ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЛТАЕВ АЗИЗ КУЗИЕВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИДА ОПТИМАЛ ПАНЖАРАЛИ КВАДРАТУР ВА ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

УДК: 519.652, 519.644

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ
ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

В.И. РОМАНОВСКИЙ НОМИДАГИ МАТЕМАТИКА ИНСТИТУТИ

БОЛТАЕВ АЗИЗ КУЗИЕВИЧ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНУВЧИ ФУНКЦИЯЛАР СИНФИДА ОПТИМАЛ ПАНЖАРАЛИ КВАДРАТУР ВА ИНТЕРПОЛЯЦИОН ФОРМУЛАЛАР

01.01.03 – Ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика
(физика-математика фанлари)

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ
бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси
АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM342 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «Ziyonet» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Алоев Рахматилло Джураевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Баротов Адизжон Садиевич физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Бухоро давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_________ 2021 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.Р. Марахимов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш раиси, т.ф.д., профессор

З.Р. Рахмонов
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.д.

Р.Д.Алоев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш хузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар, аксарият ҳолларда, зилзиланинг сейсмограммаларини таҳлил қилиш, оптик тизимлар ва синтез қилинган голограммаларни моделлаштириш, компьютер томографияси тасвирларини таҳлил қилиш масалаларига келтирилади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламаларнинг сонли аналитик ечимлари квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар орқали ифодаланиб, сонли алгебра, сонли интеграллаш назарияси, интерполяция, аппроксимация ва шу каби бошқа масалаларнинг тадқиқот объекти ҳисобланади. Шу сабабли дифференциалланувчи функциялар синфида экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларни тадқиқ этиш, маълум Гильберт фазосида қурилган оптимал квадратур формулаларнинг яқинлашиш тартибларини топиш ҳисоблаш математикасининг муҳим вазифаларидан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда жаҳонда турли функционал фазоларда аниқлиги юқори бўлган оптимал ва энг яхши квадратур, кубатур ҳамда интерполяцион формулалар кенг тадқиқ этилмоқда. Оптимал ва энг яхши квадратур, кубатур ҳамда интерполяцион формулалар чегаравий шартлар билан боғланган хусусий ҳосилалали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламаларни сонли-аналитик ечишда, аниқ ва хосмас интегралларни тақрибий ҳисоблашда, маълум функциялар фазоларида функцияларни яқинлаштиришда кенг қўлланилади. Шу сабабли дифференциалланувчи функциялар синфида оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларни қуриш, уларнинг хатоликларини баҳолаш мақсадли илмий тадқиқотлардан ҳисобланади.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг илмий ва амалий тадбиқига эга бўлган шаҳарсозлик муҳандислиги, саноат муҳандислиги, компьютер томографияси, геофизика масалаларини сонли-аналитик ечиш усулларини ишлаб чиқиш каби долзарб йўналишларга катта эътибор қаратилмоқда. Хусусан, турли фазоларда оптимал панжарали квадратур, кубатур ва интерполяцион формулалар қуриш, уларнинг хатоликларини Гильберт фазоларида баҳолаш бўйича муҳим натижаларга эришилди. «Функционал анализ, алгебра, дифференциал тенгламалар, математик физика, математик моделлаштириш, ҳисоблаш математикаси ва дискрет математика, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика» устувор йўналишлар бўйича ҳалкаро стандартлар даражасидаги илмий изланишлар олиб бориш ЎзР ФА В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятининг асосий вазифаларидан бири ҳисобланади[1]. Қарор ижросини таъминлашда квадратур ва интерполяцион формулалар ҳамда интерполяцион сплайн функцияларни қуриш, уларнинг хатоликларини баҳолаш муҳим аҳамиятга эга.

---

[1] Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2020 йил 7 майдаги “Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий- тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида”ги ПҚ-4708-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПҚ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2017 йил 20 апрелдаги ПҚ-2909-сон «Олий таълим тизимини янада ривожлантириш чора чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2018 йил 27 апрелдаги ПҚ-3682-сон «Инновацион ғоялар, технологиялар ва лойиҳаларни амалиётга жорий қилиш тизимини янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги, 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Квадратур формулалар дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишда асосий воситалардан ҳисобланади. Оптимал квадратур формулаларни қуриш учун янги алгоритмларни ишлаб чиқиш, функцияларнинг турли фазоларида уларнинг хатоликларини баҳолаш муҳим вазифалардандир. Ҳозирги вақтда тақрибий интеграллаш учун формулаларни оптималлаштириш масаласи – бу берилган функциялар фазосида хатолик функционали нормасининг минимумини топишдан иборат. Хатолик функционали нормасини коэффициентлар ва тугун нуқталар орқали минимумини топиш С.М. Никольский масаласи, фиксирланган тугун нуқталарда коэффициентлар орқали минимумини топиш эса А. Сард масаласи дейилади. Никольский ва Сард масалаларининг ечимлари мос равишда Никольский ва Сард маъносидаги оптимал квадратур формулалар деб номланади. Биз С.М. Никольский масаласига тўхталмаймиз. Бу борадаги илмий тадқиқотлар С.М. Никольский, Н.П. Корнейчук, А.А. Женсыкбаев ва бошқаларнинг ишларида келтирилган.

Сард маъносидаги оптимал квадратур формулаларни сплайнлар, φ - функциялар ва Соболев методлари ёрдамида қуриш мумкин. I.Schoenberg нинг ишида Сард маъносида қурилган оптимал квадратур формула ва натурал сплайнлар орасидаги боғлиқлик кўрсатилган. Турли фазоларда сплайн функциялар методи ёрдамида А.Сард, L.F.Meyers, I.Schoenberg, S.Silliman, G.Coman, А.А.Малюков, И.И.Орлов, P.Kohler ва бошқалар ишларида оптимал квадратур формулалар қурилган. Биринчи марта D.V.Ionescu нинг ишида φ-функциялар методи муҳокама қилинган. Бу метод ҳақида P. Blaga, G. Coman ларнинг ишларида тўлиқ маълумот берилган. A.Ghizzetti, A.Ossicini ва F.Lanzara ларнинг ишларида φ -функциялар методининг умумлашмаси келтирилган. Бунда D^r операторнинг ўрнига r - тартибли умумий чизиқли дифференциал оператордан фойдаланилган. Шуни таъкилаш жоизки, Соболев методи чизиқли дифференциал операторларнинг дискрет аналогларидан фойдаланишга асосланган. Ушбу метод орқали Сард маъносидаги оптимал квадратур формула коэффициентларининг аналитик кўринишлари олинади.

Гильберт ва Банах фазоларида асимптотик оптимал ва тартиб бўйича оптимал кубатур формулалар қуриш С.Л. Соболев, В.И. Лебедев, И.П. Мысовских, Ғ.Н. Салихов, М.Д. Рамазанов, В.И. Половинкин, В.Л. Васкевич, М.И. Исроилов, С.Ш. Шушбаев, Т.Ҳ. Шарипов, Ғ.П. Исматуллаев, Э.А. Шамсиев ва бошқаларнинг ишларида келтирилган. Маълум бир Гильберт фазоларда мос дифференциал операторларнинг дискрет аналогларига асосланиб, оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар, ярим нормага минимум берувчи интерполяцион натурал сплайнлар қуриш масалалари бўйича С.Л. Соболев, З.Ж. Жамалов, Х.М. Шадиметов, G.V. Milovanović, A. Cabada, А.Р. Ҳаётов, Ф.А. Нуралиев, Н.Д. Болтаевларнинг тадқиқотлари натижаларини алоҳида қайд этиш мақсадга мувофиқдир.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилган илмий-тадқиқот муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Математика институтининг илмий-тадқиқот режаларининг Ф4-ФА-Ф013 «Ноассоциатив ва операторлар алгебралари, динамик системалар, ҳамда уларнинг статистик физика ва популяцион биологияга тадбиқлари», ОТ-Ф4-86 “Гильберт фазоларида дифференциал ва интеграл тенгламаларни тақрибий ечишнинг оптимал методларини ишлаб чиқиш, ЁФА-Фтех-2018-13 “Сингуляр тенгламаларни тақрибий-аналитик ечишнинг оптимал алгоритмларини ишлаб чиқиш” мавзуларидаги лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади дифференциалланувчи функциялар синфида экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал панжарали квадратур ва интерполяцион формулаларни қуриш, уларнинг хатолик функционали нормасини ҳисоблашдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

$W_2^{(m,0)}$ Гильберт фазосида квадратур формулаларнинг экстремал функциясини топиш;

$W_2^{(m,0)}$ фазосида квадратур формулаларнинг хатолик функцонали нормасининг квадрати учун аналитик формула олиш;

$W_2^{(m,0)}$ фазосида оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларнинг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш;

$W_2^{(m,0)}$ фазосида оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар коэффициентларининг аналитик кўринишларини топиш;

$W_2^{(m,0)}$ фазосида қурилган оптимал квадратур формулаларнинг яқинлашиш тартибларини аниқлаш.

Тадқиқотнинг объекти квадратур ва интерполяцион формулалар, чизиқли дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари, хатолик функционаллари ва гильберт фазоларидан иборат.

Тадқиқотнинг предмети экстремал функциялар, экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар, $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ ва $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^{m}}{dx^{m}}+1$ дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ гильберт фазосидан олинган функциялардан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, ҳамда дифференциал тенгламалар назарияси, умумлашган функциялар, дискрет аргументли функциялар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

$W_2^{(m,0)}(0,1)$ фазосида экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган квадратур формулаларнинг экстремал функцияси топилган;

экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур формуланинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган;

m тоқ бўлганда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ ва $\frac{d^{8}}{dx^{8}}+2\frac{d^{4}}{dx^{4}}+1$ дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари қурилган;

$W_2^{(m,0)}$ фазосида $m=1,2,3$ бўлганда экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар коэффициентларининг аналитик кўринишлари олинган;

$W_2^{(m,0)}$ фазосида $m=1,2,3$ бўлганда экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал квадратур формулалар хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат**:**

қурилган дискрет оператор асосида Фурье қаторининг ўзгарувчан коэффициентлари сонли ҳисобланган;

оптимал панжарали квадратур формула ёрдамида мураккаб табиий тизимларда ҳосил бўладиган динамик жараёнларнинг математик моделлари қурилган;

кўндаланг тўлқинлар тарқалиши тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларни сонли ҳисоблаш схемалари қурилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги квадратур формулалар назарияси, ҳисоблаш математикаси, функционал анализ, дискрет аргументли функциялар назарияси методларини қўлланилганлиги, ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти диссертация ишида $W_2^{(m,0)}$ гильберт фазосида аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблашда, экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал панжарали квадратур формулалар ва интерполяцион формулалар қурилганлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти диссертация ишида қурилган оптимал панжарали квадратур ва интерполяцион формулалар аниқ интегралларни сонли ҳисоблаш усуллари ёрдамида кимё, шаҳарсозлик, электромеханика ва саноат муҳандисликлари масалаларини ечишга имкон бериши билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган оптимал панжарали квадратур ва интерполяцион формулалар қуриш бўйича олинган илмий натижалар асосида:

$\frac{d^6}{dx^6}-1$ дифференциал операторнинг $D_3\left[\beta\right]$ дискрет аналоги асосида қурилган оптимал квадратур формула ОТ-Ф4-02 рақамли “Математик физиканинг ҳолатлар тўплами чексиз бўлган моделлари термодинамикаси” амалий лойиҳасида интегро-дифференциал тўлқин тарқалиш тенгламасида интеграл ҳади ядроси бирор фазовий ўзгарувчиси бўйича чекли Фурье қатори кўринишига эга бўлганда ушбу қаторнинг ўзгарувчан коэффициентларини топиш масалаларини сонли ҳисоблашда қўлланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 28 сентябрдаги 89-03-3570-сонли маълумотномаси). Натижада, Фурье қаторининг ўзгарувчан коэффициентларини сонли ҳисоблашга имкон берган;

$W_2^{(3,0)}\left(0,1\right)$ фазосида функцияларни яқинлаштириш учун қурилган оптимал интерполяцион формула, А-13-38-“ Икки фазали муҳит ночизиқли тўлқин динамикаси учун тўғри ва тескари масалаларнинг назарий ва сонли тадқиқ қилиш” амалий лойиҳасида кўндаланг тўлқинлар тарқалиши тенгламалари учун тўғри ва тескари масалаларни сонли ҳисоблаш схемаларини ишлаб чиқишда қўлланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 20 октябрдаги 89-03-4075-сон маълумотномаси). Натижада, бир ўлчовли тескари динамик (шу жумладан, чизиқли бўлмаган) масалаларнинг шартли барқарорлигини баҳолашга имкон берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 10 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 6 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши.

Диссертация мавзуси бўйича жами 21 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 9 та мақола, жумладан 1 таси хорижий ва 8 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг «**Экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган квадратур формулаларнинг хатолик функционали нормасининг квадрати**» деб номланган биринчи бобида $W_2^{(m,0)}$ фазосида Сард маъносида оптимал квадратур формулалар қуриш масаласи қўйилган ва бу масаланинг биринчи қисми ечилган.

Қуйидаги квадратур формулани қараймиз

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta), \tag{1}$$

бунда $C[\beta]$ ва x_β $\left(x_\beta \in [0,1]\right)$ лар (1) квадратур формуланинг *коэффициентлари* ва *тугун нуқталари* дейилади, φ функция эса қуйидагича аниқланган $W_2^{(m,0)}$ чизиқли фазонинг элементидир

$$W_2^{(m,0)}(0,1) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \middle| \varphi^{(m-1)} \textit{ абсолют узлуксиз ва } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\right\}.$$

Ушбу функциялар синфи $W_2^{(m,0)}$ қуйидаги скаляр кўпайтма ёрдамида

$$\langle \varphi, \psi \rangle_m = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + \psi(x)\right)dx \tag{2}$$

гильберт фазоси бўлади.

Шунингдек, $W_2^{(m,0)}$ гильберт фазосида

$$\left\|\varphi \middle| W_2^{(m,0)}\right\| = \left\{\int_0^1 \left[\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

(2) скаляр кўпайтмага мос ярим норма киритилади. Унинг ноль элементи $\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x) = 0$ тенгламанинг ечимидир.

Интеграл ва квадратур йиғинди орасидаги қуйидаги айирма

$$\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) = (\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx \tag{4}$$

(1) – квадратур формуланинг хатолиги дейилади, ҳамда бу айирмага

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x - x_\beta) \tag{5}$$

кўринишга эга хатолик функционали мос келади. Бу ерда $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ − [0,1] кесмасининг характеристик функцияси, ҳамда $\delta(x)$ − Диракнинг дельта–функцияси.

Коши-Шварц тенгсизлигига асосан, қуйидаги баҳога эга бўламиз

$$\left|\left(\ell,\varphi\right)\right|\le\left\|\varphi\left|W_2^{(m,0)}\right.\right\|\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|.$$

Демак, $W_2^{(m,0)}$ фазода (1) квадратур формуланинг абсолют хатолиги қўшма фазодаги ℓ хатолик функционали нормаси ёрдамида юқоридан баҳоланади. Бундан, қуйидаги масалага эга бўламиз.

1-масала. (1) квадратур формуланинг (5) хатолик функционали $\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|$ нормасини ҳисоблаш.

(5) тенгликдан кўриниб турибдики, хатолик функционалининг $\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|$ нормаси $C\left[\beta\right]$ коэффициентларга ва x_β тугун нуқталарга боғлиқ.

$W_2^{(m,0)}$ фазода Сард маъносида оптимал квадратур формула қуриш учун қуйидаги масалани ечиш керак бўлади.

2-масала. $W_2^{(m,0)}$ фазода

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|=\inf_{C[\beta]}\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|$$

тенгликни қаноатлантирувчи $C\left[\beta\right]$ коэффициентларини топиш.

Хатолик функционали (5) нормасини ҳисоблаш учун қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи ψ_ℓ экстремал функция тушунчасидан фойдаланамиз

$$\left(\ell,\psi_\ell\right)=\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|\left\|\psi_\ell W_2^{(m,0)}\right\|. \qquad (6)$$

$W_2^{(m,0)}$ фазо гильберт фазоси бўлгани учун чизиқли узлуксиз функционалнинг умумий кўриниши ҳақидаги Рисс теоремасидан $W_2^{(m,0)}$ фазосида қуйидаги тенгликни қаноатлантирувчи ягона ψ_ℓ функция мавжуд

$$\left(\ell,\varphi\right)=\left\langle\psi_\ell,\varphi\right\rangle_m \qquad (7)$$

ва $\left\|\ell\right\|=\left\|\psi_\ell\right\|$, бунда $\left\langle\psi_\ell,\varphi\right\rangle_m$ бу $W_2^{(m,0)}$ фазосидаги ψ_ℓ ва φ функцияларнинг скаляр кўпайтмаси. (7) тенгламани ечиш билан шуғулланамиз. (7) тенгламанинг ўнг томонини бўлаклаб интеграллаш орқали қуйидагига эга бўламиз

$$\left(\ell,\varphi\right)=\left(-1\right)^m\int\limits_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}\left(x\right)+\psi_\ell^{(m)}\left(x\right)+\left(-1\right)^m\psi_\ell^{(m)}\left(x\right)+\left(-1\right)^m\psi_\ell\left(x\right)\right)\varphi\left(x\right)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}\left(-1\right)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}\left(x\right)+\psi_\ell^{(s)}\left(x\right)\right)\varphi^{(m-s-1)}\left(x\right)\Big|_0^1 .$$

Бу ердан, биз, m сонининг тоқ ва жуфт ҳоллари учун мос равишда қуйидаги тенгликларга келамиз: m- тоқ бўлганда

$$(\ell,\varphi)=(-1)^m\int_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}(x)-\psi_\ell(x)\right)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x)+\psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \tag{8}$$

ва m- жуфт бўлганда

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}(x)+2\psi_\ell^{(m)}(x)+\psi_\ell(x)\right)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x)+\psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \tag{9}$$

ψ_ℓ экстремал функцияни топиш учун m нинг мос келадиган қийматларига қараб (8) ёки (9) ифодаларни кўриб чиқиш зарурлиги аниқ.

Аввалига m - тоқ бўлсин, у ҳолда ψ_ℓ функциянинг ягоналигини инобатга олиб, қуйидаги тенгламани оламиз

$$\psi_\ell^{(2m)}(x)-\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x) \tag{10}$$

бунда

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x)+\psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \tag{11}$$

чегаравий шартлар ўринли.

Қуйидаги исботланган

Теорема 1. m - тоқ бўлганда (11) чегаравий шартлар билан берилган (10) тенгламанинг ечими (1) – квадратур формула ℓ хатолик функционалининг ψ_ℓ экстремал функцияси бўлиб у қуйидаги кўринишга эга

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+Y_m(x), \tag{12}$$

бунда

$$G_m(x)=\frac{\mathrm{sign}x}{2m}\cdot\left[\sinh(\mathrm{x})+\sum_{k=1}^{m-1}e^{x\cdot\cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)}\cdot\cos\left(x\sin\left(\frac{\pi k}{m}\right)+\frac{\pi k}{m}\right)\right] \tag{13}$$

ва

$$Y_m(x)=d_0e^{-x}+\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{2\pi k}{m}}\left[d_{1k}\cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)+d_{2k}\sin\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)\right], \tag{14}$$

d_0, d_{1k} ва d_{2k} – ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Бунда ℓ функционал $W_2^{(m,0)}$ фазода аниқланганлиги учун қуйидаги шартлар бажарилади

$$(\ell,e^{-x})=0\ , \tag{15}$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ , \tag{16}$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ . \tag{17}$$

Бу ердан $m-$тоқ бўлганда (1) – квадратур формула қуйидаги функцияларга аниқ бўлади деб хулоса қиламиз.

$$e^{-x},\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}$$

m жуфт бўлсин, у ҳолда ψ_ℓ функциянинг ягоналигини инобатга олиб, қуйидаги тенгламани оламиз

$$\psi_\ell^{(2m)}(x)+2\psi_\ell^{(m)}(x)+\psi_\ell(x)=\ell(x) \tag{18}$$

бунда

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x)+\psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1} \tag{19}$$

чегаравий шартлар ўринли.

Қуйидаги исботланган

Теорема 2. m- жуфт бўлганда (19) чегаравий шартлар билан берилган (18) тенгламанинг ечими (1) – квадратур формула ℓ хатолик функционалининг ψ_ℓ экстремал функцияси бўлиб у қуйидаги кўринишга эга

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+Y_m(x), \tag{20}$$

бунда

$$G_m(x)=\frac{\text{sign}x}{2}\cdot\sum_{k=1}^{m}e^{p_kx}\left(B_{1k}+B_{2k}\right), \tag{21}$$

ва

$$Y_m(x)=\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\left[r_{1k}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)+r_{2k}\sin\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)\right] \tag{22}$$

B_{1k}, B_{2k} ва p_k - маълум катталиклар, r_{1k} ва r_{2k} - ҳақиқий сонлар.

Бунда ℓ функционал $W_2^{(m,0)}$ фазода аниқланганлиги учун қуйидаги шартлар бажарилади

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ , \tag{23}$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ . \tag{24}$$

Бу ердан $m-$жуфт бўлганда (1) – квадратур формула қуйидаги функцияларга аниқ бўлади деб хулоса қиламиз.

$$e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m}{2}}.$$

Кейинчалик, (12) ва (20) топилган экстремал функцияларидан фойдаланиб, ℓ хатолик функционали нормасининг квадрати учун қуйидаги ифода топилган

$$\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|^2 = 2\sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\int_0^1 G_m(x-x_\beta)dx -$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N} C[\beta]C[\gamma]G_m(x_\beta - x_\gamma) - \int_0^1\int_0^1 G_m(x-y)dxdy\ . \qquad (25)$$

Шундай қилиб, 1-масала тўла ечиди.

Кейин, 1.4 – параграфда $W_2^{(m,0)}$ фазода $m-$ тоқ бўлганда (1)-кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формулаларнинг $C[\beta]$ коэффициентлар учун чизиқли тенгламалар системаси олинган. Ушбу системанинг ечими мавжуд ва ягоналиги исботланган. Ҳамда, бу ечим ℓ хатолик функционали нормасининг квадратига минимум бериши исботланган.

Таъкидлаш жоизки, $W_2^{(m,0)}$ фазода m- жуфт бўлганда ҳам, шунга ўхшаш натижаларни олиш мумкин.

Гильберт фазоларида оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларни қуришнинг Соболев методи дифференциал операторларнинг дискрет аналогларига асосланган ва оптимал коэффициентларнинг ошкор кўринишини олишга имкон беради. Ушбу диссертация ишида $W_2^{(m,0)}$ фазода оптимал формулаларни қуриш учун бизга баъзи бир дифференциал операторларнинг мос дискрет аналоглари керак бўлади.

«**Дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари**» деб номланган иккинчи боби керак бўладиган m - тоқ бўлганда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ ва $m=2;4$ бўлганда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ дифференциал операторларнинг дискрет аналогларини қуришга бағишланган.

Ушбу

$$D_m[\beta]*G_m[\beta]=\delta[\beta] \qquad (26)$$

тенгламанинг ечими $D_m[\beta]$, m - тоқ бўлганда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ ва $m=2;4$ бўлганда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ дифференциал операторларнинг мос дискрет аналоги дейилади. Бу ерда $G_m[\beta]$ бу m- тоқ бўлганда (13) тенглик билан ва $m=4$ бўлганда (21)–тенглик билан аниқланган $G_m(x)$ функцияларга мос дискрет аргументли функция. 2.1 параграфда m тоқ бўлганда $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ дифференциал операторнинг дискрет аналоги қурилган.

Қуйидаги исботланган

Теорема 3. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ дифференциал операторнинг m-тоқ бўлганда (26)-тенгликни қаноатлантирувчи $D_m\left[\beta\right]$ дискрет аналоги қуйидаги кўринишга эга

$$D_m\left[\beta\right]=\frac{m}{K}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\cdot\tau_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ M_1-\frac{K_1}{K}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\tau_k}, & \beta=0,\end{cases} \tag{27}$$

бунда $K,\,K_1,\,M_1,\;A_k,\tau_k$ – маълум катталиклар ва $|\tau_k|<1$.

2.2 параграфда $\frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$ операторнинг дискрет аналоги келтирилган, $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ операторнинг дискрет аналоги қурилган ва қуйидаги натижа олинган.

Теорема 4. $m=4$ да (26)-тенгликни қаноатлантирувчи $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ дифференциал операторнинг $D_4\left[\beta\right]$ дискрет аналоги қуйидаги кўринишга эга

$$D_4\left[\beta\right]=\frac{8}{F_1}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{3}A_{1k}\cdot\lambda_{1k}^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{3}A_{1k}, & |\beta|=1,\\ F_2+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_{1k}}{\lambda_{1k}}, & \beta=0,\end{cases} \tag{28}$$

$F_1,\,F_2,\;A_{1k},\lambda_{1k}$ – маълум катталиклар ва $|\lambda_{1k}|<1$.

2.3 параграфда $\frac{d^6}{dx^6}-1$ дифференциал оператор дискрет аналогининг барча хоссалари исботланган.

Қуйидаги натижа ўринли

Натижа 1. $\frac{d^6}{dx^6}-1$ дифференциал операторнинг $D_3\left[\beta\right]$ дискрет аналоги қуйидаги хоссалларни қаноатлантиради

1) $D_3\left[\beta\right]*e^{[\beta]}=0,$ 4) $D_3\left[\beta\right]*e^{\frac{[\beta]}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0,$

2) $D_3[\beta]*e^{-[\beta]}=0,$ 5) $D_3[\beta]*e^{-\frac{[\beta]}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0,$

3) $D_3[\beta]*e^{\frac{[\beta]}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0,$ 6) $D_3[\beta]*e^{-\frac{[\beta]}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0.$

Диссертациянинг «**Экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларнинг коэффициентлари**» деб номланган учинчи бобида $W_2^{(m,0)}$ фазода $m=1,2$ ва $m=3$ бўлганда оптимал квадратур формулаларнинг коэффициентлари топилган ва ℓ хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган. Бунда иккинчи бобнинг натижаларидан фойдаланилган, яъни $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$ ва $\frac{d^6}{dx^6}-1$ дифференциал операторларнинг $D_m[\beta]$ дискрет аналоглари қўлланилган. 3.1 параграфда $W_2^{(m,0)}$ фазода m - тоқ бўлганда оптимал коэффициентларни топиш алгоритми берилган.

3.2 параграфда $W_2^{(1,0)}$ ва $W_2^{(2,0)}$ фазоларда (1) кўринишдаги Сард маъносида квадратур формулаларнинг оптимал коэффициентлари келтирилган. Ушбу ҳоллардаги натижалар, $W_2^{(1,0)}$ и $K_2(P_2)$ фазоларда Х.М.Шадиметов ва А.Р.Хаётов ишларидаги олинган натижалар билан мос тушади.

$m=1$ бўлганда қуйидаги ўринли

Теорема 5. $W_2^{(1,0)}$ фазода (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга

$$C[\beta]=\begin{cases}\dfrac{e^h-1}{e^h+1}, & \beta=0,N,\\[2ex] \dfrac{2\left(e^h-1\right)}{e^h+1}, & \beta=\overline{1,N-1},\end{cases} \tag{29}$$

бу ерда $h=1/N$, $N=1,2,\ldots$.

$m=2$ бўлганда қуйидаги ўринли

Теорема 6. $W_2^{(2,0)}$ фазода (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга

$$\begin{aligned}C[0]=C[N]&=\frac{2\sin(h)-\left(h+\sin(h)\right)\cos(h)}{\left(h+\sin(h)\right)\sin(h)}+\frac{\left(h-\sin(h)\right)\left(\lambda_1+\lambda_1^{N+1}\right)}{\left(h+\sin(h)\right)\sin(h)\left(1+\lambda_1^{N+1}\right)}\\ C[\beta]&=\frac{4\left(1-\cos(h)\right)}{h+\sin(h)}+\frac{2h\left(h-\sin(h)\right)\sin(h)}{\left(h+\sin(h)\right)\left(h\cos(h)-\sin(h)\right)\left(1+\lambda_1^{N+1}\right)}\left(\lambda_1^{\beta}+\lambda_1^{N-\beta}\right)\end{aligned} \tag{30}$$

бу ерда $\beta=\overline{1,N-1}$, λ_1 – маълум катталик ва $|\lambda_1|<1$.

Кейинчалик, $m=3$ бўлганда (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари учун қуйидаги исботланган.

Теорема 7. $W_2^{(3,0)}$ фазода (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга

$$C[0]=1-\frac{T}{e^h-1}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\tau_k}{e^h-\tau_k}+\frac{n_k\tau_k^N}{\tau_k e^h-1}\right),$$

$$C[\beta]=T+\sum_{k=1}^{2}\left(m_k\tau_k^{\beta}+n_k\tau_k^{N-\beta}\right),\ \beta=1,...,N-1, \tag{31}$$

$$C[N]=\frac{Te^h}{e^h-1}+e^h\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\tau_k^N}{e^h-\tau_k}+\frac{n_k\tau_k}{\tau_k e^h-1}\right)-1,$$

$K,\ K_1,\ K_2,\ T, \tau_k$ маълум катталиклар ва $|\tau_k|<1$.

3.3 параграфда $W_2^{(3,0)}$ фазода (1) кўринишдаги оптимал квадратур формуланинг ℓ хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган ва қуйидаги натижа олинган.

Теорема 8. $W_2^{(3,0)}$ фазода (1) кўринишдаги Сард маъносида оптимал квадратур формуланинг (5) хатолик функционали нормасининг квадрати учун қуйидаги ўринли

$$\|\mathring{\ell}\|^2=1-\frac{(2N-1)T+C[0]+C[N]}{2}+Q_1+\frac{1}{6}Q_2+\frac{1}{3}Q_3, \tag{32}$$

бунда $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ маълум катталиклар.

Бундан ташқари, 3.4-параграфда $W_2^{(m,0)}$ фазода $m=1,2$ ва $m=3$ бўлганда оптимал интерполяцион формула коэффициентларининг ошкор кўринишлари келтирилган ва топилган.

Айтайлик, бизга $x_\beta\in[0,\ 1]$, $\beta\ =\ 0,\ 1,\ ...,\ N$ нуқталарда $y_\beta,\ \beta\ =\ 0,\ 1,\ ...,\ N$ қийматлар берилган бўлсин. Қуйидаги интерполяция масаласини қараймиз.

3–Масала. (3) ярим нормага минимум берувчи ва

$$S_m\left(x_\beta\right)=\varphi\left(x_\beta\right),\ \ \beta=0,1,...,N, \tag{33}$$

интерполяция шартларини қаноатлантирувчи $S_m(x)\in W_2^{(m,0)}$ функцияни топинг, бунда $x_\beta\in[0,\ 1]$ - интерполяция тугун нуқталари, $\varphi\left(x_\beta\right)=y_\beta$ - берилган қийматлар.

Шуни таъкидлаш жоизки, $m=1$ ва $m=2$ ҳоллардаги 3-масаланинг ечими бўлган $S_1(x)$ ва $S_2(x)$ натурал сплайнлар, Х.М.Шадиметов ва А.Р.Хаётовнинг ишларида $W_2^{(1,0)}$ и $K_2(P_2)$ фазоларда қурилган сплайнлар билан устма-уст тушади.

Биз $m=3$ бўлганда 3-масалани ўрганиб чиқдик ва унинг ечими учун қуйидаги формулани олдик

$$S_3(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_3\left(x-x_\gamma\right)+d_1e^{-x}+d_2e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+d_3e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \tag{34}$$

бунда $d_1,\ d_2$ ва d_3 - ҳақиқий сонлар.

3-масаланинг (34) кўринишдаги $S_3(x)$ ечими $N\geq 2$ бўлганда мавжудлини ва ягоналиги исботланган. $S_3(x)$ интерполяцион формуланинг $C_\gamma,\ \gamma=0,1,...,N,\quad d_1, d_2$ ва d_3 коэффициентлари учун қуйидаги система олинган

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G(x_\beta - x_\gamma) + d_1 e^{-x_\beta} + d_2 e^{\frac{x_\beta}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_\beta\right)$$

$$+d_3 e^{\frac{x_\beta}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_\beta\right) = \varphi(x_\beta),\ \beta=0,1,\ldots,N, \tag{35}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{-x_\gamma} = 0, \tag{36}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{\frac{x_\gamma}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_\gamma\right) = 0, \tag{37}$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{\frac{x_\gamma}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_\gamma\right) = 0. \tag{38}$$

Қуйидаги ўринли

Теорема 9. $W_2^{(3,0)}$ фазода (34) кўринишдаги оптимал интерполяцион формуланинг коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга

$$C[0] = \frac{3}{K}\Bigg[\varphi(0)\left(M_1 - \frac{K_1}{K}\right) + \varphi(h) + d_1^- e^h + d_2^- e^{-\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) -$$

$$-d_3^- e^{-\frac{h}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) + \sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^\gamma \varphi(h\gamma) + M_k + \tau_k^N \cdot N_k\right)\Bigg], \tag{39}$$

$$C[\beta] = \frac{3}{K}\Bigg[\varphi(h\beta)\left(M_1 - \frac{K_1}{K}\right) + \varphi(h(\beta-1)) + \varphi(h(\beta+1)) +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma) + \tau_k^\beta \cdot M_k + \tau_k^{N-\beta}\cdot N_k\right)\Bigg],\ \beta=1,2,...,N-1, \tag{40}$$

$$C[N] = \frac{3}{K}\Bigg[\varphi(1)\left(M_1 - \frac{K_1}{K}\right) + \varphi(1-h) + d_1^+ e^{-(1+h)} + d_2^+ e^{\frac{1+h}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right) +$$

$$+d_3^+ e^{\frac{1+h}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right) + \sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma) + \tau_k^N \cdot M_k + N_k\right)\Bigg], \tag{41}$$

бунда $K,\ K_1,\ \mathrm{M}_1,\ A_k,\ M_k, N_k, d_1^\pm,\ d_2^\pm,\ d_3^\pm$ ва τ_k лар маълум катталиклар.

Учинчи боб охирида, сонли мисолларда $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2\left(P_m\right)$ ва $W_2^{(m,0)}$ фазолардаги оптимал квадратур ва интерполяцион формулаларнинг хатоликлари таққосланган.

ХУЛОСА

Диссертация иши $W_2^{(m,0)}$ гильберт фазосида экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган Сард маъносида оптимал квадратур формулалар ва интерполяцион формулалар қуришга бағишланган.

Изланишнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат.

1. $W_2^{(m,0)}$ фазода экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган квадратур формуланинг экстремал функцияси топилган.
2. $W_2^{(m,0)}$ фазода квадратур формуланинг хатолик функционали нормасининг кўриниши олиган.
3. $W_2^{(m,0)}$ фазода m тоқ бўлганда оптимал квадратур формуланинг коэффициентлари учун чизиқли тенгламалар системаси олинган, система ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.
4. Оптимал квадратур ва интерполяцион формулалар қуришда муҳим аҳамиятга эга бўлган m тоқ ҳоли учун $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ ва $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ дифференциал операторларнинг дискрет аналоглари қурилган ва уларнинг хоссалари исботланган
5. $W_2^{(m,0)}$ фазода $m=1,2,3$ экспоненциал, тригонометрик ва экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган Сард маъносида оптимал квадратур формулалар келтирилган ва қурилган.
6. $W_2^{(m,0)}$ фазода $m=1,2,3$ ҳоллари учун оптимал хатолик функционалининг нормаси ҳисобланган.
7. $W_2^{(m,0)}$ фазода $m=1,2,3$ экспоненциал-тригонометрик функцияларга аниқ бўлган интерполяцион формулалар келтирилган ва қурилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

БОЛТАЕВ АЗИЗ КУЗИЕВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ И ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ НА КЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ-2021

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM342.

Диссертация выполнена в Институте математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Алоев Рахматилло Джураевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Баротов Адизжон Садиевич кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» ____________2021 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» ______________2021 года.
(протокол рассылки №________ от «____» ______________2021 года).

А.Р. Марахимов
Председатель Научного совета по присуждению
ученых степеней, д.т.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном
совете по присуждению ученой степени доктора
наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире, многочисленные научные и практические исследования, в основном сосредоточены на анализе сейсмограмм землетрясений, моделировании оптических систем и синтезированных голограмм, анализе изображений компьютерной томографии. Численно-аналитические решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений, выражаясь с помощью квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул, являются объектом исследований в области численной алгебры, теории численного интегрирования, интерполяции, аппроксимации и других подобных задач. Поэтому построение оптимальных квадратурных и интерполяционных формул точных на экспоненциально-тригонометрических функциях на классах дифференцируемых функций, нахождение порядка сходимости построенных квадратурных формул в гильбертовом пространстве, остается одной из важных задач вычислительной математики.

В настоящее время в мире широко изучаются оптимальные и наилучшие квадратурные, кубатурные и интерполяционные формулы с высокой точностью в различных функциональных пространствах. Оптимальные и наилучшие квадратурные, кубатурные и интерполяционные формулы широко используются при численно-аналитическом решении дифференциальных уравнений с частными производными связанными с граничными условиями и интегральных уравнений, приближенном вычислении точных и несобственных интегралов, приближении функций в некоторых пространствах. Поэтому построение оптимальных квадратурных и интерполяционных формул и оценка их погрешностей на классах дифференцируемых функций является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким важным направлениям, как градостроительство, промышленное строительство, компьютерная томография, разработке численных и аналитических методов решения геофизических задач, которые являются научным и практическим применением фундаментальных наук. В частности, значительные результаты были получены при построении оптимальных решетчатых квадратурных, кубатурных и интерполяционных формул в различных пространствах, а также по оценке их погрешностей в гильбертовых пространствах. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетном направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, является одной из основных задач [2]. Для обеспечения выполнения постановления важно построить

---

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

квадратурные и интерполяционные формулы, а также интерполяционные сплайн функции и оценить их погрешностей.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП – 4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП – 2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП – 2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП – 3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП – 4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Квадратурные формулы являются основным инструментом для численного решения дифференциальных и интегральных уравнений. Разработка новых алгоритмов построения оптимальных квадратурных формул, а также оценка их погрешностей в различных пространствах функций являются важными задачами. В настоящее время задача оптимизации формул численного интегрирования эта задача нахождения минимума нормы функционала погрешности на заданном пространстве функций. Имеются задача С.М. Никольского, заключающаяся в минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам и по узлам, и задача А. Сарда, заключающаяся в минимизации нормы функционала погрешности по коэффициентам при фиксированных узлах. Решения задач Никольского и Сарда называются оптимальной квадратурной формулой в смысле Никольского и в смысле Сарда, соответственно. Мы не останавливаемся на задаче С.М. Никольского. Обзор исследований по ней см., например, в работах С.М. Никольского, Н.П. Корнейчука, А.А. Женсыкбаева и других.

При построении оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда используются методы сплайнов, φ -функций и Соболева. В работе I.Schoenberg показан связь между оптимальными квадратурными формулами в смысле Сарда и натуральными сплайнами. Используя метод сплайн функций в различных пространствах оптимальные квадратурные формулы получены в работах А. Сарда, L.F.Meyers, I.Schoenberg, S.Silliman, G.Coman, А.А. Малюкова, И.И. Орлова, P.Kohler и др. Метод φ -функций впервые обсужден в работе D.V. Ionescu. Этот метод более подробно описан в работе

P. Blaga, G. Coman. Обобщение метода φ-функций было дано в работах A.Ghizzetti, A.Ossicini и F.Lanzara, где используется более общий линейный дифференциальный оператор порядка r вместо оператора D^r . Следует отметить, что метод Соболева основан на построении дискретного аналога линейного дифференциального оператора. Использование этого метода позволяет получить аналитические формулы для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда.

Построение асимптотических оптимальных и оптимальных по порядку кубатурных формул в гильбертовых и банаховых пространствах исследованы в работах С.Л. Соболева, В.И. Лебедева, И.П. Мысовских, Г.Н. Салихова, М.Д. Рамазонова, В.И. Половинкина, В.Л. Васкевича, М.И. Исраилова, С.Ш. Шушбаева, Т.Х. Шарипова, Г.П. Исматуллаева, Э.А. Шамсиева и других. Особо следует отметить результаты трудов С.Л. Соболева, З.Ж. Жамалова, Х.М. Шадиметова, G.V. Milovanović, A. Cabada, А.Р. Хаётова, Ф.А. Нуралиева, Н.Д. Болтаева по задачам построения оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, интерполяционных натуральных сплайнов дающих минимум полу-норме в некоторых гильбертовых пространствах основываясь на дискретные аналоги соответствующих дифференциальных операторов.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в котором выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ №Ф4-ФА-Ф013 «Неассоциативные и операторные алгебры, динамические системы и их приложения в статистической физике и популяционной биологии» Института математики при Национальном университете Узбекистана, №ОТ-Ф4-86 «Разработка оптимальных методов приближенного решения дифференциальных и интегральных уравнений в пространствах гильберта» и №ЁФА-Фтех-2018-13 «Оптимальные алгоритмы приближенно – аналитического решения сингулярных уравнений» Института математики.

Целью исследования являются построение оптимальных решетчатых квадратурных и интерполяционных формул, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях и вычисление норм их функционалов погрешностей на классах дифференцируемых функций.

Задачи исследования.

найти экстремальную функцию квадратурных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}$;

получить аналитическую формулу для квадрата нормы функционала погрешностей квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$;

доказать существования и единственности оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$;

найти аналитические представления для коэффициентов оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$;

определить порядки сходимостей построенных оптимальных квадратурных фомул в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Объект исследования. Квадратурные и интерполяционные формулы, дискретные аналоги линейных дифференциальных операторов, функционалы погрешностей, гильбертовы пространства.

Предмет исследования. Экстремальные функции, оптимальные квадратурные и интерполяционные формулы, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях, дискретные аналоги дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$, функции из гильбертово пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Методы исследования. В исследовательской работе использованы методы вычислительной математики и функционального анализа, а также теории дифференциальных уравнений, обобщенных функций, функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдена экстремальная функция квадратурных формул, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях в пространстве $W_2^{(m,0)}$;

доказана существование и единственность оптимальной квадратурной формулы точной на экспоненциально-тригонометрических функциях;

построены дискретные аналоги дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ при нечетных m и $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$;

получены аналитические виды коэффициентов оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, точных на экспоненциально-тригонометрических функций в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при $m=1,2,3$;

вычислена норма функционала погрешности оптимальных квадратурных формул точных на экспоненциально-тригонометрических функций в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при $m=1,2,3$.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построенный в работе дискретный оператор использовался при численном вычислении переменных коэффициентов ряда Фурье;

оптимальная решетчатая квадратурная формула использовалась при математическом моделировании динамических процессов, формирующихся в сложных природных системах;

построенная интерполяционная формула используется при разработке численных схем для расчета прямых и обратных задач уравнений распространения поперечных волн.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории квадратурных формул, методов вычислительной математики, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в том, что построены оптимальные решетчатые квадратурные формулы и интерполяционные сплайны точных на экспоненциально-тригонометрических функциях для приближенного вычисления определенных интегралов в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные оптимальные решетчатые квадратурные формулы и интерполяционные сплайны могут быть применены для численного решения задач химической инженерии, градостроительства, электромеханики и индустриальной инженерии выражающейся с помощью определенных интегралов.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов по построению оптимальных решетчатых квадратурных и интерполяционных формул точных на экспоненциально-тригонометрических функциях:

оптимальная квадратурная формула построенная на основе дискретного аналога $D_3[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6}-1$, применена при численном вычислении коэффициентов разложения в конечный ряд Фурье по некоторой пространственной переменной ядра в интегро-дифференциальном уравнении распространения волн прикладного проекта ОТ-Ф4-02 «Термодинамика моделей бесконечного множества состояний математической физики» (Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, справка № 89-03-3570 от 28 сентября 2020 года). В результате это дало возможность численного вычисления переменных коэффициентов ряда Фурье;

оптимальная интерполяционная формула, построенная для приближения функций в пространстве $W_2^{(3,0)}$, использована в разработке численных схем для прямых и обратных задач уравнений распространения поперечных волн в прикладном проекте А-13-18- «Теоретическое и численное исследование прямых и обратных задач нелинейной волновой динамики двухфазной среды» (Министерство высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан, справка № 89-03-4075 от 20 октября 2020 года). В результате это позволило получить оценку условной устойчивости одномерных обратных динамических (в том числе нелинейных) задач.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 10 научно-практических конференциях, в том числе, на 6 международных и 4 республиканской научно-практической конференции.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 21 научные работы, из них 9 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики

Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале и 8 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 100 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Квадрат нормы функционала погрешностей квадратурных формул, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях»,** поставлена задача о построение оптимальных квадратурных формул в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,0)}$ и решена первая часть этой задачи.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta), \qquad (1)$$

где $C[\beta]$ и x_β $\left(x_\beta \in [0,1]\right)$ называются *коэффициентами* и *узлами* квадратурной формулы (1), φ является элементом класса $W_2^{(m,0)}$, где этот класс определяется следующим образом

$$W_2^{(m,0)}(0,1) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \middle| \varphi^{(m-1)} \text{абсолютно непрерывна и } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\right\}.$$

Класс функций $W_2^{(m,0)}$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_m = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + \psi(x)\right)dx \qquad (2)$$

является гильбертовым пространством, если мы отождествляем функции, которые отличаются от решения уравнения $\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x) = 0$. Следовательно, $W_2^{(m,0)}$ это гильбертово пространство, снабженной полунормой

$$\left\|\varphi \middle| W_2^{(m,0)}\right\| = \left\{\int_0^1 \left[\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

соответствующей скалярному произведению (2).

Следующая разность между интегралом и квадратурной суммой

$$\int\limits_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C\left[\beta\right]\varphi(x_\beta) = \left(\ell,\varphi\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ell\left(x\right)\varphi\left(x\right)dx \tag{4}$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1), здесь функционал ℓ называется *функционалом погрешности* формулы (1) и имеет следующий вид

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C\left[\beta\right]\delta(x - x_\beta), \tag{5}$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ − характеристическая функция отрезка $[0,1]$, δ–дельта-функция Дирака.

Согласно неравенству Коши-Шварца имеем следующую оценку

$$\left|\left(\ell,\varphi\right)\right| \le \left\|\varphi\middle|W_2^{(m,0)}\right\| \left\|\ell\middle|W_2^{(m,0)*}\right\|.$$

Отсюда заключаем, что абсолютная погрешность квадратурной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}$ оценивается сверху с помощью нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $W_2^{(m,0)*}$.

Откуда получаем следующую задачу.

Задача 1. *Вычислить норму* $\left\|\ell\middle|W_2^{(m,0)*}\right\|$ *функционала погрешности (5) квадратурной формулы* (1).

Из равенства (5) видно, что норма $\left\|\ell\middle|W_2^{(m,0)*}\right\|$ функционала погрешности зависит от коэффициентов $C\left[\beta\right]$ и узлов x_β.

Для того чтобы построить оптимальную квадратурную формулу вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,0)}$ требуется решить следующую задачу.

Задача 2. *Найти коэффициенты* $C\left[\beta\right]$ *удовлетворяющие равенству*

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\middle|W_2^{(m,0)*}\right\| = \inf_{C[\beta]}\left\|\ell\middle|W_2^{(m,0)*}\right\|$$

в пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Чтобы вычислить норму функционала погрешности (5) используем понятие экстремальной функции.

Функция $\psi_\ell \in W_2^{(m,0)}$ для которой выполняется равенство

$$\left(\ell,\psi_\ell\right) = \left\|\ell \mid W_2^{(m,0)*}\right\| \cdot \left\|\psi_\ell \mid W_2^{(m,0)}\right\| \tag{6}$$

называется *экстремальной функцией* функционала ℓ определенный равенством (5).

Так как пространство $W_2^{(m,0)}$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала существует единственная функция ψ_ℓ из пространства $W_2^{(m,0)}$, для которой выполняется следующее равенство

$$\left(\ell,\varphi\right) = \left\langle\psi_\ell,\varphi\right\rangle_m \tag{7}$$

и $\left\|\ell \,|\, W_2^{(m,0)*}\right\| = \left\|\psi_\ell \,|\, W_2^{(m,0)}\right\|$, где $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_m$ – скалярное произведение двух функций ψ_ℓ и φ из пространства $W_2^{(m,0)}$.

Займемся решением уравнения (7). Интегрируя по частям правую часть уравнения (7), имеем

$$(\ell,\varphi) = (-1)^m \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell^{(m)}(x) + (-1)^m \psi_\ell^{(m)}(x) + (-1)^m \psi_\ell(x)\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) + \psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 .$$

Отсюда мы приходим к следующим двум случаям для нечетных и четных натуральных значений m, соответственно:

$$(\ell,\varphi) = (-1)^m \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x)\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) + \psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \quad \text{при } m \text{- нечетном} \qquad (8)$$

и

$$(\ell,\varphi) = \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) + 2\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell(x)\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m-1} (-1)^s \left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) + \psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \quad \text{при } m \text{- четном} \qquad (9)$$

Ясно, что для нахождения экстремальной функции ψ_ℓ необходимо рассматривать уравнения (8) и (9) в зависимости от соответствующих значений m.

Сначала предполагаем, что m - нечетное натуральное число.

Тогда, учитывая единственность функции ψ_ℓ, из (8) получаем уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) \qquad (10)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) + \psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1} . \qquad (11)$$

Доказана следующая

Теорема 1. Для нечетных m решение уравнения (10) с краевыми условиями (11) является экстремальной функцией ψ_ℓ функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) и имеет вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + Y_m(x), \qquad (12)$$

где

$$G_m(x) = \frac{\operatorname{sign} x}{2m} \cdot \left[\sinh(\mathrm{x}) + \sum_{k=1}^{m-1} e^{x\cdot\cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)} \cdot \cos\left(x \sin\left(\frac{\pi k}{m}\right) + \frac{\pi k}{m}\right)\right], \qquad (13)$$

$$Y_m(x) = d_0 e^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} e^{-x\cdot\cos\frac{2\pi k}{m}} \left[d_{1k} \cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m} \right)\right) + d_{2k} \sin\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m} \right)\right)\right], \quad (14)$$

где d_0, d_{1k} и d_{2k} - действительные числа.

Так как функционал погрешности ℓ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}$, должны выполняться следующие условия

$$(\ell, e^{-x}) = 0 \ , \quad (15)$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m} \right)\right) = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m-1}{2}} \ , \quad (16)$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m} \right)\right) = 0, \quad k = \overline{1, \frac{m-1}{2}} \ . \quad (17)$$

Это означает, что квадратурная формула (1) при m-нечетном будет точна на функциях:

$$e^{-x}, e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}} \cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m} \right), \ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m} \right), \ k = \overline{1, \frac{m-1}{2}}.$$

Теперь, мы предполагаем, что m - четное натуральное число.

Тогда, учитывая единственность функции ψ_ℓ, из (9) получаем уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) + 2\psi_\ell^{(m)}(x) + \psi_\ell(x) = \ell(x) \quad (18)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x) + \psi_\ell^{(i)}(x) \right) \right]\Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1} \ . \quad (19)$$

Доказана следующая

Теорема 2. Для четных m решение уравнения (18) с краевыми условиями (19) является экстремальной функцией ψ_ℓ функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) и имеет вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + Y_m(x), \quad (20)$$

где

$$G_m(x) = \frac{\mathrm{sign} x}{2} \cdot \sum_{k=1}^{m} e^{p_k x} \left(B_{1k} + B_{2k} \right), \quad (21)$$

и

$$Y_m(x) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{-x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \left[r_{1k} \cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right)\right) + r_{2k} \sin\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m} \right)\right)\right] (22)$$

где B_{1k}, B_{2k} и p_k - известные выражения, r_{1k} и r_{2k} - действительные числа, m-четное натуральное число.

Так как функционал погрешности ℓ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}$, должны выполняться следующие условия

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ , \tag{23}$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ . \tag{24}$$

Отсюда заключаем, что квадратурная формула (1) при m-четном будет точна на функциях:

$$e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m}{2}}.$$

Далее, с помощью экстремальных функции (12) и (20) найдено представление квадрата нормы функционала погрешности ℓ, которое имеет вид

$$\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|^2=2\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\int_0^1 G_m(x-x_\beta)dx-$$

$$-\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C[\beta]C[\gamma]G_m(x_\beta-x_\gamma)-\int_0^1\int_0^1 G_m(x-y)dxdy\ . \tag{25}$$

Таким образом, задача 1 решена полностью.

Затем, в параграфе 1.4 в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при нечетных m получена система линейных уравнений для коэффициентов $C[\beta]$ оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда. Доказаны существование и единственность решения этой системы. Также доказано, что решение этой системы дает минимум квадрату нормы функционала погрешности ℓ.

Следует отметить, что в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при четных m также можно получить аналогичные результаты.

Метод Соболева построения оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в гильбертовых пространствах основан на дискретные аналоги дифференциальных операторов и позволяет получить явный вид оптимальных коэффициентов. В настоящей диссертационной работе для построения оптимальных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ нам требуется соответствующие дискретные аналоги некоторых дифференциальных операторов.

Вторая глава, названная **«Дискретные аналоги дифференциальных операторов»,** как раз посвящена построению дискретных аналогов требуемых дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ при нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ при $m=2;4$.

Решение $D_m[\beta]$ уравнения

$$D_m[\beta]*G_m[\beta]=\delta[\beta] \tag{26}$$

называется *дискретным аналогом соответсвующих дифференциальных операторов* $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ при нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^{m}}{dx^{m}}+1$ при $m=2;4$. Здесь $G_m[\beta]$– функция дискретного аргумента, соответствующая функции $G_m(x)$, определенной равенствами (13) при нечетных m и (21) при $m=2;\,4$. В параграфе 2.1 построен дискретный аналог оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ соответствующий случаю нечетных натуральных m.

Доказана следующая

Теорема 3. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$, удовлетворяющий равенству (26) для нечетных натуральных m, имеет вид:

$$D_m[\beta]=\frac{m}{K}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\cdot\tau_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ M_1-\frac{K_1}{K}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\tau_k}, & \beta=0,\end{cases} \qquad (27)$$

где $K,\,K_1,\,M_1,\,A_k,\tau_k$ – известные величины и $|\tau_k|<1$.

В параграфе 2.2 приведен дискретный аналог оператора $\frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$, построен дискретный аналог оператора $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ и получен следующий результат.

Теорема 4. Дискретный аналог $D_4[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$, удовлетворяющий равенству (26) при $m=4$, имеет вид:

$$D_4[\beta]=\frac{8}{F_1}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{3}A_{1k}\cdot\lambda_{1k}^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{3}A_{1k}, & |\beta|=1,\\ F_2+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_{1k}}{\lambda_{1k}}, & \beta=0,\end{cases} \qquad (28)$$

где $F_1,\,F_2,\,A_{1k},\lambda_{1k}$ – известные величины и $|\lambda_{1k}|<1$.

В параграфе 2.3 доказаны все свойства дискретного аналога дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6}-1$.

Справедлива следующая следствия

Следствие 1. Дискретный аналог $D_3[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6}-1$ удовлетворяет равенствам

1) $D_3[\beta]*e^{[\beta]}=0,$ 4) $D_3[\beta]*e^{\frac{[\beta]}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0,$

2) $D_3[\beta]*e^{-[\beta]}=0,$ 5) $D_3[\beta]*e^{-\frac{[\beta]}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0,$

3) $D_3[\beta]*e^{\frac{[\beta]}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0,$ 6) $D_3[\beta]*e^{-\frac{[\beta]}{2}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right)=0.$

В третьей главе диссертации, названной **«Коэффициенты оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях»**, найдены коэффициенты оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при $m=1,2,3$ и вычислена норма функционала погрешности ℓ. При этом использован результат второй главы, т.е. дискретные аналоги $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $\frac{d^2}{dx^2}-1$, $\frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1$ и $\frac{d^6}{dx^6}-1$. В параграфе 3.1 приведен алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при нечетных m.

В параграфе 3.2 в пространствах $W_2^{(1,0)}$ и $W_2^{(2,0)}$ оптимальные коэффициенты квадратурных формул вида (1) совпадают с известными оптимальными коэффициентами квадратурных формул из работ Х.М. Шадиметова и А.Р. Хаётова.

При $m=1$ справедлива следующая

Теорема 5. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(1,0)}$ имеют следующий вид

$$C[\beta]=\begin{cases}\dfrac{e^h-1}{e^h+1}, & \beta=0,N,\\ \dfrac{2\left(e^h-1\right)}{e^h+1}, & \beta=\overline{1,N-1},\end{cases} \tag{29}$$

где $h=1/N$, $N=1,2,\ldots$.

При $m=2$ справедлива следующая

Теорема 6. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(2,0)}$ имеют следующий вид

$$\begin{gathered} C[0]=C[N]=\frac{2\sin(h)-\left(h+\sin(h)\right)\cos(h)}{\left(h+\sin(h)\right)\sin(h)}+\frac{\left(h-\sin(h)\right)\left(\lambda_1+\lambda_1^{N+1}\right)}{\left(h+\sin(h)\right)\sin(h)\left(1+\lambda_1^{N+1}\right)} \\ C[\beta]=\frac{4\left(1-\cos(h)\right)}{h+\sin(h)}+\frac{2h\left(h-\sin(h)\right)\sin(h)}{\left(h+\sin(h)\right)\left(h\cos(h)-\sin(h)\right)\left(1+\lambda_1^{N+1}\right)}\left(\lambda_1^{\beta}+\lambda_1^{N-\beta}\right) \end{gathered} \qquad (30)$$

где $\beta=\overline{1,N-1}$, λ_1 – известная выражения и $|\lambda_1|<1$.

Далее, построена оптимальная квадратурная формула вида (1) в смысле Сарда в случае $m=3$ и доказана следующая

Теорема 7. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(3,0)}$ имеют следующий вид

$$\begin{gathered} C[0]=1-\frac{T}{e^h-1}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\tau_k}{e^h-\tau_k}+\frac{n_k\tau_k^N}{\tau_k e^h-1}\right), \\ C[\beta]=T+\sum_{k=1}^{2}\left(m_k\tau_k^{\beta}+n_k\tau_k^{N-\beta}\right),\ \beta=1,...,N-1, \\ C[N]=\frac{Te^h}{e^h-1}+e^h\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\tau_k^N}{e^h-\tau_k}+\frac{n_k\tau_k}{\tau_k e^h-1}\right)-1, \end{gathered} \qquad (31)$$

где $T,\ K,\ K_1,\ K_2,\tau_k$ - известны и $|\tau_k|<1$.

В параграфе 3.3 вычислен квадрат нормы функционала погрешности ℓ оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(3,0)}$ и получен следующий результат.

Теорема 8. Квадрат нормы функционала погрешности (5) оптимальной квадратурной формулы вида (1) в смысле Сарда на пространстве $W_2^{(3,0)}$ имеет вид

$$\|\overset{\circ}{\ell}\|^2=1-\frac{(2N-1)T+C[0]+C[N]}{2}+Q_1+\frac{1}{6}Q_2+\frac{1}{3}Q_3, \qquad (32)$$

где $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ известные величины.

А также в параграфе 3.4 приведены и найдены явные выражения коэффициентов оптимальных интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при $m=1,2,3$.

Предположим, что нам заданы значения $y_\beta,\ \beta\ =\ 0,\ 1,\ ...,\ N$ в точках $x_\beta\in[0,\ 1],\ \beta\ =\ 0,\ 1,\ ...,\ N$. Рассмотрим следующую задачу интерполяции.

Задача 3. Найти функцию $S_m(x)\in W_2^{(m,0)}$, дающую минимум полу-норме (3) и удовлетворяющую условию интерполяции

$$S_m(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \ \beta=0,1,...,N, \qquad (33)$$

где $x_\beta \in [0,\ 1]$ - узлы интерполяции, $\varphi(x_\beta) = y_\beta$ - заданные значения.

Мы отметим, что решения задачи 3 в случаях $m = 1$ и $m = 2$ совпадают с натуральными сплайнами $S_1(x)$ и $S_2(x)$, построенными в пространствах $W_2^{(1,0)}$ и $K_2(P_2)$, соответственно, в работах Х.М.Шадиметова и А.Р.Хаётова.

Далее, нами исследована задача 3 при $m = 3$ и для ее решения получена следующая формула

$$S_3(x) = \sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_3(x - x_\gamma) + d_1 e^{-x} + d_2 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + d_3 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right), \qquad (34)$$

где $d_1,\ d_2$ и d_3 - действительные числа.

Доказано, что решение $S_3(x)$ вида (34) задачи 3 существует, единственно, когда $N\ \geq 2$. Для коэффициентов $C_\gamma,\ \gamma = 0,1,...,N,\ d_1,\ d_2$ и d_3 интерполяционной формулы $S_3(x)$ получена следующая система

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G(x_\beta - x_\gamma) + d_1 e^{-x_\beta} + d_2 e^{\frac{x_\beta}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_\beta\right)$$

$$+ d_3 e^{\frac{x_\beta}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_\beta\right) = \varphi(x_\beta),\ \ \beta = 0,1,\ldots,N, \qquad (35)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{-x_\gamma} = 0, \qquad (36)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{\frac{x_\gamma}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_\gamma\right) = 0, \qquad (37)$$

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma e^{\frac{x_\gamma}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x_\gamma\right) = 0. \qquad (38)$$

Справедлива следующая

Теорема 9. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул вида (34) в пространстве $W_2^{(3,0)}$ имеют следующий вид

$$C[0] = \frac{3}{K}\left[\varphi(0)\left(M_1 - \frac{K_1}{K}\right) + \varphi(h) + d_1^- e^h + d_2^- e^{-\frac{h}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right) - \right.$$

$$\left. - d_3^- e^{-\frac{h}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} h\right) + \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N} \tau_k^\gamma \varphi(h\gamma) + M_k + \tau_k^N \cdot N_k\right)\right], \qquad (39)$$

$$C[\beta] = \frac{3}{K}\left[\varphi(h\beta)\left(M_1 - \frac{K_1}{K}\right) + \varphi(h(\beta-1)) + \varphi(h(\beta+1)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N} \tau_k^{|\beta-\gamma|} \varphi(h\gamma) + \tau_k^\beta \cdot M_k + \tau_k^{N-\beta} \cdot N_k\right)\right],\ \beta = 1,2,...,N-1, \qquad (40)$$

$$C[N]=\frac{3}{K}\left[\varphi(1)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(1-h)+d_1^+e^{-(1+h)}+d_2^+e^{\frac{1+h}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right)+\right.$$
$$\left.+d_3^+e^{\frac{1+h}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\tau_k^N\cdot M_k+N_k\right)\right], \tag{41}$$

где K, K_1, M_1, A_k, M_k и N_k известны.

В конце третьей главы в численных примерах сравнены погрешности оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в пространствах $W_2^{(m,m-1)}$, $K_2(P_m)$ и $W_2^{(m,0)}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда и интерполяционной формулы, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}$.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Найдена экстремальная функция для квадратурных формул, которые точны на экспоненциально-тригонометрических функциях в пространстве $W_2^{(m,0)}$.
2. Получено выражение нормы функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$.
3. Получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}$ при нечетных m . Исследованы существование и единственность решений этой системы.
4. Построены дискретные аналоги дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ при нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ при $m=2;4$, которые важную роль играют при построении оптимальных квадратурных и интерполяционных формул и доказаны ряд их свойств.
5. Приведены и построены оптимальные квадратурные формулы в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,0)}$ в случаях $m=1,2,3$, которая точна для экспоненциальных, тригонометрических и экспоненциально-тригонометрических функций.
6. Вычислена норма оптимального функционала погрешности в пространстве $W_2^{(m,0)}$ в случаях $m=1,2,3$.
7. Приведены и построены интерполяционные формулы в пространстве $W_2^{(m,0)}$ в случаях $m=1,2,3$, которые точны на экспоненциально-тригонометрических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

BOLTAEV AZIZ KUZIEVICH

OPTIMAL LATTICE QUADRATURE AND INTERPOLATION FORMULAS ON CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2019.2.PhD/FM342.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Aloev Rakhmatillo Dhuraevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Barotov Adizjon Sadievich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place «____» ____________2021 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» ______________2021 year
(Mailing report № ___________on «____» ______________2021 year)

A.R.Mirakhimov
Chairman of Scientific Council on award
of scientific degrees, D.T.S., Professor

Z.R.Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.M.S.

R.D.Aloev
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the study is to construct the optimal lattice quadrature and interpolation formulas that are exact on exponential-trigonometric functions in the classes of differentiable functions, and to calculate the norms of their error functionals.

The object of the research is quadrature and interpolation formulas, discrete analogs of linear differential operators, error functionals, Hilbert spaces.

The scientific novelty of the research work is as follows:

an extremal function of quadrature formulas that are exact on exponential-trigonometric functions is found in the space $W_2^{(m,0)}$;

the existence and uniqueness of an optimal quadrature formula that is exact on exponential trigonometric functions is proved;

the discrete analogues of $d^{2m}/dx^{2m}-1$ for odd m and $d^8/dx^8+2d^4/dx^4+1$ differential operators are constructed;

the analytical forms of coefficients for optimal quadrature and interpolation formulas, exact on exponential-trigonometric functions in the space $W_2^{(m,0)}$ for $m=1,2,3$ are obtained;

the norm of the error functional of optimal quadrature formulas, exact on exponential-trigonometric functions in the space $W_2^{(m,0)}$ for $m=1,2,3$ is calculated;

Implementation of the research results. Based on the scientific results obtained on the construction of optimal lattice quadrature and interpolation formulas that are exact on exponential trigonometric functions:

the optimal quadrature formula constructed on the base of discrete analogue $D_3[\beta]$ of the differential operator d^6/dx^6-1 is applied in the numerical calculation of the coefficients of the expansion into a finite Fourier series in a certain spatial variable of the kernel in the integro-differential equation of wave propagation of the applied project OT-F4-02 “Thermodynamics of models of an infinite set of states of mathematical physics” (№ 89-03-3570 Reference Ministry of the higher and secondary special education of the Republic of Uzbekistan on 28.09.2020). As a result, this made it possible to numerically calculate the variable coefficients of the Fourier series;

the optimal interpolation formula constructed to approximate functions in the space $W_2^{(3,0)}$ is used in the development of numerical schemes for direct and inverse problems of the equations of propagation of transverse waves in the applied project A-13-18- “Theoretical and numerical study of direct and inverse problems of nonlinear wave dynamics of a two-phase medium” (№ 89-03-4075 Reference Ministry of the higher and secondary special education of the Republic of Uzbekistan on 20.10.2020). As a result, this made it possible to obtain estimation of the conditional stability of one-dimensional inverse dynamic (including nonlinear) problems.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 100 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Болтаев А.К. Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2011. -№ 2. -С. 57-65. (01.00.00; №6).
2. Шадиметов Х.М., Болтаев А.К. Об одном дискретном аналоге дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6}-1$ // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2011.-№ 3. -С. 209-216. (01.00.00; №6).
3. Болтаев А.К. Существование и единственность решения системы для оптимальных коэффициентов // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2012. -№ 2. -С. 30-36. (01.00.00; №6).
4. Шадиметов Х.М., Болтаев А.К. Об одной квадратурной формуле типа Сарда в пространстве $W_2^{P_3}\left(0,1\right)$// Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2012.-№ 4. -С. 162-172. (01.00.00; №6).
5. Болтаев А.К. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{P_3}\left(0,1\right)$ // Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2014. -№ 2. -С. 17-24. (01.00.00; №6).
6. Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K. A discrete analog of the differential operator $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ and its applications // Uzbek mathematical journal, -Tashkent, 2018, №4, -pp. 139-150. (01.00.00; №6).
7. Болтаев А.К., Нуралиев Ф.А. Об одном дискретном аналоге дифференциального оператора // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2019, №2, -С. 71-78. (01.00.00; №9).
8. Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K. An exponential-trigonometric spline minimizing a semi-norm in a Hilbert space// Advances in Differential Equations, Springer, 2020, Volume 352, pp.1-16. **(Scopus, IF:=1.510).**
9. Boltaev A.K., Akhmedov D.M. Extremal function of a quadrature formula // Bulletin of the Institute of Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics. 2020. no 2. pp. 34-38. (01.00.00; №17).

II бўлим (Часть II; Part II)

10. Болтаев А.К. Об экстремальной функции одной оптимальной квадратурной формулы // Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2010, №125, -С.32-42.
11. Болтаев А.К. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6}-1$ // Материалы международной конференции «Кубатурные формулы, методы Монте-Карло и их приложения», Красноярск, 4-7 июля, 2011, -С.22-24.

12. Болтаев А.К. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы в смысле Сарда // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». 12–14 сентябрь, Ташкент –2012. –С. 117-118.
13. Болтаев А.К. Об одной оптимальной квадратурной формуле в смысле Сарда // The international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2012”, NUU, Tashkent, December 19–22, 2012, pp. 44-46.
14. Болтаев А.К. Дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ // Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их применения». 21–23 ноября, Ташкент –2013. –С. 306.
15. Hayotov A.R., Boltaev A.K. Interpolation splines minimizing the semi-norm in $W_2^{P_3}(0,1)$ // International Conference “Applied and Geometrical Analysis”, Samarkand, September 22-25, 2014. pp. 17.
16. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Boltaev A.K. About coefficients and order of convergence of the optimal quadrature formula // American Journal of Numerical Analysis, Science and Education Publishing, 2014. Vol.2. No2, pp. 35-48.
17. Boltaev A.K. A discrete analog of the differential operator $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$// The VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018”, NUU, Tashkent, September 13 – 15, 2018, pp. 166.
18. Boltaev A.K. Construction of optimal quadrature formulas exact for exponentional-trigonometric functions by Sobolev’s method // Inverse and ill-posed problems, international conference, Samarkand, October 2-4, 2019.
19. Болтаев А.К. Построение одного дискретного оператора 2m – го порядка // Неклассические уравнения математической физики и их приложения, Узбекско-Российская научная конференция, Ташкент, 24-26 октября, 2019, –С. 13.
20. Болтаев А.К., Болтаев Э.К. Дискретный аналог дифференциального оператора точных на экспоненциально-тригонометрических функций // Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики, Международная конференция, Фергана, 12-14 марта, 2020, –С. 193-194.
21. Ахмедов Д.М., Болтаев А.К., Нуралиев Ф.А. Экстремальная функция одной квадратурной формулы // “Математика, физика ва ахборот технологияларининг долзарб муаммолари” мавзусидаги республика миқёсидаги онлайн илмий-амалий анжумани тезислар тўплами Бухоро, 2020 йил, 15 апрель, Б. 180.