ДИЛФУЗА МАХМУДОВА
ГАВҲАР ДЎСМУРОДОВА

Қизиқарли математика ва олимпиада масалалари

(услубий қўлланма)

ЧИРЧИҚ 2020

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ТОШКЕНТ ВИЛОЯТИ
ЧИРЧИҚ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ

Махмудова Д.М., Дўсмуродова Г.Х.,

ҚИЗИҚАРЛИ МАТЕМАТИКА ВА ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

Услубий қўлланма

(1-қисм)

Чирчиқ-2020

Ушбу услубий қўлланма 5110100 – Математика ўқитиш методикаси, 5111700 – Бошланғич таълим ва спорт, ўқув режасидаги математика ва табиий-илмий фанлар блокига тегишли фанларнинг ўқув дастурлари талаблари асосида тайёрланган бўлиб, унда амалий машғулотларни ўз ичига олган маълумотлар берилган.

Ўқув режалардаги математика ва табиий-илмий фанлар блокига тегишли фанларнинг хусусиятидан келиб чиқиб, қўлланмада “Қизиқарли математика ва олимпиада масалалари” курсининг сонлар назарияси бўлимига оид асосий тушунча ва тасдиқлар, олимпиада масалалари келтирилган бўлиб, математик мазмуни тадбиқлари кўрсатилган. Мавзулар бўйича талабалар мустақил ечиши учун топшириқлар ва уларнинг ечиш усуллари ҳам берилган.

Қўлланма олий таълим муассасаларининг математика ўқитиш методикаси талабалари, академик лицей ўқувчилари ва абитуриентлар учун мўлжалланган.

Тақризчилар: ф.-м.ф.д., профессор А.А.Жалилов

ф.-м.ф.ф.д (PhD). Э.М. Махкамов

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги Тошкент вилояти Чирчиқ давлат педагогика институти ўқув-услубий кенгашининг 2020 йил 29 майдаги 05/1 - сонли қарорига асосан 5110100 – Математика ўқитиш методикаси, 5111700 – Бошланғич таълим ва спорт, таълим йўналишлари бўйича таҳсил олаётган талабалар учун услубий қўлланма сифатида нашр қилишга тавсия этилган.

“Математикани билиш – бу фақат стандарт масалаларнигина эмас, балки фикр эркинлиги, соғлом мантиқ, оригиналлик, яратувчанликни талаб қиладиган масалаларни еча билишдир”.
Д. Пойа

СЎЗ БОШИ

Ватанимиз мустақиллиги даврида таълим тизимида рўй бераётган улкан ўзгаришлар иқтидорли ўқувчилар, талабаларга бўлган муносабатни ҳам тубдан ўзгартирди. Республикамизнинг жаҳон ривожланган мамалакатлари даражасида тараққий этиши шу жамият аъзоларининг, айниқса ёшларнинг эркин фикрлай олиш даражаси, мустақил ижодий фаолиятлари натижалари билан белгиланади.

Талабаларнинг математик билимларни ўзлаштириши, малака ҳосил қилиши ва кўникмага эга бўлиши, фанга бўлган қизиқишини рағбатлантириш ва математикавий маданиятини шакллантиришда мустақил фикрлаш қобилиятини фаоллаштириш масаласи алоҳида аҳамият касб этади. Бу масалаларни ҳал килишда эса рақамлар билан ишлаш усулларини ўзлаштириш - айниқса фикрдаги ҳисоб-китоблар математика қонунларини яхшироқ тушунишга ёрдам беради. Шу билан бирга консентратциялаш қобилиятини оширади, хотирани мустаҳкамлайди ва бир вақтнинг ўзида бир нечта ғояларни хотирада ушлаб туриш малакасини ривожлантиради. Бундай ҳисоблаш усулларини ўрганадиган киши, у бир нечта фикрлаш тузилмалари билан бир вақтнинг ўзида ишлашни ўрганади.

Ушбу услубий қўлланма математиканинг муҳим қисмларидан бири бўлган ностандарт ва олимпиада масалаларини ечишнинг бир неча усулларини ўрганишга, таҳлил қилишга бағишланган. Унда рақамларни танлаб олиб чақмоқдек тезликда кўпайтириш, бўлиш, қўшиш каби ҳисоб китобларни амалга оширишга имкон берувчи оддий усуллар таклиф этилган. Касрлар устида амаллар, квадрат ва куб илдиз чиқариш усуллари кўрсатилган. Ихтиёрий сонларни, яъни уч хоналидан тўққиз хонали сонларгача бўлганларини бир бирига кўпайтириш усуллари ёритилган. Ўқувчиларнинг ақлий фаолиятини мустаҳкамлаб, машғулот жараёнида вақтдан ютишига ёрдам берадиган, ёдлаш мураккаб бўлган кўпайтириш амалини тезкор ҳисоблаш имкониятини берувчи усуллар ўрганилган. Бу услубий қўлланмадан педагогика олий таълим муассасалари талабалари, абитуриентлар ва мактаб ўқитувчилари фойдаланишлари мумкин.

Услубий қўлланма учта бобдан иборат. **Биринчи бобда** натурал сонлар ва улар устида тез ҳисоблаш қоидалари, яъни квадратга, кубга кўтариш, Непер таёқчалари ва улар ёрдамида сонларни кўпайтириш ва бўлишнинг оғзаки ҳисоблаш усуллари, Транхеберг усули, квадрат ва куб илдизни тез ҳисоблаш, тақрибий ҳисоблаш, Фибоначчи сонлари ва уларни қўшиш, мантиқий масалалар ва улардан фойдаланиш бўйича тавсиялар, ўйинга оид масалалар, сонли ребуслар, математик индукция, дедукция методлари ҳақида, харитани бўяш, охирги икки рақамни топиш, сонлар квадратлари ва кублари йиғиндиси ҳақида келтирилган. **Иккинчи бобда** тенгсизликларнинг исботи замонавий ва классик усулларда кўрсатилган бўлиб, сонли тенгсизликлар, ўртача қийматлар ва улар орасидаги муносабатлар, Коши тенгсизлиги, функциянинг монотонлик ва қавариқлик хоссалари ёрдамида исботланадиган тенгсизликлар, Транс-тенгсизлик ва унинг тадбиқлари, Карамата тенгсизлиги, тригонометрик тенгсизликларни тригонометрик алмаштиришлар ёрдамида исботлаш содда тилда баён этилган. **Учинчи бобда** олимпиада масалалари тарихи келтирилиб бир неча усулларда ностандарт масалалар ечиб кўрсатилган, математик масалалар ечишда йўл қўйиладиган баъзи хатоликлар ҳақида сўз юритилган. Ҳар бир мавзу мисоллар билан баён қилинган ва мустақил ишлаш учун машқлар берилган.

Ўйлаймизки, услубий қўлланма ўз ўқувчиларини топади ва бошқа мавжуд ўқув адабиётлари қаторида қизиқарли математика ва олимпиада масалалари курси бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Муаллифлар

I-БОБ. СОНЛАР НАЗАРИЯСИ ҲАҚИДА МАЪЛУМОТ

1.1- §. НАТУРАЛ СОНЛАР

Маълумки санаш учун 1,2, ... натурал сонлар ишлатилади. $N = \{1,2,...\}$ тўплам эса *натурал сонлар тўплами* дейилади. Агар a ва b натурал сонлар учун шундай q натурал сон топилиб, $a = b \cdot q$ шарт бажарилса, у ҳолда a натурал сон b натурал сонга *бўлинади* ва $a = l \cdot b$ кўринишда белгилаймиз. Фақат ўзига ва бирга бўлинадиган натурал сон *туб сонлар* дейилади. Бу таърифдан кўринадики, масалан 2,3,5,7,11,... сонлари туб сонлар бўлиб, 1,4,6,8,9,10,... сонлари туб сонлари эмас. Ҳақиқатдан ҳам, 2,3,5,7,11 ... сонлари 1 га ва ўзига бўлинади, 1 эса фақат ўзига бўлинади; 8 нинг барча натурал бўлувчилари 1,2,4,8;

9 нинг барча натурал бўлувчилари 1,3,9 лардан иборат. Агар натурал соннинг турли натурал бўлувчиларининг сони 3 ва ундан ортиқ бўлса, бундай натурал сон *мураккаб натурал сон* дейилади. Демак, 8 ва 9 сонлари мураккаб сонлар, 1 эса на туб на мураккаб сон. 1 ни кўпайтириш амалига нисбатан *нейтрал элемент* деймиз.

Шундай қилиб, ҳар бир натурал сон туб сон ва мураккаб сон ёки 1 га тенг бўлар экан.

Теорема: *a-бирдан фарқли натурал сон бўлсин. У ҳолда унинг бирдан катта энг кичик натурал бўлувчиси туб сондир.*

Исбот. Ҳақиқатдан ҳам, агар $a \vdots m$ бўлиб, m мураккаб сон бўлса, m нинг p бўлувчиси бўлиб, $p < m$ ва $p \neq 1$. У ҳолда $a \vdots m$ ва $m \vdots p$ шартлардан $a \vdots p$ муносабат келиб чиқади. Бу эса m – бирдан катта энг кичик натурал бўлувчи деган шартга зид. Демак, m - туб сон.

Хулоса. Бу теоремадан, агар a мураккаб сон бўлса, a нинг албатта битта $\sqrt{a}$ дан катта бўлмаган туб бўлувчиси бор бўлиши келиб чиқади. Ҳақиқатдан ҳам, a–мураккаб сон, p эса унинг бирдан катта энг кичик туб бўлувчиси бўлсин. У ҳолда шундай q сон топилиб, $a = pq \geq p^2$ ёки $p \leq \sqrt{a}$ келиб чиқади.

Демак, бирдан катта a натурал сон туб сон бўлиши учун $p \leq \sqrt{a}$ туб сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмаслиги етарли. Масалан, 101 туб сон бўлиши ёки бўлмаслигини аниқлаш учун уни $\sqrt{101}$ дан кичик бўлган 2,3,5,7 туб сонларга бўлиб кўрамиз, 101 бу сонларнинг бирортасига ҳам бўлинмайди, шунинг учун, 101 туб сон экан.

Мисол. 397,401,403,409 сонларидан бири мураккаб сон бўлишини кўрсатинг.

1.2-§. ТЕЗ ҲИСОБЛАШ. КВАДРАТГА КЎТАРИШ.

Беш билан тугайдиган икки хонали сонни қуйидагича ёзиш мумкин: $10a+5$. Уни квадратга кўтарамиз: $(10a+5)^2=100a^2+100a+25=100(a+1)a+25$ Натижанинг кўринишига эътибор қилайлик: биринчи қўшилувчи a нинг ихтиёрий қийматларида иккита ноль билан тугайдиган (юзга кўпайтирилгани учун) сондир. Унга 25 ни қўшиб, охирги иккита рақами 25 ни берувчи умумий натижани ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, 5 билан тугайдиган икки хонали соннинг квадратини топиш учун аввал 25 ни ёзамиз, унинг олдига эса берилган соннинг ўнликлар хонаси a ни ундан кейин келадиган $a+1$ га кўпайтиришдан ҳосил бўладиган сонни ёзамиз.

Элликка яқин бўлган соннинг квадратини топиш қоидасини қуйидаги формуладан фойдаланиб, ҳосил қилиш мумкин:

$$(50+a)^2=2500+100a+a^2=100(25+a)+a^2$$

$$(50-a)^2=100(25-a)+a^2.$$

Каср қисми яримга тенг бўлган аралаш сонни квадратга кўтариш осон:

$$(a+\tfrac{1}{2})^2=a(a+1)+\tfrac{1}{4}.$$

Ихтиёрий a сонни $a^2=(a+b)(a-b)+b^2$ формула ёрдамида квадратга кўтариш мумкин.

Масалан, $17^2=14\cdot 20+9$; $115^2=110\cdot 120+25$.

Сонлар квадратларининг жадвалини тузиш. Бутун сонлар квадратлари жадвалини $(a+1)^2=a^2+2a+1=a^2+a+(a+1)$ формуладан фойдаланиб тузамиз. Бу формуладан қуйидаги қоидани келтириб чиқарамиз: берилган a дан кейин келувчи $a+1$ соннинг квадратини топиш учун, берилган соннинг квадратига ўша соннинг ўзини ва ундан кейин келувчи сонни қўшиш керак. Жадвал тузишда сонларни фақат қўшиш билангина кифояланиш мумкинлиги кўриниб турибди. Қўшишни эса чўтда бажариш қулайдир.

ИККИ, УЧ, ТЎРТ ВА БЕШ ХОНАЛИ СОННИ КВАДРАТГА КЎТАРИШ УСУЛЛАРИ.

Икки хонали сонни квадратга кўтарамиз:

Масалан: $57^2=3249$ га тенг. 7 ни квадратга кўтариб 9 ни ёзамиз 4 сони ҳаёлда, 5 ни 7 га кўпайтириб, натижани 2 га кўпайтирамиз ва ҳаёлдаги сонни қўшамиз, 70+4=74; 4 ни ёзиб 7 ни ҳаёлда қолдирамиз, 5 ни квадратга кўтариб, ҳаёлдаги 7 ни қўшамиз, 25+7=32. Натижада 3249 ҳосил бўлади. Бундан умумий формуласи: $(ab)^2=a^2\cdot 100+2ab\cdot 10+b^2$.

Уч хонали сонни квадратга кўтарамиз:

Масалан: $127^2=16129$ га тенг. 7 ни квадратга кўтариб 9 ни ёзамиз 4 сони ҳаёлда, 2 ни 7 га кўпайтириб, натижани 2 га кўпайтирамиз ва ҳаёлдаги сонни қўшамиз, 28+4=32; 2 ни ёзиб 3 ни ҳаёлда қолдирамиз, 2 ни квадратга кўтариб ва ҳаёлдаги 3 ни қўшамиз 4+3=7 ва уни ҳаёлда қолдирамиз, 1 ни 27 га кўпайтириб, натижани 2 га кўпайтирамиз ва ҳаёлдаги сонни қўшамиз, $27\cdot 2+7=61$ ни топамиз. 1 ни квадратга кўтариб ёзамиз. Натижада 16129 ҳосил бўлади. Бундан умумий формуласи:

$$(abc)^2=a^2\cdot 10^4+2ab\cdot 10^3+\left(2ac+b^2\right)\cdot 10^2+2bc\cdot 10+c^2.$$

Тўрт хонали сонни квадратга кўтарамиз:

Масалан: $1343^2=1803649$. 3 ни 3 га кўпайтириб 9 ни ёзамиз, $2\cdot 4\cdot 3$ кўпайтмадан 4 ни ёзамиз 2 ҳаёлда, $2\cdot 3\cdot 3+4^2$; 4 га 2 ҳаёлдагини кўшиб 6 ни ёзамиз 3 ҳаёлда, $2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3$; 0 га 3 ҳаёлдаги сонни қўшиб 3 ни ёзамиз 3 ҳаёлда, $1\cdot 4\cdot 2+3^2$; 7 га ҳаёлдаги 3 ни кўшиб 0 ни ёзамиз 2 ҳаёлда, $2\cdot 1\cdot 3$; 6 га 2 ҳаёлдагини қўшиб 8 ни ёзамиз; $1^2=1$. Охиргидан юқорига қараб ёзиб, натижада 1803649 ни ҳосил қиламиз. Бундан тўрт хонали сонни *abcd* деб танлаб олсак, у ҳолда умумий формуласи: $(abcd)^2=a^2 10^6+2ab10^5+(2ac+b^2)10^4+2(bc+d)10^3+(2bd+c^2)10^2+2cd10+d^2$ келтириб чиқарамиз.

Сонларни квадратга кўтариш жараёнида қуйидагиларни ўрганиб чиқиш имкониятига эга бўламиз.

$(ab)^2=a^2\cdot 100+2\cdot a\cdot b\cdot 10+b^2.$

$(abc)^2=a^2\cdot 10^4+2\cdot a\cdot b\cdot 10^3+(2\cdot a\cdot c+b^2)\ 10^2+2\cdot b\cdot c\cdot 10+c^2.$

$(abcd)^2=a^2\cdot 10^6+2\cdot a\cdot b\cdot 10^5+(2\cdot a\cdot c+b^2)\ 10^4+2(b\cdot c+d)\cdot 10^3+(2\cdot b\cdot d+c^2)\ 10^2+2\cdot c\cdot d\cdot 10+d^2$

$(abcde)^2=a^2\cdot 10^8+2\cdot a\cdot b\cdot 10^7+(2\cdot a\cdot c+b^2)\ 10^6+(2\cdot a\cdot d+2\cdot b\cdot c)\cdot 10^5+(2\cdot a\cdot e+2\cdot b\cdot d+c^2)\ 10^4+$
$+(2\cdot b\cdot e+2\cdot c\cdot d)\cdot 10^3+(2\cdot c\cdot e+d^2)\ 10^2+2\cdot d\cdot e\cdot 10+e^2$

СОНЛАРНИ КУБГА КЎТАРИШ.

Кублар жадвалини тузиш қийинроқ:

1.1-жадвал

Сонлар	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Сон-ларнинг кублари	0	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197
1-тартибли айирмалар		1	7	19	37	61	91	127	169	217	271	331	397	469
2- тартибли айирмалар		6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78

Биринчи тартибли айирма иккита ёнма-ён турган сонлар кубларининг айирмасидир. 2-тартибли айирма эса иккита кетма-кет келган 1-тартибли айирмаларни айириш билан топилади. Жадвалнинг тўртинчи қатори (2-тартибли айирмалар қатори) ни осонгина давом эттириш мумкинлигини кўрамиз: у ердаги ҳар бир сон ўзидан олдинги сонга 6 ни қўшишдан ҳосил қилинган.

2-тартибли айирмаларни билсак, у ҳолда 1-тартибли айирмалар қаторини давом эттиришимиз мумкин. Бунинг учун 2-тартибли айирмани маълум бўлган 1-тартибли айирмага қўшиш керак. Бу жадвалда стрелка билан кўрсатилган. Айтайлик, жадвал 13 нинг куби билан тугаган бўлсин (жадвалга қаранг): $13^3 = 2197$. Кейинги соннинг, яъни 14 нинг кубини қандай қилиб топиш мумкин? Бунинг учун аввал мос иккинчи тартибли айирмани топамиз (78), унга биринчи тартибли айирма (469) ни ва 14 дан олдин келган соннинг кубини қўшамиз: 78+469+2197 қўшиш натижасида ўн тўртнинг куби бўлган 2744 ни ҳосил қиламиз.

Кублар жадвалини тузишнинг топилган йўли тўғри эканлигига ишонч ҳосил қилайлик. Биринчи ва иккинчи тартибли айирмалар қандай ўзгаришини кузатиб борамиз. $R_1 = (a+1)^3 - a^3 = 3a^2 + 3a + 1$ бўлсин, ундан кейин келадиган биринчи тартибли айирма $R_1^{'} = (a+2)^3 - (a+1)^3 = 3a^2 + 9a + 7$ га тенг. Буларга мос иккинчи тартибли айирма $R_2 = R_1^{'} - R_1$ га ёки $R_2 = 6a + 6$ га тенг. a га 0, 1, 2, 3, 4 ва ҳоказо қийматлар бериб, мос иккинчи тартибли айирмалар кетма-кетлиги 6, 12, 18, 24 ва ҳоказони ҳосил қиламиз, яъни жадвалнинг тўртинчи қаторини хоҳлаганча давом эттира оламиз.

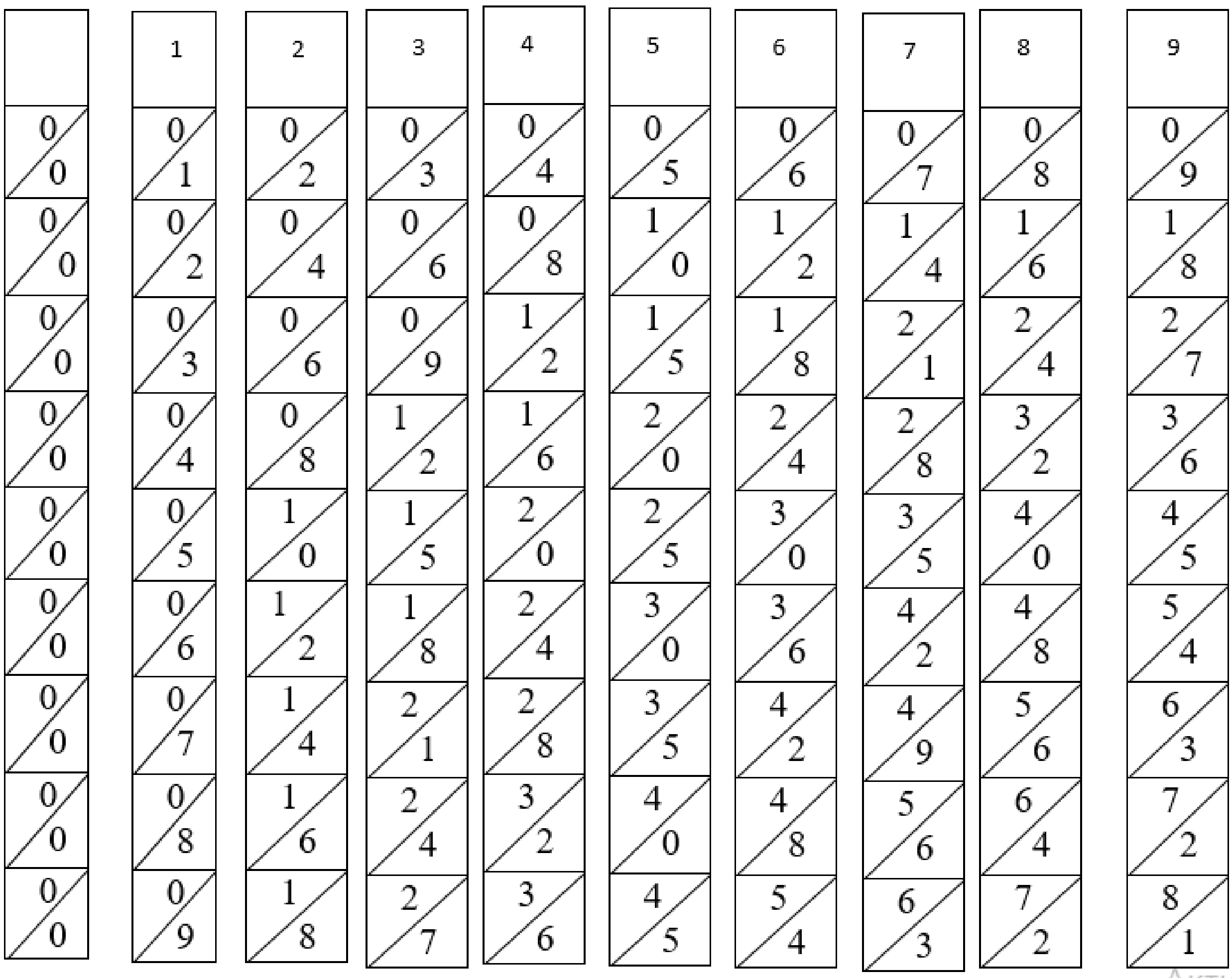
Кублар жадвалига ўхшаш жадвалларни бутун сонларнинг бошқа даражалари учун ҳам тузиш мумкин.

НЕПЕР ТАЁҚЧАЛАРИ

Жон Непер (1550-1617йиллар.) шотландиялик математик, логарифмларнинг ихтирочиларидан бири, логарифмик жадвалларнинг биринчи ношири, астроном.

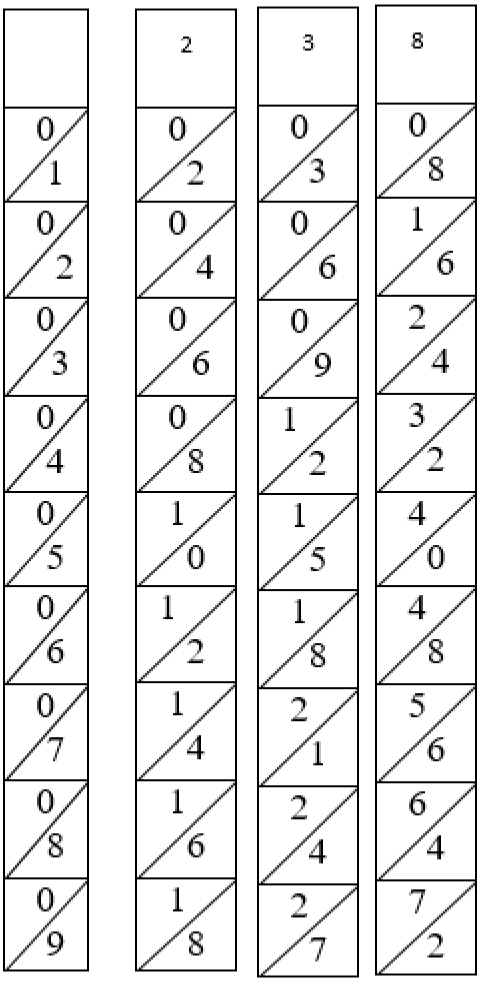
Неперни астрономияга бўлган қизиқиши уни математикани ўрганишига олиб келди. Бугунги кунда биз билган логарифмни биринчи бўлиб Непер таклиф қилган у тадқиқот давомида мураккаб сонли ҳисоб-китобларнинг янги, содда усулини ишлаб чиққан. Шулардан бири Непер таёқчаларидир.

Непер таёқчалари кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажаришда ишлатиладиган энг содда “ҳисоб машина”си бўлиб хизмат қилиши мумкин. Бу “машина” ни ясаш жуда осон: нолдан тўққизгача номерланган бир хил узунликдаги ва кенгликдаги картон таёқчалар тўпламини тайёрлаш кифоя. Ҳар бир картон таёқча ўз номерига эга ва тўққизта тенг квадратга бўлинган. Ҳар қайси квадрат пастки чап бурчакдан юқориги ўнг бурчакка қараб йўналган диагонал билан икки қисмга бўлинган, *n*-номерли таёқча квадратларига ҳар қайси бир хонали соннинг *n* билан кўпайтмаси (*n* га кўпайтириш жадвали) мос равишда ёзиб чиқилади (1.1-расмга қаранг). Бунда бирлик (хона) рақамлари ўнг томондаги учбурчакка, ўнлик (хона) рақамлари эса чап томондаги учбурчакка ёзилади. Номерланган таёқчалардан бошқа яна битта “ишчи” (номерсиз) таёқча тайёрлаш лозим. Ҳисоблашда бундай таёқчалардан қандай фойдаланилади?



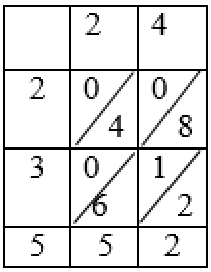
1.1-расм

Айтайлик, 238 ни бирор сонга кўпайтириш керак бўлсин. Бунинг учун Непер таёқчаларининг бир-бирига ёнма-ён қилиб қўйганда 238 ҳосил бўладиганлари (2, 3, 8 номерлар ёзилганлари) олинади. 1.2-расмда 238 ни 1,2,3,...,9 га кўпайтириш натижасини айний кўрсатувчи “ишчи” таёқча ўнг томондан жойлаштирилган.



1.2-расм.

Блок таёқчаларидан тузилган биринчи қаторда $238 \cdot 1$ нимага тенглигини, иккинчи қаторда $238 \cdot 2=476$ эканини (бунда диагонал бўйича ётган рақамлар қўшилади), учинчи қаторда $238 \cdot 3=714$ бўлишини кўрамиз ва ҳоказо. Амалларни устун шаклида ёзиб (буни бажаринг), $238 \cdot 8$, $238 \cdot 7$, $238 \cdot 5$ ларни топишимиз керак. Буларнинг натижаларини Непер таёқчалари ёрдамида бир хонали сонларга кўпайтиришнигина эмас, балки кўп хонали сонларга кўпайтиришни ҳам бажариш мумкин. Масалан, $238 \cdot 578$ ни ҳисоблаш керак бўлсин. Буни ҳам Непер таёқчаларидан фойдаланиб топишимиз ва ёзишимиз мумкин.


1.3-расм

Аввалом бор, икки хонали сонларни Непер таёқчалари орқали кўпайтирамиз. $24 \cdot 23=552$ (1.3-расмга қаранг.) Непер таёқчалари кўпайтиришнигина эмас, балки бўлишни ҳам енгиллаштириши равшан.

Агар бирор сонни 238 га бўлмоқчи бўлсак, у ҳолда бўлиш амали ёзма равишда бажарилади, Непер таёқчалари ёрдамида эса бўлинманинг рақамларини топиш анча осонлашади. Бир нечта бир хил рақамли сонларни кўпайтиришда бир хилдаги шунча Непер таёқчалари керак. Непер таёқчалари тўпламини катакли блокнот варағидан ясаш мумкин.

ТРАХТЕНБЕРГ УСУЛИ БЎЙИЧА КЎПАЙТИРИШ

Берилган бирорта сон устида кўпайтириш амалини бажариш учун бу сонниг ҳар бир рақами (бирлик хонасидаги рақамдан бошлаб) ишлаб чиқилади. Бунда қўшни рақамлардан турлича фойдаланилади.

Сондаги "қўшни" рақам деб ишланаётган рақамдан ўнг томонда турган рақамни айтишга келишиб оламиз. Бирлик хона рақами учун "қўшни" рақам нолга тенг, энг чап томонда турган рақам эса сон олдига ҳаёлан ёзилган ноль учун қўшни рақам бўлади.

КЎПАЙТИРИШ ҚОИДАЛАРИ

11 га кўпайтириш. Ҳар бир рақамга унинг қўшнисини қўшинг.

1-мисол. 1234·11.

Кўпайувчининг рақамларини бирлик хона рақамидан бошлаб ишлаб чиқамиз:

4 га унинг қўшнисини, яъни нолни қўшамиз, 4 ҳосил бўлади. Навбатдаги ишланадиган рақам 3. Унга 4 ни қўшиб, 7 ни ҳосил қиламиз. Сўнгра 2 га унинг қўшнисини, яъни 3 ни қўшамиз, 5 ҳосил бўлади. 1 га 2 ни қўшамиз, 3 ҳосил бўлади. Ниҳоят, нолга (кўпаювчи олдига ҳаёлан ёзилган) унинг қўшниси 1 ни қўшамиз. 1 ҳосил бўлади. Шундай қилиб, жавобда ҳосил бўладиган сонниг барча рақамларини ҳосил қилдик. Жавоб: 13574.

Кўпайтиришни кўрсатилган қоида бўйича бажарар эканмиз, барча ҳисоблашларни оғзаки ўтказамиз ва бирданига натижани ёзамиз.

Агар иккита "рақамни" қўшганда ундан катта сон, масалан, 12 ҳосил бўлса, у ҳолда одатдагича йўл тутамиз: 2 ни ёзамиз, 1 ни дилда сақлаймиз.

12 га кўпайтириш. Рақамни иккилантиринг ва қўшнисини қўшинг.

2-мисол. 123·12.

Кўпаювчининг рақамларини, яъни 3, 2, 1 рақамларни галма-галдан ишлаб чиқамиз. 3 ни иккилантирамиз ва нолни қўшамиз, 6 ҳосил бўлади.
2 ни иккилантирамиз ва 3 ни қўшамиз, 7 ҳосил бўлади. 1 ни иккилантирамиз ва 2 ни қўшамиз, 4 ҳосил бўлади. Кўпаювчи олдига ҳаёлан ёзилган нолни иккилантирамиз ва қўшниси, яъни 1 ни қўшамиз, 1 ҳосил бўлади. Шундай қилиб, натижада 1476 чиқади.

ИХТИЁРИЙ СОННИ 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 ГА КЎПАЙТИРИШ ҚОИДАЛАРИ

3-мисол. 3214·19=61066.

4 ни 9 га кўпайтирамиз ва 0 ни қўшамиз, 6 ни ёзамиз 3 ҳаёлда туради.
1 ни 9 га кўпайтириб, ўнг томондаги қўшни сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 6 ни ёзамиз ва 1 ҳаёлда, 2 ни 9 га кўпайтириб, ўнг томондаги қўшни сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 0 ёзилади 2 ҳаёлда, 3 ни 9 га кўпайтириб, ўнг томондаги қўшни сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 1 ёзилади 3 ҳаёлда. Кўпайтувчи олдига ҳаёлан ёзилган нолни 9 га кўпайтириб ўнг томондаги қўшнисига ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз 6 ёзилади. Натижада 61066 ҳосил бўлади.

Демак, *қоидаси:* ихтиёрий сонни 13 га кўпайтиришда кўпайтувчини рақамларини галма-гал 3 га кўпайтириб, ўнг томондаги қўшни сонни қўшиб кетиш, 14 га кўпайтиришда 4 га кўпайтириб, қўшни сонга қўшиб кетиш ва ҳоказо давом эттириб ишлаб чиқилади.

ИХТИЁРИЙ СОННИ 21,31,41,51,61,71,81,91 ГА КЎПАЙТИРИШ ҚОИДАЛАРИ:

4-мисол. 24536·21=515256.

6 ни 1 га кўпайтирамиз ва 0 ни қўшамиз, 6 ни ёзамиз. 6 ни 2 га кўпайтириб, чап томондаги қўшни сонни қўшамиз, 5 ни ёзамиз ва 1 ҳаёлда, 3 ни 2 га кўпайтириб, чап томондаги қўшни сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 2 ёзилади 1 ҳаёлда, 5 ни 2 га кўпайтириб, чап томондаги қўшни

сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 5 ёзилади 1 ҳаёлда, 4 ни 2 га кўпайтириб, чап томондаги қўшни сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 1 ёзилади 1 ҳаёлда, 2 ни 2 га кўпайтириб, чап томондаги қўшни сонни ва ҳаёлдаги сонни ҳам қўшамиз, 5 ёзилади. Натижада 515256 келиб чиқади.

Демак, *қоидаси:* ихтиёрий сонни 21 га кўпайтиришда кўпайтувчини рақамларини галма-гал 2 га кўпайтириб, чап томондаги қўшни сонни қўшиб кетиш, 31 га кўпайтиришда 3 га кўпайтириб, қўшни сонга қўшиб кетиш ва ҳоказо давом эттириб ишлаб чиқилади.

ИХТИЁРИЙ СОНЛАРНИ БИР-БИРИГА КЎПАЙТИРИШ ҚОИДАЛАРИ

5-мисол. 2345·23=53935.

5 ни 3 га кўпайтириб 5 ёзилади, 4 ни 3 га кўпайтириб ва 5 ни 2 га кўпайтириб қўшилади ва ҳаёлдаги сон қўшилиб 12+10+1=23 ни 3 сони ёзилади, ҳаёлда 2 ни қолдирамиз. 3 ни 3 га ва 4 ни 2 га кўпайтириб қўшилади ва ҳаёлдаги билан 9+8+2=19 ни 9 сони ёзилади, ҳаёлда 1 ни қолдирамиз. 2 ни 3 га ва 3 ни 2 га кўпайтириб қўшилади ва ҳаёлдаги сон билан 6+6+1=13 ни 3 сони ёзилади, ҳаёлда 1 ни қолдирамиз. 0 ни 3 га, 2 ни 2га кўпайтириб қўшамиз ва ҳаёлдаги сон билан 0+4+1=5 ёзилади Шундай қилиб, ҳисобланган қийматларни охиридан юқорига қараб ёзиб чиқамиз, натижада 2345·23=53935 ни ҳосил қилдик.

Демак, *қоидаси*: ихтиёрий сонни 23 га кўпайтиришда кўпайтувчини рақамларини галма-гал 2 га кўпайтириб, ўнг томондаги қўшни сонни 3 га кўпайтириб қўшиб кетиш, 52 га кўпайтиришда кўпайтувчини рақамларини галма-гал 5 га кўпайтириб ўнг томондаги қўшни сонни 2 га кўпайтириб қўшиб кетиш ва ҳоказо давом эттириб ишлаб чиқилади.

6-мисол. 2346·111=260406

6+0+0=6 сони ёзилади, 6+4+0=10 ни 0 сони ёзилади ва 1 ҳаёлда, 6+4+3=13 ва ҳаёлдаги билан 4 ёзилади ва 1 ҳаёлда, 4+3+2=9 ва ҳаёлдаги билан 0 ёзилади ва 1 ҳаёлда, 3+2+0=5 ҳаёлдаги билан 6 ёзилади, 2+0+0=2 ёзилади. Шундай қилиб, ҳисобланган қийматларни охиридан юқорига қараб ёзиб чиқамиз, натижада 2346·111=260406 ни ҳосил қилдик.

Демак, *қоидаси:* ихтиёрий сонни 111 га кўпайтиришда кўпайтувчини рақамларини галма-гал чап томондаги қўшни сонга қўшиб кетиш ва ҳоказо давом эттириб ишлаб чиқилади.

Эслатма. Қуйида 6, 7 ва 5 га кўпайтириш қоидаларида бир хонали сонниng ярмисини топишга тўғри келади. Жуфт сонниng ярмини одатдагича топамиз, тоқ сон бўлган ҳолда униng ярми деб ҳосил бўлган сонниng бутун қисми олинади. Масалан, тўққизниng "ярми" 4, еттиниng ярми 3 бўлади ва ҳоказо.

6 га кўпайтириш. Қўшни рақамниng ярмисини ва агар ишланаётган рақам тоқ бўлса, 5 ни ҳам қўшинг.

7-мисол. 2328·6=13968

Кўпаювчиниng ҳамма рақамларини бирин-кетин ишлаб чиқамиз: 8 га униng қўшниси бўлган нолниng ярмини, яъни нолни қўшамиз, 8 бўлади. 2 га 8 ниng ярмини қўшамиз, 6 бўлади. 3 га 2 ниng ярми ва 5 ни қўшамиз, 9 бўлади. 2 га 3 ниng "ярмини", яъни 1 ни қўшиб, 3 ҳосил қиламиз. Нолга 2 ниng ярмини қўшамиз, 1 чиқади.

Жавоб топилган рақамлардан иборат бўлади: 13968.

7 га кўпайтириш. Рақамни иккилантиринг ва қўшнисиниng ярмини қўшинг. Агар ишланаётган рақам тоқ бўлса, яна 5 ни ҳам қўшинг.

5 га кўпайтириш. Қўшни рақамниng ярмини олинг, агар ишланаётган рақам тоқ бўлса, яна 5 ни ҳам қўшинг.

КВАДРАТ ИЛДИЗНИ ТЕЗ ҲИСОБЛАШ.

10-мисол. $\sqrt{3249} = 57$

Даставвал илдиз остидаги сонни охиридан иккитадан қилиб бўлакларга ажратиб оламиз. Ҳисоблаш жараёнида, 32 дан илдиз чиқариш учун 32 га яқин бўлган сон 5 ниng квадрати 25 ни танлаймиз, шуниng учун 5 тадан берамиз ва 5 ни квадратга кўтариб, 32 дан айирамиз. Ва бу 5 рақамини тенгликдан кейин ёзамиз. Кейинги рақамга ўтамиз, яъни иккала рақам 49 ни айирма 7 дан кейин туширамиз. 5 сонини иккига кўпайтириб, яъни 10 сонини чап томонга ёзамиз. Бу сондан кейинги рақамни шундай танлаб оламизки, бу уч хонали сон бўлиб, сонни танлаб олинган сонга кўпайтмаси 749 дан кичик ёки тенг сон бўлиши керак. Шунинг учун, биз 7 сонини танладик. Ва 107 ни 7 га кўпайтириб, кўпайтма 749 ни 749 дан айирсак, айирма 0 ҳосил бўлади. Чап томондаги такрорланувчи 7 рақамини 5 дан кейин ёзамиз.

Яъни,

$$\sqrt{32\uparrow 49} = 57$$

$$\begin{array}{r} 107 \\ *7 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} -25 \\ \hline 749 \\ -749 \\ \hline 0 \end{array}$$

Демак, $57^2=3249$ эканлигини квадрат илдиз чиқариш ёрдамида текшириб олдик. $\sqrt{3249} = 57$

11-мисол. $\sqrt{16129} = 127$

Даставвал илдиз остидаги сонни охиридан иккитадан қилиб бўлакларга ажратиб оламиз. Ҳисоблаш жараёнида, 1 дан илдиз 1 чиқади, шунинг учун 1 тадан берамиз ва 1 ни квадратга кўтариб, 1 дан айирамиз. Ва бу 1 рақамини тенгликдан кейин ёзамиз. Кейинги рақамга ўтамиз, яъни иккала рақам 61 ни айирма 0 дан кейин туширамиз. 1 рақамига 1 ни қўшиб чап томонга ёзиб оламиз. Ҳосил бўлган 2 сонидан кейинги рақамни шундай танлаб оламизки, бу икки хонали сон бўлиб, сонни танлаб олинган сонга кўпайтмаси 61 дан кичик сон бўлиши керак. Шунинг учун, биз 2 сонини танладик. Ва 22 ни 2 га кўпайтириб, кўпайтма 44 ни 61 дан айирамиз. Айирма 17 нинг орқа томонига 29 рақамини туширамиз. Чап томондаги 2 сонини тенгликнинг ўнг томондаги 1 дан кейин ёзамиз. Чап томондаги 22 га 2 ни қўшиб 24 сонидан кейинги рақамни 7 деб танлаб оламиз, чунки 247 ни 7 га кўпайтирсак, кўпайтма 1729 бўлади. Ниҳоят, охирги босқичга етиб келдик, яъни 1729 дан 1729 ни айирсак, айирма 0 ҳосил бўлади. Чап томондаги 7 рақамини тенгликнинг ўнг томондаги 12 дан кейин ёзамиз.

Яъни,

$$\sqrt{16129} = 127$$

22	-1
+ 2	061
247	- 44
* 7	1729
	-1729
	0

Демак, 127^2=16129 эканлигини квадрат илдиз чиқариш ёрдамида текшириб олдик. $\sqrt{16129} = 127$.

12-мисол. $\sqrt{1803649} = 1343$

Даставвал илдиз остидаги сонни охиридан иккитадан қилиб бўлакларга ажратиб оламиз Ҳисоблаш жараёнида, 1 дан илдиз 1 чиқади, шунинг учун 1 тадан берамиз ва 1 ни квадратга кўтариб, 1 дан айирамиз. Ва бу 1 рақамини тенгликдан кейин ёзамиз. Кейинги рақамга ўтамиз, яъни айирма 0 дан кейин иккала рақам 80 ни туширамиз. 1 рақамига 1 ни қўшиб чап томонга ёзиб оламиз. Ҳосил бўлган 2 сонидан кейинги рақамни шундай танлаб оламизки, бу икки хонали сон бўлиб, сонни танлаб олинган сонга кўпайтмаси 80 дан кичик ёки 80 га тенг сон бўлиши керак. Шунинг учун биз 3 сонини танладик. Ва 23 ни 3 га кўпайтириб, кўпайтма 69 ни 80 дан айирамиз. Айирма 11 сонининг орқа томонига 36 рақамини туширамиз. Чап томондаги 3 сонини тенгликнинг ўнг томондаги 1 дан кейин ёзамиз. Чап томондаги 23 га 3 ни қўшиб 26 сонидан кейинги рақамни тўрт деб танлаб оламиз, чунки 264 ни 4 га кўпайтирсак, 1136 дан кичик бўлган сон 1056 чиқади. Уларнинг айирмаси 80 ва кейинги қадам 49 ни 80 дан кейин келтириб туширамиз. Чап томондаги 4 рақамини тенгликнинг ўнг томондаги 13 дан кейин ёзамиз. Чап томондаги 264 сонига 4 ни қўшиб, йиғинди 268 дан кейинги рақамни 3 деб танлаб оламиз. 2683 ни 3 га кўпайтирсак, кўпайтма 8049 бўлади. Ва охирги босқичга етиб келдик, яъни 8049 дан 8049 ни айирсак, айирма 0 ҳосил бўлади. Чап томондаги 3 рақамини тенгликнинг ўнг томондаги 134 дан кейин ёзамиз.

Яъни, $\sqrt{1803649} = 1343$.

$$\sqrt{1\uparrow 80\uparrow 36\uparrow 49}=1343$$

23	-1
+ 3	080
264	- 69
+ 4	1136
2683	- 1056
* 3	8049
	- 8049
	0

Демак, $1343^2=1803649$ эканлигини квадрат илдиз чиқариш ёрдамида текшириб олдик. $\sqrt{1803649}=1343$.

КУБ ИЛДИЗНИ ТЕЗ ҲИСОБЛАШ

(Биророрта математик маълумотномадаги кублар жадвалидан ихтиёрий икки хонали соннинг кубини айрим қоғозларга ёзиб, ўтирганларга аввалдан бериб қўйиш тавсия қилинади.)

Агар бирор *а* сон икки хонали соннинг куби бўлса, у ҳолда ифода нимага тенг эканлигини осонгина топиш мумкин. Бир хонали сонларнинг кубларини топамиз:

$1^3=1$, $2^3=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$ ва ниҳоят $10^3=1000$.

Бунда сонларнинг кублари ҳар хил рақамлар билан тугашини кўрамиз. Лекин, олтита ҳолда кубларнинг бирлик рақами кубга кўтарилаётган соннинг бирлик рақамлари билан бир хил. Қолган ҳолларда кубнинг бирлик рақами кубга кўтарилаётган соннинг бирлик рақамини ўнга тўлдирувчи рақамдан иборат. Демак, кубнинг охирги рақами бўйича куб илдизнинг бирлик рақамини топиш осон:

а) агар бирлик рақам 1, 4, 5, 6, 9, 0 рақамларидан бири бўлса, у ҳолда куб илдизнинг бирлик рақами ҳам ўша рақамдан иборат бўлади.

б) агар кубнинг бирлик рақами 2, 3, 7, 8 сонларидан бири бўлса, у ҳолда куб илдизнинг бирлик рақами учун жавоб мос равишда 8, 7, 3, 2 рақамларидан бири бўлади. Шундай қилиб, бирликлар рақамини топишимиз мумкин. Ўнликлар рақамини топиш учун куб илдиздан чиқарилаётган соннинг охирги учта рақамини ўчирамиз, бошқача айтганда квадрат илдиз чиқаришда сонларни қандай қилиб гранларга ажратган бўлсак, шундай йўл тутамиз; фақат бу ҳолда гранда учта рақам бўлади. Берилган сонда қандай соннинг куби бор эканини аниқлаймиз.

Айтилганларни ушбу мисолда тушунтирамиз: $\sqrt[3]{1\uparrow 728}$ ни топиш керак бўлсин. Илдиздан чиқадиган соннинг бирлик рақами 2 га тенг. (2+8=10), чунки $8=2^3$. Охирги учта рақамни ўчирамиз: 1 сони қолади. Бу сон 1 нинг кубидир, демак, ўнлик рақами 1 га тенг. Шундай қилиб, $\sqrt[3]{1728}=12$

Яна бир мисол: $\sqrt[3]{328\uparrow 509}$ ни топайлик. Жавобда ҳосил қилинадиган соннинг бирлик рақами 9 га тенг, сўнгра: 328509; 328 сонида 6 нинг куби бор, чунки $7^3=343$, бу 328 дан катта ($6^3=216$), 216<328. Демак, илдиз 69 га тенг.

Куб илдизни тез ҳисоблаш усулини математика тўгараги машғулотлари ёки математика кечаларида саҳнадан туриб жуда таъсирчан намойиш қилиш мумкин. Тез ҳисобловчи ролини олиб борувчи ўтирганларнинг бир нечтасига бирорта икки хонали сонни кубга кўтаришни илтимос қилади ва айтилган сонларнинг куб илдизларини дарров чиқариб беради.

Эслатма. Бирорта икки хонали соннинг бешинчи даражасидан иборат бўлган соннинг бешинчи даражали илдизини топиш яна ҳам содда эканига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. Жавобда ҳосил бўладиган соннинг ва даражага кўтарилган соннинг бирлик рақами бир хилдир:

$1^5=1$, $2^5=32$, $3^5=243$, $4^5=1024$, $5^5=3125$ ва ҳоказо.

Ўнлик рақамини топиш учун соннинг рақамларини ўнгдан чапга бештадан қилиб гранларга ажратиш керак. Айтилганларни ушбу мисолда тушунтирамиз: $\sqrt[5]{2\uparrow 48832}=12$. Илдиздан чиқадиган соннинг бирлик рақами 2 га тенг, чунки $32=2^5$. Охирги бешта рақамни ўчирамиз: 2 сони қолади. Бу сон бирнинг бешинчи даражасидан катта, лекин иккининг бешинчи даражасидан кичик, $1^5<2^5$ демак, ўнлик рақами 1 га тенг. Шундай қилиб, $\sqrt[5]{248832}=12$

ФИБОНАЧЧИ СОНЛАРИНИ ҚЎШИШ.

Иккита ихтиёрий сон ёзинг, уларнинг кетидан бу сонларнинг иккитаси йиғиндисига тенг бўлган учинчи сонни ёзинг ва ҳоказо. Бундай йўл билан ҳосил қилинган сонлар *Фибоначчи сонлари* деб аталади. Ўнта кетма-кет келган Фибоначчи сонларининг йиғиндисини топайлик:

$$2+3+5+8+13+21+34+55+89+144=374.$$

Бу йиғиндини бошқача усулда ҳам топиш мумкин: қаторнинг охиридан тўртинчи сонни 11 га кўпайтирамиз, натижа дарҳол ҳосил бўлади, яъни

$$34\cdot 11=374.$$

Агар мос амалларни умумий кўринишда бажариб чиқсак, бу қўлда осонгина топилади. Дастлабки сонлар a ва b бўлсин, у ҳолда ўнта қўшилувчи қуйидагича бўлади:

$$a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)+(5a+8b)+(8a+13b)+(13a+21b)+$$
$$(21a+34b)=55a+88b=11(5a+8b).$$

Йиғинди қатор охиридан тўртинчи қўшилувчи билан 11 нинг кўпайтмасига тенг эканини кўрамиз.

Таъриф. Фибоначчи сонлар кетма - кетлиги

$\{F_0\ ,F_1,\ F_2,\ \ldots\}=\{0,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,\ \ldots\}$ қуйидаги шартларда бажарилади. $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ $(n\geq 0)$.

Бу сонлар биринчи бўлиб “Книге абака ” (1202 й.) китобида итальян математиги Леонардо Пизанский томонидан (Фибаначчи) ёзилган.

13-масала. (Леонардо Пизанский масаласи.) Жуфтликдаги қуёнлар масаласини ҳеч ким ўрганиб чиқмаган ва бутун олимлар аро ўрганилмасдан қолиб кетган. Агар жуфтлик қуёндан ҳар ойда янги қуёнчалар дунёга келса, кейинги ойда ҳам худди шу тариқа қуёнлар туғилса, бир йилда қуёнлар сони нечта бўлади?

Жавоб: 377 жуфт қуён.

14-масала. (Чигирткaнинг қандай сакрашлиги ҳақида.) Фараз қилайлик, катакларга бўлинган ва ўнгдан чексизга қараб чўзилган лента бор. Бу лентанинг биринчи катагида чигиртка турибди. Ихтиёрий катакдан биттага ёки иккитага ўнг томонга сакрайди. Чигиртка неча хил усулда катак бошидан n гача етиб олади.

Жавоб: a_n – усуллар сони бўлсин, қачонки чигирткалар n-катаккача етиб борсин. У ҳолда $a_1 = a_2 = 1$. Бундан ташқари, чигиртка $n+1$ катакдан n катакка тушиб қолиши мумкин ёки n катакнинг устидан сакраб кетиши мумкин. Шунинг учун, $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$. Бу ерда $a_n = F_{n-1}$.

15-масала. Баъзи бир сўзлар 6 та ҳарфдан иборат бўлади, телеграфда жўнатиш учун кодлаш қуйидаги кўринишда бўлсин:

. - . . - - - . - - .

Битта сўзни жўнатиш учун оралиқ ташланмаган, ҳарфларини бир-бирини ажратиш, тўлиқ занжирлар нуқта ва чизиқчалардан иборат бўлади, яъни 12 та белгидан иборат. Берилган сўзни ўқишнинг неча хил усули бор?

Жавоб: 233 та усулда

16-масала. Манфий рақамдаги Фибоначчи сонлари нимага тенг?

$$F_{-1},\ F_{-2},\ \ldots\ ,F_{-n},\ \ldots\ ?$$

Жавоб: Бошланғич шартдан $F_0=0$, $F_1=1$ ва Фибоначчи сонининг манфий сонлар билан қайтарилиш нисбати $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, бир қийматли аниқланади. $F_{-n}=(-1)^{n+1}F_n$.

17-масала. Кассиннинг айниятлари. Тенгликни исботланг:

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n \quad (n>0).$$

Кассиннинг айниятлари барча n бутун сонлар учун ҳақиқий бўлади.

Кўрсатма: Индукцияни қўлланг.

18-масала. Фибоначчининг қуйидаги хоссаларини исботланг:

a) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$; b) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

c) $F_2+F_4+\ldots+F_{2n}=F_{2n+1}-1$; d) $F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2=F_n F_{n+1}$.

Кўрсатма: Ҳамма тенгликлар математик индукция ёрдамида исботланади.

19-масала. $n \geq 1$ ва $m \geq 0$ учун қуйидаги тенгликни исботланг:

$$F_{n+m}=F_{n-1} F_m+F_n F_{m+1}.$$

Икки хил усулда исботлаб кўринг: математик индукция методи ёрдамида ва Фибоначчи сонлари интерпретация ёрдамида 14-масалага кўра.

20-масала. Тенгликни исботланг:

a) $F_{2n+1}=F_n^2+F_{n+1}^2$; b) $F_{n+1}F_{n+2}-F_nF_{n+3}=(-1)^{n+1}$;

c) $F_{3n}=F_n^3+F_{n+1}^3-F_{n-1}^3$.

21-масала. Ҳисобланг. $F_{n+2}^4-F_nF_{n+1}F_{n+3}F_{n+4}$.

Жавоб: 1.

22-масала. Йиғиндини ҳисобланг.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{F_n}{F_{n-1}\cdot F_{n+1}}.$$

Жавоб: $\frac{F_3}{F_1\cdot F_2}-\frac{F_{n+2}}{F_n\cdot F_{n+1}}$.

23-масала. Фибоначчи сонларининг бўлувчилари. Қуйидаги тасдиқни исботланг:

a) $2\,|\,F_n \Leftrightarrow 3\,|\,n$; b) $4\,|\,F_n \Leftrightarrow 6\,|\,n$; c) $3\,|\,F_n \Leftrightarrow 4\,|\,n$; d) $F_m\,|\,F_n \Leftrightarrow m\,|\,n$;

Жавоб: a), b), c) ни F_n кетма – кетликни 2, 3, ва 4 га қолдиқли бўлиш ёрдамида исботланади. 19-масалага кўра исботланади.

1.3-§. ҚИЗИҚАРЛИ МАНТИҚИЙ МАСАЛАЛАР. МАНТИҚИЙ МАСАЛАЛАР ҲАҚИДА.

Шартли равишда мантиқий деб аталадиган бир қатор қизиқарли масалалар мавжуд. Мантиқий масалаларни нима бирлаштиради? Эҳтимол, биринчи навбатда, уларни ҳал қилиш учун ҳеч қандай ҳисоб-китоблар, махсус математик билимлар ёки ақлли фикр усуллари билан танишиш талаб қилинмайди. Техник характердаги тўсиқларнинг йўқлиги сизни фикрлаш услубига қараш имконини беради. Шунинг учун мантиқий масалалар математик фикрлашни ривожлантириш учун идеал материалдир.

Ҳаёт тажрибаси ва тасаввурни қўллаб-кувватлаш орқали мантиқий масалалар бошидан жуда аҳамиятсиз. Шунинг учун жавоб аниқ бўлган махсус машқлар босқичи ва талабанинг батафсил асослари сунъий кўринади ҳамда талаб қилинмайди.

Техник қийинчиликларнинг йўқлиги, улар билан курашиш, ўқувчининг онгида далил ўрнини боса олмаслик афзалликларига эга. Масалан, тенгламаларни ҳал қилишда талаба бир хил ўзгаришларга жуда кўп куч ва қоғоз сарфлайди, бу эса узоқ вақтда бажарилишига шубҳа қилмайди. Бундан ташқари, ўзгаришларнинг тенглигини ёзма асослаш талаб қилинмайди.

Мантиқий масалаларни ҳал қилишда, аксинча, жавобни асослашдан бошқа ҳеч нарса талаб қилинмайди. Мактаб ўқувчилари математик масалаларда жавоб беришдан олдин ҳеч бўлмаганда бирор нарса айтиш ёки ёзиш кераклигини ўрганишади. Ҳеч қандай арифметик ёки бошқа расмий ҳаракатлар мантиқий масалаларни назарда тутмаганлиги сабабли, болалар ечимларни ва оғзаки жавобларни ёзиб олишда аста-секин аниқ далилларга ўрганадилар.

Мантиқий масалалардан фойдаланиш бўйича тавсиялар.

1. Мантиқий масалалар 5, 6 ва қисман 7-синфдаги дарсларга мос келади. Улар геометрияни онгли ўрганиш учун яхши тайёргарлик сифатида хизмат қилади.

2. Мантиқий (шунингдек, бошқа) масалаларни ҳал қилишда ўқувчиларни усулни танлашда чекламаслик керак. Агар дарснинг мақсади усулни ишлаб чиқиш бўлса, унда бу усул учун энг қулай бўлган масалаларни таклиф қилишимиз керак. Аммо, талаба ҳали ҳам ўз йўлида ечим қабул қилса, унга ишни охиригача етказиш имкониятини беринг ва кейин бошқа ёндашув билан танишинг.

3. Мантиқий масалаларнинг барча янги турларини методик жиҳатдан ўрганиш эмас, балки бутун йил давомида турли хил масалаларни ҳал қилиш фойдали бўлади. Албатта, ҳар бир янги ғоя билан (айтайлик, вазиятни қондирадиган иш аллақачон топилган бўлса ҳам, бу ишни охиригача олиб келиш керак) биринчи танишганингиздан сўнг, уни бир неча марта қўллаш фойдали бўлади. Агар мактаб ўқувчилари дарсда барча масалаларни ҳал қилмасалар (ва бу ҳар доим содир бўлади!), дарҳол “бўшлиқларни йўқ қилиш” шарт эмас. Уни кейинчаликка қолдириш яхшидир. Бундан ташқари, мантиқий масалаларни кетма-кет тарзда кўплаб дарсларга бағишламанг.

4. Далилларга бўлган эҳтиёж, ноаниқ жавобга тенг бўлган тўлиқ бўлмаган маълумотлар билан энг яхши масалаларни кўрсатади. Болаларнинг бундай масалаларига эътибор беринг.

5. Баъзи масалалар жуфтликлар ва гуруҳларда яхши ҳал этилади. Кўпинча масала майдончасида кичик рол ўйнаш мумкин (бу синфлар учун методик кўрсатмаларда батафсил ёзилган). Ушбу иш шакллари 5, 7-синф ўқувчиларини математикага бўлган қизиқишларини рағбатлантиради.

6. Болаларга оила аъзолари билан энг қизиқарли масалаларни муҳокама қилишни маслаҳат беринг. Математикадан узоқ бўлган катталар баъзан жумбоқларга қизиқишади, лекин улар болаларга қараганда яхшироқ ечим қабул қилишади. Бу эса қувончли ва самарали оилавий мулоқотга сабаб бўлиши мумкин бўлган мантиқий масалалар.

1-масала. Саёҳатчи учта одамни учратиб, уларнинг ҳар биридан сўради: “Сизнинг ҳамроҳларингиз орасида қанча рицерлар бор?”. Биринчиси: “Йўқ”- деб жавоб берди. Иккинчиси: “Бир”- деди. Учинчиси нима деган?

Жавоб: “Бир”.

Ечиш: Агар биринчи рицер бўлса, унда унинг сўзлари туфайли иккинчи ва учинчи ёлғончилардир, бу иккинчи одамнинг баёноти туфайли мумкин эмас. Шундай қилиб, биринчи-ёлғончи. Агар иккинчиси ёлғончи бўлса, унда унинг сўзлари туфайли учинчиси ёлғончи, лекин кейин биринчи ҳақиқатни айтган ва ёлғон гапириш керак эди. Шундай қилиб, иккинчиси-рицер. Унинг сўзлари туфайли учинчи рицер ҳам бор. Учинчиси ҳалол жавоб беради: “Бир”.

2-масала. Бир шаҳарда фақат А, Б, ва С тоифага мансуб одамлар яшайди. А тоифадагилар доимо Б тоифадагиларга, Б тоифадагилар доимо С тоифадагиларга, С тоифадагилар эса доимо А тоифадагиларга ёлғон айтишади, қолган ҳолларда эса рост гапиришади. Бир куни шаҳар аҳолисидан бир гуруҳи дастурхон атрофида айлана бўлиб ўтириб қолишди. Уларнинг ҳар бири ўзидан ўнг томондаги одамга “Мен Б тоифага мансубман” деган бўлса, ўтирганлардан нечтаси С тоифага мансуб?

Ечиш: Фараз қилайлик, уларнинг ичида камида битта С тоифага мансуб киши бўлсин. Шу кишининг чап томонидаги киши А тоифадан бўлса, у ҳолда у рост гапиради, агар Б тоифадан бўлса, у ҳолда ёлғон гапиради. Ҳар икки ҳолда ҳам у “Мен Б тоифага мансубман” демайди. Демак, дастурхон атрофида жойлашган одамлар орасида С тоифага мансуб одам йўқ.

Жавоб: йўқ.

3-масала. Бир оролда фақат “рост”чилар (фақат рост гапирадиганлар) ва “ёлғончи”лар (фақат ёлғон гапирадиганлар) яшайди. Улардан учтаси иккитадан фикр айтди:

Биринчиси: “Оролда яшайдиган одамлар сони учтадан ошмайди”, ”Оролда фақат “ёлғончилар” яшайди”;

Иккинчиси: “Оролда яшайдиган одамлар сони тўрттадан ошмайди”, “Орол аҳолисининг барчаси ҳам “ёлғончи” эмас”;

Учинчиси: “Оролда беш киши яшайди”, “Оролда “ёлғончилар” сони учдан кам эмас”.

Оролда нечта киши яшайди ва улар орасида нечта ёлғончилар бор?

Ечиш: Биринчи киши “ёлғончи” (агар у ростчи бўлса, у ҳолда тасдиғи ёлғон бўлар эди). Демак, оролда камида 4 киши яшайди. Иккинчи киши “ростчи”, чунки унинг иккинчи тасдиғи тўғри. Унинг биринчи тасдиғидан оролда 4 киши яшашини топамиз. У ҳолда, учинчи киши “ёлғончи” бўлади ва унинг иккинчи тасдиғидан ёлғончилар сони 3 тадан кам эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, оролда тўрт киши яшайди ва улардан иккитаси ёлғончи.

Жавоб: 4 киши шундан 2 таси ёлғончи.

ЎЙИНГА ОИД МАСАЛАЛАР.

4-масала. Бўривой 100 дан катта бутун сон ўйлади. Қўзихон эса бирдан катта бутун сон айтди. Агар Бўривойнинг сони Қўзихон айтган сонга бўлинса, у ҳолда Қўзихон ютади. Акс ҳолда, Бўривой ўйлаган сонидан Қўзихон айтган сонни айириб, айирмани эслаб қолади. Шундан сўнг Қўзихон бошқа сон айтади ва ҳоказо. Агар Бўривой эслаб қоладиган айирма манфий бўлиб қолса, Қўзихон ютқазади. Қўзихонга илгари айтган сонларни қайта айтиш таъқиқланади. Бу ўйинда Қўзихон ютиши учун қандай усулда ўйнаши лозим?

Ечиш: Қўзихон учун энг омадсиз ўйинни кўрамиз, яъни Қўзихон айтган сонларга Бўривойнинг сонларига бўлинмасин. Аввал “2” айтилади. Бўривойнинг сони эса тоқ. Ундан 2 айирилса у яна тоқ бўлади.

Иккинчи сон “3” бўлсин. У ҳолда, Бўривойнинг бошланғич сони 6 га бўлганда 0,2,4 қолдиқ бермаслигини биламиз, акс ҳолда Қўзихон ютади. Агар Бўривойнинг сони $6к+5$ кўринишида бўлганда эди, биринчи айтилишдан кейин у $6к+3$ га айланиб 3 га бўлинарди. Демак, агар Бўривойнинг сонини 6 га бўлганда 1 ёки 3 қолдиқ қолса, у ҳолда ўйин давом этади ва икки юришдан кейин ундан 5 айирилса, у $6к$-4 ёки $6к$-2 кўринишига келиб, 4 га бўлганда 2 ёки 0 қолдиқ беради.

Учинчи сон “4”. Бу юришдан илгари Бўривойнинг сонини 12 га бўлганда (ЭКУК(2, 3, 4)=12) неча қолдиқ қолиши мумкинлигини кўрайлик.
6 га бўлгандаги қолдиқ 2 ёки 4 эканлигидан 12 га бўлганда 2, 4, 8 ёки 10 қолдиқ қолиши мумкин. Ўйин фақат Бўривойнинг сони $12к+2$ ёки $12к+10$ шаклда бўлсагина давом этади, акс ҳолда у 4 га бўлинади. Бу юришдан кейин Бўривойнинг сони $12к+10$ ёки $12к+6$ шаклида бўлади.

Тўртинчи сон “6”. Бу ҳолда Бўривойнинг сони фақат 12к+10 кўринишида бўла олади ва бу юришдан кейин у 12к+4 кўринишга келади.

Кейинги сон “16”. Юришдан кейин 12*к* кўринишидаги сон ҳосил бўлади ва Қўзихон 12 деб айтса ютади.

Шундай қилиб, $2+3+4+6+16+12<100$ бўлгани учун Қўзихон ютқазмайди.

5-масала. Волейбол бўйича Евро–Африка чемпионатида иштирок этган Европа жамоалари сони Африка жамоалари сонидан 9 та ортиқ. Чемпионатда исталган иккита жамоа ўзаро бир мартадан ўйин ўтказди. Натижада, Европа жамоалари билан Африка жамоалари биргаликда тўплаган балдан 9 марта кўп бал тўплади (бунда ғолиб жамоага 1 бал, мағлуб жамоага 0 бал берилади). Африкалик битта жамоа кўпи билан неча бал тўплаган бўлади?

Ечиш: Чемпионатда Африкадан x та жамоа қатнашган бўлса. У ҳолда Африкалик жамоалар ўзаро $\frac{(x-1)x}{2}$ та ўйин ўтказишади ва улар тўплаган умумий баллар $\frac{(x-1)x}{2}+k$ бўлади, бу ерда k-Европа жамоалари устидан қозонилган ғалабалар сони.

Шунингдек, Европа жамоалари тўплаган баллар

$$\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k$$

бўлади. У ҳолда, шартга кўра,

$$9\left(\frac{(x-1)x}{2}+k\right)=\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан,

$$3x^2-22x+10k-36=0$$

охирги тенгламанинг дискриминанти

$$D=121-3(10k-36)=229-30k$$

тўла квадрат бўлиши зарур, чунки $x \epsilon N$, $k=2$ ва $k=6$ бўлганда D тўла квадрат бўлади. Агар $k=2$ бўлса, у ҳолда x=8 бўлади ва Африканинг энг яхши жамоаси $(x-1)+k=7+2=9$ бал йиғиши мумкин.

Агар $k=6$ бўлса, у ҳолда x=6 бўлади ва Африканинг энг яхши жамоаси кўпи билан $(x-1)+k=5+6=11$ бал тўплайди.

6-масала. Икки ўйинчи навбат билан фақат 1, 2 ёки 3 сонлардан ҳохлаган бирини айтади. Айтилган сонлар қўшиб борилади. Ким айтган навбатдаги сон қўшилганда 21 чиқса, ўша ютади.

Ечиш: Ал-Хоразмий таклиф этган ва унинг номи билан боғлиқ бўлган алгоритмни яхши билган ўқувчи ютади. Тескарисига санаб чиқайлик: 17 сони айтилса, рақиби 1, 2 ёки 3 сонини айтади ва уни қўшганидан кейин 18, 19 ёки 20 ҳосил бўлади. Сиз энди бу учта сондан бирини айтиб, 21 ни ҳосил қиласиз ва сиз ғолиб чиқасиз. 17 деб айтиш учун 14, 14 учун 10, 10 учун 6, 6 учун 2 деб айтиш керак. Демак биринчи ўқувчи алгоритмни билиб, 2 деб бошласа ва рақиби неча қўшса ҳам 6 ва ҳоказо 17 гача айтса, ўйинда ютади.

7-масала. Икки хонали сон ўйланг. Шу сонлардаги рақамлар ўрнини алмаштиринг. Шу икки сонларнинг каттасидан кичигини айириб ташланг. Айирманинг охирги рақами нечага тенглигини айтсангиз, мен уни олдидаги рақамини айтаман. Бу рақам қандай топилади?

Ечиш: Айирмадаги рақамлар йиғиндиси 9 га тенг. Масалан 31 сони ўйланди. Ўрни алмаштирилса 13; 31-13=18; 1+8=9. Масалан, охиридаги рақам 8 га тенг бўлса, жавоб 18 бўлади.

НАТУРАЛ СОНЛАР РАҚАМЛАРИНИ ТИКЛАШ. СОНЛИ РЕБУСЛАР.

Бу ерда натурал сонлар устида арифметик амаллар кўриб чиқилади, бунда сонларнинг бир қисми маълум ва уларнинг аксарият қисми номаълум. Номаълум сонларни юлдузлар билан белгилаймиз. Юлдузлар билан кўрсатилган барча рақамларни шунингдек, агар бир нечта жавоб бўлса, унда уларни ҳам топишингиз керак.

Баъзан масалада номаълум сонлар кўп бўлса шу номаълум сонлардан икки ёки уч ҳатто битта сон маълум бўлса, қандай қилиб бу номаълум сонларни топиш мумкин. Ушбу мавзунинг масалаларида ҳар бир соннинг биринчи сони нолдан фарқ қилади.

Сонли ребус, шунингдек арифметик ребус, крипторитм, алфаметик-математик жумбоқ, арифметик ишнинг мисоли, унда барча ва баъзи сонлар ҳарфлар ёки бошқа белгилар билан алмаштирилади. Масала асл мисолни қайта тиклашдан иборат.

Сонли ребуслар учун масалалар – бу натурал сонлар устида ҳаракатларни амалга оширишда ёзувни тиклаш учун таниш бўлган масалалар, фақат сонлар юлдузлар билан эмас, балки ҳарфлар билан кўрсатилади. Шу билан бирга, муҳим шарт қўшилади: худди шу масалада бир хил ҳарфлар бир хил сонларни, турли ҳарфлар турли сонларни билдиради. Ва ҳар бир соннинг биринчи сони нолдан фарқ қилиши керак. Агар масаланинг жавоби битта бўлмаса, уларнинг ҳаммасини топиш керак.

Баъзи сонли ребуслар бир нечта ечимларга эга. Сонли жумбоқларни ечишда, одатда, барча мумкин бўлган вариантларни текшириш шарт. Сонли ребуслар ўқувчиларда мантиқий фикрлашни ривожлантириш учун ишлатилади, чунки уларнинг ечимлари мантиқий асосларга асосланган.

8-мисол. Ребусни ҳал қилиш: КОКА+КОЛА=ВОДА

Ечиш: Келинг, охирги устунга қарайлик: у бир хил сонга эга. Фақат ноль. Ва энди иккинчи устунга эътибор беринг: у ноль сони билан ўхшаш позицияга эга. Лекин биринчи имконият йўқолади; тўққизга тенглиги ҳақида қолади.

Топиш учун биринчи устунни кўриб чиқинг. Шубҳасиз, К нолдан фарқ қилади ва 4 дан ошмайди. Кейин К–1, 2, 3, 4 қийматларидан бирини олади. Келинг, тўртта ишни кўриб чиқайлик.

1) К=1 га ҳолни қарайлик.

Учинчи устунда Л=9, чунки иккинчи устунда бўлиши керак 9+9+1=19. Лекин кейин Д=0 ва бу мумкин эмас.

2) К=2 га тенг ҳолни қарайлик. Ребус қийматини К=2, А=0, Л=9 га алмаштирамиз. 2920+29ЛО=В9ДО. Учинчи устундан 2+Л=10+Д, Л=8+Д. Бундан Д=0 ёки Д=1, яъни Л=8 ёки Л=9. Аммо, бу бўлиши мумкин эмас, шунинг учун иккала имконият ҳам чиқариб ташланади.

3) К=3 га тенг ҳолни қарайлик: 3930+39ЛО=В9ДО. Демак, 3+Л=10+Д, Л=7+Д, бундан, Д=1 бўлса Л=8, Д=2 бўлса, Л=9 ва Д=3 бўлса, Л=10. Булардан фақат Л=8 қаноатлантиради ва В=7. 3930+39ЛО=В9ДО

4) К=4 бўлганда, В=9. Лекин бу мумкин эмас. Шундай қилиб, ечим фақат учинчи ҳолатда олинади.

Жавоб: 3930+3980=7910.

9-мисол. ОТ+ОТ+ОТ=МОТ.

Ечиш: Бир хил сонларнинг йиғиндиси яна ўша сон чиқадиган сон, бу ҳам бўлса фақат 0 сонидир Т=0. Ва шуни ҳам биламизки, қўшилувчилари сони тоқ бўлган 5 сонларининг йиғиндиси ҳам беш бўлади. Демак, О=5 у ҳолда, М=1 га тенглиги келиб чиқади. 50+50+50=150.

10-мисол. Х ҳарфи энг камида қандай рақамни ифодалаш мумкин?

ННН+УУХ+ХХХ=2005

Ечиш: Учта юзлик сонни йиғиндиси икки минглик сон ҳосил бўлиши учун Н=9 деб оламиз, кейинги сон У=8 бўлса, Х=3 бўлади. Лекин, 999+883+333=2215 Бу хато. Энди У=1 ва Х=8 деб оламиз, у ҳолда 999+118+888=2005 тўғри жавоб ҳосил бўлади.

11-мисол. 1 дан 9 гача бўлган рақамларнинг ҳар бирини бир мартадан ишлатиб, кўпайтмага оид қуйидаги тенглик киритилган СЕН·ВА=7632.

Жавоб: 159·48=7632.

Ечиш: Охирги рақами 2 билан тугайдиган кўпайтмалар: 2·1, 3·4, 2·6, 4·8, 6·7, 8·9. Масалан, энг кичик сонлар қиймати танланганда, 301·42=12642, бу-хато. Бир қанча вариантларни қўйиб текшириб, ушбу жараённи қабул қиламиз. С=1, Е=5, Н=9, В=4, А=8. Шу билан 159·48=7632 келиб чиқади.

12-мисол. Сонли ребусда бир хил ҳарфлар бир ҳил сонни, ҳар ҳил ҳарфлар ҳар хил сонни ифодалайди. Қуйидаги ребусларни ечинг: КУБ=$Б^3$

Ечиш: Бир хил сонни уч марта ўзига ўзини кўпайтиришдан яна шу соннинг ўзи ҳосил бўладиган сонлар Б=1,5,6,9 сонларидир. Демак, бизга мос келадиган сонлар Б=5, К=1, У=2. $125=5^3$ ва Б=6, К=2, У=1. $216=6^3$ ва Б=9, К=7, У=2. $729=9^3$.

13-мисол. Ёзувни қайта тиклаш: АБ·АБ=АСС.

Ечиш: Келинг, ўйлаб кўрайлик: АБ·АБ яна А сони билан, яъни бир хил сон билан бошланганда? Бу фақат А=1 билан амалга оширилиши мумкин. Ва бундай иш икки хил сон билан тугаганда? Бу икки ҳолатда мумкин: 10·10=100, 12·12=144. Аммо биринчи вариант йўқолади, чунки Б=С=0 ва турли ҳарфлар турли сонларни билдириши керак.

Жавоб: 12·12=144

1.4-§. МАТЕМАТИК ИНДУКЦИЯ МЕТОДИ ХАҚИДА.

Дастлаб ўхшатиш тушунчасини таҳлил этамиз. Ўхшатиш белгиси қадимги юнонларда бошланишида сонлар пропорцияси шаклида ифодаланган. Масалан, 10:5=14:7. Кейинчалик ўхшатиш сўзи шаклларга ва бошқа нарсаларга ҳам тадбиқ этила бошланди.

Ҳозирги пайтда ўхшатиш барча фанларга хизмат қилади.

Кимё. Д.И.Менделеев кимёвий элементларнинг даврий системасини яратди ва янги элементларнинг хоссаларини ўхшатиш бўйича ўз фикрларини айтди.

Биология. Чарльз Дарвин суъний танлаш ҳодисасига ўхшаш “табиий танлаш” тушунчасини киритди.

Физика. Товушнинг ҳавода тарқалиш қонунияти ушбу ҳодисанинг сув сиртида тўлқинни тарқалиш ҳодисасига асосланган ҳолда ўрнатилди.

Геология. Ёқутистонда олмос қазилма бойликлари топилгунга қадар Жанубий Африка ясси тоғликлари геологик тузилиши Ғарбий-Сибир платформаси геологик структураси билан умумий ўхшашликлари маълум бўлган. Тасодифий ҳолда Ёқутистон дарёларидан бирида Жанубий Африканинг олмосли йўналишида мавжуд бўлган ҳаворангли минералга ўхшаш минерал топилган. Шундан сўнг Ёқутистонда олмос излана бошланди. Ҳақиқатдан ҳам у ердан олмос топилди, кейинроқ олмос бойликлари қазиб олина бошланди.

Математикада шундай масалалар мавжудки, баъзи фаразлар якуний натижаларга кўра, нотўғри бўлиб чиқади. Шундай масалалардан бири 1640-йилда туғилган П.Ферманинг ўзига тегишли ҳисобланади:

У $f_n = 2^{2^n} + 1$ кўринишидаги натурал сонларнинг барчаси туб сон деб фараз қилинган ва фақат n=0, 1, 2, 3, 4 лар учун текширилган. Лекин 1732-йили Леонард Эйлер Пеер Ферманинг фаразини инкор этди. Бунинг учун у $f_5 = 2^{2^5} + 1$ сони 641 га бўлинишини кўрсатди. П. Ферма нима учун адашди деган савол туғилади?

Унинг хатолиги шунда эдики, $f_n = 2^{2^n} + 1$ бир нечта хусусий қийматлар учун ҳисоблаб (бу хусусий тасдиқ), $f_n = 2^{2^n} + 1$ нинг қиймати ихтиёрий n натурал сон учун туб сон деган умумий хулосага келган.

Л.Эйлер $f(n) = n^2 + n + 41$ учҳад учун қуйидагини текширган. Ушбу учҳад n нинг 1 дан 39 гача қийматлари учун туб сон бўлган. Лекин n=40 учун $f(n) = n^2 + n + 41$ қиймат мураккаб сон ҳисобланади:

$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 1681 = 41^2$

$f(n) = 991n^2 + 1, n \in N$ кўринишидаги ифода берилган. n соннинг ўрнига 1 дан бошлаб қиймат берилганда мазкур ифоданинг қиймати бирор соннинг квадрати бўлмасдан, n=12 055 735 790 331 359 447 442 538 767 бўлган ҳолдагина $f(n) = 991n^2 + 1$ сон тўлиқ квадрат бўлади.

Л.Эйлер содда индукция хатоликка олиб келиши ҳақидаги ҳақиқатни айтган. Математикада чексиз тўплам ҳақида мулоҳаза билдирилганда, чекли тўпламни текшириш исботлашни алмаштира олмайди.

Дедукция ва индукция

Шундай қилиб, иккита тушунчани фарқлаш лозим:

1) Хусусий тасдиқ; 2) Умумий тасдиқ.

1-мисол. Қуйидаги тасдиқлардан қайси бири хусусий, қайси бири умумий:

1) Ноль рақами билан тугалланувчи сон 5 га бўлинади? 2) 140 сони 5 га бўлинади?

Умумий тасдиқдан хусусий тасдиқга ўтиш *дедукция* дейилади.

2-мисол. Ноль билан тугалланувчи сон 5 га бўлинганлиги сабабли, 140 сони 5 га бўлинади.

Хусусий тасдиқдан умумий тасдиқга ўтиш *индукция* дейилади. Индукция ҳам тўғри, ҳам нотўғри натижага олиб келиши мумкин. Индукция методи математикада кенг қўлланилади, лекин ундан тўғри фойдаланиш лозим.

Тасдиқ: Қуйидаги уч хонали сонлар: 140, 150, 250 - 5 га бўлинади.

Хулоса: 1) Барча ноль рақами билан тугалланувчи сонлар 5 га бўлинади (тўғри), 2) барча уч хонали сонлар 5 га бўлинади (нотўғри). Шундай савол пайдо бўлади. Тўғри хулоса чиқариш учун математикада индукция методидан қандай фойдаланиш лозим? Чексиз сонлар ҳодисасини текширишда қайси усуллар амалга оширилади? Бундай усулни Б.Паскал ва Я.Бернуллилар таклиф қилишди. Бу усул ҳозирги кунда математик индукция методи дейилади. Ушбу методдан баъзи қадимги грек олимлари ҳам фойдаланишган.

Дасталаб бу метод 1321- йил Герсонид томонидан фойдаланилган. XIX асрнинг иккинчи ярмигача бу метод асосий исботлаш методи ҳисобланган. Шу даврдан бошлаб, О.Болтцано, О.Л.Коши, К.Ф.Гаусс, Н.Х.Абелнинг илмий ишларидан сўнг, индуктив исботлашлар ўз аҳамиятини математикада қисман йўқотди.

Математик индукция методини мисолларда тушунтирамиз.

3-масала. Китоб жавонида китоблар қуйидагича жойлаштирилган:

1) энг чекка қисмида жойлашган китоб қизил муқовада;

2) қизил муқовали китобнинг ўнг томонида қизил муқовали китоб жойлашган;

Хулоса. Китоб жавонида жойлашган барча китоблар қизил муқовада.
“Жавонда барча китоблар қизил муқовада” хулосаси ҳақиқатдан ҳам тўғри ҳисобланади. Лекин, агар энг чеккадаги китоб қизил муқовалилиги маълум бўлса, “Жавондаги барча китоблар қизил муқовали“ деган хулоса чиқариш учун етарли эмас.

Қизил муқовали китобнинг ўнг томонида жойлашган китоб қизил муқовали деган хулоса чиқаришга етарли эмас (Чап томондаги биринчи китоб яшил муқовада ҳам бўлиши мумкин).

Шунинг учун, хулоса тўғри бўлиши учун иккала шарт ҳам бажарилиши лозим.

Математика энциклопедиясида қуйидаги тушунчалар берилган.

Математик индукция – математик индукция принципига асосланган математик тасдиқни исботловчи метод:

Агар бизга n натурал сонга боғлиқ бирор бир *Ф(n)* тасдиқ берилган бўлса, кўп ҳолларда бу тасдиқнинг исботи *математик индукция методи* деб юритиладиган усулда исбот қилинади. Шу усулга қисқача тўхталиб ўтамиз. Фараз қилайлик, *n* ($n \geq p$, *p*—тайинланган) натурал сон ва *Ф(n)* тасдиқ берилган бўлсин. Математик индукция методи билан исбот қилиш қуйидаги уч босқичдан иборат.

Теорема 1: *Индукция базиси. Ф(n)* тасдиқ *n=p* учун тўғри бўлиши исбот қилинган бўлсин.

Теорема 2: *Индукция фарази. Ф(k)* тасдиқ барча $h>k\geq p$ натурал сонлар учун тўғри деб фараз қилинади.

Якуний босқич. Ф(k) тасдиқнинг n дан кичик барча *k* лар учун тўғрилигидан *n* учун ҳам тўғри бўлиши келтириб чиқарилади.

Агар ушбу иккала теоремалар исботланган бўлса, математик индукция тамойилига асосланган ҳолда, тасдиқ ихтиёрий *n* натурал сон учун тўғри деб хулоса қилинади.

4-мисол. Ҳар қандай n натурал сон учун $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ тенглик ўринли эканлигини исботланг.

Ечиш: 1). n=1 бўлганда, $1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}$; 1=1. Яъни, тенглик ўринли.

2) n=k учун тенглик ўринли деб фараз қиламиз.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

3) n=k+1 учун тенглик ўринли эканлигини исботлаймиз:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+(k+1)^2=\frac{k+1(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

2) Фаразга кўра,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

У ҳолда, $\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=(k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6}+k+1\right)=$

$$=(k+1)\left(\frac{2k^2+k+6k+6}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}\right)$$

$2k^2+7k+6$ квадрат учҳадни кўпайтувчиларга ажратамиз:

$2k^2+7k+6=(\kappa+2)(2\kappa+3)$.

Бундан,

$$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

ёки

$$1^2+2^2+3^2+\cdots k^2+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}$$

келиб чиқади. Демак, берилган тенглик ҳар қандай натурал сон учун ўринли экан.

5-мисол. Тенгликни исботланг:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n},\forall n\in N$$

Ечиш: $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ орқали белгилаймиз.

1) $n=1$ да $S_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ га эга бўламиз. Теорема исботланди.

2) Тенглик $n=k$ да бажарилади деб фараз қилайлик:

$$S_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k}.$$

Қуйидаги тенглик ўринли эканлигини $n=k+1$ тенглик учун исботлаш лозим:

$$S_{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-2} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}.$$

Ҳақиқатдан,

$$S_{k+1} = \underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}}_{=S_k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

теорема исботланди.

АРИФМЕТИКАНИНГ АСОСИЙ ТЕОРЕМАСИ.

Теорема: Ҳар қандай натурал сон ёки бирга тенг, ёки туб сон, ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.

Исбот. Математик индукция методи билан исбот қиламиз.

1-босқич. Индукция базиси $n=1$ бўлсин. У ҳолда теорема исбот бўлди.

2-босқич. Ҳар қандай $1 \leq k < n$ учун теорема тўғри бўлсин. Яъни, k ёки

1 га тенг, ёки туб сон, ёки кўпайтувчилари тартибигача ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади.

3-босқич. Агар n туб сон бўлса, исбот тугалланади. Агар n мураккаб сон бўлса, у ҳолда $1<a<n$ ва $1<b<n$ шартларни қаноатлантирадиган шундай натурал сонлар мавжуд бўлиб, $n=a \cdot b$ индукция фаразига кўра a, b лар туб сонлар ёки кўпайтувчилари тартибигача аниқликда ягона усулда туб сонлар кўпайтмасига ёйилади. Агар a, b лар туб сонлар бўлса, исбот тугайди.

Акс ҳолда,

$$a = p_1, p_2, \dots p_k, \; b = p_{k+1}, p_{k+2}, \dots, p_m.$$

Энди бу ёйилма ягона эканлигини исбот қиламиз.

Фараз қилайлик, $n = q_1, \dots, q_s$ тенглик n нинг бошқа ёйилмаси бўлсин. Бундан, n=p_1,$p_2, \dots p_m = q_1, \dots, q_s$ келиб чиқади. Бу тенгликнинг иккала томонини p_1 га бўлайлик. У ҳолда, p_1 ва $q_1, \dots, q_s$ лар туб сонлар бўлганлиги учун $q_1, \dots, q_s$ лардан бири p_1 га тенг. Аниқлик учун p_1=q_1 бўлсин. У ҳолда $p_2, \dots p_m$=$q_2, \dots, q_s$. Бу ёйилмалар n дан кичик сонларнинг ёйилмалари бўлганлиги учун, индукция фаразига кўра, кўпайтувчилари тартибигача ягона. n натурал сонни туб кўпайтувчиларга ёйганимизда, p_1 туб сон ёйилмада α_1 марта, p_2 туб сон α_2 марта ва ҳоказо, p_m туб сон α_m марта учрасин. У ҳолда $n = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots p_m^{\alpha_m}$ ифода n натурал соннинг *каноник ёйилмаси* дейилади. Каноник ёйилмада туб кўпайтувчиларни ўсиш тартибида жойлаштирсак, ёйилма ягона бўлиши равшан.

Харитани бўяш.

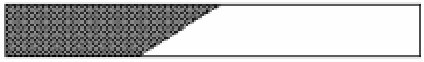
Текисликда бирор географик харита берилган деб фараз қилайлик.

Таъриф. Агар ихтиёрий давлат маълум бўёқ билан бўялган, умумий чегарага эга бўлган иккита давлат турли ранглар билан бўялса, харита тўғри бўялган дейилади.

Тўғри бўялган харитага ихтиёрий географик харита мисол бўла олади. Ихтиёрий харитани маълум бўёқ билан бўяш мумкин, лекин бундай бўяш тежамли бўлмайди. Шунинг учун қуйидаги масалани қўйиш лозим бўлади: Харитани бўяш учун бўёқлар турлари иложи борича кам бўлсин.

6-масала. Тўғри тўртбурчак тўғри чизиқ билан n та қисмга бўлинган деб фараз қилайлик. Бундай ҳолда умумий томонга тенг бўлган иккита қисмни турли рангдаги қора ва оқ бўёқга бўяш мумкин.

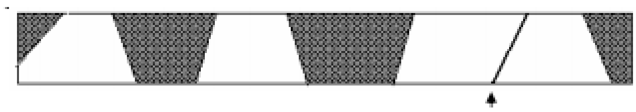
Ечиш: n=1 да қуйидагига эгамиз:



1.7-расм

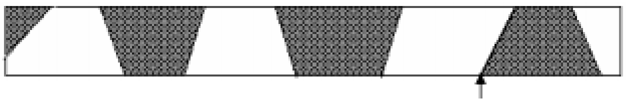
$n=k$ учун тасдиқ тўғри деб фараз қилайлик.

$n=k+1$ да k та тўғри чизиқдан иборат $k+1$ та тўғри чизиқли маълумотлардан ташкил этган тўғри тўртбурчакни бўяш лозим:



1.8-расм

($k+1$) тўғри чизиқдан қолган қисмларни қарама-қарши бўёққа бўяш лозим бўлади:

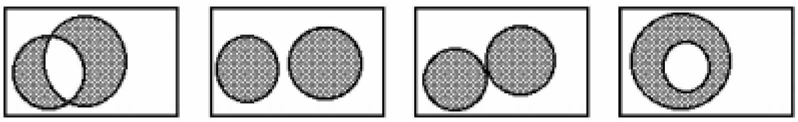


1.9-расм

($\kappa+1$) та тўғри чизиқ.

7-масала. Текисликда n та айлана берилган ($n\geq 2$). Ушбу айланалардан ташкил топган харитада уларни ихтиёрий жойлаштирилганда иккита бўёқ билан тўғри бўяш мукинлигини исботланг.

Ечиш: $n=2$ да айланаларнинг қуйидаги имкониятларини кўриш мумкин:



1.10-расм

$n=\kappa\geq 2$ учун тасдиқ тўғри деб фараз қилайлик. Бундай ҳолда тасдиқ $n=\kappa+1$ да ҳам тўғри бўлади. Текисликда $\kappa+1$ та айланалар берилган деб фараз қилайлик.

НАТУРАЛ СОНЛАРНИ БЎЛИШНИ ИСБОТЛАШ.

8-масала. $\forall n \in N$ да қуйидагиларни исботланг:

$3^{2n+1}+2^{n+2}$ ифода 7 га бўлинади;

1) $n=1$ да $3^3+2^3=27+8=35,$ га эга бўламиз ва 7 га бўлинади.

2) $3^{2k+1}+2^{k+2}$ ифоданинг 7 га бўлиниши берилган.

3) $3^{2k+3}+2^{k+3}$ бўлинишини исботлашимиз керак.

Исбот: $$3^{2(k+1)+1}+2^{k+1+2}=3^{2k+1}\cdot 9+2^{k+2}\cdot 2+9\cdot 2^{k+2}-9\cdot 2^{k+2}=$$
$$9\cdot(3^{2k+1}+2^{k+2})+2^{k+2}(2-9).$$

Ҳар бир иккита қўшилувчи 7 га бўлинади. 2-теорема исботланди.

9-масала. n^3+5n ифода 6 га бўлинади.

1) *n=1* да $1^3+5\cdot 1=6$ га эга бўламиз. Бунда 6 сони 6 га бўлинади.

2) k^3+5k ифоданинг 6 га бўлиниши берилган.

3) $(k+1)^3+5(k+1)$ ифоданинг 6 га бўлинишини исботлаш лозим.

Исбот: $(k+1)^3+5(k+1)=k^3+5k+3k(k+1)+6.$

k^3+5k йиғинди 6 га фараз бўйича бўлинади. $k(k+1)$ кўпайтма k натурал сонда 2 га бўлинади, у ҳолда $3k(k+1)$ ифода 6 га бўлинади.

ТУРЛИ МАСАЛАЛАР.

10-масала. Ҳар бир натурал $n>1$ учун $2^{2^n}+1$ сони 7 рақами билан тугалланади.

Исбот:

1) $n=2$ да 7 рақами билан тугалланувчи $2^{2^2}+1=17$ ҳосил бўлади.

2) $2^{2^k}+1$ соннинг 7 рақами билан тугалланиши берилган.

3) $2^{2^{k+1}}+1$ соннинг 7 рақами билан тугалланишини исботлаш лозим.

$2^{2^k}+1$ сон 7 рақами билан тугалланганлиги сабаб, 2^{2^n} сони 6 рақам билан тугайди. Агар сон 6 рақами билан тугалланса, у ҳолда унинг квадрати ҳам 6 рақами билан тугайди. *n=k+1* да қуйидагини ҳосил қиламиз:

$2^{2^{k+1}}=2^{2^k\cdot 2}\cdot 2^{2^k}$ ва 6 рақами билан тугалланади. 2-теорема исботланди.

11-масала. Ихтиёрий n натурал сон учун

$(10^n+10^{n-1}+...+1)(10^{n+1}+5)+1$ сони тўлиқ квадрат эканлигини исботланг.

Исбот: Ушбу масалани ечишда математик индукция методидан фойдаланмасдан бажариш мумкин. $10^n+10^{n-1}+...+1$ йиғинди q=10 махражли n+1 ҳадлардан иборат геометрик прогрессияни англатади. У ҳолда,

$$(10^n+10^{n-1}+...+1)(10^{n+1}+5)+1=\left(\frac{10^{n+1}-1}{10-1}\right)\cdot(10^{n+1}+5)+1=$$

$$=\frac{(10^{n+1})^2-10^{n+1}+5\cdot10^{n+1}-5+9}{9}=\frac{(10^{n+1})^2+2\cdot10^{n+1}\cdot2+2^2}{9}=\left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2$$

Ихтиёрий n натурал сон учун теорема исботланди.

1.5-§. ҚОНУНИЯТ ТОПИШНИ ЎРГАНИНГ.

Бирор сонли ифода берилган бўлиб, уни ҳисоблаганда чиқадиган натижа соннинг охирги рақамини топинг ёки ҳаддан ташқари кўп хонали, катта сонни бошқа бир сонга бўлгандаги қолдиқни топинг каби масалалар учраб туради. Бундай масалалар, одатда, турли математик мусобақаларда, олимпиадаларда, ўқувчидан топқирлик, ижодкорлик талаб қиладиган тадбирларда ишлатилади.

1-масала. 2^{2006} нинг охирги рақамини топинг.

Бу масалани ечишда қандай йўл тутишни биламиз. 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, кетма-кетликдан, 2 даражасининг охирги рақами 4 қадамдан сўнг такрорланиши ва охирги рақам 2, 4, 8, 6 дан бири бўлиши кераклиги келиб чиқади. Демак, 2006 ни 4 га бўлгандаги қолдиқ 2 га кўра жавоб 4 бўлади.

Барча математика ўқитувчилари, 2 ўрнида бошқа сон турганда ҳам масалани шу усулда ечиш кераклигини билишади ва иқтидорли ўқувчиларига ўргатиб боришади. Энди юқоридаги масалани бироз ўзгартирамиз.

2-масала. 2^{2006} нинг охирги икки рақамини топинг.

Бу масалани ечиш учун юқоридаги кетма-кетликни давом эттирамиз:

2^1=02, 2^2 =04, 2^3=08, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, 2^7=128, 2^8=256, 2^9=512, 2^{10}=1024, 2^{11}=2048, 2^{12}=4096, 2^{13}=8192.

Кўпайтириш тобора қийинлашиб, зерикарли бўлиб бормоқда. Бизга, қидирилаётган соннинг фақат охирги икки рақами зарур бўлгани учун, кейинги кўпайтиришларни натижа охиридаги икки хонали сон учун бажариш ва охирги икки хонасини қолдириш етарли:

2^{14}=...84, 2^{15}=...68, 2^{16}=...36, 2^{17}=...72, 2^{18}=...44, 2^{19}=...88, 2^{20}=...76, 2^{21}=...52, 2^{22}=...04, …

Сўнгги натижа, такрорланиш 20 қадамдан кейин рўй беришини кўрсатади. Буларни қуйидаги кўринишда жадвалга жойлаймиз.

2 нинг даражалари учун охирги икки рақам

1.1- жадвал

1	02	5	32	9	12	13	92	17	72
2	04	6	64	101	24	14	84	18	44
3	08	7	28	11	48	15	68	19	88
4	16	8	56	12	96	16	36	20	76

Шундай қилиб, 2^{2006} нинг охирги икки рақамини топиш учун 2006 ни 20 га бўлиб 6 қолдиқни аниқлаймиз ва 1.1-жадвалдан 6 га мос келган сон 64 ни топамиз. **Жавоб:** 64.

Жадвал тузилаётганда, агар 1-даража ва 2-даражага мос охирги икки рақам бир хил бўлмаса, у ҳолда 1-қолдиқ катагига 1-даражага мос келган сон ёзилади.

Демак, 21 нинг охирги икки рақамини топиш учун, n ни 20 га қолдиқли бўлиб (n=20q+r), r қолдиқ аниқланади ва 1.1-жадвалдан r га мос келган сон топилади.

3-масала. 2^{3941} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: 3941 ни 20 га қолдиқли бўламиз. Қолдиқ 19. Жадвалдан 19 га мос келган сон 88 ни топамиз. **Жавоб:** 88.

Юқоридаги жадвални ҳосил қилиш учун 2 нинг 22-даражасигача ҳисобладик. Умуман олганда бу жараён чексиз давом этиши мумкин-ку, деган савол туғилади. Шунинг учун жадвални тўлдиришдан олдин қанча элемент бор бўлиши кераклигини билиш муҳим.

Маълумки, 2-даражасининг охирги рақами 2, 4, 8, 6 лардан бири бўлиб, 4 қадамдан сўнг такрорланади. Улардан бири, масалан, 4 бўлган ҳол билан қуйидаги ишларни амалга оширамиз.

$04 \cdot 16 = 64$. Яъни, 2^2=04 ни, 4 рақам яна тўрт қадамдан кейин такрорлангани учун 2^4=16 га кўпайтирдик. $64 \cdot 16 = 1024$. Олдинги натижани яна 16 га кўпайтирдик. Бизга фақат охирги икки рақами зарур бўлгани учун кейинги кўпайтиришларни аввалги натижа охиридаги икки хонали сон билан бажариш етарли:

$24 \cdot 16 = 384$. $4)\, 84 \cdot 16 = 1344$. $5)\ 44 \cdot 16 = 704$.

Шу ерда бу жараённи тўхтатамиз, чунки 04 сони 5 қадамдан сўнг такрорланди.

Демак, 2 даражаси бўлган соннинг охирги рақами 4 хил эканлигидан ва уларнинг ҳар бири 5 қадамдан сўнг такрорлангани учун 2 нинг даражалари ичида, охирги икки рақам $4 \cdot 5 = 20$ қадамдан сўнг такрорланди. Шу сабабли, 1.1-жадвалда 20 та элемент бор.

Айтилганларни, қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$2^2 = 04, 2^2 \cdot 2^4 = 2^6 = 64, \quad 2^6 \cdot 2^4 = 2^{10} = \ldots 24,$

$2^{10} \cdot 2^4 = 2^{14} = \ldots 84, 2^{14} \cdot 2^4 = 2^{18} = \ldots 44, 2^{18} \cdot 2^4 = 2^{22} = \ldots 04.$

4-масала. 3^{2006} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Равшанки, 3 нинг даражаларида охирги рақам 3, 9, 7, 1 лардан бири бўлади. Худди 1-масаладаги каби мулоҳаза юритиб, яъни охирги икки рақамдан тузилган икки хонали сонни 3^4=81 (4 қадамдан кейин такрорланишни таъминлайдиган сон)га кўпайтириб, бунга ўхшаш масалаларни ечиш учун керакли бўлган 1.2-жадвални тузамиз.

3 нинг даражалари учун охирги икки рақам

1.2-жадвал

1	03	5	43	9	83	13	23	17	63
2	09	6	29	10	49	14	69	18	89
3	27	7	87	11	47	15	07	19	67
4	81	8	61	12	41	16	21	20	01

Энди 2006 ни 20 га қолдиқли бўлиб, 6 қолдиқни аниқлаймиз ва 1.2-жадвалдан 6 га мос келган сон 29 ни топамиз. **Жавоб:** 29.

Жадвалдан фойдаланиб қуйидагилар осон топилади:

$\mathbf{3^{2000} \Rightarrow 3^{20} \Rightarrow 01}, \quad \mathbf{3^{1999} \Rightarrow 3^{19} \Rightarrow 67}, \ \mathbf{3^{3333} \Rightarrow 3^{13} \Rightarrow 23}.$

5-масала. 4^{2016} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Бу соннинг охирги рақами 4 ёки 6 бўлганлиги сабабли, унинг охирги икки рақамини топиш учун керак бўладиган жадвал 10 та элементдан ташкил топади.

4 нинг даражалари учун охирги икки рақам

1.3-жадвал

1	04	3	64	5	24	7	84	9	44
2	16	4	56	6	96	8	36	10	76

Демак, 2006 ни 10 га қолдиқли бўлиб 6 қолдиқни аниқлаймиз ва 1.3-жадвалдан 6 га мос келган сон 96 ни топамиз. **Жавоб:** 96.

Жадвалдан фойдаланиб қуйидагилар осон топилади:

$\mathbf{4^{2000} \Rightarrow 4^{10} \Rightarrow 76}, \ \mathbf{4^{1999} \Rightarrow 4^{9} \Rightarrow 44}, \ \mathbf{4^{3333} \Rightarrow 4^{3} \Rightarrow 64}.$

6-масала. 5^{2005} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Бу масаланинг жавоби 25. Буни топиш ихтиёрий ўқувчининг қўлидан келади, чунки $5^2=25$, $5^3=125$, $5^4=625$ ни ҳисоблаб кўриш ҳеч бир қийинчилик туғдирмайди.

Хоҳловчилар бу масалани бироз ўзгартириб: 5^{2005} нинг охирги уч рақамини топинг, кўринишдаги масалани ечишга уриниб кўришлари мумкин.

7-масала. 6^{2005} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Равшанки, 6 нинг ҳар қандай даражаси 6 билан тугайди. Шу сабабли, унинг охиридаги икки хонали сонни текшириш етарли.

$6^1=06$, $6^2=36$, $6^3=216$, $6^4=...96$. $6^5=...76$, $6^6=...56$,$6^7=...36$.

Такрорланиш 5 қадамдан сўнг рўй беради. Демак, 76. **Жавоб:** 76.

Масала хулосасини қуйидаги жадвалга жойлаб қўямиз.

6 нинг даражалари учун охирги икки рақам

1.4-жадвал

1	06	2	36	3	16	4	96	5	76

Бу масала ҳам осон ечилгани учун уни бироз ўзгартириб: 6^{2005} нинг охирги уч рақамини топинг. кўринишдаги масалага келтириб, ечишга уриниб кўришни тавсия қиламиз.

1.4-жадвалдан фойдаланиб қуйидагилар осон топилади:

$6^{2000} \Rightarrow 6^5 \Rightarrow 76,\ 6^{1999} \Rightarrow 6^4 \Rightarrow\ 96,\ 6^{3333} \Rightarrow\ 6^3 \Rightarrow\ 16.$

8-масала. 7^{2005} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Ишни, аввалги масалалардаги каби 7 нинг даражалари қандай рақам билан тугашини аниқлашдан бошлаймиз.

7^1=07, 7^2=49, 7^3=343, 7^4=...01, 7^5=...07, 7^6=...49.

7 рақами 5-қадамда такрорланяпти. Бу кетма-кетликда, охирги икки рақам ҳам шу 4 қадам даврда такрорланаётганини кўриш қийин эмас. Демак, 2005 ни 4 га бўлгандаги қолдиқ 1 га мос келадиган сон 07. **Жавоб:** 07

7 нинг даражалари учун охирги икки рақами

1.5-жадвал

1	07	2	49	3	43	4	01

Масаланинг осон ечилиши уни мураккаблаштиришга асос беради: 7^{2005} нинг охирги уч рақамини топинг. 1.5-жадвалдан фойдаланиб қуйидагилар осон топилади.

$7^{2000} \Rightarrow 7^4 \Rightarrow 01,\ 7^{1999} \Rightarrow 7^3 \Rightarrow\ 43,\ 7^{3333} \Rightarrow\ 7^1 \Rightarrow\ 07.$

9-масала. 8^{2006} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Ҳеч бир қийинчиликсиз, 8 нинг даражалари бўлган сонда охирги рақам 8, 4, 2, 6 лардан бири бўлишини аниқлаймиз. Энди, 1-масаладаги каби мулоҳаза юритиб, яъни 84 нинг охирги икки рақами бўлган

96 га кўпайтириб, охирги икки рақам $4 \cdot 5 = 20$ қадамдан сўнг такрорланиши топилади. Олинган маълумотлар асосида 6- жадвални тузамиз.

8 нинг даражалари учун охирги икки рақам

1.6-жадвал

1	08	5	68	9	28	13	88	17	48
2	64	6	44	10	24	14	04	18	84
3	12	7	52	11	92	15	32	19	72
4	96	8	16	12	36	16	56	20	76

Яна бир бор 2006 ни 20 га бўлиб 6 қолдиқни аниқлаймиз. 1.6-жадвалда 6 га мос келган сон 44 бўлади. **Жавоб:** 44.

1.6-жадвалдан фойдаланиб қуйидагилар осон топилади:

$8^{2000} \Rightarrow 8^{\mathbf{20}} \Rightarrow 76,\ 8^{1999} \Rightarrow 8^{19} \Rightarrow\ 72,\ 8^{3333} \Rightarrow\ 8^{\mathbf{13}} \Rightarrow\ 88.$

10-масала. 9^{2007} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Кўпайтиришни бажариб, 9 нинг даражалари 9 ёки 1 билан тугашини топамиз. Шу сабабли, унинг охиридаги икки хонали 09 ёки 01 сондан бирини 9^2 га кўпайтириб текшириш етарли:

9^1=09, 9^3=729, 9^5=...49, 9^7=...69, 9^9=...89, 9^{11}=...09.

Такрорланиш 5 қадамдан сўнг рўй беряпти. Демак, давр $2 \cdot 5 = 10$ га тенг. 2007 ни 10 га бўлсак, қолдиқ 7. **Жавоб:** 69.

Бундай масалаларни ечишга ёрдам берадиган жадвал тузиб қўйиш фойдадан ҳоли эмас.

9 нинг даражалари учун охирги икки рақам

1.7-жадвал

1	09	3	29	5	49	7	69	9	89
2	81	4	61	6	41	8	21	10	01

1.7-жадвалдан фойдаланиб қуйидагилар осон топилади:

$9^{2000} \Rightarrow 9^{\mathbf{10}} \Rightarrow 01,\ 9^{1999} \Rightarrow 9^{9} \Rightarrow\ 89,\ 9^{3333} \Rightarrow\ 9^{\mathbf{3}} \Rightarrow\ 29.$

Мисоллар ечиш намуналари

11-мисол. 9^{19993} нинг охирги рақамини топинг.

Ечиш: 19993 ни 10 га бўлсак, қолдиқ 1.7-жадвалга кўра, жавоб 69.

12-мисол. $9^{7^{1999}}$ нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: Юқоридаги, жадвалга кўра 7^{1999} нинг охирги рақамини топиш етарли. Уни эса 5-жадвалдан топамиз: 1999 ни 4 га бўлсак, қолдиқ 3. Демак, 1.7-жадвалга кўра, 29. **Жавоб:** 29.

13-мисол. $6^{4^{2000}}$ нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: 1.4- жадвалга кўра, берилган соннинг охирги икки рақами, 4^{2000} ни 5 га бўлгандаги қолдиқ орқали топилади. Бу қолдиқ

$$4^{2\cdot 1000} = 16^{1000} = (15+1)^{1000}$$

муносабатга асосан 1 га тенг. **Жавоб:** 76.

14-мисол. 2^{77} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: 77 ни 20 га қолдиқли бўлиш керак. Бунинг учун 1.5-жадвалдан фойдаланамиз, чунки бизга керакли қолдиқ 77 нинг охирги икки рақамига боғлиқ (нега шундайлигини мулоҳаза қилиб кўринг). Бу сон 43, уни 20 га бўлсак, қолдиқ 3. Энди 1.2-жадвалдан жавоб аниқланади. **Жавоб:** 08.

15-мисол. 8^{667} нинг охирги икки рақамини топинг.

Ечиш: (4-жадвал) $\Rightarrow 8^{36}$ $(4-\text{жадвал}) \Rightarrow 8^{16} \Rightarrow 56$. **Жавоб:** 56

Мустақил ишлаш учун машқлар

Қуйидаги сонларнинг охирги икки рақамини топинг:

1. $2^{19^{99}}$, 2^{3941}, $2^{41^{41}}$, $2^{32944415}$.
2. $3^{19^{99}}$, 3^{3941}, $3^{41^{41}}$, $3^{32944415}$.
3. $4^{5^{1999}}$, 4^{3941}, 4^{2005}, $4^{412!}$
4. $6^{19^{99}}$, 6^{3941}, 6^{2005}, $6^{32944415}$.
5. $7^{19^{99}}$, 7^{3941}, $7^{41^{41}}$, $4^{412!}$

1.6-§. СОНЛАР КВАДРАТЛАРИ ВА КУБЛАРИ ЙИҒИНДИСИ ҲАҚИДА.

Кўпчилик, қуйидаги формулани яхши билади:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

Уни исботлашнинг турли усуллари мавжуд. Масалан, математик индукция усули билан ёки n+1 нинг куби ёйилмасидан фойдаланиб исботлаш усуллари кенг қўлланилади. Билмасангиз мустақил исботлашга ҳаракат қилинг.

Биз ҳозир, кўринишидан шу (1) йиғиндига жуда ўхшаш бошқа бир йиғиндини ҳисоблаш масаласини кўриб чиқамиз

1-масала. Ушбу алгебраик йиғиндини ҳисобланг:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^n\ n^2 \qquad (2)$$

Ечиш: Йиғиндининг охирги ҳади қандай ишора билан тугаши n нинг жуфт ёки тоқлигига боғлиқ: агар n жуфт бўлса, охирги ҳад олдида манфий ишора, агар n тоқ бўлса, охирги ҳад олдида мусбат ишора туради. Шунинг учун ҳар икки ҳолни алоҳида-алоҳида кўриб чиқишга тўғри келади.

Айтайлик, n тоқ яъни, $n=2k-1$ бўлсин. Демак, (2) йиғиндининг охирги ҳади мусбат ишорали бўлади. Биринчи ҳадини қолдириб, қолганларини жуфт-жуфти билан айириб ҳисоблаймиз:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ .\ .\ -(2k-2)^2+(2k-1)^2=1+(3^2-2^2)+(5^2-4^2)+\dots+((2k-1)^2-(2k-2)^2)=$$

$$=1+5+9+\dots+4k-3=\frac{1+4k-3}{2}\cdot k=k(2k-1)$$

Бу ерда биз, ҳосил бўлган 1, 5, 9, ..., 4k-3, ... арифметик прогрессиянинг дастлабки k та ҳади йиғиндисини топиш формуласидан фойдаландик.

б) Айтайлик, n жуфт яъни, n=2k бўлсин. У ҳолда (2) йиғиндининг охирги ҳади манфий ишорали бўлади. Дастлабки k таси учун, юқоридагидек а) ҳолни қўллаб топамиз:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ .\ .\ .(2k-1)^2-(2k)^2=k(2k-1)-(2k)^2=k(2k-1-4k)=-k(2k+1).$$

Масала шу билан ечилди деса ҳам бўлади. Аммо, бу икки ҳолни бирлаштириб битта формула кўринишда ёзиш, ечимга ўзига хос бир жозиба беради. Озгина фикрлаб қуйидагига эга бўламиз:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+ \dots +(-1)^n \cdot n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} \quad (3)$$

Охирги (3) тенгликни юқоридаги (1) муносабат билан солиштириб бир қанча қизиқарли формулалар ҳосил қилса бўлар экан.

Масалан, (1) ни ҳам, (3) ни ҳам $n = 2k$ бўлган ҳол учун ёзиб ва натижаларни қўшиб, дастлабки k та тоқ сонлар квадратлари йиғиндиси топилади:

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2k-1)^2=\frac{k(2k+1)(2k-1)}{3}. \quad (4)$$

Ҳақиқатдан, (1) га кўра n=2k бўлганда

$$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2k-1)^2+(2k)^2=\frac{k(2k+1)(4k-1)}{3} \quad (1`)$$

тенгликни, (3) га кўра n=2k бўлганда,

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(2k-1)^2-(2k)^2=-k(2k+1) \quad (3`)$$

тенгликни ёзамиз. Бу икки тенгликни қўшиб ва натижани 2 га бўлсак, (4) формула келиб чиқади. Олинган (4) тенглик дастлабки k та тоқ сонлар квадратлари йиғиндиси формуласи дейилади.

Худди шунингдек, (1) дан (3) ни айириб ва 2 га бўлиб,

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3} \quad (5)$$

дастлабки k та жуфт сонлар квадратлари йиғиндиси учун формула ҳосил қиламиз.

Шуниси қизиқарлики, (5) формулани бевосита (1) дан келтириб чиқариш ҳам мумкин экан. Ҳақиқатдан,

$$2^2+4^2+6^2+\cdots+(2k)^2=2^2(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2)=$$
$$=4\cdot\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

У ҳолда, (1) дан бу тенгликни айириб, (4) формула топилади.

Демак, (4) ва (5) формулаларни келтириб чиқариш учун 1-масала ечимидан фойдаланиш шарт эмас экан. Бу мулоҳазалардан эса 1-масалани ечишнинг 2-усули келиб чиқади:

(1) дан (5) ни ҳосил қиламиз ва улар ёрдамида (4) ни келтириб чиқарамиз. Сўнгра (4) дан (5) ни айирсак 1-масала ечилади. Юқоридаги, (3) формуланинг қуйидаги кўриниши аҳамиятли:

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^n\cdot n^2=(-1)^n\cdot 1(1+2+3+\ldots+n) \qquad (6)$$

Яъни, дастлабки n та натурал сон квадратларининг турли ишоралар билан олинган алгебраик йиғиндиси дастлабки n та натурал сон йиғиндисининг "+" (мусбат) ёки "-" (манфий) ишора билан олинганига тенг экан.

Бу ерда биз $\frac{n(n+1)}{2}=1+2+3+\cdots+n$ формуладан фойдаландик.

Яна бир маълум формулани эслатамиз:

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \qquad (7)$$

Шу формула билан боғлиқ қуйидаги масалани қараймиз, яъни (7) дан фойдаланиб, 1-масалани умумлаштириш мумкин экан.

2-масала. Ушбу йиғиндини ҳисобланг:

$$1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+(-1)^{n-1}n^3$$

Ечиш: Масаланинг берилиши худди 1-масалага ўхшайди. Йиғиндининг охирги ҳади қандай ишорада бўлиши n нинг жуфт ёки тоқлигига боғлиқ. Аммо, уни 1-масала каби ечиб бўлмайди, чунки 1-масалада $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ формуладан фойдаланиб арифметик прогрессия ҳосил қилган бўлсак, бу масалада $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ формула ёрдамида бирор қонуният топиш кўринмайди. Шунинг учун 1-масалани ечишнинг 2-усулини қўллаймиз.

Аввало, (7) дан фойдаланиб дастлабки k та жуфт сонлар кублари йиғиндиси формуласини ҳосил қиламиз:

$$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2k)^3=2^3\left(1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3\right)=8\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2=2k^2(k+1)^2.$$

Бу ҳосил қилинган формулани n=2k учун ёзилган (7) формуладан айириб, дастлабки k та тоқ сонлар кублари йиғиндиси формуласини топамиз:

$$k^2\,(2k+1)^2-2k^2(k+1)^2= k^2[(2k+1)^2-2(k+1)^2]=$$

$$k^2(4k^2+4k+1-2k^2-4k-2)=k^2(2k^2-1).$$

Демак, қуйидаги формулаларга эга бўлдик:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3= k^2(2k^2-1), \qquad (8)$$

$$2^3+4^3+6^3+\ldots+(2k)^3=2k^2(k+1)^2. \qquad (9)$$

Масалани ечиш учун асосий формулалар олинди.

Айтайлик, n=2k бўлсин:

У ҳолда, (8) тенгликдан (9) тенгликни айирамиз:

$$1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots+(2k-1)^3-(2k)^3=-k^2(4k+3).$$

Айтайлик, n=2k-1 бўлсин:

Охирги тенгликнинг ҳар икки томонига $(2k)^3$ ни қўшамиз:

$$1^3-2^3+3^3-4^3+\ldots-(2k-2)^3+(2k-1)^3=k^2(4k-1).$$

Худди 1-масаладагидек масала шу билан ечилди деса ҳам бўлади. Аммо, бу икки ҳолни бирлаштириб битта формула кўринишда ёзишга уринамиз. Бироз ҳаракат қилиб, 2-масала ечими учун

$$1^2-2^3+3^3-4^3+\cdots+(-1)^{n-1}n^3=(-1)^{n+1}\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)^2(2n+1+(-1)^n2)$$

муносабатни топамиз. Бу ерда $\left[\frac{n}{2}\right]$ ифода $\frac{n}{2}$ сонининг бутун қисми.

Биз, асосан, сонларнинг квадратлари ва кублари йиғиндиси билан боғлиқ формулаларга доир масалаларга тўхталдик. Аммо сонларнинг 3 дан катта даражалари йиғиндилари учун ҳам формулалар бор. Демак, юқоридаги ғояларни бу ҳоллар учун ҳам қўллаш мумкин.

Мустақил ишлаш учун машқлар

1. Ушбу йиғиндини ҳисобланг:

$$1^4-2^4+3^4-4^4+\cdots+(-1)^{n-1}n^4$$

Кўрсатма: $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ формуладан фойдаланинг.

2. Ушбу йиғиндини ҳисобланг.

$$1^5-2^5+3^5-4^5+\cdots+(-1)^{n-1}n^5$$

Кўрсатма: Буни ечишда

$$1^5-2^5+3^5+\cdots+n^5=\frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

формуладан фойдаланинг.

а) дастлабки k та тоқ сонлар 4-даражалари йиғиндиси;

б) дастлабки k та жуфт сонлар 4-даражалари йиғиндиси;

с) дастлабки к та тоқ сонлар 5-даражалари йиғиндиси;

д) дастлабки к та жуфт сонлар 5-даражалари йиғиндиси формуласини топинг.

Қуйидаги йиғиндиларни ҳисобланг:

$3^2+6^2+9^2+...+(3k)^2$;

$1^2+4^2+7^2+...+(3k-2)^2$;

$2^2+5^2+8^2+...+(3k-1)^2$;

$1^3-2^3+3^3-4^3+...+(-1)^{n-1}n^3$ йиғиндини $a^3-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$ формуладан фойдаланган ҳолда, бирор қонуният топиб ҳисобланг.

II. БОБ. ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИНГ ИСБОТЛАРИ

2.1-§. СОНЛИ ТЕНГСИЗЛИКЛАР ҲАҚИДА

1. Сонли тенгсизликлар ва уларнинг хоссалари.

Таъриф: Агар $a - b$ айирма мусбат сон бўлса, a сони b сонидан катта дейилади ва бу муносабат $a > b$ шаклида ёзилади. Агар $a - b$ айирма манфий бўлса, a сони b сонидан кичик дейилади ва $a < b$ шаклида ёзилади.

Исталган a ва b сонлар учун қуйидаги учта муносабатдан фақат биттаси ўринли:

1. $a-b > 0 \Leftrightarrow a > b$;
2. $a-b < 0 \Leftrightarrow a < b$;
3. $a-b = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Сонли тенгсизликлар қуйидаги хоссаларга эга:

1^0. Агар $a > b$ ва $b > c$ бўлса, $a > c$ бўлади (тенгсизлик муносабатини транзитивлик хоссаси).

2^0. Агар $a > b$ ва $c \in R$ бўлса, $a + c > b + c$ бўлади.

3^0. Агар $a > b$ ва $c > 0$ бўлса, $a \cdot c > b \cdot c$ бўлади.

4^0. Агар $a > b$ ва $c < 0$ бўлса, $a \cdot c < b \cdot c$ бўлади.

5^0. Агар $a > b$ ва $c > d$ бўлса, $a + c > b + d$ бўлади.

6^0. Агар $a > b > 0$ ва $c > d > 0$ бўлса, $a \cdot c > b \cdot d$ бўлади.

7^0. Агар $a > b > 0$ ва $n \in N$ бўлса, $a^n > b^n$ бўлади (n–тоқ сон бўлганда $b > 0$ шарт ортиқча).

Тенгсизликларни исботлашнинг усуллари ҳақида.

1–мисол. Исталган a, b ва c сонлари учун $2a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a(b+c)$ эканлигини исботланг.

Ечилиши. Исталган a, b ва c сонлари учун $(2a^2 + b^2 + c^2) - 2a(b + c)$ айирмани манфий эмаслигини кўрсатамиз:

$$(2a^2 + b^2 + c^2) - 2a(b + c) = (a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) =$$

$$= (a - b)^2 + (a - c)^2 .$$

Исталган соннинг квадрати номанфий сон бўлгани учун $(a-b)^2 \geq 0$ ва $(a-c)^2 \geq 0$. Демак, $(2a^2 + b^2 + c^2) - 2a(b+c)$ исталган a, b ва c сонлари учун манфий эмас. Шунинг учун берилган тенгсизлик исталган a, b ва c сонлари учун ўринли. Жумладан, тенглик белгиси $a = b = c$ бўлгандагина бажарилади. Δ

Тенгсизликнинг тўғрилигини кўрсатиш учун унинг ҳар иккала қисмининг айирмасини мусбат ёки манфийлигини аниқлаш, яъни 1-мисолдагидек таърифдан фойдаланиб исботлашга ҳаракат қилиш айрим ҳолларда жуда қийин бўлади. Шунинг учун тенгсизликларни исботлашда тенгсизликларнинг хоссаларидан фойдаланилади.

2-мисол. Мусбат a, b ва c сонлари учун $\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$ тенгсизликни исботланг.

Ечилиши: Тенгсизликнинг чап қисмида шакл алмаштириш бажариб, уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 6 \qquad (1)$$

Иккита мусбат сон учун ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматлар орасидаги Коши тенгсизлигидан фойдаланамиз:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}} = 2, \quad \frac{a}{c}+\frac{c}{a} \geq 2, \quad \frac{b}{c}+\frac{c}{b} \geq 2.$$

Бу тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб, (1) тенгсизликни ҳосил қиламиз.

2.2-§. ЎРТАЧА ҚИЙМАТЛАР ВА УЛАР ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

1. *Ўртача қийматлар.*

$a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ мусбат сонлар кетма-кетлиги учун *ўрта арифметик қиймат* $A(a) = A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, *ўрта геометрик қиймат*

$$G(a) = G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

ўрта квадратик қиймат $K(a) = K_n = \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$ ва *ўрта гармоник қиймат* $N(a) = N_n = \frac{n}{a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$ ларни аниқлаймиз.

Хусусан *x,y* мусбат сонлар учун бу ўрта қийматлар қуйидагича аниқланади:

$$A_2 = \frac{x+y}{2}; \quad G_n = \sqrt{xy}; \; K_2 = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}; \; N_2 = \frac{2xy}{x+y}.$$

2. Ўрта арифметик ва ўрта геометрик қийматлар ҳақида Коши тенгсизлиги ва унинг турли исботлари.

Теорема. $A_n \geq G_n$ ва $A_n = G_n$ тенглик фақат ва фақат $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ тенглик бўлганда ўринли.

1-Исботи. $x \geq 1$ да $e^{x-1} \geq x$ эканлиги маълум, $e^{x-1} = x$ тенглик эса фақат x=1 да бажарилади. Бундан:

$$1 = e^0 = exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A(a)} - 1\right) = \prod_{i=1}^{n} exp\left(\frac{a_i}{A(a)} - 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A(a)} = \left(\frac{G(a)}{A(a)}\right)^n$$

Демак, $A_n \geq G_n$ ва тенглик эса фақат $\frac{a_i}{A_n(a)} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n$ бўлганда бажарилади. Бундан эса $a_1=a_2=\ldots=a_n=A_n$ эканлиги келиб чиқади.

$A_n \geq G_n$ эканлигини исботлаймиз: $n = 2$ да $\sqrt{a_1 \cdot a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$. Бу тенгсизлик ихтиёрий мусбат a_1 ва a_2 сонлар учун ўринли бўлган $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ тенгсизликдан осон ҳосил қилинади. Берилган тенгсизликни ихтиёрий n та натурал сонлар учун тўғри деб, p+1 та натурал сонлар учун тўғрилигини исботлаймиз. Бу сонлар $a_1, a_2, \ldots, a_n, \; a_{n+1}$ бўлсин. a_{n+1} уларнинг орасида энг каттаси бўлсин. Яъни, $a_{n+1} \geq a_1, \ldots, a_{n+1} \geq a_n$. Шунинг учун $a_{n+1} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$A_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}, \; A_{n+1} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1} = \frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}.$$

$a_{n+1} \geq A_n$ бўлгани учун $a_{n+1} = A_n + \alpha$ деб ёзиш мумкин, бу ерда $\alpha \geq 0$.

У ҳолда, $A_{n+1}=\frac{n\cdot A_n+A_n+\alpha}{n+1}=A_n+\frac{\alpha}{n+1}$. Бу тенгликни иккала қисмини $(n+1)$ −даражага кўтариб, қуйидагини топамиз:

$$(A_{n+1})^{n+1}=\left(A_n+\frac{\alpha}{n+1}\right)^{n+1}=(A_n)^{n+1}+C_{n+1}^1(A_n)^n\frac{\alpha}{n+1}+\cdots\geq$$

$$\geq(A_n)^{n+1}+(A_n)^n\cdot\alpha=(A_n)^n\cdot A_n+\alpha=(A_n)^n\cdot \mathrm{A}_{n+1}$$

Фаразга кўра, $(A_n)^n\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n$. Буни эътиборга олиб,

$(A_{n+1})^{n+1}\geq(A_n)^n\cdot a_{n+1}\geq a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}$. Бундан

$$A_{n+1}\geq\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}$$

тенглик $a_1=a_2=\cdots=a_n$ бўлганда ўринли бўлади.

2-Исботи. Теореманинг исботи қуйидаги тасдиққа асосланган:

Агар номанфий $b_1, b_2, \ldots, b_n$ сонлар $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n=1$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда $b_1+b_2+\ldots+b_n\geq n$.

Бу тасдиқни масалани математик индукция усулида исботлаймиз.

n=1 да масала равшан.

n=k да $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_k=1$ тенгликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $b_1, b_2, \ldots, b_k$ – номанфий сонлар учун $b_1+b_2+\ldots+b_k\geq k$тенгсизлик ўринли бўлсин. $n=k+1$ да $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{k+1}=1$ тенгликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{k+1}$ – номанфий сонлар учун $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{k+1}\geq 1$ тенгсизликни қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Умумийликка зарар етказмасдан $b_k\leq 1\leq b_k+1$ деб ҳисоблаймиз. Унда $b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_{k-1}(b_k\cdot b_{k+1}=1)$ бўлгани учун индукция фаразига кўра $b_1+b_2+\ldots+b_{k-1}\cdot b_k\cdot b_{k+1}\geq k$ бўлади. Энди $b_k+b_{k+1}\geq b_k\cdot b_{k+1}-1$ эканлигини исботлаш етарли. Бу $(1+b_k)\cdot(b_{k+1}-1)\geq 0$ тенгсизликка тенг кучли $b_k\leq 1\leq b_k+1$ бўлгани учун охирги тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади.

3-Исботи. Теореманинг исботи қуйидаги маълум тасдиққа асосланган: $x\geq 1$ да $e^{x-1}\geq x$, шу билан бирга $e^{x-1}=x$ тенглик эса фақат x=1 да бажарилади.

Бундан:

$$1 = e^0 = exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A(a)} - 1\right) = \prod_{i=1}^{n} exp\left(\frac{a_i}{A(a)} - 1\right) \geq \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A(a)} = \left(\frac{G(a)}{A(a)}\right)^n.$$

Демак, $A(a) \geq G(a)$ ва тенглик эса фақат $\frac{a_i}{A(a)} = 1, i = 1,2,\dots,n$ бўлганда бажарилади. Бундан эса $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \mathrm{A(a)}$ эканлиги келиб чиқади.

1-мисол. $x, y > 0$ бўлса, $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ тенгсизликни исботланг.

Ечилиши:

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = x^2 + y^2 + 1$$

$$+\begin{cases} \frac{x^2}{2} + + \frac{y^2}{2} \geq xy \\ \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} \geq y, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \geq x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

2-мисол. $x > 0$ бўлса, $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$ тенгсизликни исботланг.

Ечилиши:

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[12]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}} = 2 \cdot 2^{x^{\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}} = 2 \cdot 2^{x^{\frac{1}{6}}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

3. Ўрта геометрик ва ўрта гармоник қийматлар орасидаги тенгсизлик.

Теорема. $G(a) \geq H(a)$ эканлигини, жумладан, $H(a) = G(a)$ тенглик фақат ва фақат $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ шарт бажарилса тўғрилигини исботланг.

Исботи. Коши тенгсизлигидан фойдаланиб (1-мисолга қаранг),

$$\left(H(a)\right)^{-1} = \frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \cdots + a_n^{-1}}{n} \geq \sqrt[n]{a_1^{-1} a_2^{-1} \ldots a_n^{-1}} = \left(G(a)\right)^{-1}$$

тенгликка эга бўламиз. Жумладан, $H(a) = G(a)$ тенглик фақат $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ да бажарилади.

3-мисол. Агар *a, b, c* – сонлар учбурчак томонлари бўлиб, *p*-учбурчакнинг ярим периметри бўлса, $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исботи. Агар $x \geq 0, y \geq 0,$ бўлса, Коши тенгсизлигига кўра, $2\sqrt{xy} \leq x+y$ тенгсизлик ўринли бўлади. Тенглик шарти $x=y$ да бажарилади. Шу тенгсизликдан фойдаланамиз.

$$(p-a)(p-b)(p-c) =$$

$$= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)} \cdot 2\sqrt{(p-b)(p-c)} \cdot 2\sqrt{(p-c)(p-a)}}{8} \leq$$

$$\leq \frac{(p-a+p-b)(p-b+p-c)(p-c+p-a)}{8} =$$

$$= \frac{(2p-a-b)(2p-b-c)(2p-c-a)}{8} = \frac{abc}{8}$$

Тенглик шарти $p-a=p-b=p-c$, яъни $a=b=c$ бўлганда бажарилади.

4-мисол. Ихтиёрий учбурчак учун $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ бўлишини исботланг. Бунда *a*, *b*, *c* учбурчак томонлари, *S* - эса учбурчак юзаси.

Исботи. Белгилаш киритамиз:$x=p-a,\ y=p-b, z=p-c.$

Коши тенгсизлигига кўра $\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \leq \frac{x+y+z}{3}$. Бундан

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}.$$

Яъни, $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{p^3}{27}$ тенгсизликка эга бўламиз. Герон формуласига кўра, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \sqrt{p \cdot \frac{p^3}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}} =$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}{12\sqrt{3}}$$

тенгсизликка кўра $2ab \leq a^2+b^2; 2bc \leq b^2+c^2; 2ac \leq a^2+c^2;$

Шунинг учун

$$S \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$$

Демак, $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ тенглик шарти $a=b=c$ бўлганда бажарилади.

5-мисол. Агар $a_1>0, a_2>0, a_3>0, \dots a_n>0$ бўлса,

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

бўлишини исботланг.

Исбот. Коши тенгсизлигига кўра, $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}$$

шунинг учун

$$(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right) \geq$$

$$\geq n\cdot\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\cdot n\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}} = n^2$$

Демак, $(a_1+a_2+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.

Тенглик шарти $a_1=a_2=\dots=a_n$ ҳолатда ўринли бўлади.

6-мисол. Агар a, b, c - ихтиёрий номанфий сонлар бўлиб йиғиндиси 3 га тенг бўлса, у ҳолда $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq a\cdot b+b\cdot c+c\cdot a$ тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исботи.

$$a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) = (a^2+2\sqrt{a})+(b^2+2\sqrt{b})+(c^2+2\sqrt{c}) =$$

$$= (a^2+\sqrt{a}+\sqrt{a})+(b^2+\sqrt{b}+\sqrt{b})+(c^2+\sqrt{c}+\sqrt{c}) \geq$$

$$\geq 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}\sqrt{a}}+3\sqrt[3]{b^2b\sqrt{b}}+3\sqrt[3]{c^2\sqrt{c}\sqrt{c}} =$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

$$a^2+b^2+c^2+2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

$$\Rightarrow 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}) \geq 2(ab+bc+ac) \Rightarrow \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \geq ab+bc+ac$$

Тенглик шарти $a=b=c$ бўлганда бажарилади.

7-мисол. Агар $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ бўлса, ушбу

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

тенгсизликни исботланг.

Исботи.

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{1}{2}\left(a^3 + abc + b^3 + abc + c^3 + abc + (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{a^3abc} + 2\sqrt{b^3abc} + 2\sqrt{c^3abc} + 3\sqrt{a^3b^3c^3} - 3abc\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a^2\sqrt{bc} + 2b^2\sqrt{ac} + 2c^2\sqrt{ab}\right) =$$

$$= a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$$

Демак, $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{bc} + b^2\sqrt{ac} + c^2\sqrt{ab}$

Тенглик шарти $a = b = c$ да бажарилади.

8-мисол. Агар R, r -мос равишда ABC учбурчакка ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари бўлса, у ҳолда $R \geq 2r$ бўлишини исботланг.

Исботи. Айтайлик, ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c бўлсин. 1-мисолга кўра $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ тенгсизлик ўринли. Герон формуласидан $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ бундан,

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p \cdot \frac{abc}{8} \Rightarrow$$

$$S \cdot S \leq p \cdot \frac{abc}{8} \Rightarrow \frac{abc}{4R} \cdot p \cdot r \leq p \cdot \frac{abc}{8} \Rightarrow R \geq 2$$

тенглик шарти $a = b = c$ бўлганда бажарилади.

9-мисол. Агар a, b, c -учбурчак томонлари, S - эса унинг юзаси бўлса,

$$(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-a)(p-c) \geq \sqrt{3}S \qquad (3.1)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Исботи. Белгилаш киритамиз: $p - a = x,\ p - b = y,\ p - c = z$. Бундан $x + y + z = p$ тенглик келиб чиқади. Герон формуласига кўра (3.1) тенгсизлик

$$xy + yz + zx \geq \sqrt{3(xyz)(x+y+z)} \qquad (3.2)$$

кўринишга ўтади. (3.2) тенгсизликни ҳар иккала томони квадратга оширамиз.

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 + 2xzy^2 + 2xyz^2 + 2yzx^2 \geq 3x^2yz + 3xzy^2 + 3xyz^2$$

$$\Rightarrow (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \geq x^2yz + xzy^2 + xyz^2$$

Шу тенгсизликни ўринли бўлишини кўрсатамиз.

$$(xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 = \frac{1}{2}\left((x^2y^2 + y^2z^2) + (y^2z^2 + z^2x^2) + (z^2x^2 + x^2y^2)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x^2z^2y^4} + 2\sqrt{y^2x^2z^4} + 2\sqrt{z^2y^2x^4}\right) =$$

$$= xzy^2 + yxz^2 + zyx^2 = x^2yz + y^2xz + z^2yx$$

Тенглик шарти $x = y = z$ ҳолатда бажарилади.

Демак, $(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-a)(p-c) \geq \sqrt{3}S$ тенгсизлик ўринли. Тенглик шарти $a = b = c$ бўлганда бажарилади.

10-мисол. Учбурчакнинг юзи S , ташқи ва ички чизилган айланалар радиуслари мос равишда R, r - бўлса,

$$S \geq \sqrt{\frac{27}{2}R \cdot r^3}$$

тенгсизликни исботланг.

Исбот. Айтайлик учбурчакнинг томонлари a, b, c бўлсин. У ҳолда, учта сон учун Коши тенгсизлигига кўра $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$ тенгсизлик ўринли. Юзани ҳисоблаш формуласидан,

$$S = \frac{abc}{4R} \leq \frac{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3}{4R} = \frac{8p^3}{27 \cdot 4R} = \frac{2}{27R} \cdot \left(\frac{S}{r}\right)^3$$

Бундан, $S^2 \geq \frac{27}{2}R \cdot r^3$, яъни $S \geq \sqrt{\frac{27}{2}R \cdot r^3}$ тенгсизлик келиб чиқади.

Тенглик шарти $a = b = c$ да бажарилади.

11-мисол. Агар $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса,

$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ тенгсизликни

исботланг.

Исбот. Иккита сон учун Коши тенгсизлигига кўра,

$$2\sqrt{a}\sqrt{b+c} < a+b+c, \qquad 2\sqrt{b}\sqrt{a+c} < a+b+c,$$
$$2\sqrt{c}\sqrt{b+c} < a+b+c.$$

Шу тенгсизликлардан фойдаланамиз.

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} =$$

$$= \frac{2a}{2\sqrt{a}\sqrt{b+c}} + \frac{2b}{2\sqrt{b}\sqrt{a+c}} > \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2$$

Демак, $\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$ тенгсизлик ўринли.

12-мисол. Агар $a, b, c -$ учбурчак томонлари, R-ташқи чизилган айлананинг радиуси бўлса, $R \geq \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$ тенгсизликни исботланг.

Исбот. Юқоридаги 1-мисолга кўра, $(p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$ тенгсизлик ўринли шунинг учун,

$$R = \frac{abc}{4S} = \sqrt{\frac{(abc)^2}{16 \cdot p(p-a)(p-b)(p-c)}} \geq \sqrt{\frac{(abc)^2}{16 \cdot p \cdot \frac{abc}{8}}} = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}.$$

Демак, $R \geq \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$ тенгсизлик ўринли. Тенглик шарти $a = b = c$ бўлганда бажарилади.

2.3-§. ФУНКЦИЯНИНГ ХОССАЛАРИ ЁРДАМИДА ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ИСБОТЛАШ УСУЛЛАРИ

1. Функциянинг монотонлик хоссаси ёрдамида исботланадиган тенгсизликлар

Таъриф. *f(x)* функция *(a;b)* ораликда аниқланган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_1 \le x_2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $x_1, x_2 \in (a,b)$ нуқталар учун
$f(x_1) \le f(x_2)$; $(f(x_1) \ge f(x_2))$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда *f* функция *(a,b)* ораликда *ўсувчи (камаювчи)* функция дейилади, *(a,b)* оралиқ эса *монотонлик оралиғи* деб юритилади.

Таъриф. *f(x)* функция *(a;b)* интервалда аниқланган бўлсин. Агар ихтиёрий $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $x_1, x_2 \in (a,b)$ нуқталар учун $f(x_1) < f(x_2)$; $(f(x_1) > f(x_2))$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда *f* функция *(a,b)* ораликда қатъий *ўсувчи (камаювчи) функция* дейилади.

Теорема. *f(x)* функция *(a;b)* ораликда аниқланган ва дифференциалланувчи бўлсин. *f(x)* функция *(a;b)* интервалда ўсувчи (камаювчи) бўлиши учун шу интервалда $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ тенгсизлик бажарилиши зарур ва етарли. Агар *(a;b)* интервалда $f'(x)>0$ $(f'(x)< 0)$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда *f(x)* функция *(a;b)* интервалда қатъий ўсувчи (камаювчи) бўлади.

1-масала. e^{π} ва π^{e} сонларни таққосланг.

Ечилиши. $f: [e;+\infty) \to R,\ f(x) = \frac{\ln x}{x}$ функцияни қараймиз.

Унинг ҳосиласи барча x, $x\in(e;+\infty)$ ларда $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ манфий қиймат қабул қилади ва *f(x)* функция $[e;+\infty)$ да узлуксиз, шундай қилиб, f $[e;+\infty)$ да қатъий камаяди. Бу ердан, $e < \pi$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$f(e) > f(\pi) \Rightarrow \frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi$$

ни оламиз. Демак, $e^{\pi} > \pi^{e}$

2-масала. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},\ n = 1, 2, \ldots$сонли кетма-кетликни чегараланганликка текширинг.

Ечилиши. Дастлаб,

$$\ln(1+x) \le x, \quad (x \ge 0) \tag{3.3}$$

тенгсизликни исботлаймиз. Бунинг учун $f : [0; +\infty) \to R$; $f(x) = x - \ln(1+x)$ функцияни қараймиз. f функция аниқланиш соҳасида узлуксиз ва барча x, $x \in (0; +\infty)$ лар учун $f'(x) = \frac{x}{x+1}$ тенглик ўринли, бу ердан $f'(x) > 0$, $(x \in (0; +\infty))$ эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб f функция $D(f)$ аниқланиш соҳасида қатъий ўсади ва демак, $f(x) \ge f(0)$ $(x \ge 0)$ дан (3.3) тенгсизликнинг тўғрилиги келиб чиқади. (3.3) тенгсизликдан $x = \frac{1}{n}$ деб олиб,

$(n=1,2,\ldots)$, $ln(1+\frac{1}{n}) \le \frac{1}{n}$ $(n=1,2,\ldots)$, ёки $ln(n+1) - lnn \le \frac{1}{n}$, $(n=1, 2, \ldots)$ (3.4)

ни ҳосил қиламиз. (3.4) тенгсизликдан

$$ln2 - ln1 \le 1,\ ln\,3 - ln\,2 \le \frac{1}{2}, \ldots, ln\,(n+1) - ln\,n \le \frac{1}{n} \tag{3.5}$$

келиб чиқади. (3.5) тенгсизликларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$ln\,(n+1) \le 1 + \ldots + \frac{1}{n}$$

тенгсизликка эришамиз.

Демак, $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},\ n = 1, 2,$ сонли кетма-кетлик чегараланмаган.

3-масала (Бернулли тенгсизлиги). Ихтиёрий $x > -1;\ \alpha > 1$ учун

$$(1 + x)\alpha \ge 1 + \alpha x, \tag{3.6}$$

тенгсизлик ўринли, шу билан бирга тенглик фақат $x = 0$ да ўринли.

Ечилиши. $f(x) = (1 + x)^{\alpha} - 1 - \alpha x, \quad (x \in [-1; +\infty))$ функцияни қараймиз, бу ерда α – фиксирланган 1 дан катта сон. Бу функциянинг ҳосиласини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha\left((1+x)^{\alpha-1} - 1\right) \quad (x > -1).$$

$\alpha > 1$ шартдан, $x \in (-1;\ 0)$ учун $f\,'(x) < 0$ ва $x \in (0;\ +\infty)$ учун $f\,'(x) > 0$ эканлиги келиб чиқади. Демак, f функция $[-1;\ 0]$ да камаяди ва $[0;\ +\infty)$ да ўсади. Бундан барча $x \in [-1;+\infty)\backslash\{0\}$ лар учун $f(x) > f(0)$ тенгсизлик ўринли, яъни, $(1+x)^{\alpha} - 1 - \alpha x > 1 - 1$ *ва* $(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x$

$(x \in [-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty), \alpha > 1)$ деб хулоса қиламиз.

$(1+x)^{\alpha} > 1+\alpha x$ тенглик $x = 0$ да бажарилишини эслатиб ўтиш лозим.

Изоҳ.

$$(1+x)^{\alpha} \le 1+\alpha x \quad (x \ge -1;\ 0 < \alpha < 1),$$

$$(1+x)^{\alpha} \ge 1+\alpha x \quad (x \ge -1;\ \alpha < 0).$$

тенгсизликлар шунга ўхшаш исботланади.

4-масала. (Юнг тенгсизлиги). Агар $p, q \in \boldsymbol{R}\backslash\{0, 1\}$ сонлар тенгликни $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ қаноатлантирса, у ҳолда ихтиёрий a, b мусбат сонлар учун

$$\frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{q}b^{q} \ge ab \quad (p > 1) \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{q}b^{q} \le ab \quad (p < 1) \tag{3.8}$$

тенгсизликлар бажарилади. Бундан ташқари, тенглик бажарилади фақат ва фақат шу ҳолдаки, қачонки $a^{p} = b^{q}$ бўлса.

Ечилиши. $p > 1$ ҳолни қараймиз. Ихтиёрий мусбат a сонни фиксирлаб, $f:\ (0,+\infty) \to R;\quad f(b) = \frac{1}{p}a^{p} + \frac{1}{q}b^{q} - ab$ функцияни аниқлаймиз.

Бу функциянинг ҳосиласи $f\,'(b) = b^{q-1} - a$ га тенг. Элементар ҳисоблашлар ёрдамида $a^{\frac{1}{q-1}}$, нуқтада f функция ўзининг энг кичик қийматига эришишини кўриш мумкин, яъни

$$f(b) > f(a^{\frac{1}{q-1}}), b > 0. \tag{3.9}$$

кўрсатилади. (3.9) тенгсизликдан $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ эканлигини ҳисобга олиб,

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q-ab \qquad (a>0,\ b>0;\ p>1)$$

олинади ва (3.7) тенгсизлик исботланади. (3.9) дан тенглик $b=a^{\frac{1}{q-1}}$, яъни $a^p=b^q$ ҳолда ўринли эканлиги келиб чиқади. (3.8) тенгсизлик ҳам шунга ўхшаш исботланади.

5-масала.

$$|sinx| \le |x| \qquad (x\in \boldsymbol{R}) \tag{3.10}$$

тенгсизликни исботланг

Ечилиши. Иккала қисмнинг жуфтлигидан $x\ge 0$ ҳолни қараш ва. бундан ташқари, $|\sin x|\le 1$ эканлигидан $0\le x\le 1$ ҳолни ўрганиш етарли. Шу мақсадда $f:[0;1]\to R,$ $f(x)=x-sinx$ функцияни қараймиз.

f функциянинг ҳосиласи $f'(x)=1-cosx \quad (x\in[0;1])$.

Косинуснинг чегараланганлигидан $(|cosx|\le 1;\ x\in R)$ $f'(x)\ge 0$ деб хулосалаймиз. Бу ердан f функция ўзининг аниқланиш соҳасида монотон ўсувчи бўлиши келиб чиқади ва шунинг учун

$f(x)\ge f(0) \quad (x\in[0;1])$ ёки $x-sinx\ge 0, \quad (x\in[0;1])$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу ердан эса берилган тенгсизлик келиб чиқади.

6-масала. Агар $a>b>c$ бўлса, у ҳолда,

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)>0$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Ечилиши. Айтайлик, $a=b+t$ бўлсин, у ҳолда,

$$f(t)=(b+t)^2(b-c)+b^2(c-(b+t))+c^2((b+t)-b)$$

кўринишдаги $f:[0;+\infty)\to R$ функцияни қараймиз, бу ерда a, b, c лар $a>b>c$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳақиқий параметрлар.

f функциянинг $[0;+\infty)$ да қатъий ўсувчи бўлиши аввалги масалалардагидек исботланади ва шундай қилиб

$f(a-b)>f(0)$

тенгсизлик ўринли. Охирги тенгсизлик берилган тенгсизликка тенг кучли.

2.4-§. ФУНКЦИЯНИНГ ҚАВАРИҚЛИК ХОССАСИ ЁРДАМИДА ИСБОТЛАНАДИГАН ТЕНГСИЗЛИКЛАР

$(a;b)$ – ҳақиқий сонлар ўқидаги оралиқ берилган бўлсин.

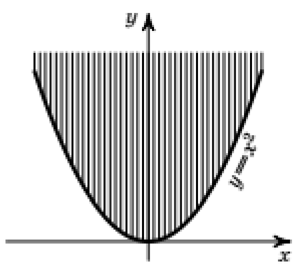
Таъриф: $y = f(x)$ - функция $(a;b)$ да қуйидан қавариқ дейилади, агар барча $x_1, x_2 \in (a;b)$ шундай $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$ ва $m_1 + m_2 = 1$ шартларни қаноатлантирувчи m_1, m_2 сонлар учун

$$f(m_1x_1 + m_2x_2) \leq m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) \qquad (3.11)$$

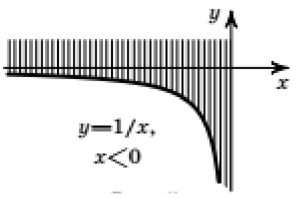
тенгсизлик ўринли бўлса.

Ботиқ функциянинг таърифи эса юқорида келтирилган (3.11) тенгсизлик белгисини қарама-қаршисига алмаштиришдан олинади.

Мисол 1: $y = x^2$ - функция барча сонлар ўқида қавариқ.



Мисол 2: $y = \dfrac{1}{x}$ - функция ярим тўғри чизиқда $x < 0$ - ботиқ.



Эслатма: Бизнинг таърифимизга кўра қавариқ бўлган функция, шунингдек, пастга қараб қавариқ, ботиққа эга бўлган функция юқорига кўтарилган деб ҳам аталади. Бундай номлар уларга XIX асрда берилган ва ҳозир фақат математик доираларда ва университет курсларида улар аксинча дейилади: пастга қараб қавариқ функцияси - ботиқ, юқорига қараб қавариқ - қавариқ.

Енсен тенгсизлиги. $y = f(x)$ – қуйидан (юқоридан) қаварик функция бўлсин. У ҳолда барча $x_j \in (a;b)$ $(j = 1,...,n)$ лар ва $m_1 + m_2 + ... + m_n = 1$ тенгликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $m_j \geq 0,\ j = (1, 2, ..., n)$ сонлар учун

$$f(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n) \leq m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + ... + m_nf(x_n)$$

$$f(m_1x_1 + m_2x_2 + ... + m_nx_n) \geq m_1f(x_1) + m_2f(x_2) + ... + m_nf(x_n)$$

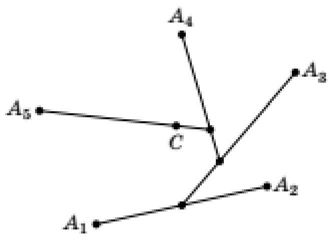
тенгсизлик ўринли.

Исбот: $y = f(x)$ функциянинг графигида абсциссалари $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ бўлган $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ нуқталарни қараймиз. Бу нуқталарда $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$ массали юкларни жойлаштирамиз. Бу нуқталар массалари маркази

$$\left(\frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n};\ \frac{m_1f(x_2) + m_2f(x_2) + \cdots + m_nf(x_n)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\right)$$

$A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ нуқталар қаварик функциянинг графиги устида ётганлигидан, уларнинг массалар маркази ҳам график устида ётади. Бу эса массалар маркази M нинг ординатаси шу абсциссага эга бўлган нуқтанинг ординатасидан кичик эмаслигини билдиради, яъни (3.1-расм.),

$$f\left(\frac{m_1x_1 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}\right) \leq \frac{m_1f(x_1) + \cdots m_nf(x_n)}{m_1 + \cdots + m_n}. \qquad (3.12)$$



3.1-расм.

Исботни тугатиш учун $m_1 = a_1,\ \ldots,\ m_n = a_n$ деб олиш қолмоқда. Бироқ, иккита муҳим изоҳ мавжуд. Биринчидан, Енсеннинг (3.11) тенгсизлигини исботлаш жараёнида биз (3.12) тенгсизликни исботладик. Аслида бу тенгсизликлар тенг кучли. (3.11) тенгсизликда

$$a_i = \frac{m_1}{m_1 + \cdots + m_n} \quad (i = 1,2, \ldots, n)$$

деб олиб, биз (3.12) тенгсизликни оламиз. Шунинг учун табиий равишда бу тенгсизликлар Енсен тенгсизликлари деб аталади. (3.11) тенгсизлик анча ихчам кўринади, бироқ тадбиқ қилиш учун (3.12) тенгсизликдан фойдаланиш қулайроқ. Иккинчидан, агар $f(x)$ функция қаварик бўлса, у ҳолда унинг учун (3.11) ва (3.12) Енсен тенгсизликларининг ишоралари қарама-қаршисига ўзгаради. Буни исботлаш учун $-f(x)$ қаварик функцияни қараш етарли.

Теорема. $(a;b)$ оралиқда узлуксиз ва иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлган $f:(a;b)\to R$ функция шу интервалда қуйидан (юқоридан) қаварик бўлиши учун $(a;b)$ да $f''(x)\geq 0$ $(f''(x)\leq 0)$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

XIX асрда яратилган яна бир тенгсизлик – бу Коши Буняковский тенгсизлигидир. У қуйида кўринишга эга:

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\leq n\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right) \qquad (3.13)$$

Енсен тенгсизлиги ёрдамида исботланади. Бунинг учун, $y=x^2$ - қаварик функцияни қарайдиган бўлсак, Енсен тенгсизлигини ёзиб оламиз. Ва $m_1=m_2=\ldots=m_n=\frac{1}{n}$;

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\leq\frac{\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)}{n}.$$

Хар икки томонни n^2 га кўпайтириб олсак, (3.13) тенгсизликка келамиз.

Коши – Биняковский тенгсизлиги Енсен тенгсизлигининг хоссаси ҳисобланади.

3-масала (Ўрта қийматлар ҳақидаги Коши тенгсизлиги). Ихтиёрий номанфий $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сонлар учун

$$\sqrt[n]{a_1,a_2,\ldots,a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \qquad (3.14)$$

тенгсизлик ўринли, яъни ўрта геометрик қиймат ўрта арифметик қийматдан катта эмас.

Ечилиши. Агар a_j сонлардан бири 0 га тенг бўлса, у ҳолда (3.14) тенгсизликнинг бажарилиши маълум, шунинг учун барча a_j сонлар мусбат сонлар деб ҳисоблаймиз.

$f(x) = \ln x$ ($x > 0$) функцияни қараймиз. f функция $(0; +\infty)$ да юқоридан қаварик эканлиги аниқ. Енсен тенгсизлигига асосланиб,

$$\ln\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}a_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_i$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

4-масала. $x_1, \ldots, x_n$ – номанфий сонлар бўлсин.

$$f:[0,+\infty)\to R;\ f(\alpha)=\left(\frac{x_1^{\alpha}+\ldots+x_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

функция монотон ўсувчи эканлигини исботланг.

Ечилиши. $0 < \alpha < \beta$ бўлсин. $h(x)=x^{\frac{\beta}{\alpha}}, x\geq 0$ функцияни қараймиз. $h''(x)=\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)x^{\frac{\beta}{\alpha}}>0$ ($x > 0$), шундай қилиб h функция $[0; +\infty)$ да қуйидан қаварик. Енсен тенгсизлигига кўра

$$h\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\alpha}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}h\left(x_i^{\alpha}\right) \text{ ёки } \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i^{\beta},$$

бу ердан $f(\alpha) \leq f(\beta)$ тенгсизлик келиб чиқади.

5-масала. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$ тенгсизликни исботланг, бу ерда α, β, γ - бирор учбурчакнинг ички бурчаклари.

Ечилиши. $f: [0; \pi] \to R;\ f(x) = \sin x$ функцияни қараймиз. $x \in (0; \pi)$ лар учун $f''(x) = -\sin x$ *va* $f''(x) < 0$, шунинг учун f функция $[0; \pi]$ да юқоридан қаварик. Енсен тенгсизлигига кўра

$$f\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}\right)\geq\frac{f(\alpha)}{3}+\frac{f(\beta)}{3}+\frac{f(\gamma)}{3} \text{ ёки } \sin\frac{\pi}{3}\geq\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

бу ердан $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ни оламиз.

6-масала. (Гюйгенс тенгсизлиги). Ихтиёрий номанфий a_j ($j = 1,\ldots,n$) сонлар учун

$$(1+a_1)\ldots(1+a_n)\geq(1+\sqrt[n]{(a_1\ldots a_n})^n$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Ечилиши. $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $f(x) = ln(1 + e^x)$ функцияни қараймиз. Барча $x \in \mathrm{R}$ лар учун $f''(x) > 0$ ўринли. Шундай қилиб, функция юқоридан қаварик. Енсен тенгсизлигига кўра,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_i\right) \le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}f(\ln a_i) \Leftrightarrow \ln\left(1 + exp\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\ln a_i\right) \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}(1 + a_i)$$

$$\Leftrightarrow \ln\big((1 + a_i)\dots(1 + a_n)\big) \ge n\ln\big(1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}\big)^n \Leftrightarrow (1 + a_i)\dots(1 + a_n) \ge \big(1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}\big)^n$$

ни оламиз.

2.5 -§. ТРАНС-ТЕНГСИЗЛИК ВА УНИНГ ТАДБИҚЛАРИ

ТРАНС-ТЕНГСИЗЛИК ҲАҚИДА

Транс-тенгсизлик. Агар $x_1 \ge x_2 \ge \dots \ge x_n$, $y_1 \ge y_2 \ge \dots \ge y_n$ ва $\{i_1,\dots,i_n\}=\{1,\dots,n\}$ бўлсин, у ҳолда

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \ge x_1y_{i_1} + \dots + x_ny_{i_n} \ge x_1y_n + \dots + x_ny_1. \tag{3.15}$$

қўштенгсизлик ўринли.

Исбот-1. Математик индукция таърифига кўра, $x_1y_1 + x_2y_2 \ge x_1y_2 + x_2y_1 \Leftrightarrow x_1(y_1 - y_2) \ge x_2(y_1 - y_2)$. Энди $n=k$ деб фараз қилиб, $n=k+1$ да исботлаймиз. Агар $y_{i_1} = y_1$ бўлса, индукция фаразимизга кўра тўғри. Агар $y_{i_1} \ne y_1$ бўлганда, уларнинг ўрнини алмаштирамиз. У ҳолда, (3.14) $x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \ge x_1y_{i_1} + \dots + x_ny_{i_n} \ge x_1y_n + \dots + x_ny_1$. тенгсизлик бажарилади.

Исбот-2 $i_k = 1$. да

$$x_1y_1 + \dots + x_ny_n \ge x_1y_n + \dots + x_ny_1$$

ни талабаларга мустақил топширилади. (математик индукция базасидан фойдаланиш асносида)

Изоҳ. Хорижий адабиётларда (3.14) қўш тенгсизлик “rearrangement inequality” деб юритилади. Қизиғи шундаки, ҳозиргача (3.14) қўштенгсизлик хаттоки рус тилида аниқ номга эга эмас. Уни номлаш учун “транс-тенгсизлик” терминини қўллаш муаллифлардан бирига Халқаро математика олимпиадаларида иштирок этувчи Россия ўқувчилари терма жамоасининг илмий раҳбари доцент Н. Агаханов таклиф қилди.

Таъриф. (a_1, a_2, a_3) ва (b_1, b_2, b_3) учликлар *бир хил тартибланган* дейилади, агар (a_1, a_2, a_3) ва (b_1, b_2, b_3) кетма-кетликлардан иккаласи камаймайдиган (яъни $a_1 \le a_2 \le a_3$ ва $b_1 \le b_2 \le b_3$), ёки иккаласи ортмайдиган (яъни $a_1 \ge a_2 \ge a_3$ ва $b_1 \ge b_2 \ge b_3$) бўлса.

Агар a_1, a_2, a_3ва b_1, b_2, b_3 кетма-кетликлардан биттаси камаймайдиган, бошқаси эса ортмайдиган бўлса, у ҳолда (a_1, a_2, a_3) ва (b_1, b_2, b_3) учликлар *турлича тартибланган* дейилади.

Масалан: (-1, 1, 3) ва (2, 5, 7) учликлар бир хил тартибланган, (-1, 1, 3) ва (7, 5, 2) учликлар эса турлича тартибланган.

a, b, c мусбат сонлар учун $a \ge b \ge c$ ёки $a \le b \le c$ бўлса, у ҳолда (a,b,c) ва $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ учликлар турлича, (a,b,c) ва (a^n, b^n, c^n) учликлар эса бир хил тартибланган, бу ерда n - ихтиёрий натурал сон.

(a_1, a_2, a_3) ва (b_1, b_2, b_3) учликлар берилган ва (x_1, x_2, x_3) учлик (b_1, b_2, b_3) сонларнинг ўрин алмаштириши бўлсин. У ҳолда, юқоридаги теореманинг қуйидаги муҳим бўлган натижаларини қайд этамиз.

1) Агар (a_1, a_2, a_3) ва (b_1, b_2, b_3) учликлар бир хил тартибланган бўлса, у ҳолда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ge a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \tag{3.16}$$

тенгсизлик ўринли.

2) Агар (a_1, a_2, a_3) ва (b_1, b_2, b_3) учликлар турлича тартибланган бўлса, у ҳолда

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \le a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \tag{3.17}$$

тенгсизлик ўринли.

Транс-тенгсизликни масалалар ечишга тадбиқлари.

1-масала. Ихтиёрий a, b, c ҳақиқий сонлар ва n натурал сон учун

a) $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

b) $a^n + b^n + c^n \ge a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ тенгсизликларни исботланг.

Ечилиши. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ тенгсизлик, $a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ тенгсизликнинг хусусий ҳоли бўлгани учун $a^n + b^n + c^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ тенгсизликни исботлаймиз. $a \geq b \geq c$ деб фараз қиламиз. У ҳолда, $a^{n-1} \geq b^{n-1} \geq c^{n-1}$, яъни ($a,b,c$) ва ($a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1}$) учликлар бир хил тартибланган бўлади.

(3.16) тенгсизликда

$$(a_1, a_2, a_3) = (a^{n-1}, b^{n-1}, c^{n-1}), (b_1, b_2, b_3) = (a, b, c), (x_1, x_2, x_3) = (b, c, a)$$

деб олсак, $a^n + b^n + c^n = a^{n-1}a + b^{n-1}b + c^{n-1}c \geq a^{n-1}b + b^{n-1}c + c^{n-1}a$ тенгсизликка эга бўламиз.

2-масала. Ихтиёрий *a, b, c* мусбат сонлар учун

$$a)\ \frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$b)\ \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

$$c)\ \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

тенгсизликларни исботланг.

Ечилиши. $a \geq b \geq c$ деб фараз қиламиз.

а) Маълумки, $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ва $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ учликлар бир хил тартибланган.

(3.16) тенгсизликда

$$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right), (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a}\right)$$

деб олсак,

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c} \geq \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a} = \frac{a+b+c}{abc}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

б) Маълумки, $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ ва $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$ учликлар бир хил тартибланган.

(3.16) тенгсизликда

$$(a_1,a_2,a_3) = (b_1,b_2,b_3) = \left(\frac{a}{b},\frac{b}{c},\frac{c}{a}\right), \qquad (x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

деб олсак,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{a} \geq \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}+\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

c) $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ ва $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$ эканлиги аниқ бўлсин, яъни a^2, b^2, c^2 ва $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ учликлар турлича тартибланган.

(3.17) тенгсизликда

$(a_1,a_2,a_3) = (a^2,b^2,c^2)$, $(b_1,b_2,b_3) = \left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$, $(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{1}{b},\frac{1}{c},\frac{1}{a}\right)$ деб олсак, берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган

$$a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c} \leq a^2\frac{1}{b}+b^2\frac{1}{c}+c^2\frac{1}{a}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Изоҳ. Кўриниб турибдики, барча тенгсизликларда тенглик $a = b = c$ бўлгандагина ўринлидир.

3-масала. Ихтиёрий a, b, c мусбат сонлар учун

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

Е**чилиши.** Умумийликка зарар эткзмасдан $a \geq b \geq c$ деб фараз қиламиз. Яъни, (a^2,b^2,c^2) ва $\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$ учликлар турлича тартибланган. (3.17) да

$$(a_1,a_2,a_3) = (a^2,b^2,c^2), \qquad (b_1,b_2,b_3) = \left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right), (x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{1}{c},\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$$

деб олсак, берилган тенгсизликка тенг кучли бўлган

$$a^2\frac{1}{a}+b^2\frac{1}{b}+c^2\frac{1}{c} \leq a^2\frac{1}{c}+b^2\frac{1}{a}+c^2\frac{1}{b}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

4-масала. a, b, c – мусбат сонлар бўлсин.

$$(a^2,b^2,c^2) \geq a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$$

бўлишини исботланг

Ечилиши. Умумийликка зарар етказмасдан $a \geq b \geq c$ деб фараз қиламиз. У ҳолда,

$ln a \geq ln b \geq ln c,$

яъни (a,b,c) ва $ln a \geq ln b \geq ln c,$ учликлар бир хил тартибланган. (3.16) тенгсизликда

$(a_1, a_2, a_3) = (ln a,\ ln b, ln c), (b_1, b_2, b_3) = (a, b, c), (x_1, x_2, x_3) = (b, c, a)$

$$a ln a + b ln b + c ln c \geq b ln a + c ln b + a ln c$$ тенгсизликда,

(x_1, x_2, x_3)=(c, a, b) деб олсак, $a ln a + b ln b + c ln c \geq c ln a + a ln b + b ln c$ тенгсизликка эга бўламиз. Уларни ҳадма-ҳад қўшиб,

$$2(a ln a + b ln b + c ln c) \geq$$
$$\geq (b + c) ln a + (c + a) ln a + (c + a) ln b + (a + b) ln c$$

ёки $\ln(a^a b^b c^c)^2 \geq \ln(a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b})$ га эга бўламиз.

Бу ердан,

$$(a^a b^b c^c)^2 \geq (a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b})$$

тенгсизлик келиб чиқади.

5-масала. (Москва олимпиадаси - 1963**).** Ихтиёрий a, b, c мусбат сонлар учун

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

тенгсизлик тўғри бўлишини исботланг.

Ечилиши. Тенгсизлик симметрик бўлгани учун умумийликни чегараламаган ҳолда $a \geq b \geq c$ деб фараз қиламиз. У ҳолда,

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$$

тенгсизлик ўринли, яъни (a,b,c) ва $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ учликлар бир хил тартибланган бўлади. (3.16) тенгсизликда

$(a_1, a_2, a_3) = \left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right), (b_1, b_2, b_3) = (a, b, c),\ (x_1, x_2, x_3) = (b, c, a)$

деб,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b}$$

тенгсизликда эса, $(x_1, x_2, x_3) = (c, a, b)$ деб олсак,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b}$$

тенгсизликка эга бўламиз.

Охирги иккита тенгсизликни ҳадма-ҳад қўшиб ва 2 га бўлиб,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Классик тенгсизликларни исботлашда транс-тенгсизликни қўллаш.

Барча $a_1, \ldots, a_n$ сонлар учун (3.16) тенгсизликнинг муҳим хусусий ҳолларини таъкидлаб ўтамиз:

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \cdots + \frac{b_n}{a_n} \geq n \qquad (3.18)$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n \qquad (3.19)$$

бу ерда n - ихтиёрий натурал сон, $(b_1, \ldots, b_n) - a_1, a_2 \ldots, a_n$ сонларнинг ихтиёрий ўрин алмаштириши.

12-мисол (Ўрта қийматлар ҳақидаги Коши тенгсизлиги).

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ мусбат сонлар учун

$$\frac{x_1, +x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1, x_2, \ldots, x_n}$$

тенгсизлик ўринли, шу билан бирга тенглик $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ бўлгандагина бажарилади.

Ечилиши. $G = \sqrt[n]{x_1, x_2, \dots, x_n}$, $a_1 = \frac{x_1}{G}$, $a_2 = \frac{x_1 x_1}{G^2}, \dots, a_n = \frac{x_1, x_2, x_n}{G^n} = 1$ бўлсин (3.18) тенгсизликка биноан $\frac{x_1, +x_2 + \dots + x_n}{n} \geq G$ тенгсизликка эквивалент бўлган ушбу

$$n \leq \frac{a_1}{a_n} + \frac{a_2}{a_1} + \dots + \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \dots + \frac{x_n}{G}$$

тенгсизликка эгамиз. Тенглик бажарилиши учун

$a_1 = a_2 = \dots = a_n$ яъни, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ бўлиши зарур ва етарли.

13-мисол.(Ўрта геометрик ва ўрта гармоник қийматлар орасидаги тенгсизлик)

$$\sqrt[n]{x_1, x_2, \dots, x_n} \geq \frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}}$$

тенгсизлик ўринли, шу билан бирга $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ тенглик бўлгандагина бажарилади.

Ечилиши. Олдинги мисолда берилган G, a_1, $a_2, \dots, a_n$ сонларни қараймиз. (3.19) тенгсизликка кўра,

$$\frac{n}{x_1^{-1} + x_2^{-1} + \dots + x_n^{-1}} \leq G$$

тенгсизликка тенг эквивалент бўлган ушбу

$$n \leq \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_n}{a_1} = \frac{G}{x_1} + \frac{G}{x_2} + \dots + \frac{G}{x_n}$$

тенгсизликка эгамиз.

Тенглик бажарилиши учун $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ яъни $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ бўлиши зарур ва етарли.

14-мисол. (Ўрта квадратик ва ўрта арифметик қийматлар орасидаги тенгсизлик)

Ихтиёрий $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар учун

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

тенгсизлик ўринли, шу билан бирга $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ тенглик бўлгандагина бажарилади.

Ечилиши. (3.19) тенгсизликка кўра

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1x_3 + x_2x_4 + \cdots + x_nx_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \geq x_1x_n + x_2x_1 + \cdots + x_nx_{n-1}$$

муносабатларга эга бўламиз.

Бу тенгсизликларни барчасини $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ тенглик билан қўшиб, натижада

$$n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geq (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

15-мисол. (Коши-Буняковский-Швартс тенгсизлиги). *n* сондан иборат иккита $a_1, a_2, \ldots, a_n,$ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ кетма-кетлик берилган бўлсин. У ҳолда,

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

тенгсизлик ўринли. Тенглик бирор ўзгармас *k* сон учун $a_i = kb_i$ $i = 1,2,\ldots,n,$ бўлгандагина бажарилади.

Ечилиши. Агар $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ ёки $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$ бўлса, у ҳолда тенгсизлик бажарилади. Шунинг учун

$$P = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}, \quad Q = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$$

сонларни нолдан фарқли деб ҳисоблаймиз.

Қуйидагича аниқланган $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n}$ кетма-кетликни қараймиз:

$$x_1 = \frac{a_i}{P}, \qquad x_{n+1} = \frac{b_i}{Q}, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

У ҳолда,

$$2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{P^2} + \frac{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}{Q^2} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

бўлади. (3.19) тенгсизликка кўра,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 \geq x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n} + x_{n+1} x_1 + x_{n+2} x_2 + \cdots +$$
$$+ x_{2n} x_n = \frac{2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)}{PQ}$$

га эгамиз. Натижада

$$1 \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{PQ}$$

тенгсизликни ҳосил қиламиз.

Эслатиб ўтамиз, тенглик $a_i = \frac{P}{Q} b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, шарт бажарилганда ўринли бўлади. Бу шарт эса $x_i = x_{n+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ шартига эквивалент.

16-мисол. (Чебишев тенгсизлиги).

n сондан иборат иккита $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ кетма-кетликлар берилган бўлсин. Фараз қиламиз $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ шарт бажарилсин. У ҳолда,

а) $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}, \quad \text{агар } b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$$

б) $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \geq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}, \quad \text{агар } b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

Исбот. а) (3.19) тенгсизликка кўра,

$$\begin{gathered}
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1 \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \geq a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_{n-1}
\end{gathered}$$

муносабатларга эгамиз, уларни қўшиб,

$$n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \text{ ёки}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}$$

ни ҳосил қиламиз.

б) бу ҳам а) га ўхшаш исботланади.

2.6-§. КАРАМАТА ТЕНГСИЗЛИГИ.

Таъриф: $a=(a_1,a_2,...,a_n), b=(b_1,b_2,...,b_n)$ n-ликлар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

$a_i \ge a_{i+1}, b_i \ge b_{i+1}; i=1,2,...,n-1.$ Бу ҳолда, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$ n-лик $b=(b_1,b_2,...,b_n)$ n-ликни *мажорлайди* дейилади ва бу муносабат $a \succ b$ ёки $a \prec b$ каби ёзилади.

Агар

$$\begin{cases} a_1 \ge b_1, \\ a_1+a_2 \ge b_1+b_2, \\ \ldots \\ a_1+a_2+\ldots+a_{n-1} \ge b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}, \\ a_1+a_2+\ldots+a_n \ge b_1+b_2+\ldots+b_n. \end{cases}$$

бўлса.

Мисоллар:

1. $\left(\frac{1}{n},\ldots\frac{1}{n}\right) \prec \left(\frac{1}{n-1},\ldots\frac{1}{n-1},0\right) \prec \cdots \prec \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\ldots,0\right) \prec (1,0,\ldots 0)$

2. Агар $m \ge l$ ва $c \ge 0$ бўлса, у ҳолда

$$\Bigg(\underbrace{\frac{1}{m}c,\ldots,\frac{1}{m}c}_{m\text{ марта}},0,\ldots,0\Bigg)\Bigg(\underbrace{c,\ldots,c}_{l\text{ марта}},\quad 0,\ldots,0\Bigg)$$

муносабат ўринли.

3. Агар $a_i \ge 0$ ва $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ бўлса, у ҳолда

$$\left(\frac{1}{n},\ldots\frac{1}{n}\right) \prec (a_1,\ldots,a_n) \prec (1,0,\ldots,0)$$

муносабат ўринли.

4. Агар $c \ge 0$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i+nc}(x_1+c,\ldots,x_n+c) \prec \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

муносабат ўринли.

5. Агар $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ бўлса,

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) \succ (y_1,y_2,\ldots,y_n) \text{ бўлади.}$$

6. $\alpha,\beta,\gamma,$ - учбурчак бурчаклари бўлсин, у ҳолда

а) барча учбурчаклар учун

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha,\beta,\gamma,) \prec (\pi,0,0)$$

муносабат;

б) ўткир бурчакли учбурчаклар учун

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha,\beta,\gamma,) \prec \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\right)$$

муносабат;

с) ўтмас бурчакли учбурчаклар учун

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right) \prec (\alpha,\beta,\gamma,) \prec (\pi,\pi,0)$$

муносабат ўринли бўлади.

Лемма (уч ватар ҳақида): f - қаварик функция бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $x < y < z$ учун

$$\frac{f(y) - f(z)}{y-z} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x-z} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y}$$

қўштенгсизлик ўринли.

Исбот: f - қаварик функция бўлганлиги учун

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leq \lambda(x) + (1-\lambda)f(z)$$

тенгсизлик бажарилади, бу ерда $\lambda \in (0,1)$.

$\lambda = \frac{y-z}{x-z}$ деб оламиз ва соддалаштиришлардан сўнг юқоридаги тенгсизлик

$$(x-z)f(y) \leq (x-y)f(z) + (y-z)f(x)$$

тенгсизликка олиб келинади.

Бу тенгсизлик эса

$$\frac{f(y) - f(z)}{y-z} \leq \frac{f(x) - f(z)}{x-z} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y}$$

иккала тенгсизликка ҳам тенг кучли.

Натижа. Қаварик f функция берилган бўлсин. У ҳолда, ҳар қандай $x_1 \geq x_2,\ y_1 \geq y_2,\ x_1 \neq y_1,\ x_2 \neq y_2$ учун

$$\frac{f(x_1)-f(y_1)}{x_1-y_1} \geq \frac{f(x_2)-f(y_2)}{x_2-y_2}$$

тенгсизлик бажарилади.

Лемма (Абелъ алмаштириши):

$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ бўлса, у ҳолда $\sum_{i=1}^{k} a_k b_k = \sum_{k-1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k-1}) + A_k b_n$ тенглик ўринли.

Исбот.

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n$$
$$= A_1b_1 + (A_2 - A_1)b_2 + \cdots + (A_{n-1} - A_{n-2})b_{n-1} + (A_n - A_{n-1})b_n$$
$$= A_1(b_1 - b_2) + A_2(b_2 - b_3) + \cdots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_nb_n$$

Теорема (Карамата тенгсизлиги):

Қаварик (мос равишда ботик) f функция берилган бўлсин. Агар $a \prec b$ бўлса,

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \; \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} f(y_i) \tag{3.20}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} f(y_i)\ \right) \tag{3.21}$$

тенгсизлик бажарилади.

Исбот: Қаварик f функция ҳолини қараш етарли. Умумийликка зарар етказмасдан $x_k \neq y_k$ деб ҳисоблашимиз мумкин.

$D_k = \frac{f(y_k)-f(x_k)}{y_k-x_k}$, $X_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $Y_k = \sum_{i=1}^{k} y_i$ белгилашларни киритамиз.

У ҳолда, $Y_k \geq X_k, Y_n = X_n$. Уч ватар ҳақидаги лемма натижасига кўра, $D_k \geq D_{k+1}$

Демак, $\sum_{k=1}^{n-1} (Y_k - X_k) \cdot (D_k - D_{k+1}) + (X_n - Y_n)D \geq 0$

Абелъ алмаштиришини қўллаб, $\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) \cdot D_k \geq 0$ ни ҳосил қиламиз. Теорема исбот бўлди.

Карамата тенгсизлигидан фойдаланган ҳолда исботлаш мумкин бўлган иккита тенгсизликларни кўриб чиқамиз.

Мисоллар. 1. (Енсен тенгсизлиги). Агар f -қаварик функция бўлса,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Исбот. $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ деб оламиз. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \succ y_1, y_2, \ldots, y_n$ бўлгани учун Карамата тенгсизлигидан бевосита Енсен тенгсизлиги келиб чиқади.

2. Ихтиёрий мусбат a, b, c лар учун $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$ тенгсизлик ўринли.

Исбот. $(2a, 2b, 2c) \succ (a + b, a + c, b + c)$ га эгамиз.

Карамата тенгсизлигини $f(x) = \frac{1}{x}$ функция учун қўллаш етарли.

2.7-§.ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИ ТРИГОНОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР ЁРДАМИДА ИСБОТЛАШ

Тригонометрик алмаштиришлар

Баъзида тенгсизликни исботлашда тригонометрик алмаштиришлар бажарганда яхши фойда берадиган хоссалари ёрдам бериши мумкин.

Биз алмаштиришларни киритамиз, кейин маълум бўлган тригонометрик айниятлар ва тенгсизликларни келтирамиз ва бир нечта олимпиада масалаларини ечишга харакат ыиламиз.

Теорема-1. Фараз қилайлик, α, β, γ бурчаклар $(0;\pi)$ дан олинган. У ҳолда, бу α, β, γ бурчаклар бирор учбурчакнинг ички бурчаклари бўлиши учун қуйидаги тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2} + tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2} + tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2} = 1$$

Исбот. Дастлаб шуни таъкидлаш жоизки, $\alpha = \beta = \gamma$ бўлган ҳолда теореманинг тасдиғи ўринлидир. Умумийликка зиён етказмасдан α≠β деб фараз қилайлик. $0 < \alpha + \beta < 2\pi$ бўлганлиги учун $(-\pi; \pi)$ интервалда

$\alpha+\beta+\gamma^1=\pi$ шартни қаноатлантирувчи γ^1 мавжуд. Қўшиш формулалари ва $tgx=ctg(\frac{\pi}{2}-x)$ формулага кўра,

$$tg\frac{\gamma^1}{2}=ctg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1-tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}}$$

яъни,

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma^1}{2}+tg\frac{\gamma^1}{2}tg\frac{\alpha}{2}=1 \qquad (3.22)$$

тенглик ўринли бўлади.

Фараз қилайлик, бирор α,β,γ, ∈(0;π) бурчаклар учун

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\beta}{2}tg\frac{\gamma}{2}+tg\frac{\gamma}{2}tg\frac{\alpha}{2}=1 \qquad (3.23)$$

тенглик ўринли бўлсин.

Биз исботлаймизки $\gamma=\gamma^1$ ва бу бизга α,β,γ лар бирор учбурчак бурчаклари эканлигини беради. (3.22) дан (3.23) ни айириб $tg\frac{\gamma}{2}=tg\frac{\gamma^1}{2}$ ни ҳосил қиламиз. Шунинг учун $\left|\frac{\gamma-\gamma^1}{2}\right|=k\pi, k\geq 0, k\in Z.$ Аммо,

$$\left|\frac{\gamma-\gamma^1}{2}\right|\leq\left|\frac{\gamma}{2}\right|+\left|\frac{\gamma^1}{2}\right|<\pi$$ тенгсизлик ўринли.

Демак, $k=0$, шунинг учун $\gamma=\gamma^1$. Тасдиқ исботланди.

Теорема-2. Фараз қилайлик, α,β,γ бурчаклар $(0;\pi)$ дан олинган. У ҳолда, бу α,β,γ бурчаклар бирор учбурчакнинг ички бурчаклари бўлиши учун қуйидаги тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=1$$

Исбот. $0<\alpha+\beta<2\pi$ бўлганлиги учун шундай $\gamma^1\in(-\pi;\pi)$ мавжудки $\alpha+\beta+\gamma^1=\pi$ тенглик ўринли бўлади. Кўпайтмани йиғиндига келтириш ва иккиланган бурчак формулаларига асосан қуйидаги муносабатлар ўринли.

$$\sin^2\frac{\gamma^1}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma^1}{2}$$
$$=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=$$
$$=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}=\frac{\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)+\left(1-2\sin^2\frac{\beta}{2}\right)}{2}=1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}$$

Шундай қилиб,

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma^1}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma^1}{2}=1 \qquad (3.24)$$

Фараз қилайлик, бирор α, β, γ, ∈(0;π) бурчаклар учун

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=1 \qquad (3.25)$$

тенглик ўринли бўлсин. (3.22) дан (3.23) ни айириб,

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma^1}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma^1}{2}\right)=0$$

Яъни,

$$\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma^1}{2}\right)\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma^1}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=0$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Иккинчи қавс ичидаги ифодани қуйидагича ифодалаймиз.

$$\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma^1}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Маълумки, бу ифода мусбат қийматлар қабул қилади. Шунинг учун $\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma^1}{2}$ яъни, $\gamma=\gamma^1$ бўлади.

Демак, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Тасдиқ исботланди.

Алмаштиришлар.

1. Фараз қилайлик, α,β,γ лар учбурчакнинг ички бурчаклари бўлсин. Қуйидагича алмаштиришни қарайлик:

$$A=\frac{\pi-\alpha}{2},\qquad B=\frac{\pi-\beta}{2},\quad C=\frac{\pi-\gamma}{2}$$

Маълумки, $A+B+C=\pi$ ва $0\leq A,B,C<\frac{\pi}{2}$. Бу алмаштириш бизга бирор масалани ҳал қилишда исталган учбурчак ўрнига ўткир бурчакли учбурчакни қараш имконини беради. Қуйидаги муносабатлар ўринли эканлигини таъкидлаш жоиз:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\cos A,\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sin A,\quad tg\frac{\alpha}{2}=ctgA,\quad ctg\frac{\alpha}{2}=tgA$$

2. Фараз қилайлик, x,y,z лар мусбат ҳақиқий сонлар бўлсин. У ҳолда, томонлари узунликлари

$a=x+y, b=y+z, c=z+x$ лардан иборат бўлган учбурчак мавжуд. $s=x+y+z$ бўлса, $(x, y, z)=(s-a, s-b, s-c)$. Шартга кўра x,y,z лар мусбатлиги учун $s-a, s-b, s-c$ лар учбурчак тенгсизлигини қаноатлантиради.

3. Фараз қилайлик, мусбат a,b,c сонлар $ab+bc+ca=1$ шартни қаноатлантирсин. Биз ушбу

$f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to(0;+\infty),\quad f(x)=tgx$ функция ёрдамида қуйидагича алмаштириш

киритишимиз мумкин

$$a=tg\frac{\alpha}{2},\ \ b=tg\frac{\beta}{2}, c=tg\frac{\gamma}{2}$$

бунда α,β,γ лар бирор учбурчакнинг бурчаклари.

4. Фараз қилайлик, мусбат a,b,c сонлар $ab+bc+ca=1$ шартни қаноатлантирсин. **1** ва **3** ларга кўра, қуйидагиларга эгамиз

$a=ctgA, b=ctgB, c=ctgC,$

бунда A,B,C лар ўткир бурчакли учбурчакнинг бурчаклари.

5. Фараз қилайлик, мусбат a,b,c сонлар $ab+bc+ca=abc$ шартни қаноатлантирсин. Бу тенгликнинг иккала тарафини a,b,c сонларнинг кўпайтмасига бўлиб, қуйидагига эга бўламиз $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=1$. **3** га кўра қуйидагича алмаштириш оламиз:

$$\frac{1}{a}=tg\frac{\alpha}{2},\ \ \frac{1}{b}=tg\frac{\beta}{2},\qquad \frac{1}{c}=tg\frac{\gamma}{2}$$

яъни,

$$a=ctg\frac{\alpha}{2},\qquad b=ctg\frac{\beta}{2},\qquad c=ctg\frac{\gamma}{2}$$

бунда α,β,γ лар бирор учбурчакнинг бурчаклари.

6. Фараз қилайлик, мусбат a,b,c сонлар $ab+\ bc\ +\ ca\ =\ abc$ шартни қаноатлантирсин. **1** ва **5** га кўра бунда *A*, *B*, *C* лар ўткир бурчакли учбурчакнинг бурчаклари.

7. Фараз қилайлик, мусбат a,b,c сонлар $a^2\ +\ b^2+\ c^2\ +\ 2abc\ =1$ шартни қаноатлантирсин. Шартга кўра учта сон ҳам мусбатлиги учун

$a,b,c<1$ бўлади.

Ушбу $f:(0;\pi)\rightarrow(0;1), f\ (\mathrm{x})=\sin\frac{x}{2}$ функция ҳамда 2-теорема ёрдамида қуйидагича

алмаштириш олишимиз мумкин.

$$a=\sin\frac{\alpha}{2},\qquad b=\sin\frac{\beta}{2},\ \ c=\sin\frac{\gamma}{2}$$

бунда α,β,γ лар бирор учбурчакнинг бурчаклари.

8. Фараз қилайлик, мусбат a,b,c сонлар $a^2\ +\ b^2+\ c^2\ +\ 2abc\ =1$ шартни қаноатлантирсин. **1** ва **7** ларга кўра қуйидагича алмаштириш бажаришимиз мумкин

$a\ =\ cos\ A, b\ =\ cosB, c\ =\ cosC,$

бунда *A*, *B*, *C* лар ўткир бурчакли учбурчакнинг бурчаклари.

9. Фараз қилайлик, x,y,z лар мусбат сонлар бўлсин. **2** ёрдамида қуйидаги

$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}}$, $\sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}}$, $\sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}}$ ифодаларни ушбу $\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$, $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ ифодаларга алмаштирамиз. Мана бу айниятларга кўра,

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

бизнинг дастлабки ифодаларимиз мос равишда қуйидаги шаклга келади. $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ бунда α,β,γ лар бирор учбурчакнинг бурчаклари.

10. Худди **9** даги каби қуйидаги

$$\sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}},\quad \sqrt{\frac{y(x+y+z)}{(y+z)(y+x)}},\quad \sqrt{\frac{z(x+y+z)}{(z+x)(z+y)}}$$

ифодаларни мос равишда ушбу

$$\cos\frac{\alpha}{2},\qquad \cos\frac{\beta}{2},\quad \cos\frac{\gamma}{2},$$

шаклга келтирамиз, бунда α,β,γ лар бирор учбурчакнинг бурчаклари.

1-масала. Фараз қилайлик, мусбат $p,\ q,\ r$ сонлар қуйидаги шартни қаноатлантирсин.

$$p^2+q^2+r^2+2pqr=1.$$

У ҳолда, $p=\cos A, q=\cos B,\ r=\cos C$ ва $A+B+C=\pi$ шартларни қаноатлантирувчи ўткир бурчакли ABC учбурчак мавжудлигини кўрсатинг.

2-масала. Фараз қилайлик, номанфий $p,\ q,\ r$ сонлар ушбу шартни қаноатлантирсин.

$$p^2+q^2+r^2+2pqr=1$$

У ҳолда, $p=\cos A,\ q=\cos B,\ r=\cos C$ ва $A+B+C=\pi$ шартларни қаноатлантирувчи $A,B,C\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ бурчаклар мавжудлигини кўрсатинг.

Қуйида биз кўплаб масалаларни ечишда ёрдам берадиган бир қатор тенгсизликлар ва айниятлар келтирамиз. Буларнинг деярли барчаси яхши маълум муносабатлар бўлиб исботлари қийин эмас. Бу муносабатларнинг кўпчилигининг исботини адабиётлардан топиш мумкин.

Тенгсизликлар

Фараз қилайлик, α,β,γ лар ABC учбурчакнинг бурчаклари бўлсин. Қуйидаги тенгсизликлар ўринли.

1. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\le\frac{3}{2}$
2. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

1. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\le\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$
2. $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$
3. $ctg\frac{\alpha}{2}+ctg\frac{\beta}{2}+ctg\frac{\gamma}{2}\ge3\sqrt{3}$
4. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\sin^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\ge\frac{3}{4}$
5. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\le\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{9}{4}$
6. $ctg\alpha+ctg\beta+ctg\gamma\ge tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\beta}{2}+tg\frac{\gamma}{2}\ge\sqrt{3}$

Айниятлар

Фараз қилайлик, α,β,γ лар *ABC* учбурчакнинг бурчаклари бўлсин. Қуйидаги айниятлар ўринли.

1. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$
2. $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$
3. $\sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$
4. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

Исталган α,β,γ бурчаклар (учбурчак бурчаклари бўлиши шарт эмас) учун қуйидаги айниятлар ўринли.

1. $sin\alpha + sin\beta + sin\gamma - sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\beta+\gamma}{2}sin\frac{\gamma+\alpha}{2}$
2. $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma + cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\beta+\gamma}{2}cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$

Тригонометрик алмаштиришларнинг тадбиқлари

3-масала. (Жанубий Корея, 1998). Фараз қилайлик, мусбат x, y, z сонлар $x + y + z = xyz$ шартни қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \leq \frac{3}{2}$$

Бу масалани ечишда талабани ҳаёлига энг биринчи $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ функция учун
Енсен тенгсизлигини қўллаш келиши мумкин. Аммо бу f функция R^+ тўпламда юқорига қаварик эмас. Аммо, шуниси қизиқарлики, $f\ (tg\theta)$ функция юқорига қаварик!

Исботи. Мана бундай алмаштириш олайлик,

$$x = tgA, \qquad y = tgB, \qquad z = tgC, \qquad A, B, C \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ушбу $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \cos\alpha \neq 0$ айниятга кўра берилган тенгсизлик қуйидагича кўринишни олади.

$$cos\alpha + cos\beta + cos\gamma \leq \frac{3}{2}$$

Қуйидаги $tg(\pi - C) = -z = \frac{x+y}{1-xy} = tg(A+B)$ ва $\pi - C, A + B \in (0;\pi)$ муносабатлардан $\pi - C = A + B$ ёки $A + B + C = \pi$ тенгликни оламиз. Демак, исталган ABC учбурчак учун $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma$ тенгсизликни исбот қилсак етарли экан. Бу эса, қуйидаги муносабатдан келиб чиқади.

$$3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) =$$
$$= (\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B - 1)^2 \geq 0.$$

Исбот тугади.

4-масала. (ҒМЛ, очиқ олимпиада, Россия). Фараз қилайлик, мусбат x, y, z сонлар $x + y + z = 1$ шартни қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\sqrt{\frac{xy}{z+xy}} + \sqrt{\frac{yz}{x+yz}} + \sqrt{\frac{zx}{y+zx}} \le \frac{3}{2}$$

Исботи. Юқоридаги тенгсизлик ушбу тенгсизликка тенг кучли

$$\sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} + \sqrt{\frac{zx}{(y+z)(y+x)}} + \sqrt{\frac{xy}{(z+x)(z+y)}} \le \frac{3}{2}$$

9 га кўра бу тенгсизликнинг учта ҳадини $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}, \sin\frac{\gamma}{2}$ ларга алмаштирамиз ва ушбу $sin\alpha + sin\beta + \ sin\gamma \ \le \frac{3}{2}$ тенгсизликни исботлаймиз. Бу тенгсизликнинг ўринли эканлиги аниқ (Енсен тенгсизлигидан осонгина келиб чиқади).

Исбот тугади.

5-масала. (Эрон, 1997). Фараз қилайлик, x, y, z сонлар

$$x, y, z > 1, \ \ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$$

шартларни қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}$$

Исботи. Қуйидагича $(x, y, z) = (a+1, b+1, c+1)$ алмаштириш олайлик, бунда $a, b, c \ > 0$ ва шартга кўра $ab + bc + ca + 2abc = 1$ тенглик ўринли. У ҳолда, қуйидаги тенгсизликни исботлаш етарли.

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \le \sqrt{a+b+c+3}$$

Иккала тарафни квадратга ошириб ва айрим ҳадларни йўқотиб қуйидаги тегсизликка келамиз

$$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \le \frac{3}{2}$$

7 дан фойдаланиб, $(ab,bc,ca)=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2},\sin^2\frac{\beta}{2},\ \sin^2\frac{\gamma}{2}\right)$ ни оламиз, бунда ABC ихтиёрий учбурчак. Демак, қуйидаги тенгсизликни исботлашимиз керак.

$$sin\alpha+sin\beta+\ sin\gamma\ \le\frac{3}{2}$$

Агар α,β,γ - учбурчак бурчаклари бўлса, у ҳолда $cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$ эканлигини исботлаймиз.

Исботи: Бундан, $\gamma=180^0-\alpha-\beta$, у ҳолда $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$. Биз тенгсизликнинг чап томонлари йиғиндисини ўзгартирамиз:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-1\right)=$$

$$-2\left(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+1=$$

$$-2\left(\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+1=$$

$$=-2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+1\le 0+\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

Тенгликка эришилади, агар

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=1,\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

У ҳолда, $\frac{\alpha-\beta}{2}=0,\frac{\alpha+\beta}{2}=60^0$.

Бундан, $\alpha=\beta=\gamma=60^0$

Бу тенгсизликнинг ўринли эканлиги маълум. Исботланди.

III БОБ. ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

3.1-§. ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ ТАРИХИДАН

Олимпиадалар — Қадимги Юнонистоннинг юксак даражада ривожланган маданияти маҳсулидир. Унда спорт ўйинлари — югуриш, найза улоқтириш, муштлашиш каби мусобақалар қаторида ақлий фаолият соҳасида тортишувлар ҳам ўтказилган. Айниқса, мусобақаларнинг ҳар икки тури бўйича ғолиблар алоҳида шарафланган. Хусусан, атоқли математик ва файласуф олим Пифагор муштлашиш бўйича олимпиада чемпиони бўлган.

Умуман, математиклар ҳаётида мусобақа — масалалар ечишда ким ғолиб бўлиши, ўзига хос мазмун ва маъно касб этади.

Самарқандда яшаб ижод этган атоқли математик Ғиёсиддин Жамшид ал-Кошийнинг Кошон шаҳрига (Эрондаги шаҳар) отасига ёзган бир хати сақланган. Ундан маълум бўлишича, Улуғбек раҳбарлигидаги илмий мажлис — семинарда олимлар турли масалаларни муҳокама қилганлар. Семинарда мадраса толиблари ҳам қатнашиб, ўз қобилиятларини намойиш қилганлар. Демак, бундай семинарлар ёш толиби илмлар учун ўзига хос олимпиада вазифасини бажарган.

Тарихдан маълумки, Италияда XVII асрда математика турнирлари машҳур бўлган. Турнир ғолиби бўлиш катта ютуқ ҳисобланиб, математиклар янги масалалар ва уларни ечиш усулларини сир сақлаганлар. Кубик тенгламалар ечиш мусобақаси ана шундай мусобақалардан бири бўлиб, турнирда ғолиб бўлиш иштиёқи кўпчиликни, $x^3 + px + q = 0$ кўринишдаги тенглама ечими учун формула топишга ундаган. Айниқса, Фиори, Ферро ва Тарталя каби математиклар қаттиқ уринишган ва Тарталя кубик тенгламани ечиш қоидасини ишлаб чиқиб бир неча мусобақада ғолиб бўлган. У ўзи яратган формулани сир тутган. Бошқа итальян математиги Ж.Кардано кўп марта ўтиниб сўрагани учун Тарталя, қаттиқ сир тутиш шарти билан унга айтади. Аммо, Кардано математикадан ёзаётган навбатдаги рисоласига куб тенгламани ечиш формуласини киритиб юборади. Шунинг учун, ҳозиргача куб тенгламани ечиш формуласи Кардано формуласи дейилади. Албатта Тарталя Карданонинг бу ишидан бир умрга ранжиган. Шундан сўнг математик турнирлар барҳам топди ва энди математиклар топилган янги формулаларни сир сақламайдиган, аксинча, тезроқ эълон қиладиган бўлдилар.

Кейинчалик математик мусобақалар бошқа шаклда - олимпиада номи билан ўқувчиларни математикага қизиқтириш воситаси сифатида қайтадан туғилди. Маълум бўлишича у биринчи марта 1894-йили Венгрияда ўтказилган.

Ҳар йили баҳорда, яъни 3-чорак ва 4-чорак орасидаги баҳорги таътил кунлари, мамлакатимизда математика, физика, кимё, биология ва бошқа фанлардан республика олимпиадаси ўтказилади. Унинг ғолиблари дипломлар, ёрлиқ ва турли совғалар билан мукофотланади, битирувчи синф ўқувчиларига эса республика олий ўқув юртларига кириш имтиҳонларисиз талаба бўлиш имкони берилади. Аммо, бу олимпиадада қатнашиш осон эмас. Бунинг учун сиз аввал мактаб, туман, шаҳар ва вилоят олимпиадаларида муваффақиятли қатнашиб, ғолиб чиқишингиз лозим.

2019-йилда Ўзбекистон Республика математика олимпиадаси ўтказила бошлаганига 57-йил тўлди. Дастлабки расмий олимпиада 1962-йили Тошкентда, академик Саъди Хасанович Сирожиддинов бошчилигида ўтказилган ва бу тадбир эндиликда ҳар йили ўтказилиб келинади.

Одатда, олимпиадада 5 та масала берилади ва улар шартли равишда бир неча типга бўлинади: алгебраик, сонли ва мантиқий, геометрик. Ўқувчилар уларни ёзма иш тартибида бажарадилар.

Иқтидорли ўқувчи, яъни олимпиаданинг ҳақиқий ғолиби, алоҳида хусусиятга эга бўлган ностандарт (ноанъанавий) масалалар ёрдамида аниқланади. Мактаб ва туман олимпиадасида бундай ўқувчини аниқлаш учун 1 та ёки 2 та ностандарт масала бериш етарли. Қолганлари осонроқ, яъни дарсда ўтилганларга яқин, кўпчилик еча оладиган бўлиши лозим, акс ҳолда бошқа ўқувчиларнинг математикага қизиқишини сўндириб қўйишимиз мумкин. Берилган ностандарт масала билан эса улар ичидан ғолибни аниқлаш қийин бўлмайди. Шаҳар, вилоят олимпиадаларида бундай масалалар 2 тадан кам бўлмаслиги шарт. Республика математика олимпиадасида 3 та ностандарт масала берилиб келинган.

1997- йилдан республикамиз терма жамоаси Халқаро математика олимпиадаси (ХМО)да қатнашиб келмоқда. ХМО икки кунда ўтади ва ҳар куни 3 тадан, жами 6 та масала ечилади.

Олимпиада масалалари математиканинг қизиқарли масалаларига жуда ўхшайди. Аммо, олимпиада масалалари мақсадига кўра ўз олдига каттароқ вазифаларни қўяди. Олимпиада масалалари, одатда, ўқувчи, талабадан ўз билимини янгича ҳолларга қўллашни, натижада ўз билимини янада оширишни, ўз устида ишлаб иқтидорини — малакасини такомиллаштиришни, умумий қилиб айтганда бой фантазияга эга бўлишини талаб қилади.

Олимпиада масалаларини ечишга ўрганиш қизиқарли масалаларни ечишдан бошланади. Шунинг учун, уларнинг чегараси қаерда бошланиб қаерда тугашини аниқлаш мушкул. Масалан, қизиқарли масала бироз мураккаблаштирилса, олимпиада масаласи, шунингдек, олимпиада масаласи соддалаштирилса, қизиқарли масала ҳосил бўлади.

Ўқувчи қанча кўп масала ечишни билса, янги масалани билганларига taққослаб, ечиш йўлини қидириши ва топиши осонлашади. Демак, кўплаб масалалар ечиш керак. Шу мақсадда ушбу бўлим ёзилди.

3.2-§. ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

1. Агар $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ сонлари $x_1 \cdot x_2^2 \cdot ... \cdot x_n^n = 1$ шартни қаноатлантирса, қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + ... + \frac{n}{x_n} \geq \frac{n(n+1)}{2}$$

Исботи: Машҳур Коши тенгсизлигини қўллаймиз,

$$\frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + ... + \frac{n}{x_n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_3} + ... + \underbrace{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n} + ... \frac{1}{x_n}}_{n-марта} \geq \frac{n(n+1)}{2} \cdot \sqrt[\frac{n(n+1)}{2}]{\frac{1}{x_1 x_2^2 x_3^3 ... x_n^n}} = \frac{n(n+1)}{2}$$

исбот тугади.

Натижа. Агар a>0, b>0, c>0 сонлари учун $ab^2c^3 = 1$ тенглик ўринли бўлса, $\frac{1}{a} + \frac{2}{b^2} + \frac{3}{c^3} \geq 6$ тенгсизликни исботланг. Бу тенгсизлик юқоридаги тенгсизликнинг n=3 ҳолига тушади.

2. Агар $n \geq 2,$ ва $n \in N$ бўлса, қуйидаги тенгликни исботланг.

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} \leq n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}\right)$$

Исботи: Бунинг учун Коши тенгсизлигини бир марта қўллаш кифоя, яъни,

$$n - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \geq$$

$$\geq n\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)} = n\sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n+1}{n}} = n\sqrt[n]{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Бундан берилган тенгсизлик келиб чиқади.

3. $n \geq 3 (n \in N)$ ларда $(n+1)^n < n^{(n+1)}$ ни исботланг.

Исботи: Биз $x \geq 3$ да $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ функцияни қарайлик.

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,(x\geq 3)$. Бу эса, функциянинг $(x\geq 3)$ оралиқда камаювчи эканини билдиради. У ҳолда, $\forall n,n+1\in[3;+\infty)$ сонларига функцияни таъсир эттирсак: $n<n+1\Rightarrow f(n)>f(n+1)\Rightarrow\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln(n+1)}{n+1}=$
$$=(n+1)\ln n>n\ln(n+1)\Rightarrow n^{n+1}>(n+1)^n$$

эканлиги келиб чиқади.

4. Агар учбурчак томонлари учун $a^2+b^2=c^2$ тенглик бажарилса, $\forall n\geq 3(n\in N)$ сони учун $a^2+b^2<c^2$ тенгсизликнинг ўринли эканини исботланг.

$$a<c\Rightarrow a^{n-2}<c^{n-2}, b<c\Rightarrow b^{n-2}<c^{n-2}$$
$$a^n+b^n=a^2\cdot a^{n-2}+b^2\cdot b^{n-2}<a^2c^{n-2}+b^2\cdot c^{n-2}=c^{n-2}\cdot\left(a^2+b^2\right)$$
$$a^n+b^n<c^n$$

Натижа: $n\geq 3$ да $(\sin\alpha)^n+(\cos)^n<1.$

5. Агар $n\geq 2$ $|x|<1$ бўлса, $(1-x)^n+(1+x)^n<2^n$ тенгсизликни исботланг.

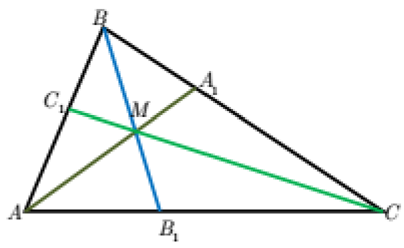
$|x|<1$ бўлгани учун $x=\cos\alpha$ деб белгилаб оламиз. Бу ерда $\cos\alpha=1,\cos\alpha=-1$ қийматларни қабул қилмайди деб оламиз. У ҳолда,

$$(1-\cos\alpha)^n+(1+\cos\alpha)^n=2^n\left(\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}+\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n}\right)<1.$$

Бундан эса берилган тенгсизликнинг исботи келиб чиқади.

6. *ABC* учбурчакнинг ичида ихтиёрий *M* нуқта олинган ва бу нуқтадан *AM, BM, CM* тўғри чизиқлар ўтказилган. Бу тўғри чизиқлар учбурчак томонларини, мос равишда A_1, B_1, C_1 нуқталарда кесиб ўтади. Қуйидаги тенгсизликни исботланг:

$$\frac{AM}{A_1M}+\frac{BM}{B_1M}+\frac{CM}{C_1M}\geq 6$$



Ечиш: Умумийликка зарар етказмасдан тенгсизликнинг ҳар иккала томонига 3 ни қўшамиз:

$$\frac{AM}{A_1M}+1+\frac{BM}{B_1M}+1+\frac{CM}{C_1M}+1\geq 6+3\Rightarrow\frac{AA_1}{A_1M}+\frac{BB_1}{B_1M}+\frac{CC_1}{C_1M}\geq 9$$ ни исботлаш кифоя.

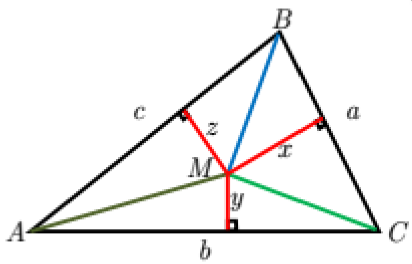
$$S_{BMC}=\frac{1}{2}A_1M\cdot BC\cdot\sin MA_1B, S_{ABC}=\frac{1}{2}AA_1\cdot BC\cdot\sin MA_1B\Rightarrow\frac{AA_1}{A_1M}=\frac{S_{ABC}}{S_{AMC}}$$

Худди шунга ўхшаш $\frac{BB_1}{B_1M}=\frac{S_{ABC}}{S_{AMC}},\frac{CC_1}{C_1M}=\frac{S_{ABC}}{S_{AMB}}$, энди

$$\frac{AA_1}{A_1M}+\frac{BB_1}{B_1M}+\frac{CC_1}{C_1M}=S_{ABC}\left(\frac{1}{S_{AMC}}+\frac{1}{S_{BMC}}+\frac{1}{S_{AMB}}\right)=\left(S_{AMC}+S_{AMB}+S_{BMC}\right)\left(\frac{1}{S_{AMC}}+\frac{1}{S_{BMC}}+\frac{1}{S_{AMB}}\right)\geq 9$$

охирги тенгсизлик ҳар бир қавс ичига Коши тенгсизлигининг n=3 ҳолини қўллаш орқали ҳосил қилинади.

7. *ABC* учбурчакнинг ичидаги *M* нуқта қандай жойлашганда ушбу $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}$ йиғинди энг кичик қиймат қабул қилади. Бу ерда *a*, *b*, *c* учбурчак томонларининг узунликлари ва x, y, z лар, мос равишда, *BC*, *AC*, *AB* томонларгача бўлган масофалар.



Ечиш:

$$S_{AMB}=\frac{1}{2}cz, S_{AMC}=\frac{1}{2}by, S_{CMB}=\frac{1}{2}ax, S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c,$$

$$\Rightarrow\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}=\frac{S_{AMB}+S_{AMC}+S_{CMB}}{S_{ABC}}=1$$

эканидан фойдаланамиз. Энди $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\left(\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}\right)$

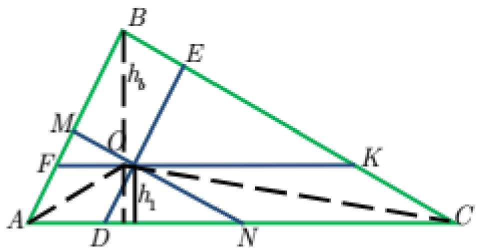
кўпайтмага Коши-Биняковский тенгсизлигини қўллаймиз, у ҳолда

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)\left(\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}\right)\geq\left(\sqrt{\frac{a}{h_a}}+\sqrt{\frac{b}{h_b}}+\sqrt{\frac{c}{h_c}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{\sqrt{2S}}+\frac{b}{\sqrt{2S}}+\frac{c}{\sqrt{2S}}\right)^2=\frac{\left(a+b+c\right)^2}{2S}=\frac{(a+b+c)^2}{2\cdot\frac{1}{2}\left(a+b+c\right)r}=\frac{a+b+c}{r}.$$

Коши–Бунёковский тенгсизлиги да тенглик белгиси $\frac{\frac{a}{x}}{\frac{x}{h_a}}=\frac{\frac{b}{y}}{\frac{y}{h_b}}=\frac{\frac{c}{z}}{\frac{z}{h_c}}\Rightarrow\frac{ah_a}{x^2}=\frac{bh_b}{y^2}=\frac{ch_c}{z^2}\Rightarrow x=y=z=r$ да бажарилади. У ҳолда, M нуқта учбурчакнинг биссектрисалари кесишган нуқтада бўлар экан.

8. ABC учбурчак ичида ихтиёрий O нуқта олинган ва бу нуқтадан учбурчак томонларига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. $AB\parallel DE, BC\parallel MN, AC\parallel FK$. Бу ерда $F,M\in AB; E,K\in BC; D,N\in AC$. У ҳолда, қуйидаги тенгликни исботланг:



$$\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{AC}=1$$

Ечиш:

$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{AC}{2}\cdot h_1}{\frac{AC}{2}\cdot h_b}=\frac{h_1}{h_b}=\frac{AF}{AB}$ чунки, $\sin A=\frac{h_b}{AB}=\frac{h_1}{OD}=\frac{h_1}{AF}$ худди шунга ўхшаш

$\frac{S_{BOC}}{S_{ABC}}=\frac{CN}{AC}$ ва $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow\frac{AF}{AB}+\frac{BE}{BC}+\frac{CN}{AC}=\frac{S_{AOC}+S_{AOB}+S_{BOC}}{S_{ABC}}=1$

9. Қуйидаги йиғиндини топинг.

1) $C_n^0+C_n^2+C_n^4+C_n^6+\dots;$

2) $C_n^1+C_n^3+C_n^5+C_n^7+\dots;$

Ечиш: $\begin{cases}2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+C_n^4+\dots\\0^n=(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+C_n^5-\dots\end{cases}$ бу тенгликларни қўшсак,

$2\left(C_n^0+C_n^2+C_n^4+\dots\right)=2^n\Rightarrow C_n^0+C_n^2+C_n^4+\dots=2^{n-1}$ га эга бўламиз. Юқоридаги биринчи тенгликдан иккинчини айирсак,

$$2\left(C_n^1+C_n^3+C_n^5+\dots\right)=2^n\Rightarrow C_n^1+C_n^3+C_n^5+\dots=2^{n-1}$$

10. $arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{4}+arctg\frac{1}{5}+...+arctg\frac{1}{n}=\frac{\pi}{4}; n\in N$

Ечиш: Қуйидагиларни бажарамиз:

$$arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{4}=x-arctg\frac{1}{5}\Rightarrow tg\left(arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{4}\right)=tg\left(x-arctg\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{tgx-\frac{1}{5}}{1+\frac{tgx}{5}}\Rightarrow tgx=\frac{23}{24}\Rightarrow x=arctg\frac{23}{24}$$

$$arctg\frac{23}{24}+arctg\frac{1}{n}=\frac{\pi}{4}\Rightarrow tg\left(arctg\frac{23}{24}+arctg\frac{1}{n}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{4}=$$

$$=x-arctg\frac{1}{5}\Rightarrow tg\left(arctg\frac{1}{3}+arctg\frac{1}{4}\right)=tg\left(x-arctg\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{\frac{23}{24}+\frac{1}{n}}{1-\frac{23}{24n}}=1\Rightarrow n=47.$$

11. $N=100^2+99^2-98^2-27^2+...+4^2+3^2-2^2-1^2$ ва $N=x(\mathrm{mod}1000)$ бўлса, $x=?$

Ечиш: Оддийгина шакл алмаштириш бажарамиз:

$$100^2+99^2-98^2-27^2+...+4^2+3^2-2^2-1^2=(100-98)(100+98)+$$
$$+(99-97)(99+97)+...+(4-2)(4+2)+(3-1)(3+1)=$$
$$=2(198+196+190+188+...+6+4)=$$
$$=2\big((196+188+180+...+4)+(198+190+182+...+6)\big)=$$
$$2\left(\frac{196+4}{2}\cdot 25+\frac{198+6}{2}\cdot 25\right)=50\cdot 202=10100=10000+100$$
$$N=x(\mathrm{mod}1000)\Rightarrow x=100.$$

12. $a_{n+1}=\frac{n}{n+1}(a_n+1), a_1=0, n\in N; \textit{бўлса}, a_{2014}=?$

Ечиш: Математик индукция методидан фойдаланамиз:

$n=1;\quad a_2=\frac{1}{1+1}(a_1+1)=\frac{1}{2},$

$n=2;\quad a_3=\frac{2}{1+2}(a_2+1)=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)=1=\frac{2}{2},$

$n=3;\quad a_4=\frac{3}{1+3}(1+1)=\frac{3}{2},$

$n=k-1;\quad a_k=\frac{k-1}{2}$

деб фараз қиламиз. $n=k$ учун исботлаймиз.

$$a_{k+1}=\frac{k}{k+1}\cdot\left(\frac{k-1}{2}+1\right)=\frac{k}{k+1}\cdot\frac{k+1}{2}=\frac{k}{2}.$$

Демак, $\forall n\in N$ лар учун $a_n=\frac{n-1}{2}$ тенглик ўринли экан, бундан $a_{2014}=\frac{2013}{2}$ келиб чиқади.

13. Агар $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ бўлса, $f\left(f\left(f\left(f\ldots f\left(2008\right)\ldots\right)\right)\right)$ ни ҳисобланг.

Жавоб $\frac{2008}{\sqrt{1+2008^3}}$.

14. $f(x)$ квадрат учҳад $\left|f(x)\right|\le 1,(0\le x\le 1)$ шартни қаноатлантиради. У ҳолда, $f^{'}(0)$ нинг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш $f(x)=ax^2+bx+c$ кўринишда бўлсин. Масала шартига кўра,

$$\left|f(0)\right|=|c|\le 1,\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right|\le 1,\left|f(1)\right|=|a+b+c|\le 1\Rightarrow -3c\le 3,$$

$$4\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right)\le 4,-(a+b+c)\le 1\Rightarrow -3c+4\left(\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c\right)-(a+b+c)\le$$
$$\le 3+4+1=8\Rightarrow b\le 8$$

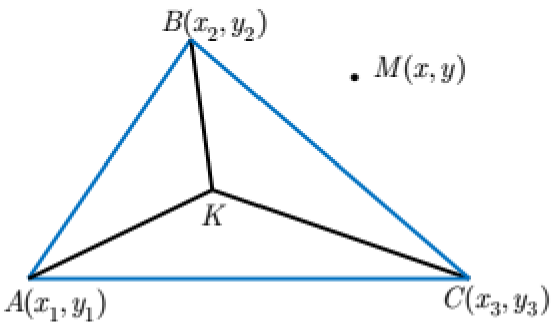
Аммо иккинчи томондан $f^{'}(0)=b\le 8.$

Демак, $f^{'}(0)$ нинг энг кичик қиймати 8 га тенг экан. Бу квадрат учҳадни қуриш осон. $f(x)=-8x^2+8x-1.$

Бунда, $f^{'}(0)=8$ тенглик бажарилади.

15. ABC учбурчакнинг томонлари *a, в, c* бўлсин. M нуқта учбурчак текислигидаги ихтиёрий нуқта бўлсин. $|MA|^2+|MB|^2+|MC|^2$ ифоданинг энг кичик қийматини топинг.

Ечиш.



$$MA^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$
$$MB^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$$
$$MC^2 = (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$
$$f(x, y) = MA^2 + MB^2 + MC^2 =$$
$$= (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (x - x_2)^2 +$$
$$+ (y - y_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2$$

$$f_x^{'} = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + 2(x - x_3) = 0$$
$$6x = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3$$
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$
$$f_y^{'} = 2(y - y_1) + 2(y - y_2) + 2(y - y_3) = 0$$
$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$
$$a_{11} = f_{xx}^{"} = 6 > 0$$
$$a_{12} = f_{xy}^{"} = 0; a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 6 > 0$$
$$a_{22} = f_{yy}^{"} = 6 > 0$$

Демак , (x, y) минимум нуқта $(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$

медианалар кесишган нуқта бўлади.

$$KB = \frac{2}{3} m_b ; KC = \frac{2}{3} m_c ; KA = \frac{2}{3} m_a$$

$$KB^2 + KA^2 + KC^2 = \frac{4}{9} m_a^2 + \frac{4}{9} m_b^2 + \frac{4}{9} m_c^2 = \frac{4}{9}\left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2\right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

МУСТАҚИЛ ЕЧИШ УЧУН МАСАЛАЛАР
I-БОБ. СОНЛАР НАЗАРИЯСИ ҲАҚИДА МАЪЛУМОТ

1-, 2-, 3-§.

1) Бир оролда 25 киши яшайди: рицерлар, ёлғончилар, айёрлар.

Рицерлар ҳар доим рост гапиради, ёлғончилар фақат ёлғон гапиради, айёрлар эса, берилган саволларга тартиб билан ёки ёлғон жавоб беради.

Ҳамма орол яшовчиларига учта савол берилди: “Сиз рицермисиз?”, “Сиз айёрмисиз?”, “Сиз ёлғончимисиз?”. Биринчи саволга 21 киши “Ҳа” деб жавоб берди, иккинчи саволга 17 киши, учинчи саволга 9 киши жавоб берди. Бу оролда нечта айёр яшайди.

2) Ўқувчи иккита сон ўйлади, иккаласи хам қатъий бирдан катта ва сонлар йиғиндиси 99 дан кичик. Бир академик уларнинг кўпайтмасини, иккинчиси эса уларнинг йиғиндисини айтди.

Академикларнинг диалоги (Ким йиғиндисини билса, ўша бошлайди):

- Мен тушунолмай турибман, кўпайтма сизга нима чиқди.

- Мен биламан, менда кўпайтма қандай сон чиққанини сизлар билмайсизлар.

- Энди мен бу сонларни биламан.

- Энди мен ҳам у сонларни биламан.

Савол: бу қандай сонлар?

3) Анчадан бери кўришмаган икки одам кўришиб қолди. Болалари ҳақида гап кетди.

- Сени болаларинг борми?
- Учта.
- Уларнинг ёши қанақа?
- Ёшларининг йиғиндиси 13 га тенг.
- Аниқроқ айтинг?
- Ёшларининг кўпайтмаси шу уйнинг ойналар сонига тенг.

- Яна мураккаблаштирдингиз.
- Энг каттаси сариқчадан келган.
- Энди, ҳаммаси тушунарли.

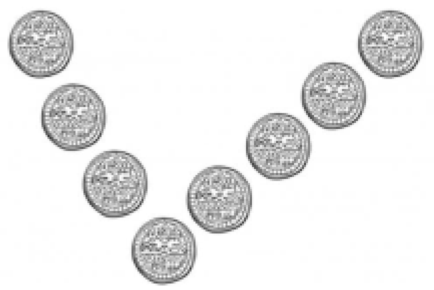
Савол: уларнинг ёши қандай?

Тангалар

4) Ўнта тўдада тангалар бор, ҳар бирида 10 тадан танга, бир тўдада ҳамма тангалар соҳта. Битта соҳта танга ҳақиқийдан 1 гр га кўп. Ҳақиқий танганинг оғирлиги маълум. Соҳта тангаларни тўдадан қандай қилиб энг кичик ўлчамда аниқласа бўлади? Тарозини танлаш сизга ҳавола.

5) 63 та танга ичида 7 таси соҳта. Ҳамма соҳта тангалар бир хил оғирликда ва хақиқий тангалар сохтадан оғиррок. Лалилик тарозида уч марта ўлчаб туриб, 7 та хақиқий тангани аниқланг? (тарозисиз)

6) Битта тангани шундай кўчирингки, иккала қаторда ҳам бештадан танга бўлсин. Қатор тўғрилигича қолсин. (1-расм).



7) Икки ўйинчи фақат бирдан бешгача бўлган сонлар ичидан хоҳлаганини навбат билан айтиб, кетма- кет қўшиб боради. Ким 50 сонини айтса, ўша ютади.

8) Биринчи ва учинчи рақамлари бир-биридан фарқ қиладиган уч хонали сон ёзинг. Биринчи ва учинчи рақамларининг ўрнини алмаштиринг. Шу икки сонларнинг каттасидан кичигини айиринг. Ҳосил бўлган сонни 99 га бўлинг. Қандай қилиб бўлинманинг нечага тенглигини тез ҳисоблаш мумкин?

9) Биринчи ва учинчи рақамлари бир-биридан 1 дан кўпроққа фарқ қиладиган уч хонали сон ёзинг. Биринчи ва учинчи рақамларининг ўрнини алмаштиринг. Шу икки сонларнинг каттасидан кичигини айиринг.

Айирмадаги биринчи ва учинчи рақамларнинг ўрнини яна алмаштиринг. Ҳосил бўлган сонни биринчи айирмага қўшинг. Натижада 1089 ҳосил бўлади. Нима учун?

10) Икки ўйинчи навбат билан фақат 1, 2 ёки 3 сонларидан хоҳлаган бирини айтади. Айтилган сонлар қўшиб борилади. Ким айтган навбатдаги сон қўшилганда йиғинди 21 чиқса, ўша ютади.

11) Ҳарфлар ўрнига рақамлар қўйиб йиғиндини топинг:

$$
+\begin{array}{r} ab8 \\ aba \\ \hline 5b0 \end{array}
\qquad
+\begin{array}{r} a3ba \\ 3a5b \\ \hline 10000 \end{array}
\qquad
+\begin{array}{r} ab75 \\ 6ba \\ \hline 3007 \end{array}
\qquad
+\begin{array}{r} abc \\ cba \\ \hline 888 \end{array}
\qquad
+\begin{array}{r} aa \\ a2 \\ \hline bab \end{array}
$$

12) Икки хонали сонни икки хонали сонга кўпайтирилса, кўпайтмада биринчи рақами 9 бўлган тўрт хонали сон ҳосил бўлган қуйидаги ребусни ечинг:

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} ** \\ ** \end{array} \\
+\begin{array}{r} ** \\ *** \end{array} \\
9***
\end{array}
$$

Бу мисолнинг бошланғич кўринишини тиклай оласизми?

13) Сонли ребусда бир хил ҳарфлар бир хил сонни, ҳар хил ҳарфлар ҳар хил сонни ифодалайди. Қуйидаги ребусларни ечинг:

а) АБ·СД=БББ;

б) ДРАМА+ДРАМА=ТЕАТР;

с) БОЛ:ОЛ=ОЛ;

д) ОТ+ОТ+ОТ=МОТ;

е) ТИЛАК·4=КАЛИТ;

ё) ВАГОН+ВАГОН=СОСТАВ;

ж) Т+ИТ+БИТ+ОБИТ+СОБИТ=ВОСИТ.

14) Агар Б ҳарфи иккига тенг бўлса, кўпайтмадаги Н ўрнида қандай сон бўлиши мумкин? БЕР·Х=НОН

15) Юлдузча ўрнида қандай сон бўлиши мумкин? *·А=*А

16) КЕНГУРУ сўзида ҳар бир ҳарф битта рақамни, турли ҳарфлар турли рақамларни ифодалайди. КЕНГУРУ+КЕНГУРУ йиғиндида тоқ сонлар энг кўпи билан нечта бўлиши мумкин?

17) Юлдузчалар ўрнига тегишли рақамларни қўйинг.

+ *7	- *2	× **	× **
1*	3*	9	9
**5	6	19*	57*

18) Юлдузчалар ўрнига қандай рақамлар қўйилса, амаллар тўғри бажарилган бўлади?

2*	3*	5*	*3	*5	*7
+ 35	+ 56	+ 27	+ 46	+ 27	+ 58
*8	*4	*3	8·	7*	*3*

19) Юлдузчалар ўрнига мос рақамларни қўйинг:

× *1*	× **5	× *2*
3*2	1**	57
+ *3*	+ 2**5	+ 22*8
3*2*	13*0	*6**
*2*5	***	*****
1*8*30	4*77*	

20) Юлдузчалар ўрнига мос рақамларни қўйинг:

**01*	19	12*1	*
	200*		*83
		7	

1.4-§.

Тенгликни исботланг:

1. $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in N.$

2. $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}, \forall n \in N$

3. $1^5+2^5+3^5+...+k^5=\frac{k^2(k+1)^2(2k^2+2k-1)}{12}$

4. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

5. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

6. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

7. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

8. $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2$;

9. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

10. $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

11. $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$;

12. $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$;

13. $\frac{1^2}{1\cdot3}+\frac{2^2}{3\cdot5}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

14. $\frac{3}{1^2\cdot2^2}+\frac{5}{2^2\cdot3^2}+\frac{7}{3^2\cdot4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}$;

15. $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$;

16. $\text{Cos}\alpha\cos2\alpha\ldots\cos2n\alpha=\frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$.;

17. $\sin\alpha+\sin2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{n\alpha}{2}$.;

18. $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$;

19. $\sin\alpha+2\sin2\alpha+\ldots+n\sin n\alpha=\frac{(n+1)\sin n\alpha-n\sin(n+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;

20. Математик индукция методидан фойдаланиб,

« (n∈N) « (x,y∈R^+) лар учун $\frac{x^n+y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ бўлишини исботланг:

21. (n∈N) n>1 ва a>-1, a≠0 учун $(1+\alpha)^n>1+n\alpha$ бўлишини исботланг:

22. (n∈N) n≥5 учун $2^n> n^2$ бўлишини исботланг:

23. (n∈N) n>3 учун $2^2>2n+1$ бўлишини исботланг:

24. (n∈N) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}>\frac{n}{2}$ бўлишини исботланг:

25. (n∈N) $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1$ бўлишини исботланг:

26. Математик индукция методидан фойдаланиб, n нинг ихтиёрий натурал қийматларида қуйидагилар исботлансин:

1. $(11^{n+2}+12^{2n+1})$:133;
2. $(2^{n+2}\ 3^n+5n-4)$:25;
3. $(3^{2n+1}+40n-67)$:64;
4. $(41^n+24n-1)$:64;
5. (7^n+Zn-1):9;
6. $(4^{n+1}+3^{2n+1})$:7;
7. $(2^{2n-1}Z^{n+2}+1)$:11;
8. (m^3+20m):48, m=2;
9. $(7^{2n}-1)$:8;
10. $(4^{2n}-3^{2n})$:7;
11. $(n\cdot+6n^3+11n^2+6n)$:24;
12. $(4^n+15n-1)$:9.

27. Қонуният яратинг.

1. $2^{19^{99}}$, $2^{39\cdot41}$, $2^{41^{41}}$, $2^{3294\cdot4415}$.
2. $3^{19^{99}}$, $3^{39\cdot41}$, $3^{41^{41}}$, $3^{3294\cdot4415}$.
3. $4^{5^{1999}}$, $4^{39\cdot41}$, 4^{2005}, $4^{412!}$
4. $6^{19^{99}}$, $6^{39\cdot41}$, 6^{2005}, $6^{3294\cdot4415}$.
5. $7^{19^{99}}$, $7^{39\cdot41}$, $7^{41^{41}}$, $4^{412!}$

6. $8^{99^{199}}$, $8^{39\cdot 41}$, $8^{44433324}$, $8^{77^{77}}$,$8^{3294\cdot 4415}$ $8^{412!}$.

7. $9^{99^{199}}$, $9^{39\cdot 41}$, $9^{44433324}$, $9^{41^{41}}$, $9^{3294\cdot 4415}$,$9^{412!}$

28. Ушбу йиғиндини ҳисобланг.

$$1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \cdots + (-1)^{n-1} n^4$$

Кўрсатма. $1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ формуладан фойдаланинг.

29. Ушбу йиғиндини ҳисобланг.

$1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + \cdots + (-1)^{n-1} n^5$

Кўрсатма. Буни ечишда

$$1^5 - 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

формуладан фойдаланинг.

30. a) дастлабки k та тоқ сонлар 4-даражалари йиғиндиси;

b)дастлабки k та жуфт сонлар 4-даражалари йиғиндиси;

c) дастлабки $к$ та тоқ сонлар 5-даражалари йиғиндиси;

d) дастлабки $к$ та жуфт сонлар 5-даражалари йиғиндиси формуласини топинг.

31) Қуйидаги йиғиндиларни ҳисобланг.

a) $3^2 + 6^2 + 9^2 + \ldots + (3k)^2$;

b) $1^2 + 4^2 + 7^2 + \ldots + (3k-2)^2$;

c) $2^2 + 5^2 + 8^2 + \ldots + (3k-1)^2$.

II. БОБ. ТЕНГСИЗЛИКЛАРНИНГ ИСБОТЛАРИ

(Замонавий ва классик усулларда)

1. Агар $x, y > 0$ бўлса, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$ ни исботланг.
2. $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$ бўлса қуйидагини исботланг.

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq x_1(x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$$

3. $x, y, z > 0$ бўлса, $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$ ни исботланг.
4. $a, b, c > 0$ бўлса, $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$ ни исботланг.

5. $a, b, c > 0$ бўлса, $(a+1)(b+1)(c+a)(b+c) \geq 16abc$ ни исботланг.

6. Агар a, b, c — учбурчак томонлари бўлса,

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 4p$$ бўлишини исботланг.

7. Агар $\alpha, \beta, \gamma - ABC$ учбурчакнинг бурчаклари бўлса,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$$ эканини кўрсатинг.

8. Агар $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ бўлса,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} > 2$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

9. Агар $x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0$ бўлса,

$$\sqrt{\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n}} + \sqrt{\frac{x_2}{x_1 + x_3 + \cdots + x_n}} + \cdots + \sqrt{\frac{x_n}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}} > 2$$

бўлишини исботланг.

10. Агар $x \cdot y \cdot z = 1$ бўлса, $xy + yz + zx + x + y + z \geq 6$ бўлишини кўрсатинг.

11. Агар a, b, c учбурчак томонлари бўлса,

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

тенгсизликни исботланг.

12. Агар $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ бўлса, $ab + bc + ca \leq 1$ бўлишини исботланг.

13. Агар a, b, c -учбурчак томонлари, р-нинг ярим периметри бўлса,

а) $2\sqrt{(p-a)(p-b)} \leq c$

б) $\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)} \leq p$ бўлишини исботланг.

14. Ихтиёрий a, b, c -сонлари учун $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ac)$ тенгсизликни исботланг.

15. Ихтиёрий номанфий a, b, c-сонлари учун

$(a+b+c)(ab+bc+ac) \geq 9abc$ бўлишини кўрсатинг.

16. Агар $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ ва $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ бўлса,

$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$ тенгсизликни исботланг.

17. Агар $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$ бўлишини исботланг.

18. Агар $a \geq 0, b \geq 0$, бўлса, $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ бўлишини исботланг.

19. Агар $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса, $a(1-b) + b(1+c) + c(1-a) \geq 6\sqrt{abc}$ тенгсизликни исботланг.

20. Ихтиёрий учбурчак учун

1) $h_a \leq \sqrt{p(p-a)}$

2) $h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \leq p^2$

тенгсизликни исботланг. Бунда $h_a, h_b, h_c -$ учбурчак баландликлари.

21. Агар $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b], 0 < a < b$ бўлса,

$$n^2 \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab}n^2$$

тенгсизликни исботланг.

22. Агар $a_1 > 0,\ a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ бўлса,

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3} + \frac{a_2}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_{n-1}}{a_n + a_1} + \frac{a_n}{a_1 + a_2} > \frac{n}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

23. Агар $a > 0, b > 0, c > 0$ бўлса,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

24. Ихтиёрий учбурчак учун

1) $9r \leq p\sqrt{3}$

2) $r^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{9}S$

3) $p^2 \le \frac{27}{4} \cdot R^2$ тенгсизликларни исботланг.

25. (Руминия, 2005). Фараз қилайлик, мусбат a, b, c сонлар қуйидаги $a + b + c = 1$ шартни қаноатлантирсин. Тенгсизликни исботланг.

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}} + \frac{b}{\sqrt{c+a}} + \frac{c}{\sqrt{a+b}} \ge \sqrt{\frac{3}{2}}$$

26. (Украина 2005). Фараз қилайлик, мусбат a, b, c сонлар $a + b + c = 1$ шартни қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\sqrt{\frac{1}{a} - 1}\sqrt{\frac{1}{b} - 1} + \sqrt{\frac{1}{b} - 1}\sqrt{\frac{1}{c} - 1} + \sqrt{\frac{1}{c} - 1}\sqrt{\frac{1}{a} - 1} \ge 6$$

27. Фараз қилайлик, мусбат a, b, c сонлар $ab + bc + ca = 1$ шартни қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}} \ge 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

28. (АПМО, 2004). Мусбат a, b, c сонлар учун қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \ge 9(ab + bc + ca)$$

29. (АПМО, 2002). Фараз қилайлик, мусбат a, b, c сонлар $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ шартни қаноатлантирсин. Қуйидаги тенгсизликни исботланг.

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \ge \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

30. **Теорема:**

$i_1, ..., i_n$ сонли кетма-кетлик берилган бўлиб, $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$, $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ шартни қаноатлантирсин. У ҳолда,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \ge a_1b_{i_1} + \ldots + b_na_{i_n} \ge a_1b_n + \ldots + a_nb_1.$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исботланг.

III. БОБ ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

1. $x^5 - 2x^4 + x^3 - x + 3$ кўпҳадни $x^2 + 2$ га бўлгандаги қолдиқни топинг.

2. $2^{2^{n}}+1; (n=2,3,...)$ кўринишдаги барча сонлар 7 рақам билан тугашини исботланг.

3. Тўртта кетма – кет жойлашган бутун сонлар кўпайтмасига бир қўшилганда тўлиқ квадрат ҳосил бўлишини исботланг.

4. Рақамлар йиғиндиси бир хил бўлган икки сон айирмаси 9 га бўлинишини исботланг.

5. Кетма – кет келган тўртта рақам бирин-кетин ёзилган бўлиб, дастлабки иккита рақам ўрни алмаштирилгандан сўнг тўла квадрат бўлган тўрт хонали сон ҳосил қилинган. Шу сонни топинг.

6. (Россия, Санкт –Петербург, 1998). Ихтиёрий натурал *n* сони учун $(n^2,(n+1)^2)$ оралиқда $c \mid a^2+b^2$ шартни қаноатлантирадиган бир–бирига тенг бўлмаган *a*, *b*, *c* сонлар мавжудлигини исботланг.

7. (Россия, 2001). Маълумки, натурал *n* сонниг иккита ўзаро туб бўлган *a b* бўлувчилари учун *a*+*b*-1 сон ҳам *n* сонниг бўлувчиси бўлади. *n* сон топилсин.

8. (Россия, Санкт –Петербург, 1996). Шундай натурал *n* сонлар топилсинки, улар учун $3^{n-1}+5^{n-1} \mid 3^n+5^n$ муносабат ўринли.

9. (39–ХМО). Шундай натурал *a, b* сонлар топилсинки, улар учун

$a\,b^2+b+7 \mid a^2\,b+a+b$ муносабат ўринли.

10. (Болгария, 1995). Шундай натурал *a, b* сонлар топилсинки, улар учун $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ сон бутун бўлиб, 1995 сонига бўлинади.

11. (25–ХМО). Маълумки, $0 < a < b < c < d$ ва $ad = bc$ муносабатларни қаноатлантирадиган *a, b, c, d* тоқ сонлар учун $a+d=2^k$ ва $b+c=2^m$ тенгликлар бажарилади (бу ерда $k,m \in Z$). $a = 1$ тенглик бажарилишини исботланг.

12. (Ирландия, 1995). 1995 дан кичик ихтиёрий $n=p_1p_2p_3p_4$ кўринишдаги (бу ерда p_1,p_2,p_3,p_4 – ўзаро тенг бўлмаган туб сонлар) натурал сонниг

$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{16} = n$ натурал бўлувчилари учун $d_9 - d_8 \neq 22$ бўлишини исботланг.

13. (28–ХМО). $n \geq 2$ – натурал сон берилган бўлсин.

Агар барча $0 \leq k \leq \sqrt{\frac{n}{3}}$ бутун сонлар учун $k^2 + k + n$ сон туб бўлса, у ҳолда барча $0 \leq k \leq n-2$ бутун сонлар учун ҳам $k^2 + k + n$ сон туб сон бўлишини исботланг.

14. (Бонсе тенгсизлиги). $p_1 = 2, p_2 = 3,$ туб сонларнинг ўсувчи кетма кетлиги учун

$$p_1 p_2 \dots p_n > p_{n+1}^2$$

тенгсизликни исботланг, бу ерда $n \geq 4$.

15. (42–ХМО). $a > b > c > d$ натурал сонлар

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

тенгликни қаноатлантирса, $ac + bd$ сон туб бўлмаслигини исботланг.

16. $a_0, a_1, a_2, \dots$.кетма- кетлик

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = P(a_n) \quad (n \geq 0)$$

формулалар ёрдамида аниқлансин, бу ерда $P(x) - x \geq 0$ ларда $P(x) > 0$ шартни қаноатлантирадиган бутун коэффициентли кўпҳад. Барча натурал m ва k лар учун $(a_m, a_k) = a_{(m,k)}$ тенгликни исботланг.

17. Тенгламани ечинг. $a)\ \left[\frac{x^2-3x}{2}\right] = 1;$

b) $\left[\frac{3x-1}{3}\right] = 5;$ c) $[x]^2 = [x^2]$.

18. Бутун қисмнинг қуйидаги ҳоссаларини исботланг:

1) $[x] \leq x$; 2)$[x + a] = [x] + a$, бу ерда a –ихтиёрий бутун сон;

3) $[x + y] \geq [x] + [y]$, бу ерда x ва y–ихтиёрий сонлар.

4) x–ихтиёрий сон учун $[x+a]=[x]+[a]$ бўлса , у ҳолда a – бутун сон.

19. $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y]$ эканлигини исботланг.

20. Ихтиёрий k натурал сон учун $\{ k \{ x \}\} =\{ kx \}$ ни исботланг ва $\{3\{x\}\}=x$ тенгламани ечинг.

21. Тенгламани ечинг: $\{3x\} = \frac{1}{2}$;

22. $[x] \cdot \{x\} \geq 3$ тенгсизликни қаноатлантирадиган энг кичик x мусбат сонини топинг.

23. Ихтиёрий $x \geq 0$ да $\left[\left[\sqrt{[x]}\right]\right] = \left[\sqrt{x}\right]$ ни исботланг.

24. Ихтиёрий n натурал сон учун $\left\{\left\{\left(5+\sqrt{26}\right)^n\right\}\right\} < \frac{1}{10^n}$ эканлигини исботланг.

25. (Россия -2003). Мусбат a, b, c сонлар $a+b+c=1$ тенгликни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c} \geq \frac{2}{1+a}+\frac{2}{1+b}+\frac{2}{1+c}$$

тенгсизликни исботланг.

26. (Молдова -2005).Мусбат a, b, c сонлар $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ тенгликни қаноатлантирса,

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-ac}+\frac{1}{4-bc} \leq 1$$

тенгсизликни исботланг.

27. (Корея-2000). Айтайлик, a, b, c, x, y, z ҳақиқий сонлар қуйидаги

$a \geq b \geq c > 0$, $x \geq y \geq z > 0$ шартларни қаноатлантирсин, у ҳолда

$$\frac{xb^2}{(by+cz)(bz+cy)}+\frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)}+\frac{a^2b^2}{(ax+by)(ay+b)} \geq \frac{3}{4}$$

тенгсизликни исботланг.

28. (Япония-2002). Айтайлик, $n \geq 3$ ва $n \in N$ да мусбат $a_1, a_2, ..., a_n$,; $b_1, b_2, ..., b_n$ сонлар қуйидаги $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1$ ва $b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2 = 1$ шартларни қаноатлантирсин. У ҳолда, $a_1(b_1 + a_2) + a_2(b_2 + a_3) + ... + a_n(b_n + a_1) < 1$ тенгсизликни исботланг.

29. Мусбат a, b, c сонлар $a + b + c = 1$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+b}} \leq \frac{3}{2}$$

тенгсизликни исботланг.

30. (Эрон -2005). Мусбат a, b, c сонлар учун

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

тенгсизликни исботланг.

31. (Венгрия -1996). Мусбат a, b сонларнинг йиғиндиси бирга тенг бўлса,

$$\frac{a^2}{a+1}+\frac{b^2}{b+1} \geq \frac{1}{3}$$

тенгсизликни исботланг.

32. Ҳақиқий мусбат x, y, z сонлар $xyz \geq 1$ шартни қаноатлантирса,

$$\frac{x^5}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5}{z^5+x^2+y^2} \geq 1$$

тенгсизликни исботланг.

33. (ХМО, Халқаро Математика олимпиадаси-2005). Мусбат x, y, z сонлар $xyz \geq 1$ шартни қаноатлантирса,

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0$$

тенгсизликни исботланг.

34. (Босния -2002). Агар мусбат x, y, z сонлар $xyz = x + y + z + 2$ тенгликни қаноатлантирса,

$$5(x+y+z)+18 \geq 8(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг.

35. (АПМО -2005). Мусбат a, b, c сонлар $abc=8$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда,

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^{3})(1+b^{3})}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^{3})(1+c^{3})}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^{3})(1+a^{3})}} \geq \frac{3}{4}$$

тенгсизликни исботланг.

36. (Россия-1999). Мусбат ҳақиқий x ва y сонлар $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$ тенгсизликни қаноатлантирса, у ҳолда $x^3 + y^3 \leq 2$ тенгсизликни исботланг.

37. Тенгламанинг натурал ечимини топинг.

$$x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=y^2-12.$$

38. Тенгламанинг бутун ечимини топинг. $x^2+1=3y$.

39. Тенгламанинг бутун ечимини топинг. $x^3-y^3=91$.

40. Тенгламанинг барча бутун ечимини топинг. $x^3-3xy+2y^2=3$

41. Тенгламанинг *x, y, z* га нисбатан натурал ечимларини топинг.

$$(x-y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)=2005.$$

42. Тўғри бурчакли Декарт координаталари системасида $M(1;-\sqrt{3})$ нуқта берилган. Агар қутб координаталари боши билан қутб ўқи абсциссаси ўқининг мусбат йўналиши билан устма–уст тушса, *M* нуқтанинг қутб координаталарини топинг.

43. *a, b, c* арифметик прогрессияни ҳосил қилади. Томонлари *a, b, c* бўлган учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

44. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ элипс берилган. (-2;1) нуқта орқали шу нуқтада тенг иккига бўлувчи ватарлар ўтказилсин.

45. λ нинг қандай қийматида $x^3-\lambda x+2$ ва $x^2+\lambda x+2$ кўпҳадлар умумий илдизга эга бўлади.

46. $x^2+y^2+ay=0;(a>0)$ айлана марказидан $y=2(a-x)$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

47. $500!=13^m$ (*m* натурал сон) *m* нинг энг катта қийматини топинг

48. Агар $k=2010^2+2^{2000}$ бўлса, (k^2+2^k) нинг охирги рақамини топинг.

49. Нечта (*a*,b) бутун сонлар учун ЭКУБ(*a*,b)=1 ва $\frac{a}{b}+\frac{14b}{9a}$ бутун сон бўлади.

50. $ax=by=cz=k$ ва $x+y+z=k^2$ бўлса, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=?$

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

I-БОБ. СОНЛАР НАЗАРИЯСИ ҲАҚИДА МАЪЛУМОТ

1. 13
2. 4 ва 13
3. 9, 2 ва 2
4. Бир маротаба ўлчаш орқали.
5. 31+31+1, 15+15+1, 7+7+1.
6. Юқоридаги тангани ўнг қатордаги энг пастки қисмига қўйилади.

7. Алгоритмни билган ўқувчи ютади. Тескарисига санаб чиқайлик: сиз 44 сонини айтсангиз, рақибингиз 1 дан 5 гача бўлган сонни айтиб, 45 дан 49 гача бўлган сонларни ҳосил қилади. Сиз энди 1 дан 5 гача сонлардан бирини айтиб, 100 ни ҳосил қиласиз ва ўйинда ғолиб чиқасиз. 44 деб айтиш учун 38 ва ҳоказо 8 учун 2 деб айтиш керак. Демак, биринчи ўқувчи алгоритмни билиб, 2 деб бошласа ва рақиби неччи қўшса ҳам 8 ва ҳоказо 44 гача айтса, ўйинда ютади.

8. Танланган уч хонали соннинг биринчи ва иккинчи рақамларини олиб, уларнинг каттасидан кичиги айирилади. Масалан, 542 сони ёзилди. Унинг биринчи ва учинчи рақамлари ўрни алмаштирилса, 245 сони ҳосил бўлади. Бу сонларнинг айирмаси 542-245=297 бўлади. Уни 99 га бўлсак: 297:99=3 ҳосил қилинади. Бу натижани осонгина ҳосил қилиш мумкин. Танланган 542 сонининг биринчи ва учинчи рақамлари айирмаси ҳам учга тенгдир: 5-2=3.

9. Айирманинг ўртасидаги сон 9 га тенг. Биринчи ва учинчи рақамлар йиғиндиси ҳам 9 га тенг. Демак, йиғиндидаги сон 999+999=1089.

10. Ал-Хоразмий таклиф этган ва унинг номи билан боғлиқ бўлган алгоритмни билган ўқувчи ютади. Тескарисига санаб чиқайлик: 17 сонини айтсангиз, рақибингиз 1, 2, ёки 3 сонини айтади ва уни қўшганидан кейин 18, 19 ёки 20 ҳосил бўлади. Сиз энди бу учта сондан бирини айтиб, 21 ни ҳосил қиласиз ва ўйинда ғолиб чиқасиз. 17 деб айтиш учун 14, 14 учун 10, 10 учун 6, 6 учун 2 деб айтишингиз керак. Демак, алгоритмни билиб, 2 деб бошласангиз ва рақибингиз неччи қўшса ҳам 6 ва ҳоказо 17 гача айтса, сиз ўйинда ютасиз.

11. 590,10000, 3007,888,191

12. 99x91=9009

13. а)125=5^3, 216=6^3, 729=9^3; б) 37x21=777 ёки 15x37=555; д) 18969+18969=37938; е) 625/25=25; ф)50+50+50=150; г) 21978x4=87912; х) 85679+85679=171358; ж) 5+65+765+8765+38765=48365

14. 217x4=868. Демак, Н=8.

15. 2,4,5,6 ёки 8.

16. 4567898+4567898=9135796

17. 97+18=115, 42-36=6, 22x9=198, 64x9=576.

18. 23+35=58, 38+56=94,56+27=83,43+46=89,45+27=72,77+58=135.

19. 415x382=158530, 325x147=47775, 324x57=18468.

20. 38019/19=2001, 1281/7=183

III. БОБ ОЛИМПИАДА МАСАЛАЛАРИ

21.1. x-5 2. **Ечиш.** $2^{2^2}+1=17=10\cdot 1+7.$ Агар $2^{2^n}+1=10\cdot q+7.$ У ҳолда, $2^{2^{n+1}}+1=\left(2^{2^2}\right)^2+1=(10\cdot q+6)+1=10Q+7.$ Исботланди.

22.3. **Ечиш.** (n-1),n,(n+1),(n+2) – тўртта кетма-кет келадиган бутун сонлар бўлсин. У ҳолда$(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n-1)(n+2)\left(n^2+n\right)+1=\left(n^2+n-1\right)^2.$

23.4. **Кўрсатма.** $N_1=9Q_1+\sum_{i=0}^{n}a_i; ва N_2=9Q_2+\sum_{j=0}^{m}b_j$ дан шартга кўра, $\sum a_i=\sum b_j$, демак, $N_1-N_2=9(Q_1-Q_2)$

24.5. **Кўрсатма.** Масала шартига кўра,

25. $N^2=1000(x+1)+100x+10(x+2)+(x+3)=11(101x+93).$

26. Бундан, $N=11k$ ва N тўла квадрат бўлганлигидан $11k^2=101x+93$, яъни $k^2=\frac{101x+93}{11}=9x+8+\frac{2x+5}{11}$. Бу ердан x=3 келиб чиқади. Демак, $N=11(101\cdot 3+93)=4356=66^2$

27. 7. n=12. 8.n=1. 9. $a=b=7$. 10. $a=(k+1)\cdot 1995$; $b=k\cdot 1995$ $k\in N$

28. 17. *b)* $5{,}4\le x\le 6{,}3$; c) $0<x<1$ 21. $\frac{2k+1}{2}$ 37. (4;6) 38. ечимга эга эмас

29. 39. (5;6),(-6;-5) (-3;4), (-4;3) 40. (-1;-2),(5;2),(1;2),(-5;-2) 41. (16;12;1)

30. 42. (2; $\frac{5\pi}{3}$) 43. $r=\frac{1}{3}h_b$ 44. $8x-9y+25=0$ 45. $\lambda_1=3$; $\lambda_2=-1$; 46. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$

31. 47. 40 48. 2 49. 4 та 50. k.

ФОЙДАЛАНИЛГН АДАБИЁТЛАР

1. Брадис В.М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. — М.: Учпедгиз, 1959.

2. Уфановский В. А. Математический аквариум. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая механика», 2000.

3. Соловьев Ю. П. Задачи по алгебре и теории чисел для математических школ. Ч. 1 - 3. — М.: школа им. А. Н. Колмогорова, 1998.

4. Соминский И. С. Метод математической индукции. Серия «популярные лекции по математике» — Вып. 3. — М.: Наука, 1974.

5. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. Серия «Популярные лекции по математике» — Вып. 43. — М.: Наука, 1979.

6. Аюпов Ш., Риҳсиев Б., Қучқоров О. «Математика олимпиадалар масалалари» 1,2 қисмлар. Т.: Фан, 2004

7. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. Серия «Популярные лекции по математике»— Вып. 39. — М.: Наука, 1963.

8. Баранова Т.А., Блинков А.Д., Кочетков К.П., Потапова М.Г., Семенов А.В./ Олимпиада для 5-6 классов. Весенний тур Архимеда, Москва 2003.

9. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.

10. Прасолов В.В., Голенищева-Кутузова Т.И., Канель-Белов А.Я., Кудряшов Ю.Г., Ященко И.В. Московские математические олимпиады 1935-1957 г., Москва 2010.

11. Куланин Е.Д., Норин В.П., Федин С.Н., Шевченко Ю.А./ 3000 конкурсных задач по математике, Москва 2003.

12. Яковлев И.В. Комбинаторика-олимпиаднику / Материалы по математике, Math.Us.ru

13. Галкин Е.В. Нестандартнқе задачи по математике / Челябенск 2004.

14. Абдурахмонов Б. Математик индукция методи / услубий қўлланма, Тошкент 2008 й.

15. Исмоилов Ш.Н. Сонлар назарияси /ўқув қўлланма, Тошкент 2008 й.
16. Исмаилов Ш., Қўчқоров А., Абдурахмонов Б. / Тенгсизликлар-1 исботлашнинг классик усуллари, ўқув қўлланма, Тошкент 2008.
17. Исмаилов Ш., Иброгимов О./ Тенгсизликлар-2 исботлашнинг замонавий усуллари, ўқув қўлланма, Тошкент 2008.
18. Юнусов А.С., Афонина С.И., Бердиқулов М.А., Юнусова Д.И., Қизиқарли математика ва олимпиада масалалари, услубий қўлланма, Тошкент 2007.
19. Абдуллаев Б.И., Хужамов Ж.И., Шарипов Р.А. / Математикадан олимпиада масалалари /услубий қўлланма, Урганч 2016.
20. А. Навоий номидаги СамДУ / Сонлар назарияси асосларидан масала ва машқлар, услубий қўлланма, Самарқанд 2011.
21. Мадрахимов Р.М., Камалов Н.Б., Юсупов Б.Б., Бекметова С.А. /Талабалар математика олимпиада масалалари., услубий қўлланма , Урганч 2014.
22. H. Lee. Problems in elementary number theory.
23. Math Links, http://www.mathlinks.ro
24. Art of Problem Solving, http://www.artofproblemsolving.com
25. Math Pro Press, http://www.mathpropress.com
26. Математические задачи, http://www.problems.ru

МУНДАРИЖА

Босишга 2020 йил 29 майдаги 05/1-сонли мажлис

қарори билан рухсат берилди.

Бичими 60х84 1/16. Офсет қоғози.

“Times New Roman” гарнитураси.

Шартли б.т. 9,25. Нашр б.т. 9,25.

Адади 100.

“ZEBO PRINTS” босмахонасида чоп этилди.

Манзил: Тошкент шаҳар, Яшнобод тумани 22-ҳарбий

Шаҳарча