ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЭШИМБЕТОВ МАРДОНБЕК РЕЙИМБОЕВИЧ

МЕТРИК ГРАФЛАРДА ТЎЛҚИН ТЕНГЛАМАЛАРИ УЧУН ФОКАСНИНГ УМУМЛАШГАН АЛМАШТИРИШ УСУЛИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

УДК: 517.953

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

ЭШИМБЕТОВ МАРДОНБЕК РЕЙИМБОЕВИЧ

МЕТРИК ГРАФЛАРДА ТЎЛҚИН ТЕНГЛАМАЛАРИ УЧУН ФОКАСНИНГ УМУМЛАШГАН АЛМАШТИРИШ УСУЛИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2018.1.PhD/FM193 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Худойберганов Гулмирза** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович физика-математика фанлари доктори (DSc)
Етакчи ташкилот:	Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «29» апрель соат 16:00 даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (18 рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2021 йил «19» 04 куни тарқатилди.
(2021 йил «19» 04 даги 2 рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси масалаларига келтирилади. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалалар ва комплекс ўзгарувчили функциялар назариясига асосланган метрик графлардаги масалалар биофизика, биотехнология, тиббиёт ҳамда ишлаб чиқариш каби соҳаларнинг тадқиқот объектидир. Тармоқланган структураларда квант физикаси ва тўлқин жараёнларини моделлаштиришда метрик графларда аниқланган иссиқлик тарқалиш ва Шредингер тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш муҳим рол ўйнайди. Шу сабабли метрик графларда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш замонавий математикада муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Жаҳонда метрик графларда чизиқли ва ночизиқли тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш ва бу ечимларнинг хоссаларини аниқлаш бўйича илмий изланишлар олиб борилмоқда. Нерв системаларида импульс тарқалиши жараёнини математик моделлаштиришнинг энг самарали усули метрик графда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун махсус бошланғич-чегаравий масалалардан фойдаланилади. Бунда, Фокаснинг умумлашган алмаштириш усулини метрик графларда бошланғич-чегаравий масалаларни ечишга мослаштириш, метрик графларда бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш усулларини ишлаб чиқишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда, айниқса кейинги йилларда фундаментал фанлар, жумладан квант механикаси ва физикада тадбиқига эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Жумладан, охирги йилларда метрик графларда эволютцион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалаларни ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Метрик графларда аниқланган Шредингер тенгламаси ёрдамида квант физикаси жараёнларини таҳлил қилишда салмоқли натижаларга эришилди. «Дифференциал тенглама ва математик физика» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бу борада метрик графларда бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш, бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш учун Фокас усулини умумлаштириш ва метрик графларда тўлқин тенгламаларини ечиш усулларини ишлаб чиқиш муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-

[1] Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги "Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида"ги 292-сон қарори.

4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устивор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Метрик графларда бошланғич-чегаравий масалаларни тадқиқ қилиш зарурати ўтган асрнинг 80-йилларнинг охирларида пайдо бўлган. Бунда Чехиялик олимлар П.Экснер ва П.Себалар юлдузсимон очиқ графларда Шредингер тенгламаси учун чегаравий масалалар қаралган ва олинган натижанинг квант заррачасининг тармоқланган соҳада эркин ҳаракатини ўрганишга қўллашган. Бу соҳадаги кейинги натижалар У.Смиланский, П.Кучмент, Р.Шрейдер, А.Кострикин ва уларнинг шогирдлари томонидан 2000-2010 йилларда чоп этилди. Улар томонидан стационар Шредингер тенгламаси учун метрик графларда спектрал ва сочилиш масалалари тадқиқ қилинган. Улар томонидан биринчи маротаба квант граф тушунчаси ишлатила бошлади. П.Экснер ва О.Постлар томонидан ингичка тармоқланган соҳаларда Шредингер оператори тадқиқ қилинган. Соҳа тармоқларининг кўндаланг кесими ўлчови нолга интилгандаги лимит ҳолатида квант графлари ҳосил бўлиши кўрсатилади.

Квант графларида тескари масалалар Ж.Боман, П.Курасов, Н.Герасименколар томонидан ўрганила бошлаган. Асосан улар квант графларида берилганлар сочилиш ҳақидаги маълумотлар ёрдамида графнинг боғланганлиги, учларида чегаравий ва уланиш шартлари билан биргаликда аниқлашган. П.Курасов ва М.Новасзйклар чекли метрик графда Лаплас оператори учун тескари спектрал масала ўрганилган. Умуман олганда, квант графлари етарлича яхши ўрганилган бўлишига қарамасдан, бугунги кунгача соҳанинг етакчи олимлари тадқиқотлар олиб бораётган, актуал соҳалардан бири бўлиб турибди. Бунинг асосий сабаби сифатида, квант графлари нанофизиканинг янги муаммоларини ўрганишдаги асосий восита сифатида хизмат қилишини келтиришимиз мумкин. Метрик графларда Кортевег-де Фриз тенгламаси ва унинг чизиқли қисми, Эйри тенгламаси учун бир нечта масалалар тадқиқ қилинган. Бу соҳада ҳозирда мавжуд илмий натижалар З.А.Собиров, М.И.Аҳмедов, Н.Уескер, Д.Нойа, Д.Магнола, К.Сейферт, М.Кавалькантелар томонидан олинган. А.С.Волкова томонидан метрик графларда эллиптик типдаги тенглама ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун Гарнак тенгсизлигининг аналоги исботланган. А.С.Волкова томонидан иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун оддий юлдузсимон графда аниқланган иссиқлик тарқалиш тенгламасининг умумлашган ечимлари ўрганилган. Қаралаётган масала бир қийматли ечилиши кўрсатилган. Бундан ташқари, чегаравий қийматлар ёрдамида бошқарув масаласи тадқиқ қилинган.

Чегаравий масалаларни ечишнинг Фокас умумлашган алмаштириш усули бугунги кунда янги, ривожланиб келаётган усуллардан биридир. Бу усул А.Фокас, Д.Смит, Ю.Спенс, Б.Пеллони, Д.Бернард, Н.Шейлслар томонидан чекли ва чексиз интерваларда чизиқли ва ночизиқли тенгламалар учун қатор бошланғич ва чегаравий масалалар ечишга қўлланилган. Метрик графда Фокас усули иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун биринчи маротаба Д.Смит ва Н.Шейлслар томонидан юлдузсимон ва кетма-кет уланган, турли ўтказувчанликка эга бўлган кесмалар, айлана ва унинг битта нуқтасида кесмани улашдан ҳосил бўлган графларда бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш учун қўлланилган. Шу билан бирга, графнинг тармоқланиш нуқтаси, яъни ички учида уланиш (Кирхгофф) шартлари физика нуқтаи-назаридан асослаб берилган. Бизгача Фокас усули метрик графларда қаралаётган бошланғич-чегаравий масалалар ечишга бағишланган бошқа илмий ишлар адабиётларда учрамаган. Ушбу диссертация ишида иссиқлик тарқалиш ва Шредингер тенгламалари учун юлдузсимон, дарахтсимон, зинапоясимон ва бошқа типдаги метрик графларда бошланғич-чегаравий масалалар ўрганилган. Бу масалаларни ечишда Фокаснинг умумлашган алмаштириш усули умумий структурали графларга мослаштирилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий - тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Ўзбекистон Милий университетининг илмий-тадқиқот ишлари режасига мувофиқ №14-022RG/MATHS/AS_G;UNESCO FR:324028610 «Мезоскопик физикадан келиб чиқадиган метрик графларда ночизиқли эволютцион тенгламалар ва транспорт масалалар» мавзусидаги илмий-тадқиқот лойиҳаси доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади метрик графларда тўлқин тенгламалари, хусусан чизиқли иссиқлик тарқалиш, Шредингер тенгламалари учун чегаравий масалаларни қўйиш ва бу масалаларнинг ечимини қуришдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

содда очиқ ва ёпиқ юлдузсимон метрик графларда Шредингер тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг ечимини қуриш ва олинган ечимлар ёрдамида графнинг учида тўлқин динамикасини таҳлил қилиш;

чекли сондаги чекли ва ярим чексиз интерваллардан ташкил топган юлдузсимон метрик графда Шредингер ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалалар ечимини топиш;

текисликда учбурчак ва дарахтсимон графларда тўлқин тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш учун Фокас усулини умумлаштириш;

чекли интервалдан ташкил топган зинапоясимон метрик графда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объектини содда очиқ ва ёпиқ юлдузсимон метрик графлар, чекли сондаги чекли ва ярим чексиз интерваллардан ташкил топган юлдузсимон метрик граф, текисликда учбурчак ва дарахтсимон графлар, чекли интервалдан ташкил топган зинапоясимон метрик графлар ташкил этади.

Тадқиқотнинг предметини иссиқлик тарқалиш тенгламаси, Шредингер тенгламаси, Коши масаласи, бошланғич-чегаравий масалалар, Фокаснинг умумлашган алмаштириш усули, Коши теоремаси, Жордан леммаси, Фурье алмаштириши ташкил қилади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида комплекс анализнинг замонавий усуллари, метрик графлар, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳамда бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

содда очиқ ва ёпиқ юлдузсимон метрик графларда Шредингер тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг ечими олинган;

саноқлита чекли ва чексиз интерваллардан ташкил топган метрик графда Шредингер ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг интеграл кўринишдаги ечими олинган;

учбурчак шаклидаги ва дарахтсимон графларда тўлқин тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш учун Фокас усули умумлаштирилган;

чекли интервалдан ташкил топган зинапоясимон метрик графда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

тармоқланиш нуқтасида тўлқин тарқалишининг ўтказувчанлик ва қайтиш коэффициентлари ҳисобланган;

молекулаларнинг оссиляцион спектрлари ҳисобланган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги метрик графларда тўлқин тенгламалари учун қаралаётган бошланғич-чегаравий масалалар умумлашган Фурье алмаштириш усулидан, Грин формуласидан, Жордан леммасидан, Коши теоремасидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг ва исботларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалардан метрик графларда иссиқлик тарқалиш ва Шредингер тенгламалари учун тармоқланган соҳаларда тўлқин тарқалишининг оптик хоссаларини текширишда, матрицавий шарларда Пуассон ядроларини қуришда, анизотропик суюқликларда релаксацион жараёнларни таҳлил қилишда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти шундан иборатки, олинган натижалардан тармоқланиш нуқтасида тўлқин тарқалишининг ўтказувчанлик ва қайтиш коэффициентларини топишда, тармоқланган мезоскопик соҳаларда тўлқин жараёнларини таҳлил қилишда, нерв системаларида импульс тарқалиш жараёнини математик моделлаштиришда қўлланилиши мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Метрик графларда тўлқин тенгламалари учун Фокаснинг уммлашган алмаштириш усули бўйича олинган натижалар асосида:

содда метрик графдаги Шредингер тенгламасининг ечимидан №15-198 RG/PHYS/AS_I-FR 3240287086 «Анизотропик суюқликларда релаксацион жараёнларини экспериментал ўрганиш: тебраниш ва йўналиш спектрларини таҳлил қилиш» мавзусидаги халқаро лойиҳасида тармокланиш нуқтасида ўтказувчанлик ва қайтиш коэффициентларини топишда ҳамда тўлқин тарқалишининг оптик хоссаларини текширишда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 6 ноябрдаги 89-03-4483-сон маълумотномаси). Натижада, тармоқланиш нуқтасида сочилиш параметрларини, молекулаларнинг оссиляцион спектрларини ҳисоблаш имконини берган;

метрик графларда иссиқлик тарқалиш ва Шредингер тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг ечимлари махсус кўринишдаги кўп ўзгарувчили вектор функциялар орқали ифодаланиши, интеграл формулаларнинг ядролари комплекс ўзгарувчиларнинг функциясидан иборат бўлишига оид натижалардан №MRU-OT-9/2017 «Кўп ўлчовли комплекс анализ» мавзусидаги амалий лойиҳада матрицавий шарларда голоморф функцияларнинг интеграл ифодасини ҳосил қилишда фойдаланилган (Олий ва ўрта махсус таълим вазирлигининг 2020 йил 10 ноябрдаги 89-03-4544-сон маълумотномаси). Натижада, матрицавий шарларда Пуассон ядроларини қуриш, A(z)-аналитик функцияларнинг функционал хоссаларини текшириш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 12 та илмий-амалий анжуманларда, жумладан 10 та халқаро ва 2 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 16 та илмий иш чоп этилган, шулардан Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 4 та, жумладан 1 таси хорижий ва 3 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 100 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устивор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

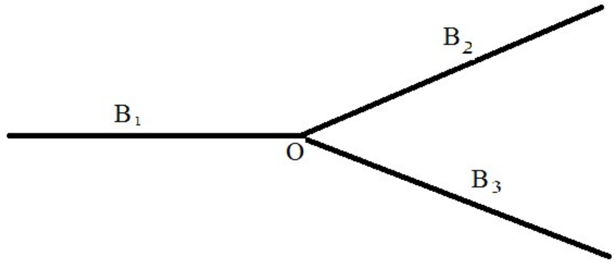
Диссертациянинг **«Бошланғич тушунчалар»** деб номланган биринчи бобида диссертация ишини мазмунини ёритиш ва мавзуни тадқиқ этиш учун зарур бўлган муҳим тушунчалар келтирилган. Шунингдек, диссертация мавзуси доирасидаги тадқиқотлар бошлангунга қадар шу соҳада тадқиқ этилган ишлар ва олинган натижалар шарҳи батафсил келтириб ўтилган.

Диссертациянинг асосий масалалари иккинчи, учинчи ва тўртинчи бобларида тадқиқ қилинган бўлиб, иккинчи боб 3 та, учинчи боб 3 та, тўртинчи боб 3 та параграфга бўлинган. Уларда турли метрик графларда диффузия ва дисперсион тенгламалар учун бошланғич-чегаравий масалалар қаралган бўлиб Фокаснинг умумлашган алмаштириш усулини мослаштириш билан аниқ ечимларнинг берилганлар орқали интеграл ифодаси қурилган. Олинган натижалар теоремалар ва леммалар кўринишида шакллантирилган.

Диссертациянинг иккинчи боби **«Очиқ юлдузсимон метрик графларда Коши масалалари учун Фокас усули»** деб номланиб, биз ушбу бобда бир нуқтадан чиқувчи ярим чексиз интерваллар бирлашмаси шаклидаги содда очиқ юлдузсимон метрик графда Шредингер ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалалар қаралган.

Диссертациянинг иккинчи бобининг биринчи параграфида қуйидагича масала қаралган:

Бизга учта ярим тўғри чизиқни граф учи деб аталувчи битта O нуқтада бирлаштиришдан ҳосил бўлган Γ_∞ содда юлдузсимон метрик граф берилган бўлсин. Графнинг боғламларини B_j, $j=1,2,3$ каби белгилаймиз (1-расм). B_j боғламларни $(0,\infty)$ интервалларга мос қўйиб, ҳар бир боғламда координата аниқлаймиз. Бунда граф учи 0 га мос қўйилади. Умумийликка зарар етказмаслик учун x_j ни x деб қабул қиламиз.



1-расм. Содда очиқ юлдузсимон граф.

Графнинг ҳар бир боғламида Шредингер тенгламасини

$$iq_t^{(j)}(x,t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x,t),\ x \in B_j, t > 0, j = 1,2,3 \tag{1}$$

бу ерда $\sigma = -\dfrac{\hbar}{2m}$ ва қуйидагича бошланғич шартлар

$$q^{(j)}(x,0) = q_0^{(j)}(x),\ x \in \overline{B}_j,\ j = 1,2,3, \tag{2}$$

ва уланиш (Кирхкофф) шартлари

$$q^{(1)}(0,t) = q^{(2)}(0,t) = q^{(3)}(0,t), t \geq 0, \tag{3}$$

$$\delta_1^2 q_x^{(1)}(0,t) + \delta_2^2 q_x^{(2)}(0,t) + \delta_3^2 q_x^{(3)}(0,t) = 0, t \geq 0 \tag{4}$$

ни қаноатлантируви $q^{(j)}\left(x,t\right)$ функциялари топилсин.

Теорема 1. *Агар $q_0^{(j)}(x)$, $\left(0,+\infty\right)$ да узлуксиз, чегараланган функциялар бўлса, у ҳолда (1)-(4) масаланинг ечими қуйидагича топилади:*

$$q_{sh}^{(j)}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(-k)dk -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}\sigma k\tilde{g}_0(w,t)dk,\ j = 1,2,3, \tag{5}$$

бу ерда $k\sigma\tilde{g}_0(w,t) = -\dfrac{1}{\sum_{j=1}^{3}\delta_j^2}\cdot\sum_{j=1}^{3}\delta_j^2\hat{q}_0^{(j)}(-k),\ \hat{q}_0^{(j)}(k) = \int_0^{\infty} e^{-ikx}q_0^{(j)}(x)dx,$

$$D = \left\{k \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(-ik^2) < 0\right\} = D^{(2)} \cup D^{(4)},\ D^{(2)} = \left\{k \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}\,k > 0, \mathrm{Re}\,k < 0\right\},$$

$$D^{(4)} = \left\{k \in \mathbb{C}: \mathrm{Im}\,k < 0, \mathrm{Re}\,k > 0\right\}.$$

Диссертациянинг иккинчи бобининг иккинчи параграфида иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун юлдузсимон очиқ метрик графнинг (1-расм) ҳар бир боғламида

$$q_t^{(j)}(x,t) = \sigma^2 q_{xx}^{(j)}(x,t),\ x \in B_j, t > 0,\ j = 1,2,3 \tag{6}$$

иссиқлик тарқалиш тенгламаси ва (2) - (4) шартларни қаноатлантирувчи $q^{(j)}\left(x,t\right)$ функциялар топилсин.

Теорема 2. *Берилган бошланғич-чегаравий масаланинг ечими*

$$q^{(j)}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(k)dk -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(-k)dk-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\partial D^+} e^{ikx-wt}ik\sigma^2\tilde{g}_0(w,t)dk, \qquad (7)$$

кўринишда бўлади. Бунда

$$ik\sigma^2\tilde{g}_0(w,t)=\frac{1}{\sum\limits_{r=1}^{3}\delta_j^2}\cdot\sum_{j=1}^{3}\delta_j^2\hat{q}_0^{(j)}(k),$$

$$D^{\pm}=\left\{k\in\mathbb{C}^{\pm}:\ \mathrm{Re}\,k^2<0\right\},\mathbb{C}^{+}=\{k\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,k>0\},\mathbb{C}^{-}=\{k\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,k<0\}$$

каби аниқланади.

Диссертациянинг иккинчи бобининг учинчи параграфида эса чексиз кесмаларни бир нуқтада бирлаштиришдан ҳосил бўлган метрик графда Шредингер тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масала қаралган. Масаланинг ечимининг интеграл кўринишидаги ифодаси (5) га ўхшаш кўринишда топилган.

Диссертациянинг учинчи боби **«Оддий метрик графларда бошланғич-чегаравий масалалар учун Фокас усули»** деб номланиб, биз ушбу бобда, саноқлита чекли ва чексиз интерваллардан ташкил топган метрик графда Шредингер ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалалар, зинапоясимон метрик графларда иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларни қараб чиқамиз.

Диссертация учинчи бобининг биринчи ва иккинчи параграфларида саноқлита чекли ва чексиз интерваллардан ташкил топган метрик графда Шредингер ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалалар қаралган.

Бизга n та чекли $B_1,B_2,...,B_n$ ва m та ярим чексиз $B_{n+1},B_{n+2},...,B_{n+m}$ тўғри чизиқларни бир нуқтада бирлаштиришдан ҳосил бўлган Γ_3 метрик граф берилган бўлсин (2-расм). Графнинг $B_j,(j=\overline{1,n})$ боғламларини $(0,L_j)$ интервалларга, $B_r,(r=\overline{n+1,n+m})$ боғламларини эса $(0,\infty)$ интервалларга мос қўйиб, ҳар бир боғламда координата аниқлаймиз. Граф учини 0 га мос қўйамиз.

Графнинг ҳар бир боғламида қуйидаги

$$u_t^{(j)}(x,t)=\sigma^2 u_{xx}^{(j)}(x,t),\;\; x\in B_j, t>0, \tag{8}$$

иссиқлик тарқалиш тенгламасининг

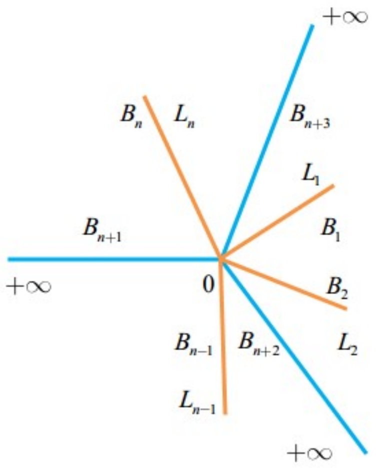
$$u^{(j)}(x,0)=u_0^{(j)}(x),\, x\in \overline{B}_j,\, j=\overline{1,n+m}, \tag{9}$$

бошланғич шартларни, графнинг чекли ва чексиз боғламларида

$$u^{(j)}(L_j,t)=h_j(t),\, t\geq 0,\, j=\overline{1,n}, \tag{10}$$

чегаравий ва

$$\lim_{x\to\infty} u^{(r)}(x,t)=0, t\geq 0, r=\overline{n+1,n+m} \tag{11}$$



2-расм.

асимптотик шартларни ҳамда граф учларида

$$u^{(1)}(0,t)=u^{(2)}(0,t)=...=u^{(n+m)}(0,t),\;\; \sum_{j=1}^{n+m}\delta_j^2 u_x^{(j)}(0,t)=0 \tag{12}$$

уланиш (Кирхкофф) шартларини қаноатлантирувчи $u^{(j)}\left(x,t\right)$ ечимлари топилсин.

Теорема 3. *Берилган бошланғич-чегаравий масаланинг ечими*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{u_0}^{(j)}(k)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL_j-wt}\frac{\widehat{u_0}^{(j)}(k)-\widehat{u_0}^{(j)}(-k)-2ik\sigma^2\widetilde{g}_0(w,t)}{A_j}dk- \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\frac{e^{ikL_j}\widehat{u_0}^{(j)}(k)-e^{-ikL_j}\widehat{u_0}^{(j)}(-k)+2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w,t)}{A_j}dk,\, j=\overline{1,n},$$

$$u^{(r)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\widehat{u_0}^{(r)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\widehat{u_0}^{(r)}(-k)dk-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}ik\sigma^2\widetilde{g}_0(w,t)dk,\, r=\overline{n+1,n+m}. \tag{14}$$

кўринишда бўлади. Бунда

$$ik\sigma^2\widetilde{g}_0(w,t)=\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\delta_j^2\frac{B_j}{A_j}+\sum_{r=n+1}^{n+m}\delta_r^2}.$$

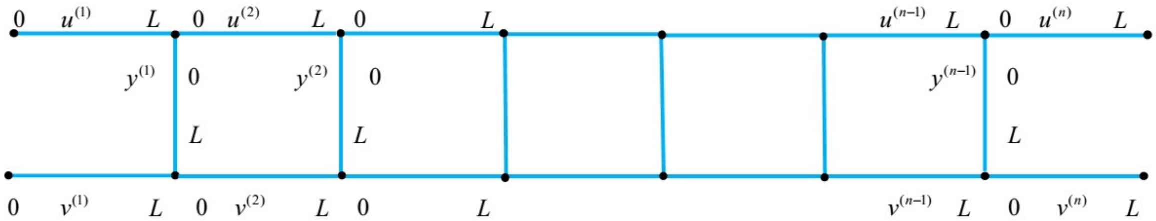
$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_j^2}{A_j}\left[e^{ikL_j}\hat{u}_0^{(j)}(k)-e^{-ikL_j}\hat{u}_0^{(j)}(-k)+2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w,t)\right]+\sum_{r=n+1}^{n+m}\delta_r^2\hat{u}_0^{(r)}(k)\right],$$

$$A_j=e^{ikL_j}-e^{-ikL_j},\ B_j=e^{ikL_j}+e^{-ikL_j},\qquad \hat{u}_0^{(j)}(k)=\int_{B_j}e^{-ikx}u_0^{(j)}(x)dx,\ j=\overline{1,n+m},$$

$h_0^{(j)}(w,t)=\int_0^t e^{ws}u^{(j)}(L_j,s)ds,\ j=\overline{1,n}$ *каби аниқланади.*

Диссертациянинг учинчи бобининг учинчи параграфида қуйидагича масала қаралган:

Чекли интервалдан ташкил топган зинапоясимон метрик графда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масала қаралган. Бизга зинапоясиман граф берилган бўлсин. Графнинг боғламларини b_j^+, b_j^- $\left(j=\overline{1,n}\right)$ ва b_j^0 $\left(j=\overline{1,n-1}\right)$ каби белгилаймиз ва ҳар бир боғламга $(0,L)$ интервалларни мос қўйамиз. Ҳар бир боғламда координата аниқлаймиз (3-расм).



3-расм. Зинапоясимон метрик граф.

Графнинг ҳар бир боғламида қуйидагича иссиқлик тарқалиш тенгламалари берилган бўлсин:

$$u_t^{(j)}(x,t)=u_{xx}^{(j)}(x,t),\ x\in b_j^+,\ v_t^{(j)}(x,t)=v_{xx}^{(j)}(x,t),\ x\in b_j^-,t>0,j=\overline{1,n}\quad(15)$$

$$y_t^{(j)}(x,t)=y_{xx}^{(j)}(x,t),\ x\in b_j^{(0)},t>0,j=\overline{1,n-1}.\quad(16)$$

Бошланғич шартлар

$$u^{(j)}(x,0)=u_0^{(j)}(x),\ x\in\bar{b}_j^+,\ v^{(j)}(x,0)=v_0^{(j)}(x),\ x\in\bar{b}_j^-,\ j=\overline{1,n},\quad(17)$$

$$y^{(j)}(x,0)=y_0^{(j)}(x),\ x\in\bar{b}_j^{(0)},\ j=\overline{1,n-1},\quad(18)$$

ва чегаравий шартларни

$$u^{(1)}(0,t)=g_0^{(n)}(t),\ v^{(1)}(0,t)=d_0^{(n)}(t),t\ge0,\quad(19)$$

$$u^{(n)}(L,t)=h_0^{(n)}(t),\ v^{(n)}(L,t)=r_0^{(n)}(t),t\ge0.\quad(20)$$

каби аниқлаймиз.

Граф учларида уланиш (Кирхкофф) шартларини қуйидагича аниқлаймиз:

$$u^{(j-1)}\left(L,t\right)=u^{(j)}\left(0,t\right)=y^{(j-1)}\left(0,t\right),\ u_x^{(j-1)}\left(L,t\right)+u_x^{(j)}\left(0,t\right)+y_x^{(j-1)}\left(0,t\right)=0;$$

$$v^{(j-1)}\left(L,t\right)=v^{(j)}\left(0,t\right)=y^{(j-1)}\left(L,t\right),$$

$$v_x^{(j-1)}\left(L,t\right)+v_x^{(j)}\left(0,t\right)+y_x^{(j-1)}\left(L,t\right)=0,\ j=\overline{2,n}. \tag{21}$$

Умумлашган Фурье алмаштириши (ёки Фокас усули) ёрдамида қаралаётган масала графнинг тармоқланиш нуқталаридаги ечимнинг ва унинг ҳосиласининг қийматларига нисбатан чизиқли тенгламалар системасига келтирилади. Бу тенгламалар системаси масаладаги берилганларга нисбатан ягона ечими топилади.

Теорема 4. *Берилган бошланғич-чегаравий масаланинг ечими*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\hat{u}_0^{(j)}(k)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-}e^{ikx-ikL-wt}\left(\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\ j=\overline{1,n}, \tag{22}$$

$$v^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\hat{v}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-}e^{ikx-ikL-wt}\left(\tilde{r}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{r}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\tilde{d}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{d}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\ j=\overline{1,n}, \tag{23}$$

$$y^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\hat{y}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-}e^{ikx-ikL-wt}\left(\tilde{l}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{l}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\tilde{q}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{q}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\ j=\overline{1,n-1}, \tag{24}$$

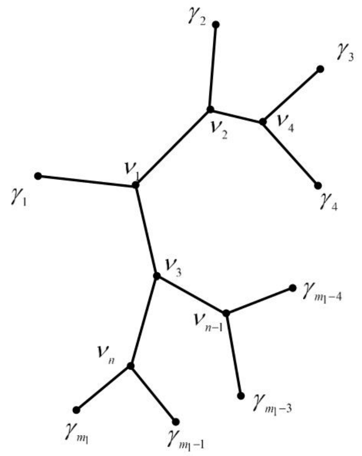
кўринишда бўлади. Бу ерда $\tilde{h}_0^{(j)},\tilde{q}_0^{(j)},\tilde{g}_0^{(j)},\tilde{h}_1^{(j)},\tilde{l}_1^{(j)},\tilde{r}_0^{(j)},\tilde{d}_1^{(j)},\tilde{r}_1^{(j)}$ *лар берилган чегаравий ва бошланғич шартлар ёрдамида аниқланади.*

Диссертациянинг тўртинчи бобида умумийроқ кўринишдаги графларда, айнан учбурчакнинг ҳар бир учида биттадан кесма уланишидан ҳосил бўлган граф, дарахтсимон графларда иссиқлиқ тарқалиш тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалалар қаралган.

$\Gamma = E \cup V$ – боғламли метрик граф бўлсин, бу ерда $E = \{b_j\}_{j=1}^{n}$ – тўплам графнинг қирралари, $V = \{\nu_j\}_{j=1}^{m}$ – тўплам эса графнинг учлари. Ҳар бир боғламга $(0, L_j), j = \overline{1, n}$ интервалларни мос қўйамиз ва ҳар бир боғламда x_j координата аниқлаймиз.

Агар b_j қирранинг охири ν учдан иборат бўлса, у ҳолда b_j қирра ν уч билан учрашади деймиз ва буни $b_j \sim \nu$ каби белгилаймиз.

$\{b : b \sim \nu, b \in E\}$ тўпламнинг элементлари сонини ν учнинг валентлиги деймиз. Агар учнинг валентлиги 1 га тенг бўлса, у ҳолда уни чегаравий учлари дейилади. $\{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{m_1}\} = \partial\Gamma \subset V$ – графнинг чегаравий учлари тўплами бўлсин. Умумийликка зарар келтирмаслик учун x_j ни x деб қабул қиламиз.



4-расм. Γ *метрик граф*

Графнинг ҳар бир боғламида иссиқлик тенгламаларини қараймиз:

$$u_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t), x \in b_j, t > 0. \tag{25}$$

(25) тенглама бошланғич шартни қаноатлантирсин деб талаб қиламиз:

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), j = \overline{1, n}. \tag{26}$$

Қирраларини бирлаштирувчи нуқталарда (яъни чегаравий учларда эмас) графнинг ечими қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

а) Барча $u^{(j)}$ функцияларнинг ν учдаги қийматлари $b_j \sim \nu$ уч билан бир хил;

б) Барча $u^{(j)}$ функцияларнинг ҳар бир ν учдаги бир томонли ҳосилалар йиғиндиси $b_j \sim \nu$ учун нолга тенг:

$$\sum_{b_j \sim \nu} \left. \frac{\partial u^{(j)}(x,t)}{\partial x} \right|_{\nu} = 0, \nu \in V \setminus \partial\Gamma, t \in [0, T]. \tag{27}$$

Бу шартлардан биринчиси учдаги ечимнинг узлуксизлиги, иккинчиси эса оқимни сақлаш шарти деб аталади. Бу шартларни яна Кирхкофф шартлари ҳам дейилади.

Графнинг чегаравий учларда қуйидагича

$$u^{(j)}(x,t)|_{\nu} = g_0^{(j)}(t) \text{ агар } x_j = 0 \ \ \nu \text{ учда},$$

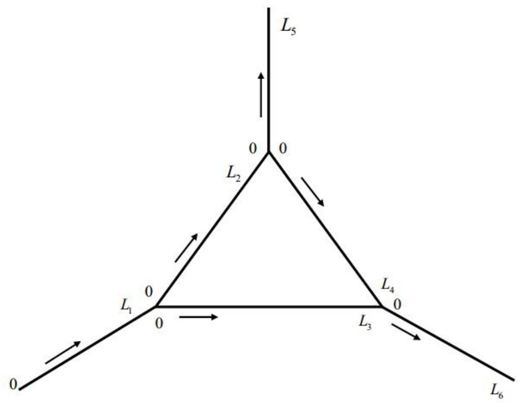
$$u^{(j)}(x,t)|_{\nu} = h_0^{(j)}(t), \text{ агар } x_j = L_j \ \ \nu, b_j \sim \nu \text{ учда}. \tag{28}$$

шартларни қаноатлантирувчи $u^{(j)}(x,t)$ ечимлари топилсин.

Лемма 1. *(25) - (28) масала кўпи билан битта регуляр ечимга эга.*

Ягоналик леммаси энергия интеграллари усули ёрдамида исботланган.

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида учбурчакнинг ҳар бир учида биттадан кесма уланишидан ҳосил бўлган графда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун чегаравий масала ечилган (5-расм).



5-расм. Γ_1 *метрик граф*

Теорема 5. Γ_1 *метрик графда қаралган бошланғич-чегаравий масаланинг ечими*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\hat{u}_0^{(j)}(k)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-}e^{ikx-ikL_j-wt}\left(\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk- \tag{29}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\hat{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,(j=1,2,...,6),$$

кўринишда бўлади.

Бу ерда $G^{(j)}(k,t)=\hat{u}_0^{(j)}(k)+\left(e^{-ikL_j}-1\right)ik\hat{h}_0^{(j)}(w,t)$, $\hat{g}_0^{(1)}(w,t),\hat{h}_0^{(5)}(w,t),\hat{h}_0^{(6)}(w,t)$ — *маълум функциялар, улар (28) чегаравий шартлар ёрдамида аниқланади.*

$$\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(G^{(j)}(k,t)-G^{(j)}(-k,t)\right), \tag{30}$$

$$\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(e^{ikL_j}G^{(j)}(k,t)-e^{-ikL_j}G^{(j)}(-k,t)\right), \tag{31}$$

$$\left(\tilde{h}_0^{(1)}(w,t),\tilde{h}_0^{(2)}(w,t),\tilde{h}_0^{(3)}(w,t)\right)^T=\left(M(k)\right)^{-1}\cdot\left(N_1(k)\cdot\widehat{U}_0(k)+N_2(k)\cdot\widehat{U}_0(-k)\right),$$

$$A_j=e^{ikL_j}-e^{-ikL_j},\ B_j=e^{ikL_j}+e^{-ikL_j},\ j=1,2,...,6,$$

$$M(k)=\begin{pmatrix} C_{123} & -2A_1A_3 & -2A_1A_2 \\ -2A_4A_5 & C_{245} & -2A_2A_5 \\ -2A_4A_6 & -2A_3A_6 & C_{346} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. $M(k)$ *матрицанинг детерминанти* $\operatorname{Im} k\neq 0$ *бўлганда нолдан* *фарқли бўлади.*

Тўртинчи бобнинг 3-параграфида дарахтсимон графда бошланғич-чегаравий масала қаралган. Масала ечими Фокас усули ёрдамида берилганлар ва бошланғич шартларга нисбатан аниқланган. Бу ҳисоблашлар юқоридагига ўхшаш бўлгани ва автореферат ҳажми чекланган бўлганлиги сабабли бу ерда келтирмаймиз.

ХУЛОСА

Диссертация иши Фокаснинг умумлашган алмаштириш усули ёрдамида метрик графларда тўлқин тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларни ўрганишга бағишланади.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Очиқ юлдузсимон метрик графларда Шредингер тенгламаси учун масалалар ечимининг интеграл ифодаси топилган. Бунда шундай типдаги масалаларни ечиш учун умумлашган Фокас усули умумлаштирилди.

2. Ёпиқ юлдузсимон метрик графларда Шредингер учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг ечими топилган. Умумлашган Фокас алмаштририш усули ёрдами билан масалаларнинг аниқ ечимлари топилган.

3. Саноқлита чекли ва чексиз интерваллардан ташкил топган метрик графда Шредингер ва иссиқлик тарқалиш тенгламалари учун бошланғич-чегаравий масалаларнинг аниқ ечимларининг интеграл ифодаси топилади.

4. Цикл ва дарахтсимон графларда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масалаларни ечиш учун Фокас улули умумлаштирилди.

5. Чекли интерваллардан ташкил топган зинапоясимон метрик графда иссиқлик тарқалиш тенгламаси учун бошланғич-чегаравий масала қаралган. Ечимнинг ягоналиги исботланган. Ечимнинг мавжудлигини исботлашда алгебраик тенгламалар системасига келтирилган. Бу тенгламалар системасининг ягона ечим мавжудлиги квант графлари учун спектрал назариядан фойдаланиб кўрсатилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ЭШИМБЕТОВ МАРДОНБЕК РЕЙИМБАЕВИЧ

МЕТОД УНИФИЦИРОВАННОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФОКАСА ДЛЯ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ НА МЕТРИЧЕСКИХ ГРАФАХ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2021 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2018.1.PhD/FM193.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Худайберганов Гулмирза** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Ганиходжаев Расул Набиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджанович доктор физико-математических наук (DSc)
Ведущая организация:	Каракалпакский государственный университет им. Бердаха.

Защита диссертации состоится «29» апреля 2021 года в 16:00 на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 18). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «19» 04 2021 года.
(протокол рассылки № 2 от «19» 04 2021 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

А.Садуллаев
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные исследования с практическим приложением, проводимые в мире, в основном сосредоточены на теории частный производных дифференциальных уравнений. Начально-краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными на метрических графах на основе теории функций комплексных переменных являются объектом исследования в таких областях, как биофизика, биотехнология, медицина и производство. При моделировании процессов квантовой физики и волновых процессов в разветвленных структурах важную роль играют начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности и Шредингера на метрических графах. Этим обусловливается важность нахождения решений начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными на метрических графах.

Многие известные ученые мира ведут научные исследования над проблемами решения начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений на метрических графах и исследованием свойств этих решений. Наиболее эффективным методом математического моделирования процесса распространения импульсов в нервных системах является использование специальных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в метрическом графе. При этом особое внимание уделяется адаптации унифицированного метода преобразования Фокаса к решению начально-краевых задач в метрических графах, развитию методов решения начально-краевых задач в метрических графах.

В нашей стране, особенно в последние годы, повышенное внимание уделяется современным тенденциям в фундаментальных науках, в том числе квантовой механике и физике. В частности, в последнее время особое внимание уделяется изучению начально-краевых задач для эволюционных уравнений в метрических графах. Существенные результаты были получены при анализе процессов квантовой физики с использованием уравнения Шредингера, определенного в метрических графах. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Дифференциальные уравнения и математическая физика».[2] В связи с этим важно решить начально-краевые задачи в метрических графах, обобщить метод Фокуса для решения начально-краевых задач и разработать методы решения волновых и диффузионных уравнений на метрических графах.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В конце 1980-х годов возникла потребность в изучении начально-краевых задач на метрических графах. Чешские ученые П.Экснер и П.Себа рассмотрели краевые задачи для уравнения Шредингера в звездообразных открытых графах и использовали полученные результаты для исследования свободного движения электрона в сложных молекулах. Последующие результаты в этой области опубликовали У.Смиланский, П.Кучмент, Р.Шрейдер, В.Кострикин и их ученики в 2000-2010 гг. Они изучали спектральные задачи и задачи рассеяния в метрических графах для стационарного уравнения Шредингера. В своих работах они впервые использовали понятие квантового графа. П.Экснер и О.Пост изучали оператор Шредингера в тонких сетевых многообразиях. Было показано что квантовые графы формируются в предельном положении, когда площадь поперечного сечения ветвей этих сетей стремится к нулю.

Дж.Боман, П.Курасов и Н.Герасименко начали изучать обратные задачи в квантовых графах. Они использовали данные рассеяния в квантовых графах для определения матрицы связанности графа и длины ребер. П.Курасов и М.Новашик исследовали обратную спектральную задачу для оператора Лапласа на конечном метрическом графе. В целом, несмотря на то, что квантовые графы хорошо изучены, по сей день они остаются одной из самых актуальных областей исследований, в которых работают ведущие ученые в этой области. Основная причина этого в том, что квантовые графы служат ключевым инструментом в исследовании новых проблем нанофизики. Для уравнения Кортевега - де Фриза и его линейного аналога, т.е. для уравнения Эйри были изучены лишь несколько задач на метрических графах. Здесь следует отметить работы З.А.Собирова, М.И.Ахмедова, Х.Уеккера, Д.Нойа, Д.Магнолы, К.Сейферта и М.Кавальканте. В работах А.С.Волковой был доказан аналог неравенства Гарнака для уравнений эллиптического типа и уравнений теплопроводности на метрических графах. Обобщенные решения уравнения теплопроводности, заданного на простом звездном графе, также было исследовано А.С.Волковой. Было показано, что рассматриваемая задача имеет единственное решение. Кроме того, был исследован вопрос управления с использованием граничных данных.

Метод унифицированного преобразования Фокаса для решения краевых задач – один из новых, интенсивно развивающихся сегодня методов. Этот метод был использован А.Фокасом, Д.Смитом, Дж.Спенсом, Б.Пеллони, Д.Бернардом, Н.Шилсом для решения ряда начальных и краевых задач для линейных и нелинейных уравнений на конечных и бесконечных интервалах. В метрическом графе метод Фокаса впервые был использован Д.Смитом и Н.Шилсом для решения начально-краевых задач на звездообразном графе и на графе, образованном последовательным соединением отрезков с различными параметрами проводимости. Кроме того, условия на вершине графа (т.е. условия Кирхгоффа) были обоснованы с точки зрения физики. В диссертации изучаются начально-краевые задачи в звездообразных графах, граф-дерево, лестничных и других типах метрических графов для уравнения теплопроводности и уравнения Шредингера. При решении этих задач был усовершенствован метод унифицированного преобразования Фокаса.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялось диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана в рамках исследовательского проекта №14-022 RG/MATHS/AS_G; UNESCO FR:324028610 по теме «Нелинейные эволюционные уравнения и транспорт на метрических графах, возникающие в мезоскопической физике».

Целью исследования является постановка волновых уравнений в метрических графах, в частности краевых задач для линейного рассеивания теплопроводности, уравнений Шредингера, и построение решения этих задач.

Задачи исследования:

построить решения начально-краевых задач для уравнения Шредингера в простых открытых и замкнутых звездообразных метрических графах и проанализировать волновую динамику в вершине графа, используя полученные решения;

нахождение решений начально-краевых задач для уравнений Шредингера и рассеяния теплопроводности на звездообразном метрическом графе, состоящем из конечного числа конечных и полубесконечных интервалов;

обобщение метода Фокаса для решения начально-краевых задач для волновых уравнений в графах с треугольных и графе-дереве на плоскости;

доказать существование и единственность решения уравнения рассеяния теплопроводности на метрическом графе лестничного типа, состоящем из конечного интервала.

Объектом исследования являются простые открытые и замкнутые звездообразные метрические графы, звездообразный метрический граф, состоящий из конечного числа конечных и полубесконечных интервалов, графах с треугольных и графе-дереве на плоскости, метрическом графе лестничного типа, состоящие из конечного интервала.

Предметом исследования являются уравнение рассеяния теплопроводности, уравнение Шредингера, задача Коши, начально-краевые задачи на основе метода унифицированного преобразования Фокаса, теоремы Коши, леммы Жордана, метода преобразования Фурье.

Методика исследования. В работе используются методы, современные методы комплексного анализа, метрических графов, частных производных дифференциальных уравнений, а также методы решения начально-краевых задач.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

получено решение начально-краевых задач для уравнения Шредингера в простых открытых и замкнутых звездообразных метрических графах;

получено интегральное решение начально-краевых задач для уравнений Шредингера и рассеяния теплопроводности в метрическом графе, состоящем из конечных и бесконечных интервалов;

обобщен метод Фокаса для решения начально-краевых задач для уравнений теплопроводности в графах с циклом и графе-дереве;

доказаны существование и единственность решения уравнения рассеяния теплопроводности на метрическом графе лестничного типа, состоящем из конечного интервала.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

результаты, были использованы для расчета коэффициентов прохождения и отражения в процессах связанных с распространением волн;

вычислены параметры колебательного спектра молекул.

Достоверность результатов исследования основана на использовании метода преобразования Фурье, формулы Грина, леммы Жордана, теоремы Коши, которые в метрических графах обобщают начально-краевые задачи, рассматриваемые для волновых уравнений, а также жесткости математических соображений и доказательств для волнового уравнения, рассматриваемого в метрических графах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы для изучения оптических свойств рассеяния теплопроводности в метрических графах и распространения волн в разветвленных полях для уравнений Шредингера, построения ядер Пуассона в матричных сферах, в анализе релаксационных процессов в анизотропных жидкостях.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что результаты могут быть использованы для определения коэффициентов пропускания и возврата распространения волн в точке разветвления, для анализа волновых процессов в разветвленных мезоскопических полях, для математического моделирования процесса распространения импульсов в нервных системах.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по метод унифицированного преобразования Фокаса для волновых уравнений на метрических графах внедрены в практику по следующим направлениям:

решение уравнения Шредингера в виде простого метрического графа использовалось в международном проекте №15-198 RG/PHYS/AS_I-FR 3240287086 по «Экспериментальное исследование релаксационных процессов в анизотропных жидкостях: анализ колебательных и ориентационных спектров» для нахождения коэффициентов проницаемости и отдачи в точке разветвления, а также при проверке оптических свойств распространения волн (Справка № 89-03-4483 Министерства высшего и среднего специального образования от 6 ноября 2020 г.). Результаты позволили вычислить параметры рассеяния в точке разветвления, колебательных спектров молекул;

результаты, полученные по рассеиванию теплопроводности в метрических графах и решению начально-краевых задач для уравнений Шредингера, представленных многомерными векторными функциями специального вида, а также о том, что ядра интегральных формул являются функциями комплексных переменных, были использованы в практическом проекте № MRU-OT-9/2017 «Многомерный комплексный анализ» при используется формирования интегрального выражения голоморфных функций в матричных сферах (Справка № 89-03-4544 Министерства высшего и среднего специального образования от 10 ноября 2020 г.). Результаты позволили построить ядра Пуассона в матричных сферах, исследовать функциональные свойства A(z)-аналитических функций.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 10 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, из них 4 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень октора философии, в том числе 1 работа опубликована в зарубежном журнале и 3 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на одиннадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЕРТАЦИИ

Во введении освещаются актуальность и необходимость исследования, соответствие его приоритетам науки и технологий, обзор даётся зарубежных исследований по теме, уровень изученности проблемы, цель, задачи, объект и предмет исследования, научная новизна и практические результаты, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, реализация результатов исследований, опубликованные работы и информация о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, озаглавленная **«Предварительные результаты»**, содержит важные концепции, необходимые для освещения содержания диссертации и изучения темы. Также представлен подробный обзор проделанной работы и результатов, полученных до начала исследования по теме диссертации.

Основные проблемы диссертации изучаются во второй, третьей и четвертой главах, вторая глава разбита на 3, третья глава на 3, четвертая глава на 3 параграфа. Они проясняют начально-краевые задачи для уравнений диффузии и дисперсии в различных метрических графах и строят интегральное выражение точных решений через данные, адаптируя метод унифицированного преобразования Фокаса. Полученные результаты сформулированы в виде теорем и лемм.

Вторая глава диссертации озаглавлена **«Метод Фокаса для задач Коши на открытых звездообразных графах»** и в этой главе рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений Шредингера и теплопроводности в простом открытом звездообразном метрическом графе в виде комбинации полубесконечных интервалов, выходящих из вершины.

Первый параграф второй главы диссертации посвящен следующей проблеме:

Рассмотрим простой звездообразный граф Γ_∞ с тремя полубесконечными ребрами, соединенными в точке O. Точка O называется вершиной графа. Обозначим ребры графа через B_j, $j=1,2,3$ (см. рис. 1). Координату x_j на ребре B_j ($j=1,2,3$) определим, сопоставляя это ребро интервалу $(0,\infty)$. При этом в каждом из ребер точка O имеет координату 0. Далее мы будем использовать x вместо x_j.

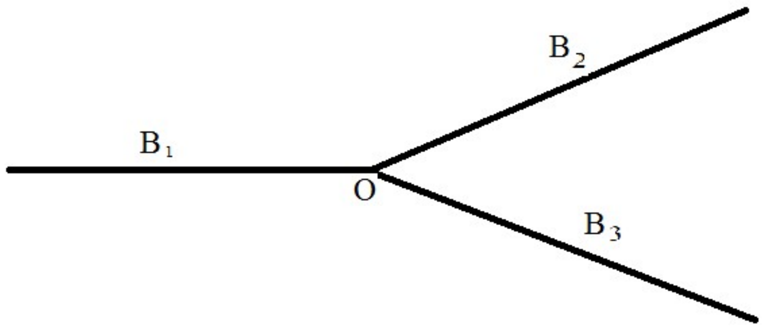


Рисунок 1. Простой открытый звездообразный граф.

В каждом ребре графа рассматривается уравнение Шредингера

$$iq_t^{(j)}(x,t) = \sigma q_{xx}^{(j)}(x,t),\ \ x \in B_j, t > 0, j = 1,2,3 \tag{1}$$

где $\sigma = -\dfrac{\hbar}{2m}$, с начальными условиями

$$q^{(j)}(x,0)=q_0^{(j)}(x),\ x\in\overline{B}_j,\ j=1,2,3. \tag{2}$$

В вершине графа решение удовлетворяет следующим условиям склеивания (Кирхгоффа)

$$q^{(1)}(0,t)=q^{(2)}(0,t)=q^{(3)}(0,t),t\geq 0\,, \tag{3}$$

$$\delta_1^2 q_x^{(1)}(0,t)+\delta_2^2 q_x^{(2)}(0,t)+\delta_3^2 q_x^{(3)}(0,t)=0,t\geq 0. \tag{4}$$

Теорема 1. *Если существуют непрерывные конечные функции в* $q_0^{(j)}(x)$, $\left(0,+\infty\right)$, *то решение задача (1) - (4) выражается в следующем образом:*

$$q_{sh}^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(-k)dk-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial D^{(2)}} e^{ikx-wt}\sigma k\tilde{g}_0(w,t)dk,\ j=1,2,3, \tag{5}$$

где $k\sigma\tilde{g}_0(w,t)=-\dfrac{1}{\sum\limits_{j=1}^{3}\delta_j^2}\cdot\sum\limits_{j=1}^{3}\delta_j^2\hat{q}_0^{(j)}(-k),\ \hat{q}_0^{(j)}(k)=\int\limits_0^{\infty} e^{-ikx}q_0^{(j)}(x)dx,$

$$D=\left\{k\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(-ik^2)<0\right\}=D^{(2)}\bigcup D^{(4)},\ D^{(2)}=\left\{k\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,k>0,\mathrm{Re}\,k<0\right\},$$

$$D^{(4)}=\left\{k\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,k<0,\mathrm{Re}\,k>0\right\}.$$

В графе Γ_∞ рассматриваем следующую задачу для уравнения теплопроводности. На каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$q_t^{(j)}(x,t)=\sigma^2 q_{xx}^{(j)}(x,t),\ \ x\in B_j,t>0,\ j=1,2,3. \tag{6}$$

Требуется найти функции $q^{(j)}\left(x,t\right)$, удовлетворяющие условиям (2) - (4).

Теорема 2. *Решение начально-краевой задачи имеет вид*

$$q^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(k)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^{+}} e^{ikx-wt}\hat{q}_0^{(j)}(-k)dk-\frac{1}{\pi}\int_{\partial D^{+}} e^{ikx-wt}ik\sigma^2\tilde{g}_0(w,t)dk, \tag{7}$$

где

$$ik\sigma^2 \tilde{g}_0(w,t) = \frac{1}{\sum_{r=1}^{3} \delta_j^2} \cdot \sum_{j=1}^{3} \delta_j^2 \hat{q}_0^{(j)}(k),$$

$$D^{\pm} = \left\{ k \in \mathbb{C}^{\pm} : \operatorname{Re} k^2 < 0 \right\}, \mathbb{C}^{+} = \{ k \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} k > 0 \}, \mathbb{C}^{-} = \{ k \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} k < 0 \}.$$

Третий параграф второй главы диссертации посвящен начально-краевой задаче для уравнения Шредингера в метрическом графе, образованном объединением бесконечных участков в одной точке. Выражение для решения задачи в интегральной форме находится в форме, аналогичной (5).

Третья глава диссертации называется «**Метод Фокаса для начально-краевых задач на простых метрических графах**». В этой главе рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений Шредингера и теплопроводности в метрическом графе, состоящем из конечных и бесконечных интервалов, и начально-краевые задачи для на графе лестничного типа.

Первый и второй параграфы третьей главы диссертации посвящены начально-краевым задачам для уравнений Шредингера и теплопроводности в метрическом графе, состоящем из конечного и бесконечного интервалов.

В этом параграфе обобщены приведенные выше результаты на случай более общего звездообразного графа, который имеет конечные и полубесконечные ребра (см. рис. 2). Мы рассматриваем метрический граф Γ_3, который получается соединением n конечных, $B_1, B_2, ..., B_n$ и m полубесконечных, $B_{n+1}, B_{n+2}, ..., B_{n+m}$ ребер в одной точке, называемой вершиной графа. Как и в предыдущих случаях, определим координаты на ребрах $B_j \sim (0, L_j)$, $j = \overline{1,n}$, и $B_r \sim (0, +\infty)$, $r = \overline{n+1, n+m}$.

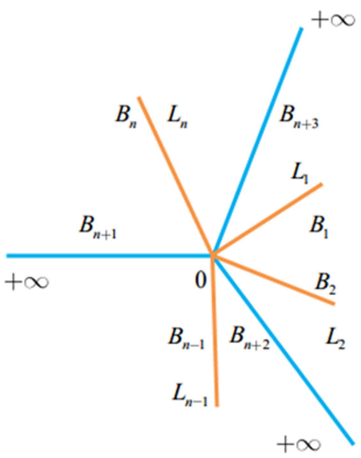


Рисунок 2.

В каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t^{(j)}(x,t) = \sigma^2 u_{xx}^{(j)}(x,t), \; x \in B_j,$$
$$t > 0, (j = \overline{1, n+m}) \tag{8}$$

Определим начальные условия

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), \; x \in B_j, (j = \overline{1, n+m}), \tag{9}$$

граничные условия

$$u^{(j)}(L_j, t) = h_j(t), \; t \ge 0, (j = \overline{1, n}), \tag{10}$$

$$\lim_{x \to \infty} u^{(r)}(x,t) = 0, t \ge 0, (r = \overline{n+1, n+m}) \tag{11}$$

на конечных и полубесконечных ребрах, соответственно.

Кроме того, нам необходимо определить следующие условия склеивания для связности графа

$$u^{(1)}(0,t) = u^{(2)}(0,t) = ... = u^{(n+m)}(0,t), \ \sum_{j=1}^{n+m} \delta_j^2 u_x^{(j)}(0,t) = 0. \tag{12}$$

Теорема 3. *Решение начально-краевой задачи имеет вид*

$$u^{(j)}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \hat{u}_0^{(j)}(k)dk -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL_j-wt} \frac{\hat{u}_0^{(j)}(k) - \hat{u}_0^{(j)}(-k) - 2ik\sigma^2 \tilde{g}_0(w,t)}{A_j} dk - \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \frac{e^{ikL_j}\hat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j}\hat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w,t)}{A_j} dk, \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$u^{(r)}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt} \hat{u}_0^{(r)}(k)dk - \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} \hat{u}_0^{(r)}(-k)dk -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt} ik\sigma^2 \tilde{g}_0(w,t)dk, \left(r = \overline{n+1, n+m}\right). \tag{14}$$

Здесь

$$ik\sigma^2 \tilde{g}_0(w,t) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \delta_j^2 \frac{B_j}{A_j} + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2} \cdot$$

$$\cdot\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j^2}{A_j}\left[e^{ikL_j}\hat{u}_0^{(j)}(k) - e^{-ikL_j}\hat{u}_0^{(j)}(-k) + 2ik\sigma^2 h_0^{(j)}(w,t)\right] + \sum_{r=n+1}^{n+m} \delta_r^2 \hat{u}_0^{(r)}(k)\right],$$

$$A_j = e^{ikL_j} - e^{-ikL_j}, \ B_j = e^{ikL_j} + e^{-ikL_j}, \ \hat{u}_0^{(j)}(k) = \int_{B_j} e^{-ikx} u_0^{(j)}(x)dx, j = \overline{1, n+m},$$

$$h_0^{(j)}(w,t) = \int_0^t e^{ws} u^{(j)}(L_j, s)ds, \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Третий параграф третьей главы диссертации посвящен следующей задаче.

Мы рассматриваем граф лестничного типа, полученный соединением равных конечных ребер (см. рис. 3). Сопоставим к ребрам b_j^+, b_j^- $\left(j = \overline{1,n}\right)$ и b_j^0 $\left(j = \overline{1,(n-1)}\right)$ интервал $(0, L)$ для определения координат в каждом ребре.

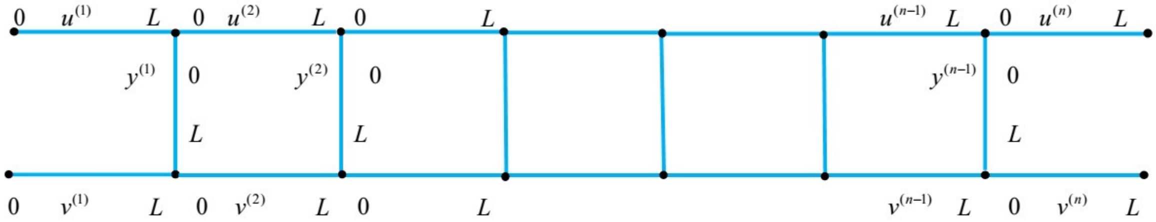


Рисунок 3. Граф лестничного типа.

В каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t^{(j)}(x,t)=u_{xx}^{(j)}(x,t),\ \ x\in b_j^{+},\ \ v_t^{(j)}(x,t)=v_{xx}^{(j)}(x,t),\ \ x\in b_j^{-},t>0,\ j=\overline{1,n} \quad (15)$$

$$y_t^{(j)}(x,t)=y_{xx}^{(j)}(x,t),\ \ x\in b_j^{(0)},t>0,\ j=\overline{1,n-1}. \quad (16)$$

Определим начальные условия

$$u^{(j)}(x,0)=u_0^{(j)}(x),\ x\in\overline{b}_j^{+},\ \ v^{(j)}(x,0)=v_0^{(j)}(x),\ x\in\overline{b}_j^{-},\ j=\overline{1,n}, \quad (17)$$

$$y^{(j)}(x,0)=y_0^{(j)}(x),\ x\in\overline{b}_j^{(0)},\ j=\overline{1,n-1}, \quad (18)$$

и граничные условия

$$u^{(1)}(0,t)=g_0^{(n)}(t),\ v^{(1)}(0,t)=d_0^{(n)}(t),t\geq 0, \quad (19)$$

$$u^{(n)}(L,t)=h_0^{(n)}(t),\ v^{(n)}(L,t)=r_0^{(n)}(t),t\geq 0. \quad (20)$$

В вершинах графа решение удовлетворяет следующим условиям склеивания (Кирхгоффа):

$$u^{(j-1)}(L,t)=u^{(j)}(0,t)=y^{(j-1)}(0,t),\ u_x^{(j-1)}(L,t)+u_x^{(j)}(0,t)+y_x^{(j-1)}(0,t)=0;$$

$$v^{(j-1)}(L,t)=v^{(j)}(0,t)=y^{(j-1)}(L,t),$$

$$v_x^{(j-1)}(L,t)+v_x^{(j)}(0,t)+y_x^{(j-1)}(L,t)=0,\ \ j=\overline{2,n}. \quad (21)$$

Используя обобщенную подстановку Фурье (или метод Фокаса), рассматриваемая задача сводится к системе линейных уравнений относительно значений решения и его произведения в точках ветвления графа. Эта система уравнений находит уникальное решение рассматриваемых условий задач.

Теорема 4. *Решение начально-краевой задачи имеет следующий вид*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\hat{u}_0^{(j)}(k)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^{-}}e^{ikx-ikL-wt}\left(\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\left(\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk\,,\ j=\overline{1,n}, \tag{22}$$

$$v^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{v}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL-wt}\left(\tilde{r}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{r}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\left(\tilde{d}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{d}_0^{(j)}(w,t)\right)dk\,,\ j=\overline{1,n}, \tag{23}$$

$$y^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-wt}\hat{y}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-} e^{ikx-ikL-wt}\left(\tilde{l}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{l}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+} e^{ikx-wt}\left(\tilde{q}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{q}_0^{(j)}(w,t)\right)dk\,,\ j=\overline{1,n-1}, \tag{24}$$

где функции $\tilde{h}_0^{(j)},\tilde{q}_0^{(j)},\tilde{g}_0^{(j)},\tilde{h}_1^{(j)},\tilde{l}_1^{(j)},\tilde{r}_0^{(j)},\tilde{d}_1^{(j)},\tilde{r}_1^{(j)}$ *определяются с помощью заданных граничных и начальных условий.*

В четвертой главе диссертации рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения распределения тепла в графах более общего вида, граф в виде треугольника с прикрепленными исходящися ребрами на каждой вершине и графах в виде дерево.

Пусть $\Gamma = E\bigcup V$ – связанный метрический граф, где $E=\left\{b_j\right\}_{j=1}^n$ – множество ребер, а $V=\left\{v_j\right\}_{j=1}^m$ – множество вершин графа. Определяем координаты x_j на ребрах графа с помощью изометрического отображения этих ребер на интервалах $\left(0,L_j\right), j=1,2,...,n$. Далее, не нарушая общности, мы будем использовать x вместо x_j.

Мы будем говорить, что вершина v соприкасается с ребром b_j, если эта вершина является концом данного ребра, и обозначать это как $b_j\sim v$. Количество элементов множества $\left\{b : b\sim v, b\in E\right\}$ назовем валентностью вершины v. Если валентность вершины равна единице, то она называется граничной. Пусть $\left\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_{m_1}\right\}=\partial\Gamma\subset V$ – граничные вершины графа.

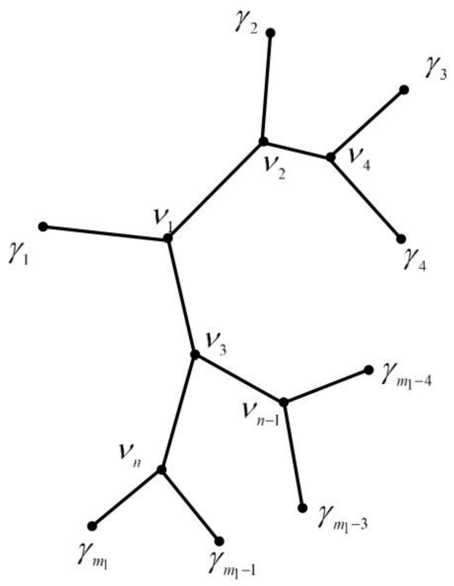


Рисунок 4. Метрический граф Γ

В каждом ребре графа рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t^{(j)}(x,t) = u_{xx}^{(j)}(x,t), x \in b_j, t > 0. \qquad (25)$$

Потребуем, что бы решение уравнения (25) удовлетворяло начальному условию

$$u^{(j)}(x,0) = u_0^{(j)}(x), j = 1,2,...,n. \qquad (26)$$

В точках разветвление (т.е. в не граничных вершинах) графа решение должна удовлетворит следующим условиям склеивания

а) значения на вершине v всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim v$, одинаковы;

б) сумма односторонних производных на каждой вершине v всех функций $u^{(j)}$, для которых $b_j \sim v$, равна нулю:

$$\sum_{b_j \sim v} \frac{\partial u^{(j)}(x,t)}{\partial x}\bigg|_v = 0, v \in V \setminus \partial\Gamma, t \in [0,T]. \qquad (27)$$

Первое из этих условий называется непрерывности решения на вершине, а второе – условием сохранения потока. Эти условия ещё называются условиями Кирхгоффа, а иногда условиями типа δ на вершине.

На граничных вершинах графа потребуем выполнения следующих граничных условий:

$$u^{(j)}(x,t)|_\nu = g_0^{(j)}(t), \text{ если } x_j = 0 \text{ на вершине } \nu,$$

$$u^{(j)}(x,t)|_\nu = h_0^{(j)}(t), \text{ если } x_j = L_j \text{ на вершине } \nu, b_j \sim \nu. \qquad (28)$$

Лемма 1. *Задача (25) - (28) не имеет более одного регулярного решения.*

Лемма единственности решения доказывается методом интегралов энергии.

В второй параграфе четвертой главы краевая задача для уравнения теплопроводности решается в виде графа, образованного одним поперечным сечением на каждом ребре треугольника (рисунок 5).

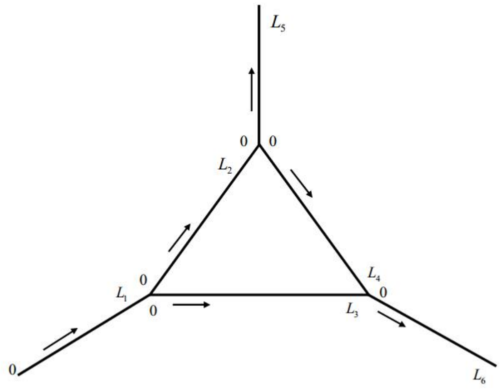


Рисунок 5. Метрический граф Γ_1

Теорема 5. *Решение начально-краевой задачи на* Γ_1, *имеет вид*

$$u^{(j)}(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx-wt}\hat{u}_0^{(j)}(k)dk-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^-}e^{ikx-ikL_j-wt}\left(\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)+ik\tilde{h}_0^{(j)}(w,t)\right)dk-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D^+}e^{ikx-wt}\left(\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)+ik\hat{g}_0^{(j)}(w,t)\right)dk,\left(j=1,2,...,6\right),\qquad(29)$$

где $G^{(j)}(k,t)=\hat{u}_0^{(j)}(k)+\left(e^{-ikL_j}-1\right)ik\hat{h}_0^{(j)}(w,t)$, $\hat{g}_0^{(1)}(w,t)$, $\hat{h}_0^{(5)}(w,t)$, $\hat{h}_0^{(6)}(w,t)$ *– известные функции, которые выражаются через граничные данные по формулам (28)*

$$\tilde{h}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(G^{(j)}(k,t)-G^{(j)}(-k,t)\right),\qquad(30)$$

$$\tilde{g}_1^{(j)}(w,t)=\frac{1}{A_j}\left(e^{ikL_j}G^{(j)}(k,t)-e^{-ikL_j}G^{(j)}(-k,t)\right),\qquad(31)$$

$$\left(\tilde{h}_0^{(1)}(w,t),\tilde{h}_0^{(2)}(w,t),\tilde{h}_0^{(3)}(w,t)\right)^T=\left(M(k)\right)^{-1}\cdot\left(N_1(k)\cdot\widehat{U}_0(k)+N_2(k)\cdot\widehat{U}_0(-k)\right),$$

$$A_j=e^{ikL_j}-e^{-ikL_j},\ B_j=e^{ikL_j}+e^{-ikL_j},\ j=1,2,...,6,$$

$$M(k)=\begin{pmatrix}C_{123}&-2A_1A_3&-2A_1A_2\\-2A_4A_5&C_{245}&-2A_2A_5\\-2A_4A_6&-2A_3A_6&C_{346}\end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Определитель матрицы* $M(k)$ *отличен от нуля при* $\operatorname{Im}k\neq0$.

Третьей параграф четвертой главы посвящен задаче начальных границ в граф древо. Решение задачи задается методом Фокаса и определяется относительно начальных условий. Мы не приводим здесь эти расчеты, поскольку они аналогичны приведенным выше и к тому же объем аннотации ограничен.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию начально-краевых задач для уравнений распространения волн в метрических графах с использованием метода унифицированного преобразования Фокаса.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Найдено интегральное представление решения задачи для уравнения Шредингера в открытых звездообразных метрических графах. При этом обобщен метод Фокаса для решения таких задач.

2. Найдено решение начально-краевой задачи для уравнения Шредингера на замкнутом звездообразном графе. С помощью метода унифицированного преобразования Фокаса найдено точное решение задачи.

3. В метрическом звездообразном графе, содержащей как конечные, так и бесконечные ребра, получено интегральное представление решения начально-краевых задач для уравнения Шредингера и уравнения теплопроводности.

4. Метод Фокаса обобщен для решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в графах с циклом и графе-дереве.

5. В метрическом графе лестничного типа, состоящем из конечных интервалов, рассмотрена начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Доказана единственность решения. При доказательстве существования решения задача сведена к системе алгебраических систем уравнений. Существование единственного решения этой системы уравнений показано с использованием спектральной теории для квантовых графов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

ESHIMBETOV MARDONBEK REYIMBOYEVICH

THE METHOD OF THE UNIFIED FOKAS TRANSFORMATION FOR WAVE EQUATIONS ON METRIC GRAPHS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent - 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2018.1.PhD/FM193.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Khudayberganov Gulmirza** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Ganikhodjaev Rasul Nabiyevich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
	Rakhmatullaev Muzaffar Mukhammadjanovich Doctor of Physical and mathematical Sciences
Leading organization:	Karakalpak State University named after Berdakh

Defense will take place on "29" april 2021 at 16:00 at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No. 18). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "19" 04 2021.
(Mailing report No. 2 on "19" 04 2021).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of scientific seminar under
scientific council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is the study of initial and initial-boundary value problems for wave and diffusion equations in metric graphs, in particular, for the heat equation and for the Schrödinger equation, and the construction of solutions to these problems.

The object of the research work is simple open and closed metric star graphs, a star-shaped metric graph consisting of a finite number of finite and semi-infinite intervals, triangular and tree graphs on a plane, and a ladder-type metric graph consisting of a finite intervals.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

in simple open and closed metric star graphs the solution of initial-boundary value problems for the Schrödinger equation is obtained using the Fokas method;

on a metric star graph consisting of finite and infinite intervals, solutions of the initial-boundary value problems for the Schrödinger equations and heat conduction are obtained by the method of the unified Fokas transformation;

generalized the Fokas method for solving wave equations in graphs with a cycle and graphs in the form of a tree;

the existence and uniqueness of the solution of the heat equation on a ladder-type metric graph consisting of a finite intervals is proved.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

the solution of the Schrödinger equation in the form of a simple metric graph was used in the international project No 15-198 RG/PHYS/AS_I-FR 3240287086 according to “Experimental Study of Relaxation Prosseses in anisotropic liquids: Analysis of oscillation and orientation spectra” to find the coefficients of permeability and recoil at a point branching, as well as when checking the optical properties of wave propagation (Reference No 89-03-4483 of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education dated November 6, 2020). As a result it gave possiblity to calculate the scattering parameters at the branching point and vibrational spectra of molecules;

the results on the dissipation of heat conduction in metric graphs and the solution of initial-boundary value problems for the Schrödinger equations, represented by multidimensional vector functions of a special form, as well as the fact that the kernels of integral formulas are functions of complex variables were used in the practical project No MRU-OT-9/2017 “Multidimensional complex analysis” is used to form the integral expression of holomorphic functions in matrix spheres (Reference No 89-03-4544 of the Ministry of Higher and Secondary Specialized Education dated November 10, 2020). As a result, allowed to construct Poisson kernels in matrix spheres and investigate the functional properties of A(z)-analytical functions.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 100 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas’ unified transformation method for heat equation on general star graph. // Uzbek Mathematical Journal. – 2019. №1. – p. 73 – 81. (01.00.00; № 6).

2. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified transform (Fokas) method for the Schrödinger equation on simple metric graph. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2019. Vol. 12. № 4. – p. 412 – 420. (Scopus IF=0.307).

3. Eshimbetov M.R. Initial-boundary value problem for heat equation on ladder-type graphs. // Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2020. № 5. – p. 11 – 19.

4. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas’ unified transformation method for Airy equation on open simple star graph. // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences. – 2020. Vol. 3. № 4. – p. 438 – 447. (01.00.00; № 8).

II бўлим (II часть; part II)

5. Eshimbetov M.R. Eyri tipidagi uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun sodda yulduzsimon grafda chegaraviy masala. // “Zamonaviy topologiya muommolari va tadbiqlari” nomli chet el olimlari ishtirokida ilmiy amaliy kanferensiya tezislari to‘plami. Toshkent. 11 – 12 may 2017 y., b. 44 – 45.

6. Собиров З.А., Ахмедов М.И., Эшимбетов М.Р. Эйри типидаги учинчи тартибли каррали характеристикага эга бўлган тенгламалар учун метрик графда чегаравий масала. // International conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. Samarkand. September 17 – 20, 2018 y., 2 – q., b. 47 – 49.

7. Собиров З.А., Эшимбетов М.Р. Метрик графда иссиқлик тарқалиш тенгламасини ечишнинг умумлашган Фокас усули. // International conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. Samarkand. September 17 – 20, 2018 y., 2 – q., b. 67 – 69.

8. Собиров З.А., Эшимбетов М.Р. Метод Фокаса для уравнения теплопроводности на метрических графах. // Международная научная конференция «Комплексный анализ и его приложения» Сборник материалов 24 – 28 августа 2020 г., Казань. с. 30 – 32.

9. Худайберганов Г., Собиров З.А., Эшимбетов М.Р. Задача Коши для уравнения Шредингера на открытом звездообразном графе с полубесконечными ребрами. // Международная научная конференция «Теория функций одного и многих комплексных переменных» Ноябрь 26 – 28, 2020, Нукус, Узбекистан. с. 93 – 94.

10. Akhmedov M.I., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Initial boundary value problem for the Airy type equation on simple metric star graph. // Соболевские чтения Международная школа-конференция Новосибирск, Россия, 18 – 22 декабря 2016 г. Тезисы докладов. Новосибирск 2016. p 172 – 172.

11. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. Unified transform method for the heat equation on simple open metric graph. // Abstracts of the VI international scientific conference "Modern problems of the applied mathematics and information technology-Al-Khorezmiy 2018" NUU, Tashkent, September 13 – 15, 2018, p. 78 – 78.

12. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The unified transformation method for IBVP telegraph equation on general star graph. // STEMM Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine Bukhara-Samarkand-Tashkent. 2019. p. 89 – 90.

13. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' unified transformation method for heat transfer equation on general star graphs. // Abstracts of the international scientific conference "Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies". 14 – 15 Nov. 2019, Tashkent. p. 148 – 149.

14. Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R., Akhmedov M.I. The Fokas' method for inverse control problem for heat equation on simple metric graph. // Abstracts of the international conference "Modern Problems of Geometry and Topology and Its Applications". 21 – 23 Nov. 2019, Tashkent., p. 37 – 38.

15. Khudayberganov G., Sobirov Z.A., Eshimbetov M.R. The Fokas' method for inverse source problem for heat equation on simple metric graph. // Труды Республиканской научно-практической конференции Статистика и ее применения. 17 – 18 октября 2019 года Филиал Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова в городе Ташкент. p. 213 – 214.

16. Eshimbetov M.R. Initial-Boundary Value Problem for Heat Equation on Ladder-Type Graph. // Abstracts of the International Online Conference "Frontier in Mathematics and Computer Science" October 12 – 15, 2020. Tashkent. p. 39 – 40.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятидан таҳрирдан ўтказилди (14.04.2021 йил).

Босишга рухсат этилди: 14.04.2021 йил.
Бичими 60x84 1/16. «Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,75. Адади: 100. Буюртма: № 33.

Мирзо Улуғбек номидаги
Ўзбекистон Миллий университети босмахонасида чоп этилди.