ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЯХШИМУРАТОВ АЛИШЕР БЕКЧАНОВИЧ

ДАВРИЙ КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРЛАР УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2015

УДК: 517.957

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of the abstract of doctoral dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ЯХШИМУРАТОВ АЛИШЕР БЕКЧАНОВИЧ

ДАВРИЙ КОЭФФИЦИЕНТЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ОПЕРАТОРЛАР УЧУН ТЕСКАРИ МАСАЛАЛАР ВА УЛАРНИНГ ТАТБИҚЛАРИ

01.01.02 – Дифференциал тенгламалар ва математик физика
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2015

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида 30.09.2014/В2014.3-4.FM91 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Урганч давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Хасанов Аҡназар Бекдурдиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
Расмий оппонентлар:	**Тахиров Жозил Останович** физика-математика фанлари доктори
	Касимов Шакирбай Гаппарович физика-математика фанлари доктори
	Дурдиев Дурдимурод Қаландарович физика-математика фанлари доктори
Етакчи ташкилот:	**Бошқирд давлат университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети хузуридаги 16.07.2013.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «___»_______________2015 йил соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nu.uz.)

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (____рақами билан рўйхатга олинган). (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (99871) 246-02-24.)

Диссертация автореферати 2015 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2015 йил «____» _______________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

Б.А.Шоимқулов
Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д.

А.Х.Худойбердиев
Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

М.С.Салоҳиддинов
Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д., академик

Кириш (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Спектрал анализнинг тескари масалалари табиатнинг турли соҳаларида, масалан, квант механикасида энергия сатҳлари маълум бўлганида атомларнинг ички кучларини аниқлашда, радио-техникада бир жинсли бўлмаган узатиш линияларининг параметрларини синтезлашда, эластиклик назариясида хос тебранишлар частоталари бўйича балканинг кўндаланг кесимини аниқлашда, геофизикада импеданс характеристикалари бўйича Ер ички қатламлари электрик хоссаларини аниқлашда вужудга келади.

Саёз сувдаги узун гравитация тўлқинларини тавсифлайдиган Кортевег-де Фриз тенгламасини аниқ ечиш учун сочилиш назариясининг тескари масаласи усули яратилганидан сўнг, дифференциал операторлар спектрал назариясининг муҳимлиги кескин ортди. Оқибатда, физиканинг турли соҳаларида кўп сонли амалий татбиққа эга бўлган, бу усулда ечиладиган, бошқа ночизиқли эволюцион тенгламалар топилди. Масалан, бу тенгламалар плазмадаги ион-товуш тўлқинларини, нозик плазмали цилиндрда Ленгмюр тўлқинларини, гидродинамикадаги турли тўлқинларни таҳлил қилишда ҳосил бўлади. Ночизиқли оптикада вужудга келадиган Шредингернинг ночизиқли тенгламасини ечиш учун тескари масала усулининг қўлланилиши оптик солитонлар назариясининг яратилишига олиб келди ва солитонли моделларга доир янги мисолларни топишга йўл очди. Бундан ташқари, бу усул тўла интегралланувчи тенгламаларга яқин тенгламалар системалари ёрдамида тавсифланадиган ҳодисалар таҳлилига янги ёндашувларни ривожлантиришга имкон берди.

Ҳақиқий физик системалар классик тенгламаларнинг модификацияларидан бири бўлган мосланган манбали тенгламалар билан тавсифланади. Бундан ташқари, физик системаларга таъсир қилувчи кучлар фақат чекли вақт оралиғида чекли бўлади, шунинг учун ҳақиқий моделлар фазовий ўзгарувчи бўйича даврий ва деярли даврий функциялар синфларидаги тенгламаларни ўрганишга олиб келинади. Спектрал анализнинг тескари масалалар усулини ночизиқли оптика, плазма физикаси, гидродинамика ва бошқа соҳаларнинг турли масалаларига татбиқлари устувор йўналишлардан бири бўлиб келмоқда.

Ҳозирда солитонлар ночизиқли тўлқинлар динамикасининг кўпгина муаммоларида асосий объектлардан бири бўлиб қолди. Охирги йилларда оптик солитонлар телекоммуникация технологияларида қўлланила бошланди. Солитонлар назариясидаги тадқиқотларнинг муҳим қисмини резонанссиз муҳитларда ночизиқли тўлқинлар тарқалишига оид тадқиқотлар ҳосил қилади. Бу назариянинг Орол бўйи минтақаларига оид экологиянинг турли муаммоларини ечишга имкон берувчи гидродинамик масалалар билан боғлиқлиги диссертация мавзуси билан боғлиқ тадқиқотларнинг зарурати ифодалайди.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг Ф4 «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий тадқиқотлар шарҳи. Чекли оралиқдаги ва ярим ўқдаги дифференциал ва чекли айирмали операторлар учун турли хил кўринишдаги тескари спектрал масалалар ечими ягоналиги ва мавжудлигининг исботлари, уларни топиш усулларининг ишлаб чиқилиши ҳамда турли хил функциялар синфларида бутун ва ярим ўқдаги ночизиқли эволюцион тенгламаларни ечишда тескари масалалар усулининг татбиқлари йўналишларида етакчи мамлакатларнинг илмий марказлари ва университетларида, жумладан Оксфорд университети (Англия), Штутгарт университети (Германия), Швеция Қироллик университети (Швеция), Назарий физика халқаро маркази (Италия), Вена университети, Эрвин Шредингер институти (Австрия), Р.Курант номидаги математика фанлари институти, «Кларксон коллеж» олий техника ўқув даргоҳи, Бруклин политехника институти, Огайо штати университети, Принстон университети қошидаги плазма физикаси лабораторияси (АҚШ), София университети (Болгария), Ядровий тадқиқотлар институти, Москва давлат университети, Санкт-Петербург давлат университети, Саратов давлат университети, Пулково обсерваторияси, Назарий геофизика институти, Бошқирд давлат университети (Россия), Паст ҳароратлар физика-техника институти, Украина Фанлар академияси Математика институтида (Украина) кенг қамровли илмий тадқиқотлар олиб борилмоқда.

Спектрал анализнинг тескари масалалари ва Кортевег-де Фриз тенгламасини аниқ ечиш усуллари юзасидан олиб борилган илмий тадқиқотлар натижасида жаҳон миқёсида бир қанча долзарб масалалар ечилган бўлиб, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: ярим ўқдаги ва бутун ўқдаги квант сочилиш назариясининг тескари масалалари ечилган (Оксфорд университети, «Кларксон коллеж» олий техника ўқув даргоҳи, Бруклин политехника институти, Паст ҳароратлар физика-техника институти, Санкт-Петербург давлат университети); Штурм-Лиувилл оператори учун турли хил кўринишдаги тескари спектрал масалалар ечими ягоналиги исботланган (Пулково обсерваторияси, Швеция Қироллик университети, Назарий геофизика институти, Паст ҳароратлар физика-техника институти); Кортевег-де Фриз тенгламаси «тез камаювчи» функциялар синфида ечилган (Принстон университети қошидаги плазма физикаси лабораторияси, Р.Курант номидаги математика фанлари институти); Кортевег-де Фриз тенгламаси деярли даврий функциялар синфида ечилган (Москва давлат университети, Санкт-Петербург давлат университети); Шредингернинг ночизиқли модифицирланган тенгламасининг деярли даврий ечимлари топилган (Украина фанлар Академияси Математика институти); бутун ўқдаги квант сочилиш назариясининг тескари масаласи силжитилган чекли зонали потенциаллар синфида ечилган (Вена университети, Эрвин Шредингер институти); чекли оралиқда Вейл-Титчмарш функцияси бўйича комплекс қийматли ва матрицавий коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари масалалар ечилган (Саратов давлат университети); юқори тартибдаги дифференциал операторлар учун регулярлаштирилган изларни ҳисоблаш усуллари ишлаб чиқилган, сингуляр коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари масалалар ечилган (Москва давлат университети); ажралмаган чегаравий шартли ва чегаравий шартида спектрал параметр бўлган дифференциал операторлар учун тескари масалалар ечилган (Бошқирд давлат университети); Штурм-Лиувилл оператори даврий потенциалининг силлиқлик синфи билан лакуналар узунликларининг нолга интилиш тартиби орасида боғлиқлик ўрнатилган (Огайо штати университети, София университети, Штутгарт университети).

Бугунги кунда даврий матрицавий коэффициентли дифференциал ва чекли айирмали операторлар учун ҳамда графда қараладиган дифференциал ва чекли айирмали операторлар учун тескари спектрал масалалар назариясини ишлаб чиқиш; фазовий ўзгарувчиси графга тегишли бўлган математик физиканинг ночизиқли эволюцион тенгламаларини ечиш учун тескари масалалар усулини ишлаб чиқиш; тескари спектрал масалаларни сонли ечишнинг турғун алгоритмларини топиш каби устувор илмий-тадқиқот ишлари амалга оширилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Даврий, чекли зонали бўлиши шарт бўлмаган, потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала И.В.Станкевич, В.А.Марченко, И.В.Островский, Х.П.Мак-Кин ва Е.Трубовицларнинг ишларида ўрганилган. С.П.Новиков, Б.А.Дубровин, А.Р.Итс, В.Б.Матвеев, П.Лакс ва бошқаларнинг ишларида, даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун қўйилган тескари масала ёрдамида, манбасиз Кортевег-де Фриз тенгламаси, чекли зонали функциялар синфида тўлиқ интегралланувчанлиги исботланган.

Дирак тенгламалар системаси учун тескари масалалар М.Г.Гасимов, Б.М.Левитан, В.Е.Захаров, А.Б.Шабат ишларида ўрганилган. В.Е.Захаров, А.Б.Шабат, С.В.Манаков ишларида Дирак оператори учун қўйилган тескари масала усули ёрдамида тез камаювчи функциялар синфида Шредингер ночизиқли тенгламасининг тўла интегралланувчанлиги ўрнатилган. Бунга ўхшаш натижалар даврий ёки чекли зонали функциялар синфида А.Р.Итс, В.П.Котляров, А.О.Смирнов ва бошқаларнинг ишларида олинган.

Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари масала, камаювчи коэффициентлар синфида, ярим ўқда ва бутун ўқда, сочилиш берилганлари бўйича, M.Jaulent, I.Miodek, C.Jean ишларида ечилган; Вейл-Титчмарш функцияси бўйича В.А.Юрко ишида; чекли кесмада, спектр ва нормаллаштирувчи сонлар бўйича М.Г.Гасимов ва Г.Ш.Гусейнов томонидан ўрганилган; бутун ўқда даврий потенциал билан Г.Ш.Гусейнов ишларида тадқиқ қилинган; ярим ўқда даврий чекли зонали потенциал билан Б.А.Бабажанов ва А.Б.Хасановларнинг ишларида ўрганилган.

Тез камаювчи функциялар синфида Кауп системаси Д.Ж.Кауп томонидан, чекли зонали функциялар синфида эса В.Б.Матвеев, М.И.Явор, А.О.Смирнов ва бошқаларнинг ишларида ечилган.

Ярим ўқдаги чекли зонали потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала Н.И.Ахиезер, Х.Хохштадт, В.Гольдберг, Б.М.Левитан ва А.В.Савинларнинг ишларида ўрганилган. Ярим ўқдаги тескари масала бутун ўқдаги тескари масаладан бирмунча фарқ қилади. Ярим ўқ ҳолида, потенциалдан ташқари спектрал берилганлар орқали чегаравий шартни ҳам тиклаш талаб қилинади.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Тадқиқот Урганч давлат университетининг ОТ-Ф1-002 «Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тўғри ва тескари спектрал масалалар» (2007-2011 йй.) илмий-тадқиқот режасига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади даврий коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари спектрал масалаларни ечиш ва уларни ночизиқли эволюцион тенгламаларни ечишга татбиқ қилиш, Дирак оператори ҳолида Борг тескари теоремасининг аналогини исботлаш, ярим ўқда даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари спектрал масалани ечишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

даврий функциялар синфида мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлигини исботлаш;

Дирак системаси учун қўйилган даврий ва антидаврий масалалар хос вектор-функциялари компоненталарининг квадратлари учун айниятлар олиш;

даврий функциялар синфида Шредингернинг мосланган манбали ночизиқли тенгламаси тўла интегралланувчанлигини исботлаш;

Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси потенциалининг аналитиклиги билан лакуналар узунликларининг экспоненциал равишда нолга интилишини боғловчи теоремаларни исботлаш;

Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси ҳолида Борг тескари теоремасининг аналогини исботлаш;

даврий функциялар синфида Каупнинг мосланган манбали системаси тўла интегралланувчанлигини исботлаш.

Тадқиқотнинг объекти Штурм-Лиувилл оператори, Дирак оператори ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастасидан идорат.

Тадқиқотнинг предмети Штурм-Лиувилл, Дирак операторлари ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари спектрал масалалар ҳамда уларнинг ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашга татбиқларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Диссертацияда математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усуллари қўлланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

даврий функциялар синфида мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган;

Дирак оператори ҳолида Борг тескари теоремасининг аналоги исботланган;

Дирак системаси учун қўйилган даврий ва антидаврий масалалар хос вектор-функциялари компоненталарининг квадратлари учун айниятлар олинган;

даврий функциялар синфида Шредингернинг мосланган манбали ночизиқли тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган;

Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси потенциалининг аналитиклиги билан лакуналар узунликларининг экспоненциал равишда нолга интилишини боғловчи теоремалар исботланган;

Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси ҳолида Борг тескари теоремасининг аналоги исботланган;

даврий функциялар синфида Каупнинг мосланган манбали системаси тўла интегралланувчанлиги исботланган;

ярим ўқда даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари спектрал масала ечилган.

Тадқиқотнинг амалий натижаси ночизиқли тенгламалар ечимларининг фазовий ўзгарувчи бўйича аналитиклиги ҳақида олинган хулосалари сонли ҳисоблашларда қўлланилиши мумкинлигидан иборат.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги даврий коэффициентли дифференциал операторлар учун тескари спектрал масалаларни ечиш ва уларни ночизиқли эволюцион тенгламаларни ечишга татбиқ қилишда математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларини қўллаш ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ишда олинган илмий натижалардан чизиқли операторлар спектрал назариясида, гидродинамикада ва квант физикасида фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Диссертация тадқиқотининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалардан математик физикада ночизиқли эволюцион тенгламаларни интеграллашга татбиқ қилиш билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси ҳолидаги потенциалнинг аналитиклиги ва лакуналар узунликларининг экспоненциал равишда камайишини боғловчи теоремалар, Борг тескари теоремасининг аналоги, мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламасини интеграллашга оид натижалар, ҳамда спектрал параметрларни дифференциаллаш усули project MTM2010-15314(Institute of Mathematics at the University of Santiago de Compostela, Spain, 2015 йил 25 майдаги маълумотномаси) хорижий грантида иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун Грин функциясининг ишораси ҳақидаги теоремаларни исбот қилишда, мосланган интеграл манбали Тода занжири тенгламасини ечишда қўлланилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий мазмуни қуйидаги халқаро ва республика миқёсида ўтказилган илмий анжуманларда мухокама қилинган: «Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳамда анализ ва информатиканинг ёндош муаммолари» (Тошкент, 2004 йил), «Математик физиканинг ва информацион технологияларининг замонавий муаммолари» (Тошкент, 2005 йил), «Татбиқий математиканинг ва информацион технологияларининг замонавий муаммолари – Ал-Хоразмий 2009» (Тошкент, 2009 йил), «Математик анализнинг долзарб муаммолари» (Урганч, 2012 йил), «Дифференциал тенгламаларнинг замонавий муаммолари ва уларнинг татбиқлари» (Тошкент, 2013 йил), «Математик физиканинг ноклассик тенгламалари ва уларнинг татбиқлари» (Тошкент, 2014 йил). Мазкур иш Ўзбекистон Миллий университети қошидаги Математика институтининг «Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назариясининг замонавий муаммолари» ва «Операторлар алгебралари ва уларнинг татбиқлари» Республика семинарларида, Ўзбекистон Миллий университетининг «Ҳисоблаш математикаси ва математик физиканинг замонавий муаммолари» ва «Функционал анализ ва унинг татбиқлари» семинарларида, Москва давлат университети математик анализ кафедрасининг «Дифференциал операторлар спектрал назарияси» ва функционал анализ кафедрасининг «Математик физикада операторли моделлар» семинарларида, Бошқирд давлат университетининг «Операторлар спектрал назарияси ва унинг татбиқлари» семинарида муҳокама қилинган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 31 та илмий иш, жумладан, миллий журналларда 7 та, халқаро журналларда 9 та мақола, илмий анжуманларда 15 та тезис нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, тўртта боб, хулосалар ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Ишнинг умумий ҳажми 179 бетдан, адабиётлар рўйхати 227 та номдан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, мавзу бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар берилган.

Диссертациянинг **«Бутун ўқдаги даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала»** деб номланган биринчи бобида даврий потенциалли Штурм-Лиувилл тескари масаласини қўллаб, даврий функциялар синфида мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Биринчи бобнинг биринчи ва иккинчи параграфларида, диссертация мазмунини очиб беришда ишлатиладиган, бутун ўқдаги даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун қўйилган тескари спектрал масалага оид бўлган маълумотлар келтирилган.

Қуйидаги Штурм-Лиувилл операторини кўриб чиқамиз

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y,\ \ x \in R^1, \tag{1}$$

бунда $q(x) \in C^1(R^1)$ – ҳақиқий π даврли функция.

$c(x,\lambda)$ ва $s(x,\lambda)$ орқали (1) тенгламанинг $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ ва $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз. $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)$ функцияга Ляпунов функцияси ёки Хилл дискриминанти дейилади. Қуйидаги

$$\psi_{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)}\, s(x,\lambda)$$

ечимни (1) тенгламанинг Флоке ечими деб аташ қаъбул қилинган.

(1) операторнинг спектри қуйидаги тўпламдан иборат

$$E = \{\lambda \in R^1 :\, -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\,\} = R^1 \setminus \left\{(-\infty, \lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})\right\}.$$

Ушбу $(-\infty,\lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n=1,2,...$ интервалларга лакуналар дейилади.

ξ_n, $n=1,2,...$ орқали (1) тенглама учун қўйилган Дирихле масаласининг хос қийматларини белгилаймиз. $\xi_n \in [\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,2,...$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Таъриф 1. ξ_n, $n=1,2,...$ сонлар билан $\sigma_n = sign\{s'(\pi,\xi_n) - c(\pi,\xi_n)\}$, $n=1,2,...$ ишораларга (1) масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф 2. Спектрнинг λ_n, $n=0,1,2,\ ...$ чегаралари ва ξ_n,σ_n, $n=1,2,\ ...$ спектрал параметрларга (1) масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

(1) масаланинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади, спектрал берилганлар бўйича $q(x)$ потенциални тиклаш масаласига эса тескари масала дейилади.

Биринчи бобнинг учинчи параграфида даврий потенциалли Штурм-Лиувилл тескари масаласини қўллаб, мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламаси даврий функциялар синфида интегралланган.

Қуйидаги мосланган манбали КдФ тенгламасини

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x +$$
$$+ 2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\big(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\big)_x d\lambda\,,\ \ t>0,\quad x\in R^1, \quad (2)$$

ушбу

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x) \quad (3)$$

бошланғич шарт билан бирга кўриб чиқамиз. Шундай ҳақиқий $q = q(x,t)$ функцияни топиш талаб қилинадики, у x ўзгарувчи бўйича π даврли бўлиб, ушбу

$$q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge 0) \quad (4)$$

силлиқлик шартларини қаноатлантирсин. Бу ерда $\beta(\lambda,t)\in C\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$ - берилган ҳақиқий функция бўлиб, $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-1}),\ \lambda\to\infty$ текис асимптотикага эга, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ функциялар

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y\,,\quad x\in R^1 \quad (5)$$

Штурм-Лиувилл тенгламасининг ($\psi_\pm(0,\lambda,t)=1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари, $s(x,\lambda,t)$ функция (5) тенгламанинг $s(0,\lambda,t)=0$, $s'(0,\lambda,t)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими. λ_k, ($k\ge 0$) орқали биз (5) тенглама учун қўйилган даврий ёки антидаврий масалаларнинг хос қийматларини белгилаймиз.

Биринчи боб учинчи параграфининг асосий натижаси қуйидаги теоремада ифодаланган.

Теорема 1. Агар ($q(x,t)$, $\psi_+(x,\lambda,t)$, $\psi_-(x,\lambda,t)$) учлик (2)-(5) масаланинг ечими бўлса, у ҳолда $q(x+\tau,t)$ потенциалли Штурм-Лиувилл операторининг спектри τ ва t параметрларга боғлиқ эмас, $\xi_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\times$$
$$\times\left\{2q(\tau,t)+4\xi_n+\int_0^\infty\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\},\ n\ge 1. \quad (6)$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau,t)$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Биринчи излар формуласини

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)), \tag{7}$$

ва

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t)-\lambda}{k^2}$$

ёйилмани ишлатиб, (6) системани ёпиқ кўринишда ёзиш мумкин.

Натижа 1. (6) система ва биринчи излар формуласи (2)-(5) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун аввало Штурм-Лиувилл тенгламасининг $q(x+\tau,0)=q_0(x+\tau)$ потенциалга мос келувчи λ_n, $n\geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\geq 1$ спектрал берилганларни топамиз. Сўнгра, (6) Дубровин тенгламалар системаси учун $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n\geq 1$ Коши масаласини ечиб, (7) излар формуласи бўйича $q(\tau,t)$ ни топамиз. Шундан сўнг, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ Флоке ечимларини топиш қийин эмас.

Натижа 2. Агар $q_0(x)$ бошланғич функция ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $q(x,t)$ функция ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 3. Агар π/n сони $q_0(x)$ бошланғич функциянинг даври бўлса, у ҳолда π/n сони $q(x,t)$ функциянинг ҳам x бўйича даври бўлади. Бу ерда $n\geq 2$ натурал сон.

Биринчи бобнинг тўртинчи параграфида озод ҳади фазовий ўзгарувчига боғлиқ бўлмаган Кортевег-де Фриз тенгламаси даврий функциялар синфида интегралланган.

Диссертациянинг **«Бутун ўқдаги даврий потенциалли Дирак оператори учун тескари масала»** деб номланган иккинчи бобида Дирак оператори ҳолида Борг тескари теоремасининг аналоглари исботланган, Дирак тенгламалар системаси учун қўйилган даврий ва антидаврий масалалар хос вектор-функциялари компоненталарининг квадратлари учун айниятлар олинган ҳамда даврий потенциалли Дирак оператори учун қўйилган тескари масалани қўллаб, даврий функциялар синфида Шредингернинг мосланган манбали ночизиқли тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Иккинчи бобнинг биринчи параграфида бутун ўқда даврий потенциалли Дирак оператори учун қўйилган тескари масалага оид зарурий маълумотлар келтирилган.

Бутун ўқда қуйидаги Дирак тенгламалар системасини кўриб чиқамиз

$$Ly\equiv\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\ x\in R^1, \tag{8}$$

бунда $p(x),q(x)\in C^1(R^1)$ – ҳақиқий π даврли функциялар.

$c(x,\lambda)=(c_1(x,\lambda),c_2(x,\lambda))^T$ ва $s(x,\lambda)=(s_1(x,\lambda),s_2(x,\lambda))^T$ орқали (8) тенгламанинг $c(0,\lambda)=(1,0)^T$ ва $s(0,\lambda)=(0,1)^T$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз. $\Delta(\lambda)=c_1(\pi,\lambda)+s_2(\pi,\lambda)$ функцияга (8) Дирак оператори учун Ляпунов функцияси ёки Хилл дискриминанти дейилади. Бу ҳолда ($\psi_{\pm}(0,\lambda)=1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари қуйидаги кўринишга эга

$$\psi^{\pm}(x,\lambda)=c(x,\lambda)+\frac{s_2(\pi,\lambda)-c_1(\pi,\lambda)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s_1(\pi,\lambda)}s(x,\lambda).$$

(8) операторнинг спектри қуйидаги тўпламдан иборат

$$E=\{\lambda\in R^1:\ -2\le\Delta(\lambda)\le 2\}=R^1\setminus\left\{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\}.$$

Ушбу $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in Z$ интервалларга лакуналар дейилади.

ξ_n, $n\in Z$ орқали $s_1(\pi,\lambda)=0$ тенгламанинг илдизларини белгилаймиз. $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n\in Z$ муносабатлар бажарилади.

Таъриф 3. $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ сонлар билан $\sigma_n=sign\{s_2(\pi,\xi_n)-c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n\in Z$ ишораларга (8) масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф 4. Спектрнинг λ_n, $n\in Z$ чегаралари ва ξ_n,σ_n, $n\in Z$ спектрал параметрларга (8) масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

(8) масаланинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади, спектрал берилганлар бўйича $p(x)$ ва $q(x)$ коэффициентларни тиклаш масаласига эса тескари масала дейилади.

Агар (8) масалада $p(x)$ ва $q(x)$ ўрнида $p(x+\tau)$ ва $q(x+\tau)$ ни қарасак, у ҳолда ҳосил бўлган масаланинг спектри τ параметрга боғлиқ бўлмайди: $\lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n$, $n\in Z$, спектрал параметрлар эса τ параметрга боғлиқ бўлади: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n\in Z$. Бу спектрал параметрлар Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\ne n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\times$$

$$\times[2\xi_n+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k)],\ \ n\in Z.$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau)$ ишора $\xi_n(\tau)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Дубровин тенгламалар системаси ҳамда қуйидаги излар формулалари

$$p(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\big((\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k})/2-\xi_k(\tau)\big),$$

$$q(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n(\tau)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau))}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\ne n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau)-\xi_n(\tau))^2}}$$

тескари спектрал масалани ечиш усулини беради.

Иккинчи бобнинг иккинчи параграфида Дирак оператори ҳолида Борг тескари теоремасининг қуйидаги иккита аналоги исботланган.

Теорема 2. $\pi/2$ сони (8) тенгламалар системаси $p(x)$ ва $q(x)$ коэффициентларининг даври бўлиши учун (8) система учун қўйилган

($y(0)=-y(\pi)$) антидаврий масаланинг барча хос қийматлари икки каррали бўлиши зарур ва етарли.

Теорема 3. Агар ($y(0)=y(\pi)$) даврий масаланинг барча хос қийматлари икки каррали бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони (8) тенгламалар системаси $p(x)$ ва $q(x)$ коэффициентларининг антидаври бўлади, яъни қуйидаги айниятлар бажарилади $p(x+\pi/2)=-p(x)$, $q(x+\pi/2)=-q(x)$.

Иккинчи бобнинг учинчи параграфида Дирак тенгламалар системаси учун қўйилган даврий ва антидаврий масалалар хос вектор-функциялари компоненталарининг квадратлари учун айниятлар олинган.

Теорема 4. (8) система учун $[0,\pi]$ кесмада қўйилган даврий ва антидаврий масалаларнинг $...\le\lambda_{-2}<\lambda_{-1}\le\lambda_0<\lambda_1\le\lambda_2<...$ хос қийматларига мос келувчи нормалланган хос вектор-функциялари

$$..., y_{-2}(x), y_{-1}(x), y_0(x), y_1(x), y_2(x), ...$$

бўлсин. У ҳолда қуйидаги айниятлар бажарилади:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,1}^2(t)=-p(t)+\frac{c}{2},\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,1}^2(t)=p(t)+\frac{c}{2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,2}^2(t)=p(t)+\frac{c}{2},\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,2}^2(t)=-p(t)+\frac{c}{2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,1}(t)y_{2k-1,2}(t)=q(t),\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,1}(t)y_{2k,2}(t)=-q(t),$$

бунда

$$a_k=\frac{-\Delta'(\lambda_{2k-1})}{f'(\lambda_{2k-1})},\qquad b_k=\frac{\Delta'(\lambda_{2k})}{g'(\lambda_{2k})},\qquad c=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}),$$

$$f(\lambda)=\pi(\lambda-\lambda_{-1})\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda}{k}\cdot\frac{\lambda_{-2k-1}-\lambda}{-k},$$

$$g(\lambda)=\pi(\lambda-\lambda_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k}-\lambda}{k}\cdot\frac{\lambda_{-2k}-\lambda}{-k}.$$

Иккинчи бобнинг тўртинчи параграфида даврий потенциалли Дирак оператори учун қўйилган тескари масалани қўллаб, Шредингернинг мосланган манбали ночизиқли тенгламаси даврий функциялар синфида интеграллланган.

Шредингернинг қуйидаги мосланган манбали ночизиқли тенгламасини

$$u_t=2iu|u|^2-iu_{xx}+\int_{-\infty}^{\infty} i\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+-i\psi_2^+)(\psi_1^--i\psi_2^-)d\lambda,\ t>0,\ x\in R^1 \quad (9)$$

ушбу

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x), \quad (10)$$

бошланғич шарт билан бирга x бўйича π даврли комплекс-қийматли функциялар синфида, қуйидаги

$$u(x,t)\in C_x^2(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge 0) \quad (11)$$

силлиқлик шартлари билан кўриб чиқамиз. Бу ерда $\beta(\lambda,t)\in C(R^1\times[0,\infty))$ - берилган ҳақиқий функция бўлиб, $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-2}),\ \lambda\to\pm\infty$ текис асимптотикага эга, $\psi^{\pm}=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ функциялар қуйидаги

$$L(t)y\equiv\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x,t) & q(x,t)\\ q(x,t) & -p(x,t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\ \ x\in R^1 \qquad (12)$$

Дирак тенгламасининг ($\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари, бунда $p(x,t)=-\mathrm{Re}(u(x,t))$, $q(x,t)=\mathrm{Im}(u(x,t))$. $s_1(x,\lambda,t)$ орқали, (12) тенгламанинг $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи $s(x,\lambda,t)$ ечимининг биринчи компонентаси белгиланган.

Иккинчи боб тўртинчи параграфининг асосий натижаси қуйидаги теоремада ифодаланган.

Теорема 5. $(u(x,t),\psi^{+}(x,\lambda,t),\psi^{-}(x,\lambda,t))$ учлик (9)-(12) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда $p(x+\tau,t)=-\mathrm{Re}(u(x+\tau,t))$ ва $q(x+\tau,t)=\mathrm{Im}(u(x+\tau,t))$ коэффициентли Дирак операторининг спектри τ ва t параметрларга боғлиқ эмас, $\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t}=2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\times$$

$$\times\{q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)+[p(\tau,t)+\xi_n]^2+\xi_n^2+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\}. \qquad (13)$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau,t)$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Ушбу

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right), \qquad (14)$$

$$q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right)$$

излар формулаларини ва

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},\ (a_0=1,\ a_k=k,\ k\neq 0)$$

ёйилмани ишлатсак, (13) система ёпиқ кўринишда ёзилади.

Натижа 4. Бу теорема (9)-(12) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун энг аввал $p_0(x+\tau)$ ва $q_0(x+\tau)$ коэффициентларга мос келувчи λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ спектрал берилганларни топамиз ва (13) система учун $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ Коши масаласини ечамиз. Сўнгра, (14) ва

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}$$

излар формулаларидан $p(x,t)$ ва $q(x,t)$ ни аниқлаймиз, улар ёрдамида эса $u(x,t)$ функцияни тузамиз. Шундан сўнг, $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$ Флоке ечимларини топиш қийин эмас.

Натижа 5. Агар (9)-(12) масалада $p_0(x)$ ва $q_0(x)$ бошланғич функциялар ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $p(x,t)$ ва $q(x,t)$ функциялар ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 6. Агар $\pi/2$ сони $u_0(x)$ бошланғич функциянинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $u(x,t)$ функциянинг ҳам x бўйича даври бўлади.

Диссертациянинг **«Бутун ўқдаги даврий потенциалли Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари масала»** деб номланган учинчи бобида Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси потенциалининг аналитиклиги билан лакуналар узунликларининг экспоненциал равишда нолга интилишини боғловчи теоремалар исботланган, Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси ҳолида Борг тескари теоремасининг аналоги исботланган, даврий коэффициентли Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун қўйилган тескари масалани қўллаб, даврий функциялар синфида Каупнинг мосланган манбали системаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

Учинчи бобнинг биринчи параграфида бутун ўқда берилган даврий потенциалли Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун қўйилган тескари масалага оид зарурий маълумотлар келтирилган.

Қуйидаги тенгламани кўриб чиқамиз

$$T(\lambda)y\equiv -y''+q(x)y+2\lambda p(x)y-\lambda^2y=0,\quad x\in R^1. \tag{15}$$

Бу ерда $p(x)\in C^2(R^1)$ ва $q(x)\in C^1(R^1)$ – ҳақиқий π даврли функциялар бўлиб, $y'(0)\bar{y}(0)-y'(\pi)\bar{y}(\pi)=0$ ва $(y,y)=1$ шартларни қаноатлантирувчи барча $y(x)\in W_2^2[0,\pi]$ функциялар учун ушбу

$$(py,y)^2+(qy,y)+(y',y')>0$$

тенгсизлик бажарилади, бунда $(\cdot\,,\cdot)$ орқали $L_2(0,\pi)$ фазонинг скаляр кўпайтмаси белгиланган. Охирги шартни (A) шарт деб атаймиз.

Бу ҳолда $T(\lambda)$ дастанинг спектри узлуксиз бўлиб, қуйидаги тўпламдан иборат бўлади

$$E\equiv\{\lambda:-2\le\Delta(\lambda)\le2\}=R^1\setminus\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_k^-,\lambda_k^+).$$

Бунда $\lambda=0$ нуқтани ўз ичига олувчи лакуна (биз уни $(\lambda_0^-,\lambda_0^+)$ орқали белгилаймиз) ҳамиша айнимаган бўлади. Бу ерда $\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$ бўлиб, $c(x,\lambda)$ ва $s(x,\lambda)$ орқали (15) тенгламанинг $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ ва

$s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимлари белгиланган.

ξ_n, $n\in Z\setminus\{0\}$ орқали (15) тенглама учун қўйилган Дирихле масаласининг хос қийматларини белгилаймиз. $\xi_n\in[\lambda_n^-,\lambda_n^+]$, $n\in Z\setminus\{0\}$ эканлигини кўриш қийин эмас.

Таъриф 5. ξ_n, $n\in Z\setminus\{0\}$ сонлар билан $\sigma_n = sign\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}$, $n\in Z\setminus\{0\}$ ишораларга (15) масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф 6. Спектрнинг $\lambda_n^{\pm}$, $n\in Z$ чегаралари ва ξ_n,σ_n, $n\in Z\setminus\{0\}$ спектрал параметрларга (15) масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

(15) масаланинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади, спектрал берилганлар бўйича $p(x)$ ва $q(x)$ коэффициентларни тиклаш масаласига эса тескари масала дейилади.

Агар (15) масалада $p(x)$ ва $q(x)$ ўрнида $p(x+\tau)$ ва $q(x+\tau)$ ни қарасак, у ҳолда ҳосил бўлган масаланинг спектри τ параметрга боғлиқ бўлмайди: $\lambda_n^{\pm}(\tau)\equiv\lambda_n^{\pm}$, $n\in Z$, спектрал параметрлар эса τ параметрга боғлиқ бўлади: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n\in Z\setminus\{0\}$. Бу спектрал параметрлар Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=2(-1)^{n-1}sign(n)\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_n^-)(\lambda_n^+-\xi_n)}\times$$
$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0^-)(\xi_n-\lambda_0^+)\prod_{k\neq n,0}\frac{(\xi_n-\lambda_k^-)(\xi_n-\lambda_k^+)}{(\xi_n-\xi_k)^2}},\ n\in Z\setminus\{0\}.$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau)$ ишора $\xi_n(\tau)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_n^-,\lambda_n^+]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Дубровин тенгламалар системаси ҳамда қуйидаги излар формулалари

$$p(\tau)=\frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2}-\xi_k(\tau)\right),$$
$$q(\tau)+2p^2(\tau)=\frac{(\lambda_0^+)^2+(\lambda_0^-)^2}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2+(\lambda_k^-)^2}{2}-\xi_k^2(\tau)\right),$$

тескари спектрал масалани ечиш усулини беради.

Учинчи бобнинг иккинчи параграфида, Дубровин тенгламалар системаси ва излар формулаларини қўллаб, Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси потенциалининг аналитиклиги билан лакуналар узунликларининг экспоненциал равишда нолга интилишини боғловчи қуйидаги иккита теорема исботланган.

Теорема 6. Агар $p(x),q(x)\in C^2(R^1)$ – ҳақиқий π-даврли функциялар бўлиб, $\lambda_n^+-\lambda_n^-$ лакуналар узунликлари экспоненциал равишда нолга интилса, яъни агар $a>0$, $b>0$ сонлар топилиб, $\lambda_n^+-\lambda_n^-<ae^{-b|n|}$, $n\in Z$ бўлса, у ҳолда $p(x)$ ва $q(x)$ функциялар бутун ўқда ҳақиқий аналитик бўлади.

Теорема 7. Агар $p(x)$ ва $q(x)$ ҳақиқий аналитик, π-даврли функциялар бўлса, у ҳолда $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ лакуналар узунликлари экспоненциал равишда нолга интилади.

Учинчи бобнинг учинчи параграфида Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси ҳолида Борг тескари теоремасининг қуйидаги аналоги исботланган.

Теорема 8. $\pi/2$ сони (15) тенглама $p(x)$ ва $q(x)$ коэффициентларининг даври бўлиши учун (15) тенглама учун қўйилган антидаврий масаланинг барча хос қийматлари икки каррали бўлиши зарур ва етарли.

Учинчи бобнинг тўртинчи параграфида даврий коэффициентли Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун қўйилган тескари масалани қўллаб, Каупнинг мосланган манбали тенгламалар системаси даврий функциялар синфида интегралланган.

Каупнинг қуйидаги мосланган манбали тенгламалар системасини

$$p_t = -6pp_x - q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t))_x d\lambda, \qquad (16)$$

$$q_t = p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + 2\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\{-p_x \cdot \psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t) +$$
$$+ (\lambda - 2p)\cdot(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t))_x\}d\lambda, \qquad (17)$$

ушбу

$$p(x,t)\big|_{t=0} = p_0(x), \qquad q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \qquad (18)$$

бошланғич шарт билан бирга, x бўйича π даврли ҳақиқий қийматли функциялар синфида, қуйидаги

$$p(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0),\; q(x,t) \in C^1(t>0) \cap C(t \ge 0)$$

силлиқлик шартлари билан кўриб чиқамиз. Бу ерда $p_0(x) \in C^3(R)$, $q_0(x) \in C^2(R)$ берилган ҳақиқий, π даврли, (А) шартни қаноатлантирувчи функциялар, $\beta(\lambda,t)$ - берилган ҳақиқий функция бўлиб, $\beta(\lambda,t) = O(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \pm\infty$ текис асимптотикага эга, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ функциялар қуйидаги

$$-y'' + q(x,t)y + 2\lambda\, p(x,t)y - \lambda^2 y = 0,\;\; x \in R^1 \qquad (19)$$

тенгламанинг ($\psi_\pm(0,\lambda,t) = 1$ шарт билан нормалланган) Флоке ечимлари. $s(x,\lambda,t)$ орқали, (19) тенгламанинг $s(0,\lambda,t)=0$, $s'(0,\lambda,t)=1$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими белгиланган.

Учинчи боб учинчи параграфининг асосий натижаси қуйидаги теоремада ифодаланган.

Теорема 9. ($p(x,t)$, $q(x,t)$, $\psi_+(x,\lambda,t)$, $\psi_-(x,\lambda,t)$) тўртлик (16)-(19) масаланинг ечими бўлсин. У ҳолда $p(x+\tau,t)$ ва $q(x+\tau,t)$ коэффициентли Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастасининг спектри τ ва t параметрларга боғлиқ эмас, $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ спектрал параметрлар эса Дубровин тенгламалар системаси аналогини қаноатлантиради:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) \cdot sign(n) \cdot \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times$$
$$\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{-1})(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k \neq n,0} \frac{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \lambda_{2k})}{(\xi_n - \xi_k)^2}} \times$$
$$\times \left\{ 2p(\tau,t) + 2\xi_n + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}. \qquad (20)$$

Бу ердаги $\sigma_n(\tau,t)$ ишора $\xi_n(\tau,t)$ спектрал параметр ўзининг $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ лакунаси четига келганида қарама-қарши ишорага ўзгаради.

Ушбу

$$p(\tau,t) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right) \qquad (21)$$

излар формуласини ва

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi \prod_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{k},$$

ёйилмани ишлатсак, (20) система ёпиқ кўринишда ёзилади.

Натижа 7. Бу теорема (16)-(19) масалани ечиш усулини беради. Бунинг учун энг аввал Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастасининг $p_0(x+\tau)$ ва $q_0(x+\tau)$ коэффициентларига мос келувчи λ_n, $n \in Z$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ спектрал берилганларни топамиз. Сўнгра, (20) система учун $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ Коши масаласини ечамиз. (21) ва

$$q(\tau,t) + 2p^2(\tau,t) = \frac{(\lambda_{-1})^2 + (\lambda_0)^2}{2} + \sum_{0 \neq k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_{2k-1})^2 + (\lambda_{2k})^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right)$$

излар формулаларидан $p(x,t)$ ва $q(x,t)$ ни топамиз. Шундан сўнг, $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$ Флоке ечимларини топиш қийин эмас.

Натижа 8. Агар $p_0(x)$ ва $q_0(x)$ бошланғич функциялар ҳақиқий аналитик бўлса, у ҳолда $p(x,t)$ ва $q(x,t)$ функциялар ҳам x бўйича ҳақиқий аналитик бўлади.

Натижа 9. Агар $\pi/2$ сони $p_0(x)$ ва $q_0(x)$ бошланғич функцияларнинг даври бўлса, у ҳолда $\pi/2$ сони $p(x,t)$ ва $q(x,t)$ функцияларнинг ҳам x бўйича даври бўлади.

Диссертациянинг **«Ярим ўқдаги даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари масала»** деб номланган тўртинчи бобида ярим ўқда даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари спектрал масала ечилган.

Тўртинчи бобнинг биринчи параграфида ярим ўқда даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари спектрал масала ўрганилган, жумладан, чегаравий шартни спектрал берилганлар орқали ифодалайдиган формула ва Дубровин дифференциал тенгламалар системасининг аналоги келтириб чиқарилган ҳамда потенциални тузиш алгоритми берилган.

Ярим ўқда берилган қуйидаги чегаравий масалани кўриб чиқамиз

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \tag{22}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi), \tag{23}$$

бунда $q(x) \in C^1(R^1)$ – π даврли ҳақиқий функция. $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ ва $\varphi(x,\lambda)$ орқали (22) тенгламанинг $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$, $\varphi(0,\lambda) = -\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз.

Юқоридаги (22), (23) масала учун Вейл-Титчмарш функцияси қуйидаги кўринишга эга

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{[s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda)]\cos 2\alpha - [s(\pi,\lambda) + c'(\pi,\lambda)]\sin 2\alpha - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha + 2[s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda)]\sin\alpha\cos\alpha - 2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{24}$$

Ушбу ифодадан (22), (23) масаланинг узлуксиз спектри қуйидаги

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ \left(-\infty, \lambda_0\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}\right) \right\} \tag{25}$$

кўринишга эга эканлиги келиб чиқади. $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$ интервалларга лакуналар дейилади. Лакуналар четки нуқталари $\Delta^2(\lambda) - 4$ функциянинг нолларидан иборат.

ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ орқали $\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha = 0$ тенгламанинг ((24) ифода махражининг) илдизларини белгилаймиз. ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ лар (22) тенглама учун қўйилган $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha = 0$ чегаравий масаланинг хос қийматлари билан устма-уст тушади ва $\xi_0 \in (-\infty, \lambda_0]$, $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1, 2, \ldots$ муносабатлар бажарилади.

Таъриф 7. ξ_n сонлар билан $\sigma_n = sign\left\{ \dfrac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)} - \dfrac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha} \right\}$, $n \ge 0$ ишораларга (22), (23) масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф 8. Узлуксиз спектрнинг λ_n, $n \ge 0$ чегаралари ва ξ_n, σ_n, $n \ge 0$ спектрал параметрларга (22), (23) масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

Юқоридаги (22), (23) масаланинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўғри масала дейилади, спектрал берилганлар бўйича $q(x)$ потенциални ва $ctg\alpha$ ни топиш масаласига эса тескари масала дейилади.

Спектрал берилганлар ва чегаравий шарт орасидаги боғланишни теорема кўринишида ифодалаймиз.

Теорема 10. $q(x) \in C^1[0,\infty)$ – (22), (23) Штурм-Лиувилл масаласининг π даврли ҳақиқий потенциали бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринли

$$ctg\alpha = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{A_1'(\xi_n)},$$

бунда

$$A_1(\lambda) = 2\pi(\xi_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n - \lambda}{n^2}.$$

Қуйидаги теорема спектрал берилганларнинг эволюцияси ҳақида.

Теорема 11. (22), (23) масаланинг узлуксиз спектри (25) бўлиб, спектрал параметрлари ξ_n, σ_n, $n \geq 0$ бўлсин. У ҳолда t ҳақиқий параметрнинг барча қийматларида қуйидаги масала

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \ \alpha \in (0, \pi),$$

айнан шу E_{ess} узлуксиз спектрга эга ва $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$ $n \geq 0$ спектрал параметрлар Дубровин дифференциал тенгламалар системасини

$$\dot{\xi}_0(t) = 2\sigma_0(t)\sqrt{\lambda_0 - \xi_0(t)} \times [\xi_0(t) - q(t) + ctg^2\alpha] \times \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\xi_0(t) - \lambda_{2k-1})(\xi_0(t) - \lambda_{2k})}{(\xi_k(t) - \xi_0(t))^2}},$$

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t))} \times [\xi_n(t) - q(t) + ctg^2\alpha] \times$$

$$\times\sqrt{\frac{(\xi_n(t) - \lambda_0)}{(\xi_n(t) - \xi_0(t))^2} \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\xi_n(t) - \lambda_{2k-1})(\xi_n(t) - \lambda_{2k})}{(\xi_k(t) - \xi_n(t))^2}}, \ n \geq 1,$$

ва ушбу

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n, \ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n, \ n \geq 0,$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради. Бундан ташқари, қуйидаги формула ҳам ўринли бўлади

$$q(t) = 2ctg^2\alpha - \lambda_0 + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)\right).$$

Тўртинчи бобнинг иккинчи параграфида ярим ўқдаги даврий потенциалли Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун спектрал берилганлар таърифланади. Тўртинчи бобнинг учинчи, тўртинчи ва бешинчи параграфларида ярим ўқдаги даврий потенциалли Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун излар формулалари, чегаравий шартни спектрал берилганлар орқали ифодалайдиган формула ва Дубровин дифференциал тенгламалар системасининг аналоги келтириб чиқарилади.

Қуйидаги Штурм-Лиувилл тенгламаларининг квадратик дастасини

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \quad (0 < x < \infty) \tag{26}$$

ушбу

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi), \tag{27}$$

чегаравий шарт билан кўриб чиқамиз. Бу ерда $p(x) \in C^2[0,\infty)$ ва $q(x) \in C^1[0,\infty)$ ҳақиқий π даврли функциялар.

Ушбу $[y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha]y'(0) - [y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha]y'(\pi) = 0$ тенгликни қаноатлантирувчи, нол бўлмаган, барча $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$ функциялар учун $(L_0 y, y) > 0$ тенгсизлик бажарилади деб ҳисоблаймиз, бунда $L_0 y \equiv -y'' + q(x)y$.

$c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ ва $\varphi(x,\lambda)$ орқали (26) тенгламанинг $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$, $\varphi(0,\lambda)=-\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз.

Юқоридаги (26), (27) масала учун Вейл-Титчмарш функцияси қуйидаги кўринишга эга

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos 2\alpha-(s(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda))\sin 2\alpha-\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha+2(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos\alpha\sin\alpha-2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{28}$$

$\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$ функцияга (26), (27) масаланинг Ляпунов функцияси ёки Хилл дискриминанти дейилади, у α га боғлиқ эмаслигини айтиб ўтамиз.

(28) ифодадан (26), (27) масаланинг узлуксиз спектри ушбу

$$E_{ess}=R^1\setminus\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^-,\lambda_n^+) \tag{29}$$

кўринишга эга эканлиги келиб чиқади. Бунда $\lambda=0$ нуқтани ўз ичига олувчи лакуна (биз уни $(\lambda_0^-,\lambda_0^+)$ орқали белгилаймиз) ҳамиша айнимаган бўлади.

Қулайлик учун $\Omega=\{\pm 0,\pm 1,\dots\}$ индекслар тўпламини киритиб оламиз. ξ_n, $n\in\Omega$ орқали $\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha=0$ тенгламанинг илдизларини белгилаймиз.

ξ_n, $n\in\Omega$ лар (26) тенглама учун қўйилган $y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0$, $y(\pi)\cos\alpha+y'(\pi)\sin\alpha=0$ чегаравий масаланинг хос қийматлари билан устма-уст тушади ва $\xi_{-0}\in[\lambda_0^-,0)$, $\xi_{+0}\in(0,\lambda_0^+]$, $\xi_n\in[\lambda_n^-,\lambda_n^+]$, $n\in Z\setminus\{0\}$ муносабатлар бажарилади.

Таъриф 9. ξ_n, $n\in\Omega$ сонлар билан $\sigma_n=sign\left\{\dfrac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)}\right\}$, $n\in\Omega$ ишораларга (26), (27) масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф 10. Узлуксиз спектрнинг λ_n^-, λ_n^+, $n\in Z$ чегаралари ва ξ_n,σ_n, $n\in\Omega$ спектрал параметрларга (26), (27) масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

Теорема 12. Қуйидаги формулалар ўринли

$$p(t)=-\Big((\lambda_0^++\lambda_0^-)/2-\xi_{-0}(t)-\xi_{+0}(t)\Big)-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\Big((\lambda_k^++\lambda_k^-)/2-\xi_k(t)\Big),$$

$$q(t)+2p^2(t)=2ctg^2\alpha-\frac{(\lambda_0^+)^2+(\lambda_0^-)^2}{2}+\xi_{-0}^2(t)+\xi_{+0}^2(t)-$$

$$-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2+(\lambda_k^-)^2}{2}-\xi_k^2(t)\right).$$

Бу ерда $\xi_n(t)$, $n\in\Omega$ орқали $p(x+t)$ ва $q(x+t)$ коэффициентларга мос келувчи спектрал параметрлар белгиланган.

Теорема 13. Қуйидаги формула ўринли

$$ctg\alpha = -\sum_{n\in\Omega} \xi_n \frac{\sigma_n \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{A_1'(\xi_n)} \ ,$$

бунда

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2(\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2},$$

$$A_1(\lambda) = 2\pi(\lambda - \xi_{-0})(\lambda - \xi_{+0}) \prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}.$$

Теорема 14. (26), (27) масаланинг узлуксиз спектри (29) бўлиб, спектрал параметрлари ξ_n, σ_n, $n\in\Omega$ бўлсин. У ҳолда t ҳақиқий параметрнинг барча қийматларида қуйидаги масала

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi),$$

айнан шу E_{ess} узлуксиз спектрга эга ва $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$ $n\in\Omega$ спектрал параметрлар Дубровин дифференциал тенгламалар системасини

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{2[(\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t)) + ctg^2\alpha]\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{A_1'(\xi_n(t))}, \ n\in\Omega,$$

ва ушбу

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n, \quad \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n, \quad n\in\Omega$$

бошланғич шартларни қаноатлантиради.

ХУЛОСАЛАР

1. Даврий функциялар синфида мосланган манбали Кортевег-де Фриз тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

2. Дирак оператори ҳолида Борг тескари теоремасининг аналоги исботланган.

3. Дирак системаси учун қўйилган даврий ва антидаврий масалалар хос вектор-функциялари компоненталарининг квадратлари учун айниятлар олинган.

4. Даврий функциялар синфида Шредингернинг мосланган манбали ночизиқли тенгламаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

5. Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси потенциалининг аналитиклиги билан лакуналар узунликларининг экспоненциал равишда нолга интилишини боғловчи теоремалар исботланган.

6. Штурм-Лиувилл операторлари квадратик дастаси ҳолида Борг тескари теоремасининг аналоги исботланган.

7. Даврий функциялар синфида Каупнинг мосланган манбали системаси тўла интегралланувчанлиги исботланган.

8. Ярим ўқда даврий потенциалли Штурм-Лиувилл оператори ва Штурм-Лиувилл операторларининг квадратик дастаси учун тескари спектрал масала ечилган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ 16.07.2013.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЯХШИМУРАТОВ АЛИШЕР БЕКЧАНОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2015

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.3-4.FM91.

Докторская диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Хасанов Акназар Бекдурдиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Тахиров Жозил Останович** доктор физико-математических наук
	Касимов Шакирбай Гаппарович доктор физико-математических наук
	Дурдиев Дурдимурод Каландарович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Башкирский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2015 года в ____ часов на заседании Научного совета 16.07.2013.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)227-12-24, факс: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___________). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (99871)246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2015 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2015 года).

Б.А.Шаимкулов
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н.

А.Х.Худойбердиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук, к.ф.-м.н.

М.С.Салахитдинов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., академик

Введение (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Обратные задачи спектрального анализа возникают в различных областях естествознания, например, в квантовой механике при определении внутриатомных сил по известным уровням энергии, в радиотехнике при синтезе параметров неоднородных линий передач, в теории упругости при определении поперечных сечений балки по заданным частотам его собственных колебаний, в геофизике при определении электрических свойств внутренних слоев Земли по характеристикам импеданса.

Важность спектральной теории дифференциальных операторов резко возросла после открытия метода обратной задачи рассеяния для точного решения уравнения Кортевега-де Фриза, описывающегося гравитационные длинные волны на мелкой воде. Впоследствии были обнаружены другие нелинейные эволюционные уравнения, решаемые этим методом, которые имеют многочисленные практические применения в различных областях физики. Так, например, эти уравнения возникают при анализе ионно-звуковых волн в плазме, ленгмюровских волн в тонком плазменном цилиндре, различных волн в гидродинамике. Применение метода обратной задачи для решения нелинейного уравнения Шредингера, возникающего в нелинейной оптике, привело к созданию теории оптических солитонов и позволило обнаружить новые примеры солитонных моделей. Более того, этот метод позволил развить новые подходы к анализу явлений, описываемых системами уравнений, близкими к вполне интегрируемым.

Реальные физические системы описываются уравнениями с самосогласованными источниками, которые являются одним из модификаций классических уравнений. Кроме этого, силы, действующие на физическую систему, конечны лишь в течении конечного времени, поэтому реальные модели сводятся к рассмотрению уравнений в классах периодических и почти-периодических функций по пространственным переменным. Приложения метода обратных задач спектральной теории к различным задачам нелинейной оптики, физики плазмы, гидродинамики и к другим областям является одним из приоритетных направлений.

Сейчас солитоны стали одним из основных объектов во многих проблемах динамики нелинейных волн. В последние годы оптические солитоны стали использоваться в телекоммуникационных технологиях. Важную часть современных исследований в теории солитонов составляют исследования распространения нелинейных волн в нерезонансных средах. Связь этой теории с гидродинамическими задачами, позволяющими решить различные проблемы экологии, касающиеся регионам Приаралья, определяет востребованность исследований, связанных с тематикой диссертации.

Связь исследования к приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данная диссертация выполнена в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Ф4 «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. В направлениях доказательства единственности и существования решения обратных спектральных задач, разработке методов их нахождения на конечном промежутке и на полуоси для дифференциальных и разностных операторов в различных постановках, а также приложения метода обратных задач для решения нелинейных эволюционных уравнений на всей прямой и на полуоси в различных классах функций ведутся широкие научные исследования в научных центрах и университетах ведущих стран, в том числе в Оксфордском университете (Англия), Штутгартском университете (Германия), Шведском королевском университете (Швеция), Интернациональном центре теоретической физики (Италия), Венском университете, Институте Эрвина Шредингера (Австрия), Институте математических наук имени Р.Куранта, в Высшем техническом учебном заведении «Кларксон колледж», Бруклинском политехническом институте, Университете штата Огайо, в Лаборатории физики плазмы при Принстонском университете (США), Софийском университете (Болгария), Институте ядерных исследований, Московском государственном университете, Санкт-Петербургском государственном университете, Саратовском государственном университете, в Обсерватории Пулково, Институте теоретической геофизики, Башкирском государственном университете (Россия), Физико-техническом институте низких температур, Институте математики Академии наук Украины (Украина).

В результате научных исследований проведенных по обратным задачам спектрального анализа и методам точного решения уравнения Кортевега-де Фриза в мировом масштабе решены целый ряд актуальных задач, в том числе, были получены следующие научные результаты: решены обратные задачи квантовой теории рассеяния на всей прямой и на полуоси (Оксфордский университет, Высшее техническое учебное заведение «Кларксон колледж», Бруклинский политехнический институт, Физико-технический институт низких температур, Санкт-Петербургский государственный университет); доказаны единственности решения обратных спектральных задач для оператора Штурма-Лиувилля в различных постановках (Обсерватория Пулково, Шведский королевский университет, Институт теоретической геофизики, Физико-технический институт низких температур); решено уравнение Кортевега-де Фриза в классе «быстроубывающих» функций (Лаборатория физики плазмы при Принстонском университете, Институт математических наук имени Р.Куранта); решено уравнение Кортевега-де Фриза в классе почти-периодических функций (Московский государственный университет, Санкт-Петербургский государственный университет); найдены почти-периодические решения модифицированного нелинейного уравнения Шредингера (Институт математики Академии наук Украины); решены обратные задачи квантовой теории рассеяния на всей прямой в классе возмущенных конечнозонных потенциалов (Венский университет, Институт Эрвина Шредингера); решены обратные задачи для дифференциальных операторов с комлексно-значными и матричными коэффициентами на конечном промежутке по функции Вейля-Титчмарша (Саратовский государственный университет); разработаны методы вычислений регуляризованных следов для дифференциальных операторов высших порядков, решены обратные задачи для дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами (Московский государственный университет); решены обратные задачи для дифференциальных операторов с нераспадающимися краевыми условиями, а также граничными условиями, зависящими от спектрального параметра (Башкирский государственный университет); установлены связи между классом гладкости периодического потенциала и убыванием длин лакун для оператора Штурма-Лиувилля (Университет штата Огайо, Софийский университет, Штутгартский университет).

На сегодняшний день осуществляются приоритетные научно-исследовательские работы по разработке теории обратных спектральных задач для дифференциальных и разностных операторов с периодическими матричными коэффициентами, для дифференциальных и разностных операторов, рассматриваемых на графах; разработка метода обратных задач для решения нелинейных эволюционных уравнений математической физики, пространственная переменная которых принадлежит графу; нахождение устойчивых алгоритмов для численных реализаций обратных спектральных задач.

Степень изученности проблемы. Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим, не обязательно конечнозонным, потенциалом изучена в работах И.В.Станкевича, В.А.Марченко, И.В.Островского, Х.П.Мак-Кина и Е.Трубовица. С помощью обратной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом в работах С.П.Новикова, Б.А.Дубровина, А.Р.Итса, В.Б.Матвеева, П.Лакса и др. доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза без источника в классе конечнозонных функций.

Обратная задача для системы Дирака была изучена в работах М.Г.Гасымова, Б.М.Левитана, В.Е.Захарова, А.Б.Шабата и др. В работах В.Е.Захарова, А.Б.Шабата, С.В.Манакова, методом обратной задачи для оператора Дирака было установлена полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера в классе быстроубывающих функций. Аналогичные результаты в классах периодических или же конечнозонных функций получены в работах А.Р.Итса, В.П.Котлярова, А.О.Смирнова и др.

Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля в классе убывающих коэффициентов по данным рассеяния на полуоси и на всей прямой решена в работах M.Jaulent, I.Miodek, C.Jean; по функции Вейля-Титчмарша в работе В.А.Юрко; на конечном отрезке по спектру и нормирующим числам, а также по двум спектрам были изучены М.Г.Гасымовым и Г.Ш.Гусейновым; с периодическим потенциалом на всей прямой исследована в работах Г.Ш.Гусейнова; с конечнозонным периодическим потенциалом на полуоси изучена в работах Б.А.Бабажанова и А.Б.Хасанова.

Система Каупа в классе быстроубывающих функций была решена Д.Ж.Каупом, а в классе конечнозонных потенциалов – в работах В.Б.Матвеева, М.И.Явора, А.О.Смирнова и др.

Обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с конечнозонным потенциалом изучена в работах Н.И.Ахиезера, Х.Хохштадта, В.Гольдберга, Б.М.Левитана и А.В.Савина. Обратная задача на полуоси несколько отличается от обратной задачи на всей прямой. В случае полупрямой, кроме потенциала требуется восстановить и граничное условие через спектральные данные.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования ОТ-Ф1-002 «Прямые и обратные спектральные задачи для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля» (2007-2011гг.) Ургенчского государственного университета.

Целью исследования является решение обратных спектральных задач для дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами и их приложение к решению нелинейных эволюционных уравнений в классе периодических функций, доказательство аналога обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака, решение обратной спектральной задачи на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля и для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказательство полной интегрируемости уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

получение тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака;

доказательство полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказательство теорем о связи между аналитичностью потенциала с экспоненциальным убыванием длин лакун квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля;

доказательство аналога обратной теоремы Борга в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля;

доказательство полной интегрируемости системы уравнений Каупа с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Объект исследования. Оператор Штурма-Лиувилля, оператор Дирака и квадратичный пучок операторов Штурма-Лиувилля.

Предмет исследования. Обратные спектральные задачи для операторов Штурма-Лиувилля, Дирака и квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля, а также их приложения к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математической физики, функционального анализа, теории функций комплексных переменных.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказан аналог обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака;

получены тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака;

доказана полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником в классе периодических функций;

доказаны теоремы о связи между аналитичностью потенциала с экспоненциальным убыванием длин лакун квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля;

доказан аналог обратной теоремы Борга в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля;

доказана полная интегрируемость системы уравнений Каупа с самосогласованным источником в классе периодических функций;

решена обратная спектральная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля и для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Практические результаты исследования состоят из возможности применения при численных вычислениях полученных следствий об аналитичности решений по пространственной переменной нелинейных уравнений.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, а также использованием методов математической физики, функционального анализа и теории функций комплексных переменных при решении обратных спектральных задач для дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами и их приложений к решению нелинейных эволюционных уравнений в классе периодических функций.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в спектральной теории линейных операторов, в гидродинамике и в квантовой физике.

Практическое значение диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов в математической физике при интегрировании нелинейных эволюционных уравнений.

Внедрение результатов исследования. Доказанные теоремы, связывающие аналитичность потенциала с экспоненциальным убыванием длин лакун и аналог обратной теоремы Борга в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля, результаты по интегрированию уравнения

Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником, а также метод дифференцирования спектральных параметров использованы в зарубежном гранте project MTM2010-15314(Institute of Mathematics at the University of Santiago de Compostela, Spain, справка от 25 мая 2015 года) при доказательствах теорем о знаке функции Грина для дифференциальных уравнений второго порядка, для решения уравнения цепочки Тоды с интегральным самосогласованным источником.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалась на следующих международных и республиканских научных конференциях: «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики» (Ташкент, 2004 г.), «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» (Ташкент, 2005 г.), «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2009» (Ташкент, 2009 г.), «Актуальные проблемы математического анализа» (Ургенч, 2012 г.), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент, 2013 г.), «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (Ташкент, 2014 г.). Настоящая работа обсуждалась на республиканских семинарах «Современные проблемы теории дифференциальных уравнений в частных производных» и «Операторные алгебры и их приложения» Института Математики при Национальном университете Узбекистана, на семинаре «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» Национального университета Узбекистана, на городском семинаре кафедры алгебры и функционального анализа Национального университета Узбекистана, на семинарах «Спектральная теория дифференциальных операторов» кафедры математического анализа и «Операторные модели в математической физике» кафедры функционального анализа Московского государственного университета, на семинаре «Спектральная теория операторов и ее приложения» Башкирского государственного университета.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 31 научных работ, из них 7 статей в национальных журналах, 9 статей в зарубежных журналах, 15 тезисов в научных конференциях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, выводов, заключения и списка использованной литературы. Общий объем работы 179 страницы, в списке цитированной литературы 227 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответсвие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цель и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работ и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации названной **«Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей оси»,** применяя обратную задачу Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В первом и втором параграфах первой главы, для полноты изложения, приводятся известные сведения, касающиеся обратной спектральной задачи на всей прямой для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

Рассмотрим следующий оператор Штурма-Лиувилля

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1 \tag{1}$$

где $q(x) \in C^1(R^1)$ – действительная π -периодическая функция.

Обозначим через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$. Функция $\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла. Следующие решения

$$\psi_{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)} s(x,\lambda)$$

принято называть решениями Флоке уравнения (1).

Спектр оператора (1) состоит из следующего множества

$$E = \{\lambda \in R^1 :\, -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\,\} = R^1 \setminus \left\{(-\infty,\lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\}.$$

Следующие интервалы $(-\infty,\lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n=1,2,\ldots$ называются лакунами.

Обозначим через ξ_n, $n=1,2,\ldots$ собственные значения задачи Дирихле для уравнения (1). Нетрудно видеть, что $\xi_n \in [\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,2,\ldots$.

Определение 1. Числа ξ_n, $n=1,2,\ldots$ вместе со знаками $\sigma_n = sign\{s'(\pi,\xi_n) - c(\pi,\xi_n)\}$, $n=1,2,\ldots$ называются спектральными параметрами задачи (1).

Определение 2. Границы спектра λ_n, $n=0,1,2,\ldots$ и спектральные параметры ξ_n,σ_n, $n=1,2,\ldots$ называются спектральными данными задачи (1).

Нахождение спектральных данных задачи (1) называется прямой задачей, а восстановление потенциала $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

В третьем параграфе первой главы, применяя обратную задачу Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, проинтегрировано уравнение Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Рассмотрим уравнение КдФ с самосогласованным источником

$$q_t = q_{xxx} - 6qq_x +$$
$$+ 2\int_0^\infty \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\big(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\big)_x d\lambda\,,\quad t>0\,,\ x\in R^1 \qquad (2)$$

с начальным условием

$$q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x)\,. \qquad (3)$$

Требуется найти действительную функцию $q = q(x,t)$, которая является π-периодической по переменной x и удовлетворяет условиям гладкости:

$$q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0)\,. \qquad (4)$$

Здесь $\beta(\lambda,t)\in C\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$ - заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-1})$, $\lambda\to\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ - решения Флоке (нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t)=1$) уравнения Штурма-Лиувилля

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x,t)y = \lambda y\,,\quad x\in R^1\,, \qquad (5)$$

$s(x,\lambda,t)$ – решение уравнения (5), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t)=0$, $s'(0,\lambda,t)=1$. Через λ_k, ($k\geq 0$) мы обозначим собственные значения либо периодической, либо антипериодической задачи для уравнения (5).

Основной результат третьего параграфа первой главы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. Если ($q(x,t)$, $\psi_+(x,\lambda,t)$, $\psi_-(x,\lambda,t)$) – решение задачи (2)-(5), то спектр оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x+\tau,t)$ не зависит от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n=1,2,\ldots$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\times$$
$$\times\left\{2q(\tau,t)+4\xi_n+\int_0^\infty\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\},\ n\geq 1\,. \qquad (6)$$

Знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется при каждом столкновении спектрального параметра $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Используя формулу первого следа

$$q(\tau,t)=\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k(\tau,t)) \qquad (7)$$

и разложение

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t)-\lambda}{k^2},$$

систему (6) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 1. Система (6) и формула первого следа дают метод решения задачи (2)-(5). Для этого, сначала найдём спектральные данные λ_n, $n\geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\geq 1$ для уравнения Штурма-Лиувилля, соответствующие потенциалу $q(x+\tau,0)=q_0(x+\tau)$. Далее, решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n\geq 1$ для системы уравнений Дубровина (6) и по формуле следов (7) находим $q(\tau,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$.

Следствие 2. Если начальная функция $q_0(x)$ является действительной аналитической функцией, то $q(x,t)$ тоже является действительной аналитической функцией по x.

Следствие 3. Если число π/n является периодом начальной функции $q_0(x)$, то число π/n является периодом также функции $q(x,t)$ по переменной x. Здесь $n\geq 2$ натуральное число.

В четвертом параграфе первой главы проинтегрировано уравнение Кортевега-де Фриза со свободным членом, не зависящим от пространственной переменной в классе периодических функций.

Во второй главе диссертации названной **«Обратная задача для оператора Дирака с периодическим потенциалом на всей оси»** доказан аналог обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака, получены тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака, а также применяя обратную задачу для оператора Дирака с периодическим потенциалом, доказана полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В первом параграфе второй главы приведены необходимые сведения об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом на всей прямой.

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly\equiv\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1'\\ y_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\ x\in R^1, \qquad (8)$$

где $p(x),q(x)\in C^1(R^1)$ – действительные π-периодические функции.

Обозначим через $c(x,\lambda)=\left(c_1(x,\lambda),c_2(x,\lambda)\right)^T$ и $s(x,\lambda)=\left(s_1(x,\lambda),s_2(x,\lambda)\right)^T$ решения уравнения (8), удовлетворяющие начальным условиям

$c(0,\lambda)=(1,0)^T$ и $s(0,\lambda)=(0,1)^T$. Функция $\Delta(\lambda)=c_1(\pi,\lambda)+s_2(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла для оператора Дирака (8). В этом случае, решения Флоке (нормированные условием $\psi_1^{\pm}(0,\lambda)=1$) имеют вид

$$\psi^{\pm}(x,\lambda)=c(x,\lambda)+\frac{s_2(\pi,\lambda)-c_1(\pi,\lambda)\mp\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s_1(\pi,\lambda)}s(x,\lambda).$$

Спектр оператора (8) состоит из следующего множества

$$E=\{\lambda\in R^1:\ -2\le\Delta(\lambda)\le 2\}=R^1\setminus\left\{\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\}.$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n\in Z$ называются лакунами.

Корни уравнения $s_1(\pi,\lambda)=0$ обозначим через ξ_n, $n\in Z$. Выполняются соотношения $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n\in Z$.

Определение 3. Числа ξ_n, $n\in Z$ и знаки $\sigma_n=sign\{s_2(\pi,\xi_n)-c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n\in Z$ называются спектральными параметрами задачи (8).

Определение 4. Границы спектра λ_n, $n\in Z$ и спектральные параметры ξ_n,σ_n, $n\in Z$ называются спектральными данными задачи (8).

Нахождение спектральных данных задачи (8) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (8) вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n(\tau)\equiv\lambda_n$, $n\in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n\in Z$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau}=(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\times\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\ne n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\times$$

$$\times[2\xi_n+\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}-2\xi_k)],\ \ n\in Z.$$

Знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный при каждом столкновении спектрального параметра $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Система уравнений Дубровина, а также следующие формулы следов

$$p(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left((\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k})/2-\xi_k(\tau)\right),$$

$$q(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n(\tau)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau))}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\ne n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau)-\xi_n(\tau))^2}}$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Во втором параграфе второй главы доказаны следующие два аналога обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака.

Теорема 2. Для того, чтобы число $\pi/2$ являлось периодом коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений (8), необходима и достаточна двукратность всех собственных значений антипериодической задачи ($y(0)=-y(\pi)$) для системы (8).

Теорема 3. Если все собственные значения периодической задачи ($y(0)=y(\pi)$) двукратны, то число $\pi/2$ является антипериодом для коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений (8), т.е. выполняются следующие тождества $p(x+\pi/2)=-p(x)$, $q(x+\pi/2)=-q(x)$.

В третьем параграфе второй главы получены тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака.

Теорема 4. Пусть

$$..., y_{-2}(x), y_{-1}(x), y_0(x), y_1(x), y_2(x), ...$$

нормированные собственные вектор-функции периодической и антипериодической задачи для системы (8) на отрезке $[0,\pi]$, соответствующие собственным значениям $...\le\lambda_{-2}<\lambda_{-1}\le\lambda_0<\lambda_1\le\lambda_2<...$. Тогда выполняются следующие тождества:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,1}^2(t)=-p(t)+\frac{c}{2},\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,1}^2(t)=p(t)+\frac{c}{2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,2}^2(t)=p(t)+\frac{c}{2},\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,2}^2(t)=-p(t)+\frac{c}{2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y_{2k-1,1}(t)y_{2k-1,2}(t)=q(t),\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k y_{2k,1}(t)y_{2k,2}(t)=-q(t),$$

где

$$a_k=\frac{-\Delta'(\lambda_{2k-1})}{f'(\lambda_{2k-1})},\qquad b_k=\frac{\Delta'(\lambda_{2k})}{g'(\lambda_{2k})},\qquad c=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}),$$

$$f(\lambda)=\pi(\lambda-\lambda_{-1})\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda}{k}\cdot\frac{\lambda_{-2k-1}-\lambda}{-k},$$

$$g(\lambda)=\pi(\lambda-\lambda_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k}-\lambda}{k}\cdot\frac{\lambda_{-2k}-\lambda}{-k}.$$

В четвертом параграфе второй главы, применяя обратную задачу для оператора Дирака с периодическим потенциалом, проинтегрировано нелинейное уравнение Шредингера с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Рассмотрим следующее нелинейное уравнение Шредингера с самосогласованным источником

$$u_t=2iu|u|^2-iu_{xx}+\int_{-\infty}^{\infty} i\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+-i\psi_2^+)(\psi_1^--i\psi_2^-)d\lambda,\ t>0,\ x\in R^1 \quad (9)$$

с начальным условием

$$u(x,t)\big|_{t=0}=u_0(x), \quad (10)$$

в классе комплексно-значных π-периодических по x функций:

$$u(x,t) \in C_x^2(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \geq 0). \qquad (11)$$

Здесь $\beta(\lambda,t) \in C(R^1 \times [0,\infty))$ заданная действительная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t) = O(\lambda^{-2}),\ \lambda \to \pm\infty$, $\psi^{\pm} = (\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t), \psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ - решение Флоке (нормированное условием $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения Дирака

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x \in R^1, \qquad (12)$$

где $p(x,t) = -\mathrm{Re}(u(x,t))$, $q(x,t) = \mathrm{Im}(u(x,t))$. Через $s_1(x,\lambda,t)$ обозначена первая компонента решения $s(x,\lambda,t)$ уравнения (12) при начальном условии $s(0,\lambda,t) = (0,1)^T$.

Основной результат четвертого параграфа второй главы сформулирован в следующей теореме.

Теорема 5. Пусть $(u(x,t), \psi^+(x,\lambda,t), \psi^-(x,\lambda,t))$ является решением задачи (9)-(12). Тогда спектр оператора Дирака с коэффициентами $p(x+\tau,t) = -\mathrm{Re}(u(x+\tau,t))$ и $q(x+\tau,t) = \mathrm{Im}(u(x+\tau,t))$ не зависит от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \cdot \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times$$

$$\times \{q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) + [p(\tau,t) + \xi_n]^2 + \xi_n^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda\}, \qquad (13)$$

где знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется при каждом столкновении $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Используя формулу следов

$$p(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right), \qquad (14)$$

$$q^2(\tau,t) + q_x(\tau,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right)$$

и разложение

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{a_k},\ (a_0 = 1,\ a_k = k,\ k \neq 0),$$

систему (13) можно переписать в замкнутой форме.

Следствие 4. Эта теорема дает метод решения задачи (9)-(12). Прежде всего, найдем спектральные данные λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$, и решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau),\ \sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z$ для системы (13). Далее, по формулам следов (14) и

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}$$

определяем $p(x,t)$ и $q(x,t)$, с помощью которых построим $u(x,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$.

Следствие 5. Если в задаче (9)-(12) начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то $p(x,t)$ и $q(x,t)$ также являются действительными аналитическими функциями по x.

Следствие 6. Если число $\pi/2$ является периодом для начальной функции $u_0(x)$ задачи (9)-(12), то число $\pi/2$ является также периодом и для решения $u(x,t)$ по переменной x.

В третьей главе диссертации названной **«Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей оси»** доказаны теоремы, связывающие аналитичность потенциала с экспоненциальным убыванием длин лакун квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля, доказан аналог обратной теоремы Борга в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля, а также применяя обратную задачу для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами, доказана полная интегрируемость системы уравнений Каупа с самосогласованным источником в классе периодических функций.

В первом параграфе третьей главы приведены необходимые сведения об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на всей прямой.

Рассмотрим уравнение

$$T(\lambda)y\equiv -y''+q(x)y+2\lambda p(x)y-\lambda^2 y=0,\ \ x\in R^1. \tag{15}$$

Здесь $p(x)\in C^2(R^1)$ и $q(x)\in C^1(R^1)$ действительные π-периодические функции, удовлетворяющие условию: для всех функций $y(x)\in W_2^2[0,\pi]$, удовлетворяющим условиям $y'(0)\bar{y}(0)-y'(\pi)\bar{y}(\pi)=0$ и $(y,y)=1$, выполняется неравенство

$$(py,y)^2+(qy,y)+(y',y')>0,$$

где $(\cdot\,,\cdot)$ – скалярное произведение пространства $L_2(0,\pi)$. Последнее условие будем называть условием (A).

В этом случае, спектр пучка $T(\lambda)$ непрерывен и состоит из множества

$$E\equiv\{\lambda:-2\le\Delta(\lambda)\le 2\}=R^1\setminus\bigcup_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_k^-,\lambda_k^+).$$

Лакуна, содержащая точку $\lambda=0$ (мы его обозначим через $(\lambda_0^-,\lambda_0^+)$), всегда является невырожденной. Здесь $\Delta(\lambda)=c(\pi,\lambda)+s'(\pi,\lambda)$, через $c(x,\lambda)$ и $s(x,\lambda)$ обозначены решения уравнения (15), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ и $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$.

Обозначим через ξ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ собственные значения задачи Дирихле для уравнения (15). Нетрудно видеть, что $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Определение 5. Числа ξ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ и знаки $\sigma_n = sign\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\}$, $n \in Z \setminus \{0\}$ называются спектральными параметрами задачи (15).

Определение 6. Границы спектра $\lambda_n^\pm$, $n \in Z$ и спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ называются спектральными данными задачи (15).

Нахождение спектральных данных задачи (15) называется прямой задачей, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным называется обратной задачей.

Если в задаче (15) вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, то спектр полученной задачи не зависит от параметра τ: $\lambda_n^\pm(\tau) \equiv \lambda_n^\pm$, $n \in Z$, а спектральные параметры зависят от параметра τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1} sign(n)\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n)} \times$$

$$\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+)\prod_{k \neq n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2}}, \ n \in Z \setminus \{0\}.$$

Здесь знак $\sigma_n(\tau)$ меняется на противоположный, при каждом столкновении $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.

Система уравнений Дубровина, а также следующие формулы следов

$$p(\tau) = \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(\tau) \right),$$

$$q(\tau) + 2p^2(\tau) = \frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(\tau) \right)$$

дают метод решения обратной спектральной задачи.

Во втором параграфе третьей главы, используя систему уравнений Дубровина и формулы следов, доказаны следующие две теоремы, связывающие аналитичность потенциала с экспоненциальным убыванием длин лакун квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.

Теорема 6. Если $p(x), q(x) \in C^2(R^1)$ действительные π-периодические функции и длины лакун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ экспоненциально убывают, т.е. если существуют постоянные числа $a > 0$, $b > 0$ для которых $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$, $n \in Z$, то $p(x)$ и $q(x)$ являются действительными аналитическими функциями на всей прямой.

Теорема 7. Если $p(x)$ и $q(x)$ действительные аналитические π-периодические функции, то длины лакун $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ убывают экспоненциально.

В третьем параграфе третьей главы доказан следующий аналог обратной теоремы Борга в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.

Теорема 8. Для того, чтобы число $\pi/2$ являлось периодом коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ уравнения (15), необходимо и достаточно двукратность всех собственных значений антипериодической задачи для уравнения (15).

В четвертом параграфе третьей главы обратную спектральную задачу для пучка уравнений Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами применяем для решения системы уравнений Каупа с самосогласованным источником в классе периодических функций.

Рассмотрим следующую систему уравнений Каупа с самосогласованным источником

$$p_t = -6pp_x - q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s(\pi,\lambda,t) (\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t))_x d\lambda, \quad (16)$$

$$q_t = p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + 2\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t) s(\pi,\lambda,t) \{-p_x \cdot \psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t) +$$
$$+ (\lambda - 2p)\cdot(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t))_x\} d\lambda, \quad (17)$$

при начальных условиях

$$p(x,t)\big|_{t=0} = p_0(x), \quad q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \quad (18)$$

в классе действительных, π-периодических по x функций, удовлетворяющих условиям гладкости

$$p(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0),\ q(x,t) \in C^1(t>0) \cap C(t \ge 0).$$

Здесь $p_0(x) \in C^3(R)$, $q_0(x) \in C^2(R)$ заданные действительные π-периодические функции, удовлетворяющие условию (A), $\beta(\lambda,t)$ - заданная действительная непрерывная функция, имеющая равномерную асимптотику $\beta(\lambda,t) = O(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \pm\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ решения Флоке (нормированные условием $\psi_\pm(0,\lambda,t) = 1$) следующего уравнения

$$-y'' + q(x,t)y + 2\lambda\, p(x,t)y - \lambda^2 y = 0, \quad x \in R^1. \quad (19)$$

Через $s(x,\lambda,t)$ обозначено решение уравнения (19), удовлетворяющее начальным условиям $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

Основной результат третьего параграфа третьей главы заключается в следующей теореме.

Теорема 9. Пусть ($p(x,t)$, $q(x,t)$, $\psi_+(x,\lambda,t)$, $\psi_-(x,\lambda,t)$) является решением задачи (16)-(19). Тогда спектр квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с коэффициентами $p(x+\tau,t)$ и $q(x+\tau,t)$ не зависит от параметров τ и t, а спектральные параметры $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) \cdot sign(n) \cdot \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times$$

$$\times\sqrt{(\xi_n-\lambda_{-1})(\xi_n-\lambda_0)\prod_{k\neq n,0}\frac{(\xi_n-\lambda_{2k-1})(\xi_n-\lambda_{2k})}{(\xi_n-\xi_k)^2}}\times$$

$$\times\left\{2p(\tau,t)+2\xi_n+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\right\}. \qquad (20)$$

Знак $\sigma_n(\tau,t)$ меняется при каждом столкновении $\xi_n(\tau,t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Используя формулу следов

$$p(\tau,t)=\frac{\lambda_{-1}+\lambda_0}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right) \qquad (21)$$

и разложение

$$s(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{k},$$

систему (20) можно переписать в замкнутом виде.

Следствие 7. Эта теорема дает метод решения задачи (16)-(19). Для этого, прежде всего, найдём спектральные данные λ_n, $n\in Z$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z\setminus\{0\}$ квадратичного пучка уравнений Штурма-Лиувилля, соответствующие коэффициентам $p_0(x+\tau)$ и $q_0(x+\tau)$. Далее, решаем задачу Коши $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z\setminus\{0\}$ для системы уравнений Дубровина (20). По формулам следов (21) и

$$q(\tau,t)+2p^2(\tau,t)=\frac{(\lambda_{-1})^2+(\lambda_0)^2}{2}+\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_{2k-1})^2+(\lambda_{2k})^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right)$$

находим функции $p(\tau,t)$, $q(\tau,t)$. После этого нетрудно найти решения Флоке $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$.

Следствие 8. Если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими функциями, то $p(x,t)$ и $q(x,t)$ также являются действительными аналитическими функциями по x.

Следствие 9. Если $p_0(x)$ и $q_0(x)$ имеют период $\pi/2$, то функции $p(x,t)$ и $q(x,t)$ также являются $\pi/2$-периодическими по x.

В четвертой главе диссертации названной **«Обратная задача для оператора Штурма-Лиувилля и квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси»** решена обратная спектральная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля и для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

В первом параграфе четвертой главы изучена обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом, а именно, выведены формула, выражающая граничное условие по спектральным данным, и аналог системы дифференциальных уравнений Дубровина, а также дается алгоритм построения потенциала.

Рассмотрим на полуоси следующую граничную задачу

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y\,,\ \ 0 < x < \infty \tag{22}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\,,\ \ \alpha \in (0,\pi)\,, \tag{23}$$

где $q(x) \in C^1(R^1)$ – π-периодическая действительная функция. Обозначим через $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ решения уравнения (22), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$, $\varphi(0,\lambda) = -\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha$.

Функция Вейля-Титчмарша для задачи (22), (23) имеет следующий вид

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{[s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda)]\cos 2\alpha - [s(\pi,\lambda) + c'(\pi,\lambda)]\sin 2\alpha - \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha + 2[s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda)]\sin\alpha\cos\alpha - 2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{24}$$

Из этого выражения следует, что непрерывный спектр задачи (22), (23) имеет вид

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ (-\infty,\, \lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1},\, \lambda_{2n}) \right\}. \tag{25}$$

Интервалы $(-\infty,\ \lambda_0)$, $(\lambda_{2n-1},\ \lambda_{2n})$, $n = 1, 2, ...$ называются лакунами. Концы лакун состоят из нулей функции $\Delta^2(\lambda) - 4$.

Обозначим через ξ_n, $n = 0, 1, 2, ...$ корни (знаменателя в выражении (24)) уравнения $\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha = 0$. Отметим, что ξ_n, $n = 0, 1, 2, ...$ совпадают с собственными значениями задачи для уравнения (22) с граничными условиями $y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0$, $y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha = 0$ и выполняются включения $\xi_0 \in (-\infty,\ \lambda_0]$, $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1, 2, ...$.

Определение 7. Числа ξ_n и знаки $\sigma_n = sign\left\{ \dfrac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)} - \dfrac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha} \right\}$, $n \ge 0$ называются спектральными параметрами задачи (22), (23).

Определение 8. Границы λ_n, $n \ge 0$ непрерывного спектра и спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \ge 0$ назовем спектральными данными задачи (22), (23).

Нахождение спектральных данных граничной задачи (22), (23) называют прямой задачей, а нахождение потенциала $q(x)$ и $ctg\alpha$ по спектральным данным называют обратной задачей.

Связь между спектральным данным и граничным условием сформулируем в виде теоремы.

Теорема 10. Пусть $q(x) \in C^1[0,\infty)$, π-периодический действительный потенциал задачи Штурма-Лиувилля (22), (23). Тогда имеет место следующая формула

$$ctg\alpha = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{A_1'(\xi_n)},$$

где

$$A_1(\lambda) = 2\pi(\xi_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n - \lambda}{n^2}.$$

Следующая теорема об эволюции спектральных данных.

Теорема 11. Пусть задача (22), (23) имеет непрерывный спектр (25) и спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \geq 0$. Тогда при всех значениях действительного параметра t, следующая задача

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x+t)y = \lambda y,\ \ 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,\ \ \alpha \in (0,\pi),$$

имеет тот же непрерывный спектр E_{ess} и спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \geq 0$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_0(t) = 2\sigma_0(t)\sqrt{\lambda_0 - \xi_0(t)} \times [\xi_0(t) - q(t) + ctg^2\alpha] \times \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\xi_0(t) - \lambda_{2k-1})(\xi_0(t) - \lambda_{2k})}{(\xi_k(t) - \xi_0(t))^2}},$$

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t))} \times [\xi_n(t) - q(t) + ctg^2\alpha] \times$$

$$\times\sqrt{\frac{(\xi_n(t) - \lambda_0)}{(\xi_n(t) - \xi_0(t))^2} \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\xi_n(t) - \lambda_{2k-1})(\xi_n(t) - \lambda_{2k})}{(\xi_k(t) - \xi_n(t))^2}},\ \ n \geq 1,$$

а также начальным условиям

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n,\ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n,\ \ n \geq 0,$$

кроме того справедлива следующая формула следов

$$q(t) = 2ctg^2\alpha - \lambda_0 + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)\right).$$

Во втором параграфе четвертой главы дается определение спектральных данных для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси. В третьем, четвертом и пятом параграфах четвертой главы выводятся формулы следов, формула, выражающая граничное условие через спектральные данные, и аналог системы уравнений Дубровина для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля на полуоси.

Рассмотрим следующий квадратичный пучок

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0\quad 0 < x < \infty \tag{26}$$

уравнений Штурма-Лиувилля с граничным условием

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0,\ \ \alpha \in (0,\pi) \tag{27}$$

где $p(x) \in C^2[0,\infty)$ и $q(x) \in C^1[0,\infty)$ действительные функции, имеющие период π, а λ комплексный параметр.

Будем предполагать, что для всех ненулевых функций $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, удовлетворяющих равенству

$$[y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha]y'(0) - [y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha]y'(\pi) = 0$$

выполняется неравенство $(L_0 y, y) > 0$, где $L_0 y \equiv -y'' + q(x)y$.

Обозначим через $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ и $\varphi(x,\lambda)$ решения уравнения (26), удовлетворяющие начальным условиям $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$, $\varphi(0,\lambda)=-\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha$.

Функция Вейля-Титчмарша для задачи (26), (27) имеет следующий вид

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos 2\alpha-(s(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda))\sin 2\alpha-\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha+2(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos\alpha\sin\alpha-2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{28}$$

Функция $\Delta(\lambda)=s'(\pi,\lambda)+c(\pi,\lambda)$ называется функцией Ляпунова или дискриминантом Хилла задачи (26), (27), отметим, что она не зависит от α.

Из выражения (28) следует, что непрерывный спектр задачи (26), (27) имеет вид

$$E_{ess}=R^1\setminus\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^-,\lambda_n^+). \tag{29}$$

Лакуна, содержащая точку $\lambda=0$ (мы его обозначим через $(\lambda_0^-,\lambda_0^+)$) всегда является невырожденной.

Для удобства введем множество индексов: $\Omega=\{\pm 0,\pm 1,\dots\}$. Обозначим через ξ_n, $n\in\Omega$ корни уравнения $\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha=0$.

Отметим, что ξ_n, $n\in\Omega$ совпадают с собственными значениями регулярной задачи для уравнения (26) с граничными условиями

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\quad y(\pi)\cos\alpha+y'(\pi)\sin\alpha=0,$$

а также выполняются включения $\xi_{-0}\in[\lambda_0^-,0)$, $\xi_{+0}\in(0,\lambda_0^+]$, $\xi_n\in[\lambda_n^-,\lambda_n^+]$, $n\in Z\setminus\{0\}$.

Определение 9. Числа ξ_n, $n\in\Omega$ и знаки $\sigma_n=sign\left\{\frac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)}\right\}$, $n\in\Omega$ называются спектральными параметрами задачи (26), (27).

Определение 10. Границы λ_n^-, λ_n^+, $n\in Z$ непрерывного спектра и спектральные параметры ξ_n,σ_n, $n\in\Omega$ назовем спектральными данными задачи (26), (27).

Теорема 12. Имеют место следующие формулы

$$p(t)=-\left((\lambda_0^++\lambda_0^-)/2-\xi_{-0}(t)-\xi_{+0}(t)\right)-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left((\lambda_k^++\lambda_k^-)/2-\xi_k(t)\right),$$

$$q(t)+2p^2(t)=2ctg^2\alpha-\frac{(\lambda_0^+)^2+(\lambda_0^-)^2}{2}+\xi_{-0}^2(t)+\xi_{+0}^2(t)-$$
$$-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2+(\lambda_k^-)^2}{2}-\xi_k^2(t)\right).$$

Здесь $\xi_n(t)$, $n\in\Omega$ спектральные параметры, соответствующие коэффициентам $p(x+t)$ и $q(x+t)$.

Теорема 13. Имеет место следующая формула

$$ctg\alpha = -\sum_{n\in\Omega} \xi_n \frac{\sigma_n \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{A_1'(\xi_n)} \ ,$$

где

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 (\lambda - \lambda_0^-)(\lambda - \lambda_0^+) \prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_k^-)(\lambda - \lambda_k^+)}{k^2},$$

$$A_1(\lambda) = 2\pi(\lambda - \xi_{-0})(\lambda - \xi_{+0}) \prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - \xi_k}{k}.$$

Теорема 14. Пусть задача (26), (27) имеет непрерывный спектр (29) и спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n \in \Omega$. Тогда при всех значениях действительного параметра t, следующая задача

$$-y'' + q(x+t)y + 2\lambda p(x+t)y - \lambda^2 y = 0, \ \ 0 < x < \infty$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0, \pi),$$

имеет тот же непрерывный спектр E_{ess}, и спектральные параметры $\xi_n(t), \sigma_n(t)$, $n \in \Omega$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений Дубровина:

$$\dot{\xi}_n(t) = \frac{2[(\xi_n^2(t) - 2\xi_n(t)p(t) - q(t)) + ctg^2\alpha]\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t)) - 4}}{A_1'(\xi_n(t))}, \ n \in \Omega,$$

а также начальным условиям

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n, \quad \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n, \ \ n \in \Omega.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЯ

1. Доказана полная интегрируемость уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций.

2. Доказан аналог обратной теоремы Борга в случае оператора Дирака.

3. Получены тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака.

4. Доказана полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником в классе периодических функций.

5. Доказаны теоремы, связывающие аналитичность потенциала с экспоненциальным убыванием длин лакун квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.

6. Доказан аналог обратной теоремы Борга в случае квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля.

7. Доказана полная интегрируемость системы уравнений Каупа с самосогласованным источником в классе периодических функций.

8. Решена обратная спектральная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля и для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом.

SCIENTIFIC COUNCIL 16.07.2013.FM.01.01 ON AWARD OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

URGENCH STATE UNIVERSITY

YAKHSHIMURATOV ALISHER BEKCHANOVICH

INVERSE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL OPERATORS WITH PERIODICAL COEFFICIENTS AND THEIR APPLICATIONS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics
(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2015

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number № 30.09.2014/B2014.3-4.FM91.

Doctoral dissertation is carried out at Urgench State University.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web page of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific consultant:	**Khasanov Aknazar Bekdurdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Takhirov Jozil Ostanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Kasimov Shakirbay Gapparovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Durdiev Durdimurod Kalandarovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Bashkir State University**

Defense will take place «____» _____________2015 at _____ at the meeting of Scientific Council number 16.07.2013.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871)227-12-24, fax: (99871)246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz.)

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2015 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2015 year)

B.A.Shaimkulov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S.

A.Kh.Khudoyberdiyev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, C.F.M.S.

M.S.Salakhitdinov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.M.S., Academician

Introduction (abstract of doctoral dissertation)

Actuality and demand of the theme of dissertation. The inverse problems of spectral analysis meet in various fields of natural science, for example, in quantum mechanics in determining interatomic forces using known energy levels, in a radio engineering in the synthesis parameters of inhomogeneous transmission lines, in the theory of elasticity in determining cross sections of the joist by a given its own frequency of vibrations, in geophysics in determining the electrical properties of the internal layers of the Earth via the impedance characteristics.

The importance of the spectral theory for differential operators increased rapidly after the discovery of the inverse scattering method for the exact solution of the equation of Korteweg-de Vries, which describes the gravitational long waves in shallow water. Subsequently other nonlinear evolution equations were found, to be solved by this method, which have numerous practical applications in various fields of physics. For example, these equations occur when analyzing the ion acoustic waves in plasma, the Langmuir waves in a thin plasma cylinder, the different waves in hydrodynamics. Application of inverse scattering method for solving the nonlinear Schrodinger equation, arising in nonlinear optics, led to the creation of the theory of optical solitons, and allowed to find new examples of soliton models. Moreover, this method has allowed to develop new approaches to the analysis of the phenomena described by systems of equations close to those completely integrable ones.

Real physical systems are described by equations with self-consistent sources, which are one of the modifications of classical equations. Moreover, the forces acting on the physical system are finite only for a finite time, therefore, the real models are reduced to the equations in the class of periodic and almost-periodic functions on the spatial variables. Applications of the method of inverse problems of spectral theory to various problems of nonlinear optics, plasma physics, hydrodynamics and other areas are one of the priority directions.

Now solitons have become one of the main objects in many of the problems of the dynamics of nonlinear waves. In the last years optical solitons have been used in the telecommunication technologies. An important part of the current research in the theory of solitons comprises studies of nonlinear waves in non-resonant environments. Relation of this theory with the problems of hydrodynamics, allows us to solve a variety of environmental problems, which is concern to the Aral Sea region, determine the demand of research related to the theme of the dissertation.

Connection of research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic. This dissertation was performed in accordance with the priority direction of development of Science and Technologies F4 “Mathematics, Mechanics and Informatics”.

Review of foreign scientific research on the theme of the dissertation. In the directions of proofs of the uniqueness and existence of the solution of inverse spectral problems, of the development of methods of finding of solutions on the finite interval and the half-line for differential and difference operators in various formulations, as well as applications of the method of the inverse problems for nonlinear evolution equations on the whole line and the half line in various classes of functions conducted extensive research in the research centers and universities of the leading countries, including University of Oxford (England), University of Stuttgart (Germany), Swedish Royal University (Sweden), International Centre for Theoretical Physics (Italy), University of Vienna, Institute Erwin Schrodinger (Austria), the Institute of Mathematical Sciences named after R.Kurant, Higher Technical Educational Institutions “Clarkson College”, the Brooklyn Polytechnic Institute, Ohio State University, Laboratory of Plasma Physics at Princeton University (USA), Sofia University (Bulgaria), Institute for Nuclear Research, Moscow State University, St.Petersburg State University, Saratov State University, Pulkovo Observatory, Institute of Theoretical Geophysics, Bashkir State University (Russia), Physical-Technical Institute of Low Temperatures, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine (Ukraine).

As a result of research carried out in the inverse problem of spectral analysis and the methods of the exact solution of the Korteweg-de Vries equation on the world level series actual problems were solved, including of the following scientific results were obtained: were solved inverse problems of quantum scattering theory on the entire line and on the half line (University of Oxford, Higher Technical Educational Institutions “Clarkson College”, the Brooklyn Polytechnic Institute, Physical-Technical Institute of Low Temperatures, St.Petersburg State University); were proved uniqueness of the inverse spectral problem for the Sturm-Liouville problem in various productions (Pulkovo Observatory, Swedish Royal University, Institute of Theoretical Geophysics, Physical-Technical Institute of Low Temperatures); was solved the Korteweg-de Vries equation in the class of "rapidly decreasing" functions (Laboratory of Plasma Physics at Princeton University, the Institute of Mathematical Sciences named after R.Kurant); was solved Korteweg-de Vries equation in the class of almost periodic functions (Moscow State University, St.Petersburg State University); were found almost periodic solutions modified nonlinear Schrodinger equation (Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of Ukraine); were solved inverse problems of quantum scattering theory on the entire line in a class perturbed finite-gap potentials (University of Vienna, Institute Erwin Schrodinger); were solved inverse problems for differential operators with the complex-valued and matrix-valued coefficients in a finite interval by the Weyl-Titchmarsh’s function (Saratov State University); were developed methods of calculation for regularized traces of higher orders differential operators, were solved inverse problems for differential operators with singular coefficients (Moscow State University); were solved inverse problems for differential operators with non-separated boundary conditions and boundary conditions depending from spectral parameter (Bashkir State University); were established connections between the class of smoothness of periodic potential and decrease the lengths of the gaps for the operator of Sturm-Liouville (Ohio State University, Sofia University, University of Stuttgart).

In present time are carried out foreground scientific research work on developing the theory of inverse spectral problems for differential and difference operators with periodic matrix coefficients; for differential and difference operators on graphs; development of a method of inverse spectral problems for the solution of nonlinear evolution equations of mathematical physics, spatial variable which belongs to the graph; finding a stable algorithms for numerical realizations.

The degree of scrutiny of the problem. The inverse problem for the Sturm-Liouville operator with a periodic, not necessarily finite-zone, potential was studied in the works of I.V.Stankevich, V.A.Marchenko, I.V.Ostrovskiy, H.P.McKean and E.Trubowitz. With the help of the inverse problem for the Sturm-Liouville operator with a periodic potential in the works S.P.Novikov, B.A.Dubrovin, A.R.Its, V.B.Matveev, P.Lax and others proved complete integrability of Korteweg-de Vries equation without a source, in the class of finite zone functions.

The inverse problem for the Dirac system was studied in the works M.G.Gasymov, B.M.Levitan, V.E. Zakharov, A.B.Shabat and others. In the works of V.E.Zakharov, A.B.Shabat, S.V.Manakov, the method of the inverse problem for the Dirac operator, was established the complete integrability of the nonlinear Schrodinger equation in the class of rapidly decreasing functions. Analogous results in the class of periodic or finite zone functions were obtained in the works of A.R.Its, V.P.Kotlyarov, A.O.Smirnov and others.

The inverse problem for the quadratic pencil of Sturm-Liouville equations in the class of “rapidly decreasing” coefficients by scattering data on the half line and whole line was solved in the works of M.Jaulent, I.Miodek, C.Jean; via Veyl-Titchmarsh’s function in the work of V.A.Yurko; on the finite interval by spectrum and normalization constants, also by two spectrum was studied in the work of M.G.Gasimov, G.Sh.Guseinov; with periodical potential on the whole line considered in the works of G.Sh.Guseinov; with finite zone periodical potential on the half line is studied in the works of B.A.Babazhanov and A.B.Khasanov.

The system of Kaup, in the class of rapidly decreasing functions was solved by D.J.Kaup, and in a class of finite-gap potentials in the works V.B.Matveev, M.I.Yavor, A.O.Smirnov and others.

The inverse problem for the Sturm-Liouville problem was studied in the works of N.I.Ahiezer, H.Hochstadt, W.Goldberg, B.M.Levitan and A.V.Savin in the case of a finite-gap potential on the half-line. The inverse problem on the half-line differs from the inverse problem on the entire line. In the case of the half-line, in addition to the potential, one should reconstruct the boundary condition via the spectral data.

Connection of the theme of the dissertation with the research works of higher education, where the dissertation is carried out. The research was performed in accordance with the plan of scientific research OT-F1-002 “Direct and inverse spectral problems for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators” (2007-2011.) of the Urgench State University.

The aim of the research is solution to the inverse spectral problems for differential operators with periodical coefficients and their applications to solutions nonlinear evolution equations in the class of periodic functions, proof of the analogue of the inverse theorem of Borg in the case of Dirac operator, solving inverse spectral problems on the half line for the Sturm-Liouville operator and for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with a periodic potential.

Research problems of this work are following:

proof of complete integrability of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions;

obtaining identities for the squares of the components of the vector eigenfunctions of problems for Dirac's system of equations with periodic and antiperiodic boundary conditions;

proof of complete integrability of the nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source in the class of periodic functions;

proof of theorems about a relationship between analyticity potential with exponential decrease of lengths of the gaps of a quadratic pencil of Sturm-Liouvill operators;

proof of the analogue of the inverse theorem of Borg in the case of quadratic pencil of Sturm-Liouvill operators;

proof of complete integrability of the Kaup's system with self-consistent source in the class of periodic functions;

The object of research. Sturm-Liouville's operator, Dirac's operator, the quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators.

The subject of research. The inverse spectral problems for Sturm-Liouville's operator, Dirac's operator and quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators and their applications to integration nonlinear evolution equations.

Methods of research. In the dissertation the methods of mathematical physics, functional analysis and the theory of functions of complex variable are used.

Scientific novelty consists of the following:

complete integrability of the Korteweg-de Vries equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved;

the analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of Dirac operator;

identities for the squares of the components of the vector eigenfunctions of problems for Dirac's system of equations with periodic and antiperiodic boundary conditions are obtained;

complete integrability of the nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved;

the theorems about a relationship between analyticity potential with exponential decrease of lengths of the gaps of a quadratic pencil of Sturm-Liouvill operators are proved;

the analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators;

complete integrability of the Kaup's system with self-consistent source in the class of periodic functions is proved;

the inverse spectral problems for Sturm-Liouville's operator and for quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators with periodic potential in half-line are solved.

Practical results of the research is consist of the possibility of applying the obtained corollaries about analyticity of the solutions of nonlinear equations over the spatial variable to the numerical calculations.

The reliability of the research results is substantiated by the strictness of mathematical reasoning and the use of methods of mathematical physics, functional analysis and theory of functions of complex variables in solving inverse spectral problems for differential operators with periodic coefficients and their application to solving nonlinear evolution equations in the class of periodic functions.

The scientific and practical significance of the research results. The scientific value of the results of research is that the results obtained in the work can be used in the spectral theory of linear operators, in the hydrodynamics and in the quantum physics.

The practical significance of the research is determined by applying the obtained scientific results in mathematical physics in the integration of nonlinear evolution equations.

Implementation of the research results. Theorems relating the analyticity potential with the exponential decrease of the lengths of the gaps and the analogue of inverse theorem of Borg in the case of the quadratic pencil of Sturm-Liouville's operators, results of the dissertation about the integration of the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source as well as the method of differentiation of the spectral parameters used in foreign grant project MTM2010-15314 (Institute of Mathematics at the University of Santiago de Compostela, Spain, Confirmation dated May 25th, 2015) in the proofs of theorems on the sign of the Green's function for second order differential equations, for the solving Toda lattice with integral self-consistent source.

Approbation of the research results. The main content of the dissertation were discussed at the following international and republican scientific conferences: "Differential equations with partial derivatives and related problems of analysis and informatics" (Tashkent, 2004), at the international scientific conference "Modern problems of mathematical physics and information technology" (Tashkent, 2005), at the international conference "Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technology - Al-Khorezmy 2009" (Tashkent, 2009), in the republican scientific conference "Actual problems of mathematical analysis" (Urgench, 2012), in the republican scientific conference with foreign participants from the CIS countries "Modern problems of differential equations and their applications" (Tashkent, 2013), in the republican scientific conference with foreign participants "Non-classical equations of mathematical physics and their applications" (Tashkent, 2014). This work was discussed at the republican seminars "Modern problems of the theory of partial differential equations" and "Operator algebras and their applications" of the Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan, at the seminar "Modern Problems of Computational Mathematics and Mathematical Physics" of the National University of Uzbekistan, at the city seminar of Department of Algebra and Functional Analysis of the National University of Uzbekistan, at the seminars "The spectral theory of differential operators" of the Department of Mathematical Analysis and "Operators models in mathematical physics" of the Department of Functional Analysis of Moscow State University, at the seminar "Spectral theory of operators and its applications" of the Bashkir State University.

Publications of the research results. 31 works are published on the theme of the dissertation, from which there are 7 articles in national journals, 9 articles in foreign journals, 15 abstracts in scientific conferences.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists of the introduction and four chapters with conclusions, general conclusion and bibliography. The total volume of work is 179 pages, there are 227 names in the list of references.

THE MAIN CONTENT OF THE DISSERTATION

In introduction the actuality and demand of the theme of dissertation is verificated, connection of research to priority directions of development of Science and Technologies of the Republic is stated, review of foreign scientific research on the theme of the dissertation and the degree of scrutiny of the problem are provided, the aim and problems are formulated, the object and the subject of research are described, scientific novelty and practical results of research are stated, the theoretical and practical significance of obtained results is revealed, the implementation of research results in practice and date on published works and dissertation structure are given.

In the first chapter of dissertation which named **«The inverse problem for the Sturm-Liouville's operator with a periodic potential on the whole line»,** by the method of inverse spectral problem for the Sturm-Liouville's operator with a periodic potential, complete integrability of the Korteweg-de Vries equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved.

In the first and second paragraph of the first chapter for the sake of completeness provides facts related to the inverse spectral problem on the whole line for the Sturm-Liouville operator with a periodic potential.

We consider the following Sturm-Liouville operator

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda\, y, \quad x \in R^1, \tag{1}$$

where $q(x) \in C^1(R^1)$ is the real function with period π.

We denote by $c(x,\lambda)$ and $s(x,\lambda)$ solutions of equation (1) satisfying the initial conditions $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$ and $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$. The function $\Delta(\lambda) = c(\pi,\lambda) + s'(\pi,\lambda)$ called as Lyapunov's function or Hill's discriminant of equation (1). The following solutions

$$\psi_{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s'(\pi,\lambda) - c(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s(\pi,\lambda)} s(x,\lambda)$$

are called as solutions of Floquet of equation (1).

The spectrum of operator (1) has the form

$$E=\{\lambda\in R^1:\ -2\le\Delta(\lambda)\le 2\}=R^1\setminus\left\{(-\infty,\lambda_0)\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})\right\}.$$

The intervals $(-\infty,\lambda_0)$ and $(\lambda_{2n-1},\lambda_{2n})$, $n=1,2,...$ are called lacunas.

We denote by ξ_n, $n=1,2,...$ the eigenvalues of the Dirichlet problem for equation (1). It is not difficult to see, that $\xi_n\in[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$, $n=1,2,...$.

Definition 1. The numbers ξ_n, $n=1,2,...$ with signs $\sigma_n=sign\{s'(\pi,\xi_n)-c(\pi,\xi_n)\}$, $n=1,2,...$ are called as spectral parameters of the problem (1).

Definition 2. Boundaries of the spectrum λ_n, $n=0,1,2,...$ and spectral parameters ξ_n,σ_n, $n=1,2,...$ are called as the spectral data of (1).

Finding the spectral data of the problem (1) is called the direct problem and conversely, restoration of the potential $q(x)$ of the problem (1) by means of the spectral data is called the inverse problem.

In third paragraph of first chapter the method of inverse spectral problem for the Sturm-Liouville operator is applied to the integration of the the Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source in the class of periodic functions.

We consider the KdV equation with self-consistent source

$$q_t=q_{xxx}-6qq_x+$$

$$+2\int_0^{\infty}\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\big(\psi_+(x,\lambda,t)\cdot\psi_-(x,\lambda,t)\big)_x\,d\lambda\,,\quad t>0,\quad x\in R^1,\qquad(2)$$

with the initial conditions

$$q(x,t)\big|_{t=0}=q_0(x)\,.\qquad(3)$$

Find the real function $q=q(x,t)$, which is π-periodic with respect to the variable x and satisfies the smoothness conditions:

$$q(x,t)\in C_x^3(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\ge 0)\,.\qquad(4)$$

Here $\beta(\lambda,t)\in C\big([0,\infty)\times[0,\infty)\big)$ is a given real function having a uniform asymptotic behavior $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-1}),\ \lambda\to\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ are the Floquet's solutions (normalized by the condition $\psi_\pm(0,\lambda,t)=1$) of the Sturm-Liouville's equation

$$L(t)y\equiv -y''+q(x,t)y=\lambda y\,,\ \ x\in R^1\qquad(5)$$

$s(x,\lambda,t)$ is the solution of the equation (5) satisfying the initial conditions $s(0,\lambda,t)=0$, $s'(0,\lambda,t)=1$. We denote by λ_k, $(k\ge 0)$ the eigenvalues of the periodic or antiperiodic problem for the equation (5).

The main result of the third paragraph of first chapter is included in the following theorem.

Theorem 1. If $(q(x,t),\ \psi_+(x,\lambda,t),\ \psi_-(x,\lambda,t))$ is the solution of the problem (2)-(5), then the spectrum of the Sturm-Liouville's problem with potential $q(x+\tau,t)$ does not depend on τ and t, and the spectral parameters $\xi_n(\tau,t)$, $n=1,2,...$ satisfy the analogue of the system of Dubrovin's equations:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0)\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times$$

$$\times\left\{2q(\tau,t) + 4\xi_n + \int_0^{\infty}\frac{s(\pi,\lambda,t,\tau)\beta(\lambda,t)}{\xi_n - \lambda}d\lambda\right\},\ n \geq 1. \tag{6}$$

The sign $\sigma_n(\tau,t)$ changes in each collision of the spectral parameter $\xi_n(\tau,t)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Using the trace formulas

$$q(\tau,t) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(\tau,t)) \tag{7}$$

and the expansion

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(\tau,t) - \lambda}{k^2}$$

we can rewrite system (6) in closed form.

Corollary 1. The system (6) and trace formulas provides a method for solving the problem (2)-(5). For this, in the first we find the spectral datas λ_n, $n \geq 0$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ of Sturm-Liouvelle's equation, corresponding to the potential $q(x+\tau,0) = q_0(x+\tau)$. Next we solve the Cauchy problem $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n \geq 1$ for the Dubrovin's system of equation (6) and by using the trace formulas (7) we get $q(\tau,t)$. After that, it is not difficult to find the Floquet's solutions $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$.

Corollary 2. If initial function $q_0(x)$ is real analytical function, then $q(x,t)$ also is real analytical function on x.

Corollary 3. If number π / n is period of initial function $q_0(x)$, then number π / n is period of $q(x,t)$ on x. Here $n \geq 2$ natural number.

In fourth paragraph of first chapter the Korteweg-de Vries equation with a free term independent of the spatial variable is integrated in the class of periodic functions.

In the second chapter of dissertation which named **«The inverse problem for the Dirac's operator with a periodic potential on the whole line»,** the analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of Dirac operator, the identities for the squares of the components of the vector eigenfunctions of problems for Dirac's system of equations with periodic and antiperiodic boundary conditions are obtained, also by the method of inverse spectral problem for the Dirac's operator with a periodic potential, complete integrability of the nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved.

In first paragraph of second chapter provides facts related to the inverse spectral problem on the whole line for the Dirac's operator with a periodic potential.

We consider the following system of equations on the whole line

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \ x \in R^1, \tag{8}$$

where $p(x), q(x) \in C^1(R^1)$ are real functions with period π.

We denote by $c(x,\lambda) = (c_1(x,\lambda), c_2(x,\lambda))^T$ and $s(x,\lambda) = (s_1(x,\lambda), s_2(x,\lambda))^T$ the solutions of equation (8), which satisfy the initial conditions $c(0,\lambda) = (1, 0)^T$ and $s(0,\lambda) = (0,1)^T$. The function $\Delta(\lambda) = c_1(\pi,\lambda) + s_2(\pi,\lambda)$ is called as Lyapunov's function or Hill's discriminant of operator (8). In this case, Floquet's solutions (normalized by condition $\psi_1^{\pm}(0,\lambda) = 1$) has the form

$$\psi^{\pm}(x,\lambda) = c(x,\lambda) + \frac{s_2(\pi,\lambda) - c_1(\pi,\lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi,\lambda)} s(x,\lambda).$$

The spectrum of operator (8) coincide with the following set

$$E = \{\lambda \in R^1 : -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\} = R^1 \setminus \left\{ \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}.$$

The intervals $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in Z$ are called as lacunas.

Let ξ_n, $n \in Z$ be the roots of the equation $s_1(\pi,\lambda) = 0$. The following inclusions $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in Z$ are fulfilled.

Definition 3. The numbers $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$ with signs $\sigma_n = sign\{s_2(\pi,\xi_n) - c_1(\pi,\xi_n)\}$, $n \in Z$ are called as the spectral parameters of the problem (8).

Definition 4. The boundaries of the spectrum λ_n, $n \in Z$ and the spectral parameters ξ_n, σ_n, $n \in Z$ are called as the spectral data of problem (8).

The finding of the spectral data of the problem (8) is called as the direct problem and conversely, restoration of the coefficients $p(x)$ и $q(x)$ of the problem (8), by means of the spectral data, is called as the inverse problem.

If in the problem (8) instead of $p(x)$ and $q(x)$ we consider $p(x+\tau)$ and $q(x+\tau)$, then the spectrum of obtained problem does not depend on the parameter τ: $\lambda_n(\tau) \equiv \lambda_n$, $n \in Z$, but spectral parameters depend from τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z$. These spectral parameters satisfy the analogue of the system of Dubrovin's equations:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = (-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times \sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty, \\ k \ne n}}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n)(\lambda_{2k} - \xi_n)}{(\xi_k - \xi_n)^2}} \times$$

$$\times [2\xi_n + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k)], \ n \in Z.$$

The sign $\sigma_n(\tau)$ changes in each collision of the spectral parameter $\xi_n(\tau)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

The system of Dubrovin's equations and the following trace formulas

$$p(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left((\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k})/2-\xi_k(\tau)\right),$$

$$q(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau)\sqrt{(\xi_n(\tau)-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n(\tau))}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n(\tau))(\lambda_{2k}-\xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau)-\xi_n(\tau))^2}}$$

provide a method of solving of the inverse spectral problem.

In second paragraph of second chapter two analogues of the inverse theorem of Borg are proved in the case of Dirac operator.

Theorem 2. Number $\pi/2$ is period of coefficients $p(x)$ and $q(x)$ of system (8) if and only if when all eigenvalues of antiperiodical problem ($y(0)=-y(\pi)$) for system (8) are double.

Theorem 3. If all eigenvalues of periodical problem ($y(0)=y(\pi)$) for system (8) are double, then $\pi/2$ is antiperiod of coefficients $p(x)$ and $q(x)$ of system (8), that is following identities $p(x+\pi/2)=-p(x)$, $q(x+\pi/2)=-q(x)$ are fulfilled.

In third paragraph of second chapter identities for the squares of the components of the vector eigenfunctions of problems for Dirac's system of equations with periodic and antiperiodic boundary conditions are obtained.

Theorem 4. Let

$$\ldots,\, y_{-2}(x),\, y_{-1}(x),\, y_0(x),\, y_1(x),\, y_2(x),\ldots$$

be normalized vector eigenfunctions (of the periodic or antiperiodic problem for system (8) on the closed interval $[0,\pi]$) corresponding to the eigenvalues $\ldots\le\lambda_{-2}<\lambda_{-1}\le\lambda_0<\lambda_1\le\lambda_2<\ldots$. Then the following identities are fulfilled:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k y_{2k-1,1}^2(t)=-p(t)+\frac{c}{2},\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k y_{2k,1}^2(t)=p(t)+\frac{c}{2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k y_{2k-1,2}^2(t)=p(t)+\frac{c}{2},\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k y_{2k,2}^2(t)=-p(t)+\frac{c}{2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k y_{2k-1,1}(t)y_{2k-1,2}(t)=q(t),\quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k y_{2k,1}(t)y_{2k,2}(t)=-q(t),$$

where

$$a_k=\frac{-\Delta'(\lambda_{2k-1})}{f'(\lambda_{2k-1})},\quad b_k=\frac{\Delta'(\lambda_{2k})}{g'(\lambda_{2k})},\quad c=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\lambda_{2k}-\lambda_{2k-1}),$$

$$f(\lambda)=\pi(\lambda-\lambda_{-1})\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k-1}-\lambda}{k}\cdot\frac{\lambda_{-2k-1}-\lambda}{-k},$$

$$g(\lambda)=\pi(\lambda-\lambda_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{2k}-\lambda}{k}\cdot\frac{\lambda_{-2k}-\lambda}{-k}.$$

In fourth paragraph of second chapter by the method of inverse spectral problem for the Dirac's operator with periodic potential the nonlinear Schrodinger equation with a self-consistent source is integrated in the class of periodic functions.

We consider the following nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source

$$u_t = 2iu|u|^2 - iu_{xx} + \int_{-\infty}^{\infty} i\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t)(\psi_1^+ - i\psi_2^+)(\psi_1^- - i\psi_2^-)d\lambda\,,\ t>0\,,\ x\in R^1 \quad (9)$$

coupled with the initial condition

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u_0(x)\,. \quad (10)$$

We look for complex-valued solution that is π-periodic on the partial variable x and satisfy the following regularity assumptions:

$$u(x,t)\in C_x^2(t>0)\cap C_t^1(t>0)\cap C(t\geq 0). \quad (11)$$

Here $\beta(\lambda,t)\in C(R^1\times[0,\infty))$ is a given real function having a uniform asymptotic behavior $\beta(\lambda,t)=O(\lambda^{-2}),\ \lambda\to\pm\infty,\quad \psi^{\pm}=(\psi_1^{\pm}(x,\lambda,t),\psi_2^{\pm}(x,\lambda,t))^T$ are the Floquet's solutions (normalized by the condition $\psi_1^{\pm}(0,\lambda,t)=1$) of the Dirac's equation

$$L(t)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x,t) & q(x,t) \\ q(x,t) & -p(x,t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ x\in R^1 \quad (12)$$

where $p(x,t)=-\mathrm{Re}(u(x,t))$ and $q(x,t)=\mathrm{Im}(u(x,t))$. $s_1(x,\lambda,t)$ is the first component of the solution $s(x,\lambda,t)$ of the equation (12) satisfying the initial condition $s(0,\lambda,t)=(0,1)^T$.

The main result of the fourth paragraph of second chapter is included in the following theorem.

Theorem 5. Let $(u(x,t),\psi^+(x,\lambda,t),\psi^-(x,\lambda,t))$ be the solution of the problem (9)-(12). Then the spectrum of the Dirac's operator with coefficients $p(x+\tau,t)=-\mathrm{Re}(u(x+\tau,t))$ and $q(x+\tau,t)=\mathrm{Im}(u(x+\tau,t))$ does not depend on τ and t, and the spectral parameters $\xi_n(\tau,t)$, $n\in Z$ satisfy the analogue of the system of Dubrovin's equations:

$$\frac{\partial\xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}}\times$$

$$\times\{q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)+[p(\tau,t)+\xi_n]^2+\xi_n^2+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta(\lambda,t)s_1(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n-\lambda}d\lambda\}. \quad (13)$$

The sign $\sigma_n(\tau,t)$ changes in each collision of the spectral parameter $\xi_n(\tau,t)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1},\lambda_{2n}]$.

Using the trace formulas

$$p(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}+\lambda_{2k}}{2}-\xi_k(\tau,t)\right), \quad (14)$$

$$q^2(\tau,t)+q_x(\tau,t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\lambda_{2k-1}^2+\lambda_{2k}^2}{2}-\xi_k^2(\tau,t)\right)$$

and the expansion

$$s_1(\pi,\lambda,t,\tau)=\pi\prod_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{a_k},\ (a_0=1,\ a_k=k,\ k\neq 0)$$

we can rewrite system (13) in closed form.

Corollary 4. This theorem provides a method for solving the problem (9)-(12). For this, in the first we find the spectral datas λ_n, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ corresponding to the coefficients $p_0(x+\tau)$ and $q_0(x+\tau)$. Next we solve the Cauchy problem $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0}=\sigma_n^0(\tau)$, $n\in Z$ for the system (13). After that, by using the trace formulas (14) and

$$q(\tau,t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n-1}\sigma_n(\tau,t)\sqrt{(\xi_n-\lambda_{2n-1})(\lambda_{2n}-\xi_n)}\cdot\sqrt{\prod_{\substack{k=-\infty\\ k\neq n}}^{\infty}\frac{(\lambda_{2k-1}-\xi_n)(\lambda_{2k}-\xi_n)}{(\xi_k-\xi_n)^2}},$$

we obtain the expressions of $p(x,t)$ and $q(x,t)$. With their help, we construct a solution of problem (9)-(12). Then it is not difficult to find the Floquet's solutions $\psi^{\pm}(x,\lambda,t)$.

Corollary 5. If initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ are real analytical function, then $p(x,t)$ and $q(x,t)$ also are real analytical functions on x.

Corollary 6. If number $\pi/2$ is period of initial function $u_0(x)$, then number $\pi/2$ will be period of $u(x,t)$ on x.

In the third chapter of dissertation which named **«The inverse problem for the quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators with a periodic potential on the whole line»,** the theorems about a relationship between analyticity potential with exponential decrease of lengths of the gaps of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators are proved, the analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators, also by the method of inverse spectral problem for the quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators with a periodic coefficients, complete integrability of the Kaup's system with self-consistent source in the class of periodic functions is proved.

In the first paragraph of the third chapter the necessary information about the inverse problem for a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators with a periodic potential on the whole line are given.

We consider the equation

$$T(\lambda)y\equiv -y''+q(x)y+2\lambda p(x)y-\lambda^2 y=0,\ \ x\in R^1. \qquad (15)$$

Here $p(x)\in C^2(R^1)$ and $q(x)\in C^1(R^1)$ are the given real-valued π- periodic functions such that for any function $y(x)\in W_2^2[0,\pi]$ satisfying the equalities $y'(0)\bar{y}(0)-y'(\pi)\bar{y}(\pi)=0$ and $(y,y)=1$ the following inequality holds:

$$(py,y)^2+(qy,y)+(y',y')>0,$$

where $(\cdot\,,\cdot)$ is a scalar product of the space $L_2(0,\pi)$. The last condition we will call condition (A).

In this case, the spectrum of the quadratic pencil (15) is continuous and coincides with the set

$$E \equiv \{\lambda : -2 \le \Delta(\lambda) \le 2\} = R^1 \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (\lambda_k^-, \lambda_k^+).$$

Lacuna which containing the point $\lambda = 0$ (we denote by $(\lambda_0^-, \lambda_0^+)$) is always a non-degenerate. Here $\Delta(\lambda) = c(\pi, \lambda) + s'(\pi, \lambda)$, we denote by $c(x, \lambda)$ and $s(x, \lambda)$ solutions of equation (15) satisfying the initial conditions $c(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = 0$ and $s(0, \lambda) = 0$, $s'(0, \lambda) = 1$.

We denote by ξ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ the eigenvalues of the Dirichlet problem for equation (15). It is not difficult to see, that $\xi_n \in [\lambda_n^-, \lambda_n^+]$, $n \in Z \setminus \{0\}$.

Definition 5. The numbers ξ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ with signs $\sigma_n = sign\{s'(\pi, \xi_n) - c(\pi, \xi_n)\}$, $n \in Z \setminus \{0\}$ are called as spectral parameters of the problem (15).

Definition 6. Boundaries of the spectrum $\lambda_n^\pm$, $n \in Z$ and spectral parameters ξ_n, σ_n, $n \in Z \setminus \{0\}$ are called as the spectral data of problem (15).

Finding the spectral data of the problem (15) is called the direct problem and conversely, restoration of the coefficients $p(x)$ and $q(x)$ of the problem (15) by means of the spectral data is called the inverse problem.

If in the problem (15) instead of $p(x)$ and $q(x)$ we consider $p(x+\tau)$ and $q(x+\tau)$, then the spectrum of obtained problem does not depend on the parameter τ: $\lambda_n^\pm(\tau) \equiv \lambda_n^\pm$, $n \in Z$, but spectral parameters depend from τ: $\xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$. These spectral parameters satisfy the analogue of the system of Dubrovin's equations:

$$\frac{d\xi_n}{d\tau} = 2(-1)^{n-1} sign(n) \sigma_n(\tau) \sqrt{(\xi_n - \lambda_n^-)(\lambda_n^+ - \xi_n)} \times$$

$$\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_0^-)(\xi_n - \lambda_0^+) \prod_{k \ne n, 0} \frac{(\xi_n - \lambda_k^-)(\xi_n - \lambda_k^+)}{(\xi_n - \xi_k)^2}}, \quad n \in Z \setminus \{0\}.$$

The sign $\sigma_n(\tau)$ changes in each collision of the spectral parameter $\xi_n(\tau)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_n^-, \lambda_n^+]$.

The system of Dubrovin's equations and the following trace formulas

$$p(\tau) = \frac{\lambda_0^+ + \lambda_0^-}{2} + \sum_{0 \ne k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k^+ + \lambda_k^-}{2} - \xi_k(\tau) \right),$$

$$q(\tau) + 2p^2(\tau) = \frac{(\lambda_0^+)^2 + (\lambda_0^-)^2}{2} + \sum_{0 \ne k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_k^+)^2 + (\lambda_k^-)^2}{2} - \xi_k^2(\tau) \right)$$

provide a method of solving of the inverse spectral problem.

In the second paragraph of the third chapter, by using a system of Dubrovin equations and trace formulas, the theorems about a relationship between analyticity potential with exponential decrease of lengths of the gaps of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators are proved.

Theorem 6. If $p(x), q(x) \in C^2(R^1)$ are π-periodic real functions and the gap lengths $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ are exponentially decreasing, i.e., there exist constants $a > 0$ and $b > 0$ such that $\lambda_n^+ - \lambda_n^- < ae^{-b|n|}$, $n \in Z$, then $p(x)$ and $q(x)$ are real analytic functions on the entire real line.

Theorem 7. If $p(x)$ and $q(x)$ are real analytic π-periodic functions, then the gap lengths $\lambda_n^+ - \lambda_n^-$ decrease exponentially.

In the third paragraph of third chapter analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of quadratic pencil of Sturm-Liouville operators.

Theorem 8. Number $\pi/2$ is period of coefficients $p(x)$ and $q(x)$ of equation (15) if and only if when all eigenvalues of antiperiodical problem for the equation (15) are double.

In the fourth paragraph of the third chapter the method of inverse spectral problem for the quadratic pencil of Sturm-Liouville's equations with periodic coefficients is used to solve of the system of Kaup equations with a self-consistent source in the class of periodic functions.

We consider the system of Kaup equations with a self-consistent source

$$p_t = -6pp_x - q_x + \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t))_x d\lambda, \qquad (16)$$

$$q_t = p_{xxx} - 4qp_x - 2pq_x + 2\int_{-\infty}^{\infty} \beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t)\{-p_x \cdot \psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t) +$$
$$+ (\lambda - 2p)\cdot(\psi_+(x,\lambda,t)\psi_-(x,\lambda,t))_x\} d\lambda, \qquad (17)$$

with the initial conditions

$$p(x,t)\big|_{t=0} = p_0(x), \qquad q(x,t)\big|_{t=0} = q_0(x), \qquad (18)$$

in the class of real-valued π-periodic on the spatial variable x functions $p = p(x,t)$ and $q = q(x,t)$ which satisfy the regularity of assumptions

$$p(x,t) \in C_x^3(t>0) \cap C_t^1(t>0) \cap C(t \ge 0),\ q(x,t) \in C^1(t>0) \cap C(t \ge 0).$$

Here $p_0(x) \in C^3(R)$, $q_0(x) \in C^2(R)$ are given real-valued π-periodic functions satisfying condition (A), $\beta(\lambda,t)$ is a given real-valued continuous function having a uniform asymptotic behavior $\beta(\lambda,t) = O(\lambda^{-2})$, $\lambda \to \pm\infty$, $\psi_\pm(x,\lambda,t)$ are the Floquet's solutions (normalized by the condition $\psi_\pm(0,\lambda,t) = 1$) of the equation

$$-y'' + q(x,t)y + 2\lambda\, p(x,t)y - \lambda^2 y = 0,\ \ x \in R^1. \qquad (19)$$

We denote by $s(x,\lambda,t)$ is the solution of the equation (19) satisfying the initial conditions $s(0,\lambda,t) = 0$, $s'(0,\lambda,t) = 1$.

The main result of the third paragraph of third chapter is included in the following theorem.

Theorem 9. Let ($p(x,t)$, $q(x,t)$, $\psi_+(x,\lambda,t)$, $\psi_-(x,\lambda,t)$) be the solution of the problem (16)-(19). Then the spectrum of the quadratic pencil of Sturm-Liouville's operators with coefficients $p(x+\tau,t)$ and $q(x+\tau,t)$ does not depend on τ and t, and the spectral parameters $\xi_n(\tau,t)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ satisfy the analogue of the system of Dubrovin's equations:

$$\frac{\partial \xi_n}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau,t) \cdot sign(n) \cdot \sqrt{(\xi_n - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n)} \times$$
$$\times \sqrt{(\xi_n - \lambda_{-1})(\xi_n - \lambda_0) \prod_{k \neq n,0} \frac{(\xi_n - \lambda_{2k-1})(\xi_n - \lambda_{2k})}{(\xi_n - \xi_k)^2}} \times$$
$$\times \left\{ 2p(\tau,t) + 2\xi_n + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta(\lambda,t)s(\pi,\lambda,t,\tau)}{\xi_n - \lambda} d\lambda \right\}. \tag{20}$$

The sign $\sigma_n(\tau,t)$ changes in each collision of the spectral parameter $\xi_n(\tau,t)$ with the boundaries of its gap $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$.

Using the trace formulas

$$p(\tau,t) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau,t) \right) \tag{21}$$

and the expansion

$$s(\pi,\lambda,t,\tau) = \pi \prod_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{k},$$

we can rewrite system (20) in closed form.

Corollary 7. This theorem provides a method for solving the problem (16)-(19). For this, in the first we find the spectral datas λ_n, $n \in Z$, $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ of the quadratic pencil of Sturm-Liouville's operators corresponding to the coefficients $p_0(x+\tau)$ and $q_0(x+\tau)$. Next we solve the Cauchy problem $\xi_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n(\tau,t)\big|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau)$, $n \in Z \setminus \{0\}$ for the system (20). After that, by using the trace formulas (21) and

$$q(\tau,t) + 2p^2(\tau,t) = \frac{(\lambda_{-1})^2 + (\lambda_0)^2}{2} + \sum_{0 \neq k = -\infty}^{\infty} \left(\frac{(\lambda_{2k-1})^2 + (\lambda_{2k})^2}{2} - \xi_k^2(\tau,t) \right)$$

we obtain the expressions of $p(\tau,t)$ and $q(\tau,t)$. Then it is not difficult to find the Floquet's solutions $\psi_{\pm}(x,\lambda,t)$.

Corollary 8. If initial functions $p_0(x)$ and $q_0(x)$ are real analytical function, then $p(x,t)$ and $q(x,t)$ also are real analytical functions on x.

Corollary 9. If number $\pi/2$ is period of initial function $p_0(x)$ and $q_0(x)$, then number $\pi/2$ will be period of $p(x,t)$ and $q(x,t)$ on x.

In the fourth chapter of dissertation which named **«The inverse problem for the Sturm-Liouville's operator and for the quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators with a periodic potential in the halfline»,** the inverse spectral problems for Sturm-Liouville's operator and for quadratic pencil of Sturm-Liouvill's operators with periodic potential in halfline are solved.

In the first paragraph of the fourth chapter the inverse spectral problem for the Sturm-Liouville operator with a periodic potential on a half-line is studied; more precisely, we derive a formula expressing the boundary condition via the spectral data and an analog of Dubrovin's system differential equations and suggest an algorithm for its construction.

On the half-line, consider the boundary value problem

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y\,, \quad 0 < x < \infty \tag{22}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\,, \quad \alpha \in (0, \pi)\,, \tag{23}$$

where $q(x) \in C^1(R^1)$ is a π-periodic real function. By $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ and $\varphi(x,\lambda)$, we denote the solutions of equation (22) satisfying the initial conditions $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$ and $\varphi(0,\lambda)=-\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda)=\cos\alpha$.

The Weil-Titchmarch function for problem (22), (23) has the form

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{[s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)]\cos 2\alpha - [s(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda)]\sin 2\alpha - \sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha + 2[s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda)]\sin\alpha\cos\alpha - 2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{24}$$

Therefore, the continuous spectrum of problem (22), (23) is the set

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ (-\infty, \lambda_0) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right\}. \tag{25}$$

The intervals $(-\infty, \lambda_0)$ and $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n = 1, 2, \ldots$ are called lacunas. The ends of the lacunas consist of zeros of the function $\Delta^2(\lambda)-4$.

By ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ we denote the roots (of the denominator in the expression (24)) of the equation $\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha + \varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha = 0$.

Note that the ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ coincide with the eigenvalues of the regular problem for equation (22) with the boundary conditions

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0\,, \; y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha = 0$$

and the inclusions $\xi_0 \in (-\infty, \lambda_0]$, $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n = 1, 2, \ldots$ hold.

Definition 7. The numbers ξ_n with signs $\sigma_n = sign\left\{ \dfrac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)} - \dfrac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha} \right\}$, $n \ge 0$ are called as spectral parameters of the problem (22), (23).

Definition 8. Boundaries of the continuous spectrum λ_n, $n \ge 0$ and spectral parameters ξ_n, σ_n, $n \ge 0$ are called as the spectral data of problem (22), (23).

Finding the spectral data of the problem (22), (23) is called the direct problem and conversely, restoration of the potential $q(x)$ and $ctg\alpha$ of the problem (22), (23) by means of the spectral data is called the inverse problem.

The connection between spectral data and boundary condition we formulate in the following theorem.

Theorem 10. Let $q(x) \in C^1[0,\infty)$ is a π-periodic real potential of the Sturm-Liouville problem (22), (23). Then the following formula holds

$$ctg\alpha = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}}{A_1'(\xi_n)},$$

where

$$A_1(\lambda) = 2\pi(\xi_0 - \lambda)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n - \lambda}{n^2}.$$

The following theorem about evolution of spectral data.

Theorem 11. Let problem (22), (23) has continuous spectrum (25) and spectral parameters ξ_n, σ_n, $n \ge 0$. Then for any real parameter t, the following Sturm-Liouville's problem

$$L(t)y \equiv -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \ \ 0 < x < \infty$$
$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \ \ \alpha \in (0, \pi),$$

has the same continuous spectrum E_{ess}, and the spectral parameters $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t)$, $n \ge 0$ satisfy Dubrovin's differential equations

$$\dot{\xi}_0(t) = 2\sigma_0(t)\sqrt{\lambda_0 - \xi_0(t)} \times [\xi_0(t) - q(t) + ctg^2\alpha] \times \sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\xi_0(t) - \lambda_{2k-1})(\xi_0(t) - \lambda_{2k})}{(\xi_k(t) - \xi_0(t))^2}},$$

$$\dot{\xi}_n(t) = 2(-1)^n\sigma_n(t)\sqrt{(\xi_n(t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(t))} \times [\xi_n(t) - q(t) + ctg^2\alpha] \times$$
$$\times\sqrt{\frac{(\xi_n(t) - \lambda_0)}{(\xi_n(t) - \xi_0(t))^2} \cdot \prod_{\substack{k=1\\k\ne n}}^{\infty}\frac{(\xi_n(t) - \lambda_{2k-1})(\xi_n(t) - \lambda_{2k})}{(\xi_k(t) - \xi_n(t))^2}}, \ \ n \ge 1,$$

and the initial conditions

$$\xi_n(t)\big|_{t=0} = \xi_n, \ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0} = \sigma_n, \ \ n \ge 0,$$

in addition, the following trace formula holds:

$$q(t) = 2ctg^2\alpha - \lambda_0 + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k} - 2\xi_k(t)\right).$$

In the second paragraph of the fourth chapter given definition of spectral data for the quadratic pencil of Sturm-Liouville's operators with periodic coefficients on the half line. In third, fourth and fifth paragraphs of the fourth chapter for the quadratic pencil of Sturm-Liouville's operators on the half line we derive a trace formulas, formula expressing the boundary condition via the spectral data and an analog of Dubrovin's system differential equations.

We consider the following quadratic pencil

$$T(\lambda)y \equiv -y'' + q(x)y + 2\lambda p(x)y - \lambda^2 y = 0, \ \ 0 < x < \infty \tag{26}$$

of Sturm-Liouville operators with the boundary condition

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \ \ \alpha \in (0,\pi) \tag{27}$$

where $p(x) \in C^2[0,\infty)$ and $q(x) \in C^1[0,\infty)$ are real π-periodic functions.

We assume that the inequality $(L_0 y, y) > 0$, where $L_0 y \equiv -y'' + q(x)y$, holds for all non zero functions $y(x) \in W_2^2[0,\pi]$, such that

$$[y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha]y'(0) - [y(\pi)\cos\alpha + y'(\pi)\sin\alpha]y'(\pi) = 0.$$

By $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ and $\varphi(x,\lambda)$, we denote the solutions of equation (26) satisfying the initial conditions $c(0,\lambda) = 1$, $c'(0,\lambda) = 0$, $s(0,\lambda) = 0$, $s'(0,\lambda) = 1$ and $\varphi(0,\lambda) = -\sin\alpha$, $\varphi'(0,\lambda) = \cos\alpha$.

The Weil-Titchmarch function for problem (26), (27) has the form

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos 2\alpha-(s(\pi,\lambda)+c'(\pi,\lambda))\sin 2\alpha-\sqrt{\Delta^2(\lambda)-4}}{2s(\pi,\lambda)\cos^2\alpha+2(s'(\pi,\lambda)-c(\pi,\lambda))\cos\alpha\sin\alpha-2c'(\pi,\lambda)\sin^2\alpha}. \tag{28}$$

The function $\Delta(\lambda)=s'(\pi,\lambda)+c(\pi,\lambda)$ is called the Lyapunov function, or the Hill's discriminant, of problem (26), (27). Note that it is independent of α.

It follows from the expression (28) that the continuous spectrum of problem (26), (27) has the form

$$E_{ess}=R^1\setminus\bigcup_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda_n^-,\lambda_n^+). \tag{29}$$

The gap $(\lambda_0^-,\lambda_0^+)$ containing the point $\lambda=0$ is always non-degenerate.

For convenience, we introduce a set of indices: $\Omega=\{\pm 0,\pm 1,...\}$.

By ξ_n, $n\in\Omega$ we denote the roots of the equation

$$\varphi(\pi,\lambda)\cos\alpha+\varphi'(\pi,\lambda)\sin\alpha=0.$$

They coincide with eigenvalues of the regular problem for equation (26) with the boundary conditions

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\quad y(\pi)\cos\alpha+y'(\pi)\sin\alpha=0,$$

and the following inclusions hold: $\xi_{-0}\in[\lambda_0^-,0)$, $\xi_{+0}\in(0,\lambda_0^+]$, $\xi_n\in[\lambda_n^-,\lambda_n^+]$, $n\in Z\setminus\{0\}$.

Definition 9. The numbers ξ_n, $n\in\Omega$ with signs $\sigma_n=sign\left\{\dfrac{\varphi(\pi,\xi_n)}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\varphi(\pi,\xi_n)}\right\}$, $n\in\Omega$ are called as spectral parameters of the problem (26), (27).

Definition 10. Boundaries of the continuous spectrum λ_n^-, λ_n^+, $n\in Z$ and spectral parameters ξ_n,σ_n, $n\in\Omega$ are called as the spectral data of problem (26), (27).

Theorem 12. The following formulas hold

$$p(t)=-\big((\lambda_0^++\lambda_0^-)/2-\xi_{-0}(t)-\xi_{+0}(t)\big)-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\big((\lambda_k^++\lambda_k^-)/2-\xi_k(t)\big),$$

$$q(t)+2p^2(t)=2ctg^2\alpha-\frac{(\lambda_0^+)^2+(\lambda_0^-)^2}{2}+\xi_{-0}^2(t)+\xi_{+0}^2(t)-$$

$$-\sum_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{(\lambda_k^+)^2+(\lambda_k^-)^2}{2}-\xi_k^2(t)\right).$$

Here $\xi_n(t)$, $n\in\Omega$ are the spectral parameters corresponding to the coefficients $p(x+t)$ and $q(x+t)$.

Theorem 13. The following formula holds

$$ctg\alpha=-\sum_{n\in\Omega}\xi_n\frac{\sigma_n\sqrt{\Delta^2(\xi_n)-4}}{A_1'(\xi_n)},$$

where

$$\Delta^2(\lambda)-4=-4\pi^2(\lambda-\lambda_0^-)(\lambda-\lambda_0^+)\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_k^-)(\lambda-\lambda_k^+)}{k^2},$$

$$A_1(\lambda)=2\pi(\lambda-\xi_{-0})(\lambda-\xi_{+0})\prod_{0\neq k=-\infty}^{\infty}\frac{\lambda-\xi_k}{k}.$$

Theorem 14. Let problem (26), (27) has continuous spectrum (29) and spectral parameters ξ_n, σ_n, $n\in\Omega$. Then for any real parameter t, the following problem

$$-y''+q(x+t)y+2\lambda p(x+t)y-\lambda^2 y=0,\ \ 0<x<\infty$$

$$y(0)\cos\alpha+y'(0)\sin\alpha=0,\ \ \alpha\in(0,\pi),$$

has the same continuous spectrum E_{ess}, and the spectral parameters $\xi_n(t), \sigma_n(t)$, $n\in\Omega$ satisfy the system of Dubrovin differential equations:

$$\dot{\xi}_n(t)=\frac{2[(\xi_n^2(t)-2\xi_n(t)p(t)-q(t))+ctg^2\alpha]\sigma_n(t)\sqrt{\Delta^2(\xi_n(t))-4}}{A_1'(\xi_n(t))},\ n\in\Omega,$$

and the initial conditions

$$\xi_n(t)\big|_{t=0}=\xi_n,\ \ \sigma_n(t)\big|_{t=0}=\sigma_n,\ \ n\in\Omega.$$

CONCLUSIONS

1. Complete integrability of the Korteweg-de Vries equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved.

2. The analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of Dirac operator.

3. The identities for the squares of the components of the vector eigenfunctions of problems for Dirac’s system of equations with periodic and antiperiodic boundary conditions are obtained.

4. Complete integrability of the nonlinear Schrodinger equation with self-consistent source in the class of periodic functions is proved.

5. The theorems about a relationship between analyticity potential with exponential decrease of lengths of the gaps of a quadratic pencil of Sturm-Liouville operators are proved.

6. The analogue of the inverse theorem of Borg is proved in the case of quadratic pencil of Sturm-Liouvill’s operators.

7. Complete integrability of the Kaup’s system with self-consistent source in the class of periodic functions is proved.

8. The inverse spectral problems for Sturm-Liouville’s operator and for quadratic pencil of Sturm-Liouvill’s operators with periodic potential in halfline are solved.

Эълон қилинган ишлар рўйхати
Список опубликованных работ
List of published works

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2000. - № 3. - С. 40-46.(01.00.00;№6).
2. Яхшимуратов А.Б., Бабаджанов Б.А. Вычисление регуляризованного следа оператора Дирака с особенностями в потенциале // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2000. - № 5-6. - С. 82-87. (01.00.00;№6).
3. Ибрагимов А.М., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом на полуоси // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2001. - № 5-6. - С. 20-24. (01.00.00;№6).
4. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Вычисление регуляризованного следа оператора Штурма-Лиувилля с особенностью в потенциале // Доклады Академии Наук. - Москва, 2002. - т. 382. - № 2. - С. 170-172. (№ 11. Springer. IF=0.375).
5. Яхшимуратов А.Б., Танирбергенов М.Б. Об обратной задаче рассеяния для системы уравнений Дирака на всей прямой // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2004. - № 4. - С. 64-72. (01.00.00;№6).
6. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Некоторые тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций системы уравнений Дирака с гладкими периодическими коэффициентами // Математические заметки. - Москва, 2004. - т. 76. - вып. 3. - С. 459-465. (№ 11. Springer. IF=0.334).
7. Бабажанов Б.А., Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом // Дифференциальные уравнения. - Минск, 2005. - т. 41. - № 3. - С. 298-305. (№ 11. Springer. IF=0.431).
8. Яхшимуратов А.Б., Аллаберганов О.Р. Обратная задача для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2006. - № 3. - С. 96-107. (01.00.00;№6).
9. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. - Ташкент, 2007. - № 4. - С. 16-19. (01.00.00;№7).
10. Яхшимуратов А.Б., Аллаберганов О.Р. Обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом // Узбекский математический журнал. - Ташкент, 2007. - № 4. - С. 119-130. (01.00.00;№6).

11. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об уравнении Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2010. - т. 164. - № 2. - С. 214-221. (№ 11. Springer. IF=0.801).
12. Yakhshimuratov A. The Nonlinear Schrodinger Equation with a Self-consistent Source in the Class of Periodic Functions // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. - Springer, - Netherlands, 2011. - v. 14. - № 2. - P. 153-169. (№ 11. Springer. IF=0.806).
13. Cabada A., Yakhshimuratov A. The System of Kaup Equations with a Self-Consistent Source in the Class of Periodic Functions. // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. - Kharkov, 2013. - v. 9. - № 3. - P. 287-303. (№ 40. ResearchGate. IF=0.432).
14. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Обратная задача на полуоси для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом. //Дифференциальные уравнения. - Минск, 2015. - т. 51. - № 1. - С. 24-33. (№ 11. Springer. IF=0.431).

II бўлим (Часть II; Part II)

15. Яхшимуратов А.Б. Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза со специальным свободным членом в классе периодических функций // Уфимский математический журнал. - Уфа, 2011. - т. 3. - № 4. - С. 144-150.
16. Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Борга для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля // Вестник Елецкого гос. ун-та. Серия Математика. Компьютерная математика. - Елец (Россия), 2005. - вып. 8. - № 1. - С. 121-126.
17. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Аналог обратной теоремы Г.Борга для оператора Дирака // Тезисы докл. респ. научн. техн. конф. «Обуч. фундам. дисцип. в высших техн. уч. заведениях РУз. и состояние научных исследований», 9-10 декабря 1999. - Ташкент. - С. 80-81.
18. Хасанов А.Б., Ибрагимов А.М., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическими коэффициентами // Материалы XXV-ой респ. конф. преп. посв. 10-летию РУз и 25-летию КГУ им. Бердаха. II-том. г. Нукус, 2001. - С. 18-19.
19. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическими коэффициентами // Тезисы межд. конф. «Многомерный комплексный анализ», 5-10 августа 2002. - г. Красноярск. - С. 48-50.
20. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Некоторые тождества для квадратов компонент собственных вектор-функций системы уравнений Дирака с гладкими периодическими коэффициентами // Тезисы межд. конф. посв. 80-летию чл. корр. РАН, проф. Л.Д.Кудрявцева. 24-26 марта 2003. - Москва. - С. 240-242.

21. Яхшимуратов А.Б., Бабаджанов Б.А. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом на полуоси // Труды межд. конф. «Совр. проблемы мат. физики и информ. Технологий». II-том. 25-29 ноября 2003. - Ташкент - С. 261-262.
22. Яхшимуратов А.Б., Танирбергенов М.Б. Об обратной задаче рассеяния для системы уравнений Дирака на всей прямой // Труды межд. конф. «Дифф. уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики», том I. 16-19 ноября 2004. - Ташкент. - С. 303-305.
23. Яхшимуратов А.Б., Бабаджанов Б.А. Формулы следов для квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим конечнозонным потенциалом на полуоси // Труды межд. конф. «Совр. проблемы мат. физики и информ. технологий». 18-24 апреля 2005. - Ташкент. - С. 49-51.
24. Яхшимуратов А.Б., Аллаберганов О.Р. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом на полуоси // Труды межд. конф. «Совр. проблемы мат. физики и информ. технологий». 18-24 апреля 2005. - Ташкент. - С. 223-225.
25. Яхшимуратов А.Б., Аллаберганов О.Р. Тождества для квадратов производных собственных функций квадратичного пучка операторов Штурма-Лиувилля с периодическим потенциалом // Материалы респ. научн. конф. «Совр. проблемы и актуальные вопросы функц. анализа», 25-27 июня 2006. - г. Нукус. - С. 137-138.
26. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б., Хасанов М.М. Об интегрировании нелинейного уравнения Шредингера в классе периодических функций // «The Third Turkish World Scientific Symposium». 28 июня-2 июля 2009. - г. Алматы. - С. 239.
27. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б., Матякубов М.М. Об аналоге обратной теоремы Борга для оператора Дирака // «The Third Turkish World Scientific Symposium». 28 июня-2 июля 2009. - г. Алматы. - С. 240.
28. Хасанов А.Б., Яхшимуратов А.Б. Об интегрировании уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником в классе периодических функций // Межд. научн. конф. «Совр. проблемы прикл. матем. и информ. технологий – Аль-Хорезми 2009», 18-21 сентября 2009. - Ташкент. - С. 79-80.
29. Яхшимуратов А.Б. Нелинейное уравнение Шредингера с самосогласованным источником интегрального типа в классе периодических функций // Всероссийская конф. «Дифф. уравнения и их приложения». 26-30 июня 2011. - Самара. - С. 139-140.
30. Cabada A., Yakhshimuratov A. The system of Kaup's equation with a self-consistent source of integral type in the class of periodic functions // The 4-th congress of the Turkish world math. society. 1-3 July 2011. - Baku. - P. 292.
31. Khasanov A., Yakhshimuratov A. The Korteweg-de Vries equation with a self-consistent source of integral type in the class of periodic functions // The 4-th congress of the Turkish world math. society. 1-3 July 2011. - Baku. - P. 293.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.
«16» ноябрь 2015 йил.

Босишга руҳсат этилди: 26.11.2015
Бичими 60x84 1/8. «Times Uz» гарнитураси.
Офсет усулида босилди. Шартли босма табоғи 4,5.
Нашр босма табоғи 4,5. Тиражи 100. Буюртма: №66