения условий доказанных теорем и проверены математическими программами Wolfram Mathematica 10 и Maple 15.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что количество неподвижных точек изучаемого нелинейного оператора характеризует количество решений интегрального уравнения типа Гаммерштейна.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что количество неподвижных точек исследуемого нелинейного оператора определяет количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса. Это позволяет проверить наличие фазовых переходов для моделей физики и статистической механики. А также, изучение неподвижных точек кубических стохастических операторов позволяет глубоко исследовать эволюцию генов в популяционной генетике.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты диссертационной работы были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты о связи между положительными неподвижными точками нелинейного оператора на двумерном вещественном пространстве и интегрального оператора типа Гаммерштейна, а также о полученных условиях единственности нетривиальных положительных неподвижных точек квадратичного, кубического и квартического операторов были использованы в научном гранте ЁФА-Фтех-2018-78 «Динамические и термодинамические системы на не аменабельных графах» при исследовании количества трансляционно-инвариантных мер Гиббса моделей на дереве Кэли с множеством значений спина [0,1] (справка Академии Наук Республики Узбекистан от 9 декабря 2020 года за номером 2/1255-2767). Применение полученных научных результатов позволило проанализировать существование фазовых переходов для моделей в статистической физике;

результаты о достаточных условиях для количества положительных неподвижных точек квадратичного, кубического, квартического и кубических стохастических операторов со строго положительными коэффициентами были использованы в проекте ЁФ-4-8 «Неклассические задачи математической и статистической физики» при изучении положительных решений нелинейных интегральных уравнений (справка Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан от 25 ноября 2020 года за номером 89-03-4924). Применение этих научных результатов дало возможность описания множества трансляционно-инвариантных мер Гиббса для некоторых обобщённых классических моделей в статистической физике.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации были представлены и обсуждены на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 4 международных и 3 республиканских конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ из них 4 – в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций на соискание степени доктора философии, в том числе, 2 – в зарубежном журнале и 2 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 108 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлен объект и предмет исследования, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации – **«Неподвижные точки нелинейных операторов и меры Гиббса»** – приведены основные обозначения и необходимые сведения, которые включают в себя определения и теоремы, важные для изложения текста диссертации, а также постановка задач исследования.

В параграфе 1.1 приведены необходимые определения и понятия по теории меры Гиббса для моделей с континуальным множеством значений спина на дереве Кэли Γ_k порядка $k \in \mathbb{N}$.

Пусть $\Gamma_k = (V, L)$ – дерево Кэли, где V есть множество вершин и L-множество ребер(дуг). Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $[0,1]$, и расположены на вершинах дерева.

Для $A \subset V$ конфигурация σ_A на A является произвольной функцией $\sigma_A : A \to [0,1]$. Обозначим $\Omega_A = [0,1]^A$ множество всех конфигураций на A. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \mapsto \sigma(x) \in [0,1]$; множество всех конфигураций совпадает с $[0,1]^V$.

Рассмотрим следующий гамильтониан:

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y \rangle \in L} \xi_{\sigma(x),\sigma(y)}, \quad \sigma \in \Omega_V, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\xi : (u,v) \in [0,1]^2 \to \xi_{u,v} \in \mathbb{R}$ является ограниченной, измеримой функцией.

Определим конус в $C[0,1]$ – пространстве непрерывных функций:

$$C_+[0,1] = \left\{ f(t) \in C[0,1] : f(t) \geq 0, \forall t \in [0,1] \right\}.$$

В параграфе 1.2 изложены некоторые понятия и известные результаты из теории нелинейных положительных операторных уравнений на конусе $C_+[0,1]$. Рассмотрен интегральный оператор типа Гаммерштейна на конусе $C_+[0,1]$.

Для k ≥ 2 рассмотрим интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k на конусе $C_+[0,1]$:

$$\left(H_k f\right)(t) = \int_0^1 K(t,u) f^k(u) du,$$

где $K(t,u) = \exp(J\beta\xi_{tu}) > 0,\ t,u \in [0,1],\ \beta = \dfrac{1}{T}, T > 0$ является температурой.

Используя полученные из работы Ю.Х.Эшкабилова, У.А.Розикова и Ф.Х.Хайдарова (2012,2013) результаты, доказано, что количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей (1) будет равняться количеству положительных неподвижных точек оператора типа Гаммерштейна.

В параграфе 1.3 речь идет о постановке задачи диссертационной работы.

Мы рассмотрели интегральный оператор типа Гаммерштейна H_k со строгим положительным и вырожденным ядром

$$K(t,u) = \phi_1(t)\varphi_1(u) + \phi_2(t)\varphi_2(u), \tag{2}$$

где функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ и $\psi_1(t), \psi_2(t)$ из $C_+^0[0,1] = C_+[0,1] \setminus \left\{\theta = 0\right\}$ – попарно линейно независимыми.

Целью задачи является изучение количества положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна H_k с ядром (2).

Положим,

$$\mathbb{R}_+^2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0\right\},\ \mathbb{R}_>^2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0\right\}.$$

Рассмотрим следующий нелинейный оператор $\mathcal{Q}_k$ $\left(k\geq 2\right)$ на $\mathbb{R}_+^2$:

$$\mathcal{Q}_k(x,y)=\left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i x^{k-i} y^i,\ \sum_{i=0}^{k} C_k^i b_i x^{k-i} y^i\right),$$

где $C_k^i=\dfrac{k!}{\left(k-i\right)!i!}$ (биномиальный коэффициент), $a_i>0, b_i>0$ при всех $i\in\left\{0,1,...,k\right\}$.

Доказана лемма, что нетривиальные положительные неподвижные точки интегрального оператора H_k с ядром (2) однозначно определяются с положительными неподвижными точками оператора $\mathcal{Q}_k$ и при этом

$$a_i=\int_0^1 \varphi_1\left(u\right)\phi_1^{k-i}\left(u\right)\phi_2^i\left(u\right)du,\ b_i=\int_0^1 \varphi_2\left(u\right)\phi_1^{k-i}\left(u\right)\phi_2^i\left(u\right)du, i=\overline{0,k}.$$

Рассмотрим следующий многочлен $P_{k+1}(\xi)$ степени $k+1$:

$$P_{k+1}(\xi)=\mu_0\xi^{k+1}+\mu_1\xi^k+....+\mu_k\xi+\mu_{k+1}.$$

где

$$\mu_0=a_k,\ \mu_i=\frac{k!}{(k-1)!(i-1)!}\Big(\frac{a_{i-1}}{k-i+1}-\frac{b_i}{i}\Big),\ i=\overline{1,..,k},\ \mu_{k+1}=-b_0.$$

Лемма 1. *Если* $\omega=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}_>^2$ *является неподвижной точкой оператора* $\mathcal{Q}_k$*, тогда* $\xi_0=\dfrac{y_0}{x_0}$ *является корнем уравнения*

$$P_{k+1}\left(\xi\right)=0. \tag{3}$$

Лемма 2. *Если* ξ_0 *является положительным корнем алгебраического уравнения (3), тогда точка* $\omega_0=(x_0,\xi_0 x_0)\in\mathbb{R}_>^2$ *является неподвижной точкой оператора* $\mathcal{Q}_k$*, где*

$$x_0=\frac{1}{\sqrt[k-1]{\sum_{i=0}^{k} C_k^i a_i \xi_0^i}}.$$

Следствие 1. *Количество неподвижных точек оператора* $\mathcal{Q}_k$ *на* $\mathbb{R}_>^2$ *совпадает с количеством положительных корней многочлена* $P_{k+1}(\xi)$.

Отметим что, количество неподвижных точек оператора Q_k на $\mathbb{R}^2_>$ дает количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей H (1) на дереве Кэли Γ_k с функций

$$\xi_{t,u}(\beta)=\frac{1}{J\beta}\ln\left(\phi_1(t)\varphi_1(u)+\phi_2(t)\varphi_2(u)\right).$$

Теорема 1. *Оператор* Q_k *имеет как минимум одну неподвижную точку на* $\mathbb{R}^2_>$.

Вторая глава диссертации, названная **«Положительные неподвижные точки нелинейных операторов на R²»,** посвящена исследованию количества положительных неподвижных точек нелинейных операторов Q_2, Q_3 и Q_4.

В параграфе 2.1 исследовано количество положительных неподвижных точек квадратичного оператора Q_2.

Обозначим $D=\mu_1^2-3\mu_0\mu_2$ и в случае $D>0$ определим следующие вещественные числа:

$$\alpha=-\frac{\mu_1+\sqrt{D}}{3\mu_0},\ \beta=-\frac{\mu_1-\sqrt{D}}{3\mu_0}.$$

Отметим, что в случае $D>0$ справедливо неравенство $\alpha<\beta$.

Основными результатами первого параграфа второй главы являются следующие теоремы:

Теорема 2. *Пусть* $D>0$ *и* $\alpha>0$. *Если выполняется одно из следующих условий:*

(f) $P_3(\alpha)=0,$

(g) $P_3(\beta)=0,$

тогда квадратичный оператор Q_2 *имеет две неподвижные точки на* $\mathbb{R}^2_>$, *т.е.* $N^{>}_{fix}(Q_2)=2$.

Теорема 3. *Пусть* $D>0$ *и* $\alpha>0$. *Если выполняются следующие условия*

(h) $P_3(\alpha)>0, P_3(\beta)<0$,

тогда квадратичный оператор Q_2 *имеет три неподвижные точки на* $\mathbb{R}^2_>$, *т.е.* $N^{fix}_{>}(Q_2)=3$.

Отметим, что в диссертации также доказана теорема для единственности положительных неподвижных точек квадратичного оператора Q_2 и приведены примеры для выполнения условий полученных теорем.

В параграфе 2.2 изучено количество положительных неподвижных точек кубического оператора Q_3. Приведены примеры для выполнения условий полученных теорем.

Определим число

$$Q=\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

где

$$p=-\frac{3\mu_1^2}{16\mu_0^2}+\frac{3\mu_2}{2\mu_0},\ q=\frac{\mu_1^3}{32\mu_0^3}-\frac{3\mu_1\mu_2}{8\mu_0^2}+\frac{\mu_3}{4\mu_0}.$$

Теорема 4. *Пусть Q ≥ 0. Тогда кубический оператор* $\mathcal{Q}_3$ *имеет единственную неподвижную точку на* $\mathbb{R}^2_>$, *т.е.* $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3)=1.$

При $Q\le 0$ определим

$$\theta_k=2\sqrt{-\frac{p}{3}}cos\left(\frac{\alpha+2\pi(k-2)}{3}\right),\ k=\overline{1,2,3},$$

где

$$\cos\alpha=-\frac{q}{2}\left(-\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}},\ \alpha\in[0,\pi].$$

Введем обозначения:

$$\gamma_1=\theta_3-\frac{\mu_1}{4\mu_0},\ \gamma_2=\theta_1-\frac{\mu_1}{4\mu_0},\ \gamma_3=\theta_2-\frac{\mu_1}{4\mu_0}.$$

Основными результатами параграфа 2.2 являются следующие теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $Q<0$ *и* $\gamma_2>0$. *Если выполняется одно из следующих условий:*

(d) $P_4(\gamma_2)=0,$

(e) $P_4(\gamma_3)=0,$

тогда кубический оператор $\mathcal{Q}_3$ *имеет две неподвижные точке на* $\mathbb{R}^2_>$, *т.е.* $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3)=2$.

Теорема 6. *Пусть* $Q<0$ *и* $\gamma_2>0$. *Если выполняются следующие условие*

(f) $P_4(\gamma_2)>0,\ P_4(\gamma_3)<0,$

тогда оператор $\mathcal{Q}_3$ *имеет три неподвижные точки на* $\mathbb{R}^2_>$, *т.е.* $N^{fix}_>(\mathcal{Q}_3)=3$.

Показано, что многочлен $P_4(\xi)$ имеет не более трех положительных корней, т.е. оператор $\mathcal{Q}_3$ имеет не более трех положительных неподвижных точек.

В параграфе 2.3 исследовано количество неподвижных точек квартического оператора $\mathcal{Q}_4$ на $\mathbb{R}^2_>$.

Положим,

$$a=-\frac{p^2}{12}-r,\ b=-\frac{p^3}{108}+\frac{pr}{3}-\frac{q^2}{8},$$

где

$$p=\frac{15\mu_0\mu_2-6\mu_1^2}{25\mu_0^2},\ q=\frac{50\mu_0^2\mu_3+8\mu_1^3-30\mu_0\mu_1\mu_2}{125\mu_0^3},$$

$$r=\frac{15\mu_0\mu_1^2\mu_2-50\mu_0^2\mu_1\mu_3-3\mu_1^4-125\mu_0^3\mu_4}{625\mu_0^4}.$$

Введем обозначения

$$Q=\left(\frac{a}{3}\right)^3+\left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

В случае $Q<0$, мы определим следующие числа

$$z_0=2\sqrt{-\frac{a}{3}}\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)-\frac{p}{3},$$

где

$$\cos\alpha=-\frac{b}{2}\left(-\frac{3}{a}\right)^{\frac{3}{2}},\alpha\in[0,\pi].$$

Положим,

$$\xi_{1,2}^{ext}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2z_0}\pm\sqrt{2z_0-4\left(\frac{p}{2}+z_0+\frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}\right)-\frac{\mu_1}{5\mu_0},$$

$$\xi_{3,4}^{ext}=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2z_0}\pm\sqrt{2z_0-4\left(\frac{p}{2}+z_0-\frac{q}{2\sqrt{2z_0}}\right)}\right)-\frac{\mu_1}{5\mu_0}.$$

Отметим, что в случае $z_0>0$ числа $\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}$ являются действительными.

В случае $z_0>0$, введем следующие обозначения:

$$\xi_{min}=\min\{\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}\},\ \xi_{max}=\max\{\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}\}.$$

Теорема 7. *Пусть* $Q<0$, $z_0>0$, $\xi_{min}>0$. *Если многочлен* $P_5(\xi)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*

(a) $P_5(\xi_{min})=0,$

(b) $P_5(\xi_{max})=0,$

тогда оператор $\mathcal{Q}_4$ *имеет как минимум две неподвижные точки на* $\mathbb{R}_>^2$, *т.е.* $N_>^{fix}(\mathcal{Q})\geq 2.$

Пусть $Q<0$, $z_0>0$. Мы введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{A}=\{\xi_1^{ext},\xi_2^{ext},\xi_3^{ext},\xi_4^{ext}\},$$

$$\lambda_1=\xi_{min},\ \lambda_2=\min\left(\mathfrak{A}\setminus\{\xi_{min}\}\right),\ \lambda_3=\max\left(\mathfrak{A}\setminus\{\xi_{max}\}\right),\ \lambda_4=\xi_{max}.$$

Также, в параграфе 2.3, получены следующие результаты (см. табл.1) для количества положительных неподвижных точек оператора $\mathcal{Q}_4$ на $\mathbb{R}_>^2$.

Таблица 1

Пусть выполнены соотношения $Q<0$, $z_0>0$, $\lambda_1>0$.		
№	Достаточные условия:	$N_{>}^{fix}(\mathcal{Q}_4)$
1.	$P_5(\lambda_1)<0,\ P_5(\lambda_3)<0$	1
2.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_3)<0$	2
3.	$P_5(\lambda_1)<0,\ P_5(\lambda_3)=0$	
4.	$P_5(\lambda_2)>0,\ P_5(\lambda_4)=0$	
5.	$P_5(\lambda_2)=0,\ P_5(\lambda_4)>0$	
6.	$P_5(\lambda_2)>0,\ P_5(\lambda_4)=0$	
7.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_4)=0$	3
8.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_3)=0$	
9.	$P_5(\lambda_2)=0,\ P_5(\lambda_4)=0$	
10.	$P_5(\lambda_2)>0,\ P_5(\lambda_4)<0$	
11.	$P_5(\lambda_1)<0,\ P_5(\lambda_3)>0,\ P_5(\lambda_4)<0$	
12.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_2)<0,\ P_5(\lambda_4)>0$	
13.	$P_5(\lambda_1)=0,\ P_5(\lambda_3)>0, P_5(\lambda_4)<0$	4
14.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_3)=0$	
15.	$P_5(\lambda_2)=0,\ P_5(\lambda_4)<0$	
16.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_2)<0, P_5(\lambda_4)=0$	
17.	$P_5(\lambda_1)>0,\ P_5(\lambda_2)<0, P_5(\lambda_3)>0,\ P_5(\lambda_4)<0$	5

Приведены примеры для выполнении полученных условий.

В третьей главе диссертации, названной **«Неподвижные точки кубических стохастических операторов на симплексе»**, изучены неподвижные точки кубических стохастических операторов со строго положительными коэффициентами на одномерном симплексе**.** Приведены примеры для выполнения условий полученных теорем.

В параграфе 3.1 сведены необходимые понятия и определения, приведены некоторые свойства для анализа количества неподвижных точек кубического стохастического оператора на симплексе.

Пусть $E=\{1,2,3,...,n\}$. Множество

$$S^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\ge 0, \forall i\in E, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\}$$

называется $(n-1)$-мерным симплексом. Обозначим через $S_{>}^{n-1}$ внутренность симплекса S^{n-1}, т.е.

$$S_{>}^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i> 0, \forall i\in E, \sum_{i=1}^{n} x_i=1\}.$$

Таким образом, кубической стохастический оператор $\mathcal{C}: S^{n-1}\to S^{n-1}$ определяется следующим образом: $\mathcal{C}x=x'$, где

$$x_l' = \sum_{i,j,k=1}^{n} P_{ijk,l} x_i x_j x_k, \ l \in E.$$

Здесь $P_{jik,l} = P_{ijk,l} = P_{kij,l} = P_{kji,l} = P_{ikj,l} = P_{jki,l} \geq 0, \ \forall i,j,k,l \in E, \ \sum_{l=1}^{n} P_{ijk,l} = 1.$

Положим, $a_{ij} = P_{iij,1}, \ b_{ij} = P_{iij,2}, \ i, j \in E = \{1,2\}$. Тогда строго положительный кубический стохастический оператор (КСО) $\mathcal{C}$ на одномерном симплексе имеет следующий вид:

$$\mathcal{C}(x,y) = (a_{11}x^3 + 3a_{12}x^2y + 3a_{21}xy^2 + a_{22}y^3, b_{11}x^3 + 3b_{12}x^2y + 3b_{21}xy^2 + b_{22}y^3), \quad (4)$$

где $a_{ij} > 0, \ b_{ij} > 0, \ a_{ij} + b_{ij} = 1, \ i, j \in \{1,2\}$.

Введем следующие обозначения:

$$c_0 = a_{11} - a_{22} + 3(a_{21} - a_{12}), c_1 = 3a_{22} + 3a_{12} - 6a_{21}, \ c_2 = 3a_{21} - 3a_{22} - 1, c_3 = a_{22}.$$

Определим следующий многочлен третьей степени:

$$P_3(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3. \quad (5)$$

Множество неподвижных точек оператора (4) обозначим через $\mathrm{Fix}(\mathcal{C})$, т.е. $\mathrm{Fix}(\mathcal{C}) = \{\omega \in S^1 : \mathcal{C}\omega = \omega\}$. Ясно, что $|\mathrm{Fix}(\mathcal{C})|$-мощность множества определяет количество неподвижных точек КСО (4) на одномерном симплексе.

Лемма 3. *Количество неподвижных точек строго положительного КСО* (4) *на* S^1 *совпадает с количеством корней многочлена* (5) *на* $(0,1)$.

Следствие 2. *Если* $x_0 \in (0,1)$ *является корнем многочлена* (5), *то* $\omega_0 = (x_0, 1 - x_0)$ *является неподвижной точкой строго положительного КСО* (4) *на* $S^1_{>}$.

Лемма 4. *Многочлен* (5) *имеет хотя бы один корень на интервале* $(0,1)$.

В параграфе 3.2 изучено количество неподвижных точек строго положительного КСО (4) на S^1.

Теорема 8. *Пусть* $c_0 \geq 0$. *Тогда строго положительный КСО* (4) *имеет единственную неподвижную точку на* $S^1_{>}$, *т.е.* $|\mathrm{Fix}(\mathcal{C})| = 1$.

Лемма 5. *Если выполняется одно из следующих соотношений*

1. $c_0 < 0, c_1 < 0, c_2 < 0,$
2. $c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 > 0,$
3. $c_0 < 0, c_1 < 0, c_2 > 0,$

то строго положительный КСО (4) *имеет единственную неподвижную точку на* $S^1_{>}$, *т.е.* $|Fix(\mathcal{C})| = 1$.

В случае

$$c_0 < 0, c_1 > 0, c_2 < 0, \quad (6)$$

строго положительный КСО (4) на $S^1_{>}$ имеет не более трех неподвижных точек, т.е. $1 \leq |\mathrm{Fix}(\mathcal{C})| \leq 3$.

Введем обозначения $\Delta := c_1^2 - 3c_0c_2$.

В случае $\Delta > 0$ определим величины α и β:

$$\alpha = \frac{-c_1 + \sqrt{\Delta}}{3c_0}, \ \beta = \frac{-c_1 - \sqrt{\Delta}}{3c_0}.$$

В теоремах 9 и 10 предполагается, что выполнены соотношения (6).

Теорема 9. *Пусть* $\Delta > 0$, $\beta < 1$. *Если для многочлена (5) выполняется одно из следующих условий*

(c) $P_3(\alpha) = 0$,

(d) $P_3(\beta) = 0$

то строго положительный КСО (4) имеет две неподвижные точки на $S^1_>$, *т.е.* $|\operatorname{Fix}(\mathcal{C})| = 2$.

Теорема 10. *Пусть* $\Delta > 0$, $\beta < 1$. *Если для многочлена* (5) *выполняются условия*

(e) $P_3(\alpha) < 0$ и $P_3(\beta) > 0$,

то строго положительный КСО (4) *имеет три неподвижные точки на* $S^1_>$, *т.е.* $|\operatorname{Fix}(\mathcal{C})| = 3$.

В параграфе 3.3 построены примеры для выполнения условий полученных теорем. Найдены условия для коэффициентов строго положительного КСО (4), в которых строго положительный КСО (4) имеет одну и три неподвижные точки на $S^1_>$.

Теперь рассмотрим КСО (6), когда его коэффициенты удовлетворяют следующим условиям:

$$a_{11} + a_{22} = a_{12} + a_{21} = 1. \tag{7}$$

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = 2 - \left(3a_{12} + a_{22}\right).$$

В случае $\Delta \neq 0$ определим число:

$$D^* = 1 - 4 \cdot \frac{a_{22}}{|\Delta|}.$$

Теорема 11. *Пусть выполнено условие (7). Если одно из следующих условий*

(e) $\Delta \geq 0$,

(f) $\Delta < 0, D^* \leq 0$,

выполняется, то КСО (4) *имеет единственную неподвижную точку* $\omega_0 = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ *на* S^1.

Теорема 12. *Пусть выполнено условие* (7). *Если выполняются соотношения* $\Delta < 0$, $D^* > 0$, *тогда КСО* (4) *имеет три неподвижные точки на* S^1 *и они имеют следующий вид:*

$$\omega_1^* = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D^*}}{2}; \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D^*}}{2}\right), \ \omega_2^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \ \omega_3^* = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{D^*}}{2}; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{D^*}}{2}\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна H_k с положительным вырожденным ядром.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

исследование положительных неподвижных точек интегральных операторов типа Гаммерштейна H_k с вырожденном ядром (2) приведено к исследованию положительных неподвижных точек оператора $\mathcal{Q}_k$ на $\mathbb{R}^2$;

доказано, что положительные неподвижные точки оператора $\mathcal{Q}_k$ на $\mathbb{R}^2$ можно исследовать с положительными корнями многочлена P_{k+1} степени $k+1$;

получены достаточные условия для количества положительных неподвижных точек операторов $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3$ и $\mathcal{Q}_4$. Построены примеры для выполнения достаточных условий теорем;

изучено количество неподвижных точек строго положительного КСО $\mathcal{C}$ на симплексе;

получены достаточные условия для количества неподвижных точек КСО $\mathcal{C}$ на симплексе;

найдены условия для коэффициентов, в которых КСО $\mathcal{C}$ имеет одну или три неподвижные точки.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIK DEGREES
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 KARSHI STATE UNIVERSITY

KARSHI STATE UNIVERSITY

NODIROV SHOHRUH DILMURODOVICH

POSITIVE FIXED POINT OF NONLINEAR OPERATORS ON R^2 AND THEIR APPLICATIONS

01.01.01 – Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi-2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2020.2.PhD/FM210.

Dissertation has been prepared at Karshi State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (qarshidu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Eshkabilov Yusup Khalbaevich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
Official opponents:	**Jamilov Uygun Umurovich** Doctor of physical and mathematical sciences
	Eshmamatova Dilfuza Bakhramovna Candidate of physical and mathematical sciences, docent
Leading organization:	National University of Uzbekistan

Defense will take place «____» _____________2021 at ____ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi State University. (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225 34 13, fax: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Karshi State University, Faculty of Physics and Mathematics, room 102.

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Karshi State University (is registered №_____). (Address: Kuchabag street, 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan. Ph.: (+998 75) 225 34 13).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2021 year.
(Mailing report №___________ on «____» _______________2021 year).

B.A.Shaimkulov
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F-M.S., professor

A.A.Imomov
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
DSc., docent

A.A.Imomov
Deputy Chairman of scientific Seminar
under Scientific Council on award
of scientific degrees, DSc., docent

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to define the number of nontrivial positive fixed points of a nonlinear operator Q_k $(k \in \mathbb{N} \setminus \{1\})$ on a two-dimensional real space arising in the theory of Gibbs measures.

The objects of the research work are translation-invariant Gibbs measures, integral operator of Hammerstein type, nonlinear operator on two-dimensional real space, cubic stochastic operator on a one-dimensional simplex, polynomial of degree $k+1$ with real coefficients.

Scientific novelty of the research work is as follows:

a connection between the positive fixed points of the nonlinear operators on two-dimensional real space and the integral operator of Hammerstein type is established;

conditions for the uniqueness of positive fixed points of quadratic, cubic and quartic operators are obtained;

sufficient conditions for the number of positive fixed points of quadratic, cubic and quartic operators are found;

fixed points of cubic stochastic operators with strict positive coefficients on a one-dimensional simplex are defined.

Implementation of the research results. The obtained results on the dissertation work were used in the following research projects:

the results on the connection is established between the positive fixed points of the nonlinear operators on two-dimensional real space and the integral operator of Hammerstein type, as well as on the obtained conditions for the uniqueness of positive fixed points of quadratic, cubic and quartic operators were used in the scientific grant EFA-Ftech-2018-78 to study the number of translation-invariant Gibbs measures of models on the Cayley tree with a set of spin values [0,1] (reference from the Academy Of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated December 9, 2020 under the number 2 / 1255-2767). Application of the obtained scientific results made it possible to analyze the existence of phase transitions for models in statistical physics;

the results on sufficient conditions for the number of positive fixed points of quadratic, cubic, quartic operators and cubic stochastic operators with strict positive coefficients were used within the framework of the EF-4-8 project in the study of positive solutions of nonlinear integral equations (reference of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education of the Republic of Uzbekistan dated November 25, 2020 under number 89-03 -4924). Application of these scientific results makes it possible to describe the sets of translation-invariant Gibbs measures for some generalized classical models in statistical physics.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 108 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H. Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures // J. Positivity – 2016.– No.4.(20).–P.929–943. (3. Scopus. IF=0.694).

2. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. Positive Fixed Points of Cubic Operators on R^2 and Gibbs Measures // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2019. – 12(6).– P.663–673. (01.00.00; №59).

3. Нодиров Ш.Д. О неподвижных точках строго положительных кубических стохастических операторов на одномерном симплексе // Илм сарчашмалари УрГУ. Научно-методический журнал – 2019. – №12,–С.10–16. (01.00.00; №12).

4. Eshkabilov Yu.Kh. Nodirov Sh.D., On the positive fixed points of quartic operators // Bulletin of the Institute of Mathematics.–2020.– №30– P.27–36.

II бўлим (2 часть; part 2)

5. Эшкабилов Ю.Х., Нодиров Ш.Д. О положительных неподвижных точках положительных квадратичных операторов на конусе // Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2014»: 15-17 сентября 2014. – Самарканд, 2014. – С.275–277.

6. Eshkabilov Yu.X., Nodirov Sh.D., Positive fixed points of Hammerstein's integral operators and Gibbs measures // International conference "Mathematical analysis and it's application to mathematical physics": 2018 September 17-20.– Samarkand, 2018. – P.44-45.

7. Эшкабилов Ю.Х., Нодиров Ш.Д. О положительных неподвижных точках интегрального оператора типа Гаммерштейна с вырожденным ядром // XIV школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы»: 7-12 сентября 2019 г.– Казань, 2019. – С.382-385.

8. Eshkabilov Yu. Kh., Nodirov Sh. D. Translation invariant Gibbs measures for model on the Cayley tree of order three // Republican scientific conference "Actual problems and applications of analyis" KarSU., 4-5 october 2019.–Karshi c., 2019. – P.58-59.

9. Нодиров Ш.Д., Жамолов Ш.Ж. О неподвижных точках строго положительных кубических стохастических операторов на одномерном симплексе // Республиканская научная конференция "Актуальные проблемы и применения анализа" КарГУ., 4-5 октября 2019 г.–Карши., 2019 г. –С.84-86.

10. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D. On the positive fixed points of quartic operators // Modern stochastic models and problems of actuarial mathematics: 25 September 2020. Karshi.– P.12-13.

11. NodirovSh.D., Maxmatrayimov A.T. On the uniqueness of Gibbs measures and fixed point of integral operator Hammerstein’s type // "Matematikaning zamonaviy muammolari" Ilmiy onlayn-konferensiya tezislari to’plami: 20 may 2020 y.– Nukus, 2020. 42-43 b.