ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АЗИЗОВ АЗИЗХОН НОДИРХОН ЎҒЛИ

АТОМИК ФОН НЕЙМАН АЛГЕБРАЛАРИНИНГ НОКОММУТАТИВ СИММЕТРИК ФАЗОЛАРИДА ЭРГОДИК ТЕОРЕМАЛАР

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

УДК: 517.98

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ИЛМИЙ ДАРАЖАЛАР БЕРУВЧИ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ

АЗИЗОВ АЗИЗХОН НОДИРХОН ЎҒЛИ

АТОМИК ФОН НЕЙМАН АЛГЕБРАЛАРИНИНГ НОКОММУТАТИВ СИММЕТРИК ФАЗОЛАРИДА ЭРГОДИК ТЕОРЕМАЛАР

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2021 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2019.2.PhD/FM326 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZiyoNet» таълим ахборот тармоғида (http://www.ziyonet.uz/) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Чилин Владимир Иванович** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Абдуллаев Рустамбай Зайирович** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Заитов Адилбек Атаханович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	ЎзР ФА Математика институти

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг 2021 йил «____» ____________ соат ____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Диссертация билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____ рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Диссертация автореферати 2021 йил «____» ____________ куни тарқатилди.
(2021 йил «____» ____________ даги ____ рақамли реестр баённомаси).

А.Садуллаев
Илмий даражалар берувчи
илмий кенгаш раиси,
ф.-м.ф.д., академик

Н.К.Мамадалиев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш илмий котиби,
ф.-м.ф.ф.д. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Илмий даражалар берувчи илмий
кенгаш ҳузуридаги илмий семинар
раиси, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Жаҳон миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар аксарият ҳолларда чизиқли акслантиришлар турли хил синфларининг эргодик хоссаларини ўрганиш масалаларига келтирилади. Бу хоссаларни тадқиқ қилиш эргодик назариянинг асосини ташкил қилади. Эргодик назария замонавий математикада мухим аҳамиятга эга. Бир томондан у, тўғридан-тўғри, физиканинг, биринчи навбатда, статистик механиканинг ғоя ва маслалари билан боғлиқ. Бошқа томондан, унда Лебег интеграли ва ўлчови умумий назариясига, Банах фазолари назариясига ва операторларнинг спектрал назариясига асосланувчи абстракт математик аппарат ишлатилади. Нокоммутатив функционал анализнинг фаол ривожланиши нокоммутатив эргодик назариянинг ривожланишига туртки берди. Шу сабабли нокоммутатив симметрик фазоларда эргодик теоремаларни исбот қилиш замонавий математикада муҳим аҳамиятга эга ҳисобланади.

Жаҳонда ҳозирги вақтда коммутатив ва нокоммутатив симметрик фазолар учун эргодик назария масалаларини ечиш замонавий функционал анализнинг долзарб муаммоларидан бири бўлиб, симметрик фазоларда таъсир қилувчи Данфорд-Шварц операторлари учун индивидуал, статистик ва доминант эргодик теоремаларга алоҳида эътибор қаратилган. Бунда, олиб борилаётган тадқиқотлар симметрик фазоларнинг турли синфларида эргодик теоремаларни батафсил ўрганишнинг аҳамиятини очиб беради. Ундан ташқари, индивидуал ва статистик эргодик теоремалар вариантларининг бажарилиши учун зарурий ва етарли шартларни олишга алоҳида эътибор берилмоқда.

Мамлакатимизда, айниқса кейинги йилларда, фундаментал фанлар, жумладан квант механикаси ва физикада тадбиқига эга бўлган долзарб йўналишларига эътибор кучайтирилди. Бу йўналишлар ичида энг асосийларидан бири, шубҳасиз эргодик назариядир. Жумладан, охирги йилларда симметрик фазолар учун эргодик теоремаларнинг турли синфларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Симметрик фазоларни чукур тадқиқ қилиш натижасида, кетма-кетликларнинг симметрик фазолари ва Банах симметрик идеаллари учун эргодик теоремаларнинг турли синфларини таҳлил қилишда салмоқли натижаларга эришилди. «Алгебра ва функционал анализ» фанларининг устивор йўналишлари бўйича халқаро стандартлар даражасида илмий тадқиқотлар олиб бориш математика фанининг асосий вазифалар ва фаолият йўналишлари этиб белгиланди[1]. Бунда симметрик фазолар учун эргодик назариянинг ривожланиши ушбу қарорни бажаришда муҳим рол ўйнайди.

[1]Ўзбекистон Республикаси Вазирлар маҳкамасининг 2017 йил 18 майдаги “Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг янгидан ташкил этилган илмий тадқиқот муассасалари фаолиятини ташкил этиш тўғрисида”ги 292-сон қарори.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2017 йил 7 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича Ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони, 2019 йил 9 июлдаги ПҚ-4387-сон «Математика таълими ва фанларини янада ривожлантиришни давлат томонидан қўллаб-қувватлаш, шунингдек Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг В.И.Романовский номидаги Математика институти фаолиятини тубдан такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги ва 2020 йил 7 майдаги ПҚ-4708-сон «Математика соҳасидаги таълим сифатини ошириш ва илмий-тадқиқотларни ривожлантириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги қарорлари ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий ҳужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишда ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланиши устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. «Математика, механика ва информатика» устивор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Эргодик теоремаларни ўрганиш эргодик назариянинг муҳим тадқиқот йўналишларидан ҳисобланади. Биринчи бўлиб индивидуал эргодик теоремани 1931 йилда Г. Биркгофф купёқликларда ўлчовни сақловчи гомеоморфизмлар учун исботлаган. Индивидуал эргодик теорема бошқа фазолар ва акслантиришлар синфлари учун Н. Данфорд, Дж. Шварц, К. Миллер, П. Халмош, А. Хинчин, Ф. Рисс, А. Винер ва А. Витнер ишларида батафсил кўрилган. Ўлчовни сақловчи n-параметрли акслантиришлар группалари ва ярим группалари учун индивидуал эргодик теорема вариантлари А. Винер томонидан исботланган. Нокоммутатив индивидуал эргодик теоремаларни ўрганиш эса биринчи бўлиб К. Ленс ишларидан бошланган. Нокоммутатив индивидуал эргодик теоремани Ф. Йедон нокоммутатив L_1 фазоларида мусбат абсолют сиқувчи $L_1 - L_\infty$ операторлар таъсири учун, М. Юнг ва К. Шу худди шундай натижани $L_p, 1 < p < \infty,$ фазоларда мусбат Данфорд-Шварц операторлари таъсири учун исботлашган, В. Чилин ва С. Литвинов эса ушбу фактни нокоммутатив Лоренц ва Орлич фазоларида таъсир қилувчи мусбат Данфорд-Шварц операторлари учун кўрсатишган.

Статистик эргодик теоремани дастлаб 1932 йилда Дж. фон Нейман L_2 фазоларининг ўлчовни сақловчи акслантиришлардан ҳосил булган изометриялари учун исботлаган. Кейинроқ, Банах фазолари ва операторларнинг турли синфлари учун статистик эргодик теорема Ф. Рисс, К. Йосида ва С. Какутани ишларида ўрганилган. Ихтиёрий абстракт вектор панжаралари учун статистик эргодик теорема Г. Биркгофф, С. Какутани ва Ф. Рисс ишларида кўрилган. Н. Данфорд ишларида эса статистик эргодик теорема $L_p,\ 1 < p < \infty,$ фазолар учун ва $L_1 - L_\infty$ сиқувчи акслантиришлар учун исботланган. Бундан ташқари, операторлар группалари ва ярим группалари таъсирлари учун статистик эргодик теорема вариантлари Л. Алаоглу, Г.

Биркгофф, Н. Данфорд ва А. Винер ишларида исботланган. Статистик эргодик теореманинг нокоммутатив вариантлари эса Р. Джейте, Ф. Комбес, Н. Данг-Нок, Ж. Диксмье, К. Ленс ишларида турли хил нокоммутатив фазолар синфлари учун исботланган. Ф. Йедон статистик эргодик теоремани содда ярим чекли нормал из билан берилган ярим чекли фон Нейман алгебраси билан мослаштирилган L_p фазоларида Данфорд-Шварц операторлари таъсири учун исботлаган.

Табиийки, барча шу кунга қадар олинган натижаларнинг чуқур таҳлили ихтиёрий нокоммутатив симметрик фазолар учун эргодик теоремаларни ўрнатиш масаласини келтириб чиқаради. Жумладан, нокоммутатив симметрик фазоларнинг муҳим мисоллари бўлган компакт операторларнинг симметрик идеаллари синфлари учун эргодик теоремалар вариантларининг адолатлилигини исботлаш муҳим аҳамиятга эгадир. Ушбу диссертация иши компакт операторларнинг симметрик идеаллари синфлари учун эргодик теоремалар вариантларини исботлашга бағишланган. Диссертацияда компакт операторлар симметрик идеалларида таъсир қилувчи Данфорд-Шварц операторлари учун нокоммутатив индивидуал ва статистик эргодик теоремаларнинг тўғрилик мезонлари келтирилади. Бундан ташқари, кетма-кетликлар симметрик фазолари учун индивидуал ва статистик эргодик теоремалар алоҳида исботланади.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий - тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги. Тадқиқотлар Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университетининг ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 «Z^d панжараларида ва Γ^k Кэли дарахтларида гамильтонианлар спектрлари ва Гиббс ўлчовлари» илмий тадқиқот режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади кетма-кетликлар симметрик фазолари учун, ҳамда компакт операторларнинг Банах идеаллари учун маълум эргодик теоремалар вариантларини олишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

симметрик функционал фазоларнинг жойлашишини қуриш;

симметрик кетма-кетликлар фазоси ёрдамида $(0,\infty)$да аниқланган симметрик функциялар фазосини тиклаш;

эргодик теоремаларнинг вариантларини кетма-кетликлар симметрик фазолари учун исботлаш;

компакт операторлар Банах идеалларида эргодик теоремалар вариантларини исботлаш.

Тадқиқотнинг объектини кетма-кетликлар тўла симметрик фазоларида ва компакт операторларнинг Банах идеалларида индивидуал ва статистик эргодик теоремалар ташкил этади.

Тадқиқотнинг предметини симметрик кетма-кетликлар фазолари, симметрик функциялар фазолари, улар орасидаги боғланишлар, компакт операторларининг Банах идеаллари, Данфорд-Шварц операторлари, компакт операторларнинг Банах идеалларида d-ўлчовли оқимлар учун группалар таъсири ташкил қилади.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида функционал анализ, умумий топология, алгебра, Банах панжаралари назарияси, операторлар спектрал назарияси ва операторлар алгебралари назарияси усулларидан фойдаланилган. Ундан ташқари, тўпламлар назарияси ва тартибланган фазолар назарияси усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

ихтиёрий сепарабел p-қаварик кетма-кетликлар Банах идеал фазоси учун Блум-Хансон хоссаси исботланган;

кетма-кетликлар тўла симметрик фазоларида ихтиёрий Данфорд-Шварц операторлари таъсири учун индивидуал ва статистик эргодик теоремаларнинг бажарилиши учун зарурий ва етарли шартлари кўрсатилган;

компакт операторлар тўла симметрик идеалларида Данфорд-Шварц операторлари таъсири учун индивидуал ва статистик эргодик теоремаларнинг вариантлари олинган;

компакт операторлар тўла симметрик идеалларида таъсир қилувчи Данфорд-Шварц операторларининг $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз d-ўлчовли ярим группалари учун индивидуал ва статистик эргодик теоремалар вариантлари исботланган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари қуйидагилардан иборат:

олинган натижалар Лоренц ва Орлич кетма-кетликлар фазоси ва Банах идеалларида индивидуал ва статистик эргодик теоремаларни исботлашда қўлланилган;

кетма-кетликлар симметрик фазолари ёрдамида $(0,\infty)$ да аниқланган яхши маълум бўлган симметрик функциялар фазолари янги конструкция ёрдамида қурилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги функционал анализ, умумий топология, Банах фазолари назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти кетма-кетликларнинг симметрик фазолари ва компакт операторларнинг симметрик идеаллари учун, ҳамда компакт операторлар тўла симметрик идеалларида таъсир қилувчи Данфорд-Шварц операторларининг $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз d-ўлчовли ярим группалари учун индивидуал эргодик теореманинг кучайтирилган вариантини исботлаш билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти олинган янги эргодик теоремалар вариантларини нокоммутатив Лоренц, Орлич ва Марцинкевич симметрик фазолари акслантиришларининг эргодик хоссаларини ўрганишдан иборат.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқот жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги илмий-тадқиқот проектларида жорий этилган:

$\mathcal{A}$ σ-алгебранинг $\mathcal{B}$ $\sigma-$қисм алгебрасидан $\mathcal{A}_v$ $\sigma-$алгебрага ўлчовни сақловчи акслантириш мавжудлиги ҳақидаги олинган натижалар асосида ОТ-4-27 рақамли «Йордан учликлари олдқўшма фазолари, сиғимлар фазолари тавсифлари ва функцияларни голоморф давом эттириш» лойиҳасида метрик компактда нормаланган, тартибини сақловчи, кучсиз аддитив функционаллар фазосида янги метрика қурилган (Қорақалпоқ давлат университети 2021 йил 21 июндаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши метрик компактда нормаланган, тартибини сақловчи, кучсиз аддитив функционаллар фазосида қурилган метрика ўзгартирилган Канторович–Рубинштейн метрикасининг аналоги эканини исботлашга имкон берган;

Нокоммутатив симметрик фазолар учун исботланган индивидуал ва статистик эргодик теоремалар ёрдамида ОТ-Ф4-31 рақамли «Нокоммутатив модуллар, Лейбниц алгебралари ва симплексда полиномиал каскадлар» лойиҳасида нокоммутатив L_1 фазоларида таъсир қилувчи мусбат чизиқли сиқувчи акслантириш ягона равишда Данфорд-Шварц операторига давом эттирилиши исботланган (Ўзбекистон миллий университети 2021 йил 19 июндаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши содда ярим чекли нормал из билан берилган ярим чекли фон Нейман алгебрасига тегишли симметрик фазоларда статистик эргодик теореманинг зарурий ва етарли шартларини олиш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 7 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтказилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация тадқиқоти мавзуси бўйича жами 18 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та, жумладан 3 таси хорижий ва 4 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг тузилиши ва ҳажми. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг умумий ҳажми 93 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **«Бошланғич маълумотлар»,** деб номланувчи бобида диссертация натижаларини тақдим этиш учун зарур бўлган функцияларнинг симметрик фазолари, кетма-кетликлар Банах идеал фазолари, кетма-кетликлар симметрик фазолари ва компакт операторларнинг Банах идеаллари хоссалари берилган. Компакт операторларнинг Банах идеаллари ва кетма-кетликлар симметрик фазолари орасидаги мухим бўлган муносабатлар берилган.

Айтайлик $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ тўла σ-чекли ўлчовли ўлчовли фазо бўлсин. $\mathcal{L}_0=\mathcal{L}_0(\Omega)$ орқали биз $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ да аниқланган деярли ҳамма ерда тенг ҳақиқий ўлчовли функцияларнинг барча синфлари алгебрасини ифодалаймиз, $\mathcal{L}_0(\mu)$ орқали эса $\mathcal{L}_0$ даги барча шундай $f\in\mathcal{L}_0$ функциялар алгебрасини белгилаймизки, бунда қандайдир $\lambda>0$ учун $\mu(\{|f|>\lambda\})<\infty$ бўлсин. $\mathcal{L}_p\subset\mathcal{L}_0(\mu)$, $1\le p\le\infty$, орқали одатдагидай классик Банах функционал L_p-фазоларини белгилаймиз, бунда бу фазо стандарт норма $\|\cdot\|_p$ билан берилган.

Агар $f\in\mathcal{L}_0(\mu)$ бўлса, у ҳолда f функциянинг ўсмайдиган ўрин алмаштириши $\mu_t(f)=\inf\{\lambda>0:\mu\{|f|>\lambda\}\le t\},\ t\ge 0$ тенглик билан аниқланади. Нолдан фарқли $E\subset\mathcal{L}_1(\Omega,\mathcal{A},\mu)+\mathcal{L}_\infty(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ қисм фазо Банах нормаси $\|\cdot\|_E$ билан симметрик фазо деб аталади, агар $f\in E,\ g\in\mathcal{L}_0(\mu),\ \mu_t(g)\le\mu_t(f),\ \forall\, t>0,$ шартлардан $g\in E$ ва $\|g\|_E\le\|f\|_E$ экани келиб чиқса.

Симметрик фазо E да норма $\|\cdot\|_E$ тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга дейилади, агар $0\le f_n\in E,\ f_n\downarrow 0$ шартлардан $\|f_n\|_E\downarrow 0$ экани келиб чиқса (мос равишда, $0\le f_n\le f_{n+1},\quad f_n\in E,\ n=1,2,\ldots,\ \sup\limits_{n\ge1}\|f_n\|_E<\infty,$ шартлардан шундай $f\in E$, $f_n\uparrow f$ мавжудлиги ва $\sup\limits_{n\ge1}\|f_n\|_E=\|f\|_E$ келиб чиқса).

Айтайлик $\mathcal{A}_\nu$ – $(0,\infty)$ да аниқланган барча Лебег маъносида ўлчовли тўпламлар σ-алгебраси бўлсин, бу ерда ν – $\mathcal{A}_\nu$ даги Лебег ўлчови. Ихтиёрий симметрик фазо $E=E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ учун қуйидагиларни кўрамиз:

$$E(\Omega)=E(\Omega,\mathcal{A},\mu)=\{f\in\mathcal{L}_0(\mu):\mu_t(f)\in E\};\ \|f\|_{E(\Omega)}=\|\mu_t(f)\|_E;\ f\in E(\Omega,\mathcal{A},\mu).$$

Маълумки, $(E(\Omega),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ – $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ да аниқланган ўлчовли функциялар симметрик фазоси, бу холда, $(E(\Omega),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ симметрик фазо E симметрик фазодан хосил қилинган дейилади. Агар $E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ фазонинг нормаси тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлса, у холда $(E(\Omega),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ фазонинг нормаси хам тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлади.

Айтайлик $s(\mathbb{K})$ барча комплекс ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) ёки ҳақиқий ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) сонлар кетма-кетликлари чизиқли фазоси бўлсин, E эса $s(\mathbb{K})$ да чексиз ўлчовли идеал қисм фазо бўлсин (E фазонинг идеаллиги шуни англатадики, агар $x\in E$, $y\in s(\mathbb{K})$ ва $|y|\le|x|$ бўлса, у ҳолда $y\in E$ бўлади). Айтайлик $\|\cdot\|_E$ – E да Банах монотон нормаси бўлсин. Охирги жумла шуни англатадики, агар $x,y\in E$ ва $|x|\le|y|$ бўлса, у ҳолда $\|x\|_E\le\|y\|_E$ экани ўринли бўлади. Бу ҳолда, $(E,\|\cdot\|_E)$ жуфтликни $s(\mathbb{K})$ да Банах идеал фазоси (БИФ) дейилади. $(E,\|\cdot\|_E)$ Банах панжараси p-қавариқ дейилади ($1\le p<\infty$), агар шундай ўзгармас $M>0$ мавжуд бўлиб, ихтиёрий чекли сондаги $\{x_i\}_{i=1}^n\subset E$ элементлар учун

$$\|(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\|_E\le M(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}}$$

тенгсизлик ўринли бўлса. Бундай M ўзгармасларнинг энг кичиги E фазо p-қавариқлигининг ўзгармаси дейилади ва $M^{(p)}(E)$ каби белгиланади.

Банах идеал фазоларининг мухим қисм классларидан бири кетма-кетликлар симметрик фазолари ҳисобланади. Айтайлик $l_\infty=l_\infty(\mathbb{R})$ (мос равишда, $c_0=c_0(\mathbb{R})$) $\|x\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|\xi_n|$ нормага нисбатан барча $\mathbb{R}$ дан олинган $x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ чегараланган кетма-кетликлар (мос равишда, нолга яқинлашувчи кетма-кетликлар) Банах панжараси бўлсин.

Агар $x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\in l_\infty$ бўлса, у ҳолда ўсмайдиган ўрин алмаштириш $x^*=\{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$ қуйидаги формула билан аниқланади: $\xi_n^*=\inf\limits_{card(F)<n}\sup\limits_{n\notin F}|\xi_n|$, бу ерда F – $\mathbb{N}$ нинг чекли қисм тўплами. Агар $y\in E$, $x\in l_\infty, x^*\le y^*$, шартлардан $x\in E$ ва $\|x\|_E\le\|y\|_E$ экани келиб чиқса, у ҳолда Банах нормаси $\|\cdot\|_E$ билан берилган нолдан фарқли қисм фазо $E\subset l_\infty$ кетма-кетликлар симметрик фазоси дейилади. Ихтиёрий кетма-кетликлар симметрик фазоси E учун доимо $E\subseteq c_0$ ёки $E=l_\infty$ бўлади.

l_∞ фазосида Харди-Литтлвуд-Пойя тартиби $x\prec\prec y$ қуйидагича аниқланади:

$$(x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\prec\prec y=\{\eta_n\}_{n=1}^\infty)\Leftrightarrow(\sum_{k=1}^n\xi_k^*\le\sum_{k=1}^n\eta_k^* \text{ ихтиёрий } n\in\mathbb{N} \text{ учун}).$$

кетма-кетликлар симметрик фазоси $(E,\|\cdot\|_E)$ тўла симметрик кетма-кетликлар фазоси дейилади, агар $x\prec\prec y, x\in l_\infty, y\in E,$ шартлардан $x\in E$ ва $\|x\|_E\le\|y\|_E$ экани келиб чиқса.

$(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ чексиз ўлчамли $\mathbb{C}$ майдон устида аниқланган Гильберт фазоси бўлсин ва $(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\|\cdot\|_\infty)$ – $\mathcal{H}$ да таъсир қилувчи барча чизиқли чегараланган операторлар $C^\star$-алгебраси бўлсин, бунда $\|x\|_\infty=\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}:\|\xi\|_{\mathcal{H}}\le1}\|x(\xi)\|_{\mathcal{H}}$. $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (мос равишда, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) орқали $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ даги барча компакт (мос равишда, чекли ўлчамли) операторлар қўш идеалини белгилаймиз. $\mathcal{B}_h(\mathcal{H})=\{x\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):x=x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})=\{x\in\mathcal{B}_h(\mathcal{H}):x\ge 0\}$ белгилашларни киритамиз ва айтайлик $\tau:\mathcal{B}_+(\mathcal{H})\to[0,\infty]$ – $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ да каноник из бўлсин, яъни $\tau(x)=\sum_{j\in J}(x\varphi_j,\varphi_j),\ x\in\mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$ бу ерда $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ – $\mathcal{H}$ даги ортонормал базис.

Айтайлик $\mathcal{P}(\mathcal{H})=\{e\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):e=e^2=e^*\}$ – $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ даги барча проекторлар панжараси бўлсин. Агар $\mathbf{1}$ – $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ алгебранинг бирлик элементи ва $e\in\mathcal{P}(\mathcal{H})$ бўлса, у ҳолда $e^\perp=\mathbf{1}-e$, деб белгилаймиз.

Айтайлик $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ бўлсин ва $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda\ge 0}$ $-x$ оператор модули $|x|=(x^*x)^{1/2}$ учун проекторлар спектрал оиласи бўлсин, яъни $e_\lambda(|x|)=\{|x|\le\lambda\}$. Агар $t>0$ бўлса, у ҳолда x операторнинг умумлашган t-хос қиймати, ёки ўсмайдиган ўрин алмаштириши деб $\mu_t(x)=\inf\{\lambda>0:\tau(e_\lambda(|x|)^\perp)\le t\}$ функцияга айтилади.

Агар ихтиёрий $t>0$ учун $x\in X,\ y\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \mu_t(y)\le\mu_t(x)$ шартлардан (мос равишда, ихтиёрий $s>0$ учун $x\in X,\ y\in\mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \int_0^s\mu_t(y)dt\le\int_0^s\mu_t(x)dt$ шартлардан (бунда $y\prec\prec x$ каби ёзилади)) $y\in X$ ва $\|y\|_X\le\|x\|_X$ экани келиб чиқса, у ҳолда нолдан фарқли бўлган Банах нормаси $\|\cdot\|_X$ билан берилган $X\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ қисм фазо симметрик фазо (мос равишда, тўла симметрик фазо) дейилади,

$(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\|\cdot\|_\infty)$, $(\mathcal{K}(\mathcal{H}),\|\cdot\|_\infty)$ фазолари ва яхши маълум бўлган Шаттен қўш идеаллари $\mathcal{C}_p=\{x\in\mathcal{K}(\mathcal{H}):\|x\|_p=\tau(|x|^p)^{1/p}<\infty\},1\le p<\infty,$ тўла симметрик фазоларга мисоллар бўлади.

Таъкидлаб утамизки, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ даги ихтиёрий симметрик фазо $(X,\|\cdot\|_X)$ ва ҳар қандай $x\in X$, $a,b\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ лар учун қуйидагилар ўринли:

$$\|x\|_X=\||x|\|_X=\|x^*\|_X,\ axb\in X,\ \|axb\|_X\le\|a\|_\infty\|b\|_\infty\|x\|_X\ .$$

Изоҳ 1. Агар $\mathcal{H}$ сепарабел ва $X\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ симметрик фазо бўлса, у ҳолда $X=\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ёки $X\subset\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Агар $\mathcal{H}$ носепарабел бўлса, у ҳолда шундай хусусий қўш идеал $\mathcal{I}\subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ мавжудки, бунда $\mathcal{K}(\mathcal{H})\subsetneqq\mathcal{I}$ ва $(\mathcal{I},\|\cdot\|_\infty)$ Банах фазоси бўлади, лекин $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ да симметрик қисм фазо бўлмайди.

Агар $x\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ бўлса, у ҳолда $|x|=\sum_{n=1}^{m(x)}s_n(x)p_n$ бўлади (агар $m(x)=\infty$ бўлса, унда қатор текис яқинлашади), бу ерда $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ – x нинг сингуляр сонлари тўплами, яъни $|x|$ оператор учун камайиш тартибида жойлаштирилган хос қийматлар тўплами, p_n – $s_n(x)$ га мос бўлган хос қисм фазо. Демак, $x\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ учун ўсмайдиган ўрин алмаштириш $\mu_t(x)$ $\{s_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $s_n(x)\downarrow 0$, кетма-кетлик ёрдамида аниқланади (агар $m(x)<\infty$бўлса, у ҳолда барча $n>m(x)$ лар учун $s_n(x)=0$ деб ҳисоблаймиз).

$(X,\|\cdot\|_X)\subset\mathcal{K}(\mathcal{H})$ симметрик фазо бўлсин. $\mathcal{H}$ да ортонормал базис $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ ни фиксирлаймиз ва саноқли қисм тўплам $\{\varphi_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$ ни қараймиз. Айтайлик p_n – $\mathbb{C}\cdot\varphi_{j_n}\subset\mathcal{H}$ қисм фазога бир ўлчовли проектор бўлсин. Кўриниб турибдики, $E(X)=\left\{\xi=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in c_0 : x_\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n p_n\in X\right\}$ тўплам (бунда қатор текис яқинлашади) $\|\xi\|_{E(X)}=\|x_\xi\|_X$ нормага нисбатан кетма-кетликлар симметрик фазоси бўлади, яъни ихтиёрий симметрик фазо $(X,\|\cdot\|_X)\subset\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ягона кетма-кетликлар симметрик фазоси $(E(X),\|\cdot\|_{E(X)})\subset c_0$ ни ҳосил қилади. Тескариси ҳам ўринли: ҳар қандай кетма-кетликлар симметрик фазоси $(E,\|\cdot\|_E)\subset c_0$ ягона симметрик фазо $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})\subset\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ни қуйидаги қоида бўйича ҳосил қилади:

$$\mathcal{C}_E=\{x\in\mathcal{K}(\mathcal{H}):\{s_n(x)\}\in E\},\ \|x\|_{\mathcal{C}_E}=\|\{s_n(x)\}\|_E\,.$$

Бунда, $E(\mathcal{C}_E)=E,\|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)}=\|\cdot\|_E,\ \mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}=\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}}=\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$.

$(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ жуфтликни компакт операторлар Банах идеали деб атаймиз. Маълумки, ихтиёрий $1\le p<\infty$ учун $(\mathcal{C}_p,\|\cdot\|_p)=(\mathcal{C}_{l_p},\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l_p}})$ ва $(\mathcal{K}(\mathcal{H}),\|\cdot\|_\infty)=(\mathcal{C}_{c_0},\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

$\mathcal{K}(\mathcal{H})$ Банах идеалида Харди-Литтлвуд-Пойя тартиби қуйидагича аниқланади:

$$x\prec\prec y,\ x,y\in\mathcal{K}(\mathcal{H})\Leftrightarrow\{s_n(x)\}\prec\prec\{s_n(y)\}.$$

Банах идеали $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ тўла симметрик дейилади, агар $y\in\mathcal{C}_E$, $x\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $x\prec\prec y$ шартлардан $x\in\mathcal{C}_E$ ва $\|x\|_{\mathcal{C}_E}\le\|y\|_{\mathcal{C}_E}$ келиб чиқса. Кўриниб турибдики, $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ тўла симметрик идеал булиши учун $(E,\|\cdot\|_E)$ кетма-кетликлар фазоси тўла симметрик бўлиши зарур ва етарлидир.

Диссертациянинг **«Функционал симметрик фазоларнинг боғлиқлиги»** номли бобида $E((0,\infty),\nu)$ ва $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ симметрик фазолар орасидаги боғланишлар ўрганилган. Ундан ташқари, берилган $(X,\|\cdot\|_X)$ кетма-кетликлар симметрик фазоси ёрдамида $(0,\infty)$ да $(E(X),\|\cdot\|_{E(X)})$ симметрик фазони қуриш конструкцияси берилган. $\|\cdot\|_X$ норма тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлганда, $\|\cdot\|_{E(X)}$ норма хам тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлиши кўрсатилган.

Қуйида $f\in\mathcal{L}_0(\Omega)$ функция учун унинг ташувчиси $supp(f)=\{f\neq 0\}$ орқали белгиланади. Қуйидаги теорема $E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ симметрик фазони $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ фазога мультипликатив жойлашишини кўрсатади.

Теорема 2. Айтайлик $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ – тўла узлуксиз σ-чекли ўлчовли фазо ва $E((0,\infty),\nu)$ – $((0,\infty),\nu)$ да аниқланган симметрик фазо бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $0\le f\in\mathcal{R}_\mu$, $supp(f)=\mathbf{1}$, функция учун $\mathcal{A}$ да шундай қисм σ-алгебра $\mathcal{B}$ ва $\mathcal{L}_0((0,\infty),\nu)$ алгебрадан $\mathcal{L}_0(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ алгебрага изоморфизм Φ мавжудки, бу ҳолда $\mu_{|\mathcal{B}}$ ўлчов σ-чекли, ихтиёрий $g\in\mathcal{L}_0(0,\infty)$ учун $\Phi(g)$ ва g тенг ўлчовли, $\Phi(E((0,\infty),\nu))=E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ ва $\Phi:(E((0,\infty),\nu),\|\cdot\|_{E(0,\infty)})\to(E(\Omega,\mathcal{B},\mu),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ мультипликатив сюръектив изометрия булади, бунда $\Phi(\mu_t(f))=f$.

Юқорида қайд этилганидек, $E(0,\infty)$ симметрик фазодан ҳосил қилинган $(E(\mathbb{N}),\|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ симметрик фазо $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\mu)$ да аниқланган симметрик кетма-кетликлар фазоси бўлади. Ундан ташқари, агар E симметрик фазонинг нормаси тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлса, у ҳолда $(E(\mathbb{N}),\|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ симметрик фазонинг нормаси ҳам тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлади. Қуйида келтирилган теорема ва тасдиқ тескари ипликациялар ҳам ўринли бўлишини кўрсатади.

Теорема 3. Ҳар бир кетма-кетликлар симметрик фазоси $(X,\|\cdot\|_X)\subseteq c_0$ учун $(0,\infty)$ да шундай симметрик фазо $E(X)$ мавжудки, бунда $X=E(X)(\mathbb{N})$ ва $\|\cdot\|_X=\|\cdot\|_{E(X)(\mathbb{N})}$ бўлади.

Тасдиқ 4. Агар кетма-кетликлар симметрик фазоси $(X,\|\cdot\|_X)\subseteq c_0$ Фату хоссасига (мос равишда, тартибли узлуксизлик хоссасига) эга бўлса, у ҳолда $(0,\infty)$ даги $E(X)$ симметрик фазо ҳам (теорема 3 га қаранг) Фату хоссасига (мос равишда, тартибли узлуксизлик хоссасига) эга бўлади.

Диссертациянинг учинчи **«Кетма-кетликлар симметрик фазоларида эргодик теоремалар»**, деб номланган бобида кетма-кетликлар Банах фазолари учун эргодик теоремаларнинг турли кўринишлари исботланган.

$\mathcal{C}(X)$ орқали $(X,\|\cdot\|_X)$ да таъсир қилувчи барча чизиқли сиқувчи акслантиришлар тупламини, $\mathfrak{N}$ орқали бўлса барча қатъий ўсувчи натурал сонлар кетма-кетликлари тўпламини белгилайлик. Агар ихтиёрий $T\in\mathcal{F}$, $x\in X$ лар учун ёки кетма-кетлик $\{T^n(x)\}_{n=0}^\infty$ кучсиз яқинлашмаса, ёки ушбу кетма-кетликнинг $x_0\in X$ элементга кучсиз яқинлашишидан ихтиёрий $\{k_j\}_{j=0}^\infty\in\mathfrak{N}$ лар учун $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n T^{k_j}(x)-x_0\|_X\to 0$ яқинлашиши келиб чиқса, у ҳолда X Банах фазоси $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X)$ қисм тўпламга нисбатан Блум-Хансон хоссасига эга дейилади. Айтиб ўтиш жоизки, ихтиёрий $\{k_j\}_{j=0}^\infty\in\mathfrak{N}$ лар учун бирор $x_0\in X$ учун $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^n T^{k_j}(x)-x_0\|_X\to 0$ яқинлашишдан доим $\{T^n(x)\}_{n=0}^\infty$ кетма-кетликнинг x_0 га кучсиз яқинлашиши келиб чиқади.

Ихтиёрий улчовли фазолар учун $\mathcal{L}_p, 1\le p<\infty$, фазоларининг $\mathcal{C}(\mathcal{L}_p)$ га нисбатан Блум-Хансон хоссасига эга бўлиши хозиргача ҳеч кимга аён эмас. Фақатгина қуйидаги (В. Мюллер ва Ю. Тамилов) натижа маълум: l_p, $1\le p<\infty$, фазода таъсир қилувчи чизиқли сиқувчи акслантириш ва ихтиёрий элемент $x\in l_p$ учун $\{T^n(x)\}$ кетма-кетлик $x_0\in l_p$ элементга кучсиз яқинлашиши учун ихтиёрий $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}\in\mathfrak{N}$ учун $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}T^{k_j}(x)-x_0\|_p\to 0$ яқинлашиш ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Қуйидаги теорема ихтиёрий сепарабел p-қаварик ($p>1$) БИФ $E\subset s(\mathbb{K})$ учун Блума-Хансон хоссаси мавжудлигини кўрсатади.

Теорема 5. $(E,\|\cdot\|_E)$ – $s(\mathbb{K})$ да p-қавариқлик ўзгармаси $M^{(p)}(E)=1$, $p>1$, бўлган чексиз ўлчамли p-қавариқ сепарабел Банах идеал фазоси бўлсин. У ҳолда ихтиёрий чизиқли сиқувчи акслантириш $T:E\to E$ учун $\{T^n(x)\}$ кетма-кетликнинг $(E,\|\cdot\|_E)$ да $x_0\in E$ элементга кучсиз яқинлашишидан ихтиёрий $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}\in\mathfrak{N}$ учун $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}T^{k_j}(x)-x_0\|_E\to 0$ яқинлашиш келиб чиқади.

Данфорд-Шварц оператори $T:l_\infty\to l_\infty$ (бу холда $T\in DS$ каби ёзилади), ни қарайлик, яъни $T:l_\infty\to l_\infty$ чизиқли сиқувчи акслантириш ва ихтиёрий $\xi\in l_1$ учун $\|T(\xi)\|_1\le\|\xi\|_1$ тенгсизлик ўринли. Маълумки, кетма-кетликлар тўла симметрик фазоси $(E,\|\cdot\|_E)$ (l_1,l_∞) Банах жуфтлигида аниқ интерполяцион фазо бўлади. Шунинг учун, ихтиёрий $T\in DS$ учун $T(E)\subset E$ ва $\|T\|_{E\to E}\le 1$ бўлади.

Индивидуал эргодик теореманинг қуйидаги версияси кетма-кетликлар тўла симметрик фазоси учун исботланди.

Теорема 6. Агар $E\subseteq c_0$ кетма-етликлар тўла симметрик фазоси бўлса, ихтиёрий $T\in DS$ ва $x\in E$ учун шундай $x\in E$ элемент мавжудки, бунда $n\to\infty$ бўлганда $\|A_n(T)(x)-x\|_\infty\to 0$ яқинлашиш ўринли бўлади.

Таъкидлаб ўтиш жоизки, $x\in(l_\infty\setminus c_0)$ учун 6-теорема, умуман олганда, ўринли эмас.

Теорема 7. Агар $x\in(l_\infty\setminus c_0)$ бўлса, у ҳолда шундай оператор $T\in DS$ мавжудки, бунда $A_n(T)(x)$ ўрта қийматлар кетма-кетлиги координата буйича яқинлашмайди, демак, текис яқинлашмайди.

Айтайлик $(E,\|\cdot\|_E)$ кетма-кетликлар тўла симметрик фазоси бўлсин. E ни статистик эргодик теоремани қаноатлантиради деймиз (бунда $E\in(MET)$ каби ёзамиз), агар ихтиёрий $T\in DS$ ва $x\in E$ лар учун шундай элемент $x\in E$ топилиб, $\|A_n(T)(x)-x\|_E\to 0$ яқинлашиш ўринли бўлса.

Қуйидаги теорема кетма-кетликлар тўла симметрик фазоларида статистик эргодик теореманинг бажарилиши учун зарур ва етарли шартларни белгилайди.

Теорема 8. Айтайлик $(E,\|\cdot\|_E)\subset l_\infty$ кетма-кетликлар тўла симметрик фазоси бўлсин. Қуйидаги шартлар эквивалент:

(i). Ихтиёрий $T\in DS$ учун $A_n(T)$ ўрта қийматлар $(E,\|\cdot\|_E)$ да кучли яқинлашади;

(ii). $(E,\|\cdot\|_E)$ сепарабел ва $E\neq l_1$ тўплам сифатида.

Диссертациянинг **«Компакт операторларнинг Банах идеалларида эргодик теоремалар»,** деб номланган тўртинчи бобида компакт операторларнинг тўла симметрик идеалларида Данфорд-Шварц операторининг таъсири учун эргодик теоремалар вариантлари исботланган. Шунингдек, Данфорд-Шварц операторларининг $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз d-ўлчовли ярим группалари қаралган ва бундай ярим группалар таъсири учун индивидуал ва статистик эргодик теоремалар вариантлари исботланган.

Чизиқли оператор $T:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ Данфорд-Шварц оператори дейилади (бунда $T\in DS$ каби ёзамиз), агар ихтиёрий $x\in\mathcal{C}_1$ учун $\|T(x)\|_1\leq\|x\|_1$ тенгсизлик ва ихтиёрий $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ учун $\|T(x)\|_\infty\leq\|x\|_\infty$ тенгсизлик ўринли бўлса.

Маълумки, ихтиёрий тўла симметрик идеал $\mathcal{C}_E$ $(\mathcal{C}_1,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ Банах жуфтлигида аниқ интерполяцион фазо бўлади, хусусан, ихтиёрий $T\in DS$ учун $T(\mathcal{C}_E)\subset\mathcal{C}_E$ ва $\|T\|_{\mathcal{C}_E\to\mathcal{C}_E}\leq 1$ бўлади. Демак, $T(\mathcal{K}(\mathcal{H}))\subset\mathcal{K}(\mathcal{H})$ ва T операторнинг $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ га торайиши хам чизиқли сиқувчи акслантириш бўлади (бу операторни хам T орқали белгилаймиз).

Қуйидаги теорема компакт операторлар тўла симметрик идеалида таъсир қилувчи Данфорд-Шварц оператори учун индивидуал эргодик теорема варианти бўлади.

Теорема 9. $(E,\|\cdot\|_E)$ – кетма-кетликлар тўла симметрик фазоси ва $E\subset c_0$ бўлсин. У ҳолда қуйидаги тасдиқлар ўринли:

(i). Ихтиёрий Данфорд-Шварц оператори $T:\mathcal{C}_E\to\mathcal{C}_E$ ва $x\in\mathcal{C}_E$ учун шундай $x\in\mathcal{C}_E$ элемент мавжудки, бунда $n\to\infty$ бўлганда $\|A_n(T)(x)-x\|_\infty\to 0$ яқинлашиш ўринли бўлади;

(ii). Агар $0\leq x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})\setminus\mathcal{K}(\mathcal{H})$ бўлса, у ҳолда шудай Данфорд-Шварц оператори $T:\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ мавжудки, бунда $A_n(T)(x)$ кетма-кетлик текис яқинлашмайди.

Қуйидаги теорема компакт операторлар тўла симметрик идеалида таъсир қилувчи Данфорд-Шварц оператори учун статистик эргодик теорема ўринли бўлиши мезонини беради.

Теорема 10. Айтайлик $(E,\|\cdot\|_E)\subset l_\infty$ кетма-кетликлар тўла симметрик фазоси бўлсин. Қуйидаги шартлар эквивалент:

(*i*). Ихтиёрий Данфорд-Шварц оператори $T:\mathcal{C}_E\to\mathcal{C}_E$ учун $A_n(T)$ ўрта қийматлар $\mathcal{C}_E$ да кучли яқинлашади;

(*ii*). $(E,\|\cdot\|_E)$ сепарабел ва $E\neq l_1$ тўплам сифатида.

$d\in\mathbb{N}$ ни фиксирлаймиз ва $\mathbb{R}_+^d=\{\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_d):0\le u_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,d\}$ белгилаш киритамиз. $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}$ – шундай мусбат Данфорд-Шварц операторлар ярим группаси бўлсин, бунда ихтиёрий $x\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ учун $T_\mathbf{0}(x)=x$. $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}$ ярим группа $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз дейилади, агар $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}}\|T_\mathbf{u}(x)-T_\mathbf{v}(x)\|_{\mathcal{C}_1}=0$ тенглик ихтиёрий $x\in\mathcal{C}_1$ учун бажарилса ($\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_d)$, $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_d)$ лар учун $\mathbf{u}\to\mathbf{v}$ яқинлашиш ҳар бир $i=1,\ldots,d$ учун $u_i\to v_i$ яқинлашишни англатади).

Агар $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}\subset DS^+$ – $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз ярим группа бўлса, у ҳолда машхур Петтис теоремасига асосан, ихтиёрий $x\in\mathcal{C}_1$ ва $t>0$ лар учун $A_t(x)=\dfrac{1}{t^d}\int_{[0,t]^d}T_\mathbf{u}(x)d\mathbf{u}\in\mathcal{C}_1$ Бохнер интеграли мавжудлиги кўрсатилади. Бунда, ихтиёрий $x\in\mathcal{C}_1$ учун $\|A_t(x)\|_1\le\|x\|_1$ ва $\|A_t(x)\|_\infty\le\|x\|_\infty$ бўлади. Демак, шундай оператор $\tilde{A}_t\in DS^+$ мавжудки, бунда барча $x\in\mathcal{C}_1$ учун $\tilde{A}_t(x)=A_t(x)$. Қуйида $\tilde{A}_t$ оператор A_t каби белгиланади.

Қуйидаги теорема тўла симметрик Банах идеалларида $\mathbb{R}_+^d$ группа таъсири учун индивидуал эргодик теорема вариантини келтиради.

Теорема 11. $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ тўла симметрик Банах идеали ва $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}\subset DS^+$ – $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз ярим группа бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $x\in\mathcal{C}_E$ элементи учун шундай $x\in\mathcal{C}_E$ элемент мавжудки, бунда $A_t(x)$ ўрта қийматлари $t\to\infty$ бўлганда x га $\|\cdot\|_\infty$ норма бўйича яқинлашади.

Қуйидаги теорема тўла симметрик Банах идеалларида $\mathbb{R}_+^d$ группа таъсири учун статистик эргодик теорема вариантини келтиради.

Теорема 12. Айтайлик $(E,\|\cdot\|_E)$ сепарабел кетма-кетликлар симметрик фазоси, ҳамда $E\neq l_1$ тўплам сифатида бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}\subset DS^+$ $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз ярим группа учун A_t ўрта қийматлари $\mathcal{C}_E$ да кучли яқинлашади.

ХУЛОСА

Диссертация кетма-кетликлар симметрик фазоларида ва компакт операторлар идеалларида Данфорд-Шварц операторлари таъсирларининг эргодик хоссаларини ўрганишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. $E((0,\infty),\nu)$ ва $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ симметрик фазолар орасидаги муносабатлар таснифланган;

2. Берилган $(X,\|\cdot\|_X)$ кетма-кетликлар симметрик фазоси ёрдамида $(0,\infty)$ да $(E(X),\|\cdot\|_{E(X)})$ симметрик функциялар фазосини қуришнинг янги конструкцияси келтирилган;

3. $\|\cdot\|_X$ норма тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлганда, $\|\cdot\|_{E(X)}$ норма хам тартибли узлуксизлик хоссасига (мос равишда, Фату хоссасига) эга бўлиши кўрсатилган;

4. Ихтиёрий сепарабел p-қаварик ($p>1$) кетма-кетликлар Банах идеал фазоси учун Блум-Хансон хоссаси исботланган;

5. Кетма-кетликлар тўла симметрик фазоларида ихтиёрий Данфорд-Шварц операторлари таъсири учун индивидуал ва статистик эргодик теоремаларнинг бажарилиши учун зарурий ва етарли шартлари кўрсатилган;

6. Компакт операторлар тўла симметрик идеалларида Данфорд-Шварц операторлари таъсири учун индивидуал ва статистик эргодик теоремаларнинг вариантлари олинган;

7. Компакт операторлар тўла симметрик идеалларида таъсир қилувчи Данфорд-Шварц операторларининг $\mathcal{C}_1$ да кучли узлуксиз d-ўлчовли ярим группалари учун индивидуал ва статистик эргодик теоремалар вариантлари исботланган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

АЗИЗОВ АЗИЗХОН НОДИРХОН УГЛИ

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА АТОМИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2021 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2019.2.PhD/FM326.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана им. Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Чилин Владимир Иванович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Абдуллаев Рустамбай Зайирович** доктор физико-математических наук, профессор
	Заитов Адилбек Атаханович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Институт математики АН РУз

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2021 года в ____ на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4.Тел.: (+998 71) 227 12 24, факс: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4.Тел.: (+998 71) 246 02 24).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2021 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2021 года).

А.Садуллаев
Председатель научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., академик

Н.К.Мамадалиев
Ученый секретарь научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р.Н.Ганиходжаев
Председатель научного семинара
при научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные исследования с практическими приложениями, проводимые в мире, во многих случаях сводятся к задачам изучения эргодических свойств различных классов линейных преобразований. Исследование этих свойств составляет содержание эргодической теории. Эргодическая теория в современной математике играет важную роль. С одной стороны, она непосредственно связана с идеями и задачами физики, в первую очередь, статистической механики. С другой стороны, в ней используется абстрактный математический аппарат, опирающийся на общую теорию меры и интеграла Лебега, теорию банаховых пространств и спектральный анализ операторов. Развитие некоммутативного функционального анализа способствовало развитию некоммутативной эргодической теории. Поэтому доказательство эргодических теорем в некоммутативных симметричных пространствах играет важную роль в современной математике.

В настоящее время во всем мире решение задач эргодической теории для коммутативных и некоммутативных симметричных пространств является одной из актуальных задач современного функционального анализа, при этом, особое внимание уделяется индивидуальным, статистическим и доминантным эргодическим теоремам для действия операторов Данфорда-Шварца в симметричных пространствах. В этом случае, проводимые исследования показывают важность тщательного изучения эргодических теорем в различных классах симметричных пространств. Кроме того, уделяется особое внимание получению необходимых и достаточных условий для выполнения индивидуальной и статистической эргодических теорем.

В нашей стране, особенно в последние годы, повышенное внимание уделяется современным направлениям в фундаментальных науках, в том числе квантовой механике и физике. Среди этих направлений одним из основных, несомненно, является эргодическая теория. В частности, в последнее время уделено особое внимание изучению эргодических теорем в различных классах симметричных пространств. При глубоком исследовании симметричных пространств, были получены значительные результаты по эргодическим теоремам для симметричных пространств последовательностей и для банаховых симметричных идеалов. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и функциональный анализ»[2]. В связи с этим, развитие эргодической теории для симметричных пространств имеет особую роль при выполнении данного постановления.

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Изучение эргодических теорем является одним из основных направлений исследований в эргодической теории. Впервые индивидуальная эргодическая теорема была доказана в 1931 году Г. Биркгоффом для гомеоморфизмов на многообразиях. Для других классов пространств и операторов индивидуальная эргодическая теорема была доказана в работах Н. Данфорда, Дж. Шварца, К. Миллера, П. Халмоша, А. Хинчина, Ф. Рисса, А. Винера и А. Витнера. Для n-параметрических групп и полугрупп сохраняющих меру преобразований варианты индивидуальной эргодической теоремы были получены в работе А. Винера. Изучение некоммутативных эргодических теорем началось с работы К. Ленса. Некоммутативную индивидуальную эргодическую теорему Ф. Йедон доказал для действия положительных абсолютных $L_1 - L_\infty$ сжатий в пространствах L_1, М. Юнг и К. Шу доказали аналогичную теорему для положительных операторов Данфорда-Шварца, действующих в некоммутативных пространствах $L_p, 1 < p < \infty$, В. Чилин и С. Литвинов установили этот факт для положительных операторов Данфорда-Шварца в некоммутативных пространствах Лоренца и Орлича.

Статистическую эргодическую теорему изначально в 1932 году доказал Дж. фон Нейман для изометрий пространства L_2, порожденных сохраняющими меру преобразованиями. Позже в работах Ф. Рисса, К. Йосида и С. Какутани статистическая эргодическая теорема была установлена для различных классов банаховых пространств и операторов. Для произвольных векторных решеток статистическая эргодическая теорема была изучена в работах Г. Биркгоффа, С. Какутани и Ф. Рисса. В работах Н. Данфорда статистическая эргодическая теорема была доказана в пространствах L_p, $1 < p < \infty$, для действия $L_1 - L_\infty$ сжатий. Кроме того, для действия групп и полугрупп варианты статистической эргодической теоремы были получены в работах Л. Алаоглу, Г. Биркгоффа, Н. Данфорда и А.

Винера. В работах Р. Джейте, Ф. Комбеса, Н. Данг-Нока, Ж. Диксмье, К. Ленса некоммутативные варианты статистической эргодическая теоремы были доказаны для различных классов некоммутативных пространств. Ф. Йедон установил некоммутативный вариант статистической эргодической теоремы для действия операторов Данфорда-Шварца в пространствах L_p, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана, снабженной с точным полуконечным нормальным следом.

Естественно, тщательный разбор полученных результатов, приводит к задаче установления вариантов эргодических теорем для случая произвольных некоммутативных симметричных пространств. В частности, изучение справедливости вариантов эргодических теорем для класса симметричных идеалов компактных операторов, являющихся важными примерами некоммутативных симметричных пространств, представляет особый интерес. Данная диссертационная работа посвящается доказательству справедливости вариантов эргодических теорем для класса симметричных идеалов компактных операторов. В диссертации устанавливаются критерии справедливости некоммутативных индивидуальной и статистической эргодических теорем для операторов Данфорда-Шварца, действующих в банаховых симметричных идеалах компактных операторов. Кроме того, отдельно исследуются индивидуальная и статистическая эргодические теоремы для симметричных пространств последовательностей.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждением высшего образования, где выполнялось диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования ЁОТ-ФТЕХ-2018-154 «Спектры Гамильтонианов на решетках Z^d и на деревах Кэли Γ^k и меры Гиббса» Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Целью исследования является установление вариантов известных эргодических теорем для симметричных пространств последовательностей и для банаховых идеалов компактных операторов.

Задачи исследования:

исследование вложений симметричных функциональных пространств;

восстановление симметричных пространств измеримых функций на $(0,\infty)$ с помощью симметричных пространств последовательностей;

исследование вариантов эргодических теорем в симметричных пространствах последовательностей;

исследование вариантов эргодических теорем в банаховых идеалах компактных операторов.

Объектом исследования являются индивидуальная и статистическая эргодические теоремы во вполне симметричных пространствах последовательностей и в банаховых идеалах компактных операторов.

Предметом исследования являются симметричные пространства последовательностей, симметричные пространства функций, их связи, банаховы идеалы компактных операторов, операторы Данфорда-Шварца, действия групп d-мерных потоков в банаховых идеалах компактных операторов.

Методика исследования. В работе используются методы функционального анализа, общей топологии, алгебры, теории банаховых решеток, булевых алгебр, спектральной теории операторов и теории операторных алгебр. Также используются методы теории множеств и теории упорядоченных пространств.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказано свойство Блума-Хансона для произвольного сепарабельного $p-$выпуклого банахова идеала последовательностей;

установлены необходимые и достаточные условия для справедливости индивидуальной и статистической эргодических теорем при действии любых операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных пространствах последовательностей;

получены варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем для действия операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов;

доказаны варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем для сильно непрерывных на $\mathcal{C}_1$ d-мерных полугрупп операторов Данфорда-Шварца, действующих в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

результаты были использованы для доказательства индивидуальной и статистической эргодических теорем для симметричных пространств последовательностей и банаховых идеалов Лоренца и Орлича;

известные симметричные пространства функций на $(0,\infty)$ получены с помощью новой конструкции построения симметричного пространства функций через симметричные пространства последовательностей.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов функционального анализа и общей топологии, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования обоснована получением усиленных вариантов эргодических теорем для симметричных пространств последовательностей и для симметричных идеалов компактных операторов, а также, для действия d-мерных сильно непрерывных на $\mathcal{C}_1$ полугрупп операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

Практическая значимость диссертации состоит в использовании полученных новых вариантов эргодических теорем при изучении эргодических свойств преобразований некоммутативных пространств Лоренца, Орлича и Марцинкевича.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Существование сохраняющего меру преобразования из σ-подалгебры $\mathcal{B}$ σ-алгебры $\mathcal{A}$ в σ-алгебру $\mathcal{A}_\nu$ использовано в фундаментальном проекте ОТ-4-27 «Описание предуальных пространств йордановых троек, пространства емкостей и голоморфное продолжение функции» для построения новой метрики в пространстве слабо аддитивных, сохраняющих порядок функционалов на метрическом компакте (Каракалпакский государственный университет, справка от 21 июня 2021 года). Применение научных результатов дало возможность доказать, что построенная метрика является аналогом измененной метрики Канторовича–Рубинштейна;

Доказанные индивидуальные и статистические эргодические теоремы для некоммутативных симметричных пространств использованы в фундаментальном проекте ОТ-Ф4-31 «Некоммутативные модули, алгебры Лейбница и полиномиальные каскады на симплексе» для доказательства существования единственного продолжения положительного абсолютного линейного сжатия, действующего в некоммутативном пространстве L_1, до положительного оператора Данфорда-Шварца (Национальный университет Узбекистана, справка от 19 июня 2021 года). Применение научных результатов позволило получить необходимые и достаточные условия для выполнения статистической эргодической теоремы в симметричных пространствах, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана, снабженной с точным полуконечным нормальным следом.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 7 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на степень доктора философии, в том числе 3 работы опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, разбитых на пятнадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 93 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Предварительные сведения»**, приведены необходимые для изложения результатов диссертации свойства симметричных пространств функций, банаховых идеальных пространств последовательностей, симметричных пространств последовательностей и банаховых идеалов компактных операторов. Приводятся известные взаимосвязи между симметричными пространствами последовательностей и банаховыми идеалами компактных операторов.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ измеримое пространство с полной σ-конечной мерой. Через $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\Omega)$ обозначим алгебру всех классов равных почти всюду конечных действительных измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, а через $\mathcal{L}_0(\mu)$ подалгебру в $\mathcal{L}_0$ всех таких $f \in \mathcal{L}_0$, для которых $\mu(\{|f| > \lambda\}) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Как обычно, через $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_0(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, обозначается классическое банахово функциональное L_p – пространство, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_p$.

Если $f \in \mathcal{L}_0(\mu)$, то невозрастающая перестановка функции f определяется равенством $\mu_t(f) = \inf\{\lambda > 0 : \mu\{|f| > \lambda\} \le t\}$, $t \ge 0$. Ненулевое линейное подпространство $E \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) + \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным, если из условий $f \in E$, $g \in \mathcal{L}_0(\mu)$, $\mu_t(g) \le \mu_t(f)$ $\forall\, t > 0$, следует, что $g \in E$ и $\|g\|_E \le \|f\|_E$.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_E$ в симметричном пространстве E имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, свойство Фату) если из условий $0 \le f_n \in E$, $f_n \downarrow 0$ вытекает $\|f_n\|_E \downarrow 0$ (соответсвенно, если из условий $0 \le f_n \le f_{n+1}$, $f_n \in E, n = 1, 2, \ldots, \sup\limits_{n \ge 1} \|f_n\|_E < \infty$, вытекает, что существует такая функция $f \in E$, что $f_n \uparrow f$ и $\sup\limits_{n \ge 1} \|f_n\|_E = \|f\|_E$).

Пусть $\mathcal{A}_\nu$ есть σ-алгебра всех измеримых по Лебегу множеств из $(0, \infty)$ и ν мера Лебега на $\mathcal{A}_\nu$. Для любого симметричного пространства $E = E((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ положим $E(\Omega) = E(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \mu_t(f) \in E\}$; $\|f\|_{E(\Omega)} = \|\mu_t(f)\|_E$; $f \in E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Известно, что $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ есть симметричное пространство измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, в этом случае, говорят, что симметричное пространство $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ порождено симметричным пространством E. Если норма на $E((0, \infty), \mathcal{A}_\nu, \nu)$ имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, имеет свойство Фату), то норма на $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ также имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, имеет свойство Фату).

Пусть $s(\mathbb{K})$ линейное пространство всех последовательностей комплексных ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$) или действительных ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$) чисел, E бесконечномерное идеальное линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$ (свойство идеальности для E означает, что из условий $x\in E$, $y\in s(\mathbb{K})$ и $|y|\le|x|$ следует включение $y\in E$). Пусть $\|\cdot\|_E$ – банахова монотонная норма на E. Последнее означает, что из условий $x,y\in E$ и $|x|\le|y|$ следует, что $\|x\|_E\le\|y\|_E$. В этом случае пару $(E,\|\cdot\|_E)$ называют банаховым идеальным пространством (БИП) в $s(\mathbb{K})$. Банахова решетка $(E,\|\cdot\|_E)$ называется p-выпуклой ($1\le p<\infty$), если существует такая константа $M>0$, что для любого конечного набора элементов $\{x_i\}_{i=1}^n\subset E$ верно следующее неравенство

$$\|(\sum_{i=1}^n|x_i|^p)^{\frac{1}{p}}\|_E\le M(\sum_{i=1}^n\|x_i\|_E^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости пространства E и обозначается через $M^{(p)}(E)$.

Важным подклассом класса банаховых идеальных пространств служит класс симметричных пространств последовательностей. Пусть $l_\infty=l_\infty(\mathbb{R})$ (соответственно, $c_0=c_0(\mathbb{R})$) банахова решетка всех ограниченных (соответственно, сходящихся к нулю) последовательностей $x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ чисел из $\mathbb{R}$ относительно нормы $\|x\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|\xi_n|$.

Если $x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\in l_\infty$, то невозрастающая перестановка $x^*=\{\xi_n^*\}_{n=1}^\infty$, имеет вид $\xi_n^*=\inf\limits_{card(F)<n}\sup\limits_{n\notin F}|\xi_n|$, где F конечное подмножество в $\mathbb{N}$. Ненулевое линейное подпространство $E\subset l_\infty$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется симметричным пространством последовательностей, если из условий $y\in E$, $x\in l_\infty, x^*\le y^*$, следует, что $x\in E$ и $\|x\|_E\le\|y\|_E$. Для любого симметричного пространства последовательностей E верно $E\subseteq c_0$ или $E=l_\infty$.

Порядок Харди-Литтлвуд-Пойя $x\prec\prec y$ в пространстве l_∞ определяется так:

$$(x=\{\xi_n\}_{n=1}^\infty\prec\prec y=\{\eta_n\}_{n=1}^\infty)\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^n\xi_k^*\le\sum_{k=1}^n\eta_k^*\text{ для всех }n\in\mathbb{N}\right).$$

Симметричное пространство последовательностей $(E,\|\cdot\|_E)$ называется вполне симметричным пространством последовательностей, если условия $x\prec\prec y, x\in l_\infty, y\in E,$ влекут $x\in E$ и $\|x\|_E\le\|y\|_E$.

Пусть $(\mathcal{H},(\cdot,\cdot))$ бесконечномерное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, и пусть $(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\|\cdot\|_\infty)$ есть $C^\star$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, где $\|x\|_\infty=\sup\limits_{\xi\in\mathcal{H}:\|\xi\|_{\mathcal{H}}\le1}\|x(\xi)\|_{\mathcal{H}}$. Через $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (соответственно, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) обозначим двусторонний идеал компактных (соответственно, конечномерных) линейных операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Обозначим $\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$, и пусть $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \to [0, \infty]$ канонический след на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е. $\tau(x) = \sum_{j \in J}(x\varphi_j, \varphi_j),\ x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$ где $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}$.

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : e = e^2 = e^*\}$ решетка всех проекторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Если $\mathbf{1}$ есть единица $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, то будем писать $e^{\perp} = \mathbf{1} - e$.

Пусть $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и пусть $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda \geq 0}$ является спектральным семейством проекторов для модуля $|x| = (x^* x)^{1/2}$ оператора x, т.е. $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. Если $t > 0,$ то обощенным t-м собственным значением оператора x, или невозрастающей перестановкой оператора x, называется функция $\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \tau(e_\lambda(|x|)^{\perp}) \leq t\}.$

Ненулевое линейное подпространство $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_X$ называется симметричным пространством (соответственно, вполне симметричным пространством), если из условий $x \in X, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \mu_t(y) \leq \mu_t(x)$ для всех $t > 0$ (соответственно, $x \in X, y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \int_0^s \mu_t(y)dt \leq \int_0^s \mu_t(x)dt$ для всех $s > 0$, (запись $y \prec\prec x$)) следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

Пространства $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$, и хорошо известные двусторонние банаховы идеалы Шаттена $\mathcal{C}_p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, 1 \leq p < \infty,$ являются примерами вполне симметричных пространств.

Отметим, что для любого симметричного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и для всех $x \in X$, $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, верно

$$\|x\|_X = \||x|\|_X = \|x^*\|_X,\ axb \in X, \|axb\|_X \leq \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X .$$

Замечание 1. Если $\mathcal{H}$ сепарабельно и $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ симметричное пространство, то либо $X = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, либо $X \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Если $\mathcal{H}$ несепарабельно, то существует такой собственный двусторонний идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, что $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subsetneqq \mathcal{I}$ и $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_\infty)$ есть банахово пространство, которое не является симметричным подпространством в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Если $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, то $|x| = \sum_{n=1}^{m(x)} s_n(x) p_n$ (если $m(x) = \infty$, то ряд сходится равномерно), где $\{s_n(x)\}_{n=1}^{m(x)}$ множество сингулярных чисел для x, т.е. множество собственных значений для компактного оператора $|x|$ в убывающем порядке, и p_n является проектором на собственное подпространство, отвечающее $s_n(x)$. Следовательно, невозрастающая перестановка $\mu_t(x)$ для $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ определяется с помощью последовательности $\{s_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n(x) \downarrow 0$ (если $m(x) < \infty$, то считается $s_n(x) = 0$ для всех $n > m(x)$).

Пусть $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ симметричное пространство. Зафиксируем ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ в $\mathcal{H}$ и выберем счетное подмножество $\{\varphi_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть p_n одномерный проектор на подпространство $\mathbb{C}\cdot\varphi_{j_n} \subset \mathcal{H}$. Ясно, что множество $E(X) = \left\{\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : x_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n p_n \in X\right\}$ (ряд сходится равномерно), есть симметричное пространство последовательностей с нормой $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$, т.е. каждое симметричное подпространство $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ однозначно порождает симметричное пространство последовательностей $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$. Обратное тоже верно: каждое симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ однозначно порождает симметричное пространство $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ по следующему правилу: $\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}$, $\|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E$. При этом, $E(\mathcal{C}_E) = E, \|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E$, $\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$.

Пару $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ будем называть банаховым идеалом компактных операторов. Известно, что $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l_p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l_p}})$ для всех $1 \le p < \infty$ и $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

Порядок Харди-Литтлвуд-Пойя в банаховом идеале $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ определяется следующим образом

$$x \prec\prec y,\ x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}.$$

Говорят, что банахов идеал $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ является вполне симметричным, если из условий $y \in \mathcal{C}_E$, $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $x \prec\prec y$ следует, что $x \in \mathcal{C}_E$ и $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \le \|y\|_{\mathcal{C}_E}$. Ясно, что $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ вполне симметричный идеал тогда и только тогда, когда $(E, \|\cdot\|_E)$ является вполне симметричным пространством последовательностей.

Во второй главе диссертации, названной **«Взаимосвязи симметричных функциональных пространств»**, исследуются взаимосвязи между симметричными пространствами $E((0,\infty),\nu)$ и $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Кроме того, приводится конструкция построения симметричного пространства $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)})$ измеримых функций на $(0,\infty)$ с помощью симметричного пространства последовательностей $(X, \|\cdot\|_X)$. Установлено свойство порядковой непрерывности нормы (соответственно, свойство Фату) для нормы $\|\cdot\|_{E(X)}$ в случае, когда норма $\|\cdot\|_X$ имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, имеет свойство Фату).

Ниже для функции $f \in \mathcal{L}_0(\Omega)$ ее носитель определяется равенством $supp(f) = \{f \ne 0\}$. Следующая теорема устанавливает мультипликативное изометрическое вложение симметричного пространства $E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ в симметричное пространство $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

Теорема 2. Пусть $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ — измеримое пространство с полной непрерывной σ-конечной мерой и $E((0,\infty),\nu)$ — симметричное пространство измеримых функций на $((0,\infty),\nu)$. Тогда для каждой функции $0\le f\in\mathcal{R}_\mu$ с $supp(f)=\mathbf{1}$ существуют σ-подалгебра $\mathcal{B}$ в $\mathcal{A}$ и изоморфизм Φ из алгебры $\mathcal{L}_0((0,\infty),\nu)$ на алгебру $\mathcal{L}_0(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ такие, что мера $\mu_{|\mathcal{B}}$ — σ-конечна, функции $\Phi(g)$ и g равноизмеримы для всех $g\in\mathcal{L}_0(0,\infty)$, $\Phi(E((0,\infty),\nu))=E(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ и $\Phi:(E((0,\infty),\nu),\|\cdot\|_{E(0,\infty)})\to(E(\Omega,\mathcal{B},\mu),\|\cdot\|_{E(\Omega)})$ есть мультипликативная сюръективная изометрия, для которой $\Phi(\mu_t(f))=f$.

Как было отмечено выше, для симметричного пространства функций $E(0,\infty)$ симметричное пространство $(E(\mathbb{N}),\|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ на $(\mathbb{N},2^{\mathbb{N}},\mu)$, порожденное симметричным пространством $E(0,\infty)$, является симметричным пространством последовательностей. Кроме того, если норма симметричного пространства E имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, свойство Фату), то норма $\|\cdot\|_{E(\mathbb{N})}$ симметричного пространства $(E(\mathbb{N}),\|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ также имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, свойство Фату). Следующие теорема и утверждение устанавливают обратные импликации.

Теорема 3. Для каждого симметричного пространства последовательностей $(X,\|\cdot\|_X)\subseteq c_0$ существует такое симметричное пространство $E(X)$ на $(0,\infty)$, что $X=E(X)(\mathbb{N})$ и $\|\cdot\|_X=\|\cdot\|_{E(X)(\mathbb{N})}$.

Утверждение 4. Если симметричное пространство последовательностей $(X,\|\cdot\|_X)\subseteq c_0$ имеет свойство Фату (соответственно, свойство порядковой непрерывности), то симметричное пространство $E(X)$ на $(0,\infty)$ (см. теорему 3) также имеет свойство Фату (соответственно, свойство порядковой непрерывности).

В третьей главе диссертации, названной **«Эргодические теоремы в симметричных пространствах последовательностей»**, доказываются различные варианты эргодических теорем для банаховых пространств последовательностей.

Обозначим через $\mathcal{C}(X)$ множество всех линейных сжатий в банаховом пространстве $(X,\|\cdot\|_X)$, а через $\mathfrak{N}$ множество всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел. Говорят, что банахово пространство X имеет свойство Блума-Хансона относительно подмножества $\mathcal{F}\subset\mathcal{C}(X)$, если для любых $T\in\mathcal{F}$, $x\in X$, либо последовательность $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится слабо, либо слабая сходимость этой последовательности к элементу

$x_0 \in X$ влечет сходимость $\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0 \|_X \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$. Следует отметить, что условие $\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0 \|_X \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$ и некоторого $x_0 \in X$ всегда влечет слабую сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ к x_0.

Наличие свойства Блума-Хансона в пространствах $\mathcal{L}_p, 1 \le p < \infty$, относительно $\mathcal{C}(\mathcal{L}_p)$, в случае произвольных пространств с мерой, до сих пор не установлено. Известно только (результат В. Мюллера и Ю. Тамилова), что для линейного сжатия T на l_p, $1 \le p < \infty$, для любого элемента $x \in l_p$ последовательность $\{T^n(x)\}$ слабо сходится к $x_0 \in l_p$ в том и только в том случае, когда $\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0 \|_p \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Следующая теорема устанавливает свойство Блума-Хансона для каждого сепарабельного p-выпуклого ($p > 1$) БИП $E \subset s(\mathbb{K})$.

Теорема 5. Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ бесконечномерное p-выпуклое сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$ с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, $p > 1$. Тогда для любого линейного сжатия $T: E \to E$ из слабой сходимости в $(E, \|\cdot\|_E)$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in E$ следует сходимость $\| \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0 \|_E \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Рассмотрим оператор Данфорда-Шварца $T: l_\infty \to l_\infty$ (запись $T \in DS$), т.е. линейное сжатие $T: l_\infty \to l_\infty$, для которого $\| T(\xi) \|_1 \le \| \xi \|_1$ для всех $\xi \in l_1$. Известно, что вполне симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ является точным интерполяционным пространством в банаховой паре (l_1, l_∞). Поэтому $T(E) \subset E$ и $\| T \|_{E \to E} \le 1$ для всех $T \in DS$.

Доказана следующая версия индивидуальной эргодической теоремы для вполне симметричного пространства последовательностей.

Теорема 6. Если $E \subseteq c_0$ вполне симметричное пространство последовательностей, $T \in DS$, $x \in E$, то существует такой элемент, $x \in E$, что $\| A_n(T)(x) - x \|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$.

Отметим, что для $x \in (l_\infty \setminus c_0)$ теорема 6, вообще говоря, неверна.

Теорема 7. Если $x \in (l_\infty \setminus c_0)$, то существует такой оператор $T \in DS$, что средние $A_n(T)(x)$ не сходятся покоординатно, и следовательно, не сходятся равномерно.

Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$ вполне симметричное пространство последовательностей. Будем говорить, что E удовлетворяет статистической эргодической теореме (запись $E \in (MET)$), если для каждого $T \in DS$ и $x \in E$ найдется такой элемент $x \in E$, что $\| A_n(T)(x) - x \|_E \to 0.$

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия для выполнения статистической эргодической теоремы в вполне симметричных пространствах последовательностей.

Теорема 8. Пусть $(E,\|\cdot\|_E) \subset l_\infty$ вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:

(i). Для любого $T \in DS$ средние $A_n(T)$ сходятся сильно в $(E,\|\cdot\|_E)$;

(ii). $(E,\|\cdot\|_E)$ сепарабельно и $E \neq l_1$ как множества.

В четвертой главе диссертации **«Эргодические теоремы для банаховых идеалов компактных операторов»** доказываются варианты эргодических теорем для действия оператора Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов. Рассматриваются также сильно непрерывные на $\mathcal{C}_1$ d-мерные полугруппы операторов Данфорда-Шварца и доказываются варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем для действия таких полугрупп.

Линейный оператор $T: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется оператором Данфорда-Шварца (запись $T \in DS$), если $\| T(x) \|_1 \le \| x \|_1$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$ и $\| T(x) \|_\infty \le \| x \|_\infty$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Известно, что всякий вполне симметричный идеал $\mathcal{C}_E$ является точным интерполяционным пространством в банаховой паре $(\mathcal{C}_1, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, в частности, $T(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{C}_E$ и $\| T \|_{\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E} \le 1$ для всех $T \in DS$. Следовательно, $T(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$, и сужение оператора T на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ является линейным сжатием (также обозначается через T).

Следующая теорема является вариантом индивидуальной эргодической теоремы для действия операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

Теорема 9. Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$ – вполне симметричное пространство, $E \subset c_0$. Тогда верны следующие утверждения

(i). Для любых оператора Данфорда-Шварца $T: \mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E$ и $x \in \mathcal{C}_E$, существует такой $x \in \mathcal{C}_E$, что $\| A_n(T)(x) - x \|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$;

(ii). Если $0 \le x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{K}(\mathcal{H})$, то существует оператор Данфорда-Шварца $T: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что средние $A_n(T)(x)$ не сходятся равномерно.

Следующая теорема устанавливает критерий для справедливости статистической эргодической теоремы при действии операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

Теорема 10. Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$ вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:

(i). Для любого оператора Данфорда-Шварца $T:\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E$ средние $A_n(T)$ сходятся сильно в $\mathcal{C}_E$;

(ii). $(E,\|\cdot\|_E)$ сепарабельно и $E \neq l_1$ как множества.

Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$ и обозначим $\mathbb{R}_+^d = \{\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_d): 0 \le u_i \in \mathbb{R}, i = 1,\ldots,d\}$. Пусть $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}$ полугруппа положительных операторов Данфрда-Шварца такая, что $T_\mathbf{0}(x) = x$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Полугруппа $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d}$ называется сильно непрерывной на $\mathcal{C}_1$, если $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} \| T_\mathbf{u}(x) - T_\mathbf{v}(x)\|_{\mathcal{C}_1} = 0$ для каждого $x \in \mathcal{C}_1$ (сходимость $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ для $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}_+^d$, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_d)$, $\mathbf{v} = (v_1,\ldots,v_d)$ означает, что $u_i \to v_i$ для каждого $i = 1,\ldots,d$).

Если $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} \subset DS^+$ сильно непрерывная полугруппа в $\mathcal{C}_1$, то используя известную теорему Петтиса, для любых $x \in \mathcal{C}_1$ и $t > 0$ устанавливается существование интеграла Бохнера $A_t(x) = \frac{1}{t^d}\int_{[0,t]^d} T_\mathbf{u}(x)d\mathbf{u} \in \mathcal{C}_1$. При этом, что $\|A_t(x)\|_1 \le \|x\|_1$ и $\|A_t(x)\|_\infty \le \|x\|_\infty$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$. Следовательно, существует оператор $\tilde{A}_t \in DS^+$ такой, что $\tilde{A}_t(x) = A_t(x)$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$. Ниже оператор $\tilde{A}_t$ обозначается как A_t.

Следующая теорема устанавливает вариант индивидуальной эргодической теоремы для действия группы $\mathbb{R}_+^d$ в вполне симметричных банаховых идеалах.

Теорема 11. Пусть $(\mathcal{C}_E,\|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ вполне симметричный банахов идеал и пусть $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} \subset DS^+$ сильно непрерывная полугруппа на $\mathcal{C}_1$. Тогда для любого $x \in \mathcal{C}_E$ существует такой элемент $x \in \mathcal{C}_E$, что средние $A_t(x)$ сходятся к x относительно равномерной нормы $\|\cdot\|_\infty$ при $t \to \infty$.

Следующая теорема есть статистическая эргодическая теорема для действия группы $\mathbb{R}_+^d$ в вполне симметричных банаховых идеалах.

Теорема 12. Пусть $(E,\|\cdot\|_E)$ сепарабельное симметричное пространство последовательностей и $E \neq l_1$ как множества. Тогда для любой сильно непрерывной полугруппы $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} \subset DS^+$ на $\mathcal{C}_1$ средние A_t сходятся сильно в $\mathcal{C}_E$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению эргодических свойств операторов Данфорда-Шварца при их действии в симметричных пространствах последовательностей и в идеалах компактных операторов.

Основные результаты исследований состоят в следующем:

1. Описаны взаимосвязи между симметричными пространствами $E((0,\infty),\nu)$ и $E(\Omega,\mathcal{A},\mu)$;

2. Указана новая конструкция построения симметричного пространства $(E(X),\|\cdot\|_{E(X)})$ измеримых функций на $(0,\infty)$ с помощью симметричного пространства последовательностей $(X,\|\cdot\|_X)$;

3. Установлено свойство порядковой непрерывности нормы (соответственно, свойство Фату) для нормы $\|\cdot\|_{E(X)}$, в случае, когда норма $\|\cdot\|_X$ имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, имеет свойство Фату);

4. Доказано свойство Блума-Хансона для каждого сепарабельного p-выпуклого ($p>1$) банахового идеального пространство последовательностей;

5. Установлены необходимые и достаточные условия для справедливости индивидуальной и статистической эргодических теорем при действии любых операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных пространствах последовательностей;

6. Получены варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем для действия операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов;

7. Доказаны варианты индивидуальной и статистической эргодических теорем для сильно непрерывных на $\mathcal{C}_1$ d-мерных полугрупп операторов Данфорда-Шварца, действующих в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

AZIZOV AZIZKHON NODIRKHON UGLI

ERGODIC THEOREMS IN NONCOMMUTATIVE SYMMETRIC SPACES ON ATOMIC VON NEUMANN ALGEBRAS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent - 2021

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2019.2.PhD/FM326.

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Chilin Vladimir Ivanovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Abdullaev Rustambay Zayirovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
	Zaitov Adilbek Atakhanovich Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	Institute of Mathematics of the AS RUz

Defense will take place on “____” _________________ 2021 at ____ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No.____). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on “____” _______________ 2021.
(Mailing report No.___ _ on “____” _______________ 2021).

A.Sadullaev
Chairman of scientific council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Academician

N.K.Mamadaliev
Scientific secretary of scientific council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

R.N.Ganikhodjaev
Chairman of scientific seminar under
scientific council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to establish variants of well-known ergodic theorems for symmetric sequence spaces and for Banach ideals of compact operators.

The object of the researchwork is is fully symmetric sequence spaces, Banach ideals of compact operators, individual, mean (statistical) ergodic theorems in fully symmetric sequence spaces and in Banach ideals of compact operators.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

The Bloom-Hanson property for an arbitrary separable p-convex Banach ideal of sequences is proved;

The necessary and sufficient conditions for the validity of individual and (mean) statistical ergodic theorems under the action of any Dunford-Schwartz operators in fully symmetric sequence spaces are established;

The variants of individual and mean ergodic theorems for the action of Dunford-Schwarz operators in fully symmetric ideals of compact operators are proved;

The variants of individual and mean ergodic theorems for strongly continuous d-dimensional semigroups of Dunford-Schwarz operators acting in fully symmetric ideals of compact operators are established.

Implementation of the research results. The results obtained during the dissertation research are practiced in the following areas:

The existence of a measure-preserving transformation from σ-subalgebra $\mathcal{B}$ of σ-algebra $\mathcal{A}$ to σ-algebra $\mathcal{A}_\nu$ is used in the fundamental project OT-4-27 "Description of the predual spaces of Jordan triples, the space of capacities and the holomorphic continuation of a function" to construct a new metric in the space of weakly additive, order-preserving functionals on a metric compact (Certificate dated June 21, 2021, Karakalpak State University). Application of scientific results made it possible to prove that the constructed metric is an analog of the modified Kantorovich–Rubinstein metric;

The proved individual and mean ergodic theorems for noncommutative symmetric spaces are used in the fundamental project OT-Ф4-31 "Noncommutative modules, Leibniz algebras, and polynomial cascades on a simplex" to prove the existence of a unique extension of positive absolute linear contraction acting in a noncommutative L_1 space to the positive Dunford-Schwartz operator (Certificate dated June 19, 2021, National University of Uzbekistan). The application of the scientific results allowed us to obtain the necessary and sufficient conditions for the validity of the mean ergodic theorem in symmetric spaces associated with the semifinite von Neumann algebra, equipped with a normal semifinite faithful trace.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertationis 93 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; part I)

1. Азизов А.Н., Чилин В.И. Эргодическая Теорема Блума-Хансона в банаховых решетках последовательностей // Владикавказский математический журнал. – 2017. – Т.19. – Вып. 3. – С. 3-10. (3. Scopus IF=0.46).
2. Азизов А.Н., Чилин В.И. Вложения симметричных функциональных пространств // Вестник НУУз. – 2017. – № 2/1. – С. 54-60. (01.00.00, № 8).
3. Азизов А.Н., Чилин В.И. Мультипликативные вложения симметричных пространств // Вестник НУУз. – 2017. – № 2/2. – С. 67-73. (01.00.00, № 8).
4. Chilin V., Azizov A. Ergodic theorems in symmetric sequence spaces // Colloquium Mathematicum. – 2019. – Vol. 156. – №1. – P. 57-68. DOI: 10.4064/cm7384-2-2018. (3. Scopus IF=0.62).
5. Azizov A., Chilin V. Symmetric function spaces from symmetric sequence spaces // Uzbek Mathematical Journal. – 2019. – № 4. – P. 37-46. DOI: 10.29229/uzmj.2019-4-4. (01.00.00, № 6).
6. Azizov A. Ergodic theorems for d-dimensional flows in ideals of compact operators // Bulletin of NUUz. – 2021. – Vol. 4. – Issue 1. P. 44-53. (01.00.00, № 8).
7. Azizov A., Chilin V. Ergodic theorems in Banach ideals of compact operators // Sib. Elect. Math. Rep. – 2021. – Vol. 18. – Issue 1. P. 534-547. DOI: 10.33048/semi.2021.18.039. (3. Scopus IF=0.59).

II бўлим (II часть; part II)

8. Azizov A.N. Individual ergodic theorem in symmetric sequence spaces // Abstracts of the republican scientific conference with participation of foreign scientists "Modern problems of dynamical systems and their applications". — Tashkent, May 1-3, 2017. — P. 184-185.
9. Азизов А.Н., Чилин В.И. Теорема Блума-Хансона в p-выпуклых банаховых решетках последовательностей // Тезисы докладов Республиканской конференции с участием зарубежных ученых "Проблемы современной топологии и ее приложения". — Ташкент, 11-12 мая 2017 года. — С. 145.
10. Azizov A.N. Almost uniform convergence in the individual ergodic theorem // Abstracts of the Uzbek-Israel International Scientific conference "Contemporary problems in mathematics and physics". — Tashkent, October 6-10, 2017. — P. 39-41.

11. Azizov A. Chilin V. Individual ergodic theorem in Banach ideals of compact operators // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2018. — Симферополь, 17-29 сентября 2018 года. — С. 40-43.
12. Azizov A.N., Chilin V.I. The validity of the individual ergodic theorem in Banach ideals of compact operators // Abstracts of the republican conference "Problems of modern topology and its applications". — Tashkent, September 11-12, 2019. — P. 26-28.
13. Azizov A.N. Mean ergodic theorem in noncommutative atomic symmetric spaces // Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference "Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine". — Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17, 2019. — P. 28-29.
14. Azizov A.N., Chilin V.I. Individual ergodic theorem in non commutative atomic symmetric spaces // Тезисы докладов XV Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". — Владикавказ, 2019. — С. 56-57.
15. Azizov A., Chilin V. Dominated ergodic theorem for atomic measure space // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. — Симферополь, 2019. — С. 35-38.
16. Azizov A.N. Symmetric spaces of measurable functions, associated with symmetric sequence spaces // Abstracts of the international conference "Modern problems of geometry and topology and its applications". — Tashkent, November 21-23, 2019. — P. 26-27.
17. Azizov A.N., Chilin V.I. Ergodic theorems in noncommutative atomic symmetric spaces // Proceedings of International conference "P. Chebyshev mathematical ideas and their applications to natural sciences". — Kaluga, Russia, 2021. — P. 290-291. (participated online)
18. Azizov A.N., Chilin V.I. Ergodic theorems for flows in Banach ideals of compact operators // Proceedings of scientific conference "Actual problems of stochastic analysis". — Tashkent, February 20-21, 2021. — Path 1. — P. 363-367.

Автореферат «Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида
таҳрирдан ўтказилди (26.08.2021 йил).

Босишга рухсат этилди: 26.08.2021 йил.
Бичими 60x841/16.«Times New Roman»
гарнитурада рақамли босма усулида босилди.
Шартли босма табоғи 2,75. Адади: 70. Буюртма: №114.

Мирзо Улуғбек номидаги
Ўзбекистон Миллий университети босмахонасида чоп этилди.