O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

S.I.XUDOYBERDIYEV
B.I.ASHUROV
O.N.TOG’AYEV

I Q T I S O D CH I L A R U CH U N
M A T E M A T I K A

fanidan uslubiy qo’llanma
I qism

SAMARQAND 2019

Chiziqli algebra

1. Matritsalar va ular ustida amallar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

jadvallar matritsalar, $a_{11}, a_{12}, \ldots$ lar esa matritsaning elementlari deb ataladi.

Agar matritsada satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lsa, u holda bunday matritsani kvadrat matritsa deb ataladi, shu bilan birga uning satrlari soni m va ustunlari soni n bo‘lsa, $(m \times n)$ matritsa tartibi deb ataladi. Jumladan, yuqorida keltirilgan matritsalardan birinchisi (2×2) ikkinchi tartibli matritsa, ikkinchisi (2×3), uchinchisi esa (3×3) uchinchi tartibli matritsadir.

Satrlar soni ustunlar soniga teng bo‘lmagan matritsa to‘g‘ri burchakli matritsa deb ataladi. Masalan, yuqoridagi o‘rtadagi matritsa misol bo‘ladi.

Faqat bitta ustunga yoki bitta satrga ega bo‘lgan matritsalarni ham qaraymiz. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$ - matritsa satr – matritsa, $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$ -matritsa esa ustun – matritsa deb ataladi. Kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinant bu matritsaning determinanti deb ataladi. Matritsani qisqalik uchun bitta harf bilan belgilaymiz, masalan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A matritsaning determinanti **det** *A* yoki $|A|$ orqali belgilanadi.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Agar $\det A = 0$ bo‘lsa, u holda *A* matritsa maxsus, $\det A \neq 0$ bo‘lsa, maxsusmas deyiladi.

Ikkita bir xil tartibli matritsaning mos elementlari teng bo‘lsa, bu matritsalar teng $(A = B)$ matritsalar deb ataladi.

2. Agar bir xil tartibli matritsalar, masalan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ va } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

berilgan bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi deb,

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

matritsaga aytiladi.

Sonlarning *m* ta satr va *n* ta ustundan iborat to‘g‘ri to‘rtburchakli jadvali $m \times n$ o‘lchamli matritsa deyiladi. Bu matritsa

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinshda yoziladi.

Bir xil $m\times n$ o‘lchamli *A* va *V* matritsalarning yig‘indisi deb o‘sha o‘lchamli shunday $C=A+B$ matritsaga aytiladiki, uning har bir elementi *A* va *V* matritsalarning mos elementlari yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning λ songa ko‘paytmasi deb, $A\cdot\lambda=\lambda\cdot A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaga aytiladi.

$m\times k$ o‘lchamli *A* matritsaning $k\times n$ o‘lchamli *V* matritsaga ko‘paytmasi deb, $m\times n$ o‘lchamli shunday $C=A\cdot B$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementi *A* matritsaning i - satri elementlarini *V* matritsaning j - ustunidagi mos elementlariga ko‘paytmalariga yig‘indisiga teng, ya’ni

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ik}b_{kj}$

bo‘ladi. Bosh diagonalida turgan elementlari birga, qolgan elementlari nolga teng bulgan kvadrat matritsa birlik matritsa deb ataladi va *Ye* harfi bilan belgilanadi:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ravshanki, $\det E=1$.

3.Teskari matritsa tushunchasi

Endi teskari matritsa deb ataladigan matritsani qaraymiz, bu tushuncha faqat kvadrat matritsa uchun kiritiladi.

Agar kvadrat matritsa maxsusmas bo‘lsa, u holda $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona A^{-1} matritsa mavjud bo‘ladi va u *A* matritsaga teskari matritsa deyiladi.

A matritsaning A^{-1} teskari matritsasi quyidagicha aniqlanadi:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu yerda A_{ik} lar *A* matritsa determinantining a_{ik} elementining algebraik to‘ldiruvchisi.

1-***misol***. Ushbu matritsalar yig‘indisi

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 3+2 \\ 1+3 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

2-***misol*** . Ushbu matritsalar yig‘indisi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

3-***misol*** .Ushbu matritsalarni ko‘paytrisak:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 2 \\ 3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 2 & 3\cdot 2+1\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

bo‘ladi.

4-misol. Ushbu matritsalarni ko‘paytrisak:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 3\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ -1\cdot 1+2\cdot 3 & -1\cdot 1+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

matritsani olamiz.

5-***misol***. Ushbu matritsalarning birinchisining ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lganligi uchun

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot 2+1\cdot 4+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+2\cdot 3+1\cdot 2 & 0\cdot 2+2\cdot 4+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

natijada matritsani hosil qilinadi.

6-***misol.*** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani tuzing.

Yechish. Bu matritsaning determinanti:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2+0\cdot 2\cdot 1+3\cdot 0\cdot 1-0\cdot 2\cdot 0-2\cdot 2\cdot 3-1\cdot 1\cdot 1 = -9$$

$|A| \neq 0$ bo‘lgani uchun A matritsa maxsusmas matritsadir va demak, unga teskari matritsa mavjuddir.

Algebraik to‘ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=-6,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\0&1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&0\\1&2\end{vmatrix}=-4,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}=2,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&0\\2&1\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-4.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1/3&4/9&-2/9\\2/3&-2/9&-1/9\\-1/3&1/9&4/9\end{pmatrix}.$$

4. Matritsaning rangi tushunchasi

Endi m ta satr va n ta ustunga ega bo‘lgan quyidagi to‘g‘ri burchakli matritsani qaraymiz:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ik}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mk}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

Bunday matritsani $m\times n$ o‘lchamli matritsa deb ataymiz.

A matritsaning *k* – tartibli minori deb, bu matritsadan ixtiyoriy *k* ta satr va *k* ta ustunni ajratishdan hosil bo‘lgan kvadrat matritsaning determinantiga aytiladi.

Masalan, uch satr va to‘rtta ustunga ega bo‘lgan

$$A=\begin{pmatrix}2&3&4&5\\0&-2&3&1\\0&2&2&-4\end{pmatrix}$$

matritsa uchun uchinchi tartibli minorlardan biri

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

determinant bo‘lib, u A matritsaning birinchi, ikkinchi, uchinchi satrlarini va birinchi, ikkinchi, uchinchi ustunlarini ajratishdan hosil bo‘ladi.

Ikkinchi tartibli minorlardan biri masalan, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ determinant bo‘ladi.

Matritsaning elementlarini birinchi tartibli minorlar deb qarash mumkin.

Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorlari tartiblarining eng kattasiga aytiladi. A matritsaning rangini r(A) bilan belgilaymiz.

1-misol.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{rang A=?}$$

Yechish. Uning yagona to‘rtinchi tartibli minori nolga teng.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Uchinchi tartibli minorlaridan biri esa noldan farqli, masalan

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 7 \neq 0,$ demak berilgan matritsaning rangi 3 ga teng, yani r(A)=3.

Elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1) Matritsaning biror satri (ustuni) elementlarini noldan farqli bir xil songa ko‘paytirish;
2) Matritsaning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satri(ustuni) ning mos elementlarini biror songa ko‘paytirib qo‘shish;
3) Matritsaning satrlari (ustunlari) o‘rnini almashtirish;
4) Matritsaning barcha elementlari nolga teng bo‘lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

1-misol. Matritsaning rangini hisoblang:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Yechish: Berilgan matritsaning birinchi satri elementlarini 2 ga bo‘lib, ushbu ekvivalent matritsani hosil qilamiz:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Matritsaning ikkinchi va uchinchi satrlaridan uning mos ravishda 3 va 5 ga ko’paytirilgan birinchi satrini ayirib. Ushbu matritsani hosil qilamiz:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & -3/2 & -27/2 & 21/2 & 0 \end{pmatrix},$$

matritsaning uchinchi satridan 3 ga ko‘paytirilgan ikkinchi satrini ayirib

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

matritsani hosil qilamiz. A_3 matritsada nollardan iborat satrni tashlab yuborib,

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 5/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & 7/2 & 0 \end{pmatrix},$$

matritsani hosil qilamiz. Uning rangi ikkiga tengligi ravshan.
Demak, berilgan matritsaning rangi ham ikkiga teng, yani r(A)=2.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

A va B matritsalar berilgan. AB va BA ko‘paytmalarni toping:

$$1.\ A=\begin{pmatrix}2 & 19 & 30\\ 0 & -5 & -12\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5\\ 6 & 7 & 1\\ 8 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$2.\ A=\begin{pmatrix}2 & 8 & 10\\ 0 & -5 & -4\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & 7 & 2\\ 2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

$$3.\ A=\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\\ 1 & -5 & -4\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10 & 3 & 4\\ 4 & 7 & 4\\ 12 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$4.\ A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 8\\ 1 & -5 & -6\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 5 & 7 & 0\\ 8 & 1 & 6\end{pmatrix}$$

$$5.\ A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 10\\ 4 & -4 & -4\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 2 & 7 & 0\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$$

$$6.\ A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 30\\ 5 & -5 & -12\\ 6 & -2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 6 & 7 & 10\\ 8 & 2 & 8\end{pmatrix}$$

$$7.\ A=\begin{pmatrix}2 & 12 & 30\\ 5 & -1 & -12\\ 4 & -3 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 8\\ 6 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

A matritsa berilgan. A^{-1} ***teskari matritsani toping va*** $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ ***ekanini tekshiring.***

$$1.\begin{pmatrix}5 & 6 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}\qquad 2.\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 6 & 3 & 7\end{pmatrix}\qquad 3.\begin{pmatrix}3 & -3 & 4\\ -1 & -5 & -7\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$$

$$4.\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 8\end{pmatrix}\qquad 5.\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\qquad 6.\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 9 & 7\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Berilgan matritsaning rangini toping

$$1.\begin{pmatrix}3 & -1 & 3 & 2 & 5\\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4\\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7\\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\quad 2.\begin{pmatrix}25 & 31 & 17 & 43\\ 75 & 94 & 53 & 132\\ 75 & 94 & 54 & 134\\ 25 & 32 & 20 & 48\end{pmatrix}\quad 3.\begin{pmatrix}1 & 4 & -3 & 61\\ 2 & 5 & 1 & -23\\ 17 & -10 & 20 & 0\end{pmatrix}$$

$$4.\begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & -2 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad 5.\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad 6.\begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 12 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & 7 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2.Matritsaning oʻlchovi nima va qanday yoziladi?
3. Kvadrat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Matritsaning determinanti nima?
5. Maxsus va maxsusmas matritsalar qanday matritsalar?
6. Birlik matritsa deb nimaga aytiladi?
7. Qanday matritsalar teng boʻladi?
8. Matritsalar yigʻindisi nima?

2. Determinantlar va ularning xossalari

1. 2, 3-tartibli determinatlar

2-tartibli determinant deb, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ simvol bilan belgilanuvchi va $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi.

3- uchinchi tartibli determinant deb, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ simvol bilan belgilanuvchi va

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{33}$ sonlar uning elementlari deb ataladi. Uchinchi tartibli determinant uchta satr va uchta ustunga ega. Shunday qilib,

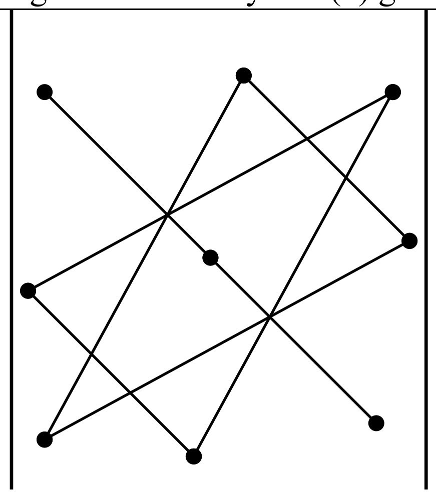
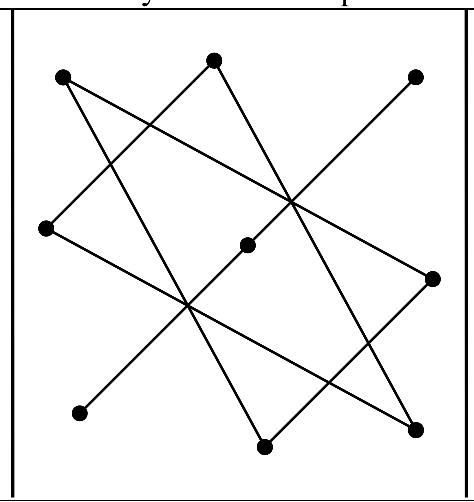
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

yoki

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Quyidagi sxemalar bo‘yicha (*) ga kiruvchi musbat va manfiy hadlarni aniqlash oson:

	
+	–

2. **Determinantlarning xossalari**

1°. Agar determinant barcha satrlarining o‘rinlarini mos ustunlar bilan almashtirilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi;
2°. Ikki satrning (yoki ustunning) o‘rnini o‘zgartirilganda determinantning ishorasi teskarisiga o‘zgaradi;
3°. Ikkita bir xil satrli (yoki ustunli) determinant nolga teng;
4°. Satrdagi (yoki ustundagi) barcha elementlarning umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan chiqarish mumkin:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5°. Agar biror satrning (yoki ustunning) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda determinant nolga teng bo‘ladi.
6°. Agar determinantning biror satri (yoki ustuni) elementlariga boshqa satrning (yoki ustunning) bir xil songa ko‘paytirilgan mos elementlarini qo‘shilsa, determinant o‘z qiymatini o‘zgartirmaydi, ya’ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7°. Determinantning biror ustuni (satri) elementlarining boshqa ustuni (satri) elementlari algebraik to‘ldiruvchilari bilan ko‘paytmasining yig‘indisi nolga teng.
Determinant a_{ik} elementining M_{ik} minori deb, bu determinantda a_{ik} element joylashgan satr va ustunni o‘chirishdan hosil bo‘lgan determinantga aytiladi.

Determinant a_{ik} elementining algebraik to‘ldiruvchisi

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

munosabat bilan aniqlanadi.
n–tartibli determinant deb quyidagi belgi va tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Determinant tartibini pasaytirish usuli.
Determinant biror katori elementlarining bittasidan boshqalarini oldindan nolga aylantirib olib, shu qator bo‘yicha yoyib hisoblanadi. Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} = -(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 91$$

Determinantni uchburchak ko‘rinishga keltirish usuli. Determinantni shunday almashtirishdan iboratki, uning bosh diagonalidan bir tomonida yotuvchi barcha elementlari nolga aylantiriladi va uchburchaksimon shaklga keltiriladi, masalan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ravshanki, uchburchak shaklidagi determinantning qiymati bosh diagonallari elementlari ko‘paytmasiga teng:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}.$$

1-misol. Ushbu ikkinchi tartibli determinant hisoblansin:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan qoidaga ko‘ra determinantning qiymatini topamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 5 \cdot 3 = -8 - 15 = -23$$

2-misol. Ushbu uchinchi tartibli determinant hisoblansin:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Yuqorida keltirilgan qoidaga ko‘ra determinantning qiymatini topamiz:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 18 - 3 \cdot (-41) - 4 \cdot (-48) = 351$$

3-misol. Ushbu uchinchi tartibli determinant hisoblansin:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 7 + (-2) \cdot (-5) \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot (-5) - (-2) \cdot (-2) \cdot 7 = -2$$

4-misol. Ushbu determinantning bosh diagonalidan bir tomonida yotuvchi barcha elementlarini nolga aylantirib va uchburchaksimon shaklga keltirilib hisoblansin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi determinantlar birinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$

Quyidagi determinantlar nollar eng ko‘p bo‘lgan qator elementlari bo‘yicha yoyib hisoblansin:

4. $\begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Quyidagi determinantlar hisoblansin:

6. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ **7.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ **11.** $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Determinantlarni tartibini pasaytirish usulidan foydalanib hisoblang:

12. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ **13.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ **15.** $\begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

Quyidagi determinantlar hisoblansin:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}$ 10) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$ 11) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$

12) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ 13) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 14) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ 15) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

16) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ 17) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 18) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 19) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix}$

Mustahkamlash uchun savollar

1.2-chi tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
2. 3- chi tartibli determinant qanday belgilanadi va u nimaga teng?
3. Determinantlarning xossalari nimalardan iborat?

3. Chiziqli tenglamalar sistemasi

1.Ikki noma’lumli ikkita chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (1)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ shart bajarilganda

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (2)$$

echimlarga ega.

2. Bir jinsli uch noma’lumli ikkita tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

ushbu $x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $y = -k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ $z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (4)

formulalar bilan aniqlanuvchi yechimlarga ega, bunda k - ixtiyoriy son.

3. Bir jinsli uch noma’lumli uchta tenlamalar sistemasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Uning determinanti $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ bo‘lsa , nolga teng bo‘lmagan yechimlariga ega bo‘ladi va aksincha.

4. Ikki noma’lumli uchta chiziqli tenglama sistemasi.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \\ a_3x + b_3y = c_3. \end{cases} \qquad (6)$$

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ bo‘lganda va uning hech qaysi ikkita tenglamasi o‘zaro zid bo‘lmasa, birgalikda bo‘ladi.

5.Uch noma’lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases} \tag{7}$$

bo‘lib, uning determinanti

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

noldan farqli bo‘lganda yagona

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{8}$$

echimga ega bo‘ladi, bunda

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \tag{9}$$

6. Birgalikda bo‘lmagan va aniqmas tenglamalar sistemasi. (7) tenglamalarning chap tomonlarini X_1, X_2, X_3 lar bilan belgilaylik, sistemaning determinanti $\Delta=0$ bo‘lsin. U holda quyidagi ikki hol bo‘lishi mumkin:

I. Δ determinantning qandaydir ikkita satrining elementlari bir-biriga proporsional, masalan $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=m$, u holda $X_2=mX_1$ va

1) agar $d_2\neq md_1$ bo‘lsa, sistema birgalikda emas(birinchi ikki tenglama bir -biriga zid);

2) agar $d_2=md_1$ bo‘lsa, sistema aniq emas (agar birinchi va uchinchi tenglamalar bir-biriga zid bo‘lmasa).

II. Δ determinantda proporsional elementlarga ega bo‘lgan satrlar yo‘q.

U holda nolga teng bo‘lmagan m va n sonlar mavjudki, $mX_1+nX_2=X_3$ va

1) agar $md_1+nd_2\neq d_3$ bo‘lsa, sistema birgalikda emas;

2) agar $md_1+nd_2=d_3$ bo‘lsa , sistema aniqmas m va n sonlarni mulohazalar yordami bilan yoki $a_1m+a_2n=a_3$, $b_1m+b_2n=b_3$, $c_1m+c_2n=c_3$ tenglamalardan topish mumkin.

Ushbu sistemani yeching.

1-misol. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 4x-5y=2 \end{cases}$

Yechish. $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=-22 \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-41 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-24$

sistemaning determinanti $\Delta\neq 0$ bo‘lganligi uchun (2) formulalar bilan aniqlanadigan yagona yechimga ega.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{41}{22}; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{24}{22}=\frac{12}{11};$$

2- misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=2,\\ 2x-3y+2z&=2,\\ 3x+y+z&=8. \end{aligned}\right\}$$

Yechish. bu yerda

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=-8,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix}=-8,\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 8 & 1\end{vmatrix}=-16$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 8\end{vmatrix}=-24$$

(8) formuladan quyidagilarni topamiz:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-8}{8}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-16}{-8}=2,\qquad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-24}{-8}=3.$$

n ta $x_1,x_2,....x_n$ noma'lumli chiziqli n ta tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+.....+a_{1n}x_n&=c_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+....+a_{2n}x_n&=c_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+....+a_{nn}x_n&=c_n. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Bu sistema uchun $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\quad x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$ tengliklarga o‘xshash formulalar o‘rinlidir.

$$\Delta x_1=\Delta_{x_1},\ \ \Delta x_2=\Delta_{x_2},....,\Delta x_n=\Delta_{x_n} \qquad (11)$$

bu yerda

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}.....a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}....a_{2n}\\ .... & ....\\ a_{n1} & a_{n2}....a_{nn}\end{vmatrix} \qquad (12)$$

sistemaning determinanti, Δx_k $(k=\overline{1,n})$ esa n – tartibli determinanti bo‘lib, Δ determinantdan x_k noma’lum oldidagi koeffitsiyentlar ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo‘ladi. Agar sistemaning determinanti $\Delta\neq 0$ bo‘lsa, u holda (11)tengliklardan sistemaning quyidagi yagona yechimini topamiz:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},....,x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

Bu formula ham Kramer formulalari deb ataladi.

3-misol. Ushbu sistemani yechaylik:

$$\begin{cases} x-5y+2z=1, \\ 3x-25y+6z=7, \\ 9x-45y+18z=-3. \end{cases}$$

Yechish . Bevosita hisoblash orkali

$$\Delta=\Delta_y=0, \quad \Delta_x \neq 0, \quad \Delta_z \neq 0$$

ekaniga ishonch hosil qilish oson. Bunday ko‘rinadiki sistema yechimga ega emas.

4-misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0, \\ 2x+y-z=0, \\ 3x+3y+2z=0. \end{cases}$$

Yechish. Sistemada $\Delta=0$ ekanini ko‘rish mumkin. Sistemaning dastlabki ikkita tenglamasini

$$\begin{cases} 2x+2y=-3z, \\ 2x+y=z \end{cases}$$

ko‘rinishda yozamiz. Bu sistemani Kramer qoidasi bo‘yicha yechamiz.

$$\sigma=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-4=-3.$$

Endi $$x=\frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ z & 1 \end{vmatrix}}{\sigma}=\frac{-3z-2z}{-3}=\frac{-5z}{-3}=\frac{5z}{3};$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 2 & z \end{vmatrix}}{\sigma}=\frac{z+6z}{-3}=\frac{7z}{-3}=\frac{7}{-3}z.$$

Demak, berilgan sistema cheksiz ko‘p yechimga ega ekan, chunki z ni ixtiyoriy olib, x va y larning mos qiymatlarini topamiz. Masalan, $z=-3$ deb olamiz, $x=-5; \quad y=7$ ni, $z=6$ deb olamiz, $x=10, \quad y=-14$ larni topamiz va hakozo.

Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yechish. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning eng ko‘p ishlatiladigan usullaridan biri Gauss usulidir. Uning mohiyatini uch noma’lumli uchta chiziqli tenglama uchun ko‘rsatamiz.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1}$$

Bunda $a_{11} \neq 0$ bo‘lsin. Birinchi tenglamaning hamma hadlarini a_{11} ga bo‘lamiz va uni $-a_{21}$, $-a_{31}$ ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz. Bu holda quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3 = \beta_2 \\ \alpha_{23} x_1 + \alpha_{33} x_3 = \beta_3 \end{cases}$$

bu yerda $\alpha_{22} = a_{22} - a_{21} \dfrac{a_{12}}{a_{11}}$, $\alpha_{23} = a_{23} - a_{21} \dfrac{a_{13}}{a_{21}}$ va h.k.

$a_{11} = 0$ bo‘lib, boshqa tenglamalarda nomalumlar oldidagi koeffitsiyentlari orasida noldan farqlilari bo‘lsa, u holda bu tenglamalardan birini birinchi tenglamaning o‘rni bilan almashtiramiz, keyin yuqoridagi amallarni bajaramiz. Bu birinchi qadam bo‘ladi. Demak, birinchi qadamda birinchi tenglamada x_1 - noma’lum qolib, qolgan tenglamalardan ketma-ket x_1 - *noma’lumni yo‘qotamiz*. Ikkinchi qadamda birinchi tenglama o‘z o‘rnida qolib, ikkinchi va uchinchi tenglama uchun yuqoridagi amallarni bajaramiz, ya’ni ikkinchi tenglamada x_2 noma’lumni qoldirib, uchinchi tenglamadan uni yo‘qotamiz. Shunday qilib, bu amallar natijasida (1) tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x_1 + \alpha'_{12} x_2 + \alpha'_{13} x_3 = \beta'_1 \\ \alpha'_{22} x_2 + \alpha'_{23} x_3 = \beta'_2 \\ \alpha'_{33} x_3 = \beta_3 \end{cases} \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi. Endi hamma noma’lumlarni so‘nggi tenglamadan boshlab *teskari qadam* bilan topish qoldi.

1-misol.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini Gauss usuli bilan yeching.

Yechish. Birinchi tenglamani (-4) va (-3) ga ko‘paytirib mos ravishda ikkinchi va uchinchi tenglamalarga qo‘shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ (4-4)x_1 + (1-8)x_2 + (4-12)x_3 = 9 - 4 \cdot 6 \\ (3-3)x_1 + (5-6)x_2 + (2-9)x_3 = 10 - 3 \cdot 6 \end{cases},$$

ya’ni
$$\left.\begin{matrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 7x_2 - 8x_3 = -15 \\ -x_2 - 7x_3 = -8 \end{matrix}\right\}$$
bo‘ladi.

Shu bilan birinchi qadam tugadi.

Ikkinchi qadamda, birinchi tenglamani o‘z o‘rnida qoldirib, ikkinchi tenglamani (-7) ga bo‘lib yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7} \\ x_2 + 7x_3 = 8 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan x_2 noma’lumni yo‘qotamiz, buning uchun ikkinchi tenglamani (-1) ga ko‘paytirib uchinchi tenglamaga qo‘shamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_2 + \frac{8}{7}x_3 = \frac{15}{7} \\ \frac{41}{7}x_3 = \frac{41}{7} \end{cases}$$

Oxirgi tenglamadan $x_3 = 1$ ni topamiz. $x_3 = 1$ ni ikkinchi tenglamaga qo‘ysak, $x_2 + \frac{8}{7} = \frac{15}{7}$ yoki $x_2 = \frac{15}{7} - \frac{8}{7} = 1,$ $x_2 = 1$ bo‘ladi. $x_2 = 1,$ $x_3 = 1$ larni birinchi tenglamaga quysak x_1=1 bo‘ladi. Shunday qilib, $x_1 = 1,$ $x_2 = 1,$ $x_3 = 1$.

Gauss usulining xususiyati shundan iboratki, unda sistemaning birgalikda masalasini oldindan aniqlab olish talab etilmaydi va:

1) sistema birgalikda va aniq bo‘lsa, u holda usul yagona yechimga olib keladi;

2) sistema *birgalikda va aniqmas bo‘lsa*, bu holda biror qadamda ikkita aynan teng tenglama hosil bo‘ladi va shunday qilib, tenglamalar soni noma’lumlar sonidan bitta kam bo‘lib qoladi;

3) sistema *birgalikda bo‘lmasa*, u holda biror qadamda chiqarilayotgan (yo‘qotilayotgan) noma’lum bilan birgalikda qolgan barcha noma’lumlar ham yo‘qotiladi, o‘ng tomonda esa noldan farqli ozod had qoladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida yechish.

Bizga n noma’lumli n - ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Bu sistema koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsa quyidagicha bo‘ladi:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \;\; a_{12}.....a_{1n} \\ a_{21} \;\; a_{22}.....a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} \;\; a_{2n}.....a_{nn} \end{pmatrix}$$

Biz faqat A maxsusmas matritsa bo‘lgan holnigina qaraymiz. (1) sistemaning chap tomonida A matritsani

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ matritsaga ko‘paytirishdan kelib chiqadigan n satrli va bir ustunli

matritsaning elementlari, sistemaning o‘ng tomonida esa

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$ matritsaning elementlari turibdi. Shu sababli ikki matritsaning tenglik

ta’rifiga asosan, (1) ni quyidagicha

$\begin{pmatrix} a_{11} \quad a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \quad a_{22} \dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \quad a_{n2} \dots\dots a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ yoki, qisqacha $A \cdot X = B$ (2) ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaga maritsaviy tenglama deyiladi. A maxsusmas matritsa bo‘lgani sababli, unga teskari bulgan A^{-1} matritsa mavjud, shu sababli (2) ni chap tomondan A^{-1} ga ko‘paytiramiz:

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$, lekin $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \times X = EX = X$,

demak, $X = A^{-1} \cdot B$

1-misol. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini matritsaviy ko‘rinishda yozing va uning yechimini toping.

Yechish. Berilgan sistemaning matritsasini yozamiz

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ va $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ deb belgilasak, u holda

sistemaning matritsaviy ko‘rinishi

$A \cdot X = B$ $(*)$ ko‘rinishda bo‘ladi. A ga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 6\\ 18 & 11 & -13\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ bo‘lgani sababli $(*)$ ni chap tomondan A^{-1}ga ko‘paytiramiz: u vaqtda

$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$ yoki $X=A^{-1}\cdot B$ ga egamiz, bundan $A^{-1}\cdot B$ni topamiz.

$$A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix}-8 & -5 & 6\\ 18 & 11 & -13\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-8)\cdot 5+(-5)\cdot 1+6\cdot 4\\ 18\cdot 5+11\cdot 1+(-13)\cdot 4\\ 1\cdot 5+1\cdot 1+(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\ 49\\ 2\end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasining yechimi:

$x_1=-21;\quad x_2=49;\quad x_3=2.$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Determinantlar yordamida quyidagi tenglamalar sistemasini yeching:

1) $\begin{cases}3x+2y=7\\ 4x-5y=40\end{cases}$ 2) $\begin{cases}ax-3y=1\\ ax-2y=2\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5x+2y=4\\ 7x+4y=8\end{cases}$

Quyidagi tenglamalar sistemasi yechilsin:

4) $\begin{cases}2x-3y+z-2=0\\ x+5y-4z+5=0\\ 4x+y-3z+4=0\end{cases}$ 5) $\begin{cases}2x-4y+3z=1\\ x-2y+4z=3\\ 3x-y+5z=2\end{cases}$

6) $\begin{cases}2x-5y+2z=0\\ x+4y-3z=0\end{cases}$ 7) $\begin{cases}3x+2y-z=0\\ 2x-y+3z=0\\ x+3y-4z=0\end{cases}$

8) $\begin{cases}3x+2y-z=0\\ 2x-y+3z=0\\ x+y-z=0\end{cases}$ 9) $\begin{cases}x+2y+3z=4\\ 2x+4y+6z=3\\ 3x+y-z=1\end{cases}$

10) $\begin{cases}x+2y+3z=4\\ 2x+y-z=3\\ 3x+3y+2z=7\end{cases}$ 11) $\begin{cases}x+22y+3z=4\\ 2x+y-z=3\\ 3x+3y+2z=10\end{cases}$

Berilgan tenglamalar sistemasining birgalikda ekanligini tekshiring, agar birgalikda bo‘lsa, ularni:

a) Kramer qoidasidan foydalanib,

b) Matritsa usuli,

c) Gauss usuli bilan yeching:

1) $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x_1+6x_2+3x_3=17\\ 2x_1+6x_2+5x_3=12\\ 3x_1+6x_2+4x_3=9\end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 7x_1 + x_3 = 6 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3 \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases}$

Mustahkamlash uchun savollar

1.Qanday tenglamalar sistemasiga birgalikda deyiladi?
2. Tenglamalar sistemasi qanday shartda yagona yechimga bo‘ladi?
3. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
4. Gauss usulining mohiyati nima?
5. Sistema birgalikda va aniq degani nima?

Arifmetik vektor fazo

Ta'rif. Boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan yo'naltirilgan kesmaga ***vektor*** deb ataladi va $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}$ kabi belgilanadi.

$\vec{a}$ vektorning uzunligi uning moduli deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi. Oxiri boshi bilan ustma – ust tushadigan vektor nol vektor deb ataladi va 0 bilan belgilanadi. Agar $|\vec{a}| = 1$ bo'lsa, u holda $\vec{a}$ birlik vektor deyiladi.

Bir to'g'ri chizqda yoki paralell to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar ***kolleniar*** vektorlar deyiladi.

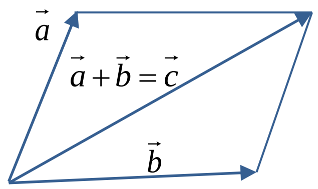
Agar ikki vektor o'zaro kolleniar, bir xil yo'nalgan va modullari teng bo'lsa, bu vektorlar teng vektorlar deyiladi.

Bir tekislikda yoki paralell tekisliklarda yotuvchi vektorlar ***komplanar*** vektorlar deyiladi.

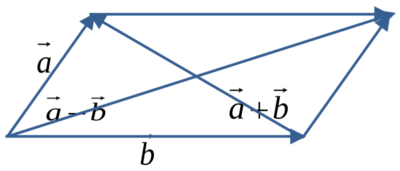
$\vec{a}$ vektorning λ soniga ko'paytmasi deb, $\vec{a}$ ga kolleniar, ($\lambda > 0$ da u bilan yo'nalishdosh,

$\lambda < 0$ da esa yo'nalishi qarama – qarshi) hamda moduli $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ga teng bo'lgan $\lambda\ \bar{a}$ (yoki $\bar{a}\ \lambda$) vektorga aytiladi.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb uchburchak yoki paralellogram qoidasi bo'yicha aniqlanadigan $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}\ \bar{a} + \bar{b}$ vektorga aytiladi.



Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi deb $\bar{c} = \bar{a} + (-\bar{b})$ vektorga aytiladi



$\bar{a}$ vektorning (x, y, z) koordinatalari deb, boshlang'ich nuqtasi koordinata boshi bilan ustma - ust tushganda, oxirgi nuqtasining koordinatalariga aytiladi.

$\bar{a}(x,\ y,\ z)$ vektorni $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ko'rinishida ifodalanishi mumkin, bu yerda $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - birlik vektorlar (ortlar), mos ravishda Ox, Oy, Oz o'qlarining musbat yo'nalishi bilan mos tushadi

$$|\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1. \qquad (2)$$

$|\bar{a}|$ vektorning uzunligi $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (3)

formula bilan aniqlanadi.

Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deb $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sonlariga aytiladi, bunda mos ravishda $\alpha, \beta, \gamma - \vec{a}$ vektorning Ox, Oy, Oz o'qlari bilan hosil qilgan burchaklari: $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, (4)

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \text{bunda } \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (5)$$

Ikkita $\vec{a}(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\vec{b}(x_2,\, y_2,\, z_2)$ yig'indisining koordinatalari va $\vec{a}$ vektorning λ songa ko'paytmasi quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$\vec{a}+\vec{b}(x_1+x_2,\, y_1+y_2,\, z_1+z_2) \qquad (6)$$

$$\lambda\vec{a}(\lambda x_1,\, \lambda y_1,\, \lambda z_1) \qquad (7)$$

$\vec{a}$ vektorning *l* o'qdagi proeksiyasi deb $pr_l\, \vec{a}$

$$pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi \qquad \textbf{(8)}$$

songa aytiladi, bu yerda φ $\vec{a}$ vektor va *l* o'q orasidagi burchak.

Misol. Berilgan $\bar{a}=(2;\,-1;\,-2)$ va $\bar{b}=(8;\,-4;\,0)$ vektorlar bo'yicha quyidagilarni toping:

a) $\bar{c}=2a$ va $\bar{d}=\bar{b}-\bar{a}$; *b*) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini;

c) $\bar{d}$ vektorning skalyar kvadratini; *d*) $(\bar{c},\,\bar{d})$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini; *e*) $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlar orasidagi burchakni

Yechish. a) Ta'rifga asosan $\bar{c}=2\bar{a}=(4;\,-2;\,-4)$; $\bar{d}=\bar{b}-\bar{a}=(6;\,-3;\,2)$.

b) (3) formulaga asosan, $\bar{c}$ va $\bar{d}$ vektorlarning uzunliklarini

$|\bar{c}|=\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}=6$; $|\bar{d}|=\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}=7.$

c) Vektorning skalyar kvadrati (4.11) formulaga asosan $(\bar{d},\,\bar{d})=\bar{d}^2=|\bar{d}|^2=7^2=49.$

d)Vektorlarning skalyar ko'paytmasi formulasiga asosan: $(\bar{c},\,\bar{d})=4\cdot6+(-2)(-3)+(-4)\cdot2=22$

e)Vektorlar orasidagi burchak: $\cos\varphi=\dfrac{(\bar{c},\,\bar{d})}{|\bar{c}||\bar{d}|}=\dfrac{22}{6\cdot7}\approx0.52$ bundan $\varphi=\arccos0.52\approx58^\circ.$

Skalyar ko'paytma

Ta'rif. *$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb bu vektorlarning uzunliklarini ular hosil qilgan burchak kosinusiga ko'paytirishdan hosil bo'lgan songa aytiladi va ($\vec{a}\,,\vec{b}$) yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi.*

Demak, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\varphi$.

$\vec{a}(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\vec{b}(x_2,\, y_2,\, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\bar{a},\,\bar{b})=\bar{a}\cdot\bar{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ formula bilan aniqlanadi.

Vektorning skalyar kvadrati $(\vec{a},\,\vec{a})=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2=x^2+y^2+z^2$ yoki $|a|=\sqrt{a^2}$.

$\vec{a}(x_1,\, y_1,\, z_1)$ va $\vec{b}(x_2,\, y_2,\, z_2)$ vektorlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{(a,\,b)}{|a||b|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\,2}+y_1^{\,2}+z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}+z_2^{\,2}}}$$

formula yordamida hisoblanadi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal deyiladi, agar ularning skalyar ko'paytmsi nolga teng bo'lsa, ya'ni $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, yoki $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

$\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar kolleniar bo'lsa ,ya'ni $\vec{a}=k\vec{b}$,u holda $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=\frac{z_2}{z_1}=k$ - vektorlarning kolleniarlik sharti.

Vektor ko'paytma

Ta'rif. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytmasi deb, $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ ko'rinishda belgilanuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\vec{c}$ vektorga:

1. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga perpendikulyar;
2. $\vec{c}$ vektor uchidan qaralganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng qisqa burilishi soat mili yo'nalishiga teskari yo'nalishda kuzatiladi ($\vec{a}, \vec{b}$, $\bar{c}$ vektorlarning bunday joylashuvini o'ng uchlik deyiladi);
3. $\vec{c}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan paralellogramning S yuzasini ifodalovchi songa teng, ya'ni $|\vec{c}|=S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ (φ - $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak).

Vektor ko'paytmasining asosiy xossalari:

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$; *2.* $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$; *3.* $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ *;*

4. Agar $\vec{a}=0$, *yoki* $\vec{b}=0$, *yoki* $\vec{a}\,\|\,\vec{b}$ bo'lsa, u holda $\vec{a}\times\vec{b}=0$. Xususan $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Koordinata o'qlari ortlarining vektor ko'paytmasi:

$$\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{j}\times\vec{j}=0, \vec{k}\times\vec{k}=0;\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.\end{array}\quad \textit{agar}\quad \begin{array}{l}\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{array}\quad \textit{bo'lsa, u holda}\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

Agar $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlar kolleniar bo'lsa, u holda* $\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$.

Masalan. $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$ *va* $\vec{b}=\vec{j}+3\vec{k}$ *vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblaylik.*

$\vec{a}$ *vektorning* $\vec{b}$ *vektorlar vektor ko'paytmani*

$$\textit{hisoblaymiz}\ \bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-12\vec{j}+4\vec{k}.$$

S = $|\bar{a}\times\bar{b}|$ *bo'lgani uchun,* $S=\sqrt{(-3)^2+(-12)^2+4^2}=\sqrt{9+144+16}=\sqrt{169}=13$

Uch vektorning aralash ko'paytmasi

Ta'rif. $\vec{a}$,$\vec{b}$ *va* $\vec{c}$ *vektorlarning* $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ *aralash ko'paytmasi deb,* $(\vec{a}\times\vec{b})$ *vektor ko'paytmaning* $\vec{c}$ *vektorga skalyar ko'paytmasiga aytiladi.*

Aralash ko'paytmaning xossalari:

1.$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}=\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$. *2.* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}$. *3.* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{b}\bar{c}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}$,

4.agar vektorlardan aqalli bittasi nol vektor yoki $\vec{a}$,$\vec{b}$, $\vec{c}$ *vektorlar komplanar bo'lsa, u holda* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ *=0 bo'ladi.*

Agar $\begin{matrix} \overline{a}=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k} \\ \overline{b}=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+a_z\overline{k} \\ \overline{c}=c_x\overline{i}+c_y\overline{j}+c_z\overline{k} \end{matrix}$ *bo'lsa , u holda* $\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Agar $\vec{a}$ *,* $\vec{b}$ *,* $\vec{c}$ *vektorlar komplanar bo'lsa, u holda* $\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0$.

Aralash ko'paytma ko'paytiriluvchi vektorlarda qurilgan parallelopiped hajmiga ishora aniqligida teng, ya'ni $V=\pm\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right)$.

Misol. a) $\overline{a}=\overline{i}+3\overline{j}$ va $\overline{b}=3\overline{j}-4\overline{k}$ vektorlarga qurilgan parallelogram yuzasini hisoblang.

Yechish. $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning S yuzasi shu vektorlarning vektor ko'paytmasining moduliga teng: $S=\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$. Vektor ko'paytmani topamiz: $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=-12\overline{i}+4\overline{j}-9\overline{k}$. Demak, $S=\sqrt{(-12)^2+4^2+(-9)^2}=\sqrt{241}$ kv birlik.

Misol. Uchlari $A(1, 2, 0)$; $B(-1, 2, 1)$; $C(0; -3; 2)$ va $D(1, 0, 1)$ nuqtalarda bo'lgan piramidaning hajmini hisoblang.

Yechish. Piramidaning A uchidan chiqqan qirralariga mos keluvchi vektorlarni topamiz: $\overrightarrow{AB}=\{-2;\ 0;\ 1\}, \overrightarrow{AC}=\{-1;\ -5;\ 2\},\ \overrightarrow{AD}=\{0;\ -2;\ 1\}$.

Piramidaning hajmi shu vektorlarga qurilgan parallelopiped hajmining $\frac{1}{6}$ qismiga teng bo'lganligi sababli $V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\cdot 4=\frac{2}{3}$ kub birlik.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli bog`liq yoki erkli ekanligini aniqlang.

$a_1=(0, 1, 1, 0),\ a_2=(1, 1, 3, 1),\ a_3=(1, 3, 5, 1),\ a_4=(0, 1, 1, 2).$

2. $\overline{a}=\{-3;4;1;0\},\ \overline{b}=\{-1;2;-3;0\},\ \overline{c}=\{1;1;2;3\}, \vec{d}=\{2;-6;0;2\}$ vektorlarni bazis hosil qilishini tekshiring.Agar bazis hosil qilishsa ,shu bazisdagi $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}+\vec{d}$ vektorning koordinatalarini aniqlan

3. Barcha shunday a sonlarni topingki, bunda b vektor a_1, a_2, a_3 vektorlarning chizqli kombinatsiyasi orqali ifodalansin. $b=(2, a, 3), a_1=(1, 2, 1), a_2=(3, 4, 5), a_3=(4, 5, 7).$

Nazorat savollari

1. Vektorlar ustida qanday chiziqli amallarni bilasiz?
2. Qanday ko'paytmaga skalyar ko'paytma deyiladi?
3. Qanday ko'paytmaga vektor ko'paytma deyiladi?
4. Qanday ko'paytmaga aralash ko'paytma deyiladi?

5. Chiziqli fazo

1. Chiziqli fazo tushunchasi

Ta'rif. *Agar bo'sh bo'lmagan L-to'plamning istalgan* x, y, z *elementlari va* λ *son uchun qo'shish-* $x+y\in L$*, songa ko'paytirish-* $\lambda x\in L$ *aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa:*

1. $x+y=y+x$ *,* *2.* $x+(y+z)=(x+y)+z$ *,*

3. L *da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan* $x\in L$ *uchun* $x+0=x$*,*

4. Har bir $x\in L$ *uchun,* L *da shunday -* x *elementi mavjudki, uning uchun* $x+(-x)=0$*,*

5. α *va* β *sonlar va* $x\in L$ *uchun* $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$*,* *6.* $1\cdot x=x$*,*

7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ *,* *8.* $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$*,*

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R=(-\infty,+\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

Ta'rif. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ *sonlar uchun* $x=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n$ *tenglik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli fazo elementi* x *vektor* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat deyiladi.*

2. Chiziqli bog'liqlik, o'lcham va bazis tushunchalari

Ta'rif. *Agar hammasi ham nolga teng bo'lmagan shunday* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ *sonlar topilib, ular uchun*

$$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n=0 \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq vektorlar sistemasi deyiladi, aks holda, ya'ni (1) tenglik o'rinli ekanligidan* $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ *bo'lsa, ular chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.*

Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlar orasida nol vektor bo'lsa, u holda ular chiziqli bog'liq bo'ladi. Agar $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vektorlardan bir nechtasi chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda ularning o'zi ham chiziqli bog'liq bo'ladi.

Ta'rif. *Agar* L *chiziqli fazoda* n *tasi chiziqli erkli va istalgan* $n+1$ *tasi bog'liq bo'lgan vektorlar mavjud bo'lsa, ya'ni chiziqli erkli vektorlarning maksimal soni* n *ga teng bo'lsa, u holda* L *fazo* n *o'lchovli chiziqli fazo deyiladi.*

Ta'rif. n *o'lchovli chiziqli fazodagi istalgan* n *ta chiziqli erkli vektorlar sistemasi chiziqli fazoning bazisi deyiladi.*

Teorema. *Chiziqli fazoning har bir elementini yagona usul bilan bazisning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifoda qilish mumkin.*

3. Bir bazisdan boshqasiga o'tish

$\ell_1, \ell_2,\cdots,\ell_n$ vektorlar bazis bo'lib, x vektor ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsin, ya'ni $x=x_1\ell_1+x_2\ell_2+\cdots+x_n\ell_n$, u holda $x_1, x_2,\cdots,x_n$ sonlar x vektorning $\ell_1, \ell_2,\cdots,\ell_n$ bazis bo'yicha koordinatalari deb yuritiladi.

n o'lchovli L chiziqli fazoda ikkita $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ va $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazislar berilgan bo'lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\begin{aligned}
\ell_1^* &= a_{11}\ell_1 + a_{12}\ell_2 + \cdots + a_{1n}\ell_n \\
\ell_2^* &= a_{21}\ell_1 + a_{22}\ell_2 + \cdots + a_{2n}\ell_n \\
&-------------- \\
\ell_n^* &= a_{n1}\ell_1 + a_{n2}\ell_2 + \cdots + a_{nn}\ell_n
\end{aligned}$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ & \\ a_n & a_{n2} \ \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazisdan $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazisga o'tish matritsasi deyiladi. A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lib, bu matritsa $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazisdan $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazisga o'tish matritsasi bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Barcha shunday a sonlarni topingki, bunda b vektor a_1, a_2, a_3 vektorlarning chizqli kombinatsiyasi orqali ifodalansin. $b = (2, a, 3)$, $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (3, 4, 5)$, $a_3 = (4, 5, 7)$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa ortogonal matritsa bo'lishini tekshiring.

Nazorat savollari

1. *Chiziqli fazo nima?*
2. *Chiziqli erkli va chiziqli bog'liq vektorlarning ta'rifini keltiring.*
3. *Chiziqli fazo o'lchami nima?*
4. *Bazis nima?*
5. *Berilgan bazisda vektorlarning yoyilmasi nima?*
6. *O'tish matrisasi qanday aniqlanadi?*

6. Chiziqli operatorlar va ularning xossalari

1. Chiziqli almashtirish matrisasi

Ta'rif. *Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x \in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A: L_1 \to L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax = y$ kabi yoziladi.*

Ta'rif. *Agar istalgan $x \in L_1$, $y \in L_2$ va λ son uchun*

$$A(x+y) = Ax + Ay$$
$$A(\lambda\, x) = \lambda\, A x$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A: L_1 \to L_2$ operator chiziqli operator deyiladi.

Agar $A: L \to L$ va $B: L \to L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B$, $\lambda \cdot A$ va $A \cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\Im(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\Im(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

Ta'rif. *Agar $A \in \Im(L)$ operator uchun shunday λ son mavjud bo'lib,*

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x vector A operatorning xos vektori deyiladi.

$A: R^n \to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun R^n da $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*, \ell_2^*, \ldots, \ell_m^*$ bazislarni olaylik. $x \in R^n, Ax = y \in R^m, A\ell_i \in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \cdots + x_n\ell_n$$
$$Ax = y = y_1\ell_1^* + y_2\ell_2^* + \cdots + y_m\ell_m^*$$
$$A\ell_i = a_{1j}\ell_1^* + a_{2j}\ell_2^* + \cdots + a_{mj}\ell_m^*, \; j = 1,2,\ldots,n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A\ell_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\ell_i^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\ell_i^*, \quad Ax = y = \sum_{i=1}^{m} y_i\ell_i^*$$

demak, $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1,2,\ldots,m$ tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarni kiritsak,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------- & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{pmatrix},$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX = Y$$

bu yerda A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi. $A \in \Im(R^n)$ bo'lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ - - - - & - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Xarakteristik ko'phad. Xos son va xos ildiz

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni $Ax = \lambda x$ bo'lsin.

Agar $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektor matritsa bo'lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo'ladi

$$AX = \lambda \mathrm{X}.$$

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A - \lambda E)\mathrm{X} = 0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim nol $x = 0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo'lishi uchun $|A - \lambda E| = 0$ bo'lishi, ya'ni

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \cdots a_{2n} \\ - - - - - - & - - - - - \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determenant λ ga nisbatan n-tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1) tenglama A operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

A operator n ta chiziqli erkli $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - - & - - & - - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi dioganal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa dioganallaridaga sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diogonal ko'rinishga ega bo'ladi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ operatorning matritsasini biror bazisda diagonal ko'rinishga keltiraylik.

Matrisaning xarakteristik tenglamasi tuzib, xos sonlarni topamiz

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0, \text{bundan } \lambda^2-7\lambda+10=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=5.$$

Xos vektorlarni topish uchun

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2=0\end{cases}$$

ko'rinishdagi bir jinsli tenglamalar sistemasini yechamiz.

$\lambda_1=2$ xos songa mos keluvchi xos vektori $\begin{cases}x_1+2x_2=0\\ x_1+2x_2=0\end{cases}$ sistemaning yechimi bo'lib, $x_1=\begin{pmatrix}-2b\\ b\end{pmatrix}$ bo'ladi.

$\lambda_2=5$ xos songa mos keluvchi xos vektor esa $\begin{cases}-2x_1+2x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases}$ sistemaning yechimi bo'lib, erkli o'zgaruvchini x_2 = c deb olsak. $x_1=\begin{pmatrix}c\\ c\end{pmatrix}$ bo'ladi. b va c ixtiyoriy sonlar bo'lgani uchun bitta xos songa bir nechta har xil xos vektorlar mos kelishi mumkin. Xususan, $b=c=1$ bo'lsa, bir jinsli sistemaning fundamental yechimlariga mos keluvchi xos vektorlar $x_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ va $x_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Bu xos vektorlardan tuzilgan $B=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrisa $x_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$ va $x_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ bazisdagi $B^{-1}\cdot A\cdot B$ almashtirishda berilgan A matrisani diagonal matritsa ko'rinishiga keltiradi.

$B^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ekanligini hisobga olib, $B^{-1}\cdot A\cdot B$ almashtirishni hisoblaylik

$$B^{-1}\cdot A\cdot B=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -5 & -10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-6 & 0\\ 0 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}.$$

Demak, qaralayotgan bazisda A operatorning matritsasi dioganal ko'rinishga ega bo'lib, matritsa diogonalidagi sonlar A operatorning xos sonlaridan iborat bo'lar ekan.

Teorema. A^2 *matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari kvadratiga teng, hamda ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.* $Aq=\lambda q$.

Teorema. A^n *matritsaning xos sonlari, berilgan A matritsa xos sonlari n-darajaga oshirilganiga teng, ammo ikkala matritsaning xos vektorlari bir xildir.*

Teorema. A^{-1} *matritsaning xos sonlari berilgan A matritsaning xos sonlariga teskari bo'ladi, hamda matritsalarning xos vektorlari bir xil.*

Teorema. *Idempotent matritsaning har bir xos soni yoki nolga teng yoki birga.*

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ matrisaning xarakteristik tenglamasi tuzib, xos sonlarni topilsin.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ operatorning matritsasini biror bazisda diagonal ko'rinishga keltiraylik.

3. $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$ operatorning matritsasini biror bazisda diagonal ko'rinishga keltiraylik.

Nazorat savollari

1.Operatpr deganda nimani tushunasiz?
2. Chiziqli operatorni qanday tushunasiz?
3. Matritsaning xarakteristik tenglamasi deganda qanday tenglamani tushunasiz?
4. Operatorning xos soni va xos vektori qanday aniqlanadi?
5. Har qanday matritsaning xos son va hos vektorlari mavjudmi?
6. Xos son va xos vektorning qanday xossalarini bilasiz?

7. Kvadratik formalar

Kvadratik formalar maxsus matritsaviy funksiya bo'lib, ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning maksimumi va minimumlarini topishda qo'llaniladi. Ekonometrikaning ko'pgina modellari parametrlarini baholashda ma'lum bir kvadratik formalarni minimallashtirish yechim ko'rinishini olish imkonini beradi.

Ta'rif. *n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb*

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Bu yerda a_{ij}-lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib, $a_{ij} = a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan $A = \left(a_{ij}\right)$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi, $a_{ij} = a_{ji}$ shart bajarilgani uchun bunday matritsalarni simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X) = \mathrm{X}'A\mathrm{X} \qquad (3)$$

bu yerda $\mathrm{X} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)'$ - matritsa ustundan iboratdir.

$C = \left(c_{ij}\right)(i, j = 1,2,\ldots,n)$ n-tartibli xos bo'lmagan matritsa bo'lib, $\mathrm{X} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)'$ va $\mathrm{Y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)'$ lar $\mathrm{X} = C\mathrm{Y}$ tenglik orqali bog'langan bo'lsin. U holda (3) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz,

$$f = \mathrm{X}'A\mathrm{X} = (C\mathrm{Y})' A(C\mathrm{Y}) = (Y'C')A(CY) = Y'(C'AC)Y = Y'A^{*}Y$$

Demak, $\mathrm{X} = C\mathrm{Y}$ xos bo'lmagan chiziqli almashtirishda f kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo'lar ekan

$$A^{*} = C'AC$$

Agarda barcha $i \neq j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ bo'lsa, ya'n' $f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2$ ko'rinishda bo'lsa, demakki kvadratik formaning matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lsa u holda $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Misol. $F\left(x_1, x_2, x_3\right) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_5^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ kvadratik formani kanonik ko'rinishga keltiraymiz.

Kvadratik formanga mos matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'ladi.

Shu matrisaning xos son va xos vektorlarini topamiz.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = 0. \quad \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6.$$

Xos vektorlarni topamiz.

a) $\lambda_1=-2$ uchun $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{cases} 3x_1-3x_2+x_3=0 \\ -3x_1+3x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+7x_3=0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} 3x_1-3x_2+x_3=0 \\ x_1-x_2+7x_3=0 \end{cases}$

Bu sistemani notriveal yechimlaridan biri $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) λ_2=3 uchun xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) λ_3=6 uchun ham xuddi a) punktdagi kabi mulohazalarda $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ yechimlarni hosil qilamiz.

Normal vektorlar uchun $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ shart o'rinli ekanligini inobatga olib, $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vektorni $\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ga ko'paytirib, $e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ normal vektorni hosil qilamiz. Xuddi shu kabi, $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ qolgan normal vektorni hosil qilamiz.

e_1, e_2, e_3 xos vektorlar o'zaro juft-juft orthogonal,yani $e_1^T\cdot e_2=e_1^T\cdot e_3=e_2^T\cdot e_3=0$ bo'lgani uchun C matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$C=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

O'zgaruvchilarning $X=CY$ orthogonal almashtirilishida berilgan kvadratik forma quyidagi $F(y_1,y_2,y_3)=3y_1^2+6y_2^2-2y_3^2$ kanonik ko'rinishga keladi, bunda

$$y_1=-\frac{x_1}{\sqrt{3}}+\frac{x_2}{\sqrt{3}}+\frac{x_3}{\sqrt{3}}\ ,\ y_2=\frac{x_1}{\sqrt{6}}-\frac{x_2}{\sqrt{6}}+\frac{2x_3}{\sqrt{6}}\ ,\ y_3=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}$$

va aksincha

$$x_1=-\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{y_2}{\sqrt{6}}+\frac{y_3}{\sqrt{2}}\ ,\ x_2=\frac{y_1}{\sqrt{3}}-\frac{y_2}{\sqrt{6}}+\frac{y_3}{\sqrt{2}}\ ,\ x_3=\frac{y_1}{\sqrt{3}}+\frac{2y_2}{\sqrt{6}}\ .$$

Ta'rif. *Agar barcha* $x\neq 0$, *uchun* $q(x)=x^TAx>0$ *bo'lsa,* $q(x)$ *kvadratik forma va A matritsa* ***musbat aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T Ax \geq 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa ***yarim musbat aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T Ax < 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa ***manfiy aniqlangan*** *deyiladi.*

Agar barcha $x \neq 0$, uchun $q(x) = x^T Ax \leq 0$ bo'lsa, $q(x)$ kvadratik forma va A matritsa ***yarim manfiy aniqlangan*** *deyiladi.*

*Agar ba'zi **x** lar uchun kvadratik forma musbat va boshqa **x** lar uchun manfiy aniqlangan bo'lsa, u holda A matritsa uchun* ***aniqmas(xosmas)*** *deyiladi.*

Teorema. *Agar matritsaning xos sonlari musbat aniqlangan bo'lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim musbat aniqlangan bo'lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan katta yoki nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar matritsaning xos sonlari manfiy aniqlangan bo'lishi uchun A haqiqiy simmetrik matritsa manfiy aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar A haqiqiy simmetrik matritsa yarim manfiy aniqlangan bo'lishi uchun matritsaning xos sonlari noldan kichik yoki nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Teorema. *Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.*

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'n'sida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema. *(Kvadratik forma uchun inertsiya qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.*

Teorema. *$f = X'AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'n'*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ - & - & - & - \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Teorema. *A matritsaning musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsa bosh minorlari musbat aniqlangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

A matritsa bosh minorlari quyidagi matritsa determinantlaridan tuziladi:

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ldots$$

Misol. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos sonlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ va $\lambda_3 = 3$, uyqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik forma musbat aniqlangan.
Quyidagicha yozish mumkin:

$$q(x)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=x_1^2+3x_2^2+x_3^2.$$

Ixtiyoriy x_1, x_2, x_3 qiymatlarni olganda ham $q(x)$ musbatdir. Hamda barcha asosiy minorlar ham musbat aniqlangan. Natijada berilgan matritsa ham musbat aniqlangan.

Misol. $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Yechish. Berigan matritsaning xos soni $\lambda=-1$ ikki karralidir. Uyqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik forma manfiy aniqlangan, hamda quyidagicha yoziladi:

$$q(x)=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=-x_1^2-x_2^2.$$

x o'zgaruvchi vektor oldidagi ishora manfiy.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $F=2x_1^2-3x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ kavdratik formalarni a) to'la kbadrat ajratish:
   b) xos bo'lmagan orthogonal almashtirishlar yordamida kanonik ko`rinishga keltiring.
2. $F=x_1^2-4x_2x_3+x_3^2$ kavdratik formalarni a) to'la kbadrat ajratish:
   b) xos bo'lmagan orthogonal almashtirishlar yordamida kanonik ko`rinishga keltiring.

3. $\begin{pmatrix}5 & 6 & 4\\ 2 & 0 & -3\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

4. $\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 8\end{pmatrix}$ matritsa musbat yoki manfiy aniqlanganlikka tekshiring.

Nazorat savollari

1. Kvadratik forma nima?
2. Kvadratik formaning simmetrik ko'rinishi qanday bo'ladi?
3. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi qanday bo'ladi?

8. Tekislikda analitik geometriya

1. Tekislikda analitik geometriyaning sodda masalalari

1. To‘g‘ri chiziqdagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formula orqali topiladi:

$$d = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}\ . \tag{1}$$

O‘qdagi yo‘naltirilgan AB kesmaning (algebraik) kattaligi:

$$AB = x_2 - x_1\,.$$

2. To‘g‘ri chiziqdagi nuqtaning vaziyati bitta son shu nuqtaning koordinati bilan aniqlanadi. Tekislikdagi nuqtaning vaziyati ikkita son bilan aniqlanadi.

Haqiqatan ham, tekislikda ikkita o‘zaro perpendikulyar Ox va Oy o‘qlar berilgan bo‘lib, ular umumiy sanoq boshiga (o‘qlarning kesishish nuqtasi bilan ustma – ust tushuvchi) va umumiy masshtab birligiga ega bo‘lsin.

Agar $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalar Oxy tekislikda yotgan bo‘lsa, u holda ular orasidagi masofa deganda *AB* kesma uzunligini tushunamiz. Ikki nuqta orasidagi masofani $d\ (d>0)$ harfi bilan belgilaymiz. Tekislikda yotgan *A* va *B* nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formula orqali topiladi:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2}$$

(2) ga ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi deyiladi.

Xususan, ushbu

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

formula $A(x;\ y)$ nuqtadan koordinatlar boshigacha bo‘lgan masofani ifodalaydi.

Tekislikda boshi $A(x_1;\ y_1)$ nuqtada va oxiri $B(x_2;y_2)$ nuqtada bo‘lgan *AV* kesmani $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ nisbatda bo‘luvchi C nuqtaning koordinatlari ushbu

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \tag{3}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Agar $C(x_0;\ y_0)$ nuqta *AV* kesmani teng ikkiga bo‘lsa, u holda $\lambda = \dfrac{AC}{CB} = 1$ bo‘lib, (3) formuladan

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\ , \qquad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{4}$$

kelib chiqadi.

To‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida uchlari $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak yuzi quyidagi formula orqali topiladi:

$$S=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\right] \qquad (5)$$

1-misol. $M_1(-0{,}8)$ va $M_2(3{,}2)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. (1) formulaga ko‘ra quyidagini hosil qilamiz:

$$d=|3{,}2-(-0{,}8)|=3{,}2+0{,}8=4.$$

2-misol. $M(5;\,3)$ va $N(2;\,-1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

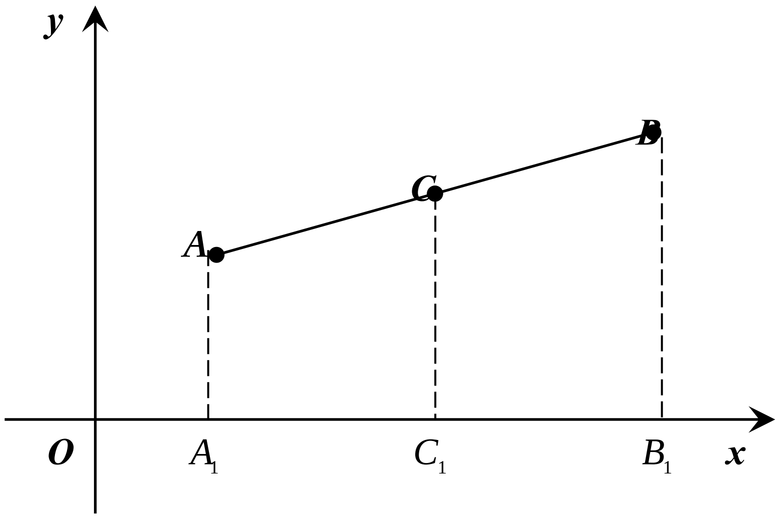
Yechish. Shartga ko‘ra: $x_1=5,\ y_1=3,\ x_2=2,\ y_2=-1$. Bularni (2) formulaga qo‘ysak:

$$MN=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

bo‘ladi.

3-misol. Tekislikda $A(5;3)$, $B(2;1)$ nuqtalar berilgan. AV kesmani $\frac{AC}{CB}=\lambda=0{,}2$ nisbatda bo‘luvchi $C(x;\,y)$ nuqtaning koordinatlarini toping.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra



$x_1=5,\ x_2=2,\ y_1=3,\ y_2=1,\ \lambda=0{,}2.$

3) formulaga asosan:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{5+0{,}2\cdot 2}{1+0{,}2}=\frac{5+0{,}4}{1{,}2}=\frac{5{,}4}{1{,}2}=\frac{54}{12}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}=4{,}5,$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{3+0{,}2\cdot 1}{1+0{,}2}=\frac{3+0{,}2}{1{,}2}=\frac{3{,}2}{1{,}2}=\frac{32}{12}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3};$$

4-misol. ABC uchburchak uchlarining koordinatlari berilgan: $A(5;\,3),\ B(2;\,-1),\ C(-1;\,4)$. Uchburchak tomonlari uzunliklarini toping.

Yechish. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko‘ra quyidagini hosil qilamiz:

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{9+16}=5,$$
$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34},$$
$$AC=\sqrt{(5+1)^2+(3-4)^2}=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}.$$

5-misol. $A(3;5)$ va $B(7;9)$ nuqtalarni tutashtiruvchi *AB* kesma o‘rtasining koordinatlarini toping.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra: $x_1=3,\ y_1=5,\ x_2=7,\ y_2=9,\ \lambda=1.$ *AB* kesmaning o‘rtasini $C(x_0;\,y_0)$ nuqta orqali belgilasak, u holda (4) formulaga ko‘ra

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{3+7}{2}=5;\qquad y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{5+9}{2}=7.$$

6-misol. Uchlari $A(2;0), B(5;3)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzini toping.

Yechish. (5) formulaga ko‘ra $x_1=2, x_2=5,\ x_3=2,\ y_1=0, y_2=3, y_3=6$

$$S=\frac{1}{2}[(2\cdot3-5\cdot0)+(5\cdot6-3\cdot2)+(0\cdot2-2\cdot6)]=\frac{1}{2}(6+24-12)=\frac{1}{2}\cdot18=9.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

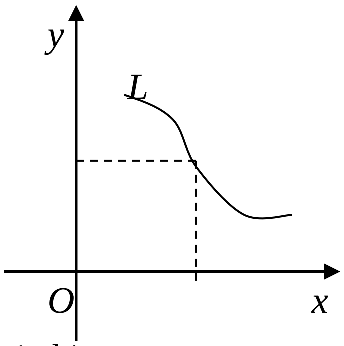
1. Son o‘qida $A(-5), B(4)$ va $C(-2)$ nuqtalar yasalsin va kesmalarning shu o‘qdagi *AB*, *BS* va *AS* kattaliklari topilsin. $AB+BC=AC$ ekanligi tekshirilsin.
2. Oldingi mashq $A(1), B(-4)$ va $C(5)$ nuqtalar uchun bajarilsin.
3. Uchlari $A(-4;2), B(0;-1)$ va $C(3;3)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning perimetrini toping.
4. $A(2;1)$ nuqtadan ham, *Ou* o‘qdan ham 5 birlikka uzoqlashgan nuqta topilsin.
5. Ox o‘qida $A(8;4)$ nuqtadan va koordinatlar boshidan baravar uzoqlikda turgan nuqta topilsin.
6. Uchlari $A(4;3),\ B(-3;\,2)$ va $C(1;\,-6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakka tashqi chizilgan doiraning markazi va radiusi topilsin.
7. Ordinatalar o‘qida koordinatlar boshidan va $A(-2;\,5)$ nuqtadan baravar uzoqlikda turgan nuqta topilsin.
8. Abssissalar o‘qida $A(-2;\,3)$ nuqtadan $3\sqrt{5}$ birlikka uzoqlashgan nuqta topilsin.
9. $A(-3;\,-1)$ va $B(5;\,3)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
10. $A(5;\,3)$ va $B(6;\,-4)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.
11. $A(-2;\,1)$ va $B(3;\,6)$ nuqtalar yasalsin. *AV* kesmani $AN:NB=3:2$ nisbatda bo‘luvchi $N(x;\ y)$ nuqta topilsin.

12. $A(-2;\ 1)$ va $B(3;\ 6)$ nuqtalar yasalsin. AB kesmani $AM:MB=2:1$ nisbatda bo‘luvchi $M(x;\ y)$ nuqta topilsin.
13. Uchlari $A(2;\ -1)$, $B(4;3)$ va $C(-2;1)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining o‘rtalari aniqlansin.
14. Uchlari $O(0;\ 0)$, $A(8;\ 0)$ va $B(0;\ 6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakda OS mediana va OD bissektrisa uzunliklari aniqlansin.
15. Uchlari $A(2;\ 0)$, $B(5;3)$ va $C(2;6)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning yuzi hisoblansin.
16. Uchlari $A(3;\ 1)$, $B(4;6)$, $C(6;\ 3)$ va $D(5;-2)$ nuqtalarda bo‘lgan to‘rtburchakning yuzi hisoblansin.

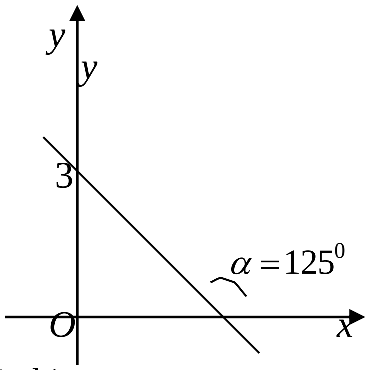
Mustahkamlash uchun savollar

1.To‘g‘ri chiziqdagi va tekislikdagi nuqtaning koordinatlari deganda nimani tushunamiz?
2.Tekislikda ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi qanday?
3. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish formulasi qanday?
4. To‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida uchburchak yuzi qanday topiladi?

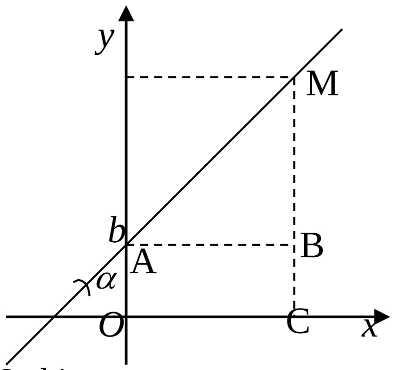
2. **1) *To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi.*** To‘g‘ri chiziqning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α va to‘g‘ri chiziqning ordinatlar o‘qidan ajratgan kesmasining kattaligi b berilganda, uning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi. Masalan, $b=3$, $\alpha=125^0$ bo‘lsa, uning holati aniq bo‘ladi (5-chizma).



4-chizma



5-chizma



6-chizma

Yuqoridagi miqdorlar berilganda to‘g‘ri chiziqning tenglamasini keltirib chiqaramiz. $M(x,y)$ to‘g‘ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy nuqta bo‘lsin (6-chizma). AMB to‘g‘ri burchakli uchburchakdan

$$\frac{BM}{AB}=tg\alpha \text{, bundan } BM=ABtg\alpha$$

6–chizmadan $y = BC + BM$; yoki $y = ABtg\alpha + b$, $AB = x$ bo‘lganligi uchun $y = xtg\alpha + b$ bo‘ladi. $tg\alpha$ to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffitsiyenti** deyiladi va $tg\alpha = k$ bilan belgilaymiz. Shunday qilib,

$$y = kx + b \tag{2}$$

munosabat kelib chiqadi. Bunga to‘g‘ri chiziqning **burchak koeffitsiyentli tenglamasi** deyiladi. $b = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tib, tenglamasi $y = kx$ bo‘ladi. $k = 1$ bo‘lsa, $y = x$ bo‘lib, bu birinchi koordinat- lar burchagining bissektrisasi bo‘ladi.

1-misol. OX o‘qi bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi va OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra, to‘g‘ri chiziq OY o‘qini $A(0;\ 3)$ nuqtada kesib o‘tadi, demak $b = 3$. Bu nuqtadan OX o‘qiga parallel chiziq o‘tkazamiz, hamda shu to‘g‘ri chiziq bilan 120^0 burchak hosil qiluvchi tomon, yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi .

Endi shu to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozamiz. Bu holda $k = tg\ 120^0 = -\sqrt{3}$, $b = 3$ bo‘lganligi uchun, $y = -\sqrt{3}\,x + 3$ to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi bo‘ladi.

2) Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi. $A(x_1, x_1)$, $B(x_2; y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin.

$$y = kx + b \tag{3}$$

to‘g‘ri chiziq A nuqtadan o‘tsin. Bu holda A nuqtaning koordinatlari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya’ni $y_1 = kx_1 + b$ bo‘ladi. (3) tenglikdan oxirgi tenglikni ayirsak:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{4}$$

hosil bo‘ladi. (4) tenglamaga berilgan **bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq $B(x_2; y_2)$ ikkinchi nuqtadan ham o‘tsa,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$$

bo‘lib,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

bo‘ladi. k ning yuqoridagi qiymatini (4)ga qo‘yib,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{5}$$

tenglamani hosil qilamiz. (5) **berilgan ikki** $A(x_1, y_1)$ **va** $B(x_2, y_2)$ **nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi** deyiladi.

2-misol. Biror xil mahsulotdan 100 donasini ishlab chiqarishga 300 ming so‘m harajat qilinsin. 500 donasi uchun esa harajat 1300 ming so‘m bo‘lsin. Harajat funksiyasi chiziqli (to‘g‘ri chiziq) bo‘lsa, shu mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish harajatini toping.

Yechish. Masala sharti bo‘yicha $A(100,\ 300)$ va $B=(500,\ 1300)$ nuqtalar berilgan. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan,

$$\frac{y-300}{1300-300}=\frac{x-100}{500-100}\text{ , yoki }\ y=2{,}5x+50$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tenglamadan $x=400$ uchun, $y=1050$ ekanligini topamiz. Demak, mahsulotdan 400 dona ishlab chiqarish uchun 1050 ming so‘m harajat qilinadi.

<u>3) To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy hollari.</u> Ikki noma’lumli

$$Ax+By+C=0$$

tenglamani qaraymiz.

Bundan, $By=-Ax-C$, $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ bo‘lib, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ bilan belgilasak, $y=kx+b$ tenglama hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $Ax+By+C=0$ tenglama ham to‘g‘ri chiziq tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

$$Ax+By+C=0 \qquad (6)$$

tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **<u>umumiy tenglamasi</u>** deyiladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasining hususiy hollari: 1) $A\neq 0$, $B\neq 0, C=0$ bo‘lsa, $Ax+By=0$ bo‘lib, to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tadi, chunki $O(0;0)$ nuqtaning koordinatlari tenglamani qanoatlantiradi;

2) $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, bo‘lsa, $y=-\frac{C}{B}$ bo‘lib, OY o‘qdan $-\frac{C}{B}$ kesma ajratib, OX o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenlamasi bo‘ladi;

3) $B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$ bo‘lsa, $x=-\frac{C}{A}$ bo‘lib, OX o‘qdan $-\frac{C}{A}$ kesma ajratib , OY o‘qiga paralllel to‘g‘ri chiziq tenglamasi bo‘ladi;

4) $A=0,\ C=0,\ B\neq 0$ bo‘lsa, $y=0$ bo‘lib, OX o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

5) $B=0,\ C=0,\ A\neq 0$ bo‘lsa, $x=0$ bo‘lib, OY o‘qining tenglamasi hosil bo‘ladi;

6) $A=0,\ B=0,\ C\neq 0$ bo‘lsa, $C=0$ bo‘lib, o‘zgarmas miqdor, bir paytda 0 dan farqli hamda 0 ga teng kelib chiqadi, bunday bo‘lishi mumkin emas.

3-misol. $x-2y+6=0$ to‘g‘ri chiziq uchun k va b parametrlarni toping.

Yechish: Buning uchun berilgan tenglamani y ga nisbatan yechamiz: $2y=x+6,\quad y=1/2\cdot x+3$ bundan (2) tenglama bilan taqqoslab $k=1/2$, $b=3$, ekanligini topamiz. Shunday qilib, to‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglamaga keltirib k va b parametrlarni topdik.

<u>4) To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.</u> To‘g‘ri chiziq koordinat o‘qlaridan mos ravishda a va b kesmalar ajratib o‘tsin(7-chizma). To‘g‘ri chiziq $A(a;0)$ va $B(0;b)$ nuqtalardan o‘tadi. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasiga asosan

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}, \qquad \frac{y}{b}=\frac{x-a}{-a}, \qquad \frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$$

yoki
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{7}$$

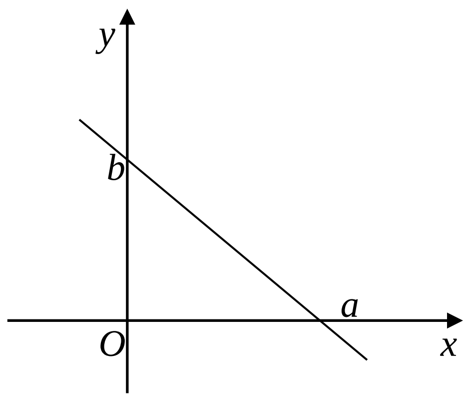
tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

4-misol. $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va uni yasang.

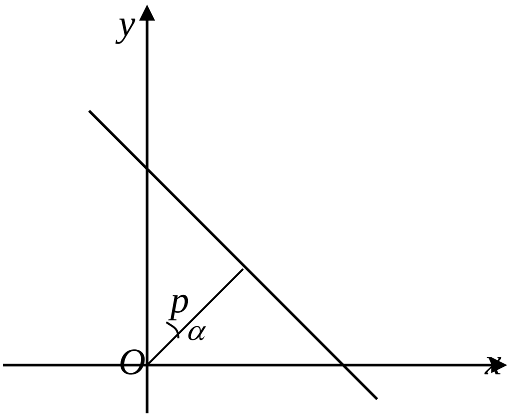
Yechish. $3x+5y-15=0$ to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini (7) ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz.

$$3x+5y=15, \quad \frac{3x}{15}+\frac{5y}{15}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=1$$

bu to‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi bo‘ladi. Endi koordinat o‘qlaridan mos ravishda 5 va 3 kesmalarni ajratib, ajratilgan kesmalar oxiridan yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz.



7- chizma.



8- chizma.

5) To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi. To‘g‘ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi (8-chizma) va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{8}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. (8) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Ma’lumki, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak. To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglama keltirish uchun

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

normallovchi ko‘paytuvchini hisoblab, uni umumiy,

$$Ax+By+C=0$$

tenglamaga ko‘paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

normal tenglama hosil bo‘ladi. Normallovchi ko‘paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

5-misol. Normalning uzunligi $p=3$ va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi 30^0 bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

Yechish. Shartga ko‘ra normal OX o‘qi bilan 30^0 li burchak tashkil etadi. Bu burchakni yasaymiz va uning qo‘zg‘aluvchi tomoni normal to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Shu to‘g‘ri chiziqda $p=3$ kesma ajratib uning oxiridan unga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu yasalishi kerak bo‘lgan to‘g‘ri chiziq bo‘ladi . Endi to‘g‘ri chiziqning tenglamasini yozamiz. Shartga ko‘ra normalning uzunligi va uning OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagi berilgan, bu holda ma’lumki, to‘g‘ri chiziqning (8) normal tenglamasini yozamiz. $p=3,\ \alpha=30^0$ bo‘lganligi uchun,

$$x\cos 30^0+y\sin 30^0-3=0 \qquad yoki \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y-3=0$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasidir.

6-misol. $4x-3y-5=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko‘paytuvchini topamiz: $M=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$ bo‘ladi.

Berilgan tenglamani $M=1/5$ ko‘paytirib,

$4/5\cdot x-3/5\cdot y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi, chunki

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}+\frac{9}{25}=\frac{25}{25}=1, \qquad (\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1) \text{ edi.}$$

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
2. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
3. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
5. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday?
6. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning xususiy xollari nimalardan iborat?
7. To‘g‘ri chiziqning koordinat o‘qlaridan ajratgan kesmalariga nisbatan tenglamasi qanday yoziladi?
8. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi qanday?
9. Normalning uzunligi nima?
10. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga qanday qilib keltiriladi?
11. To‘g‘ri chiziqning tenglamasi normal ko‘rinishdaligini qanday tekshiriladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. OY o‘qidan $b=4$ kesama ajratib OX o‘qi bilan 135^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

2. OY o‘qidan $b=-2$ kesma ajratib OX o‘qi bilan 60^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

3. Koordinatlar boshidan o‘tib, OX o‘qi bilan: 1). 45^0, 2). 120^0, 3). 60^0, 4). 90^0 burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqlarni yasang va ularning tenglamalarini yozing.

4. 1) $3x+5y+15=0$; 2) $3x+2y=0$; 3) $y=-2$; 4) $x/4+y/4=1$ to‘g‘ri chiziqlar uchun k va b parametrlarni aniqlang.

5. 1) $4x+3y-12=0$; 2) $4x+3y=0$; 3) $2x-7=0$; 4) $2y+7=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesmalarga nisbatan tenglamalarini yozing va ularni yasang.

6. $A\,(2;\,3)$ nuqtadan o‘tib, OX o‘qi bilan 60^0 burchak hosil qiluvchi to‘g‘ri chiziqni yasang va uning tenglamasini yozing.

7. 1) $2x-3y-6=0$; 2) $3x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamalarini, kesmalar bo‘yicha tenglamasiga keltiring.

8. $Ax+5y-40=0$ to‘g‘ri chiziq A ning qanday qiymatlarida koordinat o‘qlaridan bir xil kesmalar ajratadi.

9. Uchlari $A(3;\ 4)$, $B(3;\ 2)$ va $C(-1;\ 2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak tomonlarining tenglamalarini yozing.

10. To‘g‘ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o‘qi bilan $\alpha=45^0$ burchak hosil qilsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

11. $x-y+3=0$ to‘g‘ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o‘qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

12. Ushbu 1) $\frac{2}{5}x+\frac{3}{4}y-6=0$, 2) $\frac{12}{13}x-\frac{5}{13}-7=0$

3) $\frac{3}{5}x+\frac{3}{4}y-2=0$, 4) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-4=0$

to‘g‘ri chiziq tenglamalaridan qaysilari normal ko‘rinishda?

13. Ushbu 1) $5x+12y-26=0$, 2) $3x-4y+10=0$,

3) $y=3x+5$, 4) $2x+2y+7=0$

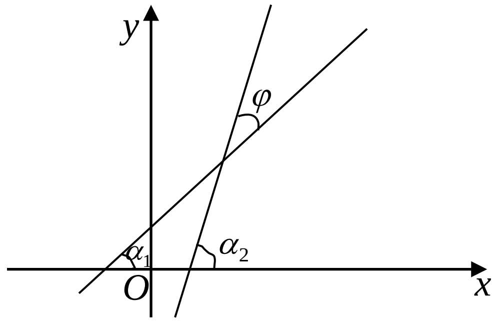
to‘g‘ri chiziq tenglamalarini normal ko‘rinishga keltiring.

To'g'ri chiziqlarga doir asosiy masalalar

1). Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita

$$y = k_1 x + b_1,$$
$$y = k_2 x + b_2$$

to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bunda $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\alpha_2$ bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasin va ular orasidagi burchakni topish talab etilsin. To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan belgilaymiz.



9-chizma.

Ya'ni , $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (9-chizma) . Ma'lumki,

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

yoki

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \tag{1}$$

bo'ladi. (1) ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakning tangensini topish for- mulasi deb ataladi.

1-misol. $y = 3x + 1, y = 2x + 5$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\varphi = \frac{3-2}{1+2\cdot 3} = \frac{1}{7} \text{ bo'lib, } \varphi = arctg\, 1/7 \approx arctg 0.14 \approx 8^0, \varphi \approx 8^0$$

bo'ladi.

2). To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari. To'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\varphi = 90^0 \text{ bo'lib, } tg 90^0 = \infty \quad \text{yoki} \quad \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \infty, \quad 1 + k_1 . k_2 = 0$$

kelib chiqadi, bundan

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}$$

bo'ladi, bunga ikki to'g'ri chiziqning **perpendikulyarlik sharti** deyiladi.

To‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lsa, $\varphi = 0$ bo‘lib, $tg0^0 = 0$, ,yoki

$$\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0,\ k_2 - k_1 = 0\ ,\ k_1 = k_2$$

kelib chiqadi.

$$k_1 = k_2$$

tenglikka **ikki to‘g‘ri chiziqning <u>parallellik</u> sharti** deyiladi.

<u>3). Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishuvi.</u> Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

2-misol. $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0, \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. Ikkinchi tenglamani (-1)ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni hadma-had qo‘shib $x - 1 = 0$, $x = 1$ ni hosil qilamiz. $x = 1$ ni birinchi tenglamaga qo‘ysak, $2 \cdot 1 + y - 3 = 0$ yoki $y = 1$ bo‘ladi. Shunday qilib, bu to‘g‘ri chiziqlar $A(1;1)$ nuqtada kesishadi.

<u>4). Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.</u> $M(x_0; y_0)$ nuqta va $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. Berilgan nuqtadan, berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \tag{2}$$

formula yordamida topiladi. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy

$$Ax + By + C = 0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \tag{3}$$

formula bilan topiladi.

3-misol. $A(3;\ \sqrt{5})$ nuqtadan $2x + \sqrt{5}y - 2 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq tenglamasi umumiy holda berilgan. Shuning uchun (3) formulaga asosan,

$$d = \left| \frac{2 \cdot 3 + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} - 2}{\pm\sqrt{2^2 + \sqrt{5^2}}} \right| = \left| \frac{6 + 5 - 2}{3} \right| = \frac{9}{3}, \qquad d = 3$$

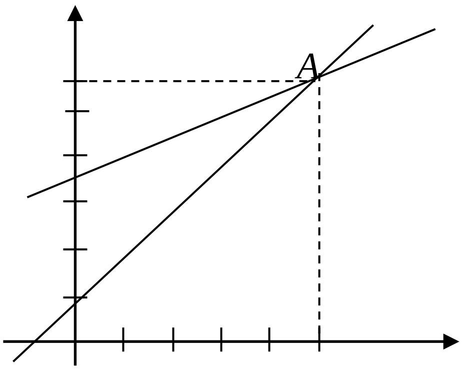
bo‘ladi.

4-misol. Ikki xil transport vositasida yuk tashish harajatlari funksiyasi

$$y = 100 + 50x \quad \text{va} \quad y = 200 + 30x$$

bilan ifodalansin. Bunda, y transport harajati, x har yuz kilometrga yuk tashish masofasi. Qanday masofadan boshlab 2-xil transport vositasi bilan yuk tashish tejamliroq bo‘ladi.

Yechish. Masala shartida berilgan $y = 100 + 50x$ va $y = 200 + 30x$ to‘g‘ri chiziqlar kesishadigan nuqtani topamiz: tengliklarning chap tomonlari teng bo‘lganligi uchun $100 + 50x = 200 + 30x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = 5, \quad y = 350$ bo‘ladi. Demak, to‘g‘ri chiziqlar $A(5,350)$ nuqtada kesishadi. Endi to‘g‘ri chiziqlarni yasaymiz: (10-chizma).



10- chizma

10-chizmadan ko‘rinadiki, yuk tashish masofasi 500 km dan ortiq bo‘lganda 2-xil transport vositasi bilan yuk tashilsa, harajat kamroq bo‘ladi.

5). Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish

$$5x - 2y + 10 = 0 \quad \textbf{va} \quad 5x - 2y + 36 = 0$$

parallel to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish uchun, bu to‘g‘ri chiziqlarning bittasida ixtiyoriy bir nuqtani tanlaymiz va tanlangan nuqtadan ikkinchi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topamiz: birinchi to‘g‘ri chiziqda $x = 4$ desak, $y = 15$ bo‘lib, $A(4,15)$ 1-to‘g‘ri chiziqdagi nuqta bo‘ladi. $A(4,15)$ nuqtadan ikkinchi $5x - 2y + 36 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani (3) formulaga asosan, hisoblasak,

$$d = \left| \frac{5 \cdot 4 - 2 \cdot 15 + 36}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} \right| = \frac{26}{\sqrt{29}} \quad , \quad d == \frac{26}{\sqrt{29}}$$

bo‘ladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikulyarlik sharti nima?
3. Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti qanday bo‘ladi?
4. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday formuladan foydalanib topiladi?
6. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani topish qanday bajariladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y=1/2\cdot x+4$ to‘g‘ri chiziq berilgan. Uning koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

2. Boshlang‘ich ordinatasi $b=-3$ bo‘lgan va $y=2x+3$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziqni yasang va tenglamasini yozing.

3. $y=\sqrt{3}\,x-2$ va $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+3$ to‘g‘ri chiziqlar berilgan. Ularning abssissa o‘qi bilan tashkil qiladigan burchaklarini toping.

4. $y=-2/5\cdot x+3;\quad y=3/7\cdot x+2/7$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

5. $6x+8y+5=0;\quad 2x-4y-3=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

6. 1) $3x-15y+16=0$, 2) $3x+15y-8=0$, 3) $6x-30y+13=0$,
4) $30x+6y+7=0$
to‘g‘ri chiziqlardan qaysilari perpendikulyar va qaysilari parallel.

7. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklarni toping:

1) $\begin{matrix} y=2/3\cdot x-7 \\ y=5x+9 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} 2x-4y+9=0 \\ 6x-2y-3=0 \end{matrix}$

3) $\begin{matrix} y=3/7\cdot x-2 \\ 7x+3y+5=0 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} x/4-y/5=1 \\ x/2+y/18=1 \end{matrix}$

8. Tomonlari $4x-3y+5=0,\quad 3x+4y+4=0,\quad x-7y+18=0$ to‘g‘ri chiziqlarda yotgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.

9. $A(4;\ 5)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglama-sini yozing va ulardan $2x-3y+6=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar va parallel bo‘lganlarini ajrating.

10. Uchburchak tomonlari

$$7x-6y+9=0;\ 5x+2y-25=0;\ 3x+10y+29=0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning uchlarini va balandliklarining tenglamalarini toping.

11. Uchlari $P(-4;\ 0)$, $Q(0;\ 4)$ va $R(2;\ \ 2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchak medianalarining tenglamalarini toping.

12. To‘g‘ri chiziqning koordinatlar boshidan uzoqligi 3, unga koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyar OX o‘qi bilan $\alpha=45^0$ burchak hosil qilsa, to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.

13. $x-y+3=0$ to‘g‘ri chiziqqa koordinatlar boshidan tushirilgan perpendikulyarning uzunligini va uning OX o‘qi bilan tashkil qilgan burchagini toping.

14. Uchlari $P(0;\ 5)$, $Q(-3;\ 1)$ va $R(-1;\ -2)$ nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning R nuqtasidan o‘tkazilgan balandligining uzunligini toping.

15. $5x-12y-26=0$, $5x-12y-65=0$ parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

16. Trapesiya asoslarining tenglamalari $3x-4y-15=0$, $3x-4y-35=0$ berilgan. Trapesiyaning balandligini toping.

To‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari

1). **To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi**

$$y=kx+b \tag{1}$$

k -parametrli to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qqa og‘ish burchagi α ning tangensiga teng bo‘lib $(k=tg\alpha)$, to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti, ba’zan qiyaligi deyiladi. b parametr boshlang‘ich ordinata yoki Oy o‘q ajratgan kesma kattaligi.

2). To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$Ax+By+C=0 \tag{2}$$

ko‘rinishda bo‘lib, ushbu xususiy hollarga ega:

a) $C=0$ bo‘lsa , $y=-\frac{A}{B}x$ - to‘g‘ri chiziq koordinatlar boshidan o‘tadi;

b) $B=0$ bo‘lsa, $x=-\frac{C}{A}=a$ - to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa parallel bo‘ladi;

v) $A=0$ bo‘lsa, $y=-\frac{C}{B}=b$ - to‘g‘ri chiziq Oy o‘qqa parallel bo‘ladi;

g) $B=C=0$ bo‘lsa, $Ax=0$ yoki $x=0$ - to‘g‘ri chiziq Oy o‘qdan iborat;

d) $A=C=0$ bo‘lsa, $By=0$ yoki $y=0$ - to‘g‘ri chiziq Ox o‘qdan iborat;

3. To‘g‘ri chiziqning o‘qlardan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \tag{3}$$

bo‘ladi, bu yerda a va b - to‘g‘ri chiziqning o‘qlardan kesgan kesmalarining kattaliklari.

4. **To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi**.

To‘g‘ri chiziqqa koordinat boshidan tushirilgan perpendikulyarning (normal) uzunligi va uning Ox o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi α berilganda to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi holati aniq bo‘ladi va uning tenglamasi

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0 \tag{4}$$

bo‘ladi. (4) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi.

Ma’lumki, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Normal tenglamada shu shart bajarilishi kerak.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasini normal tenglamaga keltirish uchun normallovchi ko‘paytuvchi

$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ ni topib, uni $Ax+By+C=0$ tenglamaga ko‘paytiramiz. Bu holda

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

normal tenglama hosil bo‘ladi. Normallovchi ko‘paytuvchining ishorasi ozod had ishorasiga teskari olinadi.

1-misol. To‘g‘ri chiziq $4x-3y-12=0$ tenglama bilan berilgan. Uning koordinat o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping.

Yechish. Kesishish nuqtalarining koordinatlarini topish uchun berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini to‘g‘ri chiziqning koordinatlar o‘qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1.$$

Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqning koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalari $A(3;0)$ va $B(0;-4)$ ekan.

2-misol. $4x-3y-5=0$ to‘g‘ri chiziq tenglamasini normal tenglamaga keltiring.

Yechish. Normallovchi ko‘paytuvchini topamiz: $M=\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{1}{5}$. Berilgan tenglamani $M=\frac{1}{5}$ ko‘paytirib, $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$ tenglamani hosil qilamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi, ya’ni

$\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1$, ($\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$edi) bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1) Oy o‘qdan $b=3$ kesma ajratib, Ox o‘q bilan 1) 45^0; 2) 135^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlar yasalsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari yozilsin.

2) Oy o‘qdan $b=-3$ kesma ajratib, Ox o‘q bilan 1) 60^0; 2) 120^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlar yasalsin. Bu to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari yozilsin.

3) Koordinatlar boshidan o‘tib, Ox o‘q bilan: 1) 45^0; 2) 60^0 3) 90^0; 4) 120^0; 5) 135^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari yozilsin.

4) Koordinatlar boshidan va (-2;3) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq yasalsin va uning tenglamasi yozilsin.

5) $A(2;-1)$ va $B(3;4)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.

6) 1) $2x-3y=6$ 2) $3x+3y=0$ 3) $y=-3$; 4) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

to‘g‘ri chiziqlarning har qaysisi uchun k va b parametrlar aniqlansin.

7) 1) $3x+4y=12$; 2) $3x-4y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $2y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlar yasalsin.

8) $A(2;3)$ nuktadan o‘tib, Ox o‘q bilan 45^0 burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziqning k va b parametrlari aniqlansin. Bu to‘g‘ri chiziqning tenglamasi yozilsin.

9) 1) $2x-3y=6$; 2) $3x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziqning tenglamalari o‘qlardan ajratgan kesmalariga nisbatan yozilsin.

To‘g‘ri chiziqlarga doir asosiy masalalar

1. Agar ikkita kesishuvchi $y=k_1x+b_1$ va $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqlar perpendikulyar bo‘lmasa, $y=k_1x+b_1$ to‘g‘ri chiziqdan $y=k_2x+b_2$ to‘g‘ri chiziqqacha soat strelkasiga qarshi yo‘nalishda hisoblanuvchi φ burchak

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} \tag{1}$$

formula bilan aniqlanadi:

$A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} \tag{2}$$

formula bilan aniqlanadi.

Parallellik sharti: $k_1=k_2$ yoki $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Perpendikulyarlik sharti: $k_2=-\frac{1}{k_1}$ yoki $A_1A_2+B_1B_2=0$.

2. Berilgan $A(x_1;y_1)$ nuqtadan berilgan $(k=tg\alpha)$ yo‘nalish bo‘yicha o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{3}$$

bo‘ladi.

Tekislikdagi birorta A nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami to‘g‘ri chiziqlar dastasi deyiladi.

3. Berilgan ikki $A(x_1;y_1)$ va $B(x_2;y_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \tag{4}$$

Berilgan $M(x_0;y_0)$ nuqtadan berilgan $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasi:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

4. Parallel bo‘lmagan ikki $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasini topish uchun ularning

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \tag{5}$$

tenglamalarini birgalikda yechib, kesishish nuqtasining koordinatlari topiladi.

1-misol. $x+5y+9=0$ va $2x-3y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

Yechish. (2) formulaga ko‘ra:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 5\cdot(-3)}{\sqrt{1^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{2-15}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bo‘ladi. Demak, $\varphi = 135^0$.

2-misol. $2x-3y-7=0$ va $4x-6y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro parallelligi yoki perpendikulyarligini tekshiring.

Yechish. Bu yerda $A_1 = 2,\ A_2 = 4,\ B_1 = -3,\ B_2 = -6$. $\frac{A_1}{A_2}$ va $\frac{B_1}{B_2}$ nisbatlarni solishtiramiz: $\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Demak, berilgan to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel.

3-misol. Burchak koeffitsiyenti $k=-4$ bo‘lgan va $(-1;3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping va tenglamasini tuzing.

Yechish. Yuqoridagi (3) formulaga ko‘ra, $(-1;3)$ nuqtadan (berilgan $k=-4$ yo‘nalish bo‘yicha) o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi ushbu

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$
$$y - 3 = -4(x-(-1))$$
$$y + 4x + 1 = 0$$

4-misol. ABC uchburchak uchlarining koordinatlari berilgan:

$$A(-1;4),\ B(11;-5),\ C(15;17).$$

AB va BC tomonlarning tenglamasini tuzing.

Yechish. AB tomonning tenglamasini tuzamiz. (4) formulaga ko‘ra topamiz:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \qquad \frac{x+1}{11+1} = \frac{y-4}{-5-4}; \qquad \frac{x+1}{12} = \frac{y-4}{-9};$$

$$-3(x+1) = 4(y-4); \quad -3x-3 = 4y-16,$$

$$4y+3x-13=0.$$

BC tomonning tenglamasini ham yuqoridagidek o‘xshash topish mumkin:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}; \qquad \frac{x-11}{15-11} = \frac{y+5}{17+5}; \quad \Rightarrow \quad \frac{x-11}{4} = \frac{y+5}{22};$$

$$11x-121 = 2y+10; \quad \Rightarrow 2y-11x+131=0.$$

4-misol. $M(2;5)$ nuqtadan $6x+8y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ formulaga ko‘ra topamiz:

$$x_0=2;\ y_0=5;\ A=6;\ B=8;\ C=-5;$$
$$d=\frac{|6\cdot 2+8\cdot 5-5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{47}{10}=4{,}7 \text{ birlik.}$$

5-misol. $M(3;2)$ va $N(4;3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi bilan hosil qilgan burchagini toping.

Yechish. $k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ formulaga ko‘ra: $k=\dfrac{3-2}{4-3}=1$, bundan $k=tg\alpha=1$. Demak, $\alpha=45^0$.

6-misol. $x-4y+3=0$ va $2x-y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda o‘zaro qanday joylashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda joylashishini aniqlash uchun ushbu
$$\begin{cases} x-4y+3=0, \\ 2x-y+5=0 \end{cases}$$
sistemani tekshiramiz. Bu to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish uchun bu sistemani yechamiz, chunki izlangan nuqta bir vaqtning o‘zida berilgan to‘g‘ri chiziqlarning har birida yotadi. Yuqorida aniqlanganimizdek, $\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{-4}{-1}$ bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri chiziqlar kesishadi. Sistemani yechib $\left(-\dfrac{17}{7};\dfrac{1}{7}\right)$ni topamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1) Quyidagi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak aniqlansin:

1) $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=\dfrac{1}{2}x+1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-y+7=0 \\ 2x-3y+1=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+y=0 \\ y=3x-4 \end{cases}$

2) $A(-4;-3)$, $B(-5;0)$, $C(5;6)$ *ва* $D(1;0)$ nuqtalar trapesiyaning uchlari bo‘lishi tekshirilsin va uning balandligi topilsin.

3) $y=\dfrac{1}{3}x+6$ to‘g‘ri chiziq berilgan. Uning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini toping.

4) $3x+y-6=0$ va $x+2y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini toping.

5) $M(-3;-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va $2x+y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

6) $M(-3;-1)$ nuqta orqali o‘tuvchi $2x+y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

7) ABC uchburchak uchlarining koordinatlari berilgan:
$A(-1;4)$, $B(11;-5)$, $C(15;17)$ AB va BC tomonlarning tenglamasi tuzilsin.
8) To‘g‘ri chiziq $4x-3y-12=0$ tenglama bilan berilgan. Uning koordinat o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping.

9) $M(3;2)$ va $M(4;3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi bilan hosilgan qilgan burchagini toping .
10) $3x+y-4y=0$ va $2x-y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi orqali o‘tib, $x+y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

11) $x-4y+3=0$ va $2x-y+5=0$ to‘g‘ri chiziqlarning tekislikdagi o‘zaro qanday joylashishini tekshiring.

12) $A(3;5)$ nuqtadan $6x+8y-3=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

13) $M(1;4)$ va $N(3;-2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentini toping va tenglamasini tuzing.

14) Burchak koeffitsiyenti $k=-3$ bo‘lgan va $(-1;4)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

15) Koordinat o‘qlaridan $a=3;\ b=2$ kesmalar ajratuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini toping.

16) $M(3;-2)$ nuqtadan $3x+4y+4=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

17) $A(-3;\ 1)$ nuqtadan hamda $x+4y-5=0$ va $2x-5y-1=0$ to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqning tenglamasi deganda nima tushuniladi?
2.To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi qanday yoziladi?
3.To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti deb nimaga aytiladi?
4.Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
5.Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik sharti nima?
6.Berilgan bitta nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday?
7.Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi qanday?
8. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi qanday?
9. Ikkita to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
10. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa qanday topiladi?

9. Ikkinchi tartibli chiziqlar

Ma’lumki, tekislikda to‘g‘ri chiziq x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0$$

tenglama bilan analitik ifodalanadi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Odatda bu tenglamani ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi deb ataladi. Ushbu sodda ko‘rinishdagi ikkinchi tartibli egri chiziqlardan aylana, ellips, giperbola hamda parabolalarni qaraymiz.

1. Aylana.

Markazi (a,b) nuqtada va radiusi R bo‘lgan aylana tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ . \qquad (1)$$

Agar (1) tenglamadagi qavslarni ochsak, u holda tenglama

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishga keladi.

(2) tenglamadan qaytadan (1) tenglamaga o‘tish uchun (2) tenglamaning chap tomonidagi to‘la kvadratdan iborat ifodalarni ajratish kerak,
ya’ni

$$\left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \qquad (3)$$

Aylanaga doir bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. Markazi S(-1;1) nuqtada, radiusi 3 birlik bo‘lgan aylana tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko‘ra aylana markazining koordinatlari $a = -1;\ b = 1$va R=3. Berilganlarni (1) formulaga qo‘yib, aylana tenglamasini tuzamiz.

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 3^2$$
$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9 \ .$$

2-misol. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ aylananing markazi va radiusi topilsin.

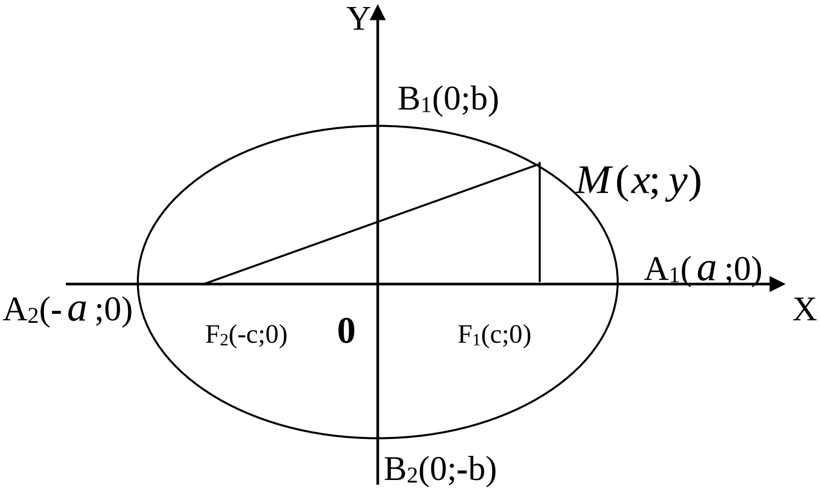
Yechish. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ berilgan tenglamaning chap tomonini to‘la kvadratdan iborat ifodalarga ajratamiz.

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4x + 4) - 13 - 23 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 - 36 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 6^2$$

bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirsak , (3; -2) nuqta aylana markazi, radiusi R = 6 bo‘ladi.

2. Ellips.

Ta'rif. Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarining yig'indisi F_1F_2 dan katta o'zgarmas $2a$ mikdorga teng nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.



1 – chizma.

Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, ellips koordinat o'qlariga nisbatan simmetrikdir. a va b parametrlar mos ravishda katta va kichik ellipsningg yarim o'qlari deyiladi.

$a>b$ bo'lsin, u holda F_1 va F_2 fokuslar Ox o'qda bo'lib, koordinatlar boshidan $c=\sqrt{a^2-b^2}$ masofada bo'ladi. $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ nisbat ellipsning ekssentrisiteti deyiladi. Ellipsning $M(x,y)$ nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar (fokal radius - vektorlar)

$$r=a-\varepsilon x, \quad r_2=a+\varepsilon x \qquad (2)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Agar $a<b$ bo'lsa, fokuslar Oy o'qda bo'lib, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $r=b\pm\varepsilon y$ bo'ladi.

1- misol. Katta yarim o'qi $a=5$ va ekssentrisiteti $\varepsilon=0{,}6$ bo'lgan holda ellipsning kanonik tenglamasini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $\varepsilon=\frac{c}{a}=0{,}6$.

Demak, fokuslar orasidagi masofaning yarmi $c=a\cdot 0{,}6=5\cdot 0{,}6=3$ bo'ladi. Ellips kichik yarim o'qining kvadrati $b^2=a^2-c^2=25-9=16$ bo'lib, ellipsning izlanayotgan kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

2- misol. $M(2;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi, katta yarim o‘qi $a=4$ bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. $a=4$ bo‘lganda ellipsning kanonik tenglamasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

bo‘ladi. $M(2;-3)$ nuqtaning koordinatlari bu tenglamani qanoatlantirishi kerak. Demak, $\frac{2^2}{16}+\frac{(-3)^2}{b^2}=1$. Bundan $b^2=12$ ni bo‘lib va uni yuqoridagi tenglamaga qo‘ysak, ellipsning izlangan kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.$$

3. Giperbola.

Ta’rif. Giperbola deb shunday nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladiki, ularning har biridan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha (fokuslargacha) bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o‘zgarmas $2a$ $(0<2a<F_1F_2)$ miqdordan iboratdir.

Giperbolaning kanonik tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

1) bo‘lib, giperbola koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrikdir.

Giperbola Ox o‘qni uchlar deb ataluvchi $A_1(a,0),\ A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi, Oy o‘qi bilan esa kesishmaydi. a parametr haqiqiy yarim o‘q, b esa mavhum yarim o‘q deyiladi.

$c=\sqrt{a^2+b^2}$ parametr koordinatlar boshidan fokusgacha bo‘lgan masofani bildiradi.

$\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ nisbat giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi.

$y=\pm\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi. $M(x;y)$ nuqtalardan fokuslargacha bo‘lgan masofalar (fokal radius - vektorlar):

$$r_1=|\varepsilon\, x-a|, \qquad r_2=|\varepsilon x+a| \qquad (2)$$

formulalar orqali aniqlanadi.

Agar $a=b$ bo‘lsa, giperbola teng tomonli giperbola deb ataladi. Uning tenglamasi $x^2-y^2=a^2$, asimptotalarining tenglamalari esa $y=\pm x$ bo‘ladi. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ va $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ giperbolalar qo‘shma giperbolalar deyiladi.

1–misol. Fokuslari orasidagi masofa 26 ga, ekssentrisiteti esa $\frac{13}{12}$ ga tengligini bilgan holda giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Yechish. Shartga ko‘ra $2c=26$ va $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{13}{12}$. Demak, giperbolaning katta yarim o‘qi $a=12$, $c=\frac{26}{2}=13$; $c^2=a^2+b^2$ formulaga ko‘ra giperbolaning kichik yarim o‘qi

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$

bo‘ladi. Giperbola tenglamasining ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1.$$

2 – misol. O‘qlari koordinat o‘qlari bilan ustma–ust tushadigan giperbola $M_1(-3;\frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4;-2)$ nuqtalar orqali o‘tadi. Uning kanonik tenglamasini toping.

Yechish. Giperbolaning kanonik tenglamasini yozamiz: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$ Bu tenglamani $M_1(-3;\frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4;-2)$ nuqtalarning koordinatlari qanoatlantiradi.

Demak, $\frac{(-3)^2}{a^2}-\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{b^2}=1$ va $\frac{4^2}{a^2}-\frac{(-2)^2}{b^2}=1$

yoki $\frac{9}{a^2}-\frac{\frac{1}{2}}{b^2}=1$ va $\frac{16}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$

Bundan $a^2=8$ va $b^2=4$ ni topamiz va uni giperbolaning kanonik tenglamasiga qo‘yamiz hamda quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{4}=1.$$

4. Parabola.

Ta’rif. Berilgan nuqtadan (fokusdan) va berilgan to‘g‘ri chiziqdan (direktrisadan) bir xil uzoqliqda bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni parabola deyiladi.

Parabolaning kanonik tenglamasi quyidagi ikki ko‘rinishga ega:

1) $y^2=2px$ Ox o‘qqa nisbatan simmetrik parabola.

2) $x^2=2py$ Oy o‘qqa nisbatan simmetrik parabola.

Har ikki holda ham parabolaning uchi, ya’ni simmetriya o‘qida yotuvchi nuqtasi, koordinatlar boshida bo‘ladi. Parabola $F(\frac{p}{2};0)$ fokus va $x=-\frac{p}{2}$ direktrisaga ega;

uning $M(x,y)$ nuqtasining fokal radius – vektori $r = x + \frac{p}{2}$. $x^2 = 2py$ parabola $F(0;\frac{p}{2})$ fokus va $y = -\frac{p}{2}$ direktrisaga ega; uning $M(x,y)$ nuqtasining fokal radius-vektori $r = y + \frac{p}{2}$ bo‘ladi.

1-misol. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi $y^2 = 2px$ bilan taqqoslab ko‘ramizki, $2p = 6,\ \ p = 3$. Parabola direktrisasining tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ va fokusi $\frac{p}{2}$ va 0 koordinatlarga ega bo‘lganidan, ko‘rilayotgan hol uchun direktrisa tenglamasi $x = -\frac{3}{2}$ va fokus $F(\frac{3}{2};0)$ bo‘ladi.

5. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish.

Biror to‘g‘ri burchakli dekart koordinatlar sistemasida koordinatlari

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi tekislik nuqtalarining geometrik o‘rni ikkinchi tartibli chiziq deyiladi. Bunda a_{ij} koeffitsiyentlar haqiqiy sonlardan iborat bo‘lib, a_{11}, a_{12}, a_{22} koeffitsiyentlardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘ladi. Ikkinchi tartibli chiziq nazariyasining asosiy masalalaridan biri uning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish masalasi hisoblanadi.

Umumiy tenglamani kanonik ko‘rinishga keltirishga asosan chiziqning nuqtalarini yasash mumkin. Buning uchun quyidagilarni bajaramiz:

1) $\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ harakteristik tenglamani yozib, tenglamaning ildizlarini topamiz.

2) tekislikni O nuqta atrofida α burchakka burganda R koordinatlar sistemasidan R' koordinatalar sistemasi hosil bo‘ladi. Burish burchagining kattaligini topamiz:

$$tg\alpha = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \Rightarrow \left(\sin\alpha = \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} \right);$$

3) $\begin{aligned} a'_{10} &= a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha, \\ a'_{20} &= -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha \end{aligned}$ formulalar bo‘yicha a'_{10}, a'_{20} koeffitsiyentlarni hisoblaymiz va R' koordinatlar sistemasidagi chiziqning

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a_{00} = 0 \qquad (2)$$

tenglamasini tuzamiz.

4) (2) tenglamadan koordinatlar boshini O' nuqtaga ko‘chirish yordamida egri chiziqning R'' koordinatlar sistemasidagi kanonik tenglamasini hosil qilamiz.

5) Avval R' koordinatlar sistemasi chiziladi va chiziq kanonik tenglamasiga ko‘ra yasaladi.

1-misol. Ushbu $x^2-8xy+7y^2+5x-6y+7=0$ chiziq tenglamasini soddalashtiring.

Yechish. 1) harakteristik tenglamani tuzib, uning ildizlarini aniqlaymiz:

$$\lambda^2-8\lambda-9=0; \quad \lambda_1=9; \ \lambda_2=-1;$$

2) koordinatlar sistemasini burish kerak bo‘lgan burchakning qiymatini topamiz:

$$tg\alpha=-2; \ \sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Bu yerdagi α ni jadvaldan topiladi. Koordinat o‘qlaridagi vektorlar quyidagicha bo‘ladi:

$$\vec{i'}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}; \ \vec{j'}=\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j};$$

3) koeffitsiyentlarni aniqlaymiz

$$a'_{10}=\frac{17}{\sqrt{5}}; \quad a'_{20}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Bulardan foydalanib, yangi koordinatlar sistemasigi nisbatan quyidagi tenglamani tuzamiz:

$$9x'^2-y'^2+2\cdot\frac{17}{\sqrt{5}}x'+2\cdot\frac{4}{\sqrt{5}}y'+7=0;$$

4) koordinatlar boshini O' nuqtaga ko‘chirish yo‘li bilan tenglama shaklini o‘zgartiramiz:

$$9(x'+\frac{17}{9\sqrt{5}})^2-(y^2-\frac{4}{\sqrt{5}})^2+\frac{34}{9}=0.$$

Natijada quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$-\frac{X^2}{\frac{34}{81}}+\frac{Y^2}{\frac{34}{9}}=1; \qquad O'\left(-\frac{17}{9\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right).$$

Demak, chiziq giperboladan iborat ekan.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Markazi $C(-4;3)$, radiusi $R=5$ bo‘lgan aylana tenglamasi yozilsin va u yasalsin. $A(-1;-1)$, $B(3;2)$, $O(0;0)$ nuqtalar aylanada yotadimi.

2. $A(-4;6)$ nuqta berilgan. Diametri OA kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.

3. 1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$; 2) $x^2+y^2-8x=0$; 3) $x^2+y^2+4y=0$ aylanalar yasalsin.

4. $x^2+y^2+5x=0$ aylana $x+y=0$ to‘g‘ri chiziq yasalsin va ularning kesishgan nuqtalari topilsin.
5. $A(1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va koordinat o‘qlariga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
6. $x^2+y^2+4x-6y=0$ aylananing Oy o‘q bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.
7. $A(-1;3)$, $B(0;2)$ va $C(1;-1)$ nuqtalardan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
8. $A(4;4)$ nuqtadan va $x^2+y^2+4x-4y=0$ aylana bilan $y=-x$ to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
9. $y=-\sqrt{-x^2-4x}$ egri chiziqning joylashish sohasi aniqlanib, shakli chizilsin.
10. $x^2+y^2-8x-4y+16=0$ aylanaga koordinatlar boshidan o‘tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.
11. $A(-3;0)$ va $B(3;6)$ nuqtalar berilgan. Diametri AV kesmadan iborat aylana tenglamasi yozilsin.
12. 1) $x^2+y^2-6x+4y-23=0$; 2) $x^2+y^2+5x-7y+2{,}5=0$;
3) $x^2+y^2+7y=0$
aylanalarning markazlari va radiuslari topilsin. Aylanalar yasalsin.
13. Koordinatlar boshidan va $x^2+y^2=a^2$ aylananing $x+y+a=0$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtalaridan o‘tuvchi aylana tenglamasi yozilsin.
14. $x^2+y^2-4x+6y-5=0$ aylananing Ox o‘q bilan kesishgan nuqtalariga o‘tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.
15. $x^2+4y^2=16$ ellips yasalsin, uning fokuslari va ekssentrisiteti topilsin.
16. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo‘lib, kichik yarim o‘qi $b=3$ bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.
17. Agar ellipsning katta yarim o‘qi $a=6$, ekssentrisiteti $\varepsilon=0{,}5$ bo‘lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.
18. Ellipsning katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 4,8 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.
19. Ellipsning katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 4 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.
20. Ellipsning katta yarim o‘qi $a=5$ va c parametri 3 ga teng bo‘lsa, uning kichik yarim o‘qi b va ekssentrisiteti ε topilsin.
21. Koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan ellips $M(2;\sqrt{3})$ va $B(0;2)$ nuqtalardan o‘tadi. Uning tenglamasi yozilsin va M nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofa topilsin
22. Fokuslari Ox o‘qda yotuvchi ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lib, $M(-4;\sqrt{21})$ nuqtadan o‘tadi va $\varepsilon=\dfrac{3}{4}$ ekssentrisitetga ega. Ellips tenglamasi yozilsin va M nuqtaning fokal radiuslari topilsin.

23. $x^2+2y^2=18$ ellipsning o‘qlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo‘luvchi vatar uzunligi topilsin.
24. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa uning katta va kichik yarim o‘qlarining uchlari orasidagi masofaga teng bo‘lsa, uning ekssentrisiteti ε topilsin.
25. $9x^2+25y^2=225$ ellipsda shunday $M(x,y)$ nuqta topilsinki, undan o‘ng fokusgacha bo‘lgan masofa chap fokusgacha bo‘lgan masofadan 4 marta katta bo‘lsin.
26. Katta yarim o‘qi 5 ga, kichik yarim o‘qi 3 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.
27. $M(0;3)$ nuqta orqali o‘tuvchi, fokuslari orasidagi masofa 4 ga teng bo‘lgan ellipsning kanonik tenglamasini yozing.
28. $9x^2+16y^2=114$ ellipsning ekssentrisitetini toping.
29. Giperbolaning haqiqiy o‘qi 18 ga, fokuslari orasidagi masofa 24 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.
30. $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{16}=1$ giperbola tenglamasi berilgan. Giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, fokuslarini, ekssentrisitetini aniqlang.
31. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ giperbola asimptotalarining tenglamalarini tuzing.
32. Giperbolaning kanonik tenglamasi berilgan: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1.$
Bu giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o‘qlarini, ekssentrisitetini, fokuslarini, uchlarini toping, asimptotalari tenglamalarini tuzing.
33. M nuqta $F(2;0)$ nuqtaga $x=9$ to‘g‘ri chiziqqa qaraganda 3 marta yaqin turib harakat qiladi. M nuqtaning harakat trayektoriyasini toping.
34. $5x^2-4y^2=20$ giperbolaning yarim o‘qlarini, ekssentrisitetini va fokuslarining koordinatlarini toping. $M(-4;\sqrt{15})$ nuqtadagi fokal radiuslarining uzunliklarini toping.
35. Asimptotasi $y=\pm\frac{1}{2}x$ to‘g‘ri chiziqdan iborat va (3;1) nuqtadan o‘tuvchi giperbolaning tenglamasini tuzing.
36. Giperbolaning direktrisalari orasidagi masofa 8 ga, fokuslari orasidagi masofa 12 ga teng. Giperbolaning tenglamasini tuzing.
37. Giperbolaning fokuslari abssissalari o‘qida yotib, uning fokuslari orasidagi masofa 6 ga va ekssentrisiteti 1,5 ga teng bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.
38. Giperbolaning fokuslari abssissalar o‘qida yotib, uning haqiqiy yarim o‘qi 5 ga teng, uchlari esa markazi bilan fokusi orasidagi masofani teng ikkiga bo‘lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.
39. $x^2-4y^2=16$ giperbolada ordinatasi 1 ga teng M nuqta olingan. Undan fokuslargacha bo‘lgan masofalar topilsin.
40. Fokuslari orasidagi masofa $2c=10$, uchlari orasidagi masofa $2a=8$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

41. Hakikiy yarim o‘qi $a=2\sqrt{5}$, ekssentrisiteti $\varepsilon=\sqrt{1{,}2}$ bo‘lgan giperbolaning kanonik tenglamasi yozilsin.

42. Uchlari $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ellipsning fokuslarida, fokuslari esa uning uchlarida bo‘lgan giperbolaning tenglamasi yozilsin.

43. Asimptotasi haqiqiy o‘q bilan 60^0 burchakni tashkil etuvchi giperbolaning ekssentrisiteti topilsin.

44. $y^2=4x$ parabola berilgan. Parabolaning shunday nuqtasini topingki, undan fokusigacha bo‘lgan masofa 1 ga teng bo‘lsin.

45. $x+4=0$ to‘g‘ri chiziq va $F(-2;0)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasini tuzing.

46. $y^2=12x$ parabola fokusining koordinatalarini toping va direktrisasining tenglamasini tuzing.

47.Direktrisasining tenglamasini $x=-3$ va $F(1;0)$ bo‘lgan parabolaning tenglamasini tuzing.

48. $F(0;2)$ nuqtadan va $y=4$ to‘g‘ri chiziqdan bir xil uzoqlashgan nuqtalar geometrik o‘rnining tenglamasi tuzilsin.

49. $y^2=4x,\ y^2=-4x$ tenglamalar bilan berilgan parabolalarning fokuslari, direktrisalari yasalsin va direktrisalarining tenglamalari yozilsin.

50. $x^2=4y,\ x^2=-4y$ tenglamalar bilan berilgan parabolalarning fokuslari, direktrisalari yasalsin va direktrisalarining tenglamalari yozilsin.

51. 1) (0;0) va (1;-3) nuqtalardan o‘tuvchi va Ox o‘qqa nisbatan simmetrik; 2) (0;0) va (2;-4) nuqtalardan o‘tuvchi va Ou o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘lgan parabola tenglamasi yozilsin.

52. Markazi $y^2=2px$ parabolaning fokusida bo‘lib, parabola direktrisasiga urinuvchi aylana tenglamasi yozilsin. Parabola va aylananing kesishgan nuqtalari topilsin.

53. $y^2=8x$ parbolaga $A(0;-2)$ nuqtadan o‘tkazilgan urinmalarning tenglamalari yozilsin.

54. Parabolaning fokusi $(4;0)$ nuqta bo‘lsa, shu parabolaning tenglamasi topilsin.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli chiziqlar deb qanday chziqlarga aytiladi?
2. Aylana, ellips, giperbola va parabola deb qanday chiziqlarga aytiladi va ularning kanonik tenglamalari qanday bo‘ladi?
3. Ellipsning ekssentrisiteti nima?
4. Ekssentrisitet aylana uchun nimaga teng?
5. Ellipsning fokal radiuslari nima?
6. Ellipsning simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari bormi?
7. Giperbolaning fokal radiusi nima?

10. Kompleks sonlar. Algebraning asosiy teoremasi.

1. **Kompleks sonlarning algebraik, trigonometrik, ko‘rsatkichli formalari va ular ustida amallar.**

1. Ta’riflar. x va y haqiqiy sonlar, i esa qandaydir bir simvol bo‘lsa, $i=\sqrt{-1}$, $z=x+yi$ ifoda kompleks son deyiladi, bunda quyidagi shartlar qabul qilingan deb hisoblanadi.

1) $x+0i=x;\ 0+yi=yi$ va $1\cdot i=i;\ -1\cdot i=-i$,

2) faqat $x=x_1$, $y=y_1$ bo‘lgandagina , $x+yi=x_1+y_1i$ bo‘ladi,

3) $(x+yi)+(x_1+y_1i)=(x+x_1)+(y+y_1)i$,

4) $(x+yi)\cdot(x_1+y_1i)=(xx_1-yy_1)+(xy_1+x_1y)i$

1) va 4) shartlardan i ning darajalari hosil bo‘ladi:

$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i$ va hakozo. (1)

$x+yi$ kompleks sonda $x=0, y\neq 0$ bo‘lsa, y mavhum son deyiladi. i son mavhum birlik deyiladi .

x va y sonlar z kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va kompleks qismi deyiladi va $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$ ko‘rinishda belgilanadi .

Agar $y=0$ bulsa, $z=x$ - haqiqiy son, agar $x=0$ bo‘lsa, $z=iy$ - sof mavhum son bo‘ladi. Mavhum qismlarining ishorasi bilangina farq qiluvchi $z=x+iy$ va $\bar{z}=x-iy$ kompleks sonlar qo‘shma kompleks sonlar deyiladi .

Agar $z_1=x_1+iy_1$ va $z_2=x_2+iy_2$ ikkita kompleks son berilgan bo‘lsa, ular ustida algebraik amallar quyidagicha bajariladi:

$$z_1+z_2=(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$$

$$z_1-z_2=(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1) \quad (2)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Kompleks sonlarni darajaga ko‘tarish ikkihadni darajaga ko‘tarish kabi bajariladi, i sonnining darajalari quyidagi formulalar bo‘yicha aniqlanadi.

$i^2=-1;\ i^3=-i;\ i^4=1$ va h.k.

Umuman $i^{4k}=1;\ i^{4k+1}=i,\ \ i^{4k+2}=-1,\ i^{4k+3}=-i;$ (3)

1-misol. $z_1=2+i$ va $z_2=3-2i$ sonlarning yig‘indisi va ayirmasini toping

Yechish. (2) formulaning birinchi va ikkinchisidan quyidagilarni topamiz:

$$z_1+z_2=(2+i)+(3-2i)=(2+3)+(1-2)i=5-i,$$

$$z_1 - z_2 = (2+i) - (3-2i) = (2-3) + i(1+2) = -1+3i.$$

2-misol. $z_1 = 2-3i$ va $z_2 = 1+2i$ kompleks sonlar koʻpaytmasini toping

Yechish. (2) formulaga koʻra quyidagini hosil qilamiz:
$z_1 \cdot z_2 = (2-3i)\cdot(1+2i) = (2\cdot 1 - (-3)\cdot 2) + i(2\cdot 2 + (-3)\cdot 1) = (2+6) + i(4-3) = 8+i;$

3-misol. $i^2 = i \cdot i$ ni toping
Yechish: $i = 0+1i$ boʻlgani uchun

$$i^2 = i\cdot i = (0+1\cdot i)\cdot(0+1\cdot i) = (0\cdot 0 - 1\cdot 1) + (0\cdot 1 + 0\cdot 1)i = -1;$$

$z = x + iy$

Shunday qilib, $i^2 = -1$ ekan.
Har bir $z = x+iy$ kompleks son geometrik jihatdan Oxy koordinatlar tekisligining (x, y) nuqtasi yoki $\vec{ON}$ vektori bilan tasvirlanadi.
Kompleks son tasvirlanadigan Oxy tekislik kompleks tekislik deyiladi.
z kompleks soniga mos keluvchi N nuqtaning holatini r va φ qutb koordinatlari bilan ham aniqlash mumkin.
Bunda koordinatlar boshidan N nuqtagacha boʻlgan masofaga teng $z = |\vec{ON}|$ soni kompleks sonning moduli deyiladi va $|z|$ bilan belgilanadi; $\vec{ON}$ vektorning Ox oʻqining musbat yunalishi bilan hosil qilgan φ burchak kompleks sonning argumenti deyiladi va y $Arg\,z$ kabi belgilanadi.
$z = x+iy$ kompleks son uchun quyidagi formula oʻrinlidir:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad tg\varphi = \frac{y}{x} \tag{4}$$

bunda $\varphi = \arg z$ ning bosh qiymati $0 \le \arg z < 2\pi$ shartni qanoatlantiradi.
4-misol. $z = -\sqrt{3} + i$ kompleks sonning moduli va argumentini toping.
Yechish. $x = -\sqrt{3},\ y = 1$ boʻlganligi uchun $r = \sqrt{x^2+y^2} = 2;\ tg\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
tenglamadan φ argumentni topamiz:

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Shunday qilib, $r = 2,\ \varphi = \dfrac{5\pi}{6};$
Kompleks sonning $z = x+iy$ koʻrinishdagi ifodasi kompleks sonning algebraik shakli deyiladi.
Kompleks sonning $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ koʻrinishdagi ifodasi uning trigonometrik shakli deyiladi.
Trigonometrik koʻrinishda berilgan kompleks sonlar ustida bajariladigan amallar:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = (r_1 r_2)[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)], \qquad (5)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)], \qquad (6)$$

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad (7)$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), \qquad (8)$$

bunda k=0,1,2,..,(n-1).
(7) va(8) formulalar Muavr formulalari deyiladi.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (9)$$

(9) ga Eyler formulasi deyiladi.

4-misol. $z = 1 - i$ sonni sakkizinchi darajaga ko‘taring.
Yechish. Berilgan sonni trigonometrik formada tasvirlaymiz:
$z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{\varphi} + i\sin\frac{7\pi}{\varphi}\right)$ Muavr formulasiga ko‘ra quyidagini hosil qilamiz:

$$z^8 = (1-i)^2 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8 = \left(\sqrt{2}\right)^2\left[\left(\cos(8\cdot\frac{7\pi}{4}) + i\sin(8\cdot\frac{7\pi}{4})\right)\right] = \\ = 16(\cos 14\pi + i\sin 14\pi) = 16.$$

5-misol. $\sqrt{-1}$ ni toping.
Yechish. -1 sonni trinometrik formada tasvirlaymiz:
$-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$ (8) formulaga ko‘ra quyidagiga egamiz:
$\sqrt{-1} = \sqrt{1(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right)$. k ga 0 va 1 qiymatlarni berib, ildizning ikkita har xil ε_0 va ε_1 qiymatini hosil qilamiz.

$$\varepsilon_0 = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i, \quad \varepsilon_1 = 1(\cos\frac{\pi+2\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{2}) = -i$$

2. Algebraning asosiy teoremasi

Ko‘phadning ildizlari tushunchasini kiritayotganimizda biz har qanday haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phad ildizlarga ega bo‘lish-bo‘lmasligi haqidagi savolni qo‘yganimiz yo‘q. Haqiqiy ildizlarga ega bo‘lmaydigan haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phadlarning mavjudligi ma’lum ($x^2 + 1$ ana shunday ko‘phadlardan biridir). Hatto kompleks sonlar to‘plamida ham ildizlarga ega bo‘lmagan ko‘phadlar, ayniqsa istalgan kompleks keoffitsiyentli ko‘phadlarni qaraladigan bo‘lsa (haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phadlar bularning xususiy holidir), mavjudligini kutish mumkin edi. Agar ana shunday bo‘lganida edi, u holda kompleks sonlar sistemasini yana ham kengaytirishga to‘g‘ri kelar edi. Biroq aslida ushbu algebraning asosiy teoremasi o‘rinlidir.

Teorema. Darajasi birdan kichik bo‘lmagan, istalgan son koeffitsiyentli, har qanday ko‘phad hech bo‘lmaganda , umumiy holda bitta kompleks ildizga ega bo‘ladi.

Natija. n -chi darajali $(n \geq 1)$ istalgan kompleks koeffitsiyentli ko‘phad, xudi n ta kompleks ildizga ega bo‘ladi. Bunda ildizlar necha karrali bo‘lsa, xuddi shuncha marta sanaladi.

Algebraning asosiy teoremasi $n = 0$ bo‘lganda ham o‘rinli, chunki nolinchi darajali ko‘phad ildizlarga ega emas. Algebraning asosiy teoremasi darajasi aniqlanmagan nol ko‘phadgagina (nol soniga) qo‘llanishi mumkin emas.

3. Yuqori darajali tenglamalar. Kardano formulasi

1. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (1) tenglama kubik tenglama deyiladi.

Agar x_1, x_2, x_3 lar (1) tenglamaning ildizlari bo‘lsa, tenglamani

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bundan

$a = -(x_1 + x_2 + x_3),\ b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,\ \ c = -x_1x_2x_3.$

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tenglama $x = z - \dfrac{a}{3}$ almashtirish yordami bilan

$z^3 + pz + q = 0$ kurinishga keltiriladi. $z^3 + pz + q = 0$ tenglama ushbu

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} = u + v$$

Kardano formulasi bilan yechiladi.

1) Agar $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} > 0$ bo‘lsa, u holda

$z_1 = u_1 + v_1; z_{2,3} = -\dfrac{u_1 + v_1}{2} \pm \dfrac{u_1 - v_1}{2} i\sqrt{3}$ buladi, bunda u_1 va v_1 lar u va v ildizlarning haqiqiy qiymatlari.

2) Agar $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} = 0$ bo‘lsa , u holda $z_1 = \dfrac{3q}{p}; z_2 = z_3 = -\dfrac{3q}{2p} = \dfrac{z_1}{2}$ bo‘ladi.

3) Agar $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$ bo‘lsa , u holda

$z_1 = 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\cos\dfrac{\varphi}{3},\ \ z_{2,3} = 2\sqrt{\dfrac{-p}{3}}\cos(\dfrac{\varphi}{3} \pm 120^0)$ bo‘ladi, bundagi

$\cos\varphi = -\dfrac{q}{2} : \sqrt{\dfrac{-p^3}{27}}$.

1-misol. $x^3-4x^2+x+6=0$ tenglamaning yechimlari

$$x_1+x_2+x_3;\ \ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;\ \ \ x_1x_2x_3$$

ifodalarni tuzib, tekshirilsin.

Yechish. $x^3-4x^2+x+6=0$ berilgan tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$x^3-4x^2+x+6=0 \Rightarrow x^3-4x^2+4x-4x+x+6=0 \Rightarrow$$

$$x(\ x^2-4x+4)-4x+8+x-2=0 \Rightarrow x(x-2)^2-4(x-2)+(x-2)=0 \Rightarrow$$

$$(x-2)[x(x-2)-4+1]=0 \Rightarrow (x-2)(x^2-2x-3)=0$$

$x-2=0$ $\qquad\qquad x^2-2x-3=0$

$x_1=2,$ $\qquad\qquad\qquad x_2=3,\ x_3=-1;$

$x_1+x_2+x_3;\ \ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;\ \ \ x_1x_2x_3$ ifodalarning qiymatlarini tekshiramiz:

$$-4=a=-(x_1+x_2+x_3)=-(2+3-1)=-4,$$

$$1=b=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2\cdot3+2\cdot(-1)+3\cdot(-1)=6-2-3=1,$$

$$6=c=-x_1x_2x_3=-(2\cdot3\cdot(-1))=6;$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Agar $z_1=1-i,\ z_2=3+4i$ bo‘lsa, bu kompleks sonlarning yig‘idisini va ayirmasini toping.

2. Agar $z_1=-12+i,\ z_2=3-i$ kompleks sonlarning ko‘paytmasini toping.

3.
$a)\ (2+3i)\cdot(3-2i)$ $\qquad c)\ (3-2i)^2$
$b)\ (a+bi)\cdot(a-bi)$ $\qquad d)\ (1+i)^3$
$e)\ \dfrac{1+i}{1-i}$ $\qquad f)\ \dfrac{2i}{1+i}$

amallar bajarilsin.

4. $a)\ x^2+25=0,\ \ b)\ x^2-2x+5=0$ tenglamalar yechilsin va ildizlar tenglamaga qo‘yilib tekshirilsin.

5. Quyidagi kompleks sonlar vektorlar bilan tasvirlangan va ularning modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko‘rinishda yozilsin.
1)$z=3$; 2) $z=-2$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$;

6. Quyidagi kompleks sonlar vektorlar blan tasvirlangan va ularning modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko‘rinishda yozilsin.
1)$z=2-2i$; 2) $z=1+i\sqrt{3}$; 3) $z=-\sqrt{3}-i$; 4) $z=1+2i$;

7. Quyidagi kompleks sonlar vektorlar blan tasvirlangan va ularning modullari va argumentlari aniqlansin, hamda trinometrik ko‘rinishda yozilsin.
1) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$

8. 1)$z=3$; 2) $z=-2$; 3) $z=3i$; 4) $z=-2i$; sonlar $re^{\varphi i}$ ko‘rinishda yozilsin ($-\pi<\varphi\le\pi$ bo‘lganda).

9. 1) $z=2-2i$; 2) $z=1+i\sqrt{3}$; 3) $z=-\sqrt{3}-i$; 4) $z=1+2i$; sonlar $re^{\varphi i}$ ko‘rinishda yozilsin ($-\pi<\varphi\le\pi$ bo‘lganda).

10. 1) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha+i(1-\cos\alpha)$ sonlar $re^{\varphi i}$ ko‘rinishda yozilsin ($-\pi<\varphi\le\pi$ bo‘lganda).

11. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi z nuqtalarning sohalari yasalsin.

1) $|z|<3$ 2) $|z|<2$ *ва* $\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$;

3) $2<|z|<4$ *ва* $-\pi<\varphi<-\dfrac{\pi}{2}$

12. Quyidagi Muavr formulasi bilan hisoblansin:

1) $(1+i)^{10}$; 2) $(1-i\sqrt{3})^{6}$; 3) $(-1+i)^{5}$; 4) $(\sqrt{3}+i)^{3}$

13. 1) $\sqrt[3]{-1}$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[6]{-1}$; 4) $\sqrt[3]{-2+2i}$ topilsin.

14. 1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[3]{1+i}$; 3) $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$; topilsin.

15. $x^3-4x^2-4x-5=0$ tenglamaning yechimlari

$$x_1+x_2+x_3;\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3;\quad x_1x_2x_3$$

ifodalarni tuzib, tekshirilsin.

16. 1) $x^3-5x^2-2x+24=0$; 2) $x^4+x^3+2x-4=0$;
3) $9x^3+18x^2-x-2=0$; 4) $4x^3-4x^2+x-1=0$.

17. Quyidagi tenglamalar Kardano formulasi bo‘yicha yechilsin:

1) $z^3-6z-9=0$; 2) $z^3-12z-16=0$.

18. 1) $z^3-12z-8=0$; 2) $z^3+6z-7=0$.

Mustahkamlash uchun savollar

1.Kompleks son deb nimaga aytiladi?
2. Kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasi formulasi qanday?
3. Kompleks sonlarning trigonometrik ko‘rinishi qanday?
4. Muavr formulasi qanday?
5. Eyler formulasi qanday?

11.FAZODA ANALITIK GEOMETRIYA

Fazoda asosiy masalalar va tekislik tenglamalari.

1. Fazoda ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo‘lish.
Fazoda ikki A va B nuqta berilgan bo‘lib, ularning koordinatlari mos ravishda $(x_1; y_1; z_1)$ va $(x_2; y_2; z_2)$ bo‘lsin. Bu $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani 73oppish formulasi:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1)$$

bo‘ladi.
Fazoda $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lib, ularni tutashtirish natijasida AB kesmani berilgan $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalari quyidagi

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (2)$$

formulalar bilan topiladi. Xususan, $C(x; y; z)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo‘lsa $(AC = CB)$, u holda $\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$ bo‘lib, izlanayotgan $C(x; y; z)$ nuqtaning x, y, z koordinatlari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \qquad (3)$$

bo‘ladi.

2. Fazoda tekislik tenglamalari.
1) $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{N}\{A; B; C\}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi.

$M(x; y; z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U holda $M_1M \perp \vec{N}$ va ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga ko‘ra

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (4)$$

2) Tekislikning umumiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (5)$$

$\vec{N}\{A; B; C\}$ vektor (4) yoki (5) tekislikka normal vektor deyiladi. $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamaning xususiy hollari:

I. $D = 0$ bo‘lganda, $Ax + By + Cz = 0$ - tekislik koordinatlar boshidan o‘tadi.

II. $C = 0$ bo‘lganda, $Ax + By + D = 0$ - tekislik Oz o‘qqa parallel.

III. $C = D = 0$ bo‘lganda, $Ax + By = 0$ - tekislik Oz o‘qdan o‘tadi.

IV. $B = C = 0$ bo‘lganda, $Ax + D = 0$ - tekislik yOz tekislikka parallel.

V. Koordinat tekisliklarining tenglamalari: $x = 0, y = 0$ va $z = 0$.

4) Tekislikning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalar bo‘yicha tenglamasi:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{6}$$

1-misol. $A(2;5;0)$, $B(5;1;12)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

Yechish. Bu nuqtalar orasidagi masofani (1) formuladan foydalanib topamiz:

$$AB=\sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2+(12-0)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=\sqrt{169}=13.$$

2-misol. M(2;-3;4) nukta orkali o‘tuvchi va $\vec{n}=\{1;-1;4\}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzing.

Yechish. Ma’lumki, berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuktadan o‘tib, berilgan $\vec{n}=\{A, B, C\}$ vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislikning tenglamasi

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ ko‘rinishga ega. Masala shartidan

$$x_1 = 2;\ y_1 = -3;\ z_1 = 4;$$

$$A = 1;\ B = -1;\ C = 4$$

bularni yuqoridagi tenglamaga qo‘yib, izlangan tekislik tenglamasini hosil kilamiz:

$$1(x-2)-1\cdot(y+3)+4(z-4)=0 \Rightarrow x-2-y3+4z-16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y+4z-21=0$$

3-misol. $2x+3y-5z-30=0$ tekislik berilgan. Bu tekislikning koordinat o‘qlari bilan kesishish nuqtalarining koordinatlarini toping.

Yechish. Tekislikning berilgan tenglamasini uning koordinat o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi ko‘rinishiga keltiramiz:

$$\frac{2x}{30}+\frac{3y}{30}-\frac{5z}{30}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{15}+\frac{y}{10}+\frac{z}{-6}=1.$$

Demak, tekislik Ox o‘qini (15;0;0) , Oy o‘qini (0;10;0) , Oz o‘qini (0;0;-6) nuqtalarda kesadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu tekisliklar yasalsin:

1) $5x-2y+3z-10=0$; 2) $3x+2y-z=0$;

3) $3x+2z=6$; 4) $2z-7=0$

2. $M_1(0;-1;3)$ va $M_2(1;3;5)$ nuqtalar berilgan. M_1 nuqtadan o‘tuvchi va $N=\overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamsi yozilsin.

3. $M_1(0;1;3)$ va $M_2(2;4;5)$ nuqtalardan o‘tuvchi va Ox o‘qqa parllel tekislik tenglmasi yozilsin va tekislik yasalsin.

4. 1) $2x+y-z+6=0$; 2) $x-y-z=0$; 3) $y-2z+8=0$;
4) $2x-5=0$; 5) $x+z=0$

tekisliklar yasalsin.

3. Tekislikka doir asosiy masalalar

1. Ikki tekislik orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \pm\frac{\vec{N}\vec{N}_1}{NN_1} = \pm\frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1} \qquad (1)$$

formuladan topiladi, bunda $\vec{N}$ va $\vec{N}_1$ mos ravishda $Ax + By + Cz + D = 0$ va $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ tekisliklarga normal vektorlar.

Parallellik sharti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \qquad (2)$$

Perpendikulyarlik sharti:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 \qquad (3)$$

2. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo‘lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N} \qquad (4)$$

3. Berilgan ikki tekislikning kesishgan chizig‘idan o‘tuvchi barcha tekisliklar dastasining tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \qquad (5)$$

$\alpha = 1$ deb olish mumkin, u holda (5) dastadan berilgan tekisliklardan ikkinchisini chiqarib tashlagan bo‘lamiz.

1-misol. $2x + y = 5,\ x + 3z = 16$ va $5y - z = 10$ tekisliklarning o‘zaro joylashishini aniqlang.

Yechish. Bu tekisliklarining kesishishi- kesishishmasligini aniqlash uchun quyidagi sistemaning yechimini topamiz:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

Sistemani yechish uchun quyidagi determinantlarni tuzamiz va ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -30 + 1 = -29$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87,\ \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-29}{-29}=1$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-87}{-29}=3$$

$$z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-145}{-29}=5$$

Demak, tekisliklar (1;3;5) nuqtada kesishadi.

2-misol. Berilgan $2x+3y-z+2=0$ va $x+y+5z-1=0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Yechish. Ikki tekislik orasidagi burchak formulasi

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_{22}}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

dan foydalanamiz. Berilishga ko‘ra:

$$A_1=2,\ B_1=3,\ \ C_1=-1\quad \text{va}\quad A_2=1,\ B_2=1,\ C_2=5$$

bularni yuqoridagi formulaga qo‘yamiz:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot1+3\cdot1-1\cdot5}{\sqrt{4+9+1}\sqrt{1+1+25}}=\frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{27}}=0\ \Rightarrow\cos\varphi=0:\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Demak, berilgan ikki tekislik o‘zaro perpendikulyar ekan.

3-misol. M(3;-2;1) nuqtadan 3x+6y-5z+2=0 tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

Yechish. Berilishiga ko‘ra:

$$x_0=3,\ y_0=-2,\ \ z_0=1;$$

$$A=3;\ \ B=6;\ \ C=-5;\ \ D=2.$$

Bularni (4) formulaga qo‘yamiz, u holda

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|9-12-5+2|}{\sqrt{70}}=\frac{6}{\sqrt{70}}.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

   1) $x-2y+2z-8=0;$ va $x+z-6=0$
   2) $x+2z-6=0;$ va $x+2y-4=0$.

2. $(2;2;-2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $x-2y-3z=0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi topilsin.

3. $(-1;-1;2)$ nuqtadan o‘tuvchi va $x-2y-3z=0$ hamda $x+2y-2z+4=0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

4. $M_1(-1;-2;0)$ va $M_2(1;1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi hamda $x+2y+2z-4=0$ tekislikka pependikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

5. A $(4;3;0)$ nuqtadan $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ va $M_3(3;0;1)$ nuqtalardan o‘tuvchi tekislikkacha bo‘lgan masofa topilsin.
6. $4x+3y-5z-8=0$ va $4x+3y-5z+12=0$ parallel teksiliklar orasidagi masofa topilsin.
Ko‘rsatma. Birinchi tekislikda ixtiyoriy, masalan $(2;0;0)$ nuqta olib, undan ikkinchi tekislikkacha bo‘lgan masofa topilsin.

Fazoda to‘g‘ri chiziq va uning tenglamalari

1.1) $A(a;b;c)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{P}\{m;n;p\}$ vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamalari. $N(x;y;z)$ - to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U holda $\overrightarrow{AN} \parallel \vec{P}$ va ikki vektorning parallellik shartiga ko‘ra:

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

(1) tenglamalar to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamalari deyiladi. $\vec{P}\{m;n;p\}$ vektor to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi.
2). (1) tenglamadagi har bir nisbatni t parametrga tenglab, to‘g‘ri chiziqning

$$\left.\begin{aligned} x&=mt+a,\\ y&=nt+b,\\ z&=pt+c \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ko‘rinishdagi parametrik tenglamalariga ega bo‘lamiz.
3). Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalari:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{3}$$

4). To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

5). (4) tenglamalardan bir marta y ni, ikkinchi marta x ni yo‘qotib, to‘g‘ri chiziqning proyeksiyalari bo‘yicha yozilgan tenglamalariga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{aligned} x&=mz+a,\\ y&=nz+b. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(5) tenglamalarni ushbu

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-0}{1}$$

kanonik ko‘rinishida yozish mumkin.

1-misol. $(1;4;3)$ nuqtadan o‘tgan va yo‘naltiruvchi vektori $\vec{P}\{2;3;1\}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
Yechish. (1) tenglamadan foydalanamiz. Masala shartiga ko‘ra:

$$a = 1;\ \ b = 4;\ \ c = 3;\quad m = 2;\ n = 3;\ \ p = 1.$$

U holda izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

2-misol. $A(-3;1;2)$ va $B(8;-2;5)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalarini tuzing.

Yechish. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi (3) ko‘rinishda bo‘lib, unga A, B nuqtalarning koordinatlarini qo‘ysak,

$$\frac{x+3}{8+3} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-2}{5-2} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+3}{11} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{3}$$

to‘g‘ri chiziq tenglamalariga ega bo‘lamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. 1) $\begin{cases} x = z+5 \\ y = 4-2z \end{cases}$ va 2) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ to‘g‘ri chiziqlarning xOy va xOz topilsin va to‘g‘ri chiziqlar yasalsin.

Ko‘rsatma: To‘g‘ri chiziqning tenglamalarida $1)\, z = 0;\quad 2)\, y = 0;$ deb faraz qilish kerak.

2. $\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z - 3 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{array}\right\}$ to‘g‘ri chiziq tenglamalarini:

1) proyeksiyalari bo‘yicha;

2) kanonik ko‘rinishda yozilsin.

To‘g‘ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari topilsin hamda to‘g‘ri chiziq va uning proyeksiyalari yasalsin.

3. 1) $\begin{cases} y = 3 \\ z = 2, \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2 \\ z = x+1, \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlar yasalsin va ularning yo‘lantiruvchi vektorlari aniqlansin.

4. $A(3;-1;4)$ va $B(1;1;2)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamalari yozilsin.

5. $\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases}$ va $\begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}$

to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

2. To‘g‘ri chiziq va tekislikka doir aralash masalalar

1). $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$ to‘g‘ri chiziq bilan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi burchak:

$$\sin\theta=\frac{\left|\vec{N}\cdot\vec{P}\right|}{NP}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{NP} \tag{6}$$

Ularning parallellik sharti $\left(\vec{N}\parallel\vec{P}\right)$:

$$Am+Bn+Cp=0. \tag{7}$$

Perpendikulyarlik sharti:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{8}$$

2). Tekislik bilan to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi. To‘g‘ri chiziq tenglamalarini $x=mt+a, y=nt+b, z=pt+c$ parametrik ko‘rinishda yozib, tekislikning $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasidagi $x;y;z$ larning o‘rniga ularning t ga nisbatan yozilgan qiymatlarini qo‘yamiz. Hosil bo‘lgan tenglamadan t_0 ni, so‘ngra kesishgan nuqta koordinatlari x_0, y_0, z_0 ni topamiz.

3). Ikki to‘g‘ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

1-misol. Berilgan $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$ to‘g‘ri chiziq va $2x+y-2z-6=0$ tekislik orasidagi burchakni va ularning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak (6) formula yordamida aniqlanadi. Shuning uchun berilgan $A=2; B=1; C=-2;\ m=1;\ n=2;\ p=-2$ larni bu formulaga qo‘yib topamiz:

$$\sin\theta=\frac{2\cdot1+1\cdot2+(-2)\cdot(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2^2)}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{8}{3\cdot3}=\frac{8}{9}.$$

Demak, $\theta=\arcsin\frac{8}{9}$.

Endi ularning kesishish nuqtasini topamiz, uning uchun to‘g‘ri chiziq tenglamasini parametrik ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}=t, \qquad \frac{x-1}{1}=t; \ \frac{y-1}{2}=t; \ \frac{z-1}{-2}=t,$$

$$\left.\begin{aligned} x&=t+1, \\ y&=2t+1, \\ z&=-2t+1 \end{aligned}\right\} \ (*)$$

Buni tekislik tenglamasiga qo‘yamiz:

$$2(t+1)+2(t+1)-2(-2t+1)-6=0;$$

$$2t+2+2t+1+4t-2-6=0;$$

$$8t+3-8=0;$$

$$8t=5; \qquad t=\frac{5}{8}.$$

t ning bu qiymatini $(*)$ ga qo‘ymiz:

$$x=\frac{5}{8}+1=\frac{13}{8}; \quad y=\frac{10}{8}+1=\frac{9}{4}; \qquad z=-\frac{10}{8}+1=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}.$$

Demak, berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi $\left(\frac{13}{8};\frac{9}{4};-\frac{1}{4}\right)$ dan iborat.

2-misol. $M(-1;3;0)$ nuqtadan o‘tib, $2x-y-2z-4=0$ tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o‘tib , $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka perpendikulyar to‘g‘ri chizik tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$ formula yordamida aniqlanadi.

Demak, $$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{-2}.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y=3x-1, \quad 2z=-3x+2$ to‘g‘ri chiziq bilan $2x+y+z-4=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.

2. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{3}$ to‘g‘ri chiziq $2x+y-z=0$ tekislikka paralel ekanligi, $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{3}$ to‘g‘ri chiziq esa shu tekislik ustida yotishi ko‘rsatilsin.

3. $(-1;2;-3)$ nuqtadan o‘tuvchi va $x=2, \ \ y-z=1$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

4. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{3}$ to‘g‘ri chiziqdan va $(3;4;0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.

5. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $2x+3y-z=4$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.
6. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi va $x+2y+3z-29=0$ tekislik bilan kesishgan nuqtasi topilsin.
7. $(3;1;-1)$ nuqtaning $x+2y+3-30=0$ tekislikdagi proyeksiyasi topilsin.

Matematik tahlil (analiz) ga kirish. To‘plamlar nazariyasi

1. To‘plamlar va ular ustida amallar. To‘plam tushunchasi matematikaning boshlang‘ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri bo‘lib, u misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, shkafdagi kitoblar, barcha to‘g‘ri kasrlar, berilgan nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plami haqida gapirish mumkin.

To‘plamni tashkil etgan narsalar (predmetlar) uning elementlari deb ataladi.

Chekli sondagi elementlardan tashkil topgan to‘plam chekli to‘plam deb ataladi.

Matematikada ko‘pincha chekli bo‘lmagan to‘lamni-cheksiz to‘plamlarni qarashga to‘g‘ri keladi. Masalan, barcha to‘g‘ri kasrlar, barcha natural sonlar cheksiz to‘plamlarga misol bo‘ladi.

Ikkita A va B to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, A to‘plam B to‘plamning qismi yoki qismiy to‘plami deb ataladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

1-ta’rif. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, u holda A va B to‘plamlar bir – biriga teng to‘plamlar deb ataladi va $A = B$ kabi yoziladi.

2-ta’rif. A va B to‘plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan to‘plam A va B to‘plamlarning yig‘indisi (birlashmasi) deb ataladi va $A \cup B$ kabi yoziladi.

3-ta’rif. A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plam A va B to‘plamlar ko‘paytmasi (kesishmasi) deb ataladi va $A \cap B$ kabi yoziladi.

4- ta’rif. A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan tuzilgan to‘plam A to‘plamdan B to‘plamning ayirmasi deb ataladi va $A \setminus B$ kabi yoziladi.

5- ta’rif. A to‘plamning B to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan va B to‘plamning A to‘plamga tegishli bo‘lmagan elementlaridan tuzilgan to‘plam A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deb ataladi va $A\Delta B$ kabi yoziladi.

6- ta’rif. Birinchi elementi A to‘plamdan, ikkinchi elementi B to‘plamdan olingan (a,b) $(a \in A,\ b \in B)$ ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan to‘plamga A va B to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi yoki to‘g‘ri ko‘paytmasi deb ataladi va $A \times B$ kabi yoziladi.

1-misol. $A = \{1,2,3\},\ \ B = \{2,4\}$ bo‘lsin. U holda

$$A \cup B = \{1,2,3,4\},\ A \cap B = \{2\};$$

$$A \setminus B = \{1,3\},\ \ B \setminus A = \{4\},\ A\Delta B = \{1,3,4\};$$

$$A \times B = \{(1,2),\ (1,4),\ (2,2),\ (2,4),\ (3,2),\ \ (3,4)\}$$

bo‘ladi.

To‘plam tushunchasi yanada yorqinroq bo‘lishi uchun shuni aytib o‘tish kerakki, to‘plamda bir xil (bir-biridan farq qilib bo‘lmaydigan) elementlar bo‘lmaydi. Masalan,

$$(x-1)^2(x+1)^3 = 0$$

tenglamaning barcha ildizlari to‘plami $1,1,-1,-1,-1$ elementlardan iborat bo‘lmasdan, balki 1 va -1 elementlardan iborat.

Bundan buyon qulaylik uchun bo‘sh to‘plam tushunchasini kiritamiz: agar to‘plamning birorta ham elementi bo‘lmasa, bunday to‘plam bo‘sh to‘plam deyiladi.

Odatda chekli va cheksiz to‘plamlarni bir-biridan farq qiladilar. Elementlarining soni chekli bo‘lgan to‘plam chekli to‘plam deyiladi. Matematikada ko‘pincha cheksiz to‘plamlar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Umuman, cheksiz to‘plam deyilganda shunday to‘plamni ko‘zda tutish kerakki, bu to‘plamdan bitta, ikkita va hokazo elementlarni olganda unda yana elementlar qolaveradi. Masalan, natural sonlar to‘plami, barcha toq sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqdagi hamma nuqtalar to‘plami, hamma uzluksiz funksiyalar to‘plami – bularning har biri cheksiz to‘plamdir.

Agar A va B to‘plamlar chekli to‘plamlar bo‘lsa, u holda ularning elementlarini bevosita sanash bilan elementlar soni bir-biriga tengligini yoki A to‘plamning elementlari B to‘plamning elementlari sonidan ko‘p yoki kam ekanini aniqlash mumkin.

Agar A va B to‘plamlar cheksiz to‘plamlar bo‘lsa, unda bu to‘plamlarning elementlarini, ravshanki, sanash yo‘li bilan taqqoslab bo‘lmaydi. Ammo to‘plamlarni ularning elementlarini bir-biriga mos qo‘yish yo‘li bilan taqqoslash mumkin.

7-ta’rif. Agar A va B to‘plam elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, ular bir-biriga ekvivalent to‘plamlar deb ataladi.

8-ta’rif. Natural sonlar to‘plami N ga ekvivalent bo‘lgan har qanday to‘plam sanoqli to‘plam deb ataladi.

A to‘plamga ekvivalent bo‘lgan to‘plamlar sinfi $\overline{\overline{A}}$ bilan belgilanadi va $\overline{\overline{A}}$ ni A to‘plamning quvvati yoki kardinal soni deb ataladi. Chekli to‘plamning quvvati (kardinal soni) sifatida odatda bu to‘plam elementlarining soni olinadi.

9-ta’rif. Quvvatlari α va β bo‘lgan A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin:

$$\overline{\overline{A}}=\alpha,\ \overline{\overline{B}}=\beta.$$

Agar A va B to‘plamlar ekvivalent bo‘lmasa va B to‘plamda A to‘plamga ekvivalent B' qism mavjud bo‘lsa, B to‘plamning quvvati A ning quvvatidan katta, A to‘plamning quvvati esa B to‘plamning quvvatidan kichik deyiladi va $\beta>\alpha$ yoki $\alpha<\beta$ shaklda yoziladi.

Odatda, elementlari haqiqiy sonlardan iborat bo‘lgan to‘plam sonli to‘plam deyiladi.Sonli to‘plamlarga misollar keltiramiz.

$$F_1=\left\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},...\right\} \qquad F_2=\left\{x: x\in R,\ \ x^3-x=0\right\}$$

Ikki $a\in R,\ b\in R$ son berilgan bo‘lib , $a<b$ bo‘lsin . Ushbu $\{x: x\in R, a\le x\le b\}$ to‘plam segment deb ataladi va u $[a,b]$ kabi belgilanadi:

$$[a,b]=\{x: x\in R, a\le x\le b\}$$

bunda a va b sonlar $[a,b]$ segmentning chegaraviy nuqtalari yoki chegaralari deyiladi. Ushbu $\{x: x\in R, a<x<b\}$ to‘plam interval deyiladi va u (a,b) kabi belgilanadi

$$(a,b)=\{x: x\in R, a<x<b\}$$

Quyidagi $\{x: x\in R, a\le x<b\},\{x: x\in R, a<x\le b\}$ to‘plamlar yarim segment deyiladi va ular mos ravishda $[a,b)$ va $(a,b]$ kabi belgilanadi. x element X to‘plamga tegishli bo‘lsa, $x\in X$ deb belgilanadi, aks holda $x\notin X$ yoziladi.

$\{x \in X / P(x)\}$ belgi P xossaga ega bo‘lgan $x \in X$ lar to‘plamini bildiradi. Bo‘sh to‘plamni $\varnothing = \{x \in \varnothing / x \neq x\}$ deb yozish mumkin.

1-misol. Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan to‘plamlar elementlarini aniqlang.

1) $A = \{x \in N \mid x \leq 5\}$; 2) $B = \{x \in N \mid x \leq 0\}$; 3) $C = \{x \in Z \mid |x| \leq 2\}$

Yechish. 1) To‘plam 5 dan kichik va teng bo‘lgan natural sonlardan iboratligini bildiradi, ya’ni $A = \{1,2,3,4,5\}$.

2) manfiy natural son yo‘q shuning uchun $B = \varnothing$;

3) bu holda $|x| \leq 2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi faqat butun sonlar olinadi, bu $[-2;\ 2]$ kesmada bo‘ladi. Shunday qilib, $C = \{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Qavariq to‘plam. 1-ta’rif. Istalgan ikki nuqta shu to‘plamga tegishli bo‘lganda, bu nuqtalarni tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq kesmasi ham shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, bunday to‘plamga ***qavariq to‘plam*** deyiladi.

Nuqtaning atrofi. 2-ta’rif. r biror musbat son bo‘lsin. $M_0 \in R^n$ fazoning nuqtasi uchun $p(M,\ M_0) < r$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma $M \in R^n$ nuqtalar to‘plamiga M_0 ***nuqtaning*** r-***atrofi*** deyiladi va $S_r(M_0)$ bilan belgilanadi, ya’ni

$$S_r(M_0) = \{M \in R^n \mid \rho(M,\ M_0) < r\}.$$

Masalan, $M_1(2;\ 3;\ -1;\ 3) \in S_2(M_0), M_0(1;\ 2;\ -1;\ 2)$ nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli, chunki

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{3}$$

bo‘lib, $\sqrt{3} < 2$ bo‘ladi. $M_2(3;\ 3;\ -1;\ 3)$ nuqta $S_2(M_0)$ atrofga tegishli emas, chunki $\rho(M_2,\ M_0) = \sqrt{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (-1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6}$ bo‘lib, $\sqrt{6} > 2$ bo‘ladi.

R^1(sonlar o‘qi) fazoda $M_0(a)$ nuqtaning r atrofi $(a-r,\ a+r)$ intervaldan iborat.

R^2(tekislik) fazoda $M_0(a,b)$nuqtaning r atrofi, radiusi r, markazi $M_0(a,b)$ nuqtada bo‘lgan doiraning ichki nuqtalaridan iborat bo‘ladi. R^3 fazoda esa, $M_0(a,b,c)$ nuqtaning r atrofi, radiusi, r, markazi. $M_0(a,b,c)$ nuqtada bo‘lgan sharning ichki qismidan iborat bo‘ladi.

To‘plamning chegaralanganligi. 3-ta’rif. R^n fazoning V to‘plamning istalgan $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in V$ nuqtasi uchun shunday $A > 0$ son mavjud bo‘lib,

$$|x_1| \leq A, \quad |x_2| \leq A, ..., |x_n| \leq A$$

munosabatlar bajarilsa, V to‘plamga ***chegaralangan to‘plam*** deyiladi. Masalan, n o‘lchovli fazoda istalgan nuqtaning r atrofi chegaralangan to‘plamdir.

To‘plamning ichki va chegaraviy nuqtalari. 4-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta V to‘plamga o‘zining biror r atrofi bilan kirsa, unga V ***to‘plamning ichki nuqtasi*** deyiladi .

5-ta’rif. $M_0 \in V$ nuqta o‘zining har bir atrofida V to‘plamga tegishli bo‘lgan hamda tegishli bo‘lmagan nuqtalar bilan kirsa, M_0 nuqtaga V to‘plamning ***chegaraviy nuqtasi*** deyiladi .

To‘plamning quyuqlanish nuqtasi. 6-ta’rif. M_0 nuqtaning ixtiyoriy atrofi V to‘plamning M_0 nuqtadan farqli cheksiz ko‘p nuqtalari (M_0 nuqtadan farqli)ni o‘z ichiga olsa, M_0 nuqta V to‘plamning ***quyuqlanish nuqtasi*** deyiladi. Quyuqlanish nuqtasi to‘plamning o‘ziga qarashli bo‘lishi ham, qarashli bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $V = [a,b]$ yoki $V = (a,b]$ bo‘lsa, ikkala holda ham a nuqta V uchun quyuqlanish nuqtasi bo‘ladi, lekin birinchi holda bu nuqta V to‘plamda yotadi, ikkinchi holda esa u V to‘plamda yotmaydi.

Yopiq va ochiq to‘plamlar. 7-ta’rif. V to‘plam o‘zining hamma quyuqlanish nuqtalarini o‘zida saqlasa, unga ***yopiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, $[a,b]$ *кесма* R^1 sonlar o‘qida, $\{M(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ R^2 doira tekislikda yopiq to‘plamlardir.

8-ta’rif. V to‘plamning hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo‘lsa, bunday to‘plamga ***ochiq to‘plam*** deyiladi. Masalan, (a,b) R^1 da, $\{M(x,y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ R^2 da ochiq to‘plamlardir. R^n fazoda istalgan nuqtaning r atrofi ochiq to‘plamdir.

R^n fazoda chegaralangan yopiq to‘plamga ***kompakt*** deb ataladi.

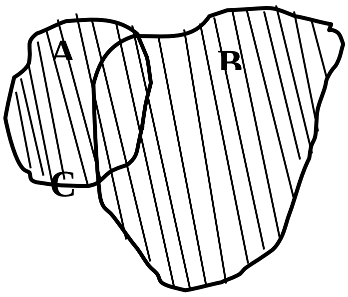
2. To‘plamlar ustida amallar. B to‘plamning har bir elementi A to‘plamning ham elementi bo‘lsa, B to‘plamga A to‘plamning ***qism to‘plami*** deyiladi va $B \subset A$ yoki $A \supset B$ bilan belgilanadi. $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi va $A = B$ bilan belgilanadi.

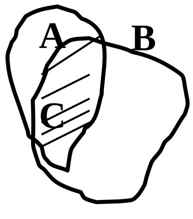
1) A va B ***to‘plamlarning birlashmasi*** **(yig‘indisi)** deb uchinchi bir C to‘plamga aytiladiki, bu to‘plamning istalgan elementi A yoki to‘plamga tegishlai bo‘ladi va bilan belgilanadi, ya’ni

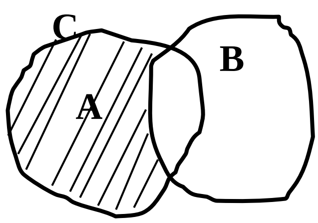
$$C = A \cup B = \{x \mid \ x \in A \quad \text{ёки} \quad x \in B\}$$ (1 -chizma).

2) A va B ***to‘plamlarning kesishmasi*** **(ko‘paytmasi)** deb, uchunchi bir C to‘plamga aytiladiki, uning har bir elementi A to‘plamga ham, B to‘plamga ham tegishli bo‘ladi va $A \cap B$ bilan belgilanadi, ya’ni $C = A \cap B = \{x \mid \ x \in A \quad \text{ва} \quad x \in B\}$ (2 -chizma).

3) A to‘plamdan B to‘plamning **farqi (ayirmasi)** deb shunday uchinchi bir C to‘plamga aytiladiki, uning har bir elementi A ga tegishli bo‘lsa, B ga tegishli bo‘lmaydi, va uni $A / B = \{x \mid \ x \in A \quad \text{ва} \quad x \notin B\}$ (3-chizma).







1-chizma 2-chizma 3-chizma

2-misol. $A=\{1,\ 2\}$ to‘plamning hamma qism to‘plamlaridan iborat bo‘lgan B to‘plamni tuzing.

Yechish. Qism to‘plam ta’rifiga asosan, $\varnothing\in A,\quad \{1\}\in A,\quad \{2\}\in A,\quad \{1,\ 2\}\in A$, Demak, $B=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,\ 2\}\}$.

3-misol. $A=(4,\ 8)$ va $B=(1,\ 4]$ bo‘lsa, ularning birlashmasini va kesishmasini toping.

Yechish. Birlashmaning ta’rifidan $A\cup B=(1,8)$ bo‘lib kesishmaning ta’rifidan $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ bo‘ladi.

4-misol. $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 2 & -7 & -5 \end{vmatrix}$ va $B[5,\ 6]$ bo‘lsa, ularning birlashmasi va kesishmasini toping.

Yechish. Ta’rifga asosan $A\cup B=(-3,\ 7],\qquad A\cap B=[5,6]$ bo‘ladi.

5- m i s o l. Ushbu

$$A=\{1,2,3,4,5,6\},\quad B=\{2,4,6,8\},\ C=\{1,3\}$$

to‘plamlarni qaraylik. Bu to‘plamlar uchun

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8\},$$
$$A\cap B=\{2,4,6\},$$
$$A\setminus B=\{1,3,5\},$$
$$B\setminus A=\{8\},$$
$$A\cup C=\{1,2,3,4,5,6\},$$
$$A\cap C=\{1,3\},$$
$$B\cap C=\varnothing,$$
$$B\times C=\{(2,1),(2,3),(4,1),(4,3),(6,3)(8,1),(8,3)\}.$$

bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan ta’riflardan

$$E\cup E=E,\ \ E\cap E=E,\ \ E\setminus E=\varnothing,$$

shuningdek $E\subset F$ bo‘lganda

$$E\cup F=F,\ \ E\cap F=E$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

Barcha 1, 2, 3, …., n, … - natural sonlardan iborat to‘plam natural sonlar to‘plami deyiladi va u N harfi bilan belgilanadi:

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ldots,\ n,\ldots\}.$$

Barcha …, -2, -1, 0, 1, 2, … - butun sonlardan iborat to‘plam ***butun sonlar to‘plami*** deyiladi va u Z harfi bilan belgilanadi:

$$Z=\{\ldots,-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ 2,\ldots\}$$

Ravshanki,

$$N\subset Z$$

bo‘ladi.

2. **Funksiya tushunchasi**.

X va U lar haqiqiy sonlarning biror to‘plamlari bo‘lib, x va y o‘zgaruvchilar mos ravishda shu to‘plamlarda o‘zgarsin:
$x \in X, y \in Y$
Agar X to‘plamdagi har bir x songa biror f qoidaga ko‘ra U to‘plamdan bitta y son mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda funksiya berilgan deb ataladi.
Bazan funksiya X to‘plamda berilgan deyish o‘rniga funksiya X to‘plamda aniqlangan deb ham yuritiladi. Funksiya $f: x \to y$ yoki $y = f(x)$ kabi belgilanadi. Bunda X funksiyaning aniqlanish to‘plami (sohasi), U esa funksiyaning o‘zgarish to‘plami (sohasi) deb ataladi. x erkli o‘zgaruvchi yoki funksiyaning argumenti, y erksiz o‘zgaruvchi yoki x o‘zgaruvchining funksiyasi deyiladi.
Oxy tekislikning $y = f(x)$ munosabatni qanoatlantiruvchi $M(x, y)$ nuqtalari to‘plami $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyiladi.
3. Agar $y = f(x)$ funksiya $D(f)$ sohani $E(f)$ sohaga o‘zaro bir qiymatli akslantirsa, u holda x ni y orqali bir qiymatli ifodalash mumkin
$x = \varphi(y)$.
Hosil bo‘lgan funksiya $y = f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi.
$y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$ funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalardir. $x = \varphi(y)$ teskari funksiyani, odatda, x va y larning o‘rinlarini almashtirish bilan standart ko‘rinishda yoziladi $y = \varphi(x)$.
O‘zaro teskari $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalarning grafiklari birinchi va uchinchi koordinata choraklarining bissektrisasiga nisbatan simmetrik. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $y = \varphi(x)$ teskari funksiyaning qiymatlari sohasi bo‘ladi.
$u = \varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi D, qiymatlar sohasi E bo‘lsin, $y = f(u)$ funksiyaning aniqlanish sohasi E bo‘lib, o‘zgarish sohasi I bo‘lsin, u holda $y = f(\varphi(x))$ funksiyaning aniqlanish sohasi D va o‘zgarish sohasi I bo‘lgan murakkab funksiya yoki f va φ funksiyalarning kompozitsiyasi deyiladi.
u o‘zgaruvchi oraliq o‘zgaruvchi deyiladi. $y = f(x)$ ko‘rinishidagi funksiya oshkor funksiya deyiladi. $F(x, y) = 0$ ko‘rinishdagi tenglama ham, umuman aytganda x va y o‘zgaruvchilar orasidagi funksional bog‘lanshni beradi. Bu holda ta’rifga ko‘ra y o‘zgaruvchi x ning oshkormas funksiyasi bo‘ladi. Aniqlanish sohasi $D(f)$ koordinatlar boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan $f(x)$ funksiya x ning har qanday $x \in D(f)$ qiymati uchun $f(-x) = f(x)$ (yoki $f(-x) = -f(x)$) munosabat bajarilsa, juft (yoki toq) funksiya deyiladi.
Juft funksiya grafigi ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik, toq funksiya grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir.

Agar $T > 0$ o‘zgarmas son mavjud bo‘lib, har bir $x \in D(f)$ va $(x+T) \in D(f)$ da $f(x+T) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $f(x)$ funksiya davriy funksiya deyiladi.
Funksiyaning aniqlanish sohasini topish uchun elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarini bilish zarur:
1. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ - butun ratsional funksiya $D(y) = R$;

2. $y=\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ - kasr ratsional funksiya $D(y)=R\setminus\{x:Q(x)=0\}$;

3. $y=\log_a x \quad (0<a\neq 1)$ - logarifmik funksiya - $D(y)=R_+=[0,+\infty)$;

4. $y=a^x \quad (0<a\neq 1)$ - ko‘rsatkichli funksiya $D(y)=R$;

5. $y=x^\mu \quad (\mu\in R)$ - darajali funksiya : $\mu\in N$ bo‘lsa, $D(y)=R; -\mu\in R$ bo‘lsa, $D(y)=R\setminus\{x=0\}=\{x\in R: x\neq 0\}$; $\mu=\dfrac{s}{r}$ bo‘lib, r toq bo‘lsa, s ning musbat yoki manfiyligiga qarab $D(y)=R$ yoki $D(y)=\{x\in R: x\neq 0\}$ bo‘ladi. r juft bo‘lsa, $D(y)=(0,+\infty)$.

6. Trigonometrik funksiyalar:

$$y=\sin x: \quad D(y)=R; \quad y=\cos x: \quad D(y)=R;$$

$$y=tgx: \ D(y)=\{x\in R: x\neq (2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in Z\};$$

$$y=ctgx: \ D(y)=\{x\in R: x\neq \pi k,\ k\in Z\};$$

7. Teskari trigonometrik funksiyalar:

$$y=\arcsin x: \quad D(y)=[-1,1]; \qquad y=\arccos x: \ D(y)=[-1,1];$$

$$y=arctgx: \quad D(y)=R; \qquad y=arcctgx: \ D(y)=R;$$

Bundan tashqari

$$D(f+g)=D(f)+D(g), \qquad D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$$

$$D(\frac{f}{g})=\{D(f)\cdot D(g)\}\setminus\{x\in R:\ g(x)=0\}$$

qoidalardan foydalanish kerak. Funksiyaning aniqlanish sohasini son o‘qida tasvirlash maqsadga muvofiqdir.

1-misol. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $y=\sqrt{x+1}$

Yechish: bu funksiya x ning $x+1\geq 0$, bo‘lgan barcha qiymatlarida haqiqiy va chekli.

Bundan $x\geq -1$ kelib chiqadi. Demak, $D(y)=[-1;+\infty)$

2-misol. Quyidagi funksiyaning aniqlanish sohasini toping: $y=\lg(\sin\dfrac{\pi}{x})$,

Yechish: $D(\lg x)=(0;+\infty)$ bo‘lgani uchun $\sin\dfrac{\pi}{x}>0$ bo‘lishi kerak.

Malumki, $2\pi k<\alpha<(2k+1)\pi$, $k\in Z$ bo‘lganda $\sin\alpha>0$ bo‘ladi. Demak,

$$2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi,\ k\in Z,$$

$$2k<\frac{1}{x}<2k+1, \qquad \frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k},\ k\in Z$$

Shunday kilib, $D(y)=\left\{x:\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2\pi},k\in Z\right\}$.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping

$a)\ y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}};\qquad b)\ y=\arcsin\dfrac{x-2}{2};$

$d)\ y=\dfrac{1}{\lg(4-x^2)};\qquad e)\ y=\sqrt{25-x^2}+\lg\sin x$

2. $a)\ y=\sqrt{x+2};\quad b)\ y=\arccos\dfrac{x-1}{2};\quad d)\ y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x};$

Quyidagi funksiyalarning o‘zgarish sohasini toping

1. $a)\ y=\sqrt{x-3};\quad b)\ y=\arccos\dfrac{x-1}{2};\quad d)\ y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x};$

2. $a)\ y=\sqrt{x+2};\quad b)\ y=\sqrt{9-x^2};\quad d)\ y=\sqrt{4x-x^2};$

Quyidagi funksiyalarning eng kichik musbat davrini toping.

$a)\ y=\sin 5x;\quad b)\ y=\lg\cos 2x;\ c)\ y=tg3x+\cos 4x.$

Quyidagi funksiyalarning juft yoki toq funksiya ekanini aniqlang:

$a)\ y=x^4\sin 3x;\ b)\ y=x^4-x^2+x;\ d)\ y=\lg\cos x.$

$a)\ y=\ln\dfrac{1-x}{1+x};\quad b)\ y=2^x+2^{-x};\quad c)\ y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}).$

Sonlar ketma-ketligi.

1. 1-ta'rif. Natural sonlar qatoridagi

$$1,2,3,\ \dots,\ n, \dots$$

har bir n songa haqiqiy x_n son mos qo'yilgan bo'lsa,

$$x_{1,} x_2\ , \dots ,\ x_n\ , \dots \tag{1}$$

(1) haqiqiy sonlar to'plamiga sonli ketma-ketlik yoki qisqacha ketma-ketlik deyiladi.

$x_{1,} x_2\ , \dots ,\ x_n\ , \dots$ sonlarga sonli ketma-ketlikning hadlari deyilib, x_n ga ketma – ketlikning umumiy hadi yoki n – hadi deb ataladi, (1) sonli ketma-ketlikni qisqacha $\{x_n\}$ simvol bilan belgilanadi. Masalan, 1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n}\dots.$$

bo'ladi;

2) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ sonlar ketma-ketligi $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots.$ bo'ladi.

Sonli ketma-ketlikning umumiy hadini olish usuli ko'rsatilgan bo'lsa, u berilgan deyiladi. Misol uchun, 1) $x_n = 2+(-1)^n$ bo'lsa, u 1, 3, 1, 3, 1, 3, ..., 1, 3, ... ;

3) $\frac{2}{3}$ kasrni o'nli kasrga aylantirganda verguldan keyin bitta, ikkita, uchta va hokazo raqamlarni olib,

$$x_1 = 0,6,\ x_2 = 0,66,\quad x_3 = 0,666, \dots$$

sonlar ketma-ketligini olish mumkin;

4) $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\dots,\ a_1+(n-1)d,\ \dots$

arifmetik progressiya ham sonli ketma-ketlikdir, bunda a_1 birinchi had, d arifmetik progressiya ayirmasi;

4) $b_1, b_1q, b_1q^2,\dots, b_1\, q^{n-1},\dots$

sonlar ketma-ketligi ham ketma-ketlikka misol bo'ladi, bu birinchi hadi b_1 maxraji q bo'lgan geometrik progressiyadir.

2.**Sonli ketma-ketliklar ustida ushbu arifmetik amallarini bajarish mumkin:** 1) $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligini songa ko'paytirish,

$$m x_1,\ m x_2,\ m x_3,\dots,m x_n,\dots.$$

ko'rinishda bo'ladi;

2) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining yig'indisi

$$x_1+y_1,\ \ x_2+y_2,\dots,x_n+y_n,\dots;$$

ko'rinishda aniqlanadi;

3) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketiligini ayirmasi

$$x_1 - y_1,\ x_2 - y_2, ..., x_n - y_n, ...$$
ko‘rinishda bo‘ladi;

4) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligi ko‘paytmasi

$$x_1 \cdot y_1,\ x_2 \cdot y_2, ..., x_n \cdot y_n, ...;$$
kabi aniqlanadi;

5) ikkita $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ sonlar ketma-ketligining nisbati, maxraj 0 dan farqli bo‘lganda,

$$\frac{x_1}{y_1},\ \frac{x_2}{y_2}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...$$
ko‘rinishda bo‘ladi hamda mos ravishda $\{mx_n\}$, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$, $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ simvollar bilan belgilanadi.

3. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar. 1-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma – ketligi uchun shunday M (m son) son mavjud bo‘lib, ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $x_n \le M\ (x_n \ge m)$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

2-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi quyidan va yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, ya’ni shunday m va M sonlar mavjud bo‘lib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning istalgan elementi uchun $m \le x_n \le M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan deyiladi.

3-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi uchun shunday A musbat son mavjud bo‘lib, x_n element mavjud bo‘lib, $|x_n| > A$ (ya’ni $x_n > A$ yoki $x_n < -A$) tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan deyiladi.

Misollar:

1) 1, 2, 3, ..., n, ... sonlar ketma-ketligi quyidan chegaralangan, lekin yuqoridan chegaralangan;

2) -1, -2, -3, ..., -n, ... sonlar ketma-ketligi yuqoridan chegaralangan;

3) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$,... sonlar ketma-ketligi chegaralangan, chunki uning hamma elementlari uchun $0 \le x_n \le 1$ tengsizlik bajariladi, bunda $m = 0$ $M = 1$ bo‘ladi;

4) -1, 2, -3, 4, -5, ..., $-(-1)^n n$,... sonlar ketma-ketligi chegaralanmagan, chunki qanday A son olmaylikki, bu ketma-ketlik ichida $|x_n| > A$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi elementlari mavjud bo‘ladi.

4.Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar hamda ularning xossalari

1-ta’rif. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi istalgan A son uchun, shunday N raqam mavjud bo‘lib, hamma $n > N$ lar uchun $|x_n| > A$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz katta ketma-ketlik deyiladi.

$\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik chegaralanmagan bo‘ladi.

2-ta’rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N raqam mavjud bo‘lib,

$n > N$ lar uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonlar ketma-ketligi deyiladi.

Misollar:

1) natural sonlar ketma-ketligi $\{n\}$ cheksiz katta ketma-ketlikdir;

2) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sonlar ketma-ketligi cheksiz kichikdir, haqiqatan ham, istalgan $\varepsilon > 0$ son olsak, $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ dan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ bo‘lib, N uchun $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ($\frac{1}{\varepsilon}$ butun qismi) olib, hamma $n > N$ lar uchun $\frac{1}{n} = |x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. 2-ta’rifga asosan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi. Cheksiz kichik va cheksiz katta ketma-ketliklar orasida ushbu bog‘liqlik bor.

1-teorema. $\{x_n\}$ cheksiz katta ketma-ketlik va uning hamma elementlari 0 dan farqli bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik va aksincha $\{\alpha_n\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik va $\alpha_n \neq 0$ bo‘lsa, $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo‘ladi.

5.**Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega.**

2-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklarning algebraik yig‘indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Natija. Istalgan chekli sondagi cheksiz kichiklarning algebraik yig‘indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlikdir.

3-teorema. Ikkita cheksiz kichik ketma-ketlikning ko‘paytmasi, cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Natija. Istalgan sondagi cheksiz kichiklarning ko‘paytmasi yana cheksiz kichik bo‘ladi.

Eslatma. Ikkita cheksiz kichiklarning nisbati cheksiz kichik bo‘lmasligi mumkin, masalan, $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ cheksiz kichiklarning nisbati hamma elementlari 1 lardan iborat chegaralanlan ketma-ketlikdir. $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2}$ cheksiz kichik ketma-ketliklarning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \{n\}$ bo‘lib, cheksiz katta ketma-ketlik hosil bo‘ladi. $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$, $\beta_n = \frac{1}{n}$ bo‘lsa, ularning nisbati $\left\{\frac{\alpha_n}{\beta_n}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik bo‘ladi.

4-teorema. Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi. (Bu teoremaning isbotini o‘quvchiga havola qilamiz).

6. Sonli ketma-ketlikning limiti va uning xossalari

1-ta’rif. Istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun unga bog‘liq bo‘lgan N son topilsaki, barcha $n > N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning $n \to \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad ёки \quad n \to \infty \ да \ x_n \to a$$

simvollar bilan belgilanadi. Chekli limitga ega sonli sonli ketma-ketlikka, yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Limitning ta’rifiga misol qaraymiz.

Limitning ta’rifidan foydalanib,

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ ekanligini ko‘rsatamiz. Istalgan $\varepsilon > 0$ son olamiz.

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

bo‘lganligi uchun, $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n larning qiymatini topish, $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$ tengsizlik bilan bog‘liq va $1 < \varepsilon(n+1)$ *ёки* $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ bo‘ladi. Shuning uchun N sifatida $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ sonning butun qismini olish mumkin, ya’ni $N = \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ bo‘ladi. Bu holda $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizlik hamma $n > N$ lar uchun bajariladi. Masalan, $\varepsilon = 0{,}1$ bo‘lsin, bu holda

$$N = \left[\frac{1-0{,}1}{0{,}1}\right] = \left[\frac{0{,}9}{0{,}1}\right] = 9. \qquad n = 10 > N = 9$$

bo‘lsin. Bunda

$$x_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}$$

bo‘lib,

$$|x_{10} - 1| = \left|\frac{10}{11} - 1\right| = \frac{1}{11} < \varepsilon = 0{,}1.$$

Shunday qilib n=10 dan boshlab, hamma n lar uchun $|x_{10} - 1| < 0{,}1$ tengsizlik bajariladi.

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Boshqa bir necha $\varepsilon > 0$ lar olib, qaysi raqamlardan boshlab, tengsizlikning bajarilishini ko‘rsatishni o‘quvchiga havola etamiz.

Eslatma 1. $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi biror a limitga ega bo‘lsa, uni $\alpha_n = x_n - a$ cheksiz kichik miqdor ko‘rinishida ifodalash mumkin, chunki $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N topiladiki, $n > N$ lar uchun

$$|\alpha_n| = |x_n - a| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Shuning uchun a limitga ega bo‘lgan $\{x_n\}$sonlar ketma-ketligini

$$x_n - a = \alpha_n$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda α_n cheksiz kichik ketma-ketlik.

2-ta’rif. $\varepsilon > 0$ biror musbat son bo‘lsin. $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik hamma n lar uchun bajarilsa, $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi a nuqtaning ε atrofida deyiladi.

2-eslatma. Ma’lumki $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizligi

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \text{ yoki } a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

tengsizlik bilan teng kuchli bo‘lib, x_n element a nuqtaning ε atrofida bo‘ladi. Shuning uchun, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limitini quyidagicha ham ta’riflash mumkin:- a nuqtaning ε atrofi uchun shunday N raqamni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, hamma $n > N$ lardan boshlab, hamma x_n elementlar a nuqtaning ε atrofida bo‘lsa, a songa $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi.

3-eslatma. Ma’lumki cheksiz katta ketma-ketlik limitga ega emas yoki uni cheksiz limitga ega deyiladi va

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

bilan belgilanadi. Ketma-ketlikning limitini cheksiz limitdan farq qilishi uchun chekli limit ham deb yuritiladi.

Eslatma. Tushunarliki, har bir cheksiz kichik ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $a = 0$ ga teng.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti yagonadir.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

Eslatma. Chegaralangan ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lmasligi mumkin. Masalan,

$$-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$$

ketma-ketlik, chegaralangan, lekin limitga ega emas.

3. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning algebraik yig‘indisi ham yaqinlashuvchi bo‘lib, $a \pm b$ limitga ega bo‘ladi.
4. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning ko‘paytmasi ham yaqinlashuvchi bo‘lib, limiti $a \cdot b$ ga teng bo‘ladi.

5. $\{x_n\}$va $\{y_n\}$ soli ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, mos ravishda a va b limitlarga ega bo‘lsa, ularning nisbati ham maxrajning limiti noldan farqli bo‘lganda, yaqinlashuvchi bo‘lib, uning limiti $\frac{a}{b}$ ga teng bo‘ladi.

1-misol. Ushbu limitni hisoblang.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2-5}$$

Yechish. $n\to\infty$ surat ham maxraj ham cheksiz katta bo‘lib, nisbatning limiti haqidagi xossani qullash mumkin emas, chunki bu xossada surat va maxrajning limiti mavjud bo‘lishi kerak edi. Shuning uchun, bu ketma-ketliklarni n^2 ga bo‘lib, shaklini o‘zgartiramiz hamda limitlarning xossalarini qo‘llab, ushbuni hosil qilamiz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{4n^2-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(4-\frac{5}{n^2})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{3+0-0}{4-0}=\frac{3}{4}.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Sonli ketma – ketlikning umumiy hadi nima?
3. Sonlar ketma – ketligi qanday belgilanadi?
4. Sonli ketma – ketlik qachon berilgan deyiladi?
5. Arifmetik va geometrik progressiyalar sonli ketma – ketliklarga misollar bo‘ladimi?
6. Sonli ketma – ketlik nechta elementga ega?
7. Sonli ketma – ketlikning geometrik tasviri qanday bo‘ladi?
8. Sonli ketma – ketliklar ustida qanday amallarni bajarish mumkin?
9. Qanday sonlar ketma – ketligi chegaralangan deyiladi va misollar keltiring?
10. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
11. Quyidan chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
12. Yuqoridan chegaralangan sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
13. Chegaralangan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
14. Chegaralanmagan sonlar ketma – ketligiga misollar keltiring?
15. Cheksiz ketma – ketlik deb nimaga aytiladi?
16. Cheksiz kichik ketma – ketlik qanday ta’riflanadi?
17. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklarga misollar keltiring?
18. Cheksiz katta va kichik ketma – ketliklar orasida qanday bog‘lanish bor?
19. Cheksiz kichik ketma – ketliklar qanday xossalarga ega?
20. Ketma-ketlikning limiti deb nimaga aytiladi?
21. Qanday sonlar ketma – ketligi yaqinlashuvchi deyiladi?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Ushbu

$$x_n = \frac{1}{3n}, \ x_n = \frac{n}{5n-1}, \ x_n = \frac{1}{4n-1}, \ x_n = 3n$$

sonli ketma-ketliklarning n=1,2,3,4,5, bo‘lgandagi qiymatlarini yozing?

2. $x_n = \dfrac{n}{n+2}$ sonli ketma-ketlikning chegaralanganligini ko‘rsating.

3. $x_n = \dfrac{3}{n}, \ x_n = \dfrac{3(-1)^n}{2n}, \ x_n = 3 + (-1)^n$ sonlar ketma-ketligining geometrik tasvirini n=1,2,3,4,5,6 bo‘lganda ko‘rsating.

4. Bir necha arifmetik va geometrik progressiyalarning umumiy (n-hadi)ni yozing va n=1,2,3,4,5,6 bo‘lgandagi qiymatlarini yozing.

5. Ushbu

$$x_n = 3n, \ x_n = -5n+1, \ x_n = \frac{1}{y_n+1}, \ x_n = (-1)^n 3n$$

sonlar ketma-ketliklari chegaralanganmi va qanday?

6. Bir necha cheksiz katta va cheksiz kichik sonlar ketma-ketliklarini yozing.

7. Ushbu tengliklar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2, \ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n} = 0, \ \lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n} = 3$$

ning to‘g‘riligini sonli ketma-ketlikning limiti, ta’rifidan foydalanib, isbotlang va har biri uchun $\varepsilon > 0$ ni aniqlab qanday raqamdan boshlab tengsizlikning bajarilishini ko‘rsating?

8. Ushbu sonlar ketma-ketliklarining limitlarga ega ekanligi yoki ega emasligi va u nimaga tengligini ko‘rsating?

$$1) \ x_n = \frac{n}{3n+1}, \ 2) \ x_n = \frac{5n-1}{2n}, \ 3) \ x_n = \frac{(-1)^n n}{4n+1}, 4) \ x_n = \frac{3n+1}{n^2},$$

$$5) \ x_n = \frac{n}{4n-3}, 6) \ x_n = \frac{(-1)^n n}{3n-1}, 7) \ x_n = \frac{3n^2}{n+1}, \ 8) \ x_n = \frac{2n+5}{n^3}.$$

Funksiya haqida asosiy tushunchalar

1. O‘zgarmas va o‘zgaruvchi miqdorlar. Qaralayotgan jarayonda bir xil son qiymatlarini qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgarmas miqdorlar*** deyiladi. Masalan, qanday radiusli aylana olmaylik, uning uzunligining deametriga nisbati bir xil π sondan iborat bo‘ladi. Bu holda nisbat o‘zgarmas miqdordir.

Qaralayotgan jarayonda har xil son qiymatlari qabul qiladigan miqdorlarga ***o‘zgaruvchi miqdorlar*** deyiladi. Masalan, havo harorati (temperaturasi), vaqt, harakatning tezligi o‘zgaruvchi miqdorlardir. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Hamma o‘zgaruvchi miqdorlarni birdaniga o‘rganib bo‘lmaydi. Endi ikkita o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi bog‘lanishni qaraymiz.

2. Funksiya tushunchasi.

Ta’rif. $x \in X$ har bir x ga biror qoida yoki qonun bo‘yicha $y \in Y$ dan bitta y mos qo‘yilsa, X to‘plamda ***funksiya berilgan*** **(aniqlangan)** deb ataladi va u

$$y = f(x)$$

simvol bilan belgilanadi. Ayrim hollarda $y = xf$ ham deb belgilanadiki, bunda kompyuterda oldin x qiymati olinib, keyin hisoblanadigan simvol olinadi. Bunda X to‘plamga funksiyaning **aniqlanish sohasi,** Y to‘plamga o‘zgarish sohasi yoki ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi. Odatda funksiya aniqlanish sohasini D, qiymatlar to‘plamini E bilan belgilanadi.

Shunday qilib, har bir element $x \in X$ ga bitta va faqat bitta $y \in Y$ moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu moslikka X to‘plamda funksiya aniqlangan deyiladi. x ga **erkli o‘zgaruvchi** yoki **argument,** y ga esa **erksiz o‘zgaruvchi** yoki x **ning funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, funksiya berilgan bo‘lishi uchun: 1) X to‘plam berilishi kerak (ko‘p hollarda uni x bilan y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga ko‘ra topiladi); 2) x o‘zgaruvchining X to‘plamdan olingan har bir qiymatiga unga mos qo‘yiladigan y ni aniqlaydigan qoida yoki qonun berilishi kerak. (ta’rifda uni f simvol bilan belgiladik).

Masalan; 1) f $X = (-\infty, +\infty)$ to‘plamga tegishli bo‘lgan har bir songa uning o‘zini o‘ziga ko‘paytirib, ya’ni kvadratga ko‘tarib mos qo‘yuvchi qoida bo‘lsin. Bu holda $y = x^2$ funksiya hosil bo‘ladi. Bu funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda aniqlangan; 2) f har bir $x \in [0, +\infty)$ songa shu sondan olingan kvadrat ildizni mos qo‘ysin. Bu $y = \sqrt{x}$ funksiyani ifodalaydi. Uning aniqlanish sohasi $[0, +\infty)$ bo‘ladi.

1-misol. $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish. Ma’lumki, funksiyaning aniqlanish sohasi x ning shunday qiymatlari to‘plamiki, bunda y funksiya haqiqiy son qiymatlarga ega bo‘lishi kerak. Berilgan funksiyada

$$x-3\geq 0,$$
$$4-x>0$$

bo‘lgandagina x ning har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati haqiqiy bo‘ladi. Bu tengsizliklar sistemasidan, $x\geq 3$, $x<4$ bo‘lib, ya’ni $3\leq x<4$ bo‘lishini topamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3,\ 4)$ bo‘ladi.

<u>3. Funksiyaning berilish usullari.</u> Funksiya ta’rifida keltirilgan x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos qo‘yiladigan y ni aniqlovchi qoida yoki qonun turlicha bo‘lishi mumkin. Demak, funksiyaning berilishi ham turlichadir. Funksiya ***<u>analitik</u>*, *<u>jadval</u>* va *<u>grafik</u>* hamda kompyuter** usullari yordamida berilishi mumkin:

1) funksiyaing ***analitik usul*** bilan berilishida, x o‘zgaruvchining har bir qiymatiga mos keladigan y ning qiymati, x argument ustida algebraik amallarning bajarilishi natijasida, ya’ni formulalar yordamida beriladi. Masalan,

$$y=x^3+1,\quad y^2=\frac{x+5}{x^2-3},\qquad y=3^{x+1},\qquad y=\log_2(x+3);$$

2) o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish **jadval** ko‘rinishida berilishi mumkin. Masalan, kuzatish natijasida sutni yopiq idishda qizdirilganda P_1 bosim ostida uning qaynash temperaturasi t_1, P_2 bosim ostida qaynash temperaturasi t_2 va h.k. bo‘lishini topganda qo‘yidagi jadval kelib chiqadi.

Bosim P	P_1	P_2	$\cdots$	P_n
Temperatura t	t_1	t_2	$\cdots$	t_n

Bundan ko‘rinadiki P bosim bilan t temperatura orasida bog‘lanish bo‘lib, P argument, t funksiya bo‘ladi. Funksiyaning bunday berilishiga ***<u>jadval usulda</u>*** berilgan deyiladi. Bunday usul ko‘proq tajribalarda ishlatiladi.

3) Funksiyaning ***grafik usulida*** berilishida, x va y o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish tekislikdagi biror chiziq yordamida beriladi. Bunda X va Y to‘plamlar orasidagi moslik grafik bilan beriladi. XOY tekis-likda l chiziq berilgan bo‘lsin. x ning qiymatiga mos kelgan y ning qiymatini, topish uchun x nuqtadan OX o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz. U l chiziqni bitta A nuqtada kesib o‘tadi. A nuqtadan OY o‘qiga perpendikulyar o‘tkazamiz, bu perpendikulyarning OY o‘qi bilan kesishish nuqtasi, y ning x ga mos qiymati bo‘ladi. Ma’lumki, bunday moslik l chiziq yordamida bajariladi. Funksiyaning bunday berilishi, **<u>grafik usulda berilgan</u>** deyiladi. Funksiyaning grafik usulida berilishidan, uni analitik usul bilan ifodalash qiyin bo‘lgan hollarda va funksiyaning sifat o‘zgarishi grafik usulda yaxshi ko‘rinadigan hollarda foydalaniladi. Masalan, fizikaviy tajribalar jarayonida ossillografdan olinadigan grafik.

4) *<u>algoritmik yoki kompyuter usuli</u>*. Funksiyaning bunday usulda berilishida x ning har bir qiymati uchun, $y=f(x)$ funksiyaning qiymatini hisoblaydigan algoritim yoki programma berilgan bo‘ladi. Bunday programma EHMga qo‘yilgan bo‘lib funksiyaning qiymati avtomatik hisoblanadi.

4. Funksiyaning ayrim hollari

1). Oshkor va oshkormas funksiyalar. Funksiya $y = f(x)$ ko‘rinishda, ya’ni y ga nisbatan yechilgan bo‘lsa, unga ***oshkor funksiya*** deyiladi. Funksiya $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni y ga nisbatan yechilmagan bo‘lsa, ***oshkormas funksiya*** ko‘rinishda berilgan deyiladi. Masalan, $y = 3x^2 + 5,\quad y = \sin x,\quad y = 4^x$ funksiyalar oshkor ko‘rinishda; $2x - 3y + 6 = 0,\qquad x^2 + e^{xy} + 3 = 0$ funksiyalar oshkormas ko‘rinishda berilgan. Shuni ta’kidlaymizki hamma $F(x,\ y) = 0$ ko‘rinishdagi tenglik ham funksiyani ifodalay bermaydi. Masalan, $x^2 + y^2 + 4 = 0$ tenglama funksiyani ifodalamaydi, chunki x ning har bir qiymatiga y ning haqiqiy son qiymatini mos qo‘yish mumkin emas.

2). Murakkab funksiya. $y = f(u)$ bo‘lib, $u = \varphi(x)$ funksiya berilgan bo‘lsa, y funksiyaga $\varphi(x)$ **funksiyaning funksiyasi** yoki y ga x ning ***murakkab funksiyasi*** deyiladi. Masalan, $y = \lg(x^2 + 1)$ funksiyada $u = x^2 + 1$ bo‘lib. y x ning murakkab funksiyasi bo‘ladi. Bundan tashqari $y = \sin(x^2 + 1),\quad y = 3^{x+5},\quad y = \sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}$ va h.k. lar ham, murakkab funksiyaga misol bo‘laoladi.

3). ***Teskari funksiya*. ** $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. y funksiyaning qiymatlar to‘plamidagi har bir qiymatiga x argumentning aniqlanish sohasidan bitta qiymati mos qo‘yilgan bo‘lsa, berilgan funksiyaga ***teskari*** $x = d(y)$ ***funksiya*** berilgan bo‘ladi va $D(f) = E(d)$ va $E(f) = D(d)$ har bir $x_0 \in D(f) = E(d)$ va $y_0 = E(f) = D(d)$ bo‘lib. $y_0 = f(x_0)$ faqat $x_0 = d(y_0)$ uchun bajariladi. Masalan $y = 2x - 3$ funksiyaga teskari funksiya $2x = y + 3,\quad x = (y+3)/2$ bo‘ladi. $y = x^3$ funksiya $x = \sqrt[3]{y}$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi. O‘zaro teskari bo‘lgan funksiyalarning grafiklari $y = x$ to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.

5. Funksiyaning limiti

1). 1-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son mavjud bo‘lsaki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A chekli son $y = f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deb ataladi va quyidagicha yoziladi

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{ёки} \quad x \to a \quad \text{да} \quad f(x) \to A \qquad (1)$$

Funksiya limitining ta’rifidan kelib chiqadiki $x - a = \alpha$ cheksiz kichik bo‘lganda $f(x) - A$ ham cheksiz kichik bo‘ladi.

2-ta’rif. $y = f(x)$ funksiya, x ning yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan bo‘lib, istalgan $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ son uchun shunday, $N > 0$ mavjud bo‘lsaki, $|x| > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, o‘zgarmas A son, $y = f(x)$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad (2)$$

bilan belgilanadi.

1-ta'rifda faqat $x < a$ yoki $x > a$ bo'lgan qiymatlar qaralsa, funksiyaning ***chap yoki o'ng limit*** tushunchasi kelib chiqadi va

$$\lim_{x\to a-0} f(x), \quad \lim_{x\to a+0} f(x) \qquad (3)$$

bilan begilanadi.

3-ta'rif. Limiti $A = 0$ bo'lgan funksiyaga **cheksiz kichik funksiya (ch. kich. f.)** deyiladi.

4-ta'rif. Limiti $A = +\infty$ yoki $Aq = \lambda q$ bo'lgan funksiyalarga **cheksiz katta funksiya (ch. kat. f.)** deyiladi va

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (4)$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki $y = C$ o'zgarmas miqdorning limiti o'ziga teng.

6. Funksiya limitining asosiy xossalari:

1) *yig'indining limiti*. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti, qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning $x \to a$ dagi limitlari mavjud bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (5)$$

2) chekli sondagi funksiyalar *ko'paytmasining limiti* funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \cdot f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x) \qquad (6)$$

Natija: O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni,

$$\lim_{x\to a}\left[cf_1(x)\right] = c\lim_{x\to a} f_1(x) \qquad (7)$$

3) Ikkita funksiya *nisbatining limiti,* maxrajning limiti no'ldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng, ya'ni $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)} \qquad (8)$$

bo'ladi.

Limitlarni hisoblashda quyidagi limitlardan foydalaniladi:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x}{x} = 1; \qquad (9)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e, \qquad e = 2{,}71828\ldots \qquad (10)$$

Bu limitlarga mos ravishda ***birinchi*** **va** ***ikkinchi*** **ajoyib** limitlar deyiladi.

7. Aniqmasliklar va ularni ochish

1.Aniqmasliklar. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ limitni hisoblashda $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kich.f. lar bo‘lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da **(0/0) ko‘rinishdagi aniqmaslik** deyiladi. $f(x)$, $\varphi(x)$ funksiyalar ch.kat.f. lar bo‘lsa, $f(x)/\varphi(x)$ nisbatga $x\to a$ da (∞/∞) ***ko‘rinishidagi aniqmaslik*** *deyiladi*. Xuddi shunga o‘xshash $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0 aniqmasliklar

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)-\varphi(x)],\quad \lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]\quad \textit{ва}\quad \lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$$

limitlarni hisoblashda kelib chiqadi. Bunday hollarda limitlarni hisoblashga **aniqmasliklarni ochish** deyiladi.

$(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochishda quyidagi xossadan foydalaniladi: $f(x)$va $\varphi(x)$ funksiyalar $x=a$ nuqtaning biror atrofidagi hamma nuqtalarda o‘zaro teng bo‘lsa, ularning $x\to a$ dagi limiti ham teng bo‘ladi.

Masalan, $f(x)=\dfrac{x^2-9}{2(x-3)}$ va $\varphi(x)=\dfrac{x+3}{2}$ funksiyalar x ning $x=3$ dan boshqa hamma qiymatlari uchun teng, chunki

$$\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\frac{(x-3)(x+3)}{2(x-3)}=\frac{x+3}{2}$$

Yuqoridagi xossaga asosan,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)$$

bo‘ladi, ya’ni

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{2}=\frac{6}{2}=3$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Funksiyalarning limitini topishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+6}{6x}=\frac{5}{6}$$

ekanligini funksiya limitining ta’rifidan foydalanib isbotlang.

Yechish. Buni isbotlash uchun $f(x)=(5x+6)/6x$ o‘zgaruvchi miqdor va $A=5/6$ o‘zgarmas miqdor orasidagi farq $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiya ekanligini ko‘rsatish kifoya. Demak,

$$\frac{5x+6}{6x}-\frac{5}{6}=\frac{5x+6-5x}{6x}=\frac{6}{6x}=\frac{1}{x}$$

$1/x$ o‘zgaruvchi miqdor $x\to\infty$ da cheksiz kichik funksiyadan iborat. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(5x+6)}{6x}=\frac{5}{6}.$$

2-misol. $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$

ekanligini isbotlang hamda x va $(2x^2-5x+4)$larning qiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

Yechish. $x \to 3$ bo‘lganligi uchun $x-3=\alpha$ cheksiz kichik miqdordir.

$x=3+\alpha$ ni $(2x^2-5x+4)-7$ ayirmaga qo‘yib,

$$2(3+\alpha)^2-5(3+\alpha)+4-7=2(9+6\alpha+\alpha^2)-15-5\alpha+4-7=$$

$$=18+12\alpha+2\alpha^2-15-5\alpha+4-7=2\alpha^2+7\alpha$$

natijaga ega bo‘lamiz.

α cheksiz kichik funksiya bo‘lganligi uchun $2\alpha^2+7\alpha$ ham cheksiz kichik bo‘ladi.

Shunday qilib, $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-5x+4)=7$ isbot bo‘ldi.

Endi yuqoridagi holatni x argument, $2x^2-5x+4$ funksiya qiymatlari jadvali bilan ko‘rsataylik. Ma’lumki $x\to 3$ intiladi.

x	2	2,5	2,8	2,9	2,99	2,999	$\to 3$
$2x^2-5x+4$	2	4	5,68	6,32	6,9302	6,993002	$\to 7$

Bu jadvaldan ko‘rinadiki, argumentning 3 ga yaqinlashib boruvchi qiymatlari uchun, funksiyaning mos qiymatlari 7 ga yaqinlashib boradi, ya’ni $x-3$ cheksiz kichik miqdorga $2x^2-5x+4-7$ ayirmaning ham cheksiz kichik miqdori to‘g‘ri keladi. Yuqoridagi jadvalda $x<3$ bo‘lib, $x\to 3$ holni qaradik. $x>3$ bo‘lib, $x\to 3$ holni o‘quvchiga mustaqil ko‘rsatishni tavsiya qilamiz.

3-misol.

$\lim\limits_{x\to 2}(4x^2-6x+3)$ limitni hisoblang.

Yechish. Algebraik yig‘indining limiti, (5) formula, o‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish (7) formulalarga asosan:

$$\lim_{x\to 2}(4x^2-6x+3)=\lim_{x\to 2}4x^2-\lim_{x\to 2}6x+\lim\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=$$

$$=4(\lim_{x\to 2}x)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7$$

hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi misolda, limitlarning xossalariga asosan, argument x ning o‘rniga uning limitik qiymatini qo‘yishga olib keldi.

4-misol.

$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-4x+7)/(2x^2-5x+6)$ limitni hisoblang.

Yechish. Ikkita funksiya nisbatining limiti (8) formula hamda oldingi misolda foydalanilgan limitlarning xossalarini qo‘llasak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-4x+7\right)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2-5x+6\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x^2-\lim\limits_{x\to 1}4x+\lim\limits_{x\to 1}7}{\lim\limits_{x\to 1}2x^2-\lim\limits_{x\to 1}5x+\lim\limits_{x\to 1}6}=$$

$$=\frac{3\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)^2-4\left(\lim\limits_{x\to 1}x\right)+7}{2\left(\lim\limits_{x\to 1}\right)^2-5\lim\limits_{x\to 1}x+6}=\frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1+7}{2\cdot 1^2-5\cdot 1+6}=\frac{6}{3}=2$$

bo‘ladi.

Ratsional funksiyaing limitini hisoblash shu funksiyaning argument x ning limitik qiymatidagi, qiymatini hisoblashga keltirildi.

Eslatma. $f(x)$ elementar funksiyalarning $x \to a$ intilgandagi limiti (a aniqlanish sohasiga tegishli) funksiyaning $x = a$ nuqtadagi qiymatiga teng bo‘ladi. Masalan,
$\lim\limits_{t \to 1}\left[\lg\left(t + \sqrt{t^2 + 80}\right) + \sqrt{t^2 + 8}\right] = \lg(1 + \sqrt{t^2 + 80}) + \sqrt{1+8} = \lg 10 + 3 = 1 + 3 = 4$ 5-misol.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x = 1$ da surat ham, maxraj ham nolga aylanib $(0/0)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik hosil bo‘ladi.

Surat va maxrajni $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ formula yordamida chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratamiz. Bunda x_1 va x_2 lar $ax^2 + ba + c = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlari. Demak,

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3(x-1)(x+2/3)}{4(x-1)(x-1/4)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{3(x+2/3)}{4(x-1/4)} = \frac{3(1+2/3)}{4(1-1/4)} = 5/3$$

bo‘ladi.

6-misol. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x \to \infty$ da $A(x_1; y_1)$ ko‘rinishdagi aniqmas ifodaga ega bo‘lamiz. Bunday aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini $B(x_2; y_2)$ ning eng yuqori darajalisiga, ya’ni x^2 ga bo‘lamiz, hamda limitlarning xossalaridan foydalansak

$$\lim_{x \leftarrow \infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{6 + 5/x + 4/x^2}{3 + 7/x - 2/x^2} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty}(6 + 5/x + 4/x^2)}{\lim\limits_{x \to \infty}(3 + 7/x - 2/x^2)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = 2$$

bo‘ladi. Bunda $5/x,\ 4/x^2\ \ 7/x,\ 2/x^2$ lar $x \to \infty$ da cheksiz kichik funksiyalardir.

7-misol. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x+1} - 2}$ limitni hisoblang.

Yechish. $x = 3$ da surat va maxraj 0 ga teng bo‘ladi. Maxrajda $\sqrt{x+1}$ irratsional ifoda mavjud, uni suratga o‘tkazamiz, buning uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{x+1} + 2$ ga ko‘paytiramiz.

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 9)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{\sqrt{(x+1)^2} - 2^2} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{x + 1 - 4} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1} + 2)}{(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \to 3}(x+3) \cdot (\sqrt{x+1} + 2) = (3+3)(\sqrt{x+1} + 2) = 6 \cdot 4 = 24.$$

8-misol. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$ limitni hisoblang.

Yechish. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ bo‘lganligi uchun

$$\lim_{x\to\pi/4}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}=\lim_{x\to\pi/4}\frac{-(\cos x-\sin x)}{\cos^2 x-\sin^2 x}=$$

$$=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{\cos x-\sin x}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=-\lim_{x\to\pi/4}\frac{1}{\cos x+\sin x}=$$

$$=-\frac{1}{\cos\pi/4+\sin\pi/4}=-\frac{1}{\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

natijani olamiz.

9-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $5x=\alpha$, deb almashtirsak, bundan $x=\alpha/5$, $x\to 0$ $\alpha\to 0$ bo‘ladi.

Shuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/5}=5\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=5\cdot 1=5,$$

chunki

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

10-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x$ limitni ikkinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $x\to\infty$ da limitga o‘tsak, 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. $3/x=\alpha$ bilan almashtirsak, bu yerdan $x=3/\alpha$ hamda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ bo‘ladi..Demak,

$$\lim_{x\to\infty}(1+3/x)^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{3/\alpha}=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3=e^3$$

kelib chiqadi.

Shundayqilib, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+3/x)^x=e^3$.

11-misol. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ limitni hisoblang.

Yechish: $x\to 1$da $1/(x-1)\to\infty$ va $2/(x^2-1)\to\infty$ bo‘lib, $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi.

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x+1-2}{x^2-1}=\frac{x-1}{x^2-1}.$$

Oxirgi ifoda $x\to 1$ da $(0/0)$ aniqmas ifoda bo‘ladi. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

12-misol. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$ limitni hisoblang.

Yechish. $x\to+\infty$ da $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslik kelib chiqadi. Quyidagi shakl almashtirishni bajaramiz:

$$\sqrt{x^2+3x}-x=\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{(\sqrt{x^2+3x})^2-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}.$$

Oxirgi ifoda $x\to\infty$ da (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘lib, 11-misoldagidek x ning yuqori darajalisiga surat va maxrajini bo‘lib,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x-x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x/x}{\sqrt{x^2/x^2+3x/x^2}+x/x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{1+3/x}+1}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

bunda $x\to+\infty$ da $3/x\to0$ bo‘ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1.. Qanday miqdorlar o‘zgaruvchi deb ataladi?
2. Qanday holda funksiya aniqlangan deyiladi?
3. Funksional bog‘lanish qanday belgilanadi?
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlar to‘plami nima?
6. Qanday moslik funksiyani ifodalashi mumkin?
7. Funksiya qanday o‘zgaruvchi?
8. Argument qanday o‘zgaruvchi?
9. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
10. Oshkor va oshkormas funksiyalar qanday?
11.Funksiyaning funksiyasi yoki murakkab funksiya deb nimaga aytiladi?
12. Teskari funksiya qanday funksiya?
13. Funksiyaning limiti deb nimaga aytiladi va u qanday yoziladi?
14. Chap va o‘ng limitlar nimalar va u qanday yoziladi?
15. Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar qanday miqdorlar?
16. Ikki funksiya algebraik yig‘indisining limiti nimaga teng?
17. Chekli sondagi funksiyalar ko‘paytmasining limiti nimaga teng?
18. O‘zgarmas ko‘paytuvchini limit ishorasidan chiqarish mumkinmi?
19. Ikkita funksiya nisbatining limiti nimaga teng?
20. Birinchi ajoyib limit deb nimaga aytiladi?
21. Ikkinchi ajoyib limit nimaga teng?
22. Aniqmasliklarni ochish nimadan iborat?

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. $f(x)=x^2+1$ funksiya berilgan:1) $f(4)$; 2) $f(\sqrt{2})$; 3) $f(a+1)$; 4) $f(2a)$ larni hisoblang.

2. Quyidagi funksiyalarning $D(f)$ aniqlanish sohasini va $E(f)$ qiymatlar to‘plamini toping:

1) $f(x)=\ln(x+3)$; 2) $f(x)=\sqrt{5-2x}$; 3) $f(x)=\sqrt{1-|x|}$.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$; 2) $f(x)=(a+x)/(a-x)$;

3) $f(x)=\lg(5x-x^2-6)$; 4) $f(x)=2^{\arccos(1-x)}$.

4. Hajmi $v=1$ birlikka teng bo‘lgan silindr asosining radiusi r va balandligi h orasidagi funksional bog‘lanishni toping.

5. 1) $f(u)=1-u,\ u=x^2$; 2) $f(u)=1/(1-u),\ \ u(x)=x-1/x$;

3) $f(u)=u^2,\ \ u(x)=4x$

funksiyalardan x ning murakkab funksiyalarini tuzing.

6. Quyidagi funksiyalarga teskari funksiyalarni toping va topilgan funksiyalarning aniqlanish va o‘zgarish sohalarini aniqlang:

1) $f(x)=x^2-1,\ x\in[0,+\infty)$; 2) $f(x)=2x+3,\ x\in(-\infty,+\infty)$;

3) $f(x)=(x-1)^3,\ x\in(-\infty,+\infty)$; 4) $f(x)=x^2-1,\ x\in(-\infty,0]$.

7. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va ularning grafiklarini yasang.

1) $y=\dfrac{1}{x}$; 2) $y=-\dfrac{3}{x}$; 3) $y=2-\dfrac{1}{x}$; 4) $y=\dfrac{2}{x-1}$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+3}{5x}=\dfrac{4}{5}$, 2) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)=5$,

3) $\lim\limits_{x\to -1}(5x+8)=3$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2)-4x+6=10$

ekanligini funksiya limiti ta’rifidan foydalanib isbotlang hamda x va berilgan funksiyalar kiymatlari jadvali bilan tushuntiring.

9. Quyidagi limitlarni, limitlarning xossalaridan foydalanib hisoblang:.

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-7x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$; 6) $\lim\limits_{t\to 3}\left[2t+\sqrt{t^2-8}+\lg(3t+\sqrt{t^2-8})\right]$.

10. Ushbu $(0/0)$ va (∞/∞) ko‘rinishdagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-4x+3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^3-6x^2+7x+5}{8-4x+3x^2-2x^3}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+7x^2+8x-9}{3x^5+6x^3+4x^2-2x+11}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+8x^6+5x^4-3x^2-12}{10x^6+7x^5-6x^3-4x-17}$.

11. Quyidagi limitlarni hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{tgx}{\sin 2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

12. Quyidagi limitlarni birinchi va ikkinchi ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/3}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/2}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin 1/x$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2/n)^n$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-5/n)^n$;

10) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-1/3n)^n$; 11) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2x)^{1/x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n/(n+1)]^n$.

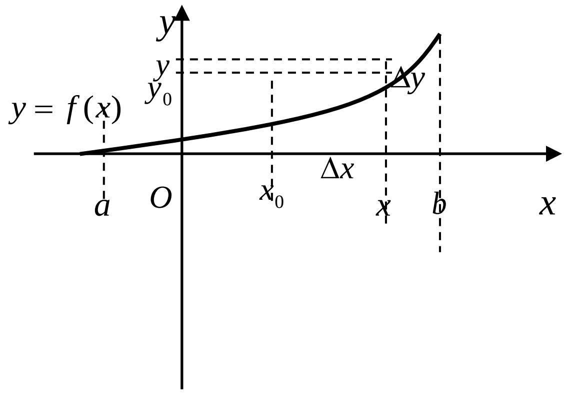
13. Quyidagi aniqmasliklarni oching:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$;

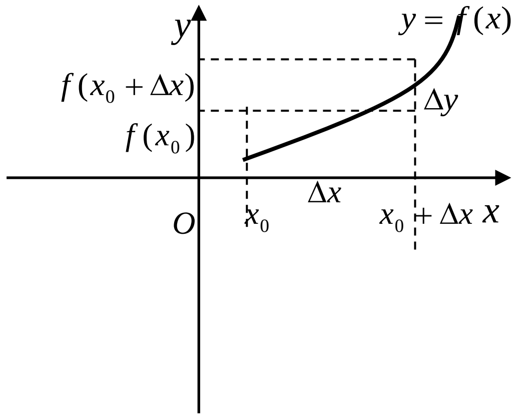
3) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$; 4) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

Funksiyaning uzluksizligi va uzilishi

1.. Funksiya orttirmasi. $y=f(x)$ funksiya biror $[a,\ b]$ kesmada aniqlangan va x_0 shu kesmadagi biror nuqta bo‘lsin. x argumentning keyingi qiymati bo‘lsa, $x-x_0=\Delta x$ ga ***argument orttirmasi*** deyiladi (1-chizma).



1-chizma



2-chizma

$f(x)-f(x_0)$ funksiyaning qiymatlari orasidagi farqqa ***funksiya orttirmasi*** deyiladi va odatda Δy bilan belgilanadi. $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ yoki $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

1-chizmadan ko‘rinadiki $\Delta x\to 0$ da $\Delta y\to 0$ bo‘ladi.

1-misol. $y=f(x)=x^3$ funksiyaning $x_0=2$ nuqtada argument $\Delta x=0{,}5$ orttirma olgandagi funksiya Δy orttirmasini toping.

Yechish. $f(x_0)=2^3=8$ funksiyaning boshlang‘ich nuqtadagi qiymati. $f(x_0+\Delta x)=f(2+0{,}5)=(2+0{,}5)^3$ funksiyaning keyingi qiymati, demak, funksiya orttirmasi

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(2+0{,}5)^3-2^3=$$
$$=2^3+3\cdot 2^2\cdot 0.5+3\cdot 2\cdot 0{,}5^2+0{,}5^3-8=7{,}625$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, $\Delta y=7{,}625$.

2. ***Funksiya uzluksizligi ta’riflari.*** 1-ta’rif. $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, argumentning x_0 nuqtadagi cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz deyiladi*** (2-chizma). Bu ta’rifga qo‘yidagi ta’rif ham teng kuchlidir.

2-ta’rif. x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan $y=f(x)$ funksiya shu nuqtada chekli limitga ega bo‘lib, bu limit funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

Funksiya uzluksizligi ta’riflari quyidagi ***shartlarni*** o‘z ichiga oladi:

1) funksiya x_0 nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;

2) funksiyaning x_0 nuqtadagi chap va o‘ng limitlari

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

mavjud;

3) x_0 nuqtada chap va o‘ng limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

4) chap va o‘ng limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtada uzluksizligini tekshiring.

Yechish. Ma’lumki, $y = x^3$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada va uning istalgan atrofida aniqlangan. Uzluksizlikni 1-ta’rifga asosan tekshiramiz. Buning uchun $x_0 = 2$ nuqtadagi funksiya orttirmasini topamiz:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^{\ 3} = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 =$$

$$2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot \Delta x + 3\cdot 2\cdot \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3$$

argument orttirmasi $\Delta x \to 0$ ga intilganda limitga o‘tamiz.

$$\frac{y - 0}{b - 0} = \frac{x - a}{0 - a}.$$

Shunday qilib, $\Delta x \to 0$ da $x_0 = 2$ nuqtada $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, bu esa 1-ta’rifga asosan funksiya uzluksiz ekanligini bildiradi. Bu misolda x_0 nuqta o‘rniga ixtiyoriy nuqtani olish mumkin(masalan, $x_0 = 3$ uchun uzluksizlikni tekshiring).

Funksiya oraliqning hamma nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u shu **oraliqda** uzluksiz deyiladi.

2-misolda $y = x^3$ funksiya $(-\infty, \ +\infty)$ oraliqning hamma nuqtalarida uzluksizligi ravshan. Demak, $y = x^3$ funksiya $(-\infty, \ +\infty)$ oraliqda uzluksiz funksiyadir.

Elementar funksiyalarning hammasi o‘zlarining aniqlanish sohalarida uzluksizdir.

$f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa:

1) $f(x) \pm \varphi(x)$; 2) $f(x)\cdot\varphi(x)$; 3) $f(x)/\varphi(x)$ $\quad (\varphi(x_0) \neq 0$ bo‘lganda)

lar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari. $f(x)$ funksiya $[a, \ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u: 1) shu kesmada chegaralangan; 2) shu kesmada eng kichik va eng katta qiymatlarga erishadi; 3) kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsa, shu kesmaning biror nuqtasida 0 ga teng bo‘ladi; 4) $f(a)$ va $f(b)$ orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.

$y = f(z)$ va $z = \varphi(x)$ funksiyalar o‘z argumentlarining uzluksiz funksiyalari bo‘lsa, $y = f[\varphi(x)]$ murakkab funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. $y = f(x)$ uzluksiz bo‘lib, $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo‘lsa, u ham uzluksizdir.

3. *Funksiyaning uzilish va uning turlari*

Ta’rif. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan, lekin bu nuqtaning o‘zida uzluksizlik shartlaridan birortasi bajarilmasa, funksiya x_0 nuqtada **uzilishga ega deyiladi.**

$f(x)$ funksiya uchun

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ chekli limitlar mavjud bo‘lsa, chap va o‘ng limitlar hamda $f(x_0)$ sonlar o‘zaro teng bo‘lmasa, x_0 nuqta ***1-tur uzilish** nuqtasi* deyiladi.

Xususan, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ bo‘lsa x_0 ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi deyiladi.

1-tur uzilish nuqtasi bo‘lmagan uzilish nuqtalariga ***2-tur uzilish nuqtalari*** deyiladi. Bunday nuqtalarda, aqalli bitta tomonli limit qiymati cheksiz yoki mavjud bo‘lmaydi.

1-misol. $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ funksiya $x_0 = 2$ nuqtada 1-tur uzilishga ega ekanligini isbotlang.

Yechish. funksiya $x_0 = 2$ nuqtada aniqlanmagan. Absolyut qiymat ta’rifidan $x - 2 < 0$ yoki $x < 2$ va $x - 2 > 0$ yoki $x > 2$ bo‘lganda mos ravishda

$$f(x) = \frac{x-2}{-(x-2)} = -1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1$$

bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = 1$.

Shunday qilib, $x_0 = 2$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Bu uzilish nuqtasi **bartaraf** qilib (yo‘qotib) bo‘lmaydigan uzilish nuqtasiga kiradi.

2-misol. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, funksiya $x_0 = 0$ nuqtada aniqlanmagan, lekin $x \neq 0$ hamma nuqtalarda aniqlangan.

Bir tomonli limitlar o‘zaro teng, ya’ni

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Shunday qilib, berilgan funksiya uchun $x_0 = 0$ nuqta ***bartaraf qilinadigan (yo‘qotiladigan) uzilish*** nuqtasi bo‘ladi.

3-misol. $f(x)=6/(x-3)^2$ funksiyaning $x=3$ nuqtada uzilishga ega ekanligini ko‘rsating:

Yechish. Berilgan funksiya $x=3$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. $x<3$ bo‘lganda $f(x)>0$ va $x>3$ bo‘lganda ham $f(x)>0$.

$$\lim_{x\to 3-0} f(x)=+\infty \qquad \text{va} \qquad \lim_{x\to 3+0} f(x)=+\infty .$$

Bu 2-tur uzilishdir .

4. <u>Iqtisodiyotda qo‘llaniladiga ayrim asosiy funksiyalar</u>

1. **Chiziqli funksiya.** Ma’lumki,

$$y=ax+b \qquad (1)$$

formula bilan aniqlangan funksiyaga chiziqli funksiya deyiladi. Bu burchak koeffitsiyenti $k=a$, boshlang‘ich ordinatasi b bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasidir.

1-misol. Biror korxonada ishlab chiqarilayotgan bir xil mahsulot harajatini ikki guruh:

1) mahsulot hajmiga, proporsional o‘zgaruvchi harajat, masalan, materiallar sarfi;

2) ishlab chiqarilgan mahsulot hajmiga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgarmas harajatlar, masalan, ma’muriyat binosi ijarasiga, uni isitishga ketadigan va boshqa harajatlar deb qarash mumkin.

O‘zgarmas harajatlarni b bilan, o‘zgaruvchi harajatlarni, mahsulotning hir bir birligi uchun a bilan belgilasak, biror davrda x birlik hajmdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun ketgan umumiy harajat

$$y=b+ax$$

bo‘lib, bu chiziqli funksiyadir.

2-misol. Mahsulotning umumiy bahosi uning soniga proporsional bo‘lsin. a bitta mahsulot narxi bo‘lsa, x birlik mahsulotning umumiy bahosi

$$y=ax$$

chiziqli funksiya bilan ifodalanadi, ma’lumki bu koordinatlar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasidir.

Chiziqli funksiya va uning grafigi, iqtisodiy miqdorlar orasida proporsionallik mavjud bo‘lgan bog‘lanishlarda ishlatiladi.

2. Darajali funksiya. Bunday funksiya

$$y=x^{\alpha} \qquad (2)$$

formula bilan ifodalanadi, bunda α 0 dan farqli ixtiyoriy haqiqiy son. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi α ko‘rsatgichga bog‘liq. α natural son bo‘lsa, hamma haqiqiy sonlar uchun aniqlangan, α butun manfiy son bo‘lsa,

$$y=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

bo‘lib, $x\neq 0$ bo‘lgan hamma x lar uchun aniqlangan (bunda n natural son). $\alpha=1/n$ ko‘rinishdagi son bo‘lsa,

$$y=f(x)=x^{\alpha}=x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$$

bo‘lib, n toq son bo‘lsa, $(-\infty,\ +\infty)$ intervalda, n juft son bo‘lsa, $[0,\infty)$ intervalda aniqlangan.

Umuman olganda darajali funksiya o‘zining aniqlanish sohasida uzluksizdir.

3-misol. Italyan iqtisodchisi Pareto jamiyatda foydani taqsimlashning quyidagi qoidasini taklif etdi: y bilan x dan kichik bo‘lmagan foydaga ega bo‘lgan shaxslar sonini belgilasak,

$$y = \frac{a}{x^m}$$

bo‘ladi, bunda a va m o‘zgarmaslar.

Pareto qonuni katta foydaga ega bo‘lganda, taqsimotni yetarli darajada aniqlik bilan ifodalaydi, past darajadagi foydaga ega bo‘lganda aniq emas.

Biror jamiyatda foydani taqsimlash

$$y = \frac{2000000000}{x^{1,5}}$$

formula bilan aniqlansin:

1) 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘lgan shaxslar soni;

2) 100 nafar eng boy shaxslar orasida, eng kam foydani toping.

Yechish. 1) masala sharti bo‘yicha, $x = 100000$, uni taqsimot formulasiga qo‘ysak:

$$y=\frac{2000000000}{100000^{1.5}}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni logarifmlasak:

$$\lg y = \lg\frac{2000000000}{100000^{1.5}} = \lg 2000000000 - 1{,}5\lg 100000 = \lg 2\cdot 10^9 - 1.5\lg 10^5 =$$
$$= 9 + 0{,}301 - 1{,}5\cdot 5 = 9{,}301 - 7{,}5 = 1{,}801,$$

ya’ni $\lg y = 1.801$

bo‘ladi. Logarifmlar jadvalidan $y = 63{,}2$ ni topamiz. Shunday qilib, Pareto taqsimoti bo‘yicha 63 kishi 100000 dan ko‘p foydaga ega bo‘ladi;

2) masala sharti bo‘yicha $y = 100,$ taqsimot formulasidan

$$100 = \frac{2000000000}{x^{1.5}}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikdan $x = 73700$ ekanligini aniqlash mumkin (uni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

Shunday qilib, 100 nafar eng boy kishilar ichida eng kichik foyda 73700 ni tashkil etadi.

Funksiyalarning iqtisodda qo‘llanilishiga misollarni ko‘plab keltirish mumkin. Bu mavzu bo‘yicha talabalarning shug‘ullanishini taklif etamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday jarayon uzluksiz bo‘ladi?
2. Funksiya orttirmasi nima?
3. Qanday funksiya uzluksiz deyiladi?

4. Qanday funksiyaga oraliqda uzluksiz deyiladi?

5. Ikkita uzluksiz funksiya yig‘indisi, ko‘paytmasi va nisbati uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

6. Kesmada uzluksiz bo‘lgan funksiyalar qanday xossalarga ega?

7. Qanday funksiyaga uzilishga ega deyiladi?

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $y = x^2$ funksiyaning uzluksizligini, $x_0 = 3,\ \ x = 5$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

2. 1) $y = 3x^3 + 5x^2 - 7$, 2) $y = 4x^3 + 3x^2 + 5$ funksiyalar uzluksizligini $x_0 = 2;\ x_1 = -3$ nuqtalarda, orttirmalar orqali ko‘rsating.

3. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning x ning hamma qiymatlari uchun uzluksiz ekanligini ko‘rsating.

4. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x) = \dfrac{8}{x+4}$; 2) $f(x = \dfrac{x}{x-4}$.

5. Ushbu funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va ularning turini aniqlang:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x-3}$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x-5}$.

Funksiyaning uzluksizligi.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a ning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \tag{1}$$

bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ravshanki, (1) o'rinli bo'lsa, ushbu $\lim\limits_{x\to a}[f(x)-f(a)]=0$ limit ham o'rinli bo'ladi. Odatda $x-a$ ayirma o'zgaruvchi orttirmasi, $f(x)-f(a)$ ayirma esa a nuqtadagi funksiyaning orttirmasi deyiladi. Ular mos ravishda Δx va Δy (yoki Δf) kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x-a, \quad \Delta y = \Delta f = f(x)-f(a).$$

Bu tengliklardan foydalanib yozamiz:

$$x = a+\Delta x, \quad \Delta y = \Delta f = f(a+\Delta x)-f(a).$$

Natijada (1) munosabat $\lim\limits_{\Delta x\to a} \Delta y = 0$

ko'rinishga ega bo'ladi. Demak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligi, bu nuqtada o'zgaruvchining cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishi sifatida ham ta'riflanishi ham mumkin.

1-misol. $f(x)=x^2+x+2$ funksiya ixtiyoriy $a\in R$ nuqtada uzluksiz, chunki $x\to a$ da

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(x^2+x+2) = a^2+a+2 = f(a).$$

Agar $x\to a+0$ $(x\to a-0)$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng (chap) limiti mavjud va $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a)\right)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

2-misol. Ushbu

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}(x+1) = 1 \neq f(0).$$

$\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} x^2 = 0 = f(0)$ bo'lganligi sababli, $x=0$ nuqtada chapdan uzluksiz bo'lib, o'ngdan esa uzluksiz emas.

Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \neq f(a)$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $(-\infty;+\infty)$ bo'lsa yoki funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, unda $f(x)$ funksiya a nuqtada uzilishga ega deyiladi.

1^0 $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud, chekli bo'lib, u $f(a)$ ga teng bo'lmasin : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq f(a)$ (b-chekli son)

bu holda $f(x)$ funksiya bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega deyiladi

3-misol. Ushbu $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

funksiya uchun $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0)$ munosabat o'rinli. Demak, bu funksiya $x = 0$ nuqtada bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega.

Endi $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud emas deylik.

Bu holat , avvalo $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning o'ng va chap limitlari mavjud va chekli bo'lib, $f(a-0) \neq f(a+0)$ bo'lganda ro'y beriladi. Shu holda funksiya a nuqtada birinchi turdagi uzilishga ega deyiladi va $f(a+0) - f(a-0)$ ayirma uning a nuqtadagi sakrashi deyiladi. $x \to a$ da $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmaydigan boshqa hamma hollarda funksiya a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

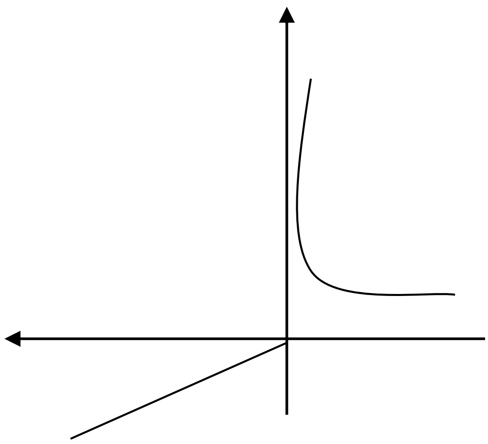
4-misol: Ushbu

$$f(x) = signx = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

funksiya uchun $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 1, \lim\limits_{x \to -0} f(x) = -1$. Demak, berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega.

5-misol. Ushbu $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & агар \ x > 0 \ булса \\ x, & агар \ x \leq 0 \ булса \end{cases}$

funksiya uchun $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0$ bo'lib, bu funksiya $x = 0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi.



3^0 $x \to a$ da $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty (+\infty, -\infty)$ bo'lsin. Bu holda ham $f(x)$ da a nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega deyiladi.

6-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ (x\neq 0),\ \ f(0)=0$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti $+\infty$ ga tengdir. (bu holda $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$)

Demak, berilgan funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Ajoyib limitlar

$y=f(x)$ funksiya $X\subset R$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, a nuqta X ning limit nuqtasi bo‘lsin. $z=\varphi(y)$ funksiya esa $Y\subset R$ to‘plamda aniqlangan. Bu funksiyalar yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=y_a$ mavjud bo‘lib, $z=\varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))$ mavjud va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi(y_a)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Haqiqatan, $x\to a$ da $f(x)\to y_a$ va $\varphi(y)$ funksiya y_a nuqtada uzluksiz, ya’ni $y\to y_a$ da $\varphi(y)\to\varphi(y_a)$. U holda murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremaga asosan $x\to a$ da $\varphi(f(x))$ funksiya limitga ega va $\lim\limits_{x\to a}\varphi(f(x))=\lim\limits_{y\to y_a}\varphi(y)=\varphi(y_a)$ tenglik o‘rinli. Bu tengliklardan uzluksiz funksiyalar uchun funksiya ishorasi ostida limitga o‘tish qoidasi kelib chiqadi:

$$\lim_{x\to a}\varphi(f(x))=\varphi(\lim_{x\to a}f(x)).$$

1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (birinchi ajoyib limit);

2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (ikkinchi ajoyib limit);

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ (uchinchi ajoyib limit, $a>0,\ a\neq 1$);

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$ ($a>0,\ a\neq 1$);

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$.

7-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ limitni birinchi ajoyib limitdan foydalanib hisoblang.

Yechish. $3x=\alpha$, deb almashtirish olsak, unda $x=\dfrac{\alpha}{3},\ x\to 0,\ \alpha\to 0$ bo‘ladi. Shuning uchun,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha/3}=3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=3\cdot 1=3,$$

chunki $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y=\dfrac{4}{x-2}$ funksiyaning uzilish nuqtasini toping va uzilish turini aniqlang.

2. 1) $y=-\dfrac{4}{x}$; 2) $y=tgx$; 3) $y=\dfrac{4}{4-x^2}$ funksiyalarning uzilish nuqtalari topilsin va grafiklari yasalsin.

3. $y=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & x\neq 2 \ \text{булганда}\\ 0, & x=2 \ \text{булганда}\end{cases}$ funksiyaning grafigi yasalsin va uning uzilish nuqtasi ko‘rsatilsin.

4. Ushbu

$$y=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}, & \text{агар } x\leq 2\\ x, & \text{агар } x>2\end{cases}$$

funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va uzilish turini aniqlang.

5. a ning qanday qiymatlarida

$$y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{агар } x\neq 3,\\ a, & \text{агар } x=3\end{cases}$$

funksiya $x=3$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi? Funksiya grafigini chizing.

Quyidagi limitlar topilsin.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; 7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 5x}$ 10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ 11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{3x}$ 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{3x}$ 14. $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2}{x-1}}$

Funksiya hosilasi

1. Funksiya hosilasi ta'rifi va hosila hisoblash qoidalari.

$f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin. Bu intervalda x_0 nuqta olib, unga shunday Δx $(\Delta x > 0;\ \Delta x < 0)$ orttirma beraylikki, $x_0 + \Delta x \in (a,b)$ bo'lsin. Natijada $f(x)$ funksiya ham x_0 nuqtada $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ orttirmaga ega bo'ladi.

Ta'rif. Agar $\Delta x \to 0$ da $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi.

Funksiyaning x_0 nuktadagi hosilasi odatda, $f'(x_0)$, yoki $y'_{x=x_0}$ yoki $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ simvollar bilan belgilanadi.

Agar (1) limit chekli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya x nuqtadagi differensiallanuvchi deyiladi; bunda $y = f(x)$ funksiya shu nuqtada albatta uzluksiz ham bo'ladi.

Hosilalar jadvali:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}; (x > 0)$;
2. $(cu)' = cu'$ $(c = const)$;
3. $(e^x)' = e^x$;
4. $(u + v)' = u' + v'$;
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
7. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$ $(a > 0, a \neq 1)$;
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ $(x > 0, a > 0, a \neq 1)$;
10. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(x > 0)$;
11. $(\sin x)' = \cos x$;

12. $(\cos x)' = -\sin x$;

13. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z)$;

14. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi\kappa, \kappa \in Z)$;

15. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$;

16. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ (-1 < x < 1)$;

17. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

18. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

1-misol. $f(x) = C = const$ bo‘lsin. Ravshanki, bu funksiyaning ixtiyoriy $x \in R$ nuqtadagi orttirmasi $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$ bo‘lib, undan $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ kelib chiqadi. Demak, o‘zgarmas sonning hosilasi nolga teng.

2) $y = f(x) = x$ bulsin. Bu funksiya uchun $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$ bo‘lib, undan $f(x) = x$ funksiyaning ixtiyoriy x nuqtadagi hosilasi $y' = 1$ bo‘lishi kelib chiqadi.

2-misol. Hosila ta’rifiga asosan, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ni hisoblab, $y = \sqrt{x}, \ (x > 0)$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

3-misol. Ushbu $y = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{2x^3}{3} + x$ funksiyaning hosilasini, hosilalar jadvalidan foydalanib toping.

Yechish. Hosilalar jadvalidagi birinchi qoidaga ko‘ra

$$y' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1;$$

4-misol. Ushbu $y = x^2 \cos x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosilalar jadvalidagi qoidalarga asosan

$$y' = (x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x + x^2(-\sin x) = x(2\cos x - x \sin x).$$

Hosilalar jadvalidan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin.

1. 1) $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-6$; 2) $y=\frac{ax+c}{b}$

2. 1) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+x$; 2) $y=\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^2$

3. 1) $y=x+2\sqrt{x}$; 2) $y=\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2$

4. 1) $y=x+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4x^4}$; 2) $y=3x-6\sqrt{x}$

5. 1) $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}$; 2) $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

6. 1) $y=x-\sin x$; 2) $y=x-tgx$

7. 1) $y=x^2\cos x$; 2) $y=x^2ctgx$

8. 1) $y=\frac{\cos x}{x}$; 2) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$

9. 1) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$; 2) $y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

10. 1) $y=x+\sin x$; 2) $y=x+tgx$

11. 1) $y=\sqrt{x}\cos x$; 2) $y=x^2tgx$;

12. 1) $y=x-\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}$; 2) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

2-mashg‘ulot. **Murakkab funksiyaning hosilasi**. **Asosiy teoremalar.**

1-ta’rif. $u=\varphi(x)$ funksiya (a,b) da, $y=f(u)$ funksiya esa (c,d) intervalda aniqlangan bo‘lib, bu funksiyalar yordamida $y=f(\varphi(x))$ funksiya tuzilgan bo‘lsin (bunda, albatta $x\in(a,b)$ da, $y=\varphi(x)\in(c,d)$ bo‘lishi talab qilinadi), bunday funksiyaga murakkab funksiya deyiladi.

U vaqtda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{yoki} \quad y'=f'(u)\cdot u'. \tag{1}$$

O‘tgan paragrafdagi formulalar, murakkab funksiyalar uchun quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

1. $(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$;
2. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;
3. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;
4. $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

5. $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

6. $(ctgu)' = \dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

7. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

8. $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

9. $(a^u)' = a^u \cdot \ln u \cdot u'$;

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11. $(\arccos u') = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12. $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13. $(arcctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$;

1-misol. $y = (1-5x)^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Yuqoridagi formulalardan va hosilalar jadvalidan foydalanib topamiz:

$y' = 4 \cdot (-5) \cdot (1-5x)^3 = -20(1-5x)^3$;

2-misol. $y = \sqrt{\cos 4x}$; funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Yuqoridagi formulalardan va hosilalar jadvalidan foydalanib topamiz:

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos 4x}}(\cos 4x)' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos 4x}}(-4\sin x) = -\dfrac{2\sin x}{\sqrt{\cos 4x}}$;

$y = \sin^4 x = (\sin x)^4$

$y' = (\sin x)^4 = 4(\sin x)^3 (\sin x)' = 4\sin^3 x \cos x$;

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1. 1) $y = \sin 6x$; 2) $y = \cos(a - bx)$;
2. 1) $y = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$; 2) $y = 6\cos\dfrac{x}{3}$
3. 1) $y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}$; 2) $y = \dfrac{1}{(1-x^2)^5}$;
4. 1) $y = \sqrt{2x - \sin 2x}$; 2) $y = \sin^4 x$;
5. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$;
6. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \cos^2 x$;
7. 1) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; 2) $y = tg^3 x - 3tgx + 3x$;

8. 1) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$; 2) $y=\sin\sqrt{x}$;

9. 1) $y=\dfrac{1}{(1+\cos 4x)^5}$; 2) $y=ctg^3\dfrac{x}{3}$;

10. 1) $y=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$; 2) $y=x\sqrt{x^2-1}$;

3-misol. Ushbu $y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$ funksiyaning hosilasini toping

$$y'=\frac{1}{\frac{x^2}{1-x^2}}\cdot\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{2x(1-x^2)-x^2(-2x)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{1-x^2}{x^2}\cdot\frac{2x-2x^3+2x^3}{(1-x^2)^2}=\frac{2}{x(1-x^2)};$$

4-misol. $y=a^{\sin x}$ funksiyaning hosilasini toping

$$y'=a^{\sin x}\ln(\sin x)(\sin x)'=a^{\sin x}\ln(\sin x)\cos x;$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1. 1) $y=x\ln x$; 2) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$; 3) $y=\lg(5x)$.

2. 1) $y=\ln x-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$; 2) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$; 3) $y=\ln(x^2+2x)$.

3. 1) $y=\ln(1+\cos x)$; 2) $y=\ln\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

4. 1) $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$; 2) $y=\ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; 3) $y=\lg(5x+3)$.

5. 1) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax}}$; 3) $y=\ln(tgx)$.

5-misol. Ushbu $y=\arccos(1-2x)$ funksiyaning hosilasini toping

$$y'=-\frac{(1-2x)'}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}=-\frac{(-2)}{\sqrt{1-1+4x-4x^2}}=\frac{2}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

Quyidagi funksiyalarning hosilalari topilsin:

1. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$; 2. $y=\arcsin\sqrt{1-4x}$. 3. $y=x-arctgx$; 4. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$.

6. $y=arctg\dfrac{x}{a}$; 7. $y=\arccos(1-2x)$. 8. $y=x\sqrt{1-x^2}+\arccos x$; 9. $y=\arcsin(e^{3x})$.

10. $y=xarctgx+\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; 11. $y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 12. $y=\arcsin\sqrt{x}$; 13. $y=arctg\sqrt{6x-1}$.

14. $y=x\arccos(1-x^2)$; 15. $y=arctgx-\dfrac{1}{x}$. 16. $y=\arccos\sqrt{1-3x}+\sqrt{2x-4x^2}$;

3. Yuqori tartibli hosila va differensiallar.

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir $x\in(a,b)$ nuqtasida $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lib, bu $f'(x)$ funksiya $x_0\in(a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa , u $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deb ataladi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $y''_{x=x_0}$, $f''(x_0)$, $(\frac{d^2y}{dx^2})_{x=x_0}$ belgilar bilan belgilanadi. $f(x)$ funksiyaning uchinchi , to‘rtinchi hokazo tartibdagi hosilalari xuddi shunga o‘xshash ta’riflanadi.Umuman $f(x)$ funksiyaning n tartibli hosilasi

$y^{(n)} = f^{(n)}(x),$ yoki $\frac{d^n y}{dx^n}$ bilan belgilanadi.

1-misol. $y=\sin^2 x$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

$$y'=(\sin^2 x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x;$$

$$y''=(\sin 2x)'=2\cos 2x;$$

2-misol. $y=x\cdot\ln x$ funksiyaning 3 -tartibli hosilasini toping.

$$y'=(x\ln x)'=\ln x+1;\quad y''=(\ln x+1)'=\frac{1}{x};\quad y''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Sodda qoidalar. Leybnits formulasi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) da aniqlangan bo‘lib, ular $x\in(a,b)$ nuqtada n-tartibli $f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsin. Buni quyidagicha tushunish lozim: $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x nuqtani o‘z ichiga olgan $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$ intervalda $f', f'',... f^{(n-1)}$ hamda $g', g'',......g^{(n-1)}$ hosilalarga ega bo‘lib, x nuqtada $f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ hosilalarga ega bo‘ladi. U holda

1. $\left[C\cdot f(x)\right]^{(n)}=C\cdot f^{(n)}(x),\ C=const$

2. $\left[f(x)\pm g(x)\right]^{(n)} = f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$

3. $$\left[f(x)\cdot g(x)\right]^{(n)} = f^{(n)}(x)g(x)+C_n^1 f^{(n-1)}(x)\cdot g'(x)+C_n^2 f^{(n-2)}(x)\cdot g''(x)+$$
$$+...+C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)+...+f(x)\cdot g^{(n)}(x).$$

bunda $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

3-misol. $y=e^x\cos x;$ funksiyaning 3- tartibli hosilasini Leybnits formulasi bo‘yicha toping.

$$y''' = [e^x \cos x]^{(3)} = (e^x)^{(3)} \cos x + C_3^1 (e^x)''(\cos x)' + C_3^2 (e^x)'(\cos x)'' +$$
$$+ e^x (\cos x)^{(3)} = e^x \cos x - 3e^x \sin x - 3e^x \sin x = e^x \cos x - 3e^x \sin x -$$
$$- 3e^x \cos x + e^x \sin x == -2e^x \sin x - 2e^x \cos x = -2e^x (\sin x + \cos x);$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = tgx$; 3) $y = \sqrt{1 + x^2}$ funksiyalarning 2- tartibli hosilalari topilsin.

2. 1) $y = \cos^2 x$; 2) $y = \dfrac{1}{x^2}$; 3) $y = x \sin x$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

3. 1) $y = x \ln x$; 2) $y = te^{-t}$; 3) $y = arctg \dfrac{x}{a}$ funksiyalarning 3- tartibli hosilalari topilsin.

4. 1) $y = \ln x$; 2) $y = e^{-\frac{x}{a}}$; 3) $y = \sqrt{x}$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

5. 1) $y = x^n$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = \cos^2 x$ funksiyalarning n- tartibli hosilalari topilsin.

6. Leybnits formulasi bo‘yicha:

1) $y = e^x \cos x$; 2) $y = a^x x^3$; 3) $y = x^2 \sin x$

funksiyalardan 2- tartibli hosilalar topilsin.

7. Leybnits formulasi bo‘yicha:

1) $y = e^{-x} \sin x$; 2) $y = x^2 \ln x$; 3) $y = x \cos x$

funksiyalardan 3- tartibli hosilalar topilsin.

8. $f(x) = xe^{\frac{x}{a}}$, $f'''(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(0)$ topilsin.

9. $f(x) = (1 + x)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f'''(x), \ldots,$ $f^{(n)}(0)$ topilsin.

10. 1) $y = e^{-x^2}$; 2) $y = ctgx$; 3) $y = \arcsin \dfrac{x}{2}$ funksiyalarning 2- tartibli hoslalari topilsin.

4. **Funksiyaning differensiali**.

Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa , ya’ni o‘sha nuqtada chekli y' hosilaga ega bo‘lsa , u holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$$

bo‘ladi, bunda $\Delta x \to 0$ da $\alpha \to 0$.

Bundan $\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x$

Funksiya ortirmasi Δy ning Δx ga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismi $y'\Delta x,$ funksiyaning differensiali deyiladi va dy bilan belgilanadi:

$$dy = y'\Delta x. \qquad (2)$$

(2) formulada $y = x$ deb $dx = x'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$ ga ega bo‘lamiz, shuning uchun ham

$$dy = y'dx \qquad (3)$$

Elementar funksiyalarning differensiallash jadvalini keltiramiz.

1. $d(x^n) = nx^{n-1}dx \quad (x > 0)$;
2. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \quad (a > 0, a \neq 1)$;
3. $d(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e\, dx \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1)$;
4. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$;
5. $d(\sin x) = \cos x dx$;
6. $d(\cos x) = -\sin x dx$;
7. $d(tgx) = \frac{1}{\cos^2 x}dx$;
8. $d(ctgx) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx$;
9. $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
10. $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;
11. $d(arctgx) = \frac{1}{1+x^2}dx$;
12. $d(arcctgx) = -\frac{1}{1+x^2}dx$.

1-misol. $y=\sqrt{1+x^2}$ funksiyaning differenitsialini toping

Yechish. $dy=(\sqrt{1+x^2})'dx=\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$;

2-misol. $y=(\ln\cos x)$ funksiyaning differensialini toping $dy=(\ln\cos x)'dx=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}dx=\dfrac{-\sin x}{\cos x}dx=-tgxdx;$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y=x^n$; 2) $y=x^3-3x^2+3x.$
2. 1) $y=\sqrt{1+x^2}$; 2) $s=\dfrac{gt^2}{2}.$
3. 1) $r=2\varphi-\sin 2\varphi$; 2) $x=\dfrac{1}{t^2}.$
4. 1) $d(\sin^2 t)$; 2) $d(1-\cos u).$
5. 1) $d\left(\dfrac{a}{x}+arctg\dfrac{x}{a}\right)$; 2) $d(\alpha+\ln\alpha)$;

Quyidagi funksiyalarning differensiallari topilsin.

1. 1) $y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$; 2) $r=\sin(a-b\varphi)$; 2) $s=\sqrt{1-t^2}.$
2. 1) $y=\ln\cos x$; 2) $z=arctg\sqrt{4u-1}$; 2) $s=e^{-2t}.$
3. 1) $d(\sqrt{x}+1)$; 2) $d(tg\alpha-\alpha)$; 3) $d(bt-e^{-bt}).$

5. Differensial hisobning asosiy teoremalari.

Teorema (Ferma teoremasi). $f(x)$ funksiya biror *X* oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki *s* nuqtasida o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar bu nuqtada funksiya chekli $f'(c)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda $f'(c)=0$ **bo‘ladi.**

Teorema (Roll teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniklangan, uzluksiz va $f(a)=f(b)$ bo‘lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda shunday $c\ (a<c<b)$ nuqta topiladiki,
$f'(c)=0$ bo‘ladi.

Teorema (Lagranj teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar bu funksiya (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, u holda shunday $c\ (a<c<b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ bo‘ladi.

Teorema (Koshi teorema). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar bu funksiyalar (a,b) intervalda chekli $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo‘lib, ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $c\ (a<c<b)$ nuqta topiladiki,
$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1-***misol.*** Ushbu $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya $(-1;1)$ intervalning ichki $x=0$ nuqtasida o‘zining eng kichik qiymatiga erishsa ham, bu funksiya uchun Ferma teoremasining xulosasi o‘rinli emas. Shuni ko‘rsating.

Yechish. Berilgan funksiya $x=0$ nuqtada o‘zining eng kichik qiymatiga erishadi. Biroq funksiya shu $x=0$ nuqtada chekli hosilaga ega emas. Bu ushbu
$\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}=\dfrac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ nisbatning $\Delta x\to 0$ da chekli limitga ega emasligidan kelib chikadi.

Demak, Ferma teoremasining sharti bajarilmaydi. Binobarin, teoremaning xulosasi o‘rinli emas.

2- ***misol.*** Ushbu $f(x)=x^2+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradimi?

Yechish. Ravshanki, berilgan funksiya [-1; 2] segmentda uzluksiz va $(-1;2)$ intervalda $f'(x)=2x$ hosilaga ega.

Demak, $f(x)=x^3+3$ funksiya [-1; 2] segmentda Lagranj teoremasiga ko‘ra shunday *s* nuqta (-1 < *c* < 2) topiladiki,
$\dfrac{f(2)-f(1)}{2-(-1)}=f'(c)=2c$ bo‘ladi. Keyingi tenglikdan $c=\dfrac{1}{2}$ ekanini topamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu $f(x)=\sin x$ funksiya uchun $[0;\,2\pi]$ segmentda Roll teoremasining shartlari bajariladimi?
2. Ushbu $f(x)=e^x$, $g(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ funksiyalar $[0;\,2\pi]$ segmentda Koshi teoremasining shartlarini kanoatlantiradimi?
3. Ushbu $f(x)=x(x^2-1)$ funksiya uchun $[0;\,2\pi]$ va $[0,\,1]$ segmentlarda Roll teoremasining shartlarini tekshiring.
4. $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \quad \text{булса} \\ 0, & \text{агар} \quad x=0 \quad \text{булса} \end{cases}$ funksiya uchun [-1; 1] oralikda Lagranj teoremasi o‘rinlimi?
5. $f(x)=x^2-4x+3$ funksiya ildizlari orasida uning hosilasining ham ildizi bor ekani tekshirilsin.
6. Roll teoremasini $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ funksiyaga [-1; 1] segmentda tatbiq qilish mumkinmi?
7. $y=x^2$ parabolaning qaysi nuqtasida o‘tkazilgan urinma $A(-1;1)$ va $B(3;9)$ nuktalarni birlashtiruvchi vatarga parallel bo‘ladi?
8. $[a,\,b]$ segmentda $f(x)=x^2$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin. Grafik usul bilan tushuntirlsin.
9. $[1;\,4]$ segmentda $f(x)=\sqrt{x}$ funksiya uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin.
10. $f(x)=x^3$ va $g(x)=x^2$ funksiyalar uchun Koshining $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ formula yozilsin hamda *s* topilsin.
11. $f(x)=x^3$ funksiya uchun Lagranjning $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ formulasi yozilsin va *s* topilsin.
12. Quyidagi funksiyalar uchun Lagranj formulasi yozilsin va *s* topilsin:
    1) [0; 1] segmentda $f(x)=arctg\,x$;
    2) [0; 1] segmentda $f(x)=\arcsin x$;
    3) [1; 2] segmentda $f(x)=\ln x$.

Hosila tatbiqlari

1. **Differensial hisobning ba’zi tatbiqlari.**

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya X oraliqda ($X \subset R$) berilgan bo‘lsin. Ma’lumki, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X da o‘suvchi, ixtiyoriy $x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya X da kamayuvchi deyiladi.

Monotonlikning zaruriy shartlari:

1. Agar (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘lsa, u holda $f'(x) \ge 0$.
2. Agar (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya kamayuvchi bo‘lsa, u xolda $f'(x) \le 0$.

Monotonlikning yetarlilik shartlari:

1). Agar (a,b) da differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega bo‘lsa, ya’ni $f'(x) > 0$, u holda funksiya shu oralikda o‘suvchi funksiya bo‘ladi.

2). Agar (a,b) da differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya manfiyhosilalga ega bo‘lsa, ya’ni $f'(x) < 0$, u holda funksiya shu oralikda kamayuvchi funksiya bo‘ladi.

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi nolga teng yoki hosilasi mavjud bo‘lmaydigan nuqtalarni kritik nuktalar deyiladi.

2. Funksiyaning ekstremumi. Agar x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo‘lsaki, bu atrofning har qanday $x \ne x_0$ nuqtasi uchun $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi. $f(x_0)$ qiymat $f(x)$ ning maksimum (minimum) qiymati deb ataladi .

Funksiyaning maksimum va minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumi deyiladi.

Ekstremumning zaruriy sharti

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada $(x_0 \in (a, b))$ chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega bo‘lib, bu nuqtada $f(x)$ funksiya ekstremumga erishsa, u xolda

$$f'(x_0) = 0$$

bo‘ladi.

Ekstremumning yetarli shartlari

Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa va o‘sha nuqta ixtiyoriy atrofining, balki faqat x_0 ning o‘zidan boshqa nuqtalarida chekli hosilaga ega bo‘lsa va agar x ning qiymati x_0 dan o‘tganda y' o‘z ishorasini «+» dan «–» ga o‘zgartirsa, u holda

$f(x_0) = y_{max}$ bo‘ladi;

y' o‘z ishorasini «–» dan «+» ga o‘zgartirsa, u holda

$f(x_0) = y_{min}$ bo‘ladi;

y' o‘z ishorasini o‘zgartirmasa, u holda funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

Uchinchi hol ($y'>0$ va $y'<0$ bo‘lganda) oddiy nuqtada hamda burilish nuqtasida va shuningdek sinish nuqtasida ro‘y beradi.

Demak, funksiyaning ekstremumini topish uchun:

1) y' ni topib, uni nolga aylantiruvchi yoki u mavjud bo‘lmagan kritik nuqtalarni topish kerak;

2) har bir kritik nuqtadan chap va o‘ng tomonlarida y' ning ishorasini, masalan, ushbu

x		x_1		x_2		x_3		x_4	
y'	—	0	+	yo‘q	—	0	—	- ∞	—
y	kamayadi	min	o‘sadi	max	kamayadi	burilish	kamayadi	burilish	kamayadi

ko‘rinishdagi jadval tuzib, aniqlash kerak.

Funksiya ekstremumining yetarli shartlari (tekshirishning ikkinchi usuli).

Agar biror $x=x_0$ nuqtada:

1) $y'=0$ va $y''<0$ bo‘lsa, u holda $f(x_0)=y_{max}$ bo‘ladi;

2) $y'=0$ va $y''>0$ bo‘lsa, u holda $f(x_0)=y_{min}$ bo‘ladi.

3) $y'=0$ bo‘lsa $y''=0$ bo‘lsa, u holda masala yechilmasdan qoladi va uni yechish uchun birinchi usulga murojaat qilish kerak.

1-misol. $y=3x^2-2x$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi – butun *Ox* o‘qi bo‘lib, uning hosilasi $y'=6x-2$.

Hosilani nolga tenglashtirsak $x=\frac{1}{3}$ bo‘lib, u kritik nuqta bo‘ladi.

Ox o‘qini bu nuqta bilan ikkita oraliqqa bo‘linadi: $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ va $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Bu oraliqlarda hosilaning ishorasini tekshirib, natijalarni quyidagi jadvalga yozamiz:

x	$(-\infty;0)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$
y'	—	0	+
y	$\searrow$	min	$\nearrow$

Demak, funksiyaning hosilasi $x=\frac{1}{3}$ nuqtada o‘ngdan chapga o‘tishda o‘z ishorasini manfiy (−) dan musbat (+) ga o‘zgartirar ekan. Berilgan funksiyaning o‘zi

$x=\frac{1}{3}$ nuqtada uzluksiz. Demak, $f(x)=3x^2-2x$ funksiya $x=\frac{1}{3}$ nuqtada minimumga erishadi. Uning minimum qiymati $\min f(x)=y_{\min}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$ bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning o‘sishi va kamayishi tekshirilsin.

1. $y=x^2$;
2. $y=x^3$;
3. $y=\frac{1}{x}$;
4. $y=\ln x$;
5. $y=tg\,x$;
6. $y=e^x$;
7. $y=4x-x^2$.

2. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1. $y=x^2+4x+5$;
2. $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$;
3. $y=\frac{x^4}{4}-x^3$;
4. $y=\sqrt[3]{x^2}-1$;
5. $y=1+2x^2-\frac{x^4}{4}$;
6. $y=4x-\frac{x^3}{3}$;
7. $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$;
8. $y=\frac{1}{1+x^2}$
9. $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$;
10. $y=x^2(1-x)$;
11. $y=1-\sqrt[3]{(x-4)^2}$;
12. $y=4x-tg\,x$ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ oralikda
13. $y=xe^{-\frac{x}{2}}$;
14. $y=x\ln x$.

3. Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va jadvallari tuzilsin.

1. $y=4x-x^2$;
2. $y=x^2+2x+3$;
3. $y=\frac{x^3}{3}+x^2$;
4. $y=\frac{x^2}{x-2}$
5. $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$;
6. $y=x^3+6x^2+9x$;
7. $y=x^3+\frac{x^4}{4}$;
8. $y=x-2\ln x$;
9. $y=\sin 2x-x,$ $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ oralikda.

3. Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtasi. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi $(a;b)$ oraliqning istalgan nuqtasida o‘tkazilgan urinmadan pastda yotsa, u holda funksiya grafigi qavariq deyiladi.

$y=f(x)$ funksiyaning grafigi $(a;\ b)$ oraliqning istalgan nuqtasida o‘tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, u holda funksiya grafigi botiq deyiladi.

Funksiya grafigining qavariq qismini botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0;\ f(x_0))$ nuqta grafikning egilish nuqtasi deyiladi.

$(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya’ni $f''(x)<0$ bo‘lsa, u holda bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo‘ladi.

$(a;b)$ oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya’ni $f''(x)>0$ bo‘lsa, u holda bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo‘ladi.

Qavariqlik oralig‘ini botiqlik oralig‘idan ajratib turuvchi egilish nuqtasidan o‘tishda funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi ishorasini o‘zgartiradi.

Bunday nuqtalarda funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi yo nolga teng, yoki mavjud bo‘lmaydi.

$f''(x)=0$ yoki $f''(x)$ mavjud bo‘lmaydigan nuqtalar ikkinchi tur kritik nuqtalar deyiladi.

Agar x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo‘lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o‘tishida ishorasini o‘zgartirsa, u holda bu funksiya grafigining x_0 abssissali nuqtasi egilish nuqtasi bo‘ladi.

Demak, funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topish uchun oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo‘lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Shundan keyin yetarlilik shartlaridan foydalanib, qavariqlik va botiqlik oraliqlari hamda egilish nuqtalari aniqlanadi.

1-misol. Ushbu $y=xe^{-x^2}$ funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini toping.

Yechish. Funksiya ikkinchi tartibli hosilasi

$$f''(x)=2xe^{-x^2}\left(2x^2-3\right) \text{ ni}$$

nolga tenglasak $x_1=0,\quad x_2=\sqrt{\frac{3}{2}},\quad x_3=-\sqrt{\frac{3}{2}}$ bo‘ladi.

$\left(-\infty;\ -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ va $\left(0,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ intervallarda $f''(x)<0$, ya’ni funksiya grafigi bu oraliqlarda qavariq.

$\left(-\sqrt{\frac{3}{2}};\ 0\right)$ va $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ +\infty\right)$ intervallarda $f''(x)>0$, ya'ni funksiya grafigi bu oraliqlarda botiq.

Demak, $A\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ -\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-\frac{3}{2}}\right)$, $B(0;\ 0)$, $C\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\ \sqrt{\frac{3}{2}}e^{\frac{-3}{2}}\right)$ nuqtalar funksiya grafigining egilish nuqtalaridir.

$y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. **Quyidagi funksiyalarning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini toping**.

1. $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>1,\ x>0$;
2. $f(x)=e^{x}$;
3. $f(x)=\ln x$;
4. $f(x)=x^5-10x^2+3x$;
5. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$;
6. $y=x^5+5x-6$;
7. $y=(x-4)^5+4x+4$;
8. $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;
9. $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$;
10. $y=\dfrac{e\ln x}{x}$;
11. $y=xe^{1-x}$;
12. $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$;
13. $y=\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{2}{x^2}$;
14. $y=x-\ln x$;

2. Quyidagi funksiyalar grafiklarining egilish nuqtalarini toping.

1. $y=x^5+5x-6$ 2. $y=xe^{1-x}$

2. $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$

3. $y=\cos x$

4. $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$

5. $y=(x^2-1)^3$

6. $y=2x^2+\ln x$

Funksiyalarni to‘liq tekshirish va grafiklarini yasash

Funksiyalarni tekshirish va ularning grafiklarini yasashni quyidagi qoida bo‘yicha amalga oshirish maqsadga muvofiqdir.

1) Funksiyaning aniqlanish to‘plamini topish;
2) Funksiyaning uzluksizligini tekshirish va uzilish nuqtalarini topish;
3) Funksiyaning juft, toq hamda davriyligini aniqlash;
4) Funksiyaning monotonligini tekshirish;
5) Funksiyaning ekstremumini tekshirish;
6) Funksiya grafigining qavariq va botiqlik oraliqlarini aniqlash, egilish nuqtalarini topish.

1-misol. Ushbu $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ funksiyani to‘liq tekshiring va grafigini yasang.

Yechish. 1)Berilgan funksiyaning aniqlanish to‘plami:
$D(f)=(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

2) Bu funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ bo‘lgani uchun u juft funksiyadir.

Demak, funksiyaning grafigi *Ou* o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘ladi va uni $[0;\,+\infty)$ oraliqda tekshirish kifoya.

3) Funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari:

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2},\quad f''(x)=\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$$

bo‘ladi.

Birinchi tartibli hosila $[0;\,+\infty)$ oraliqning $x=1$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida aniqlangan va $x=0$ nuqtada nolga aylanadi. Ikkinchi tartibli hosilaning $x=0$ nuqtadagi qiymati $f''(0)=-4<0$. Shuning uchun $f(x)$ funksiya $x=0$ nuqtada maksimumga ega va bu maksimum qiymat $f(0)=-1$ bo‘ladi.

Endi $(0;\,1)$ va $(1;\,+\infty)$ da $f'(x)<0$ bo‘lganidan bu to‘plamda $f(x)$ funksiyaning kamayuvchiligi kelib chiqadi. So‘ngra

$$\lim_{x\to1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty\ ,\quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$$

bo‘lgani uchun $x=\pm1$ (funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtalari) to‘g‘ri chiziqlar vertikal asimptotalar ekanligini va

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1$$

limitlarga ko‘ra $y=1$ gorizontal to‘g‘ri chiziq $f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi ekanligini hosil qilamiz.

Endi $1+3x^2=0$ tenglama haqiqiy sonlar o‘qida yechimga ega bo‘lmagani sababli funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga teng bo‘lmasligi, ya’ni egilish nuqtasi yo‘qligi kelib chikadi.

Ikkinchi tartibli hosilaning qiymatlari:

$[0;1)$ da $f''(x)<0$, $(1;+\infty)$ da $f''(x)>0$.

Demak, funksiya grafigi [0; 1) da qavariq va $(1;+\infty)$ da botiq bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning grafiklarini yasang.

1) $y=3x-x^3$;
2) $y=-x^3+4x-3$;
3) $y=-4x+x^3$;
4) $y=x^5-\frac{5}{3}x^3$;
5) $y=x(x-1)^3$;
6) $y=(x+2)^2(x-1)^2$;
7) $y=\frac{x^3}{x-1}$;
8) $y=x^5-x^3-2x$;
9) $y=x^4-2x^2+3$;
10) $y=(x+2)(x-1)^2$;
11) $y=x^4-8x^2+16$;
12) $y=x^3-3x^2+4$;
13) $y=x^3-9x^2+24x-7$;
14) $y=x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{x^4}{4}$;
15) $y=(x-3)\sqrt{x}$;
16) $y=1-x^2-\frac{x^4}{8}$.

5. Aniqmasliklarni ochish.(Lopital qoidalari)

1). $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va chekli hosilaga ega va $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo‘lsa (chekli yoki cheksiz), u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.Aniqmasliklarni bunday ochishga Lopital qoidasi deyiladi.

2. $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞} va 0^0 ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga keltiriladi.

1-misol. Ushbu $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$ limitni hisoblang.

Yechish. Bu holda $f(x)=x^2-1+\ln x$ va $g(x)=e^x-e$ bo‘lib, ular uchun $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$ shart bajariladi, ya’ni $\frac{0}{0}$ aniqmaslikka egamiz.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e},\quad g'(x)=e^x\neq 0$$

Demak, Lopital qoidasiga ko‘ra

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}$$

bo‘ladi.

2-misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ni toping.

Yechish. Ifodaning surati va maxraji $x\to 0$ da nolga intiladi, shu sababli $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka egamiz. Lopital qoidasidan foydalansak, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{1}{6}$

bo‘ladi. Bu misolda Lopital qoidasi ikki marta qo‘llanildi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi limitlar topilsin.

1.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$	10.	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$
2.	$\lim\limits_{x\to a}\frac{x-a}{x^n-a^n}$	11.	$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
3.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$	12.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$
4.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3}$	13.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$
5.	$\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\,\frac{x}{2}$	14.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}$
6.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}$	15.	$\lim\limits_{x\to 0} tg\,x\cdot\ln x$
7.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot ctg\,x-1}{x^2}$	16.	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$
8.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x-\sin x}$	17.	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$
9.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$	18.	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar

1. *Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar* haqida asosiy tushunchalar

1-ta’rif. R^2 fazoda biror D to‘plamning bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan $x \ va \ \ y$ o‘zgaruvchilari har bir (x, y) haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko‘ra E to‘plamdagi bitta z haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda ***ikki*** $x \ va \ \ y$ ***o‘zgaruvchilarning funksiyasi*** z ***aniqlangan*** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchining funksiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ (funksiya $U \ \ yoki \ y$ bilan o‘zgaruvchilar mos ravishda $x, t \ \ yoki \ x_1, x_2$ lar bilan belgilangan bo‘lsa $U = f(x, t) \ \ yoki \ y = f(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda $x, \ y$ o‘zgaruvchilarga erkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, Z ga erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi.

D to‘plamga *funksiyaning aniqlanish* sohasi, E to‘plamga o‘zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funksiyani M nuqtaning funksiyasi ham deb qaraladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o‘rniga $y = f(M)$ ham deb yozish mumkin.

Ikki o‘zgaruvchili funksiya berilish usullari ham, bir o‘zgaruvchili funksiyaga o‘xshash har xil bo‘lishi mumkin. Ko‘proq funksiyaning ***analitik usulda*** berilishini qaraymiz. Masalan. 1) $y = x_1^2 + x_2^2$ bu funksiya analitik usulda bo‘lib, $O \ \ X_1 \ X_2$ tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O‘zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo‘ladi. 2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funksiya aniqlangan bo‘lishi uchun $4 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad yoki \ x^2 + y^2 \leq 4$ bo‘lishi kerak, bunday nuqtalar to‘plami markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo‘lgan doiradan iborat. Qiymatlar to‘plami $[0,2)$ bo‘ladi. 3) $u = 1 \Big/ \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ funksiya $x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya’ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo‘lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to‘plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funksiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z = f(x, y)$ bo‘lgan sirtni ifodalaydi. Masalan: 1) $z = 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funksiya fazoda $2x + 3y - z - 12 = 0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo‘lib, $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funksiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta’rif . D to‘plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror qoida bo‘yicha E to‘plamdagi bitta y haqiqiy son mos qo‘yilgan bo‘lsa, D to‘plamda uch o‘zgaruvchining funksiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 erkli o‘zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o‘zgaruvchi yoki funksiya deb ataladi. Uch o‘zgaruvchining funksiyasi $y = f(x_1, x_2, x_3), \ \ u = f(x, y, z), \ \ u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida haqiqiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona $P(x, y, z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o‘zgaruvchining fuksiyasini $P(x, y, z)$ nuqtaning funksiyasi sifatida qarash mumkin. Shunday qilib, $u = f(x, y, z)$ o‘rniga, $u = f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to‘plami yoki butun fazo bo‘lishi mumkin. Masalan: $z=\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$ funksiya aniqlanish sohasi: $25-x^2-y^2-z^2\geq 0$ yoki $x^2+y^2+z^2\leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2+y^2+z^2=25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To‘rt o‘zgaruvchili va umuman n o‘zgaruvchili funksiyaga ham yuqoridagidek ta’rif berish mumkin. Bunday funksiyalar mos ravishda $y=f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ *yoki* $u=f(x,y,z,t)$, $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ bilan belgilanadi.

To‘rt va undan ortiq o‘zgaruvchiga bog‘liq funksiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko‘rgazmali namoyish etish mumkin emas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo‘lmasa y yo‘q deyish mumkin emas. Masalan, to‘rtinchi o‘zgaruvchi fazodagi temperatura, beshinchisi zichlik va h.k bo‘lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom ettirib n o‘zgaruvchining funksiyasini biror n o‘lchovli fazo $P(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtasining funksiyasi sifatida qarash mumkin.

2. ***Ikki va ko‘p argumentli funksiya limiti***. $y=f(x)$ funksiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o‘z ichiga olgan oraliq bo‘lar edi. Ikki argumentli $z=f(x,y)$ funksiya qaralganda ***nuqtaning δ atrofi*** deyilganda markazi $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha R(x,y) nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning δ atrofi ham shunga o‘xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqtada radiusi δ bo‘lgan sharning ichki nuqtalari bo‘ladi.

n o‘lchovli $(n>3)$ fazoda $P_0(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtaning δ- atrofi shunga o‘xshash aniqlanadi.

1-ta’rif. Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)=f(P)$ funksiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsa (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo‘lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ topilsaki $\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha R(x,y) nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon \quad yoki \quad |f(P)-A<\varepsilon|$$

tengsizlik bajarilsa, ***A o‘zgarmas son $z=f(x,y)$ funksiyaning*** $P\to P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \ yoki \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

bilan belgilanadi.

Limitning ta’rifidan kelib chiqadiki, A son $z=f(x,y)$) funksiyaning limiti bo‘lsa, $|f(x,y)-A|$ ayirma $x\to x_0$, $y\to y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo‘ladi. Uch va undan ortiq o‘zgaruvchi funksiyasining limiti ham yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi.

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyaning limiti 0 ga teng bo‘lsa, bunday funksiyaga cheksiz kichik funksiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremalar bir necha o‘zgaruvchining funksiyasi uchun ham o‘rinli ekanligini ta’kidlab o‘tamiz.

1-misol. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \dfrac{\sin xy}{y}$ limitni hisoblang.

Yechish. $P_0(2;0)$ nuqtada $z=\dfrac{\sin xy}{y}$ funksiya aniqlanmagan. $x\neq 0$ bo‘lgani uchun $\dfrac{\sin xy}{y}=\dfrac{x\sin xy}{xy}=x\dfrac{\sin xy}{xy}$ oxirgi tenglikda limitga o‘tib

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}x\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}}\frac{\sin xy}{xy}=2\cdot 1=2$$

chunki $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

3. ***<u>Ikki va ko‘p argumentli funksiyaning uzluksizligi va uzilishi.</u>*** 1-ta’rif. $z=f(x,y)=f(P)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ no‘qtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va

$$\lim_{P\to P_0}f(P)=f(P_0)\ \ yoki\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

bo‘lsa, ya’ni funksiyaning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi limiti funksiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo‘lsa, ***<u>funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz</u>*** deyiladi.

Bu ta’rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ funksiyaning $P_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi to‘liq orttirmasi bo‘lsin.

2-ta’rif. $z=f(x,y)=f(P)$ funksiya $P_0(x_0,y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo‘lsa, argumentlarning Δx *va* Δy cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$$

bo‘lsa, ***<u>funksiya R_0 (x_0,y_0) nuqtada uzluksiz</u>*** deyiladi.

3-ta’rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar **uzilish nuqtalari** deyiladi. Ikki o‘zgaruvchili funksiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

1-misol. $z=x^2+y^2$ funksiyaning $P_0(2;3)$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsating.

Yechish: Bu nuqtada funksiyaning to‘liq orttirmasini topamiz:

$$\Delta z=(2+\Delta x)^2+(3+\Delta y)^2-(2^2+3^2)=2^2+2\Delta x+\Delta x^2+$$
$$+3^2+6\Delta y+\Delta y^2-2^2-3^2=2\Delta x+\Delta x^2+6\Delta y+\Delta y^2$$

2-ta’rifga asosan $\lim\Delta z=\lim\left[2\Delta x+(\Delta x)^2+6\Delta y+\Delta y\right]=2\cdot 0+0+6\cdot 0=0$. Shunday qilib, $\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0$ *da* $\Delta z\to 0$. Demak, $P_0(2;3)$ nuqtada berilgan funksiya uzluksizdir. Bu holatni istalgan $P_0(x_0;y_0)$ uchun ko‘rsatish mumkin. (Bu o‘quvchiga havola etiladi). $z=f(x,y)$ funksiya biror to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, unga bu to‘plamda uzluksiz deyiladi.

2-misol. $z=\dfrac{1}{x^2-y^2}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping.

Yechish. Funksiya koordinatalari $z^2-y^2=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzilishga ega. Bu y=x va $y=-x$ to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib, bu to‘g‘ri chiziqlarga tegishli har bir nuqtada funksiya uzilishga ega bo‘ladi.

Ikki o‘zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ham bir o‘zgaruvchining uzluksiz funksiyasi ega bo‘lgan asosiy xossalarga ega bo‘ladi. (Bu xossalarni takrorlash o‘quvchiga tavsiya etiladi).

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini aniqlang va uning qandayligini izohlang:

1) $u = \sqrt{1 - x^2 - 9y^2}$; 2) $u = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$; 3) $u = \ln(x + y)$;

4) $u = \sqrt{4 - x^2 + y^2 - z^2}$; 5) $z = \sqrt{xy}$ 6) $z = \dfrac{xy}{y - x}$;

2. Quyidagi limitlarni hisoblang.

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4.}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$;

3. Quyidagi funksiyalarning istalgan nuqtada uzluksizligini ko‘rsating.

1) $z = x - y$; 2) $z = x^2 + 3y^2$; 3) $u = x + y + 2z$; 4) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2$

4 Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping.

1) $z = \dfrac{6}{x^2 - y^2 - 2}$; 2) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; 3) $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ko‘p argumentli funksiyalar nazariyasiga nimalar olib keladi?
2. Qanday funksiyalarga ikki argumentli funksiyalar deyiladi?
3. Uch argumentli funksiya deb nimaga aytiladi?
4. 2 va 3 argumentli funksiyalarning aniqlanish sohalari nima?
5. Ikki va undan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar limiti deb nimaga aytiladi?
6. Nuqtaning atrofi tushunchasi nima?
7. Ikki va undan ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar limiti qanday xossalarga ega?
8. Ikki va ko‘p argumentli funksiyalrning nuqtada uzluksizligini ta’riflang?
9. Ikki argumentli funksiya qanday nuqtalarda uzilishga ega deyiladi?
10. Qanday funksiyalar kesmada uzluksiz deyiladi?

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilasi va to'la differensiali

1. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy va to'la orttirmalari.

1. 1-ta'rif. $z = f(x,y)$ funksiyada x o'zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y ni o'zgarishsiz qoldirsak, funksiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funksiyaning x ***o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga Δy orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funksiyaning y ***o'zgaruvchi bo'yicha xususiy orttirmasi*** deyiladi va quyidagicha yoziladi

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

2-ta'rif. x *va* y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx *va* Δy orttirmalar olsa, $z = f(x,y)$ funksiya $\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ to'liq orttirma oladi.

2. 2-o'zgaruvchili funksiya xususiy hosilalari.1-ta'rif. *a*) $\lim \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x,y)$ funksiyaning ***x o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi*** deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_x = f'_x(x,y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x,y)$ funksiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiy hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x,y)$ bilan belgilanadi.

Xususiy hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki bir argumentli funksiyani differensiallashning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funksiyasining xususiy hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ xususiy hosilalarni toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarmas deb z'_x ni topamiz:

$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y$,

endi x ni o'zgarmas deb $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y$.

2-misol. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funksiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$u'_x = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

u'_y, u'_z larni mustaqil bajaring.

2. ***To'la differensial***. Ma'lumki, x *va* y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx *va* Δy orttirmalar olsa, $z = f(x,y)$ funksiya $\Delta z = f(x-\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ to'la orttirma oladi. Bu to‘la orttirmaning Δx *va* Δy larga nisbatan chiziqli bo‘lgan bosh qismi funksiyaning ***to‘la differensiali*** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z=f(x,y)$ funksiyaning to‘la differensiali

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu yerda $dx=\Delta x,\ dy=\Delta y.$ To‘la differensialdan funksiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya’ni $\Delta z\approx dz$ yoki $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx dz,$ bundan

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+z'_x dx+z'_y dy. \qquad (2)$$

Uch argumentli $u=F(x,y,z)$ funksiyaning to‘la differensiali

$$du=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz \qquad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$z'_x=\frac{\left(x^2+y^2\right)'_x}{x^2+y^2}=\frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad z'_y=\frac{\left(x^2+y^2\right)'_y}{x^2+y^2}=\frac{2y}{x^2+y^2},$$

(1) formulaga asosan $dz=\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$ bo‘ladi.

2-misol. $u=x^2yz^2$ funksiyaning to‘la differensialini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left(x^2yz^2\right)'_x=yz^2(x^2)'_x=2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left(x^2yz^2\right)'_y=x^2z^2(y)'_y=x^2z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(x^2yz^2\right)'_z=yx^2(z^2)'_z=2x^2yz.$$

(3) formulaga asosan $du=2xyz^2dx+x^2z^2dy+2x^2yzdz$ bo‘ladi.

3-misol. O‘lchovlari $a=8m,\quad b=6m,\quad c=3m$ bo‘lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko‘paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmi qanday o‘zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmi $v=xyz;$ x,y,z uning o‘lchamlari. Hajm orttirmasini taqriban $\Delta V\approx dV$ formuladan hisoblash mumkin.

$$dV=yxdx+xzdy+xydz$$

bo‘lib, shartga ko‘ra $x=8,\quad y=6,\quad z=3,\quad dx=0.1,\quad dy=0.05,\quad dz=-0.15$ bo‘lganligi uchun

$$\Delta V\approx dV=66\cdot 3\cdot 0.1+8\cdot 3\cdot 0.05+8\cdot 6(-0.15)=-4{,}2.$$

Shunday qilib, hajm taxminan $4.2m^3$ ga kamayadi.

4-misol. To‘la differensial formulasidan foydalanib:

$$1)\ arcctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02}-1\right), \quad 2)\ \sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$$

larni taqribiy hisoblang.

Yechish: To‘la differensial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funksiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang‘ich nuqtani shunday tanlash kerakki funksiyaning va xususiy hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo‘lsin. Shundan keyin (2) formuladan foydalanish kerak.

1) $arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)$ ifoda $f(x,y)=arcctg(\frac{x}{y}-1)$ funksiyaning $P_1(1.97;1.02)$ nuktadagi kiymati deyish mumkin. Boshlang‘ich nuqta uchun $P_0=(2;1)$ ni olsak, $\Delta x=1.97-2=-0.03,\quad \Delta y=1.02-1=0.02$ bo‘ladi. Endi xususiy hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{(x^2-y^2)}{y^2}}=-\frac{y}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f'_y(x,y)=\left[arcctg\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y\right]=-\frac{\left(\frac{x}{y}-1\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}-1\right)^2}=-\frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{\left(y^2+(x^2-y^2)\right)}{y^2}}=\frac{x}{y^2+(x-y)^2};$$

$$f'_x(2;1)=-\frac{1}{1+(2-1)^2}=-0.5;\qquad f'_y(2;1)=\frac{2}{1+(2-1)^2}=1.$$

(2) dan foydalansak,

$$arcctg\left(\frac{1.97}{1.02}-1\right)\approx arcctg\left(\frac{2}{1}-1\right)+(-0.5)(-0.03)+1\cdot 0.02=\frac{\pi}{4}+0.015+0.02=0.82$$

bo‘ladi.

2) $\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}$ ni $f(x,y,z)=\sqrt{x^y+\ln z}$ funksiyaning $P_1(1.04;\ 1.99;\ 1.02)$ nuktadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang‘ich nukta uchun $P_0(1;\ 2;\ 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda $\Delta x=1.04-1=0.04,\ \ \Delta y=1.99-2=-0.01,\ \ \Delta z=1.02-1=0.02.$ Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1;\ 2;\ 1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f_x'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_x}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\qquad f_x'(1;2;1)=\frac{2\cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=1;$$

$$f_y'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_y}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{x^y.\ln x}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\qquad f_y'(1;2;1)=\frac{1^2\cdot 0}{2\sqrt{1^2+\ln 1}}=0;$$

$$f_z'(x,y,z)=\frac{\left(x^y+\ln z\right)'_z}{2\sqrt{x^y+\ln z}}=\frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y+\ln z}},\qquad f_z'(1;2;1)=\frac{1}{2}.$$

(2) formulaning uch argumentli funksiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1{,}04^{1{,}99}+\ln 1{,}02}\approx\sqrt{1^2+\ln 1}+1\cdot 0{,}04+0\cdot(-0{,}01)+\frac{1}{2}\cdot 0{,}02=1{,}05$$

natijani olamiz.

3. ***Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differensiallar***.

1). $z = f(x, y)$ **funksiyaning *ikkinchi tartibli xususiy hosilalari*** deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y);$$

$f_{xy}''(x, y)$ va $f_{yx}''(x, y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ yozuv z funksiyani m marta x o'zgaruvchi bo'yicha va $(n-m)$ marta y o'zgaruvchi bo'yicha differensiallashni bildiradi.

1-misol. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1\right)_x' = 4x^3 + 8xy^3 + 7y\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1\right)_y' = 4x^2.3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{dx^2} = \left(4x^3 + 8xy^3 + 7y\right)_x' = 12x^2 + 8y^3\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{dx \partial y} = \left(4x^3 + 8xy^3 + 7y\right)_y' = 24xy^2 + 7\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{dy \partial x} = \left(12x^2y^2 + 7x\right)_x' = 24xy^2 + 7\,, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{dy^2} = \left(12x^2y^2 + 7x\right)_y' = 24x^2y\,.$$

2). ***Ikkinchi tartibli to'la differensial*** $d(dz) = d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 \qquad (1)$$

2-misol. $z = x^2y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli to'la differensialini toping.

Yechish. Xusisiy hosilalarni topamiz:

$$z_x' = \left(x^2y^3\right)_x' = 2xy^3; \;\; z_y' = 3x^2y^2; \;\; z_{xx}'' = 2y^3, \;\; z_{xy}'' = 6xy^2, \;\; z_{yx}'' = 6xy^2, \; z_{yy}'' = 6xy^2,$$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differensial

$$d^2z = 2y^3dx^2 + 12xy^2dxdy + 6x^2ydy^2.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?

2. Ikki argumentli funksiyaning xususiy hosilasi deb nimaga aytiladi?
3. Uch argumentli funksiyaning xususiy hosilalari nechta bo‘ladi?
4. Ikki argumentli funksiyaning to‘la differensiali deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning to‘liq orttirmasi va to‘la differensiali orasida bog‘lanish bormi?
6. To‘la differensialdan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkinmi?
7. Ikkinchi tartibli xususiy hosila qanday topiladi?
8. Ikki argumentli funksiyaning ikkinchi tartibli to‘la differensiali nimaga teng?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

1) $z = x^3 + 3x^2 y - y^3$ 2) $z = \dfrac{xy}{x-y}$; 3) $u = \dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} - \dfrac{x}{z}$;

4) $z = \sqrt{1 - \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2} + \arcsin\dfrac{x+y}{y}$.

2. Quyidagi funksiyalarning to‘la differensiallarini toping:

1) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; 2) $u = x^{y^2 z}$; 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2}$; 5) $s = x \ln t$.

3. $z = xy$ funksiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = -0{,}2$ bo‘lganda $dz\ va\ \Delta z$ larni hisoblang.

4. 1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sin 32^0 \cdot \cos 59^0$ taqribiy hisoblang.

5. $z = x^3 y + y^3$ funksiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{t}\right)$ funksiya uchun $\dfrac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ ekanligini tekshiring.

7. $u = arctg(2x - t)$ bo‘lsa, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z = (x^2 + y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ funksiya $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

tenglamani qanoatlantirishini isbotlang.

10. $u = x^4 y^2$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

11. $z = \sin x \cos y$ ikkinchi tartibli to‘la differensialini toping.

12 1) $u = \dfrac{y^2}{x^2}$; 2) $u = x \ln \dfrac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to‘la differensiallarini toping.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasining tatbiqlari.

1. ***Ikki argumentli funksiya ekstremumi***. 1-ta’rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_0(x_0; y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya’ni $f(x_0; y_0) > f(x, y)$ bo‘lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

2-ta’rif. $z = f(x, y)$ funksiyaning $P_1(x_1; y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan R(x,y) nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo‘lsa, ya’ni $f(x_1; y_1) < f(x, y)$ bo‘lsa, $z = f(x, y)$ funksiya $P_1(x_1; y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funksiya ekstremumga ega bo‘lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funksiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

***Ekstremumning zaruriy shartlari*:** $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz $z = f(x, y)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lsa, $\left.\begin{matrix} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{matrix}\right\}$ bo‘ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning hech bo‘lmaganda bittasi mavjud bo‘lmaydi.

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo‘lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo‘lmasligi ham mumkin.

***Ekstremumning yetarli shartlari*:**

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$$A = f''_{xy}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$$

bilan belgilaymiz va $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$ tuzamiz.

1) $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo‘lsa $z = f(x, y)$ funksiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo‘lib: a) A<0 yoki C<0 bo‘lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga, b) A>0 yoki C>0 bo‘lganda minimumga ega bo‘ladi;

2) $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo‘lsa, R_0 nuqtada ekstremum yo‘q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo‘lsa, ekstremum bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funksiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funksiya butun XOY tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo‘lishning zaruriy shartidan:

$$\left.\begin{matrix} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} y = x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{matrix} \left[x(1 - x^2)\right]^3 + x - x^{+x^3} = 0, \\ (1 - x^2)^3 = -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x_1 = 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 = 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{matrix}\right\}.$$

Demak, uchta O(0,0), $P_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ va $P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ kritik nuqtalarga ega bo‘lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo‘q, chunki $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$ xususiy hosilalar XOU tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$f''_{xx}(x,y)=12x^2-4;\ f''_{xy}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=12y^2-4;$

O(0,0) nuqtada ekstremumning yetarli shartini tekshiramiz: $A=-4,\quad B=4,\quad C=-4$; $\Delta = AC-B^2$ =-4·(-4)-4²=0 bo‘lib, yuqoridagi yetarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funksiya musbat ham, manfiy ham bo‘lishini ko‘ramiz, masalan OX o‘qi bo‘yicha ($y=0$)

$$f(x,y)_{y=0}=f(x,0)=x^4-2x^2=-x^2\left(2-x^2\right)<0.$$

$y=x$, bissektrisa bo‘yicha

$$f(x,y)\big|_{y=x}=f(x,x)=2x^4>0$$

bo‘ladi. Shunday qilib, O(0,0) biror atrofida $\Delta f(x,y)$ orttirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo‘q.

$P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada yetarli shartni tekshiramiz:

$AC-B^2$ =400-16>0 va A=20>0 demak $P_1(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ nuqtada funksiya minimumga ega. $f_{\min}$ =-8;

$P_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ nuktada yetarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun A=20, B=4, C=20 bo‘lib $\Delta = AC-B^2$ =400-16>0 va A=20>0 bo‘lganligi uchun $P_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funksiya minimumga ega bo‘ladi, $f_{\min}$ =-8

2-misol. $z=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}$$

P_0(1;1) nuqtada xususiy hosilalar mavjud emas. Demak, P_0 (1;1) nuqta kritik nuqta bo‘ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nukta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z=f\ (1+\Delta x),(1+\Delta y)=\sqrt{(1+\Delta x-1)^2+(1+\Delta y-1)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}>0,$$

bu ishora P_0 (1;1) nuktaning istalgan atrofida saqlanadi ya’ni P_0 (1;1) nuktada funksiya minimumga ega $z_{\min}=f(1;1)=0$;

2. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish. Chegaralangan yopiq sohada differensiallan- uvchi funksiya o‘zining ***eng katta va eng kichik qiymatiga*** yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu soha chegarasida erishadi.

1-misol. $z=x^2+y^2-xy+x+y$ funksiyaning $x\le 0, y\le 0, x+y\ge -3$ sohadagi eng katta va eng kichik kiymatlarini toping.

Yechish. Soha A0V uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

bundan $x = -1, y = -1$ bo‘lib, P_0=(-1,-1) kritik nuqtaga ega bo‘lamiz. Funksiyani soxa chegarasida tekshiramiz y=0, A0 chegarada $z = x^2 + x$ funksiya hosil bulib $z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$. Demak, P_1(-0,5, 0) chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada $z = y^2 + y$ funksiya hosil bo‘lib, $z'_y = 2y + 1 = 0$ u=-1/2, Demak, $P_2\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo‘ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$ bo‘lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funksiya hosil bo‘lib $z'_x = 6x + 9 = 0$ $x = -\dfrac{3}{2}.$ AB ning tenglamasidan $y = -3 + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{3}{2}$, demak, kritik nuqta $P_3\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ bo‘ladi.

Berilgan funksiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4}$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$z_4 = f(0) = f(0,0) = 0$$

$$z_5 = f(A) = f(-3,0) = 6$$

$$z_6 = f(B) = f(0,-3) = 6$$

Funksiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab $z_{eng\,kat.} = f(A) = f(B) = 6$ va $z_{eng\,kich.} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funksiyalarning ekstremumini tekshiring.

1. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2.$
2. $z = xy(12 - x - y).$
3. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1.$
5. $z = x^2 + 3(y + 2)^2.$
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20.$
7. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$
8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10.$
9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

Berilgan $z = f(x, y)$ funksiyaning berilgan chiziqlar bilan chegaralangan D yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

1. $z = x^2 - y^2 - x + y;\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1.$
2. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;\ x = 0,\ y = 0,\ 5x - 3y + 45 = 0.$
3. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5;\ x + y = 5,\ x = -1,\ y = -1.$
4. $z = 3y - 2x - xy;\ x = 0,\ y = 0,\ 3x - 4y = 12$.
5. $z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 2.$
6. $z = x^2 + 6xy - x + 3y;\ x = 0,\ x = 3,\ y = 0,\ y = 3.$
7. $z = x^2 + 2xy - 10;\ y = 0,\ y = x^2 - 4.$
8. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1;\ x = -3,\ y = 0,\ x + y + 1 = 0.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining zaruriy sharti nima?
2. Ikki argumentli funksiyaning ekstremumga ega bo‘lishining yetarli sharti nima?
3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?
4. Ikki argumentli funksiyaning biror yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

Aniqmas integral

1. Aniqmas integralning ta’rifi va uning xossalari. Ta’rif. $F(x)$ funksiya biror oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, $F(x)+C$ (bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas) funksiyalar to‘plami shu oraliqda $f(x)$ ***funksiyaning aniqmas integrali*** deyiladi va

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o‘zgaruvchisi, $\int$ integral belgisi deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx = F(x)+C$ simvol $f(x)$ funksiyaning hamma boshlang‘ich funksiyalari to‘plamini belgilaydi.

Berilgan funksiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

2. Aniqmas *integral quyidagi xossalarga* ega:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga, differensiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya’ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad \text{ва} \qquad d\int F(x)dx = F(x)dx;$$

2) biror funksiyaning hosilasidan hamda differensialidan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int f'(x)dx = f(x)+C \qquad \text{ва} \qquad \int dF(x) = F(x)+C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta’rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, $\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = F'(x)+0 = f(x)$ (qolganlarini keltirib chiqarish o‘quvchiga havola etiladi). Bu xossalardan differensiallash va integrallash amallari ma’lum ma’noda o‘zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin;

3) o‘zgarmas ko‘paytuvchini integral belgisidan chiqarish mumkin, ya’ni $K = const \neq 0$ bo‘lsa,

$$\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx;$$

bo‘ladi;

4) chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

3. ***Asosiy*** **aniqmas *integrallar jadvali*.**

Integrallashda maqsadga erishish uchun quyidagi asosiy integrallar jadvalini yoddan bilish zarur.

1) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C, \; n\neq -1;$ 2) $\int dx = x+C;$ 3) $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x|+C, (x\neq 0);$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$ 5) $\int \cos x dx = \sin x + C;$ 6) $\int e^x dx = e^x + C;$

7) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C, \; (0<a\neq 1);$ 8) $\int \dfrac{1}{a^2+x^2}dx = \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}+C;$

9) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\dfrac{x}{a}+C;$ 10) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C;$

11) $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C;$ 12) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0;$

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm k}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm k}\right| + C.$

Bu formulalarning to‘g‘riligini, tekshirish, tengliklarning o‘ng tomonidagi ifodalar differensiali, integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko‘rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1}dx = x^n dx.$$

Integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalariga hamda asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1,\ 5\int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2),\ \ -9\int dx = -9(x + C_3).$$

Demak,

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - C_3)$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o‘zining ixtiyoriy o‘zgarmasini qo‘shdik, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o‘zgarmasni qo‘shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lsa

$C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5\sin x - 9)dx = \frac{x^4}{4} - 5\cos x - 9x + C$$

Integralning to‘g‘ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o‘ng tomonini differensiallash bilan ko‘rsatish mumkin.(buni bajarishni o‘quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda aniqmas integralning 4) xossasidan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan

$$\int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx = \int\left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\right)dx = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx - \frac{1}{3}\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C.$$

bo‘ladi.

3-misol. $\int \frac{3dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ayniyatdan hamda aniqmas integralning 3) va 4) hossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\int\frac{3dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=3\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=3\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx+$$

$$+3\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=3\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+3\int\frac{1}{\sin^2 x}dx=3(tgx-ctgx)+C.$$

4-misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi 9) formulaga asosan

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int\frac{5x^8+6}{x^4}dx.$ 2. $\int\left(\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)dx.$ 3. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)dx.$ 4. $\int\frac{x^2+\sqrt{x}+3dx}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

5. $\int e^x\left(1-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx.$ 6. $\int\left(5^x+\frac{5^{-x}}{\sqrt{x}}\right)dx.$ 7. $\int\frac{5+3tg^2 x}{\sin^2 x}dx.$ 8. $\int\left(\frac{4}{9+x^2}-\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx.$

9. $\int\frac{dx}{x^2-49}.$ 10. $\int\frac{dx}{x^2+16}.$ 11. $\int\left(\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}-\frac{3}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx.$ 12. $\int\left(\frac{7}{x^2+7}-\frac{6}{x^2-3}\right)dx.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang‘ich funksiya qanday funksiya?
2. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral orasida qanday bog‘lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to‘g‘ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?
7. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali nimaga teng?

Integrallashning asosiy usullari

1. *<u>O‘zgaruvchini almashtirish</u>*. Ko‘p hollarda yangi o‘zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x)=t$ almashtirish olinib, (bunda t, yangi o‘zgaruvchi) o‘zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx=\int f(t)dt$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

O‘zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int(3x+1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x+1=t$ deb $3dx=dt$ yoki $dx=\frac{dt}{3}$ ekanligini hisobga olib,

$$\int(3x+1)^7 dx=\int t^7\frac{dt}{3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^8}{8}+C=\frac{t^8}{24}+C=\frac{(3x+1)^8}{24}+C.$$

2-misol. $\int\sqrt[3]{1+x^2}\cdot xdx$ integralni hisoblag.

Yechish. $1+x^2=t$ o‘zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2xdx=dt$ yoki $xdx=\frac{dt}{2}$ bo‘lib,

$$\int\sqrt[3]{1+x^2}\cdot xdx=\int\sqrt[3]{t}\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{3}}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{8}t\sqrt[3]{t}+C=\frac{3}{8}(1+x^2)\sqrt[3]{1+x^2}+C$$

bo‘ladi.

3-misol. $\int\cos mxdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx=\frac{1}{m}d(mx)$ o‘zgartirish olib,

$$\int\cos mxdx=\frac{1}{m}\int\cos mxd(mx)=\frac{1}{m}\sin mx+C$$

natijaga ega bo‘lamiz. Bunday integrallashga ***<u>bevosita integrallash</u>*** deb ataladi. Chunki $mx=t$ bilan o‘zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o‘zgaruvchini almashtirishdan foydalanmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x=t$ tenglik bilan o‘zgaruvchini almashtirib $\frac{dx}{x}=dt$

ekanligini hisobga olib,

$$\int(\ln x)^3\frac{dx}{x}=\int t^3\cdot dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{(\ln x)^4}{4}+C$$

natijani olamiz.

5-misol. $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=t^2$ bilan yangi o‘zgaruvchi kiritamiz oxirgi tenglikdan differensial topsak, u $dx=2tdt$ bo‘lganligi uchun

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2\int \sin tdt = -2\cos t + C = -2\cos\sqrt{x} + C$$

bo'ladi.

6-misol. $\int e^{\sin x} \cdot \cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos xdx = d(\sin x)$ ni hisobga olib,

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos xdx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2), \quad \cos xdx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax+b), \ldots.$$

tengliklardan foydalanib, o'zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib bevosita integrallash ham mumkin.

2. Bo'laklab integrallash. Bo'laklab integrallash usuli differensial hisobning ikkita funksiya ko'paytmasi differensiali formulasiga asoslangan.

Ma'lumki, $d(uv) = udv + vdu,$ bundan $udv = d(uv) - vdu.$ Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu.$$

bo'ladi. Shunday qilib,

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

formulani hosil qilamiz. (1) formulaga ***bo'laklab integrallash*** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int udv$ integraldan ikkinchi $\int vdu$ integralga o'tiladi. Demak, bo'laklab integrallash usulini qo'llash natijasida hosil bo'lgan ikkinchi integral berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo'lgandagina bu usulni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko'paytuvchilarga qulay bo'laklab olish natijasida erishish mukmin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun v va du larni aniqlash kerak bo'ladi. du ni topish uchun u ning differensiali topilib, v ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lib, uning istalgan bir qiymatini, xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differensiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo'lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo'lishi kerak.

Bo'laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz:

1-misol. $\int x\cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x,\ dv = \cos xdx$ deb bo'laklasak $du = dx,\quad v = \int \cos xdx = \sin x$ bo'lib, (1) formulaga asosan

$$\int \underset{u}{x} \underset{dv}{\cos xdx} = \underset{u}{x} \underset{v}{\sin x} - \int \underset{v}{\sin x} \underset{du}{dx} = x\sin x + \cos x + C$$

natijaga ega bo'lamiz. Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin xdx$ hosil bo'ldi, bu jadval integrali bo'lganligi uchun osongina topildi.

Bo'laklab integrallash formulasi ko'proq:

$a)\int p(x)e^{ax}dx,\ \int p(x)\sin mxdx,\ \int p(x)\cos axdx$ ва

$в)\int p(x)\ln xdx,\ \int p(x)\arcsin xdx,\ \int p(x)\arccos xdx,\ \int p(x)arctgxdx,\ \int p(x)arcctgxdx$

($p(x)$ biror darajali ko‘phad) ko‘rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda $a)$ guruh integrallarda u uchun $p(x)$ ko‘phad, qolgan qismi dv uchun olinib, $в)$ guruh integrallarda u uchun mos ravishda $\ln x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$ qolgan qismi dv uchun olinadi.

2-misol. $\int x^2e^{3x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u=x^2,\ dv=e^{3x}dx$ ko‘rinishda bo‘laklab olsak,

$$du=2xdx,\ \ v=\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}$$

hosil bo‘ladi. Bo‘laklab integrallash formulasiga asosan

$$\int x^2e^{3x}dx=x^2\frac{1}{3}e^{3x}-\int\frac{1}{3}e^{3x}2xdx=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx$$

bo‘ladi. Oxirgi hosil bo‘lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda x ning 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo‘llaymiz:

$$\int xe^{3x}dx=\left|\begin{matrix}u=x, & du=dx\\ dv=e^{3x}, & v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{matrix}\right|=x\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx=\frac{x}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x}+C_1=\frac{1}{3}e^{3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)+C_1$$

Shunday qilib, natijada

$$\int x^2e^{3x}dx=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}dx=\frac{x^2}{3}e^{3x}-\frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}e^{3x}\left(x-\frac{1}{3}\right)+C_1\right]=\frac{e^{3x}}{3}\left(x^2-\frac{2x}{3}+\frac{2}{9}\right)+C$$

hosil bo‘ladi.

3-misol. $\int x^3\cos 2xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek emas, teskarisini ya’ni $u=\cos 2x,\ dv=x^3dx$ ko‘rinishda bo‘laklab olaylik, bu holda

$$du=-2\sin 2xdx,\ \ v=\frac{x^4}{4}$$

bo‘lib (1) formuladan foydalangandan keyin,

$$\int x^3\cos 2xdx=\cos 2x\cdot\frac{x^4}{4}+\int\frac{x^4}{4}\cdot 2\sin 2xdx=-\frac{x^4}{4}\cos 2x+\frac{1}{2}\int x^4\sin 2x\,dx$$

ifoda hosil bo‘ladi. Keyingi $\int x^4\sin 2xdx$ integral berilgan $\int x^3\cos 2xdx$ integralga nisbatan murakkabroqdir (x ning darajasi bittaga ortdi). Demak, bunday bo‘laklab olish maqsadga muvofiq emas, ya’ni $u=x^3,\ dv=\cos 2xdx$ deb olish kerak edi(bu integralni hisoblashni o‘quvchiga havola qilamiz).

4-misol. $\int \arccos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \arccos x dx = \left| \begin{matrix} u = \arccos x, & du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \\ xdx = -\dfrac{dt}{2} \end{matrix} \right| = x\arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x\arccos x - \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= x\arccos x - \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Bu integralda bir marta bo‘laklab integrallagandan keyingi hosil bo‘lgan integralda o‘zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integralladik. Integrallash usullarini qo‘llashda o‘zgaruvchini almashtirganda yoki bo‘laklab integrallaganda yozuvda tartib bo‘lishi uchun yuqoridagi integralni hisoblangandagidek yozishga odat qilishni tavsiya etiladi.

5-misol. $J = \int e^x \cos xdx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo‘laklab integrallasak:

$$J = \int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = \cos x, \ du = -\sin xdx \\ dv = e^x dx, \ v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin xdx$$

hosil bo‘ladi.

Keyingi integral, berilgan integral bilan o‘xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo‘laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo‘llash bilan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = \sin x, & du = \cos xdx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos xdx.$$

Shunday qilib,

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo‘lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \qquad \text{ёки} \qquad J = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x dx$. 2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5} dx$.

3. $\int e^{-x^3} x^2 dx$. 4. $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$. 5. $\int (e^x + e^{-\frac{x}{2}})\, dx$. 6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.

7. $\int (5-2x)^9 dx$. 8. $\int \sqrt[3]{7-3x}\, dx$. 9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} dx$. 10. $\int \cos(1-3x)\, dx$.

11. $\int \sin(5x+7)\, dx$. 12. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$. 13. $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

15. $\int \frac{4^x}{\sqrt{25-16^x}} dx$. 16. $\int \frac{x^3\, dx}{1+x^6}$. 17. $\int \frac{e^{3x}\, dx}{9-e^{6x}}$.

18. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x} dx$. 19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$. 20. $\int x^2 \sin x\, dx$. 21. $\int x \ln x\, dx$. 22. $\int arctgx\, dx$.

23. $\int \arcsin x\, dx$. 24. $\int x^2 e^{2x} dx$. 25. $\int e^x \sin x\, dx$. 26. $\int (x+3) \sin x\, dx$.

27. $\int x \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$. 28. $\int xarctgx\, dx$. 29. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$. 30. $\int \frac{8x+5}{4x^2+5x+6} dx$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. O‘zgaruvchini almashtirib integrallashning mohiyati nima?
2. Bevosita integrallash nima?
3. Bo‘laklab integrallash usuli nimaga asoslanadi?
4. Bo‘laklab integrallash formulasini yozing?
5. Bo‘laklab integrallash qanday holda maqsadga muvofiq bo‘ladi?
6. Qanday hollarda bo‘laklab integrallashdan foydalaniladi?

Ratsional va irratsional funksiyalarni integrallash.

1. Ayrim <u>*ratsional funksiyalarni integrallash*</u>. Ma'lumki, har qanday ratsional funksiyani ratsional kasr ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n}.$$

Curatdagi ko'phadning darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik, ya'ni $m<n$ bo'lsa berilgan kasrga <u>***to'g'ri kasr ratsional***</u> funksiya deyiladi. Suratdagi ko'phadning darajasi $m\geq n$ bo'lsa, <u>***noto'g'ri kasr ratsional funksiya***</u> deyiladi. Kasr noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, suratni maxrajga, ko'phadni ko'phadga bo'lish qoidasiga asosan bo'lib, uning butun qismini ajratib, noto'g'ri kasr ratsional funksiya, to'g'ri kasr ratsional funksiyaga keltiriladi. Masalan,

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}$$

noto'g'ri kasr ratsional funksiyani

$$x^3+3x^2+3x+1 \ \textit{ни} \ \ x^2-x$$

ga bo'lib,

$$\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2-x}=x+4+\frac{7x+1}{x^2-x}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa,

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{P(x)}$$

shaklda ifodalash mumkin. Bu yerda $T(x)$ butun ratsional funksiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyadan iborat. Bu holda $T(x)$ funksiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallashni $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyani integrallashga keltirish mumkin.

1-misol. $\int\frac{x^4}{x^2+9}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto'g'ri kasr ratsional funksiyadan iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} -\ \ x^4 \qquad & x^2+9 \\ \cline{2-2} x^4+9x^2 & x^2-9 \\ \cline{1-1} -\ -9x^2 \qquad & \\ -9x^2-81 & \\ \cline{1-1} 81 & \end{array}$$

Demak, $\frac{x^4}{x^2+9}=x^2-9+\frac{81}{x^2+9}$

bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\int \frac{x^4}{x^2+9}dx = \int\left(x^2-9+\frac{81}{x^2+9}\right)dx = \frac{x^3}{3}-9x+81\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C = \frac{x^3}{3}-9x+27arctg\frac{x}{3}+C$$
.

2. Sodda to‘g‘ri kasr ratsional funksiyalar

$a)\ \frac{A}{x-a};$

$b)\ \frac{A}{(x-a)^k}\ (k>1\ \textit{бутун сон});$

$c)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ (\frac{p^2}{4}-q<0,$

ya’ni, kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas);

$d)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n>1$ butun son, $\frac{p^2}{4}-q<0$) ratsional kasrlarga <u>***sodda to‘g‘ri ratsional funksiyalar***</u> deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin, ya’ni,

$a)\ \int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C,$

$b)\ \int\frac{A}{(x-a)^k} = A\int(x-a)^{-k}d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}+C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$

$c)\ \int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

integralni hisoblaymiz.

Oldin xususiy hol,

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx$$

integralni qaraylik. x^2+px+q dan to‘la kvadrat ajratib, $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx = \int\frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \left|\begin{matrix} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{t^2+a^2}\ ,$$

bo‘lib, bu yerda $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda 8) jadval integralidan foydalanib,

$$\int\frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}arctg\frac{t}{a}+C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C \qquad (1)$$

natijani olamiz.

Endi $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ integralni hisoblaymiz.

$$Ax+B = (2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B$$

shakl o‘zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

Oxirgi tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right| + C_1$$

bo‘lib, ikkinchi integralni (1) formulaga asosan hisoblash mumkin.
Shunday qilib,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

1-misol. $\int \frac{x+3}{x^2-8x+25}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratamiz: $x^2-8x+25 = x^2-8x+16-16+25 = (x-4)^2+9,$ hamda $x-4=t,\ dx=dt$ almashtirish kiritib quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25}dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9}dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7\int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+9\right| + \frac{7}{3} arctg \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} arctg \frac{x-4}{3} + C.$$

3. **To‘g‘ri kasr ratsional funksiyani sodda kasrlar yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash.** $\frac{R(x)}{P(x)}$ to‘g‘ri kasr ratsional funksiyaning maxrajini $P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \cdot \ldots \cdot (x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m \cdot \ldots,$ ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lsa, bu funksiyani yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \ldots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \ldots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \ldots +$$
$$+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{\left(x^2+2kx+\ell\right)} + \ldots + \frac{F_mx+E_m}{\left(x^2+2kx+\ell\right)^m} + \ldots \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoyish mumkin. Bunda $r, s, \ldots t, m,$ musbat butun sonlar, a, b, p, q, k, ℓ, haqiqiy sonlar. $A_1, A_2, \ldots A_r, B_1, \ldots B_s, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots, F_1, E_1, \ldots, F_m, E_m$ lar ayrim haqiqiy sonlar.

(1) tenglikka to‘g‘ri ratsional funksiyaning ***<u>sodda kasrlar orqali yoyilmasi</u>*** deyiladi.

(1) yoyilmadagi $A_1, A_2, \ldots A_r, M_t, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ koeffitsiyentlarni topish uchun, uni $P(x)$ ga ko‘paytiramiz. $R(x)$ ko‘phad bilan (1) yoyilmaning o‘ng tomonida hosil bo‘lgan ko‘phad o‘zaro teng bo‘lishi uchun bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, F_m, E_m$, noma’lum koeffitsentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffitsiyentlarni topamiz.

Ratsional funksiya yoyilmasidagi noma'lum koeffitsiyentlarni bunday usul bilan topishga ***noma'lum koeffitsiyentlar usuli*** deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyani sodda kasrlar yoyilmasi ko'rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$ chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan qo'yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni x^2-5x+6 ga ko'paytirib $2x-1=A_1(x-2)+A_2(x-3)$ *ёки* $2x-1=(A_1+A_2)x-2A_1-3A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} A_1+A_2=2, \\ -2A_1-3A_2=-1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan $A_1=5,\ A_2=-3$ bo'ladi.

Shunday qilib,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{3}{x-2}$$

hosil bo'ldi.

2-misol. $\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ to'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishda yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2+1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2-1=A_1(x^2+1)^2+(M_1x+N_1)x(x^2+1)+(M_2x+N_2)x \quad \textit{ёки}$$

$$x^2-1=(A_1+M_1)x^4+N_1x^3+(2A_1+M_1+M_2)x^2+(N_1+N_2)x+A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} A_1+M_1=0, \\ N_1=0, \\ 2A_1+M_1+M_2=1, \\ N_1+N_2=0, \\ A_1=-1 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan $N_1=0,\ N_2=0,\ A_1=-1,\ M_1=1,\ M_2=2$ bo'ladi. Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

bo'ladi.

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funksiyani $\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)$ ikkita sodda kasrning ayirmasi ko‘rinishda yozish mumkin. Shuning uchun,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = -\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

bo‘ladi.

4-misol. $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to‘g‘ri ratsional funksiyani sodda kasrlar yig‘indisi shaklida yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2}.$$

Bu tenglikni $x^2(x+2)$ ga ko‘paytirib,

$$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \quad ёки \quad x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B$$

ega bo‘lamiz. Endi x ning bir xil darajalari koeffitsiyentlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0, \\ x^1 & 2A+B=1, \\ x^0 & 2B=-2, \end{array} \quad \text{bundan} \quad \begin{array}{c} A+C=0 \\ 2A+B=1 \\ B=-1 \end{array} \quad \text{bo‘lib,hamda} \quad \begin{array}{c} A=1 \\ C=-1 \end{array}$$

bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}.$$

Natijada

$$\int \frac{x-2}{x^3+2x^2}dx = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2}\right)dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

bo‘ladi.

4. Ayrim irratsional funksiyalarni integrallash. ***<u>Irratsional funksiyalarni integrallash</u>*** ko‘p hollarda o‘zgaruvchini almashtirish bilan ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi.

$a)$ $\int x^m(a+bx^n)^p$ integralni qaraymiz.

bunda m, n, p ratsional sonlar, a va b lar no‘ldan farqli o‘zgarmaslar. p butun son bo‘lsa Nyuton binomi bo‘yicha yoyish bilan integrallanadi;

$\frac{m+1}{n}$ butun bo‘lsa, $a+bx^n = t^s$ almashtirish orqali ratsionallashtiriladi, bunda s , p kasrning maxraji;

$\frac{m+1}{n}+p$ butun bo‘lsa, $ax^{-n}+b=t^s$ almashtirish olinib ratsional funksiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{\frac{1}{2}}dx$ ko‘rinishida yozib,

$m=-\frac{2}{3}$, $n=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n}=\frac{-2/3+1}{1/3}=\frac{1/3}{1/3}=1$ bo‘lganligi uchun $(1+x^{1/3})=t^2$ almashtirish olsak,

$$x^{1/3}=t^2-1,\ \frac{1}{3}x^{-2/3}dx=2tdt,\quad x^{-2/3}dx=6tdt$$

bo‘ladi.
Bularni berilgan integralga qo‘ysak:

$$\int x^{-2/3}(1+x^{\frac{1}{3}})^{1/2}dx=\int t\cdot 6tdt=6\int t^2dt=6\cdot\frac{t^3}{3}+C=2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2}+C$$

hosil bo‘ladi.

2-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integralni hisoblang

Yechish. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int x^0(1+x^4)^{-1/4}dx$, $m=0$, $n=4$, $p=-\frac{1}{4}$

$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ (butun) bo‘lganligi uchun $x^{-4}+1=t^4$ almashtirish olib,

$$x=(t^4-1)^{-1/4},\ dx=-t^3(t^4-1)^{-5/4}dt,\ \frac{x^4+1}{x^4}=t^4,\ \sqrt[4]{1+x^4}=tx,\ \sqrt[4]{1+x^4}=t(t^4-1)^{-1/4}$$

bo‘ladi.

Demak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{t^2dx}{t^4-1}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{t-1}\right)dt-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C,\quad t=\sqrt[4]{1+x^{-4}}$$

bo‘lganligi uchun

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^{-4}}+1}{\sqrt[4]{1+x^{-4}}-1}\right|-\frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{1+x^{-4}}+C$$

bo‘ladi.

$b)$ $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **integralni qaraymiz.**

Bunday ko‘rinishdagi ifodalarni integra~~llash~~ kvadrat uch haddan to‘la kvadrat ajratish bilan $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ *yoki* $\int\frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2+2x+5=x^2+2x+1+4=(x+1)^2+4$ to‘la kvadrat ajratib $x+1=u$ desak,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{du}{\sqrt{u^2+4}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right|+C=\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$$

bo‘ladi.

$c)\ \int \frac{dx}{(x+\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko‘rinishdagi integral $\frac{1}{x+\alpha}=t$ almashtirish orqali $b)$ ko‘rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x+1}=t$ bilan almashtirsak, $t(x+1)=1,\ tx+t=1,\quad x=\frac{1-t}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt$ bo‘lib,

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+2}}=\int \frac{t\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2+2\frac{1-t}{t}+2}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{1-2t+t^2}{t^2}+\frac{2-2t}{t}+2}}=$$

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+2t}}=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$$

bo‘ladi, bu jadval integraldir(oxirgi integralni davom ettirishni o‘quvchiga havola qilamiz).

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu ratsional funksiyalarni integrallang.

1. $\int \frac{x^3}{x-3}dx.$ 2. $\int \frac{x^4}{x^2+25}dx.$ 3. $\int \frac{x-5}{(x-2)(x+4)}dx.$ 4. $\int \frac{2x+9}{x^2+x+2}dx.$

5. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}dx.$ 6. $\int \frac{5x-1}{2x^2+x-3}dx.$ 7. $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)}dx.$ 8. $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x}dx.$

Ushbu irratsional ifodalarni integrallang.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}.$ 2. $\int \left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx.$ 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}dx.$ 4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}.$

5. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx.$ 6. $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx.$ 7. $\int \frac{7x-5}{\sqrt{\sqrt{5+2x-x^2}}}dx.$ 8. $\int \frac{\sqrt{x}+3}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Butun ratsional funksiya nimadan iborat?
2. Kasr ratsional funksiyalar qanday?
3. To‘g‘ri va noto‘g‘ri kasr ratsional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
4. Noto‘g‘ri kasr ratsional funksiyani integrallash, to‘g‘ri ratsional funksiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?
5. Sodda kasr ratsional funksiyalar deb nimaga aytiladi?
6. Sodda kasr ratsional funksiyalar qanday integrallanadi?
10. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli nima?
11. Qanday funksiyalar sinfiga irratsional funksiyalar deyiladi?
12. Irratsional funksiyalar qanday integrallanadi?

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

1. $\int \sin mx \cos nx dx,\ \int \sin mx \sin nx dx,\ \int \cos mx \cos nx dx$
ko'rinishdagi integrallar. Maktab kursidan ma'lum bo'lgan trigonometrik

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right],\quad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

formulalardan foydalanib, berilgan integrallarni

$$\int \sin ax dx,\quad \int \cos bx dx$$

integrallardan biriga keltirish mumkin.
1-misol. $\int \sin 2x\cos 7x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalarning birinchisidan foydalansak,

$$\int \sin 2x\cos 7x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 9x-\sin 5x)dx=\frac{1}{2}\int \sin 9x dx-\frac{1}{2}\int \sin 5x dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}(-\cos 9x)-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(-\cos 5x)+C=\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{18}\cos 9x+C$$

natijaga ega bo'lamiz.

2. $\int \sin^m x\cos^n x dx$ **ko'rinishdagi integrallar.** Bunda m,n lar butun sonlar. Xususiy hollarda m yoki n sonlardan birontasi 0 ga teng bo'lishi ham mumkin.

1). m yoki n sonlardan bittasi toq bo'lsin. Bu holda integral ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash mohiyati quyidagi misollardan tushunarli bo'ladi.

1-misol. $\int \sin^3 x\cos^4 x\, dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx=-d(\cos x)$ *va* $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ekanligini hamda $\cos x=z$ almashtirish kiritib quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \sin^3 x\cos^4 x dx=\int \sin^2 x\cos^4 x\sin x dx=\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x\left(-d\cos x\right)=$$

$$=-\int(1-z^2)z^4dz=-\int(z^4-z^6)dz=\frac{-z^5}{5}+\frac{z^7}{7}+C=\frac{-\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C.$$

2-misol. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx=-d\cos x$ bo'lgani uchun $t=\cos x$ bilan almashtirsak, $dt=-\sin x dx$ bo'ladi, hamda $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2,\quad \cos^2 x=t^2$ hisobga olib,

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin x dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x dx=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$

$$=-\int\frac{1}{t^2}dt+\int dt=\frac{1}{t}+t+C=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C.$$

Bu usuldan m va n sonlardan bittasi toq va musbat boshqasi ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganda ham foydalanish mumkin.

2). Endi m , n sonlarning ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo'lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

formulalardan foydalanib, trigonometrik funksiyalarning darajalarni pasaytirib, integrallanadi.

1-misol. $\int \sin^2 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

2-misol. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 x dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x) dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d \sin 2x = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi integrallarni hisoblang

1. $\int \sin 3x \sin 7x dx$. 2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$. 3. $\int \sin x \sin 3x dx$.

4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$. 5. $\int \cos 4x \cos 2x dx$. 6. $\int \sin 3x \cos x dx$.

7. $\int \sin x \cos^4 x dx$; 8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$. 9. $\int \sin^2 5x dx$.

10. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$. 11. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$. 12. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.

13. $\int tg^3 x dx$. 14. $\int ctg^3 x dx$. 15. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.

16. $\int \sin^4 x dx$. 17. $\int \cos^4 x dx$. 18. $\int \sin^5 x dx$.

19. $\int \cos^5 x dx$. 20. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$. 21. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x \, dx$

22. $\int \cos 7x \cos 3x dx$. 23. $\int \sin 4x \sin 2x dx$. 24. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Trigonometrik funksiyalarning ko‘paytmasini yig‘indiga keltiriladigan formulalarni yozing?

2. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalarni ratsional funksiyalarni integrallashga keltiriladi?

3. Qanday hollarda trigonometrik funksiyalarning darajasini pasaytirish bilan integrallanadi.

Aniq integral va uni hisoblash

1. Aniq integralning ta'rifi. $[a,b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. $[a,b]$ kesmani $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $(i=1,2,3,...,n)$ qismiy kesmalarga ajratamiz, har bir qismiy kesmada bittadan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nuqtalar tanlaymiz. Bu nuqtalarda $f(c_i)$ funksiya qiymatlarini hisoblab $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$ yig'indini tuzamiz, bu yig'indiga $y=f(x)$ funksiya uchun $[a,b]$ kesmadagi **integral yig'indi** deyiladi. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ belgilash kiritamiz.

Ta'rif. Integral yig'indining $[a,b]$ kesmaning $[x_{i-1}, x_i](i=1,2,3,...,n)$ qismiy kesmalarga bo'linish usuliga va ularda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \to 0$ da $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$,chekli limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi ***aniq integrali*** deyiladi va

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilanadi.

Ta'rifga asosan

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u ***integrallanuvchi*** ya'ni bunday funksiyaning ***aniq integrali*** mavjuddir.

2. Aniq integralning asosiy xossalari

1. Chekli sondagi integrallanuvchi funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx.$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. $[a,b]$ kesmada $f(x)\ge 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0$$

bo'ladi.

4. $[a,b]$ kesmada $f(x)\le g(x)$ tengsizlik bajarilsa,

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

bo'ladi.

5. c $[a,b]$ kesmadagi biror nuqta bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

6. m va M sonlar $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi mos ravishda eng kichik va eng katta qiymatlari bo‘lsa,

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

7. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

8. $\int_a^a f(x)dx=0$.

9. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(n)dn$

bo‘ladi.

10. $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

3. N’yuton-Leybnits formulasi. Aniq integralning ta’rifiga asosan, ya’ni cheksiz ko‘p sondagi cheksiz kichiklar yig‘indisining limitini hisoblash ancha qiyinchilikka olib keladi. Shuning uchun aniq integralni hisoblash uchun, boshqa, aniqmas integral bilan aniq integral orasidagi bog‘lanishga asoslangan usuldan foydalaniladi.

$F(x)$, $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

formula o‘rinli bo‘ladi, bunga **N’yuton-Leybnits formulasi** deyiladi. Bundan foydalanib, ***aniq integralning kattaligi*** hisoblanadi.

Shunday qo‘yilib, aniq integralni hisoblash uchun ham, aniqmas integraldagidek, boshlang‘ich funksiyani topish kerak ekan. Bunday masala bilan aniqmas integralni hisoblashda to‘laroq shug‘ullandik. Demak, aniqmas integralni hisoblashdagi hamma formula va usullar o‘z kuchida qolib, undan aniq integralni hisoblashda ham foydalanamiz.

1-misol. $\int_1^4 x^2dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{4^3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=\frac{63}{3}=21.$

Eslatma: $y=x^2$ funksiyaning $\frac{x^3}{3}$ boshlang‘ich funksiyasini oldik, buning o‘rniga ixtiyoriy $\frac{x^3}{3}+C$ boshlang‘ich funksiyasini olganda ham natija bir xil bo‘ladi. Haqiqatan, ham

$$\left.\left(\frac{x^3}{3}+C\right)\right|_1^4=\frac{4^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right)=\frac{64}{3}+C-\frac{1}{3}-C=\frac{63}{3}=21$$

bo‘ladi. Shuning uchun bundan keyin $C=0$ bo‘lgan boshlang‘ich funksiyani olamiz.

2-misol. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}\,dx$ integralni hisoblang:

Yechish; $\sqrt{x+4}=t$ almashtirish olamiz, $x=t^2-4,\ dx=2tdt$ bo‘lib,
$x=0$ bo‘lganda, $\sqrt{0+4}=t,\ t=2,\ \sqrt{5+4}=t,\ t=3$ bo‘ladi.

Shunday qilib,

$$\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx=\int_2^3(t^2-4)\,t\,2tdt=\int_2^3(2t^4-8t^2)dt=2\int_2^3 t^4dt-8\int_2^3 t^2dt=2\left.\frac{t^5}{5}\right|_2^3-8\left.\frac{t^3}{3}\right|_2^3=$$

$$=\frac{2}{3}(3^5-2^5)-\frac{8}{3}(3^3-2^3)=\frac{2}{5}\cdot 211-\frac{8}{3}\cdot 19=\frac{506}{15}=33\frac{11}{15}.$$

Demak, ***anig integralda o‘zgaruvchini almashtirilganda*** o‘zgaruvchilar bo‘yicha uning integrallash chegaralarini ham almashtirib olinsa, aniqmas integraldagidek oldingi o‘zgaruvchiga qaytish kerak emas.

3-misol. $\int_0^\pi x\sin xdx$ integralni hisoblang.

Yechish: ***Bo‘laklab integrallash***

$$\int_a^b udv=\left.uv\right|_a^b-\int_a^b udv$$

formulasidan foydalanamiz:

$$\int_0^\pi x\sin xdx=\left|\begin{array}{l}u=x\\ du=dx\\ dv=\sin xdx\\ v=-\cos x\end{array}\right|=\left.-x\cos x\right|_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx=\left.-\pi(\cos\pi+\sin x\pi)\right|_0^\pi=$$

$$=-\pi(-1)+\sin\pi-\sin 0=\pi.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int_2^4(x^3+x)dx$. 2. $\int_1^e\frac{1}{x}dx$. 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\cos^2 a}$. 4. $\int_4^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$.

5. $\int_{-5}^2\frac{dx}{x^2+4x-21}$. 6. $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. 7. $\int_{-2}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. 8. $\int_1^6\frac{x}{\sqrt{x+3}}$.

9. $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$. 10. $\int_\pi^0 x\cos xdx$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday masalalar aniq intgralga keltiriladi?
2. Integral yig‘indi qanday tuziladi?
3. Aniq integral deb nimaga aytiladi?
4. Aniq integral qanday belgilanadi?
5. Funksiya integrallanuvchi bo‘lishi uchun qanday xossaga ega bo‘lishi kerak?
6. Aniq integralning asosiy xossalari nimalardan iborat?
7. Nyuton-Leybnits formulasini yozing?
8. Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish usulini qanday bajarish mumkin?
9. Aniq integralni bo‘laklab integrallash nimadan iborat?

Aniq integralning tatbiqlari

1. Aniq integralning geometriyaga tatbiqlari. 1).Yassi figuralarning yuzlarini hisoblash. $y=f(x)$ funksiya grafigi, $x=a,\ x=b$ ikkita to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapesiya*** deyiladi. Bunday egri chiziqli trapesiyaning yuzi

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_a^b f(x)\,dx \qquad (1)$$

formula bilan hisoblanadi.

Umumiy hol, ya’ni $y=f_1(x),\ \ y=f_2(x),\ \ f_2(x)\ge f_1(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_1=\int_{x_1}^{x_2}[f_2(x)-f_1(x)]dx \qquad (2)$$

aniq integralga teng bo‘ladi .

$x=\varphi(y),\ y=c,\ y=d,\ x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuza

$$S_2=\int_c^d x\,dy=\int_c^d \varphi(y)\,dy \qquad (3)$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yuza

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x(t)\,dt \qquad (4)$$

formula bo‘yicha hisoblanadi

1-misol. $xy=6,\ x=1,\ x=e,\ y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang.

Yechish. $y=6/x$ bo‘lib, (1) formulaga asosan,

$$S_1=\int_1^e y\,dx=\int_1^e \frac{6}{x}dx=6\ln x\,\Big|_1^e=6(\ln e-\ln 1)=6\ \text{kv.bir.}$$

bo‘ladi.

2-misol. $y=x^2, y^2=x$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani toping.

Yechish:

tenglamalar sistemasidan $x^4=x, x^4-x=0,\ x_1=0; x_2=1$ kesishish nuqtalarining abssissalari bo‘lib, bu yuza (2) formulaga asosan ,

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{x}-x^2\right]dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^1-\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\left(\frac{2}{3}-0\right)-\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{1}{3}$$

bo‘ladi.

3-misol. Ellipsning

$$\begin{cases} x=3\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$$

parametrik tenglamasidan foydalanib uning yuzini toping.
Yechish. Ellips koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrikligidan foydalanib, hamda $x = 3\cos t$ tenglamada $x = o, x = 3$ bo‘lganda $t_1 = \pi/2$ $, t_2 = 0$ bo‘lganligini hisobga olib, (4) formulaga muvofiq,

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ydx = -\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t(-3\sin t)dt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = 24\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 12\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12t_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{12}{2}\sin 2t \,{}_0^{\frac{\pi}{2}} 12\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 6(\sin\pi - \sin 0) = 6\pi$$

bo‘ladi.

2). ***<u>Egri chiziq yoyi uzunligini hisoblash</u>*****.** To‘g‘ri burchakli koordinatlar sistemasida $y = f(x)$ $[a,b]$ kesmada silliq (ya’ni $y = f(x)$ hosila uzluksiz) bo‘lsa, bu egri chiziq yoyining uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx \tag{5}$$

formula yordamida hisoblanadi.

Egri chiziq parametrik tenglama

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}dx$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

Silliq egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$, $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, yoy uzunligi

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \tag{6}$$

formula bilan hisoblanadi.

4-misol. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroida yoyining uzunligini toping.

Yechish: Astroida koordinat o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun 1/4 yoy uzunligini topamiz.
Oshkormas funksiya hosilasiga asosan,

$\dfrac{2}{3x^{-\frac{1}{3}}} + \dfrac{2}{3y^{-\frac{1}{3}}}y' = 0$ bundan, $y' = -\dfrac{\sqrt[3]{y'}}{\sqrt[3]{x}}$. Yoy uzunligi (5) formulasiga asosan,

$$l = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\left(\sqrt[3]{y}/\sqrt[3]{x}\right)^2}dx =$$

$$= 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}dx = 4\int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 4\sqrt[3]{a}\int_0^a x^{-\frac{1}{3}}dx = 4\sqrt[3]{a}\,\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^a = 4\frac{3}{2}\sqrt[3]{a}\cdot\left(a^{\frac{2}{3}} - 0\right) = 6a$$

bo‘ladi.

3). Aylanma jism hajmini hisoblash

$y = f(x),\ x = a,\ x = b,\ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx \tag{7}$$

aniq integral bilan hisoblanadi.

$x = \varphi(y),\ y = c,\ y = d,\ x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y)dy \tag{8}$$

formula bilan hisoblanadi.

5-misol. $y^2 = 2x$ parabola, $x = 3$ to‘g‘ri chiziq va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra x o dan 3 gacha o‘zgaradi. Demak, (7) formulaga asosan

$$V_x = \pi \int_0^3 y^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx = \pi x^2 \Big|_0^3 = \pi(3^2 - 0^2) = 9\pi$$

bo‘ladi.

6-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Bunday jismga aylanma ellipsoid deyiladi. Ellips tenglamasidan $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$ bo‘lib, integralning chegaralari $c = -b,\ d = b$ bo‘ladi. (8) formulaga asosan,

$$V_y = \pi \int_{-b}^{b} a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)dy = \pi a^2 \int_{-b}^{b} dy - \frac{\pi a^2}{b^2}\int_{-b}^{b} y^2 dy = \pi a^2 y \Big|_{-b}^{b} - \pi \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-b}^{b} =$$

$$= \pi a^2[b - (-b)] - \pi \frac{a^2}{3b^2}\left[b^3 - (-b)^3\right] = 2\pi a^2 b - \frac{2}{3}\pi a^2 b = \frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

bo‘ladi. Demak, $V_y = \frac{4}{3}\pi a^2 b$. $a = b = R$ bo‘lsa, shar hosil bo‘lib, $V_m = \frac{4}{3}\pi R^3$ bo‘ladi.

2. <u>Aniq integralning iqtisodiyotga tatbiqlari.</u> 1). Ma’lumki, ***mehnat unumdorligi*** ish kuni mobaynida o‘zgaruvchi miqdordir. Mehnat unumdorligi $y = f(x)$ funksiya bilan ifodalansin, bunda x ish kunining boshlanishidan hisoblangan vaqt oralig‘i, $f(x)$ esa vaqtning shu onidagi (momentidagi) ***mehnat unumdorligini*** bildiradi. Mehnat unumdorligining ish kunining 4-soatidagi hajmini hisoblash masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Vaqtning (3,4) oralig‘ini eng kattasining uzunligi Δx bo‘lgan oraliqlarga bo‘lamiz va $f(x)$ funksiya bu kichik oraliqlarda o‘zgarmas desak ishlab chiqarish mehnat unumdorligi $f(x)\Delta x$ ko‘paytmaga teng bo‘ladi. Shunday qilib, ish kunining 4-soatidagi ishlab chiqarish mehnat unumdorligi

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{3}^{4} f(x)\Delta x = \int_{3}^{4} f(x)dx$$

aniq integral bilan ifodalanadi.

2). Mahsulotlar omboriga vaqt birligida keltiriladigan ***mahsulot miqdorini*** $f(x)$ va mahsulot omborga kelib tushushidan boshlangan vaqt igi x bo‘lsa, x dan $x+\Delta x$ vaqt oralig‘idagi omborga $f(x)\Delta x$ birlik mahsulot keladi. Demak, omborga mahsulot uzluksiz kelib tursa, undagi ***tovarning zahirasi***

$$\int_{0}^{x} f(x)dx$$

bilan ifodalanadi.

3). Mashinasozlik sanoati biror xildagi stanoklarni ishlab chiqaradi va yillik ishlab chiqarishi o‘zgarmas a ga teng bo‘lib, x shu stanoklar ishlab chiqarilgan yillar bo‘lsin.

Vaqtning t onidagi (momentidagi) stanoklar soni (ular ishdan chiqmagan deb olinadi).

$$\int_{0}^{t} a dx = [ax]_0^t = at$$

bo‘ladi. Agar ***mahsulot ishlab chiqarish hajmi*** arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi, ya’ni

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

bo‘lsa, stanoklar soni

$$\int_{0}^{t} (a_0 + a_1 x)dx = \left[a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} \right]_0^t = a_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}$$

bo‘ladi.

4). Yillik *daromad t vaqtning funksiyasi* $D = f(t)$ *bo‘lsin*. Protsent (foiz) me’yori ulushi i bo‘lib, foizlar ustiga qo‘shib uzluksiz hisoblanadi. Daromadning t yilga hisoblangan diskontli hajmini toping. Diskont deb oxiri jami mablag‘ bilan boshlang‘ich mablag‘ orasidagi farqqa aytiladi.

Bu miqdorni hisoblash uchun, vaqt oralig‘i $\boldsymbol{t}$ ni n ta teng bo‘laklarga ajratamiz. Vaqtning juda ham kichik Δt oralig‘ida daromadni o‘zgarmas deb $f(t)\,\Delta t$ ga teng qilib olish mumkin. Uzluksiz ustiga qo‘shib hisoblangan foizlarda diskontli daromad quyidagicha hisoblanadi:

$$\frac{f(t)\Delta t}{e^{it}} = f(t)\Delta t e^{-it}.$$

$(0, t)$ vaqt oralig‘idagi diskontli daromad miqdori

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{0}^{t} f(t)e^{-it}\Delta t = \int_{0}^{t} f(t)e^{-it}dt$$

aniq integralga teng bo‘ladi.

Xususiy holda, yillik daromad o‘zgarmas bo‘lsa, ya’ni $f(x) = a$ bo‘lsa, diskontli daromad

$$d = \int_{0}^{t} ae^{-it}dt = a\int_{0}^{t} fe^{-it}dt = a\left[-\frac{1}{i}e^{-it} \right]_0^t = \frac{a}{i}\left(1 - e^{-it}\right)$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Qo‘yidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzlarini hisoblang.

1) $y = x^2 - 6x + 8, \quad y = 0;$ 2) $x = 4 - y^2, \quad x = 0;$ 3) $y = \ln x, \ x = e, \ y = 0.$

4) $y = \frac{x^2}{2}$ parabola, $x = 1, \ x = 3$ to‘g‘ri chiziqlar va OX o‘qi bilan chegaralangan;

5) $x = 2 - y^2 - y^2, \quad x = 0;$ 6) $y = 2 - x^2, \quad y = x^2;$

7) $y = x^2 + 4x, \ y = x + 4;$ 8) $x = 3t^2, \quad y =^3 t - t^3;$

2. $xy = 4, \ x = 1, \ x = 4, \ y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OX o‘qi atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

3. 1) $y^2 = (x+4)^3$ *va* $x = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.
2) $y = x^3$, $x = 0, \ y = 8$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning OY o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jism hajmini hisoblang.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Aniq integral yordamida qanday yuzalarni hisoblash mumkin?
2. Egri chiziq yoyining uzunligi qanday formula yordamida hisoblanadi?
3. Aylanma jism hajmini hisoblash formulasi nimadan iborat?
4. O‘zgaruvchan kuchning bajargan ishi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
5. Mehnat unumdorligi funksiyasi nima?
6. Ishlab chiqarish mehnat unumdorligini aniq integral yordamida hisoblash mumkinmi va qanday?
7. Omborga keltirilgan mahsulotlar miqdorini aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
8. Mahsulot ishlab chiqarish arifmetik progressiya bo‘yicha o‘suvchi bo‘lsa, uning hajmi aniq integral yordamida qanday hisoblanadi?
9. Yillik daromad funksiyasi nima?
10. Diskontli daromad nima va u aniq integral yordamida qanday hisoblanadi.

Aniq integralni taqribiy hisoblash. Xosmas integrallar

1.Aniq integralni taqribiy hisoblash. Hisoblash amaliyotida ko‘pincha boshlang‘ich funksiyalari elementar bo‘lmagan, ya’ni chekli ko‘rinishda ifodalab bo‘lmaydigan funksiyalardan olingan integrallar bilan, shuningdek, jadval yoki grafik usulda berilgan funksiyalardan olingan integrallar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bunday hollarda Nyuton - Leybnits formulasini qo‘llab bo‘lmaydi va integral taqribiy usullar yordamida hisoblanadi.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo‘lib ulardan ko‘proq ishlatiladiganlari trapesiyalar va Simpson usullaridir.

1). ***Trapesiyalar formulasi*.**

$$\int_a^b f(x)dx$$

aniq integralni hisoblash talab etilsin $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz $[a,b]$ kesmani $a=x_0<x_1<x_2<....<x_n=b$ nuqtalar orqali n ta teng qismiy kesmalarga ajratamiz. Funksiyaning x_i nuqtalaridagi $y_i=f(x_i)$ qiymatlarini hisoblaymiz $(i=1,n)$. $[x_{i-1},\ x_i]$ qismiy kesmalarning uzunligi $\frac{(b-a)}{n}$ kattalik integrallash qadami deyiladi. Bo‘linish nuqtalaridan $y_0,\ y_1,\ y_2, ...,\ y_n$ ordinatlarni o‘tkazamiz. Ordinatlar oxirlarini to‘g‘ri chiziqlar bilan tutashtirib trapesiyalar hosil qilamiz.

Aniq integralning taqribiy qiymati uchun, hosil bo‘lgan trapesiyalar yuzlarining yig‘indisini olamiz. Bu holda

$$S=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{y_0+y_1}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{y_1+y_2}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+\frac{y_2+y_3}{2}\cdot\frac{b-a}{n}+...+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\cdot\frac{b-a}{n}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, natijada

$$S=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+y_3+...+y_{n-1}\right] \quad (1)$$

formulani olamiz. (1) formulaga ***trapesiyalar formulasi*** deb ataladi. Bu formulada egri chiziqli trapesiyalarning yuzlarini to‘g‘ri chiziqli trapesiyalar yuzlari bilan taqriban almashtirdik. n o‘sib borishi bilan to‘g‘ri chiziqli trapesiyalarning yuzi egri chiziqli trapesiyalar yuzlariga cheksiz yaqinlashib boradi.

Bu taqribiy hisoblashda yo‘l qo‘yilgan ***absolyut xato***

$$M_2\frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

ifodadan katta emasligini ko‘rsatish mumkin, bunda M_2, $|f''(x)|$ ning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati.

2). *Simpson formulasi*. $[a,b]$ kesmani $n=2m$ ta juft miqdordagi teng qismlarga bo‘lamiz. Uchta $(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)$ nuqtalar olib ulardan parabola o‘tkazamiz. Bu parabola bilan $y=f(x)$ funksiyaning $[x_0,x_2]$ kesmadagi grafigini almashtiramiz. Xuddi shunga o‘xshash $y=f(x)$ funksiyaning grafigini $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$ va boshqa kesmalarda ham almashtiramiz.

Shunday qilib, bu usulda berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan trapesiyaning yuzini $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, $[x_4,x_6]$,..... kesmalarda parabolalar bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yig‘indisi bilan almashtiriladi. Bunday egri chiziqli trapesiya ***parabolik trapesiya*** deyiladi.

Parabolik trapesiyalar yuzlarini qo‘shib,

$$S = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})\right] \qquad (2)$$

natijaga ega bo‘lamiz. Bu formulaga ***Simpson (parabolalar) formulasi*** deyiladi. Simpson formulasining ***absolyut xatosi*** $\underline{M_4 \frac{(b-a)^5}{2880 n^4}}$ dan katta bo‘lmaydi, bunda M_4, $\left|f^{(5)}(x)\right|$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati. Xatolarni baholash ifodalaridan ma’lumki n^4 kattalik n^2 kattalikka nisbatan tezroq o‘sgani uchun Simpson formulasining xatoligi trapesiyalar formulasi xatosiga nisbatan ancha tez kamayadi.

1-misol. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ aniq integral trapesiyalar va Simpson formulalaridan foydalanib taqribiy hisoblansin.

Yechish. $[0,1]$ kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = 0.2,\ x_2 = 0.4,\ x_3 = 0.6,\ x_4 = 0.8,\ x_5 = 1$ nuqtalar yordamida 5 ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Keyin $f(x) = e^{-x^2}$ funksiyaning shu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz.

$f(x_0) = f(0) = e0 = 1,$ $\qquad f(x_1) = f(0.2) \approx 0.96079,$

$f(x_2) = f(0.4) \approx 0.85214,$ $\qquad f(x_3) = f(0.6) \approx 0.69768,$

$f(x_4) = f(0.8) \approx 0.52729,$ $\qquad f(x_5) = f(2) \approx 0.36788.$

Trapesiyalar formulasi bo‘yicha

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{5}\left[\frac{1+0.36788}{2} + 0.96079 + 0.85214 + 0.69769 + 0.52729\right] = 0.74805$$

bo‘ladi.

Simpson formulasi bo‘yicha, hisoblash uchun $[0,1]$ kesmani $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{3}{4},\ x_4 = 1$ nuqtalar orqali 4 ta teng bo‘laklarga ajratamiz va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari

$y_0 = 1,\quad y_1 = (0.25) \approx 0.9394,\quad y_2 = (0.5) \approx 0.7788,$

$y_3 = (0.75) \approx 0.5698,\quad y_4 = (1) \approx 0.3679$

bo‘ladi.

Simpson formulasiga asosan,

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{12}\left[1 + 0.3679 + 4(0.9394 + 0.5698) + 2\cdot 0.7788\right] \approx 0.7469$$

natijaga ega bo‘lamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday hollarda taqribiy hisoblash usullaridan foydalanish mumkin?
2. Trapesiyalar formulasi qanday yoziladi ?
3. Simpson fomulasini yozing.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $\int_0^1 x^2 dx$ integralni $n = 5$ bo‘lakka bo‘lib, trapesiyalar formulasi bilan taqribiy hisoblang. Uning aniq qiymati va taqribiy qiymati farqini baholang.

2. $\int_1^2 \frac{dx}{1+x}$ integralni $n = 10$ teng bo‘laklarga bo‘lib, trapesiyalar va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblang ikkala holda ham xatolarni baholang.

Xosmas integrallar

Aniq integralning ta’rifida integrallash chegaralari chekli va integral ostidagi funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan deb olingan edi. Bu shartlardan hech bo‘lmaganda birortasi bajarilmasa, integralning yuqoridagi ta’rifi ma’nosini yo‘qotadi.

Biroq nazariy va amaliy mulohazalarga muvofiq aniq integralning ta’rifi bu cheklanishlar bajarilmaydigan hollar uchun ham umumlashtirilishi mumkin.

Bunday integrallar bizga tanish bo‘lgan aniq integrallarga xos bo‘lmagan qisqacha ***xosmas integrallar*** deb aytiladi.

1). Uzluksiz funksiyalarning cheksiz oraliq bo‘yicha integrallari. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda berilgan va uning istalgan qismi $[a,+A]$ da integrallanuvchi, ya’ni istalgan $A>a$ da aniq integral mavjud bo‘lsin. Bu holda

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx = J$$

limitga $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliqdagi xosmas integrali deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$J=\int_a^\infty f(x)dx. \qquad (1)$$

J limit chekli bo‘lsa, xosmas integral ***yaqinlashuvchi*** deyiladi. Limit mavjud bo‘lmasa, xosmas integral ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

$f(x)$ funksiyadan $(-\infty,a]$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integral ham xuddi yuqoridagiga o‘xshash aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx=\lim_{A\to-\infty}\int_A^a f(x)dx. \qquad (2)$$

$f(x)$ funksiyadan $(-\infty,+\infty)$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integral qo‘yidagicha aniqlanadi.:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\int_{-\infty}^a f(x)dx+\int_a^\infty f(x)dx \qquad (3)$$

bu yerda a istalgan son. (3) integrallarda o‘ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashsa chap tomondagi integral ham yaqinlashuvchi deyiladi. O‘ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashsa, chap tomondagi integral ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Xosmas itegrallarni hisoblash uchun Nyuton-Leybnits formulasidan foydalaniladi. $F(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ oraliqda $f(x)$ uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa,

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)dx=\lim_{A\to\infty}\left[F(A)-F(a)\right]=F(+\infty)-F(a)=F(x)$$

bo‘lib, bu yerda: $F(+\infty)=\lim_{A\to\infty}F(A)$ integralning yaqinlashishini yoki uzoqlashishini aniqlaydi.

1-misol. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integralning yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: (1) formulaga asosan,

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctgx \Big|_1^{\infty} = \lim_{x\to\infty} arctgx - arctg1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

bo‘ladi. Demak, integral yaqinlashuvchi va $\frac{\pi}{4}$ ga teng.

2-misol. $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ xosmas integralning yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_1^{A} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \ln x \Big|_1^{A} = \lim\limits_{A\to\infty} (\ln A - \ln 1) = \lim\limits_{A\to\infty} \ln A = \infty$ bo‘lib, bu integral uzoqlashuvchi.

2). Chegaralanmagan funksiyalarning chekli oraliq bo‘yicha xosmas integrallari. $(a,b]$ intervalda uzluksiz va $x=a$ da aniqlanmagan yoki uzilishga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiyaning xosmas integrali quyidagicha belgilanib aniqlanadi:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (1)$$

Oxiri limit mavjud bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi aks holda uzoqlashuvchi deyiladi. Bunday integrallarga 2-tur xosmas integral deyiladi.

Integral ostidagi $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang‘ich funksiya ma’lum bo‘lsa, Nyuton - Leybnits formulasini qo‘llash mumkin:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x) \Big|_{a+\varepsilon}^{b} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[F(b) - F(a+\varepsilon)\right] = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, $x \to a$ da $F(x)$ boshlang‘ich funksiyaning limiti mavjud bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, mavjud bo‘lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘ladi.

$[a,b)$ intervalda $x=b$ nuqtada uzilishga ega bo‘lgan $f(x)$ funksiya xosmas integrali ham shunga o‘xshash bo‘ladi, ya’ni

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} F(x) \Big|_a^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[F(b-\varepsilon) - F(a)\right] = F(b) - F(a)$$

bo‘lib, bunda $F(b)$, $F(x)$ boshlang‘ich funksiyaning $x \to b$ dagi limiti.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmaning biror $x=c$ nuqtasida uzilishga ega bo‘lsa, xosmas integral quyidagicha aniqlanadi:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \qquad (2)$$

O‘ng tomondagi integrallardan aqalli bittasi uzoqlashuvchi bo‘lsa, xosmas integral uzoqlashuvchidir. O‘ng tomondagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi bo‘lsa, chap tomondagi xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘ladi.

1-misol. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \to 0 \quad da \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \infty$ demak, (1) formulaga asosan,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^{4} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[2\sqrt{4} - 2\sqrt{\varepsilon}\right] = 2 \cdot 2 = 4$$

bo‘ladi. Shunday qilib, integral yaqinlashuvchi.

2-misol. $\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish: $x \to 0 \quad da \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \to +\infty, \quad x = 0$ nuqta $[-1, 8]$ kesmaning ichki nuqtasi bo‘lib, (2) formuladan foydalansak,

$$\int_{-1}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{8} x^{-\frac{2}{3}} 3dx = 3\sqrt[3]{x} \Big|_{-1}^{0} + 3\sqrt[3]{x} \Big|_{0}^{8} = 0 + 3 + 6 = 9$$

bo‘ladi.Demak, berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}$; 3) $\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx$; 4) $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2}$;

5) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}$; 6) $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

2. Quyidagi integrallarning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1) $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{(4-x)^2}}$; 2) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$; 3) $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

4) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; 5) $\int_{0}^{1} \frac{1}{x} dx$; 6) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x \ln x}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chegaralari cheksiz bo‘lgan integral qanday aniqlanadi ?
2. Xosmas integrallarning yaqinlashuvligi va uzoqlashuvchiligi nimalardan iborat ?
3. Kesmada uzulishga ega bo‘lgan funksiyaning integrali qanday aniqlanadi?

Ikki karrali integrallar

1. Ikki karrali integralning ta'rifi. $f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan bo'lsin. D sohani n ta D_i qismlarga bo'lamiz. Har bir D_i qismda $P_i(x_i, y_i)$ bittadan nuqta tanlaymiz hamda

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \qquad (1)$$

yig'indini to'zamiz. (1) yig'indiga $f(x,y)$ funksiya uchun D sohadagi ***integral yig'indi*** deyiladi. λ qism sohalar diametrlarining eng kattasi bo'lsin. ΔS_i, D_i sohaning yuzi.

Ta'rif. (1) integral yig'indining, qismlarga bo'linish usuliga, P_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \to 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x,y)$ funksiyaning D sohadagi ***ikki karrali integrali*** deyiladi va

$$\iint_D f(x,y)ds$$

simvol bilan belgilanadi.

Ikki karrali integral aniq integralning ikki o'zgaruvchili(argumentli) funksiya uchun umumlashgan holidir.

Ikki karrali integral ham aniq integralning asosiy xossalariga ega. Aniq integralning xossalarini takrorlashni tavsiya etamiz.

2. Ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integralni hisoblash ikkita aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. D soha $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ funksiyalar grafklari hamda $x = a$ *va* $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa, ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint_D f(x,y)ds = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \qquad (1)$$

Oxirgi aniq integral ***ichki integral*** deb ataladi va uni hisoblashda x ni o'zgarmas deb, integrallash y bo'yicha olib boriladi. Ichki integralni hisoblash natijasi ***tashqi integral*** uchun integral osti funksiyasi bo'ladi.

D soha

$$\begin{cases} c \le y \le d \\ x_1(y) \le x \le x_2(y) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa , ikki karrali integral

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_s^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx \right] dy = \int_s^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx$$

formula yordamida ikkita aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

1-misol. $\iint_D x \ln y dxdy$ integralni D soha: $0 \le x \le 4$, $1 \le y \le e$ to'g'rito'rtburchak bo'lganda hisoblang.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\iint_D x\ln y\,dxdy=\int_0^4 xdx\int_0^e \ln y\,dy=\int_0^4 xdx\left[y\ln y-y\right]_1^e=\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=8.$$

2-misol. $\iint_D (x-y)dxdy$ integralni $D: y=2-x^2,\ y=2x-1,$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lganda hisoblang.

Yechish. Birinchi chiziq uchi (0,2) nuqtada OY o‘qiga simmetrik bo‘lgan parabola. Ikkinchisi chiziq to‘g‘ri chiziq. Bu chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} y=2-x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

tenlamalar sistemasini yechib, $A(-3;-7)$, $B(1,1)$ nuqtalarni topamiz. (1) formulaga asosan,

$$\iint_D (x,y)dxdy=\int_{-3}^{1} dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)dy=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left[xy-\frac{y^2}{2}\right]_{2x-1}^{2-x^2}dx=\int_{-3}^{1}\left[x\cdot(2-x^2)-\frac{(2-x^2)^2}{2}-\left[x*(2x-1)-\frac{(2x-1)^2}{2}\right]\right]dx=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left(2x-x^3-\frac{4-4x^2+x^4}{2}-2x^2+x+\frac{4x^2-4x+1}{2}\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right]_{-3}^{1}=4\frac{4}{15}$$

bo‘ladi.

3. Ikki karrali integralning tatbiqlari. *a*) $\iint_D f(x,y)dxdy$ integralda $f(x,y)=1$ bo‘lsa, $\iint_D dxdy$ integral D figuraning yuzini ifodalaydi, ya’ni

$$S=\iint_D dxdy$$

3-misol. $x=4y-y^2,\ x+y=6$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechish. Berilgan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.

$x=4y-y^2,\ x=6-y$ *dan* $4y-y^2=6-y,\quad y^2-5y+6=0,\ y_1=2,\ y_2=3;$

$x_1=4,\ x=3;\ A(4;2)$ *va* $B(3;3)$

kesishish nuqtalari bo‘ladi. Shunday qilib, yuza

$$S=\iint_D dxdy=\int_2^3 dy\int_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int_2^3 x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}dy=\int_2^3\left(4y-y^2-6+y\right)dy=\int_2^3\left(5y-y^2-6\right)dy=$$

$$=\left(\frac{5}{2}y^2-\frac{y^3}{3}-6y\right)_2^3=\frac{1}{6}\ \text{(kv. birlik)}$$

в). Yuqoridan $z=f(x,y)$ sirt, quyidan $z=0$ tekislik, yon tomondan to‘g‘ri silindrik sirt bilan hamda XOY tekislikda D sohani hosil qiladigan ***silindrik jismning xajmi***

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy$$

integral bilan hisoblanadi.

2-misol. $y=1+x^2$, $z=3x, y=5, z=0$ sirtlar bilan chegaralangan I oktantadagi jismning hajmini hisoblang.

Yechish. Hajmi hisoblanishi kerak bo‘lgan jism yuqoridan $z=3x$ tekislik, yondan $y=1+x^2$ parabolik silindr, $y=5$ tekislik bilan chegaralangan. Shunday kilib

$$V=\iint_D 3xdxdy=3\int_0^2 xdx\int_{1+x^2}^{5} dy=3\int_0^2 x\left[5-(1+x^2)\right]dx=3\int_0^2\left(4x-x^3\right)dx=3\left(4\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)_0^2=3\left(2\cdot 2^2-\frac{2^4}{4}\right)=$$

$=24-12=12$

(kub.birlik).

c). Plastinka har bir nuqtasidagi zichlik funksiyasi $\gamma(x,y)$ bo‘lsa, uning massasi

$$m=\iint_D \gamma(x,y)dxdy$$

integral bilan hisoblanadi.

Plastinkaning OX va OY o‘qlarga nisbatan ***statik momentlari*.**

$$M_x=\iint_D y\gamma(x,y)dxdy\ ,\ M_y=\iint_D x\gamma(x,y)dxdy$$

formulalar bilan hisoblanadi.

Plastinka birjinsli, ya’ni $\gamma=\cos t$ bo‘lganda uning ***og‘irlik markazining koordinatalari***

$$\bar{x}_c=\frac{M_x}{S}=\frac{\iint xdxdy}{S}\qquad \bar{y}_c=\frac{M_x}{S}=\frac{\iint_D ydxdy}{S}$$

formulalar yordamida topiladi, bu yerda S, D sohaning yuzi.

Plastinkaning OX va OU o‘qlariga nisbatan ***inersiya momentlari***

$$J_x=\iint_D y^2\gamma(x,y)dxdy\ ,\qquad J_y=\iint_D x^2\gamma(x,y)dxdy$$

formulalar bilan, koordinatlar boshiga nisbatan inersiya momenti

$$J_0=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)dxdy=J_x+J_y$$

formula bilan aniqlanadi. Yuqoridagi formulalarda $\gamma(x,y)=1$ deb tekis figuralarning geometrik inersiya momentlarini topish formulalarini olamiz.

3-misol. $y^2=4x+4,\ y^2=-2x+4$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning og‘irlik markazining koordinatlarini toping.

Yechish. Chiziqlar OX o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun $\bar{y}_c=0$ $\bar{x}_c$ ni topamiz:

$$S=\iint_D dxdy=2\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{2}} dy=2\int_0^2\left(\frac{4-y^2}{2}-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=2\int_0^2\left(3-\frac{3y^2}{4}\right)dy=$$

$$=6\left[y-\frac{y^3}{12}\right]_0^2=6\left(2-\frac{8}{12}\right)=8\,;$$

$$\bar{x}_c=\frac{1}{8}\iint_L xdxdy=\frac{1}{8}2\int_0^2 dy\int_{\frac{y^2-y0}{4}}^{\frac{y-y^2}{2}} xdxdy=\frac{1}{8}\int_0^2\left[\frac{4-y^2}{4}-\frac{\left(y^2-4\right)}{16}\right]dy=\frac{1}{8}\int_0^2\left(3-\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{16}y^4\right)dy=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3y-\frac{y^3}{2}+\frac{3y^5}{80}\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{5}.\quad \text{Demak } C(\frac{2}{5};0).$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$ integralni $D: y=x,\ y=2x,\ x=2,\ x=3$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lganda hisoblang.

2. $\iint\limits_D e^{x+\sin y}\cos ydxdy$ integralni $D: 0\le x\le \pi, 0\le y\le \frac{\pi}{2}$ to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lganda hisoblang.

3. $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$ integralni $D: y=x,\ x=0,\ y=1,\ y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘yicha hisoblang.

4. $\iint\limits_D (3x^2-2xy+y)dxdy$ integralni $D: x=0,\ x=y^2,\ y=2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo‘lganda hisoblang.

5. $x=y^2-2y,\ x+y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani ikki karrali integral yordamida hisoblang.

6. $y=2-x,\ y^2=4x+4$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang.

7. $x^2+y^2=8,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=4$ sirtlar bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

8. $x=2y^2,\ x+2y+z=4,\ y=0,\ z=0$ sirtlar bilan chegaralangan silindrik jismning hajmini hisoblang.

9. $y=x^2,\ y=2x^2,\ x=1,\ x=2$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzaning og‘irlik markazini toping.

10. $y^2=x,\ x^2=y$ parabolalar bilan chegaralangan yuzaning og‘irlik markazini toping.

11. Bitta uchi koordinatlar boshida, qirralari mos ravishda $6, 8, 10$ bo‘lgan hamda zichlik taqsimoti $\rho(x,y,z)=x+y+z$ funksiya bilan berilgan parallelepipedning massasini toping.

Oddiy differensial tenglamalar

Birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajraladigan va bir jinsli differensial tenglamalar

1. Differensial tenglamalar haqida umumiy tushunchalar.1-ta’rif. Erkli o‘zgaruvchi, noma’lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallari orasidagi munosabatga ***differensial tenglama*** deyiladi.

Noma’lum funksiya faqat bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***oddiy differensial tenglama*** *deyiladi*.

Noma’lum funksiya ikki yoki undan ko‘p o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglamalarga, ***xususiy hosilali differensial*** *tenglamalar* deyiladi.

2-ta’rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibiga ***differensial tenglamaning tartibi*** deyiladi.

$y'' = 3x^2$, $\quad y''' = \cos x$ tenglamalar mos ravishda ikkinchi va uchinchi tartibli tenglamalarga misol bo‘ladi.

Umumiy holda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

ko‘rinishda belgilanadi.

3-ta’rif. ***Differensial tenglamaning yechimi*** **yoki** ***integrali*** deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensial tenglama yechimining grafigiga ***integral chiziq*** deyiladi. Masalan, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $\quad y = x^2$ bu berilgan differensial tenglamaning yechimi bo‘lib, bu holda integral chiziq paraboladan iborat bo‘ladi.

Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi berilgan tenglamaning barcha yechimlarini topish va bu yechimlarning hossalarini o‘rganishdan iborat.

Hamma differensial tenglamalarni yechish mumkin bo‘ladigan umumiy usullar yo‘q. Differensial tenglamalarning har bir turiga xos yechish usulidan foydalaniladi.

2. *Birinchi tartibli tenglama* *umumiy* holda

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

ko‘rinishda yoziladi. (1) tenglamani y ga nisbatan yechsak

$$y' = f(x, y) \quad yoki \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

bo‘ladi. (2) tenglamaning o‘ng tomoni faqat x ning funksiyasi bo‘lsa, tenglama

$$y' = f(x) \tag{3}$$

ko‘rinishida bo‘lib, oxirgi **tenglikdan** bevosita ko‘rish mumkinki, bunday tenglamaning yechimini topish $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini topishdan iborat bo‘ladi, ya’ni $y = F(x) + C, \quad [F(x)]' = f(x)$. Shunday qilib, (3) ko‘rinishdagi birinchi tartibli differensial tenglamaning yechimi cheksiz ko‘p yechimlar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

1-ta’rif. $y = \varphi(x, C)$ x ning funksiyasi har bir C ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lganda (2) tenglamani qanoatlantirsa, uning ***umumiy yechimi*** deyiladi.

2-ta’rif. C ixtiyoriy o‘zgarmasning muayyan qiymatida umumiy yechimdan olinadigan yechimga ***xususiy yechim*** deyiladi.

Umumiy yechimdan yagona yechimni olish uchun ko‘pincha qo‘shimcha

$$y(x_0) = y_0 \tag{4}$$

shartdan foydalaniladi, bu yerda x_0, y_0 lar berilgan sonlar bo‘lib, bu shartga boshlang‘ich shart deb ataladi.

3-ta’rif. $y' = f(x, y)$ differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasiga ***Koshi masalasi*** deyiladi.

1-misol. $y' = \dfrac{5}{\cos^2 x}$, differensial tenglama uchun $y(0) = 3$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi Koshi masalasini yeching.

Yechish. Oldin berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y = \int \frac{5}{\cos^2 x} dx = 5tgx + C$$

Endi boshlang‘ich shartdan foydalansak, $5tg0 + C = 3,$ bundan $C = 3$ kelib chiqadi. Demak, Koshi masalasining yechimi $y = 5tgx + 3$ bo‘ladi.

3. O‘zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan birinchi tartibli tenglamalar

4-ta’rif. $M(x)dx + N(y)dy = 0$ ko‘rinishdagi tenglamaga ***o‘zgaruvchilari ajralgan*** differensial tenglama deyiladi.

Bunday differensial tenglamani bevosita, tenglikni integrallab,uning umumiy yechimi topiladi, ya’ni

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$$

bo‘ladi.

2-misol. $xdx + ydy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani bevosita integrallasak,

$$\int xdx + \int ydy = C, \qquad \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \;\; yoki \;\; x^2 + y^2 = C_1,$$

umumiy yechim bo‘ladi .

5-ta’rif. $y' = f_1(x) f_2(y) \qquad yoki \qquad \dfrac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y)$

ko‘rinishdagi tenglamaga ***o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama*** deyiladi. Bunday differensial tenglamani $f_2(y)$ ga bo‘lib, dx ga ko‘paytirib,

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamaga keltirish bilan yechimi topiladi.

3-misol. $\frac{dy}{dx} = x(1+y^2)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. O‘zgrauvchilarini ajratib $\frac{dy}{1+y^2} = xdx$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamani bevosita integrallab,

$$arctg\, y = \frac{x^2}{2} + C$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Oxirgi tenglikdan

$$y = tg(\frac{x^2}{2} + C)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

4. *Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamalar*. $f(x,y)$ funksiya uchun $f(kx,ky) = k^{\alpha} f(x,y)$ tenglik bajarilsa, $f(x,y)$ funksiyaga α tartibli bir jinsli funksiya deyiladi, bunda α biror son. Masalan, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya uchun

$$f(kx,ky) = kx \cdot ky - (ky)^2 = k^2(xy - y^2)$$

bo‘lib, $f(x,y) = xy - y^2$ funksiya $\alpha = 2$ tartibli bir jinsli funksiya bo‘ladi. $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{xy}, \alpha = 0$ tartibli bir jinsli funksiyadir(buni tekshirib ko‘ring).

6-ta’rif. $y' = f(x,y)$ differesial tenglamada, $f(x,y)$ funksiya no‘linchi tartibli bir jinsli funksiya bo‘lsa, bunday differensial tenglamaga ***birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi.

Bir jinsli, tenglama $y = xv(x)$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan

$$xv' = f(1,v) - v$$

differensial tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y = x \cdot v$ almashtirish olib, $y' = x'v + xv'$ ekanligini hisobga olsak, berilgan tenglamadan

$$v + xv' = \frac{x \cdot xv + x^2v^2}{x^2}$$

bo‘lib,

$$v + xv' = v + v^2 \text{ yoki } xv' = v^2,\ \frac{xdv}{dx} = v^2$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamada o‘zgaruvchilarini ajratsak,

$$\frac{dv}{v^2}=\frac{dx}{x};$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$-\frac{1}{v}=\ln|x|+\ln c,$$

bo‘lib,

$$\ln|cx|=-\frac{1}{v}, \quad v=\frac{y}{x}$$

bo‘lganligi uchun,

$$\ln|cx|=-\frac{x}{y}, \quad yoki \quad y=-\frac{x}{\ln|cx|}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $(1+y)dy-(1-x)dx=0;$ 2) $(xy^2+x)dx=(y-x^2y)dy;$

3) $x^2dy+(y-1)dx=0;$ 4) $2(xy+y)dx=xdy.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping:

1) $x^2dx+ydy=0,\ x=0\ da\ y=1;$

2) $(1+x^2)dy-2x(y+3)dx=0,\ x=0\ bo'\lg anda\ y=-1;$

3) $(1+x)ydx=(y-1)xdy,\ x=1\ da\ y=1.$

3. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x-y)y}{x^2}$; 2) $x^2y'=y^2-xy+x^2$; 3) $(x^2-2xy)dy=(xy-y^2)dx.$

4. Boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarni toping:

1) $xy^2-y'=x^3+y^3,\quad x=1\quad bo'\lg anda\quad y=3;$

2) $(x-y)dx+xdy=0,\quad x=1\quad bo'\lg anda\quad y=0;$

3) $y^2dx+(x^2-xy)dy=0,\quad x=1\quad da\quad y=1.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Oddiy differensial tenglama qanday tenglama?
3. Xususiy hosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning tartibi nima?

5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?
6. Umumiy va xususiy yechimlar qanday yechimlar?
7. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy masalasi nimadan iborat?

Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to‘la differensialli tayenglamalar.

1.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Bunday differensial tenglama

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bunda $p(x)$ *va* $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z=u(x)y$ almashtirish olib,

$$\frac{dz}{dx}+\left[p(x)-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right]z=g(x)u(x) \tag{1}$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x)-\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=0$$

bo‘lsin. Bundan $u(x)=e^{\int p(x)dx}$ bo‘lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx}=g(x)e^{\int p(x)dx}+C$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bevosita integrallasak,

$$z=\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

hosil bo‘ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib,

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[C+\int g(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \tag{2}$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y'+xy=x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo‘lib, $p(x)=x,\quad g(x)=x$ ligini hisobga olsak, (2) formulaga asosan,

$$y=e^{-\int xdx}\left[C+\int x\cdot e^{\int xdx}dx\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C+\int x\cdot e^{\frac{x^2}{2}}dx\right]=e^{-\frac{x^2}{2}}\left[C+\int\cdot e^{\frac{x^2}{2}}d(\frac{x^2}{2})\right]=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}+C).\quad y=e^{-\frac{x^2}{2}}(e^{\frac{x^2}{2}}+C).$$

umumiy yechim bo‘ladi.

2. *Bernulli tenglamasi*. Bunday differensial tenglama

$$y'+p(x)y=y^n g(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamada $n=0$ yoki $n=1$ bo‘lsa, chiziqli tenglama hosil bo‘ladi. Demak $n \neq 0{,}1$ bo‘lgan ,o‘zgarmas. Bernulli tenglamasini y^n ga bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^n}+p(x)\frac{1}{y^{n-1}}=g(x), \qquad \frac{1}{y^{n-1}}=z$$

almashtirish bajarsak,

$$z'=(y^{1-n})'=(1-n)y^{-n}y'$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{z'}{1-n}+p(x)z=g(x) \;\; yoki \quad z'+(1-n)p(x)z=(1-n)g(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama hosil bo‘ladi.

2-misol. $y'+xy=xy^3$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y^3 bo‘lib,

$$\frac{y'}{y^3}+x\frac{1}{y^2}=x$$

tenglamani hosil qilamiz. $\frac{1}{y^2}=z$ almashtirish olsak, $z'=\frac{2y'}{y^3}$ bo‘ladi. Bularni tenglamaga qo‘yib,

$$\frac{z'}{2}+xz=x, \quad z'-2xz=-2x$$

chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini (6) formulaga asosan topish mumkin:

$$z=e^{2\int xdx}\left[C+\int(-2x)e^{-2\int xdx}dx\right]=e^{x^2}\left[C-\int 2xe^{-x^2}dx\right]=$$

$$e^{x^2}\left[C+\int e^{-x^2}d(-x^2)\right]=e^{x^2}\left[C+e^{-x^2}\right]=Ce^{x^2}+1.$$

Shunday qilib,

$$z=C\cdot e^{x^2}+1$$

bo‘ladi, z ning o‘rniga $\frac{1}{y^2}$ ni qo‘yib,

$$\frac{1}{y^2}=C\cdot e^{x^2}+1, \quad y^2=\frac{1}{Ce^{x^2}+1},$$

echimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo‘ladi.

3. **Rikkati tenglamasi. Ushbu**

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y^2+b(x)y+c(x) \tag{4}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $a(x), b(x), c(x)$ funksiyalar biror intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalar. (4) tenglamada $a(x)=0$ bo‘lsa, chiziqli tenglama, $c(x)=0$ bo‘lsa, Bernulli tenglamasi kelib chiqadi.

Umuman olganda Rikkati tenglamasi yechimini elementar funksiya va ularning integrallari yordamida yechib(kvadraturada integrallab) bo‘lmaydi.

Ushbu xususiy holni qaraymiz: Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi ma’lum bo‘lsa , bu tenglama yechimi kvadraturalarda integrallanadi. $y=\varphi(x)$ Rikkati tenglamasining biror xususiy yechimi bo‘lsin. $y=\varphi(x)+z$ almashtirish bajaramiz: bu holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}$$

bo‘lib, (4) tenglama

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}+\frac{dz}{dx}=a(x)[\varphi(x)+z]^2+b(x)[\varphi(x)+z]+c(x)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan, $y=\varphi(x)$ (4) tenglama yechimi, ya’ni

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a(x)[\varphi(x)]^2+b(x)\varphi(x)+c(x)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dz}{dx}=[2a(x)\varphi(x)+b(x)]z+a(x)z^2$$

tenglama hosil bo‘lib, bu Bernulli tenglamasidir. Bunday differensial tenglamaning umumiy yechimini qanday topishni yuqorida o‘rgandik.

3- misol. Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=-y^2+2xy+\left(5-x^2\right)$$

Rikkati tenglamasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xususiy yechimini $y=\varphi(x)=ax+b$ ko‘rinishda izlash maqsadga muvofiq, bu holda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=a,\ a=-(ax+b)^2+2x(ax+b)+5-x^2$$

bo‘lib, bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirsak,

$$a=1,\ b=\pm 2$$

kelib chiqadi. Demak, $\varphi(x)=x+2,\ \varphi(x)=x-2$ xususiy yechimlar bo‘ladi. $\varphi(x)=x+2$ xususiy yechim uchun Bernulli tenglamasi

$$\frac{dz}{dx}=-4z-z^2$$

bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$y=x+2+\frac{4}{Ce^{4x}-1}$$

bo‘ladi.

4. To‘la differensialli tenglamalar va integrallovchi ko‘paytuvchi.

1) To‘la differensialli tenglama.

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamaning chap qismi biror $u(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya’ni

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

bo‘lsa, bunday tenglama to‘la differensialli tenglama deyiladi.(1) tenglama to‘la differensialli tenglama bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak. To‘la differensialli tenglama ta’rifidan $du = 0$ bo‘lib, bundan $u(x,y) = C$ kelib chiqadi(C ixtiyoriy o‘zgarmas). $u(x,y)$ funksiyani topish uchun y ni o‘zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy = 0$ ekanligidan $du = M(x,y)dx$ bo‘ladi. Oxirgi tenglikni x bo‘yicha integrallasak,

$$u = \int M(x,y)dx + \varphi(y)$$

tenglik hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallaymiz va natijani $N(x,y)$ ga tenglaymiz, chunki $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)$ edi.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y) = \int\left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \right)dy + C.$$

Shunday qilib,

$$u(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\left(N(x,y) - \int \frac{\partial M}{\partial y}\,dx \right)dy + C$$

natijaga ega bo‘lamiz.

1-misol. Ushbu

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4}\,dx + \frac{2y}{x^3}\,dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to‘la differensialli bo‘lish yoki bo‘lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4} \quad , N = \frac{2y}{x^3}$$

bo‘lganligi uchun,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-6y}{x^4} \quad , \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6y}{x^4}$$

bo‘lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bo‘ladi, ya’ni berilgan differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror $u(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘ladi. Endi $u(x,y)$ funksiyani topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}$$

bo‘lganligi uchun,

$$u = \int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}\, dx + \varphi(y) = \int \left(x^{-2} - 3y^2 x^{-4}\right) dx + \varphi(y) = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + \varphi(y) \qquad (2)$$

bo‘lib, bunda $\varphi(y)$ hozircha noma’lum funksiyadir. Oxirgi tenglikni y bo‘yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\varphi'(y) = 0$ bo‘lib,

$$\varphi(y) = C_1.$$

bo‘ladi. (2) tenglikdan

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du = d\left(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1\right) = 0$$

bo‘lganligi uchun

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

bo‘lib, yoki

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

bo‘ladi, bunda $C = C_2 - C_1$.

2) Integrallovchi ko‘paytuvchi.

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

differensial tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lgan holni qaradik. Bu tenglamaning o‘ng tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lmasin. Ayrim hollarda shunday $\mu(x,y)$ funksiyani tanlab olish mumkin bo‘ladiki, berilgan tenglamani shu funksiyaga ko‘paytirilganda, uning chap tomoni biror funksiyaning to‘la differensiali bo‘lishi mumkin. Hosil qilingan differensial tenglamaning umumiy yechimi bilan dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir xil bo‘ladi. Bunday $\mu(x,y)$ funksiyaga berilgan tenglamaning **integrallavchi ko‘paytuvchisi** deyiladi. Integrallovchi ko‘paytuvchini topish uchun , berilgan tenglamani hozircha noma’lum bo‘lgan μ ga ko‘paytirib,

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama to‘la differensialli bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kerak. Bundan

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y}+M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial N}{\partial x}+N\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

bo‘lib,

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglamani μ ga bo‘lcak,

$$\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\mu\partial y}$$

bo‘lganligi uchun

$$M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

bo‘ladi.

Umumiy holda μ x,y larga bog‘liq, ya’ni $\mu(x,y)$. Berilgan tenglama faqat x ga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, $\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=0$ bo‘lib,

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\quad\text{yoki}\quad\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}\tag{4}$$

bo‘ladi. Differensial tenglama faqat y o‘zgaruvchiga bog‘liq integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsa, $\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}=0$ bo‘lib,

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}\tag{5}$$

bo‘ladi. Bu hollarda (4) va (5) tengliklarni bevosita integrallab,

$$\mu=e^{\int\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)/Ndx},\quad\mu=e^{\int\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)/Mdx}$$

integrallovchi ko‘paytuvchini topamiz. Bunda (4) va (5) nisbatlar, birinchi holda y o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan, ikkinchi holda x o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lmagan integrallovchi ko‘paytuvchilarning mavjudligini bildiradi.

2-misol.

$$(x^2-3y^2)\,dx+2xydy=0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to‘la differensialli yoki to‘la differensialli emasligini tekshiramiz. $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\left(x^2-3y^2\right)'_y=-6y \quad , \frac{\partial N}{\partial x}=\left(2xy\right)'_x=2y\ .$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{-6y-2y}{2xy}=-\frac{4}{x}$$

bo‘lib,

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=-\frac{4}{x}$$

bo‘ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\ln x}=e^{\ln x^{-4}}=\frac{1}{x^4}$$

hosil bo‘ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x)=\frac{1}{x^4}$ funksiyaga ko‘paytirsak,

$$\frac{x^2-3y^2}{x^4}dx+\frac{2xy}{x^4}dy=0$$

bo‘lib, keyingi tenglama uchun $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajariladi, ya’ni oxirgi differensial tenglama to‘la differensialli tenglamadir. Bunday differensial tenglamalarning yechimini topishni yuqorida o‘rgandik.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y'-\frac{y}{x}=-1$; 2) $y'+y=e^{-x}$; 3) $x^2y'-2xy=3$; 4) $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$;
5) $\left(a^2+x^2\right)y'+xy=1$; 6) $(2x+1)y'+y=x$; 7) $y'-ytgx=ctgx$;
8) $y'+y\cos x=\sin 2x.$

2. Quyidagi differensial tenglamalarning berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan xususiy yechimlarini toping:

1) $xy'+y=3,\ \ x=1\ da\ \ y=1;$ 2) $(1+x^2)y'-xy=2x,\ \ x=0$ $bo'\lg anda\ \ y=0;$ 3) $xy'+y=x+1,\ \ x=2\ \ bo'\lg anda\ \ y=3.$

3. 1) $y'+\frac{y}{x}=\frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x=-1$ bo‘lganda $y=1$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

2) $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}$ tenglama uchun , $x = 1$ bo‘lganda, $y = -1$ boshlang‘ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

4. Ushbu to‘la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $\left(x^2+y\right)dx+\left(x-2y\right)dy=0$; 2) $\left(y-3x^2\right)dx-\left(4y-x\right)dy=0$;

3) $2\left(3xy^2+2x^2\right)dx+3\left(2x^2y+y^2\right)dy=0$; 4) $\left(3x^2+2y\right)dx+\left(2x-3\right)dy=0$;

5) $\left(3x^2y-4xy^2\right)dx+\left(x^3-4x^2y+12y^3\right)dy=0$; 6) $3x^2e^y\,dx+\left(x^3e^y-1\right)dy=0$.

5. Quyidagi differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko‘paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

1) $\left(x^2-y\right)dx+x\,dy=0$; 2) $\left(y+xy^2\right)dx-x\,dy=0$;

3) $y^2\,dx+\left(xy-1\right)dy=0$; 4) $\left(\sin x+e^y\right)dx+\cos x\,dy=0$;

5) $\left(x\cos y-y\sin y\right)dx+\left(x\sin y+y\cos y\right)dy=0$; 6) $2xtgx\,dx+\left(x^2-2\sin y\right)dy=0$.

Yuqori tartibli differensial tenglamalar

1. $y^{(n)} = f(x)$ ***ko'rinishdagi differensial tenglama ketma-ket*** n marta integrallash bilan uning yechimi topiladi. Har bir integrallashda bittadan ixtiyoriy o'zgarmas hosil bo'lib, natijada n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq umumiy yechim hosil bo'ladi.

1-misol. $y'' = \cos 2x$ differensial tenglamaning $x = 0$ bo'lganda, $y = 0,\ y' = 0$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. $y' = p(x)$ desak, $y'' = p'$ bo'lib, berilgan tenglama

$$p' = \cos 2x \ \ yoki \ \ \frac{dp}{dx} = \cos 2x, \quad dp = \cos 2x dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Oxirgi tenglamani integralab,

$$p = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$$

tenglamani hosil qilamiz.

$p = y'$ bo'lganligi uchun $\quad y' = \frac{1}{2}\sin 2x + C_1$

ya'ni,

$$dy = \frac{1}{2}\sin 2x dx + C_1 dx.$$

Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx + \int C_1 dx, \ \ y = -\frac{1}{4}\cos 2x + C_1 x$$

umumiy yechimni olamiz.

Endi berilgan boshlang'ich shartlarda Koshi masalasini yechamiz: $x = 0$ bo'lganda $y = 0,\ y' = 0$ bo'lganligi uchun,

$$-\frac{1}{4}\cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\sin 0 + C_1 = 0, \ \ C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{4}\ .$$

Shunday qilib, Koshi masalasining yechimi

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{4}$$

bo'ladi.

2. $F(x, y', y'') = 0$ ***ko'rinishdagi differensial tenglama***

$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dx}$ almashtirish orqali $F(x, p, \frac{dp}{dx}) = 0$ birinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi.

2-misol. $y'' = \frac{y'}{x} + x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish: $y' = p$ bilan almashtirib olsak,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x} + x$$

birinchi tartibli chiziqli tenglamaga kelamiz. Bu tenglamani yechib:

$$P = e^{\int \frac{1}{x}dx}\left[C_1 + \int xe^{-\int \frac{1}{x}dx}dx\right] = e^{\ln x}\left[C_1 + \int xe^{-\ln x}dx\right] = x(C_1 + \int xe^{-\ln x}dx) =$$

$$= x(C_1 + \int x \cdot \frac{1}{x}dx) = x(C_1 + x), \quad p = y' = C_1x + x^2, \quad y = C_1\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C_2$$

umumiy yechimni olamiz.

3. $F(y, y', y'') = 0$ ***<u>(erkli o'qzgaruvchi oshkor qatnashmagan) bunday differensial tenglamaning</u>*** umumiy yechimini $y' = z(y)$ almashtirish olib, birinchi tartibli tenglamaga keltirib, yechim topiladi.

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot z(y).$$

bo'ladi.

3-misol. $yy'' - 2y'^2 = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = z(y)$ almashtirish olib, $y'' = z\frac{dz}{dy}$ ekanligini hisobga olsak, $yz\frac{dz}{dy} - 2z^2 = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu birinchi tartibli o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama: $\frac{ydz}{dy} = 2z \quad yoki \ \frac{dz}{z} = 2\frac{dy}{y},$ oxirgi tenglamani integrallab,

$$\ln z = 2\ln y + \ln C_1$$

bundan

$$z = C_1y^2$$

bo'ladi. $z = \frac{dy}{dx}$ ni hisobga olsak ,

$$\frac{dy}{dx} = C_1y^2 \quad yoki \quad \frac{dy}{y^2} = C_1dx$$

bo'ladi.Oxirgi tenglikdan

$$-\frac{1}{y} = C_1x + C_2 \quad yoki \ \ y = -\frac{1}{C_1x + C_2}$$

bo'ladi.Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun misollar

1. $y''' = \frac{6}{x^3}$ tenglamaning $x = 1$ bo'lganda $y = 2, \ y' = 1, \ y'' = 1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

2. Quyidagi tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

1) $x^3y'' + x^2y' = 1;$ 2) $yy'' + y'^2 = 0;$ 3) $y'' + 2y(y')^3 = 0;$ 4) $y''y^3 = 1;$

5) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3;$ 6) $y'' + y'tgx = \sin 2x;$ 7) $y'' + 2y'^2 = 0;$

8) $xy'' - y'tgx = e^x x^2;$ 9) $2yy'' = (y^1)^2;$ 10) $t\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt} + t = 0.$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalarning qanday xillari bor?
2. Qanday differensial tenglamalarning tartibini pasaytirish bilan yechish mumkin?
3. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalalar

1. Umumiy tushunchalar. Fizika, mexanika, texnika va iqtisodningjuda ko‘p masalalarini yechish *ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga* keltiriladi.

Differensial tenglamada noma’lum funksiya va uning hosilalari birinchi darajada qatnashsa, bunday tenglamaga chiziqli deyiladi. ***Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama*** quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (1)$$

bu yerda y noma’lum funksiya, $p(x),\ g(x),\ f(x)$ lar biror (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $f(x) = 0$ bo‘lsa, (1) tenglamaga **bir jinsli chiziqli differensial tenglama** deyiladi. $f(x) \neq 0$ **bo‘lsa bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama** deyiladi.

Bir jinsli va bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar yechimini topishda chiziqli bog‘langan va chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar tushunchasidan foydalaniladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar biror $[a,b]$ kesmada berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Shunday α_1, α_2 o‘zgarmas sonlar topilsaki, ulardan hech bo‘lmaganda bittasi no‘ldan farqli bo‘lganda,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \qquad (2)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘langan funksiyalar** deyiladi.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘langan bo‘lsa, ular proporsianal bo‘ladi, ya’ni, $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0$ bo‘lib, $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsa,

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \ \ yoki \ \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{-\alpha_2}{-\alpha_1}, \ \frac{y_1(x)}{y_2(x)} = const$$

bo‘ladi.

Masalan, $y_1(x) = 4x^2$ *va* $y_2 = x^2$ funksiyalar chiziqli bog‘langan, chunki $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{4x^2}{x^2} = 4.$

2-ta’rif. (2) tenglik faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina bajarilsa, $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalarga **chiziqli bog‘lanmagan funksiyalar** deyiladi.

Funksiyalarning chiziqli bog‘langan yoki chiziqli bog‘lanmaganligini

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2{}' - y_2 y_1{}'$$

Vronskiy determinanti yordamida tekshirish mumkin. $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda **chiziqli bog‘langan** bo‘lsa, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘lga teng bo‘ladi. Bu funksiyalar uchun (a,b) oraliqda tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli bo‘lsa ular chiziqli bog‘lanmagan bo‘ladi.

2. *Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar*. Fan va texnika hamda iqtisodning ko‘p masalalari (1) tenglamada, $p(x)$ *va* $g(x)$ funksiyalar o‘zgarmas sonlar bo‘lgan holdagi tenglamalarga keltiriladi. Shuning uchun bu funksiyalar o‘zgarmas koeffitsiyentlar bo‘lgan holni alohida qaraymiz. Bu holda bir jinsli tenglama

$$y'' + py' + gy = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishda bo‘lib $p,\ g$ lar o‘zgarmas koeffitsiyentlar. Bunday ko‘rinishdagi tenglamaga ***ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglama*** deyiladi. (3) ko‘rinishdagi tenglamaning yechimini topish bilan qiziqamiz.

$y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning (a,b) oraliqda chiziqli bog‘lanmagan yechimlari bo‘lsa,

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \qquad (4)$$

funksiya uning umumiy yechimi bo‘ladi, bu yerda c_1 *va* c_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Bu funksiyani (3) tenglamaga bevosita qo‘yib ko‘rsatish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

1-misol. $y'' - y = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Bevosita qo‘yish bilan tekshirib ko‘rish mumkinki, $y_1(x) = e^x$ *va* $y_2(x) = e^{-x}$ berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan yechimlar bo‘ladi, chunki Vronskiy determinanti

$$\begin{vmatrix} e^x e^{-x} \\ e^x - e^{-x} \end{vmatrix} = e^x(-e^{-x}) - e^xe^{-x} = -1-1 = -2 \neq 0.$$

Demak, (4) formulaga asosan, $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ funksiya berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

Shunday qilib, (3) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uning ikkita chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimini topish kifoya.

(3) tenglamaning yechimini $y = e^{rx}$, ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda $r-$ noma’lum son. $y' = re^{rx},\ \ y'' = r^2e^{rx},$ bo‘lib, (3) tenglamadan

$$r^2e^{rx} + pre^{rx} + ge^{rx} = 0 \ \ yoki \ \ \ r^2 + pr + g = 0, \ (e^{rx} \neq 0) \qquad (5)$$

bo‘ladi. (5) tenglik bajarilsa $y = e^{rx}$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(5) tenglamaga (3) differensial tenglamaning ***harakteristik tenglamasi*** deyiladi. Harakteristik tenglamaning yechimlari

$$r_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - g} \quad va \quad r_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - g}$$

bo‘lib, bunda quyidagi uchta hollar bo‘lishi mumkin:

1) r_1 *va* r_2 lar haqiqiy va har xil, ya’ni $r_1 \neq r_2$;

2) r_1 *va* r_2 haqiqiy va teng (karrali), ya’ni $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$;

3) r_1 *va* r_2 kompleks sonlar, ya’ni $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta,$ bunda;

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \ \ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Har bir holni alohida qaraymiz:

1) bu holda $y_1(x)=e^{r_1x}$, $y_2(x)=e^{r_2x}$ funksiyalar chiziqli bog‘lanmagan xususiy yechimlar bo‘lib, umumiy yechim

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x} \qquad (6)$$

bo‘ladi.

2-misol. $y''-5y'+6y=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos harakteristik tenglamani tuzamiz:

$$r^2-5r+6=0.$$

Harakteristik tenglamaning ildizlari

$$r_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}; \quad r_1=2; \qquad r_2=3$$

bo‘lib, umumiy yechim (6) formulaga asosan,

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$$

bo‘ladi.

2) Ikkinchi holda, harakteristik tenglamaning ildizlari teng bo‘lganda $r_1=r_2$ *va* $y_1(x)=e^{r_1x}$ bitta xususiy yechim bo‘ladi. Ikkinchi xususiy yechimni $y_2(x)=xe^{r_1x}$ ko‘rinishda tanlaymiz. Bu funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, haqiqatan ham,

$$y_2(x)=xe^{r_1x}, \quad y_2'=e^{r_1x}(1+r_1x), \quad y_2''(x)=e^{r_1x}(r_1^2+2r_1)$$

ifodalarni (3) tenglamaga qo‘yib,

$$x(r_1^2+pr_1+g)+(2r_1+p)=0$$

tenglikni hosil qilamiz. r_1 harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun oxirgi tenglikdagi birinchi qavs aynan no‘lga teng, $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$ bo‘lganligi uchun ikkinchi qavs ham aynan no‘lga teng.

Demak, $y_2(x)=xe^{r_1x}$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi, hamda $y_1(x)$ *va* $y_2(x)$ yechimlar chiziqli bog‘lanmagan (tekshirib ko‘ring). Shunday qilib,

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{r_1x}+C_2xe^{r_1x} \qquad (7)$$

umumiy yechim bo‘ladi.

3-misol. $y''+6y'+9y=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning harakteristik tenglamasi

$$r^2+6r+9=0$$

bo‘lib, ildizlari $r_1=r_2=-3$ bo‘ladi (tenglamani yechib ko‘rsating). Harakteristik tenglamaning ildizlari o‘zaro teng, (7) formulaga asosan $y(x)=c_1e^{-3x}+c_2xe^{-3x}$ funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

3) Harakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo‘shma:

$r_1=\alpha+i\beta,\ r_2=\alpha-i\beta$ bo‘lganda xususiy yechimlarni

$$y_1(x)=e^{r_1x}=e^{(\alpha+\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{\beta x}$$
$$y_2(x)=e^{r_2x}=e^{(\alpha-\beta)x}=e^{\alpha x}\cdot e^{-\beta x}$$
ko‘rinishda olish mumkin. Bu ifodalarga
$$e^{\beta x}=\cos\beta x+i\sin\beta x$$
Eyler formulasini tatbiq etsak,
$$y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x,\quad y_2(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x$$
tengliklar hosil bo‘ladi. Ma’lumki, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham bir jinsli tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Shuning uchun
$$y_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x\quad va\quad y_2=\frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x$$
funksiyalar ham (3) tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Bu yechimlar chiziqli bog‘lanmagan, chunki ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti no‘ldan farqli (tekshirib ko‘ring).

Demak,
$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)\tag{8}$$
(3) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

4-misol. $y''+6y'+13y=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos harakteristik tenglamaning ildizlari:
$$r_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot13}}{2}=\frac{-6\pm4i}{2};$$
$r_1=-3+2i,\quad r_2=-3-2i$ bo‘ladi. Bu ildizlar kompleks qo‘shma bo‘lib, uchinchi holga mos keladi. $\alpha=-3,\ \beta=2$ ekanligini hisobga olib, (8) formulaga asosan umumiy yechim,
$$y=e^{-3x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$$
bo‘ladi.

Endi ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli bir jinsli tenglama uchun berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni topishni, ya’ni Koshi masalasini qaraymiz.

5-misol. $y''-y'-2y=0$ differensial tenglamaning $x=0$ bo‘lganda $y=8,\quad y'=7$ bo‘ladigan xususiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli, bir jinsli, chiziqli tenglamadir. Unga mos harakteristik tenglama
$$r^2-r-2=0$$
bo‘lib, $r_1=-1,\quad r_2=2$ uning ildizlari bo‘ladi. Demak, tenglamaning umumiy yechimi
$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$$
bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan hosila olsak,
$$y'=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}$$

bo‘lib , $x=0$ bo‘lganda $y=8, \quad y'=7$ boshlang‘ich shartlarga asosan,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_1 + 2C_2 = 7 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglamalar sistemasidan $C_1 = 3, \quad C_2 = 5$ larni aniqlaymiz. Shunday qilib, izlanayotgan xususiy yechim

$$y(x) = 3e^{-x} + 5e^{2x}$$

bo‘ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 3y' - 4y = 0;$ 2) $y'' - 2y' - 5y = 0;$ 3) $y'' - y = 0;$

4) $4y'' - 12y' + 9y = 0;$ 5) $y'' + 2\sqrt{2}y + 2y = 0;$ 6) $y'' - 2y' + 50y = 0;$

7) $y'' - 4y' + 7y = 0;$ 8) $y'' + 6y' = 0.$

2. $y'' + 10y' + 25y = 0$ tenglamaning $x=1$ bo‘lganda, $y = e^{-5}, \quad y' = 3e^{-5}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday differensial tenglamalarga chiziqli deyiladi?
2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. Harakteristik tenglama nimadan iborat?
4. Harakteristik tenglama ildizlariga qarab umumiy yechimni yozish mumkinmi?
5. Harakteristik tenglama ildizlari kompleks qo‘shma bo‘lganda yechim qanday yoziladi?
6. Harakteristik tenglama ildizlari karrali, haqiqiy va har xil bo‘lganda umumiy yechim qanday yoziladi?
7. Eyler formulasi qanday bo‘ladi?

Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar

Ikkinchi ***tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar*** . Bunday tenglama

$$y'' + py' + gy = f(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda bo‘lib, bu yerda p, g o‘zgarmas koeffitsiyentlar, $f(x)$ berilgan uzluksiz funksiya.

Chiziqli **bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi,** bunday tenglamaning birorta xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat bo‘ladi, ya’ni $\bar{y}$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi y_1 bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsa, umumiy yechim

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu fikrga (2)echimni (1) tenglamaga qo‘yib ko‘rish bilan ishonish mumkin (buni bajarib ko‘ring).

(1) tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $\overline{y(x)}$ ni topishni yuqorida o‘rgandik. Endigi vazifa bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimini topishdan iborat bo‘ladi. (1) tenglamada $f(x)$funksiya:

1) $f(x) = e^{\alpha x} P(x),$ bu yerda $P_n(x)$ $n-$ darajali ko‘p had;

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$

ko‘rinishda bo‘lganda xususiy yechimni topish masalasini qaraymiz.
Birinchi holda xususiy yechimni

$$y_1(x) = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

ko‘rinishda izlaymiz, bu yerda k harakteristik tenglama ildizlarining α ga teng bo‘lganlari soni (0,1,2 bo‘lishi mumkin), $Q_n(x),$ $P_n(x)$ bilan bir xil darajali, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. Bu holga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}(25x^2 - 47)$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: bir jinsli tenglama $y'' + 2y' - 3y = 0$ bo‘lib, uning harakteristik tenglamasi $r^2 + 2r - 3 = 0$ bo‘ladi. Uning ildizlari

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}, \qquad r_1 = -3, \quad r_2 = 1$$

bo‘lib, birjinsli tenglamaning umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ bo‘ladi.

Endi berilgan birjinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topamiz: Uni e^{2x} funksiya va berilgan ko‘phad darajasi bilan bir xil ko‘phad, lekin aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad ko‘paytmasi ko‘rinishida izlaymiz. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Endi ***aniqmas*** $\underline{A, B \quad va \quad C}$ ***koeffitsiyentlarni*** *topish* lozim. Shartga ko‘ra $y_1(x)$ berilgan tenglamani qanoatlantirishi kerak.

Buning uchun

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1'(x) = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + e^{2x}(2Ax + B),$

$y''(x) = 4e^{2x}(Ax^2 + Bx + C) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} \cdot 2A$

larni berilgan tenglamaga qo‘yib,

$$e^{2x}\left[2A + 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C)\right] = e^{2x}(25x^2 - 47)$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikni e^{2x} ga bo‘lsak,

$$5Ax^2 + (12A + 5B)x + 2A + 6B + 5C = 25x^2 - 47$$

bo‘ladi.

$y_1(x) = e^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$ berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishi uchun oxirgi tenglamadagi bir xil darajali x lar koeffitsiyentlari o‘zaro teng bo‘lishi kerak, ya’ni

$$\begin{cases} 5A = 25, \\ 12A + 5B = 0, \\ 2A + 6B + 5C = 47. \end{cases}$$

Uchta noma’lum koeffitsiyentlarga nisbatan, uchta chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bu sistemani yechsak, $A = 5, \ B = -12, \ C = 3$ bo‘ladi (buni bajarib ko‘ring). Demak, $y_1(x) = e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$ funksiya berilgan tenglamaning xususiy yechimi bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi (2) formulaga asosan,

$$y = \bar{y} + y_1 = C_1e^{-3x} + C_2e^x + e^{2x}(5x^2 - 12x + 3)$$

bo‘ladi.

Yuqoridagidek xususiy yechimni topishga ***aniqmas koeffitsiyentlar usuli*** deyiladi.

2-misol. $y'' - 4y' = 3x^2$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

$r^2 - 4r = 0$ bo‘lib, $r_1 = 0; \ r_2 = 4$ uning ildizlari bo‘ladi va bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1e^{0x} + C^2e^{4x} = C_1 + C_2e^{4x}$$

bo‘ladi. Berilgan tenglamaning o‘ng tomoni $3e^{0x}x^2$ bo‘lib, $\alpha = 0$ va no‘l harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lganligi uchun xususiy yechim

$$y_1(x) = e^{0x}x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

$$y_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y''_1 = 6Ax + 2B$$

bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 3x^2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib,

$$\begin{cases} -12A = 3, \\ 6A - 8B = 0, \\ 2B - 4C = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini olamiz. Bundan

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = -\frac{3}{32}$$

bo‘ladi. Shunday qilib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{32}x$$

bo‘lib, umumiy yechim

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}(x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{8}x)$$

bo‘ladi.

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$ bo‘lganda xususiy yechim $y_1(x) = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)x^k$ ko‘rinishda bo‘lib, k harakteristik tenglama ildizlarining $i\beta$ ga teng bo‘lganlarining soni.

3-misol. $y'' + y = \sin x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Harakteristik tenglama $r^2 + 1 = 0$ bo‘lib, ildizlari $r_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ bo‘ladi. $\beta = 1$; $i\beta = i$ bo‘lganligi uchun $k = 1$, ya’ni xususiy yechimni

$$y_1(x) = (A\cos x + B\sin x)x^1$$

ko‘rinishda izlaymiz. A va B aniqmas koeffitsiyentlar. Bu funksiyaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topsak,

$$y_1'(x) = (A\cos x + B\sin x)x + A\cos x + B\sin x = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x$$

$$y_1''(x) = B\cos x - A\sin x - Bx\sin x - A\sin x + B\cos x - Ax\cos x = (2B - Ax)\cos x + {}$$ bo‘ladi,

$$+ (-2A - Bx)\sin x$$

bularni berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(2B - Ax)\cos x + (2A - Bx)\sin + Ax\cos x + Bx\sin x = \sin x \qquad yoki$$

$$2B\cos x + (-2A)\sin x = \sin x$$

hosil bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan

$$\begin{cases} 2B = 0, \\ -2A = 1 \end{cases}$$

va $B = 0, \quad A = -\frac{1}{2}$ bo‘lib, xususiy yechim

$$y_1(x) = -\frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\bar{y}(x) = C_1\cos x + C_2\sin x$$

bo‘lganligi uchun, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_1(x) = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{x}{2}\cos x$$

bo‘ladi.

4-misol. $y''+4y'+5y=2\cos x-\sin x$ differensial tenglamaning $y(0)=1,\ \ y'(0)=2$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Oldin berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $y''+4y'+5y=0$ tenglamaning harakteristik tenglamasi $r^2+4r+5=0$ bo‘lib, uning ildizlari $r_1=-2-i;\quad r_2=-2+i$ bo‘ladi. Bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$\bar{y}(x)=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

bo‘ladi.

Endi berilgan tenglamaning biror xususiy yechimini topamiz: uni

$$y_1(x)=A\cos x+B\sin x$$

ko‘rinishda izlaymiz. $y'(x),\ \ y''(x)$ hosilalarni topib, berilgan tenglamaga qo‘ysak,

$$(4A+4B)\cos x+(4B-4A)\sin x=2\cos x-\sin x$$

bo‘lib, $\cos x$ va $\sin x$ lar koeffitsiyentlarini tenglashtirib.

$$\begin{cases}4A+4B=2,\\ 4B-4A=-1\end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $A=\frac{3}{8},\ B=\frac{1}{8}$ ekanligini aniqlab, xususiy yechimni topamiz.

$$y_1(x)=\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=\bar{y}(x)+y_1(x)=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Endi berilgan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni aniqlaymiz, ya’ni boshlang‘ich shartlar berilganda Koshi masalasining yechimini topamiz: umumiy yechimdan hosila

$y'(x)=-2e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{2x}(-C_1\sin x+C_2\cos x)-\frac{3}{8}\sin x+\frac{1}{8}\cos x$ bo‘ladi,

boshlang‘ich shartlardan foydalanib,

$$1=\frac{3}{8}+C_1,\quad 2=\frac{1}{8}-2C_1+C_2$$

$C_1\ \ va\ \ C_2$ noma’lumlarga nisbatan tenglamalar sistemasini hosil qilamiz, bundan $C_1=\frac{5}{8},\quad C_2=\frac{25}{8}$ bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasining yechimi

$$y(x)=e^{-2x}(\frac{5}{8}\cos x+\frac{25}{8}\sin x)+\frac{3}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$$

bo‘ladi.

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotga tatbiqlari

Differensial tenglamalarning iqtisodiyotdagi tatbiqlariga bir necha misollar keltiramiz.

1). *Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda (tabiiy) o‘sish modeli.* Biror turdagi mahsulot ishlab chiqarilib u tayin (belgilangan) P narxda sotilayotgan bo‘lsin. $Q(t)$ vaqtning t onida (momentida) realizatsiya qilingan mahsulot miqdori bo‘lsin. Bu holda mahsulotni realizatsiya qilishdan olingan daromad

$$PQ(t)$$

model bilan ifodalanadi. Bu daromadning bir qismi albatta ishlab chiqarish $J(t)$ investitsiyasiga sarflanadi, ya’ni

$$J(t) = mPQ(t) \qquad (1)$$

bo‘lsin, bunda m investitsiya me’yori bo‘lib o‘zgarmas son, hamda $0 < m < 1$.

Ishlab chiqarilayotgan mahsulot to‘liq realizatsiya qilinayotgan bo‘lsa, ishlab chiqarishni kengaytirish natijasida daromadning o‘sishi ta’minlanib, bu daromadning bir qismi yana mahsulot ishlab chiqarishni kengaytirishga sarflanadi. Bu hol ishlab chiqarish tezligining o‘sishi (akseleratsiya)ga olib keladi, hamda ishlab chiqarish tezligi investitsiyaga proporsional bo‘ladi, ya’ni

$$Q'(t) = eJ(t), \qquad (2)$$

bunda $\frac{1}{e}$ akseleratsiya me’yori. (1) va (2) tengliklardan

$$Q'(t) = emPQ \quad yoki \quad Q'(t) = kQ(t) \qquad (3)$$

kelib chiqadi, bunda $k = emP$.

(3) differensial tenglama birinchi tartibli, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo‘lib, uning umumiy yechimi

$$\frac{dQ}{dt} = KQ, \quad \frac{d\theta}{Q} = kdt, \quad \ln Q = kt + \ln C \quad yoki \quad Q = Ce^{kt}$$

bo‘ladi, bunda C ixtiyoriy o‘zgarmas.

Vaqtning $t = t_0$ momentida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Q_0 bo‘lsin.

Bu shartda

$$Q_0 = Ce^{kt_0} \quad yoki \quad C = Q_0 e^{-kt_0}$$

bo‘ladi. (3) tenglama uchun, Koshi masalasining yechimi

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \qquad (4)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ishlab chiqarishning tabiiy o‘sishi modeli eksponensial bo‘lar ekan (tabiiy o‘sish deganimizda raqobat yo‘qligi tushuniladi).

Matematik modellar **umumiylik xossasiga ega.** Buning misoli sifatida quyidagi holni keltirish mumkin. Biologik kuzatishlardan ma’lumki bakteriyalarning ko‘payish jarayoni ham (3) differensial tenglama bilan ifodalanadi. Bundan tashqari radioaktiv parchalanish: radioaktiv modda massasining kamayishi jarayoni qonuni ham (4) formulaga mos keladi.

2). *Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o'sishi modeli* Oldingi misolda ishlab chiqarilayotgan mahsulot to'liq realizatsiya bo'ladigan sharoitni qaradik. Endi raqobatli, ya'ni bozorga bu mahsulotni boshqalar ham realizatsiya qiladigan sharoitni qaraymiz. Bunday sharoitda mahsulot ishlab chiqarish miqdorini ko'paytirish bilan bozorda uning narxi kamayadi. $P = P(Q)$ funksiya (P mahsulot narxi, Q mahsulot miqdori) kamayuvchi bo'lib,

$$\frac{dP}{dQ} < 0$$

bo'ladi. Endi (1)-(3) formulalardagidek,

$$Q' = \alpha P(Q)Q \qquad (5)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $\alpha = em$. (5) tenglamaning o'ng tomonidagi ko'paytuvchilar hammasi musbat ishorali, demak $Q' > 0$ bo'ladi, ya'ni $Q(t)$ o'suvchi funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Oddiylik uchun $P(Q)$ funksional bog'lanish chiziqli, ya'ni

$$P(Q) = a - bQ, \;\; a >, \; b > 0$$

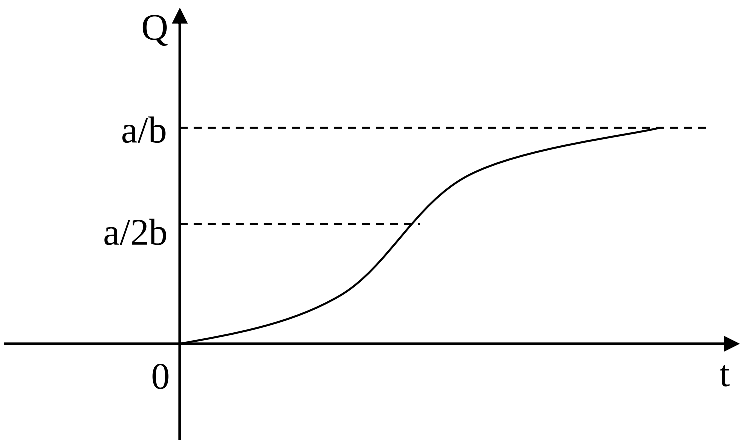
bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda (5) tenglama

$$Q' = \alpha(a - bQ)Q \qquad (6)$$

ko'rinishda bo'ladi. (6) tenglikni differensiallasak,

$$Q'' = (\alpha a Q - \alpha b Q^2)' = \alpha a Q' - 2\alpha b Q Q' \;\; yoki \;\; Q'' = \alpha Q'(a - 2bQ) \quad (7)$$

tenglama hosil bo'ladi. (6)-(7) tenglamalardan $Q = 0 \; va \; Q = \dfrac{a}{b}$ bo'lganda, $Q' = 0, \;\; Q < \dfrac{a}{2b}$ bo'lganda, $Q'' > 0$ hamda $Q > \dfrac{a}{2b}$ bo'lsa $Q'' < 0$ kelib chiqadi. Bulardan $\dfrac{a}{2b}$ nuqtadan o'tishda Q ishorasini o'zgartirganligi uchun, bu nuqta $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi. Bu funksiya grafigi, ya'ni (6) differensial tenglama integral chiziqlaridan biri, 1-chizmada tasvirlangan bo'lib, bu egri chiziqqa iqtisodda ***logistik chiziq*** deb ataladi.



1-chizma.

3). ***Talab va taklifni tahlil qilish.*** Ma'lumki, bozor modelida mahsulotga talab va taklif mavjud holatlarda narxning o'zgarish sur'ati bilan bog'liq bo'ladi. Bunday sur'at t vaqtning $P(t)$ narx funksiyasi birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi bilan harakterlanadi.

Quyidagi misolni qaraymiz. Talab D va taklif S P narxning funksiyasi bo'lib, ushbu tengliklar bilan ifodalansin:

$$D(t) = p'' - 2p' - 6p + 36, \quad S(t) = 2p'' + 4p' + 4p + 6. \qquad (1)$$

Bunday bog'liqlik haqiqatda mavjud holatlarga mos keladi. Haqiqatan ham, narx sur'ati oshsa, bozorning mahsulotga qiziqishi ortadi, ya'ni $p'' > 0$ bo'ladi. Narxning tez o'sishi haridorni cho'chitib talabning pasayishiga olib keladi. Shuning uchun, p' birinchi tenglikda manfiy ishora bilan ifodalanadi. Ikkinchidan, narx sur'atining ortishi bilan taklif yana kuchayadi, shuning uchun p'' ning koeffitsiyenti talab funksiyasidagiga nisbatan katta, narxning o'sishi tezligi taklifning ham o'sishiga olib keladi, ya'ni p' taklif funksiyasida musbat ishorali bo'ladi.

Narx funksiyasi va vaqt o'zgarishi orasidagi bog'lanishni tahlil qilaylik. Ma'lumki, bozor holati $D = S$ muvozanat bilan ifodalanadi. Bu holda (1) tenglikdan

$$p'' + 6p' + 10 = 30 \qquad (2)$$

ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama kelib chiqadi.

Bizga ma'lumki, bunday tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (2) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimi yig'indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$\overline{p}(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

bo'ladi, bunda C_1 va C_2 lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (2) tenglama xususiy yechimi $p_1(t) = A$ o'zgarmas, hamda buni (3) tenglamaga qo'yib, $A = 3$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, $p_1(t) = 3$ bo'ladi.

Shunday qilib (2) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi

$$p(t) = \overline{p(t)} + p_1(t) = e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 3 \qquad (3)$$

bo'ladi.

Bu yechimdan $t \to \infty$ da $p(t) \to 3$ bo'ladi, ya'ni hamma narxlar qaror topgan narxga yaqinlashadi.

Ushbu Koshi masalasini qaraymiz: $t = 0$ bo'lganda, narx $p(0) = 4$ va o'sish mayli (tendensiyasi) $p'(0) = 1$ bo'lsin. $t = 0$ bo'lganda $p(0) = 4$ bo'lganligi uchun, (3) dan $C_1 = 1$ kelib chiqadi. (3) tenglikdan hosila olib va t=0 bo'lganda $p(0) = 1$ shartdan foydalansak, C_2=4 kelib chiqadi, demak Koshi masalasining yechimi

$$p(t) = 3 + e^{-3t}(\cos t + 4\sin t)$$

bo'ladi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1.Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping:

1) $y'' + 6y' + 5y = e^{2x}$; 2) $y'' + y' + 7y = 8\sin 2x$; 3) $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$;

4) $y'' - 5y' + 6y = 3e^{2x}$; 5) $y'' + 9y = (43 + 10x - 26x^2)e^{2x}$;

6) $y'' + 6y' + 10y = 9\cos x + 27\sin x$; 7) $y'' - 6y' + 9y = 2\sin 2x$

2. $y'' + 16y = \sin 4x$. tenglamaning $x = 0$ bo‘lganda, $y = 1$, $y' = \frac{7}{8}$ bo‘ladigan boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning umumiy yechimi qanday topiladi?
2. Ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalarning birorta xususiy yechimi qanday topiladi?
3. Aniqmas koeffitsiyentlar usuli nimadan iborat?
4. Ishlab chiqarishning raqobatsiz sharoitda o‘sish modeli qanday bo‘ladi?
5. Ishlab chiqarishning raqobatli sharoitda o‘sishi modeli nima?
6. Logistik chiziq deb nimaga aytiladi?
7. Talab va taklifni differensial tenglama yordamida qanday tahlil qilinadi?

Qatorlar. Sonli qatorlar va ularning yaqinlashish belgilari

1. 1-ta'rif. $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ sonlar ketma-ketligidan tuzilgan.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

cheksiz yig'indiga sonli qator deyiladi.

$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ larga qatorning hadlari, u_n ga esa n***- hadi*** yoki ***umumiy hadi*** deyiladi.

Qatorlarga bir necha misollar keltiramiz:

$$a) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

qatorga ***garmonik qator*** deyiladi;

$$b) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

qator birinchi hadi $a_1 = \frac{1}{2}$, maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiyani ifodalaydi;

$$v) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

2. Qator yig'indisi va uning yaqinlashuvi. Sonli qator ta'rifidan ma'lumki, uning hadlari cheksiz ko'p bo'lib, yig'indisini oddiy yo'l bilan qo'shib, topib bo'lmaydi. Shuning uchun qatorning yig'indisi tushunchasini kiritamiz. (1) qator hadlaridan

$$u_1 = S_1, \quad u_1 + u_2 = S_2, \quad u_1 + u_2 + u_3 = S_3, \ldots,$$
$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . + u_n = S_n$$

qismiy yig'indilar tuzamiz.

2-ta'rif. $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ chekli limit mavjud bo'lsa, S ga ***qator yig'indisi*** deyiladi va ***qator yaqinlashuvchi*** deb ataladi.

Chekli limit mavjud bo'lmasa, qatorning yig'indsi bo'lmaydi va u ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

1-misol. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorning n qismiy yig'indisi

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+.....+\frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+....+$$
$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$.

Shunday qilib, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig'indisi $S=1$ bo'ladi.

3. *__Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi(sharti).__*

Teorema. $u_1+u_2+...+u_n+...$ (2)

qator yaqinlashuvchi bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

shart bajariladi.

Isbot. (2) qator yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun

$$u_n = S_n - S_{n-1};\quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Shunday qilib, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ kelib chiqdi.

Natija. Qator umumiy hadining $n\to\infty$ dagi limiti 0 ga teng bo'lmasa, u uzoqlashuvchi bo'ladi. Lekin $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ shartdan qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqmaydi. Bu shart faqat zaruriy shart bo'lib, yetarli emas.

4. Musbat hadli qatorlar yaqinlashishining *__yetarli belgilari__*

1) __Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi__.

$$u_1+u_2+...+u_n+... \quad (3),\quad v_1+v_2+...+v_n+... \quad (4)$$

qatorlar uchun $n_1 \le v_1,\ u_2 \le v_2, ..u_n \le v_n$, tengsizliklar hamma n lar uchun bajarilib: (4) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, (3) qator ham yaqinlashuvchi bo'lidi va uning yig'indisi (4) qator yig'indisidan katta bo'lmaydi; (3) qator uzoqlashuvchi bo'lsa, (4) qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

2-misol. $1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+...+\frac{1}{n\cdot 2^n}+...$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}+...$$

qator bilan taqqoslayimz. Ma'lumki, keyingi qator maxraji $q=\frac{1}{2}$ ga teng bo'lgan geometrik progressiya bo'lib yaqinlashuvchidi Hamma n lar uchun $\frac{1}{n\cdot 2^n} \le \frac{1}{2^n}$.

tengsizliklar bajariladi, demak taqqoslash belgisiga asosan, berilgan qatorning ham yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

2). *Dalamber belgisi*. Musbat hadli

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots$$

qator berilgan bo‘lsin. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$ limit mavjud bo‘lib: $d < 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi; $d > 1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi; $d = 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bunday hollarda qatorni boshqa belgilardan foydalanib tekshirish kerak bo‘ladi.

3-misol. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$

Demak, berilgan qator Dalamber belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

4-misol. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \ldots + \frac{n}{2n-1} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $d = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1} / \frac{n}{2n-1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n-1)}{(2n+1)n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-1}{2n^2+n} = \frac{2}{2} = 1.$

Bu holda Dalamber belgisi savolga javob bermaydi. Berilgan qator uchun qator yaqinlashishining zaruriy belgisini tekshiraylik.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Qator yaqinlashishining zaruriy sharti bajarilmaydi, demak berilgan qator uzoqlashuvchi.

3) ***Koshi belgisi*.**

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$$

limit mavjud va $k < 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi; $k > 1$ bo‘lsa, qator uzoqlashuvchi; $k = 1$ bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi ham, uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin, bu holda Koshi belgisi savolga javob bermaydi.

5-misol. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Koshi belgisidan

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Shunday qilib, berilgan qator Koshi belgisiga asosan yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) Qator *yaqinlashishining integral belgisi*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

musbat hadli qator berilgan bo‘lsin.

$f(n) = a_n$ natural argumentli funksiya tuzamiz. $f(x)$ uzluksiz, musbat va kamayuvchi funksiya bo‘lsin.

$\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_1^b f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, berilgan qator ham yaqinlashuvchi, xosmas integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, qator ham uzoqlashuvchi bo‘ladi.

6-misol. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} + ...$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n^2}$ *yoki* $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiyani tuzib, ushbu xosmas integralni hisoblaymiz:

$$\int\limits_1^\infty f(x)dx = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b x^{-2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b} + \frac{1}{1}\right) = 1.$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi, integral belgiga asosan, tekshirilayotgan qator ham yaqinlashuvchidir.

7-misol. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$

garmonik qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $f(n) = \frac{1}{n}$ *yoki* $f(x) = \frac{1}{x}$ bo‘lganligi uchun

$$\int\limits_1^\infty f(x)dx = \int\limits_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty}\ln b = \infty .$$

Demak, xosmas integral uzoqlashuvchi, integral belgiga asosan garmonik qator ham uzoqlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

5. Ishoralari almashinuvchi qatorlar(Leybnits qatori). Ishoralari har xil bo‘lgan qatorlarga ***o‘zgaruvchan ishorali*** qatorlar deyiladi.

O‘zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holi ***ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlardir*.**

Masalan, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$

qator birinchi hadi musbat bo‘lgan ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatordir.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qatorlar yaqinlashishini **Leybnits belgisi** bilan tekshiriladi.

Ishoralari navbat bilan almashinuvchi

$$a_1 - a_2 + a_3 + ... + (-1)^{n+1}a_n \qquad (5)$$

qator berilgan bo‘lsin. Bu yerda $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ musbat sonlar.

***Leybnits belgisi*.** Ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator hadlari absolyut qiymati bo‘yicha kamayuvchi, ya’ni 1) $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$
va 2) umumiy hadining $n \to \infty$ dagi limiti no‘lga teng, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$ bo‘lsa, ishoralari navbat bilan almashinuvchi (5) qator yaqinlashuvchi bo‘lib, uning yig‘indisi birinchi haddan katta bo‘lmaydi. Bu shartlardan birontasi bajarilmasa qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

8 –misol. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Leybnits belgisi shartlarini tekshiramiz:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Demak, Leybnits belgisining ikkala sharti ham bajariladi. Shunday qilib, berilgan qator Leybnits belgisiga asosan yaqinlashuvchi.

9-misol. $1{,}1 - 1{,}01 + 1{,}001 + \dots$
qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \dots$
birinchi shart bajariladi. Lekin $a_n = 1 + 0{,}1^n$ bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{10^n}\right) = 1 \neq 0,$$

Leybnits belgisining ikkinchi sharti bajarilmaydi. Demak, berilgan qator uzoqlashuvchi.

Qatorlar nazariyasidan taqribiy hisoblashlarda keng qo‘llaniladi. Taqribiy hisoblashlarda yo‘l qo‘yilgan xatolikni baholash katta amaliy ahamiyatga ega. Ishoralari navbatlashuvchi qatorlarda xatolik, hisobga olinmayotgan birinchi had absolyut qiymatidan katta bo‘lmaydi, ya’ni

$$|r_n| < a_{n+1}.$$

10-misol. $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$
ni 0,1 aniqlikda hisoblang.

Yechish: Shartga asosan $|r_n| < 0{,}1$ bo‘lishi kerak.

$|r_n| < a_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \quad \frac{1}{n+1} = \frac{1}{10}, \quad n+1 = 10, \quad n = 9.$ *Demak,*

$S_9 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \approx 0{,}74.$

Bundan $S \approx 0{,}7$; $0{,}1$ gacha aniqlikda hisoblandi.

Endi o‘zgaruvchan ishorali qatorlarning ayrim xossalarini qaraymiz.

6.Absolyut va shartli yaqinlashish.

1-ta'rif. O'zgaruvchan ishorali qator hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator yaqinlashuvchi bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali qator ***absolyut yaqinlashuvchi*** deyiladi.

Absolyut yaqinlashuvchi qator hamisha yaqinlashuvchi bo'ladi.

2-ta'rif. O'zgaruvchan ishorali qator yaqinlashuvchi bo'lib, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan qator uzoqlashuvchi bo'lsa, o'zgaruvchan ishorali qator ***shartli yaqinlashuvchi*** deyiladi.

11-misol. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. Berilgan qator hadlarining absolyut qiymatidan qator tuzamiz:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

bu qator maxraji $q=\frac{1}{3}$ bo'lgan geometrik progressiya bo'lib yaqinlashuvchidir. Demak, berilgan qator absolyut yaqinlashuvchi bo'ladi.

12-misol. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots$

qator shartli yaqinlashuvchidir. Chunki, uning hadlarining absolyut qiymatidan tuzilgan

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

garmonik qator uzoqlashuvchi edi.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

2. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

qator yaqinlashishining zaruriy shartini tekshiring.

3. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4. $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

5. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

6. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

qator yaqinlashishini Dalamber belgisidan foydalanib tekshiring.

7. $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

8. $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

9. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

qator yaqinlashishini integral belgi bilan tekshiring.

10. $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

11. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\frac{1}{1+3^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

12. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{2}{1+2^2}+\frac{3}{1+3^2}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

13. Quyidagi qatorlarning yaqinlashishini Koshi belgisidan foydalanib tekshiring:

1) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; 2) $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\ln^n(n+1)}$.

14-22. Quyidagi qatorlar yaqinlashishini tekshiring hamda yaqinlashuvchi bo‘lsa absolyutmi yoki shartli ekanligini aniqlang.

14. $\frac{1}{10}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}-\frac{1}{40}+\ldots$

15. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$.

16. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3n-2}{3n+5}$.

17. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n2^n}$.

18. $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{6n+5}$.

19. $\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots$.

20. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots.$

21. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots.$

22. $\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}-\ldots$.

23. $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring va uning yig‘indisini 0,01 aniqlikkacha hisoblang.

24. $e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}+\ldots \qquad (n=0,1,2,\ldots.)$

bo‘lsa, e^{-1} ni 0.001 aniqlikkacha hisoblang.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi?
2. Qatorning umumiy hadi nima?
3. Garmonik qator deb qanday qatorga aytiladi?
4. Qatorning qismiy yig‘indisi nima?
5. Qatorning yig‘indisi qanday aniqlanadi?
6. Qanday qatorga yaqinlashuvchi deyiladi?
7. Qanday qator uzoqlashuvchi bo‘ladi?
8. Yaqinlashuvchi qatorlar qanday xossalarga ega?
9. Qator yaqinlashishining zaruriy belgisi nima?
10. Qator yaqinlashishining yetarli va zaruriy belgilarining farqi nimadan iborat?
11. Qator yaqinlashishining taqqoslash belgisi nima?
12. Qator yaqinlashishining Dalamber belgisi qanday?

Funksional va darajali qatorlar

1. Funksional qatorlar haqida tushunchalar.

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots, u_n(x), \ldots$$

funksiyalar ketma-ketligi bo‘lsin.

1-ta’rif. $u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ (1)

ifodaga ***funksional qator*** deyiladi. (1) da $x = x_0$ biror son bo‘lsa, qo‘yidagi sonli qatorni hosil qilamiz

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots \quad (2)$$

(2) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, (1) funksional qator $x = x_0$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi va $x = x_0$ nuqtaga yaqinlashish nuqtasi deb ataladi.

1-misol. $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ funksional qator $x = \frac{1}{2}$ nuqtada yaqinlashuvchidir, chunki

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

sonli qator yaqinlashuvchi.

Berilgan (3) funksional qator $x = 2$ nuqtada uzoqlashuvchi, chunki

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n + \ldots .$$

sonli qator uzoqlashuvchi.

Funksional qator yaqinlashuvchi bo‘lgan nuqtalar to‘plamiga, uning ***yaqinlashish sohasi*** deyiladi.

2. Darajali qatorlar va ularning xossalari.

$$a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots. + a_n(x - a\ )^n + \ldots \quad (4)$$

funksional qatorga darajali qator deyiladi. $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ o‘zgarmas sonlar, darajali qatorning koeffitsiyentlari deb ataladi.

Darajali qator shunday xossaga egaki, u $x = b_0$ nuqtada yaqinlashuvchi bo‘lsa, $|x - x_0| < |b_0 - x_0|$ tengsizlikni qonoatlantiruvchi hamma x lar uchun ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Darajali qator uchun shunday R son mavjudki, $|x - x_0| < R$ uchun, qator absolyut yaqinlashuvchi $|x - x_0| > R$ uchun qator uzoqlashuvchi, ya’ni $-x_0 - R < x < -x_0 + R$ oraliqda darajali qator absolyut yaqinlashuvchi, $x = -x_0 \pm R$ nuqtalarda hosil bo‘lgan qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘lishi mumkin. Har ikki nuqtada qator yaqinlashishini alohida tekshirish kerak bo‘ladi. $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ intervalga ***yaqinlashish intervali***, R ga darajali qatorning ***yaqinlashish radiusi*** deyiladi. Yaqinlashish radiusi $R = 0$ *yoki* $R = \infty$ bo‘lishi mumkin $R = 0$ bo‘lsa, darajali qator faqat

$x = x_0$ nuqtada, $R = +\infty$ bo‘lsa, butun sonlar o‘qida yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Yaqinlashish intervalini, berilgan qatorning absolyut qiymatidan tuzilgan qator uchun Dalamber va Koshi belgilaridan foydalanib topish mumkin. Darajali qatorning hamma koeffitsiyentlari 0 dan farqli bo‘lsa, yaqinlashish radiusini topishda

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

formuladan foydalaniladi. Boshqa hollarda bevosita Dalamber belgisidan foydalanib yaqinlashish intervalini topish mumkin.

2-misol. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$ darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish: $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)}$. Qatorning yaqinlashish radiusini topamiz.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Demak, $-1 < x < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi hamma x lar uchun qator yaqinlashuvchi.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz: $x = 1$ bo‘lsin. Bu holda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

garmonik qator hosil bo‘lib, u uzoqlashuvchidir. $x = -1$ bo‘lsin, bu holda

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$

sonli qator hosil bo‘lib, u Leybnits belgisi shartlarini qanoatlantirgani uchun yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $-1 \le x < 1$ dan iboratdir.

3-misol. $(x-2) + \frac{1}{2^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3^2}(x-2)^3 + \ldots + \frac{1}{n^2}(x-2)^n + \ldots$ darajali qator yaqinlashishini tekshiring.

Yechish. $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$ bo‘lganligi uchun

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^2 = 1.$$

Demak, $-1 < x - 2 < 1$ *yoki* $1 < x < 3$ intervalda qator yaqinlashuvchi.

Intervalning chetki nuqtalarida qator yaqinlashishini tekshiramiz. $x=3$ bo‘lsin, bunda

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, integral belgidan foydalansak uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi(bajarib ko‘ring). $x=1$ bo‘lsa,

$$-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+...$$

sonli qator hosil bo‘lib, u absolyut yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib, berilgan qatorning yaqinlashish intervali $1\le x\le 3$ bo‘ladi.

3. Teylor va Makloren qatorlari. $y=f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada $(n+1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsa, u holda qo‘yidagi Teylor formulasi o‘rinlidir:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n+R_n(x),$$

bu yerda $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}\left[a+Q(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ (0<Q<1)$ bo‘lib, Lagranj shaklidagi qoldiq hadi deyiladi.

$a=0$ da Teylor formulasining xususiy holi - Makloren formulasi hosil bo‘ladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),\quad bu\ erda$$

$$R(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[Qx\right]}{(n+1)!}x^{n+1},\quad (0<Q<1).$$

$y=f(x)$ funksiya a nuqta atrofida istalgan marta differensiallanuvchi bo‘lsa va bu nuqtaning biror atrofida

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

bo‘lsa, Teylor va Makloren formulalaridan

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+....+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+....\ va$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+....$$

qatorlar hosil bo‘ladi. Bularning birinchisi ***Teylor qatori*,** ikkinchisiga ***Makloren qatori*** deyiladi.

Bu qatorlar x ning $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ bo‘ladigan qiymatlarida $f(x)$ ga yaqinlashadi.

A nuqtani o‘z ichiga oluvchi biror intervalda istalgan n uchun $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, $(M$ biror musbat son) tengsizlik bajarilsa, $\lim\limits_{n\to\infty}R(x)=0$

bo‘ladi va $f(x)$ funksiya Teylor qatoriga yoyiladi.

***5. Funksiyalarni darajali qatorlarga yoyish*.** Ayrim funksiyalarni darajali qatorga yoyyamiz.

1) $f(x)=e^x$, istalgan x uchun

$f'(x)=e^x,\ f''(x)=e^x,\dots,f^{(n)}(x)=e^x,\dots\quad x=0\ deb\quad f(0)=1,\quad f'(0)=1,\ f''(0)=1,\dots,f^{(n)}(0)=1,\dots$

Bularni Makloren qatoriga qo‘yib,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots\quad(-\infty<x<+\infty)$$

hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $x=1$ desak,

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots.$$

bo‘lib, e soni qator yig‘indisi ko‘rinishida ifodalanadi. Bundan foydalanib e sonining taqribiy qiymatini istalgan darajadagi aniqlikkacha hisoblash mumkin.

2) $f(x)=\sin x$. Istalgan x uchun

$$f'(x)=\cos x,\ \ f''(x)=-\sin x,\ \ f'''(x)=-\cos x,\ \ f''''(x)=\sin x,\dots.$$

Bundan

$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f''''(0)=0,\ \dots$

bo‘lib,bularni Makloren qatoriga qo‘ysak,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dots$$

hosil bo‘ladi.

Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchi $-\infty<x<+\infty$. Oxirgi qatorni hadlab differensiallasak,

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1-1}}{(2n-2)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

qator hosil bo‘ladi, bu $f(x)=\cos x$ funksiya uchun Makloren qatori bo‘ladi.

3) Xuddi yuqoridagidek usul bilan $f(x)=(1+x)^m$ funksiya uchun

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots.+\dots$$

qatorni hosil qilamiz. Bu qatorga ***binomial qator*** deyiladi. U $(-1,1)$ intervalda absolyut yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) $f(x)=\ln(1+x)$ funksiya uchun yuqoridagi usul bilan

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots.\quad(-1<x\le 1)$$

yoyilmani hosil qilish mumkin.

5-misol. $f(x)=\cos\sqrt{x}$ funksiyani x ning darajalari bo‘yicha qatorga yoying.

Yechish. Yuqoridagi $\cos x$ uchun keltirilgan qatorda x ni $\sqrt{x}$ bilan almashtirsak,

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - .... + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + ...$$

bo‘ladi. Bu qator istalgan x uchun yaqinlashuvchidir, biroq $\cos\sqrt{x}$ funksiya $x < 0$ da aniqlanmaganligini hisobga olib, hosil qilingan qator $\cos\sqrt{x}$ funksiyaga $0 \le x < +\infty$ da yaqinlashadi.

6. Qatorlarning taqribiy hisoblashga tatbiqlari. Bir necha misollar qaraymiz.

6-misol. $\cos x$ ning yoyilmasidan foydalanib $\cos 18^0$ ni $0{,}001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. $\cos x$ funksiyaning qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\cos 18^0 = \cos\frac{\pi}{10} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 - ...$$

qatorni hosil qilamiz.

$$\frac{\pi}{10} = 0{,}31416\,; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^2 = 0{,}09870\,; \quad \left(\frac{\pi}{10}\right)^4 = 0{,}00974\,.$$

va $\frac{1}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{10}\right)^6 < 0{,}0001$ bo‘lganligi uchun, taqribiy hisoblashda qatorning birinchi uchta hadi bilan chegaralanamiz, demak

$$\cos 18^0 \approx 1 - \frac{0{,}09870}{2} + \frac{0{,}00974}{24}; \quad yoki \quad \cos 18^0 \approx 0{,}9511\,.$$

7-misol. $\sqrt[5]{1{,}1}$ *ni* $0{,}0001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish: $\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{\frac{1}{5}}$ deb, binomial qatordan foydalansak:

$$\sqrt[5]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}\cdot 0{,}1 + \frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)}{2!}0{,}01 + \frac{\frac{1}{5}\cdot(\frac{1}{5}-1)\cdot(\frac{1}{5}-2)}{3!}0{,}001 +$$
$$+ ... = 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 + 0{,}000048 - ....$$

bo‘ladi. To‘rtinchi had $0.000048 < 0.0001$ bo‘lganligi uchun, hisoblashda birinchi uchta hadini olib, hisoblaymiz:

$$\sqrt[5]{1{,}1} \approx 1 + 0{,}02 - 0{,}0008 = 1{,}0192\,.$$

8-misol. $\sqrt[3]{130}$ *ni* $0{,}001$ aniqlikkacha taqribiy hisoblang.

Yechish. 5^3 130 ga eng yaqin butun sonning kubi bo‘lganligi uchun $130 = 5^3 + 5$ deb olish qo‘lay bo‘lib,

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3} + 5 = \sqrt[3]{5^3(1+\frac{1}{25})} = 5(1+\frac{1}{25})^{\frac{1}{3}} = 5(1+\frac{1}{3}0{,}04 + \frac{\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3}-1)}{2!}0{,}0016 +$$
$$+ \frac{(\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)\cdot(\frac{1}{3}-2))}{3!}0{,}000064 + ...) = 5 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}2\cdot\frac{1}{9}\cdot 0{,}0016 + 5\frac{25}{81}\cdot 0{,}000032 - ...$$

oxirgi qatorda to‘rtinchi had $0{,}001$ dan kichik bo‘lganligi uchun, birinchi uchta had bilan chegaralanamiz:

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009 \approx 5{,}066.$$

9-misol. $\ln 1{,}04$ *ni* $0{,}0001$ gacha aniqlikda taqribiy hisoblang.

Yechish: $\ln(1+x)$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib,

$$\ln(1+0{,}04) = 0{,}04 - \frac{0{,}04^2}{2} + \frac{0{,}04^3}{3} - \frac{0{,}04^4}{4} + \ldots, \quad \text{yoki}$$

$$\ln 1{,}04 = 0{,}04 - 0{,}0008 + 0{,}000021 - 0{,}00000064 + \ldots$$

qatorni hosil qilamiz, hamda uchinchi had $0{,}0001$ dan kichik bo‘lganligi uchun birinchi ikki hadni hisobga olib hisoblaymiz:

$$\ln 1{,}04 \approx 0{,}0392.$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\dfrac{4-x}{7x+2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{4-x}{7x+2}\right)^3 + \ldots$

funksional qatorning $x=0$ *va* $x=1$ nuqtalarda yaqinlashuvchiligini tekshiring.

2. $1!(x-5) + 2!(x-5)^2 + 3!(x-5)^3 + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

3. $\dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

qator yaqinlashishini tekshiring.

4-8 misollarda qatorning yaqinlashish intervalini aniqlang.

4. $(x-4) + \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-4)^2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-4)^3 + \ldots$

5. $x + (2x)^2 + (3x)^3 + (4x)^4 + \ldots$

6. $5x + \dfrac{5^2x^2}{2!} + \dfrac{5^3x^3}{3!} + \dfrac{5^4x^4}{4!} + \ldots$

7. $x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3} + \dfrac{x^8}{4} + \ldots$

8. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-1}{2} + \dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}\cdot\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^3 + \dfrac{4}{5}\cdot\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^4 + \ldots$

9. Ushbu funksiyalarni darajali qatorga yoying.

1) $f(x) = 3^x$; 2) $f(x) = e^{-2x}$; 3) $f(x) = \cos^2 x.$

10. Funksiyalarning darajali qatorlarga yoyilmasidan foydalanib quyidagilarni:

1) e sonini $0{,}00001$ gacha aniqlikda;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ni $0{,}00001$ gacha aniqlikda;

3) $\sin 9^0$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

4) $\sqrt[3]{1{,}06}$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

5) $\ln 0{,}98$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda;

6) $\ln 1{,}1$ ni $0{,}0001$ gacha aniqlikda

taqribiy hisoblang.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Funksional qator deb nimaga aytiladi?
2. Funksional qatorning yaqinlashish nuqtasi deb nimaga aytiladi?
3. Funksional qatorning yaqinlashish sohasi deb qanday to‘plamga aytiladi?
4. Darajali qator deb nimaga aytiladi?
5. Darajali qatorning yaqinlashish radiusi deb nimaga aytiladi?
6. Qanday intervalga yaqinlashish intervali deyiladi?
7. Yaqinlashish radiusi qanday topiladi?
8. Yaqinlashish intervalining chetki nuqtalarida, darajali qator yaqinlashishi qanday bo‘ladi?
9. Darajali qator qanday xossalarga ega?
10. Makloren va Teylor formulalari qanday bo‘ladi?
11. Teylor qatori deb qanday qatorga aytiladi?
12. Makloren qatori Teylor qatoridan kelib chiqadimi?
13. Qanday funksiyalarni Teylor qatoriga yoyish mumkin?
14. $f(x)=e^x$ funksiyaning darajali qatorga yoyilmasi qanday bo‘ladi?
15. $f(x)=\sin x$ funksiya Makloren qatoriga qanday yoyiladi?
16. $f(x)=\cos x$ funksiyaning Makloren qatoriga yoyilmasini yozing?
17. Binomial qator qanday bo‘ladi?
18. $f(x)=\ln(1+x)$ funksiyani Makloren qatoriga yoying?
19. $\cos 18^0$ ni taqribiy hisoblang? (18^0 radian o‘lchovda $0{,}314$).
20. Qatorlardan foydalanib $\sqrt[5]{1{,}1}$ ni taqribiy hisoblang?
21. $\sqrt[3]{130}$ ni taqribiy hisoblang?
22. $\ln(1{,}04)$ ni taqribiy hisoblang?

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] Karimov I.A. 2006 yilda mamlakatni ijtimoiy-iqtisodiy rivojlantirish yakunlari va 2007 yilda iqtisodiy islohatlarni chuqurlashtirishning eng muhim ustivor yo‘nalishlariga bag‘ishlangan Vazirlar Mahkamasi majlisidagi ma’ruzasi. Ma’rifat gazetasi.13-son. 2007y. 14-fevral.

[2] Zamkov O.O. i dr. Matematicheskiye metodi v ekonomike – M.: DIS 1997. 336 s.

[3] Abdalimov B.A. Oliy matematika – T.: O‘qituvchi, 1994y.

[4] Soatov Yo.U. Oliy matematika.1.2 jild. – T.: O‘qituvchi, 1992.1994.

[5] Jurayev T.J. va bosh. Oliy matematika asoslari. – T.: O‘zbekiston. 1999.

[6] Azlarov T., Mansurov H. Matematik analiz. 1,2-qism.T.:O‘qituvchi. 1992,1994.

[7] Soatov Yo.U. Oliy matematika 3-jild.- T.: O‘zbekiston. 1996. – 619 b.

[8] Tojiyev Sh.I. Oliy matematikadan masalalar yechish. – T.: O‘zbekiston. - 512 bet.

[9] Krass M.S. Matematika dlya ekonomicheskix spesialnostey. – M.: 1998.

[10] Masagutova R.V. Matematika v zadachax dlya ekonomistov – T.: O‘qituvchi, 1996. 184s.

[11] Krinskiy X.Ye. Matematika dlya ekonomistov. – M.: Statistika. 1971.

[12] Salohitdinov M.S., Nasritdinov G.N. Oddiy differensial tenglamalar. –T.: O‘qituvchi.1982. -447b.

[13] Nasritdinov G.N. Matematik ekonomika elementlari – T.: O‘qituvchi. 1984.

[14] Danko P.Ye. i dr. Visshaya matematika v uprajneniyax i zadachax. – M.: Visshaya shkola. 1998 ch. 1.2.

[15] Abdalimov B.A. va boshqalar. Oliy matematikadan masalalar yechish uchun qo‘llanma – T.: O‘qituvchi. 1985.

[16] Piskunov N.S.. Differensial va integral hisob.1,2 tom..O‘zbek tiliga tarjima.-T.: O‘qituvchi. 1974.

[17] Shneyder V.Ye. va boshqalar. Oliy matematika qisqa kursi. I-II tom. Ruschadan tarjima. –T.: O‘qituvchi. 1987.

[18] Minorskiy V.P. Oliy matematikadan masalalar to‘plami. Ruschadan o‘zbek tiliga tarjima. T. : O‘qituvchi. 1977. -368b.

[19] Sadullayev A. va boshq. Matematik analizdan misol va masalalar to‘plami. – T.: O‘zbekiston. 1992.

[20] Begmatov A.B. Oliy matematika. O‘quv qo‘llanma. Sam.KI. 2003. 250b.

[21] Gurskiy Ye.I. i dr. Rukovodstvo k resheniyu zadach po visshey matematike. V dvux chastyax. Minsk. Visheyshaya shkola. 1998,1990.352s.400s.

[22] Begmatov A.B., Yakubov M.Ya. Iqtisodchilar uchun matematika. Ma’ruzalar matni. Samarqand, SamQHI, 2003 y. 300 b.

[23] Begmatov A.B., Qarshiboyev X.Q. Oliy matematika. Amaliy mashg‘ulotlar uchun uslubiy qo‘llanma. Samarqand. SamISI. 2007.236 b.

[24] Galitskiy M.L. va boshq. Algebra va matematik analiz kursini chuqur o‘rganish. Ruschadan tarjima.-T.: O‘qituvchi.1995.-384b.

[25] Kurosh A.G. Oliy algebra kursi. Ruschadan tarjima. T.: O‘qituvchi. 1976.-461b.

[26] Zaysev I.A. Visshaya matematika. –M.: Vissh.shk.1998.-409s.

[27] Gusak A.A. Posobiye k resheniyu zadach po visshey matematike. Minsk. Visheyshaya shkola.1968. -532s.

Mundarija