САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ

ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАТОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМАГА МОС ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРИ ХОС ҚИЙМАТ ВА РЕЗОНАНСЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

УДК: 517.984

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (PhD) диссертацияси автореферати мундарижаси

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ PhD.27.06.2017.FM.02.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

ТОШКЕНТ ИРРИГАЦИЯ ВА ҚИШЛОҚ ХЎЖАЛИГИНИ МЕХАНИЗАЦИЯЛАШ МУҲАНДИСЛАРИ ИНСТИТУТИ

ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАТОВИЧ

ПАНЖАРАДАГИ ИККИ ЗАРРАЧАЛИ СИСТЕМАГА МОС ШРЕДИНГЕР ОПЕРАТОРИ ХОС ҚИЙМАТ ВА РЕЗОНАНСЛАРИ

01.01.01 – Математик анализ

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ БЎЙИЧА ФАЛСАФА ДОКТОРИ (PhD) ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Самарқанд шаҳри – 2018 йил

Физика-математика фанлари бўйича фалсафа доктори (Doctor of Philosophy) диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида B2017.4.PhD/FM148 рақам билан рўйхатга олинган.

Диссертация Тошкент ирригация ва қишлоқ хўжалигини механизациялаш мухандислари институтида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз (резюме)) Илмий кенгаш веб-саҳифасида (www.samdu.uz) ва «Ziyonet» Ахборот таълим порталида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий раҳбар:	**Халхужаев Ахмад Мияссарович** физика-математика фанлари доктори
Расмий оппонентлар:	**Имомқулов Севдиёр Акрамович** физика-математика фанлари доктори
	Ботиров Ғолиб Исроилович физика-математика фанлари номзоди
Етакчи ташкилот:	**Ўзбекистон Миллий университети**

Диссертация ҳимояси Самарқанд давлат университети ҳузуридаги PhD.27.06.2017.FM.02.01 рақамли Илмий кенгашнинг 201_ йил «___»_________ соат____ даги мажлисида бўлиб ўтади. (Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, 239-12-47, e-mail: patent@samdu.uz).

Диссертация билан Самарқанд давлат университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (___ рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 140104, Самарқанд ш., Университет хиёбони, 15-уй. Тел.: (+99866) 231-06-32.

Диссертация автореферати 2018 йил «____» _______________куни тарқатилди.
(2018 йил «____» ___________ даги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.С. Солеев
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.Хатамов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш илмий котиби в. б., ф.-м.ф.д.

И.А.Икромов
Илмий даражалар берувчи Илмий кенгаш қошидаги илмий семинар раиси ўринбосари, ф.-м.ф.д., профессор

КИРИШ (фалсафа доктори (PhD) диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Дунё миқёсида олиб борилаётган кўплаб илмий-амалий тадқиқотлар физикада мураккаб турғун объектлар одатда уларнинг боғланган пайтдаги энергияси камайиш имконини берувчи тортишиш кучлари натижасида ҳосил бўлишини кўрсатади. Бироқ кейинги йилларда олимлар томонидан тартибланган муҳитларда мураккаб турғун объектлар ҳаттоки итаришувчи таъсирлар натижасида ҳам мавжуд бўлишлиги экспериментал исботланди. Итаришувчи жуфтликларни назарий асослашда фойдаланиладиган Бозе-Хаббард модели, яъни панжарадаги икки заррачали Шредингер оператори экспериментал кузатишларнинг назарий асоси ва қўллашнинг назарий базаси ҳисобланади. Шунинг учун қаттиқ жисмлар физикаси ҳамда квант майдонлар назариясида учрайдиган панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторларига оид тадқиқотларни ривожлантириш муҳим вазифалардан бири бўлиб қолмоқда.

Ҳозирги кунда панжарадаги икки квант заррачали системага мос Шредингер оператори спектри система квазиимпульси ўзгаришига нисбатан ўта сезувчан бўлганлиги учун ушбу оператор спектрига оид муаммоларни ҳал этиш, яъни боғланган ҳолатлар мавжудлигини кўрсатиш ва унинг сонини аниқлаш муҳим аҳамият касб этмоқда. Бу борада мақсадли илмий тадқиқотларни, жумладан, қуйидаги йўналишлардаги илмий изланишларни амалга ошириш долзарб вазифалардан бири ҳисобланади: панжарада бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (бозонлар ёки фермионлар) системага мос Шредингер операторининг дискрет спектрини тадқиқ этиш; бир ва икки ўлчамли панжарадаги икки заррачали системага мос икки заррачали дискрет Шредингер оператори хос қийматлари мавжудлигини кўсатиш; бир ва икки ўлчамли панжарада бир нуқтада (контакт) таъсирлашувчи икки заррачали системага мос икки заррачали дискрет Шредингер оператори ягона хос қиймати учун ёйилма топишдан иборат.

Мамлакатимизда фундаментал фанларнинг амалий татбиққа эга бўлган долзарб йўналишларига, хусусан, кубик панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторларини ўрганишга алоҳида эътибор қаратилди. Панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари учун муҳим спектрдан ташқарида боғланган ҳолатлар мавжудлиги ва уларнинг сонини аниқлашга оид сезиларли натижаларга эришилди.

Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2008 йил 15 июлдаги ПҚ-916-сон «Инновацион лойиҳалар ва технологияларни ишлаб чиқаришга татбиқ этишни рағбатлантириш борасидаги қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида»ги, 2017 йил 17 февралдаги ПҚ-2789-сон «Фанлар академияси фаолияти, илмий-тадқиқот ишларини ташкил этиш, бошқариш ва молиялаштиришни янада такомиллаштириш чора-тадбирлари тўғрисида»ги Қарори ва 2017 йил 8 февралдаги ПФ-4947-сон «Ўзбекистон Республикасини янада ривожлантириш бўйича ҳаракатлар стратегияси тўғрисида»ги Фармони ҳамда мазкур фаолиятга тегишли бошқа норматив-ҳуқуқий хужжатларда белгиланган вазифаларни амалга оширишга ушбу диссертация тадқиқоти муайян даражада хизмат қилади.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур тадқиқот республика фан ва технологиялар ривожланишининг IV. "Математика, механика ва информатика" устувор йўналиши доирасида бажарилган.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Атом ва молекуляр ҳамда қаттиқ жисмлар физикаси, квант майдонлар назариясининг асосий масалалари Шредингер операторларини ўрганишга қаратилган. Бу соҳада олинган натижалар тўғрисида кўплаб маълумотлар математик-физиканинг энциклопедияси" - М.Рид ва Б.Саймоннинг тўрт томли китобида келтирилган. Панжарадаги заррачалар системасига мос Шредингер операторлари ўтган асрнинг тўқсонинчи йилларида физик олимлар Д.С.Маттис ва А.И.Могильнерлар томонидан ўрганилиб бошланди ва унга оид тадқиқотлар жадал ривожланди. Панжарадаги Шредингер операторларини қатъий математик тадқиқ этишда узлуксиз Шредингер операторларидаги каби муаммолар учрайди. Узлуксиз ва дискрет Шредингер оператори ҳамда умумлашган Фридрихс модели учун хос қийматларнинг мавжудлиги, хос қийматнинг узлуксиз спектр бўсағаси атрофидаги ёйилмалари, ўзаро таъсир константасининг бўсағавий қийматдаги ҳодисаларни аниқлаш масалалари М. Клауз, Б. Саймон, Г.М. Граф, Д. Шенкер, Р.А.Фариа де Вейга, Е.Л. Лакштанов, Р.А. Минлос, С.Н. Лақаев, К. Макаров каби олимлар томонидан ўрганилган. Маълумки, икки заррачали Шредингер операторларида ўзаро таъсир доимийси ўзгариши натижасида боғланган ҳолат энергияси узлуксиз спектр чеккасига яқинлашади ва таъсир доимийсининг чекли қийматида спектр бўсағаси билан устма-уст тушади. Бу бўсаға қийматга боғланган ҳолат ёки виртуал ҳолат мос келишини аниқлаш масаласи билан Дж.Раух, Б. Саймон, М. Клауз, Д. Яфаев ва С.Н.Лақаевлар шуғулланган. Жуфт-жуфти билан ўзаро контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи, иккита бозондан ташкил топган системага мос Шредингер оператори учун бўсаға эффекти дастлаб С.Н. Лақаев ишида аниқланган. С. Албеверио, С. Лакаев, К. Макаров ва З. Мўминовлар ҳамда С.Н. Лақаев ва Ш.Алладўстовлар ишларида бўсаға эффекти дисперсион функциялар ва таъсир потенциалининг кенг синфи учун исботланган. С.Н.Лакаев, Ш.Ю. Холматов ишларида $d \geq 3$ ўлчамли Z^d панжарадаги тортишувчи контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи иккита квант заррачали системага мос дискрет Шредингер операторининг муҳим спектрдан пастдаги ягона хос қиймат учун ўзаро таъсир доимийси ва квазиимпульслар бўйича яқинлашувчи қаторлар топилган.

Диссертация тадқиқотининг диссертация бажарилган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари режалари билан боғлиқлиги.

Диссертация тадқиқоти Тошкент ирригация ва кишлоқ хўжалигини механизациялаш муҳандислари институти илмий тадқиқот лойиҳалари доирасида бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади бир ва икки ўлчамли панжарада жуфт-жуфти билан қисқа масофада таъсирлашувчи потенциаллар ёрдамида аниқланган иккита бир хил заррачали системага мос Шредингер операторларининг муҳим спектридан ташқаридаги хос қийматлари учун яқинлашувчи қатор кўринишидаги ёйилмалар олишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари:

бир ва икки ўлчамли панжарада ўзаро тортишувчи ва итаришувчи контакт таъсирли иккита бир хил заррачали (бозонли) системага мос Шредингер операторлари муҳим спектридан ташқарида хос қийматлари мавжудлигини исботлаш ҳамда унга мос хос функциянинг аниқ кўринишини топиш;

бир ва икки ўлчамли панжарада ўзаро тортишувчи ва итаришувчи контакт таъсирли иккита бир хил заррачали (бозонли) системага мос Шредингер оператори хос қиймати учун ўзаро таъсир доимийсининг бўсаға (ноль) қиймати атрофида яқинлашувчи қатор кўринишида ёйилмалар топиш;

бир ўлчамли панжаранинг қўшни тугунларида ўзаро таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори учун муҳим спектр чап чеккасининг виртуал сатҳ (резонанс) ёки хос қиймат бўлишини аниқлаш, муҳим спектрдан чапда хос қиймати мавжудлигини аниқлаш;

бир ўлчамли панжаранинг қўшни тугунларида ўзаро тортишувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос дискрет Шредингер оператори хос қиймати учун ўзаро таъсир доимийси ва квазиимпульсларнинг бўсаға қийматларида яқинлашувчи қатор шаклидаги ёйилмалар ўрнатиш.

Тадқиқотнинг объекти бир ва икки ўлчамли бутун сонли панжарадаги контакт ва қўшни тугунларда ўзаро таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали системаларга мос Шредингер операторлари.

Тадқиқотнинг предмети бир ва икки ўлчамли панжарада қисқа масофада таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (бозон ва фермион) системага мос дискрет Шредингер операторларининг спектрал тадқиқотларидан иборат.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида математик анализ, математик физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси умумий усулларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

бир ва икки ўлчамли панжарада ўзаро тортишувчи ва итаришувчи контакт таъсирли иккита бир хил заррачали (бозонли) системага мос дискрет Шредингер оператори муҳим спектридан ташқарида ягона хос қиймати мавжудлиги исботланган ҳамда унга мос хос функциянинг аниқ кўриниши топилиб, унинг регулярлиги кўрсатилган;

бир ва икки ўлчамли панжарада ўзаро контакт таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (бозонли) системага мос Шредингер оператори ягона хос қиймати учун ўзаро таъсир доимийсининг бўсаға (ноль) қиймати атрофида яқинлашувчи қатор кўринишидаги ёйилмалар олинган;

бир ўлчамли панжаранинг қўшни тугунларида ўзаро таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос Шредингер оператори учун муҳим спектридан чапда ягона хос қиймат мавжудлиги кўрсатилган;

бир ўлчамли панжаранинг қўшни тугунларида ўзаро тортишувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос дискрет Шредингер оператори хос қиймати учун таъсир доимийси ва квазиимпульснинг бўсаға қийматлари атрофида яқинлашувчи қатор шаклида ёйилмалар олинган.

Тадқиқотнинг амалий натижалари боғланган ҳолатларнинг аналитиклиги ҳақидаги хулосалар қаттиқ жисмлар физикаси ва квант механикасида экспериментал тадқиқотларнинг сифат кўрсаткичини аниқлаш ва сонли ҳисоблашларда фойдаланилган.

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги математик анализ, математик-физика, функционал анализ ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларидан фойдаланилганлиги ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги билан асосланган.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назарияси, квант механикаси, қаттиқ жисмлар физикаси ва квант майдонлар назарияси, хусусан, панжарадаги икки ва уч заррачали система гамильтонианларининг спектрлари билан боғлик масалаларни ҳал этишда фойдаланиш мумкинлиги билан изоҳланади.

Тадқиқот натижаларининг амалий аҳамияти ишда олинган илмий натижалар қаттиқ жисмлар физикасида мураккаб объектлар ҳосил бўлишини кўрсатувчи экспериментал тадқиқотлар ўтказиш ва қўллашга назарий асос сифатида хизмат қилиши билан белгиланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари дискрет спектрига оид олинган натижалар асосида:

панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторлари хос қийматини аниқлаш усуллари PPP/GP/FST/30/14915 рақамли хорижий грантида баъзи икки ва уч заррачали дискрет Шредингер операторлари учун қўлланилган (Малайзия Сайенс ислом университетининг 2017 йил 28 декабрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши қаралаётган интеграл операторлар ва панжараги Шредингер операторларининг асосий хоссаларини ўрганиш, шунингдек, тақрибий формулалар ва усуллар ёрдамида хос қийматларни, махсус нуқталарни ва операторнинг хос функцияларини топиш имконини берган;

панжарадаги икки заррачали системага мос Шредингер операторларининг хос қиймати мавжудлигини ва бўсаға резонансини аниқлаш усуллари

LRGS/TD/2011/UKM/ICT/03/02 рақамли хорижий грантида баъзи икки заррачали дискрет Шредингер операторлари учун қўлланилган (Кебангсанг Малайзия миллий университетининг 2017 йил 27 декабрдаги маълумотномаси). Илмий натижанинг қўлланилиши бўсаға резонанси, бўсаға хос киймати ёки махсус нуқтага эга бўлган икки заррачали дискрет Шредингер оператори учун мисоллар қуриш имконини берган;

панжарадаги иккита ихтиёрий итаришувчи заррачали системага мос Шредингер оператори хос қийматларининг система квазиимпульсига боғлиқлиги етакчи хорижий (J.Physics A: Math. Theor.-50,-2017.- 335202, J. Physics. A: Math. Theor.- 49, - 2016.- 145204. , Theor. Math. Phys. 2014, Vol. 178 No 3, p336-346.) журналларида иккита бир хил заррачали системага мос дискрет Шредингер операторларининг спектрини аниқлашда фойдаланилган. Илмий натижанинг қўлланилиши ўрганилаётган операторлар хос қийматининг мавжудлиги ва мусбатлигини исботлаш имконини берган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Мазкур тадқиқот натижалари 3 та халқаро ва 4 та республика илмий-амалий анжуманларида муҳокамадан ўтган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилинганлиги. Диссертация мавзуси бўйича жами 14 та илмий иш чоп этилган, шулардан, Ўзбекистон Республикаси Олий Аттестация комиссиясининг докторлик диссертациялари асосий илмий натижаларини чоп этиш тавсия этилган илмий нашрларда 7 та мақола, жумладан, 2 таси хорижий ва 5 таси республика журналларида нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, учта боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан ташкил топган. Диссертациянинг хажми 88 бетни ташкил этган.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида диссертация мавзусининг долзарблиги асосланган, тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, муаммонинг ўрганилганлик даражаси келтирилган, тадқиқот мақсади, вазифалари, объекти ва предмети тавсифланган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг **"Икки заррачали система энергия операторини панжарадаги Шредингер операторларига келтириш (Асосий тушунчалар)"** деб номланувчи биринчи бобида асосий натижаларни баён қилиш учун зарур бўлган тушунча ва тасдиқлар, жумладан чегараланган ўз-ўзига қўшма операторлар спектрал назариясининг зарур теоремалари баён қилинган. Панжарадаги иккита бир хил заррачали система энергия оператори Шредингер операторларига келтирилган.

Диссертациянинг **"Бир ўлчамли панжарадаги иккита бир хил**

заррачали системага мос Шредингер оператори хос қиймати асимптотикаси" деб номланувчи иккинчи бобида бир ўлчамли панжарада ўзаро контакт ва бир қадамда таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (бозонли ёки фермионли) системаларга мос Шредингер операторларининг хос қийматлари мавжудлиги ўрганилган. Таъсир энергиясининг бўсаға қиймати атрофида Шредингер оператори хос қиймати учун ёйилма олинган.

Диссертациянинг **"Икки ўлчамли панжарадаги иккита бир хил заррачали системага мос дискрет Шредингер оператори хос қиймати учун ёйилма"** деб номланувчи учинчи бобида икки ўлчамли панжарада ўзаро тортишувчи контакт потенциал ёрдамида таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали системага мос Шредингер оператори хос қиймати мавжудлиги ўрганилган ва хос қиймат учун яқинлашувчи қатор кўринишидаги ёйилма олинган.

Фараз қилайлик $\mathrm{T}^d=(-\pi,\pi]^d$ d- ўлчамли тор, $\eta(dp)=\dfrac{d^d p}{(2\pi)^d}$ - эса T^d торда аниқланган Хаар ўлчови, $L_2(\mathrm{T}^d):=L_2(\mathrm{T}^d,\eta)$ эса T^d да аниқланган квадрати билан интегралланувчи функцияларнинг гильберт фазоси бўлсин. $L_2^e(\mathrm{T}^d)\subset L_2(\mathrm{T}^d)$ ва $L_2^o(\mathrm{T}^d)\subset L_2(\mathrm{T}^d)$ мос равишда жуфт ва тоқ функциялар қисм фазолари бўлсин. Иккита бир хил заррачали (бозонлар) системага мос контакт потенциал $(\mu\neq 0)$ ёрдамида таъсирлашувчи дискрет Шредингер оператори $L_2^e(\mathrm{T}^d)$ гильберт фазосида қуйидаги формула билан аниқланади:

$$h_\mu(k)=h_0(k)+\mu v, \tag{1}$$

бунда қўзғалмас $h_0(k)$ оператор $L_2^e(\mathrm{T}^d)$ да

$$\varepsilon_k(q)=2\sum_{j=1}^{d}\left(1-\cos\frac{k_j}{2}\cos q_j\right), k\in\mathrm{T}^d$$

функцияга кўпайтириш оператори

$$(h_0(k)f)(q)=\varepsilon_k(q)f(q),\quad f\in L_2^e(\mathrm{T}^d).$$

Қўзғатиш оператори бир ўлчамли оператор бўлиб, $L_2^e(\mathrm{T}^d)$ фазода қуйидагича аниқланади

$$(vf)(q)=\int_{T^d} f(q)\eta(dq),\quad f\in L_2^e(\mathrm{T}^d).$$

Бу ерда $\mu\in\mathrm{P}=(-\infty,+\infty)$- заррачаларнинг ўзаро таъсир энергияси.

Муҳим спектр турғунлиги ҳақидаги Вейл теоремасига асосан $h_\mu(k)$ операторнинг муҳим спектри қўзғалмас $h_0(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$ операторнинг спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k))=\sigma(h_0(k))=[\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{max}(k)],$$

бунда

$$\varepsilon_{\min}(k)=\min_{q\in T^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{j=1}^{d}\left(1-\cos\frac{k_j}{2}\right)\geq 0,\quad \varepsilon_{\max}(k)=\max_{q\in T^d}\varepsilon_k(q)=2\sum_{j=1}^{d}\left(1+\cos\frac{k_j}{2}\right)\leq 4d\,.$$

II бобда панжара ўлчами бирга тенг ($d=1$) деб фараз қиламиз. II боб 1-параграфи натижаларини қуйидаги тасдиқларда келтирамиз.

1-Теорема. *Барча* $\mu\in \mathrm{P}_-=(-\infty,0)$ *ва* $k\in \mathrm{T}^1$ *ларда* $h_\mu(k)$ *оператор ягона* $z(\mu,k)$ *хос қийматга эга.* $z(\mu,k)$ *хос қиймат* $h_\mu(k)$ *операторнинг муҳим спектридан чапда ётади, яъни* $z(\mu,k)<\varepsilon_{\min}(k)$. *Барча* $k\in \mathrm{T}^1$ *да* $z(\cdot,k)$ *функция* P_- *да монотон ўсувчи ва барча* $\mu\in \mathrm{P}_-$ *да* $z(\mu,\cdot)$ *функция жуфт,* T^1 *да хақиқий аналитик бўлади. Барча* $k\in \mathrm{T}^1\setminus\{0\}=(-\pi,0)\cup(0,\pi]$ *да ушбу* $z(\mu,k)>z(\mu,0)$ *тенгсизлик ўринли бўлади. Барча* $\mu\in \mathrm{P}_-=(-\infty,0)$ *ва* $k\in \mathrm{T}^1$ *ларда мос хос функция* $\psi_{\mu,k}(\cdot)=\dfrac{\mu\cdot c}{z(\mu,k)-\varepsilon_k(\cdot)}$ *кўринишда бўлади ва* T^1 *да ҳақиқий аналитик функция бўлади, бунда* $c\neq 0-$ *нормаллаштирувчи кўпайтувчи. Шу билан бирга вектор қийматли акслантириш* $\psi_\mu:\mathrm{T}^1\to L_2^e(\mathrm{T}^1),\ k\to\psi_{\mu,k}$ *ҳам аналитик бўлади.*

2-Теорема. а) *Фараз қилайлик* $k\in(-\pi,\pi)$ *бўлсин. У холда шундай* $\mu_0<0$ *мавжуд бўлиб, барча* $\mu\in(\mu_0,0)$ *ларда қуйидаги ёйилма*

$$z(\mu,k)=\varepsilon_{\min}(k)-\mu^2\Big[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(k)\mu^n\Big]^2,$$

ўринли, бунда $a_n(k),\,n=1,2,...-$ *хақиқий сонлар ва* $a_0(k)=\pi\left(\cos\frac{k}{2}\right)^{-1/2}>0$.

б) $k=\pi$ *бўлсин. У ҳолда* $z(\mu,\pi)=2+\mu$ *бўлади.*

1-Натижа. $k\in(-\pi,\pi)$ *бўлсин. У ҳолда* $z(\mu,k)$ *функция учун* $\mu\to-0$ *да қуйидаги асимптотик ёйилма ўринли бўлади:*

$$z(\mu,k)=\varepsilon_{\min}(k)-\frac{\mu^2\pi^2}{\cos\frac{k}{2}}+z^{(2)}(\mu,k),$$

бунда $z^{(2)}(\mu,k)=O(\mu^3)$.

3-Теорема. *Ихтиёрий* $k\in \mathrm{T}^1$ *учун* $z(\mu,k)$ *функция учун* $\mu\to-\infty$ *да қуйидаги асимптотик ёйилма ўринли бўлади:* $z(\mu,k)=\mu+z^{(1)}(\mu,k)$, *бунда* $z^{(1)}(\mu,k)=O(1)$ *тенглик* $k\in \mathrm{T}^1$*бўйича текис бажарилади.*

Таъкидлаш лозимки, итаришувчи заррачаларга мос таъсир энергияси $\mu\in \mathrm{P}_+=(0,+\infty)$ бўлган ҳолда ҳам шунга ўхшаш натижалар ўринли.

II боб 2-параграфи натижаларининг қатъий математик баёнига ўтамиз. Импульс тасвирда панжаранинг қўшни тугунларида ўзаро таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системасига мос икки заррачали дискрет Шредингер оператори $H_\mu(k), k \in \mathrm{T}^1$ ушбу $L_2^o(\mathrm{T}^1)$ фазода аниқланади:

$$H_\mu(k) = H_0(k) + \mu V.$$

Бу ерда $H_0(k)$ функцияга кўпайтириш оператори:

$$(H_0(k) f)(q) = E_k(q) f(q), \quad f \in L_2^o(\mathrm{T}^1),$$

бунда

$$E_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2} - q\right) + \varepsilon\left(\frac{k}{2} + q\right)$$

ва $\mu \in \mathrm{P} = (-\infty, +\infty)$ - заррачаларнинг ўзаро таъсир энергияси.

1-Фараз. *Фараз қиламиз $\varepsilon(\cdot)$ функция T^1 да жуфт ҳақиқий аналитик функция ва $q = 0 \in \mathrm{T}^1$ нуқтада ягона айнимаган минимумга эга.*

V таъсир оператори $L_2^o(\mathrm{T}^1)$ фазода қуйидагича аниқланган:

$$(Vf)(q) = \sin q \int_{\mathrm{T}^1} \sin t \, f(t) \eta(dt).$$

Муҳим спектр турғунлиги ҳакидаги Вейл теоремасига асосан $H_\mu(k)$, $k \in \mathrm{T}^1$ операторнинг мухим спектри $H_0(k)$, $k \in \mathrm{T}^1$ операторнинг спектри билан устма-уст тушади, яъни

$$\sigma_{ess}(H_\mu(k)) = \sigma(H_0(k)) = [E_{\min}(k), E_{max}(k)],$$

бунда

$$E_{\min}(k) = \min_{q \in \mathrm{T}^1} E_k(q); \quad E_{\max}(k) = \max_{q \in \mathrm{T}^1} E_k(q).$$

1-Эслатма. *Шуни таъкидлаймизки, 1-фаразга кўра $k_0 = 0 \in \mathrm{T}^1$ нуқтани ўзида сақловчи шундай $\Gamma \subset \mathrm{T}^1$ оралиқ ва унда аналитик бўлган $q_0(\cdot)$ функция мавжудки, ихтиёрий $k \in \Gamma$ учун $E_k(\cdot)$ функция $0 \in \mathrm{T}^1$ нуқтада ягона айнимаган минимумга эга бўлади. У ҳолда параметрга боғлиқ Морс леммасига кўра, маркази $y = 0$ нуқтада радиуси $\gamma > 0$ бўлган бирор $W_\gamma(0) \subset \mathrm{P}$ шарни $q = 0$ нуқтанинг бирор $U(0)$ атрофига акслантирувчи шундай $q = \phi(k, y)$ акслантириш мавжудки, барча $q \in U(0)$ да қуйидаги тенглик бажарилади: $E_k(q) = E_k(\phi(k, y)) = y^2 + E_{\min}(k)$. Бундан ташқари $q = \phi(k, y)$ акслантиришнинг $J(\phi(k, y), k)$ якобиани барча $k \in \Gamma$ учун $J(\phi(k, 0), k) > J(0, k) > 0$ шартни қаноатлантиради.*

$\mathrm{X} -$ комплекс сонлар тўплами бўлсин. Ихтиёрий $k \in \Gamma$ ва $z < E_{\min}(k)$ учун $L_2^o(\mathrm{T}^1)$ фазода номанфий компакт ва

$$B_{\mu}(k,z;p,q) = -2\mu \sin p \sin q \int_{\mathrm{T}^1} \frac{\sin^2 t\,\eta(dt)}{E_k(t)-z}$$

ядроли Бирман-Швингер интеграл операторини қуйидагича аниқлаймиз:

$$B_{\mu}(k,z) = -\mu V^{\frac{1}{2}} R_0(k,z) V^{\frac{1}{2}},$$

бунда $R_0(k,z)$ $H_0(k)$ операторнинг $z \in \mathrm{X} \setminus [E_{\min}(k), E_{\max}(k)]$ нуқтадаги резолвентаси, $V^{\frac{1}{2}}$ оператор эса V мусбат операторнинг квадрат илдизи.

Ихтиёрий $\mu < 0$ ва $k \in \Gamma$ учун $\mathrm{X} \setminus [E_{\min}(k), E_{\max}(k)]$ тўпламда $I - B_{\mu}(k,z)$ операторга мос $\Lambda_{\mu}(k,z)$ Фредгольм детерминантини қуйидагича аниқлаймиз:

$$\Lambda_{\mu}(k,z) = 1 + \mu d(k,z),$$

бунда

$$d(k,z) = \int_{\mathrm{T}^1} \frac{\sin^2 t\,\eta(dt)}{E_k(t)-z}.$$

Шуни таъкидлаш жоизки, $k \in \Gamma$ бўлганда

$$d(k) := d(k, E_{\min}(k)) = \lim_{z \to E_{\min}(k)-} d(k,z) = \int_{\mathrm{T}^1} \frac{\sin^2 t\,\eta(dt)}{E_k(t) - E_{\min}(k)} > 0$$

интеграл мавжуд ва k нинг функцияси сифатида T^1 да узлуксиз функция бўлади.

$B_{\mu}(k, E_{\min}(k))$ лимитик операторни қуйидаги формула орқали аниқлаймиз:

$$B_{\mu}(k, E_{\min}(k)) = \lim_{z \to E_{\min}(k)-} B_{\mu}(k,z).$$

$\Lambda_{\mu}(k, E_{\min}(k))$ лимитик Фредгольм детерминантини қуйидаги формула орқали аниқлаймиз:

$$\Lambda_{\mu}(k, E_{\min}(k)) = \lim_{z \to E_{\min}(k)-} \Lambda_{\mu}(k,z).$$

Шуни таъкидлаб ўтамизки, $B_{\mu}(k, E_{\min}(k))$ оператор $L_2^o(\mathrm{T}^1)$ фазода ўз-ўзига қўшма компакт интеграл оператори ва унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left(B_{\mu}(k, E_{\min}(k)) f\right)(q) = -2\mu \sin q \int_{\mathrm{T}^1} \frac{\sin^2 t\,\eta(dt)}{E_k(t) - E_{\min}(t)} \int_{\mathrm{T}^1} \sin p\, f(p)\,\eta(dp).$$

Ихтиёрий $k \in \Gamma$ учун ушбу $\mu(k) := -\dfrac{1}{d(k)} < 0$ белгилашни киритамиз.

1-Таъриф. *Агар* 1 *сони* $B_{\mu}(k, E_{\min}(k))$ *операторнинг бирор* $\mu = \mu(k)$

даги хос қиймати бўлса, $H_\mu(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ *муҳим спектрининг қуйи чегараси (*$z=E_{\min}(k)$*) да виртуал сатҳга эга дейилади. Бунда* $\mu=\mu(k)$ *сон таъсир энергиясининг бўсаға қиймати дейилади.*

2-Эслатма. *Фараз қилайлик* $E_{\min}(k)$ *сони* $H_\mu(k)$ *операторнинг виртуал сатҳи бўлсин, яъни 1 сони* $B_\mu(k,E_{\min}(k))$ *операторнинг хос қиймати ва* $\psi\in L_2^o(\mathrm{T}^1)-$ *унга мос хос функция бўлсин. У ҳолда*

$$f(q)=\frac{-\mu(V^{\frac{1}{2}}\psi)(q)}{E_k(q)-E_{\min}(k)}=\frac{-\sqrt{2}\mu\sin q}{E_k(q)-E_{\min}(k)}\int_{\mathrm{T}^1}\sin t\,\psi(t)\eta(\mathrm{d}t)\notin L_2^o(\mathrm{T}^1)$$

функция $H_\mu(k)f=E_{\min}(k)f$ *Шредингер тенгламасини қаноатлантиради.*

$H_\mu(k)$ операторнинг хос қийматларини система квазиимпулси $k\in\Gamma\subset\mathrm{T}^1$ га боғлиқ ҳолда ўрганиш учун қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз:

$$S_<(\mu)=\{k\in\Gamma:\mu<\mu(k)\},$$
$$S_=(\mu)=\{k\in\Gamma:\mu=\mu(k)\},$$
$$S_>(\mu)=\{k\in\Gamma:\mu>\mu(k)\}.$$

II боб 2-параграфининг асосий натижалари қуйидаги теоремаларда келтирилган.

4-Теорема. *а)* $\mu<0$ *ва* $k\in S_<(\mu)$ *бўлсин. У ҳолда* $H_\mu(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ *муҳим спектрдан чапда ягона* $z(\mu,k)$ *хос қийматга эга. Мос хос функция* $f_{\mu,k}(q)=\dfrac{\mu\cdot c\sin q}{E_k(q)-z(\mu,k)}\in L_2^o(\mathrm{T}^1)$, T^1 *да ҳақиқий аналитик функция бўлади, бунда* $c\neq 0-$ *нормаллаштирувчи кўпайтувчи. Шу билан бирга* $z(\mu,\cdot)$ *хос қиймат* $S_<(\mu)$ *тўпламда хақиқий қийматли жуфт функция бўлади.* $k\to f_{\mu,k}(\cdot)$ *билан берилган* $f_{\mu,k}(\cdot):S_>(\mu)\to L_2^o(\mathrm{T}^1)$ *акслантириш вектор қийматли аналитик акслантириш бўлади.*

b) $\mu<0$ *ва* $k\in S_=(\mu)$ *бўлсин. У ҳолда* $H_\mu(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ *муҳим спектрнинг* $E_{\min}(k)$ *қуйи чегарси* $H_\mu(k)$ *оператор учун виртуал сатҳ бўлади.*

c) $\mu<0$ *ва* $k\in S_>(\mu)$ *бўлсин. У ҳолда* $H_\mu(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$ *муҳим спектрдан чапда хос қийматга эга эмас.*

2-Натижа. $\mu(k)<0$ *нинг* T^1 *да аналитик функция эканлигидан модул бўйича етарлича катта* $\mu<0$ *да* $H_\mu(k)$ *оператор* $\sigma(H_\mu(k))$ *спектри бўсағасидан чапда ётувчи хос қиймати мавжудлиги келиб чиқади.*

5-Теорема. $\mu\to\mu(k)$, $k\in S_<(\mu)$ *муносабат фақат ва фақат*

$z(\mu,k)\to z(\mu(k),k)=E_{\min}(k),\ k\in S_{<}(\mu)$ *бўлгандагина ўринлидир. Етарлича кичик* $\mu(k)-\mu$ *да қуйидаги ёйилма ўринлидир:*

$$z(\mu(k),k)-z(\mu,k)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}b_n(k)(\mu(k)-\mu)^n\right]^2,$$

бунда $b_n(k),\ \ k=1,2,\ldots$ - *ҳақиқий сонлар ва* $b_1(k)=2/J(0,k)\mu^2(k)>0.$

6-Теорема. *Фараз қилайлик* $\mu^*\in(\inf_{\Gamma}\mu(k),\sup_{\Gamma}\mu(k))$ *бўлсин. У ҳолда* $k\in S_{=}(\mu^*)\cup S_{>}(\mu^*)$ *да* $H_{\mu^*}(k)$ *оператор* $\sigma_{ess}(H_{\mu^*}(k))$ *муҳим спектрдан ташқарида хос қийматга эга эмас. Ихтиёрий* $k\in S_{<}(\mu^*)$ *да* $H_{\mu^*}(k)$ *оператор ягона* $z^*(k)=z(\mu^*,k)$ *хос қийматга эга, бу ҳолда* $z(\mu^*,k)$ *хос қиймат муҳим спектрдан чапда ётади ва* $S_{<}(\mu^*)$ *да аналитик функция бўлади. Бундан ташқари, ихтиёрий* $k^*\in S_{=}(\mu^*)$ *учун* $k\to k^*,\ \ k\in S_{<}(\mu^*)$ *бўлганда қуйидаги асимптотика ўринли бўлади*

$$z^*(k)=E_{\min}(k^*)+\frac{\partial E_{\min}(k)}{\partial k}\Big|_{k=k^*}(k-k^*)+O(|k-k^*|^2).$$

7-Теорема. *Ихтиёрий* $k\in\Gamma$ *учун* $\mu\to-\infty$ *да* $z(\mu,k)$ *функция қуйидаги асимптотикага эга бўлади* $z(\mu,k)=\dfrac{\mu}{2}+z^{(1)}(\mu,k),$ *бунда* $z^{(1)}(\mu,k)=O(1)$ *тенглик* $k\in\Gamma$ *бўйича текис бажарилади.*

Учинчи боб асосий натижаларининг қатъий математик баёнига ўтамиз. Бу бобда панжара ўлчами $d=2$ деб фараз қиламиз ва (1) формула билан аниқланган $h_\mu(k), k\in\mathrm{T}^2$ дискрет Шредингер оператори қаралади.

8-Теорема. *Барча* $\mu\in\mathrm{P}_{+}=(0,+\infty)$ *ва* $k\in\mathrm{T}^2$ *да* $h_\mu(k)$ *оператор ягона* $z(\mu,k)$ *хос қийматга эга. Бу хос қиймат* $h_\mu(k)$ *операторнинг* $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$ *муҳим спектридан ўнгда ётади, яъни* $z(\mu,k)>\varepsilon_{\max}(k)$. *Барча* $k\in\mathrm{T}^2$ *да* $z(\cdot,k)$ *функция* P_{+} *да монотон ўсувчи ва барча* $\mu\in\mathrm{P}_{+}$ *да* $z(\mu,\cdot)$ *функция жуфт,* T^2 *да хақиқий аналитик бўлади. Барча* $k\in\mathrm{T}^2\setminus\{\vec{\pi}\}=(-\pi,0)^2\cup(0,\pi)^2$ *да ушбу* $z(\mu,k)<z(\mu,\vec{\pi})$ *тенгсизлик ўринли бўлади. Мос хос функция* $\psi_{\mu,k}(\cdot)=\dfrac{\mu\cdot c}{z(\mu,k)-\varepsilon_\mu(\cdot)}$ T^2 *да ҳақиқий аналитик функция бўлади, бунда* $c\neq 0-$ *нормаллаштирувчи кўпайтувчи. Шу билан бирга вектор қийматли* $\psi_\mu:\mathrm{T}^2\to L_2^e(\mathrm{T}^2),\ k\to\psi_{\mu,k}$ *акслантириш хам аналитик бўлади.*

$\Pi_i, i=1,2$ орқали қуйидаги тўпламларни аниқлаймиз:

$$\Pi_1 = \{k = (k_1, \pi) \in \mathrm{T}^2, k_1 \in (-\pi, \pi)\}, \Pi_2 = \{k = (\pi, k_2) \in \mathrm{T}^2, k_2 \in (-\pi, \pi)\}.$$

9-Теорема. *а) Фараз қилайлик* $k \in (-\pi, \pi)^2$ *бўлсин. У холда шундай* $\mu_0 > 0$ *мавжуд бўлиб, барча* $\mu \in (0, \mu_0)$ *да қуйидаги ёйилма ўринли:*

$$z(\mu, k) = \varepsilon_{\max}(k) + b(k)\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\} + \sum_{n,m \geq 1, n+m>2} c(n,m;k)\mu^n \sigma^m$$

б*унда* $b(k) > 0$, $\sigma = \frac{1}{\mu}\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\}$ $c(n,m;k)$, $n = 1,2,\ldots -$ *ҳақиқий сонлар.*

б) Фараз қилайлик $k \in \Pi_i, i = 1,2$ *бўлсин. У холда*

$$z(\mu, k) = 2 + \varepsilon_{\max}(k_i) + \mu^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)}(k)\mu^n\right]^2,$$

б*унда* $a_n^{(i)}(k)$, $n = 1,2,\ldots$ - *ҳақиқий сонлар ва* $a_0^{(i)}(k) = \pi\left(\cos\frac{k}{2}\right)^{-1/2} > 0;$

с) Фараз қилайлик $k = \vec{\pi} = (\pi, \pi)$ *бўлсин. У холда* $z(\mu, \vec{\pi}) = 4 + \mu.$

3-Натижа. *а) Фараз қилайлик* $k \in (-\pi, \pi)^2$ *бўлсин. У холда* $z(\mu, k)$ *функция* $\mu \to 0$ *да қуйидаги асимптотикага эга бўлади:*

$$z(\mu, k) = \varepsilon_{\max}(k) + b(k)\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\} + o[\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\}].$$

б) Фараз қилайлик $k \in \Pi_i, i = 1,2$ *бўлсин. У холда* $z(\mu, k)$ *функция* $\mu \to 0$ *да қуйидаги асимптотикага эга бўлади:*

$$z^{(i)}(\mu, k) = 2 + \varepsilon_{\max}(k_i) + \frac{\pi^2 \mu^2}{\cos\frac{k_i}{2}} + z^{(2)}(\mu, k),$$

бунда $z^{(2)}(\mu, k) = O(\mu^3)$.

с) Фараз қилайлик $k = \vec{\pi}$ *бўлсин. У холда* $\mu \to 0$ да $z(\mu, \vec{\pi}) = 4$ *тенглик ўринли.*

10-Теорема. *Ихтиёрий* $k \in \mathrm{T}^2$ *учун* $z(\mu, k)$ *функция учун* $\mu \to +\infty$ *да қуйидаги асимптотик ёйилма ўринли бўлади:* $z(\mu, k) = \mu + z^{(1)}(\mu, k)$, *бунда* $z^{(1)}(\mu, k) = O(1)$- *тенглик* $k \in \mathrm{T}^2$ *бўйича текис бажарилади.*

Таъкидлаб ўтамизки, $\mu \in \mathrm{P}_{\_}$ ва $k \in \mathrm{T}^2$ бўлган ҳолда ҳам шунга ўхшаш натижалар олинган.

ХУЛОСА

Диссертация иши панжарадаги ўзаро контакт ва қўшни тугунларда таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали системаларга мос дискрет Шредингер операторларининг муҳим ва дискрет спектрларини тадқиқ қилишга бағишланган.

Тадқиқотнинг асосий натижалари қуйидагилардан иборат:

1. Бир ва икки ўлчамли панжарада ўзаро тортишувчи ёки итаришувчи контакт таъсирли системага мос Шредингер оператори муҳим спектри ўрни топилган ва муҳим спектрдан чапда ёки ўнгда хос қиймат мавжудлиги исботланган.
2. Бир ва икки ўлчамли панжарада ўзаро тортишувчи ёки итаришувчи контакт таъсирли иккита бир хил заррачали (бозонли) системага мос дискрет Шредингер оператори хос қиймати учун ўзаро таъсир доимийси бўсаға (ноль) қиймати атрофида яқинлашувчи қатор кўринишидаги ёйилмалар олинган.
3. Бир ўлчамли панжаранинг қўшни тугунларида ўзаро тортишувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос дискрет Шредингер оператори учун бўсаға ҳодисаси мавжудлиги, яъни муҳим спектрдан чапда хос қиймат мавжудлиги ёки йўқлиги кўрсатилган.
4. Бир ўлчамли панжарада қўшни тугунларда таъсирлашувчи иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос дискрет Шредингер оператори хос қиймати учун ўзаро таъсир доимийсининг манфий бўсаға қиймати атрофида яқинлашувчи қатор кўринишидаги ёйилмалар олинган.
5. Бир ўлчамли иккита бир хил заррачали (фермионли) системага мос дискрет Шредингер оператори хос қиймати учун квазиимпульснинг бўсаға қиймати атрофида асимптотика олинган.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.27.06.2017.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ИРРИГАЦИИ И
МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА

ЛАКАЕВ ШУХРАТ САИДАХМАТОВИЧ

СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И РЕЗОНАНСЫ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СИСТЕМЕ ДВУХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

г.Самарканд – 2018 год

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2017.4.PhD/FM148

Диссертация выполнена в Ташкентском институте инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, английский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Халхужаев Ахмад Мияссарович** доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Имамкулов Севдиёр Акрамович** доктор физико-математических наук
	Ботиров Голиб Исроилович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Национальный университет Узбекистана**

Защита диссертации состоится «____» _____________2018 года в ____ часов на заседании Научного совета PhD.27.06.2017.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственном университета (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866)231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2018 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2018 года).

А.С. Солеев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

А.Хатамов
И. о. ученого секретаря Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

И.А.Икромов
Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многочисленные научно-прикладные исследования, проводимые в мировом уровне, показывают, что всюду в физике устойчивые сложные объекты обычно образуются в результате действия сил притяжения, которые позволяют составным частям уменьшить энергию при их связывании. Однако, последние годы учеными доказан, что в упорядоченных средах устойчивые сложные объекты могут существовать даже в случае отталкивающих взаимодействий. Модель Бозе-Хаббарда, используемый для описания отталкивающих частиц, т.е. оператор Шредингера на решетке, является теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух частиц на решетке, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также решетчатой теории поля, является одним из приоретных направлений.

Поскольку, спектр семейства двухчастичных операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух квантовых частиц на решетке является довольно чувствительным к изменению квазиимпульса системы, важную роль играет решение проблем, относящиеся исследований спектров этих операторов, доказать существование связанных состояний, определить их местоположение и числа связанных состояний дискретных операторов Шредингера в зависимости от квазиимпульса системы. В связи с этим реализация целевых научных исследований в следующих направлениях является одной из важных задач: исследовать дискретный спектр операторов Шредингера, соответствующих системе двух одинаковых частиц (бозонов или фермионов) системе двух частиц на одномерной и двумерной решетках с контактнами потенциалами, установить пороговые явления спектра, показать существование собственных значений двухчастичного оператора Шредингера, получить разложение в виде сходящегося ряда для единственного собственного значения.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, исследованию операторов Шредингера, соответствующих гамильтонианам систем двух частиц на целочисленной решетке. Значительные результаты были достигнуты по определению условий существования связанных состояний и их числа вне существенного спектра для операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц на решетке.

Эта диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-916 «О дополнительных мерах по стимулированию внедрения инновационных проектов и технологий в производство» от 15 июля 2008 года, №-ПП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года и №-УП-4947 «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 8 февраля 2017 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Основные задачи атомной и молекулярной физики, физики твердого тела, квантовой теории поля приводятся к изучению операторов Шредингера. Наиболее полный обзор результатов по этой области содержится в энциклопедии современной математической физики-четырехтомнике М. Рида и Б. Саймона. Операторы Шредингера, соответствующие системам частиц на решетке, впервые рассматривались в 90-х годах прошлого века Д.С.Маттисом, А.И.Могильнером и после чего исследования бурно развивались. В случае оператора Шредингера на решетке в математическом смысле возникают те же проблемы и тот же порядок их изучения, что и в случае непрерывного оператора Шредингера. Задачи о существовании дискретного спектра, а также определения порогового значения константы связи для непрерывных и дискретных операторов Шредингера изучались в работах М. Клауза, Б. Саймона, Г.М. Графа, Д. Шенкера, Р.А. Фариа да Веига, Е.Л. Лакштанова, Р.А.Минлоса, С.Н. Лакаева, К. Макарова. Известно, что с уменьшением константы связи значение энергии связанного состояния двухчастичного оператора Шредингера приближается к краю непрерывного спектра, и при некотором конечном значении константы связи попадает на край. Изучению вопроса о соответствии этому пороговому значению связанного состояния или виртуального уровня посвящены работы Д.Р. Яфаева, Дж. Рауха, Б.Саймона, М. Клауза и С.Н. Лакаева. Впервые С.Н. Лакаевым доказано существование порогового эффекта для двухчастичного дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых бозонов взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов. В работах С. Албеверио, С. Лакаева, К. Макарова и З. Муминова также С.Н. Лакаева и Ш. Алладустова доказано пороговый эффект для широкого класса дисперсионных функций и взаимодействия. В работе Лакаева и Ш.Холматова найдены сходящийся ряды по константе связи и квазиимпульса для собственного значения лежащего левее существенного спектра оператора Шредингера соответствующего системе двух квантовых частиц взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов на $d \geq 3$ мерной решетке.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ Ташкентского института инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства.

Целью исследования являются получение сходящихся разложений для собственных значений вне существенного спектра оператора Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц, определенных с помощью парных короткодействующих потенциалов на одномерной и двумерной решетках.

Задачи исследования:

доказать существование собственных значений вне существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (бозонов) с контактными отталкивающими и притягивающими взаимодействиями на одномерной и двумерной решетках, а также найти явный вид соответствующей собственной функции;

найти разложение в сходящийся ряд в окрестности порогового значения константы связи (нуля) для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (бозонов) с контактными отталкивающими и притягивающими взаимодействиями на одномерной и двумерной решетках;

определить наличие виртуального уровня (резонанса) или собственного значения на левом пороге существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионы) с парными взаимодействиями на соседних узлах на одномерной решетке и определить существование собственного значения лежащего левее существенного спектра;

установить разложение в сходящийся ряд в окрестности порогового значения константы связи и квазиимпулса для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионы) с парными взаимодействиями на соседних узлах на одномерной решетке и определить существование собственного значения, лежащего левее существенного спектра.

Объект исследования - операторы Шредингера, соответствующие системам двух одинаковых частиц взаимодействующих с помощью короткодействующих потенциалов на решетке.

Предмет исследования - спектральный анализ дискретных операторов Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц (фермионов и бозонов) короткодействующими потенциалами на одномерной и двумерной решетках.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, функционального анализа, теории функций комплексного переменного и математической физики.

Научная новизна исследования. Доказано существование собственных значений вне существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (бозонов) с контактными отталкивающими или притягивающими взаимодействиями на одномерной и двумерной решетках, а также найден явный вид соответствующей собственной функции, показана её аналитичность;

найдено разложение в сходящийся ряд в окрестности порогового значения константы (нуля) связи для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (бозонов) с контактными отталкивающими или притягивающими взаимодействиями на одномерной и двумерной решетках;

определено наличие виртуального уровня (резонанса) или собственного значения на левом пороге существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионы) с парными взаимодействиями на соседних узлах на одномерной решетке и доказано существование собственного значения лежащего левее существенного спектра;

установлены разложение в сходящийся ряд в окрестности порогового значения константы связи и квазиимпульса для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц (фермионы) с парными взаимодействиями на соседних узлах на одномерной решетке и доказано отсутствия собственного значения лежащего левее существенного спектра.

Практические результаты исследования состоят в применении выводов об аналитичности связанных состояний при исследовании качественных свойств экспериментальных наблюдений и численных вычислений в физике твердого тела и квантовой механике.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, математической физики, функционального анализа и теории функций комплексного переменного, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, которые возникают в квантовой механике, физике твердого тела, квантовой теории поля, в частности, при решениях задач связанных со спектром гамильтонианов систем двух и трех частиц на решетке.

Практическое значение диссертационного исследования определяется тем, что полученные в работе научные результаты могут служить теоретической основой экспериментальных наблюдений, проводимых в физике твердого тела и квантовой механике.

Внедрение результатов исследования. В основе полученных результатов о дискретного спектра операторов Шредингера, соответствующих системам двух частиц на решетке:

способы определения существования собственного значения двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц на решетке использованы в исследованиях гранта PPP/GP/FST/30/14915 для некоторых двухчастичных и трехчастичных дискретных операторов Шредингера (Исламский университет науки Малайзии, справка от 28 декабря 2017 года). Применение этих научных результатов дала возможность исследования основных свойств интегральных операторов и операторов Шредингера на решетке, а также формулы и методы аппроксимации позволяют получить собственные значения, особые точки и приближенные собственные функции операторов;

способы определения существования собственного значения и порогового резонанса двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух частиц на решетки, использованы в исследованиях гранта LRGS/TD/2011/UKM/ICT/03/02 для некоторых двухчастичных дискретных операторов Шредингера (Национальный университет Малайзии, справка от 27 декабря 2017 года). Применение этих научных результатов дала возможность получить пример для двухчастичного дискретного оператора Шредингера с пороговыми резонансами, пороговыми собственными значениями или регулярными точками;

из результатов о зависимости собственных значений двухчастичного оператора Шредингера от квазиимпульса системы использованы в зарубежных журналах (J.Physics A: Math. Theor.-50,-2017.- 335202, J. Physics. A: Math. Theor.- 49, - 2016.- 145204, Theor. Math. Phys. 2014, Vol. 178 No 3, p336-346.) при исследовании спектра дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц. Применение этих научных результатов дала возможность доказать существование и положительность собственного значения рассматриваемых операторов.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 7 научно-практических конференциях в том числе на 3 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов иследование. По теме диссертации опубликовано 14 научных работ, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для зашиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликовано в зарубежном журнале и 5- в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 88 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной "**Приведение оператора энергии системы двух частиц в двухчастичный оператор Шредингера на решетке (Основные понятия)**", приведены необходимые предварительные сведения и утверждения, в частности, теоремы спектральной теории и теории возмущений самосопряженных операторов. Оператор энергии системы двух одинаковых частиц на решетке приведен в двухчастичный оператор Шредингера.

Второя глава диссертации, названная **“Асимптотика дискретного спектра оператора Шредингера на решетке, соответствующего системе двух частиц на одномерной решетке”** посвящена исследованию спектральных свойств операторов Шредингера, соответствующих системам двух одинаковых частиц (бозонов или фермионов) с короткодействующими потенциалами на одномерной решетке. Найдено разложение в сходящийся ряд в окрестности порогового значения константы (нуля) связи для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера.

Третая глава диссертации, названная **“Разложение собственного значения дискретного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц на двумерной решетке”** изучен дискретный спектр двухчастичного оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц (бозонов) с контактными взаимодействиями на двумерной решетке и установлено разложение в сходящийся ряд в окрестности порогового значения константы (нуля) связи для собственного значения.

Пусть $\mathrm{T}^d=(-\pi,\pi]^d$ - $d=1,2$ -мерный тор и $\eta(\mathrm{d}p)=\dfrac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}$ – нормированная мера Хаара, введенная на торе T^d.

Пусть $L_2(\mathrm{T}^d):=L_2(\mathrm{T}^d,\eta)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на T^d с мерой Хаара, $L_2^e(\mathrm{T}^d)\subset L_2(\mathrm{T}^d)$ - подпространство четных функций и $L_2^o(\mathrm{T}^d)\subset L_2(\mathrm{T}^d)$ подпространство нечетных функций.

Двухчастичный дискретный оператор Шредингера $h_\mu(k),\ k\in\mathrm{T}^d$, соответствующий системе двух частиц (бозонов) на решетке с контактным потенциалом $(\mu\neq 0)$ действует в пространстве $L_2^e(\mathrm{T}^d)$ по формуле:

$$h_\mu(k)=h_0(k)+\mu v, \tag{1}$$

где оператор $h_0(k),\ k\in\mathrm{T}^d$ является оператором умножения на функцию

$$\varepsilon_k(q) = \varepsilon\left(\frac{k}{2}+q\right)+\varepsilon\left(\frac{k}{2}-q\right),\ k,q\in \mathrm{T}^d.$$

Здесь

$$\varepsilon(q) = \sum_{j=1}^{d}(1-\cos q_j)$$

и $\mu \in \mathrm{P} = (-\infty,+\infty)$ - энергия взаимодействие частиц, а возмущающий оператор v - интегральный оператор ранга один

$$(vf)(q) = \int_{\mathrm{T}^d} f(q)\eta(\mathrm{d}q),\ f\in L_2^e(\mathrm{T}^d).$$

По теореме Вейля о существенном спектре, существенный спектр оператора $h_\mu(k),\ k\in \mathrm{T}^d$, совпадает со спектром оператора $h_0(k)$. Следовательно,

$$\sigma_{ess}(h_\mu(k)) = \sigma(h_0(k)) = [\varepsilon_{\min}(k),\varepsilon_{\max}(k)],$$

где

$$\varepsilon_{\min}(k) = \min_{q\in \mathrm{T}^d}\varepsilon_k(q) = 2\sum_{j=1}^{d}\left[1-\cos\frac{k_j}{2}\right],\ \ \varepsilon_{\max}(k) = \max_{q\in \mathrm{T}^d}\varepsilon_k(q) = 2\sum_{j=1}^{d}\left[1+\cos\frac{k_j}{2}\right].$$

Во второй главе предположим, что $d=1$. Основные результаты параграфа 2.1 главы 2 сформулированы в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть* $\mu\in \mathrm{P}_- = (-\infty,0)$ *и* $k\in \mathrm{T}^1$. *Тогда оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $z(\mu,k)$. *При этом* $z(\mu,k)$ *лежит левее существенного спектра* $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$, *т.е.* $z(\mu,k)<\varepsilon_{\min}(k)$. *Для любого фиксированного* $k\in \mathrm{T}^1$ *функция* $z(\cdot,k)$ *монотонно возрастающая аналитическая функция на* P_- *и для любого* $\mu\in \mathrm{P}_-$ *функция* $z(\mu,\cdot)$ *является четной, вещественно-аналитической функцией на* T^1. *При всех* $k\in \mathrm{T}^1\setminus\{0\} = (-\pi,0)\cup(0,\pi]$ *выполняется неравенство* $z(\mu,k)>z(\mu,0)$. *Для любых* $\mu\in \mathrm{P}_-$ *и* $k\in \mathrm{T}^1$ *соответствующая собственная функция* $\psi_{\mu,k}(\cdot) = \dfrac{\mu c}{z(\mu,k)-\varepsilon_k(\cdot)}$ *аналитична на* T^1, *где* $c\neq 0-$ *нормирующий множитель. Более того, векторнозначное отображение* $\psi_\mu : \mathrm{T}^1 \to L_2^e(\mathrm{T}^1)$, $k\to\psi_{\mu,k}$ *также аналитично.*

Теорема 2. *а) Пусть* $k\in(-\pi,\pi)$. *Тогда сущестует* $\mu_0<0$ *и при* $\mu\in(\mu_0,0)$ *имеет место следующее равенство:*

$$z(\mu,k) = \varepsilon_{\min}(k) - \mu^2\left[\sum_{n=0}^{\infty}a_n(k)\mu^n\right]^2,$$

где $a_n(k),\ \ k=1,2,\ldots$ *- действительные числа и* $a_0(k)=\pi\left(\cos\frac{k}{2}\right)^{-1/2}>0;$

b) Пусть $k=\pi.$ *Тогда* $z=2+\mu.$

Следствие 1. *Пусть* $k\in(-\pi,\pi).$ *Тогда при* $\mu\to -0$ *функция* $z(\mu,k)$ *имеет следующую асимптотику*

$$z(\mu,k)=\varepsilon_{\min}(k)-\frac{\pi^2\mu^2}{\cos\frac{k}{2}}+z^{(2)}(\mu,k),$$

где $z^{(2)}(\mu,k)=O(\mu^3).$

Теорема 3. *Для любого* $k\in \mathrm{T}^1$ *при* $\mu\to-\infty$ *функция* $z(\mu,k)$ *имеет следующую асимптотику* $z(\mu,k)=\mu+z^{(1)}(\mu,k),$ *где* $z^{(1)}(\mu,k)=O(1)$ *равномерно по* $k\in \mathrm{T}^1.$

Отметим, что для отталкивающих потенциалов $\mu\in \mathrm{P}_+=(0,+\infty)$ верны аналогичные результаты.

Рассмотрим строгое математическое описание параграфа 2.2 главы II. Двухчастичный дискретный оператор Шредингера $H_\mu(k), k\in \mathrm{T}^1,$ соответствующий системе двух частиц (фермионов) с взаимодействием на соседних узлах решетки, действует в $L_2^o(\mathrm{T}^1)$ по формуле

$$H_\mu(k)=H_0(k)+\mu V.$$

Здесь оператор $H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию

$$(H_0(k)f)(q)=E_k(q)f(q),\quad f\in L_2^o(\mathrm{T}^1),$$

$$E_k(q)=\varepsilon\left(\frac{k}{2}-q\right)+\varepsilon\left(\frac{k}{2}+q\right).$$

Дисперсионное соотношение $\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет следующую условию:

Условие 1. *Дисперсионное соотношение* $\varepsilon(\cdot)$ *является вещественно аналитической четной функцией на* T^1 *и имеет единственный невырожденный минимум в точке* $q=0\in \mathrm{T}^1.$

Оператор взаимодействия (возмущения) V является оператором ранга один и действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathrm{T}^1)$ по формуле

$$(Vf)(q)=\sin q\int_{\mathrm{T}^1}\sin t\, f(t)\eta(\mathrm{d}t).$$

Следовательно, существенный спектр оператора $H_\mu(k)$ совпадает со спектром оператора $H_0(k),$ т.е.

$$\sigma_{ess}(H_\mu(k))=\sigma(H_0(k))=[E_{\min}(k),E_{\max}(k)],$$

где

$$E_{\min}(k) = \min_{q\in T^1} E_k(q);\; E_{\max}(k) = \max_{q\in T^1} E_k(q).$$

Замечание 1. *Отметим, что в силу условия 1, существуют интервал* $\Gamma \subset T^1$ *содержащий точку* $k_0 = 0 \in T^1$ *и аналитическая в нем функция* $q_0(\cdot)$ *такие, что для любого* $k \in \Gamma$ *функция* $E_k(\cdot)$ *имеет единственный невырожденный минимум в* $0 \in T^1$. *Тогда в силу леммы Морса с параметром, существует аналитическое отображение* $q = \phi(k, y)$ *некоторого шара* $W_\gamma(0) \subset P$ *радиуса* $\gamma > 0$ *центром в* $y = 0$ *на некоторую окрестность* $U(0)$ *точки* $q = 0$ *такое, что для любого* $q \in U(0)$ *выполняется равенство*

$$E_k(q) = E_k(\phi(k, y)) = y^2 + E_{\min}(k).$$

Более того, якобиан $J(\phi(k, y), k)$ *отображения* $q = \phi(k, y)$ *удовлетворяет условию* $J(\phi(k,0),k) = J(0,k) > 0$ *при всех* $k \in \Gamma$..

Для каждого $k \in \Gamma$ и $z < E_{\min}(k)$ в $L_2^o(T^1)$ определим интегральный оператор Бирмана-Швингера $B_\mu(k, z)$ с ядром

$$B_\mu(k, z; p, q) = -\mu \sin p \sin q \int_{T^1} \frac{\sin^2 t\eta(\mathrm{d}t)}{E_k(t) - z}.$$

Отметим, что имеет место равенство

$$B_\mu(k, z) = -\mu V^{\frac{1}{2}} R_0(k, z) V^{\frac{1}{2}},$$

где $V^{\frac{1}{2}}$ – положительный квадратный корень положительного оператора V и $R_0(k, z)$ – резольвента оператора $H_0(k)$.

Пусть X – комплексная плоскость. Для любых $\mu < 0$ и $k \in T^1$ определим определителя Фредгольма оператора Шредингера

$$\Lambda_\mu(k, z) = 1 + \mu d(k, z),\;\; z \in X \setminus [E_{\min}(k), E_{\max}(k)],$$

где

$$d(k, z) = \int_{T^1} \frac{\sin^2 q\eta(\mathrm{d}q)}{E_k(q) - z}.$$

Заметим, что при $k \in \Gamma$ интеграл

$$d(k) = d(k, E_{\min}(k)) = \int_{T^1} \frac{\sin^2 q\eta(\mathrm{d}q)}{E_k(q) - E_{\min}(k)} > 0$$

существует и как функция, определенная на Γ, является аналитической.

$$\Lambda_\mu(k, E_{\min}(k)) = 1 + \mu \int_{T^1} \frac{\sin^2 q\eta(\mathrm{d}q)}{E_k(q) - E_{\min}(k)}.$$

Определим *предельный оператор Бирмана-Швингера* $B_\mu(k, E_{\min}(k))$ *и определитель Фредгольма* $\Lambda_\mu(k, E_{\min}(k))$ по следующим формулам

$$B_\mu(k, E_{\min}(k)) = \lim_{z \to E_{\min}(k)-} B_\mu(k,z) \text{ и } \Lambda_\mu(k, E_{\min}(k)) = \lim_{z \to E_{\min}(k)-} \Lambda_\mu(k,z).$$

Заметим, что $B_\mu(k, E_{\min}(k))$ является самосопряженным компактным и

$$B_\mu(k, E_{\min}(k)) f(p) = \int_{\mathrm{T}^1} B_\mu(k, E_{\min}(k); p, q) f(q) \eta(\mathrm{d}q), f \in L_2^o(\mathrm{T}^1).$$

Для любого $k \in \Gamma$ введем обозначение $\mu(k) := -\dfrac{1}{d(k)} < 0$.

Определение 1. *Будем говорить, что оператор* $H_\mu(k)$ *имеет виртуальный уровень на пороге* $E_{\min}(k)$ *спектра, если число* 1 *является собственным значением оператора* $B_\mu(k, E_{\min}(k))$ *при некотором* $\mu = \mu(k)$. *При этом число* $\mu = \mu(k)$ *называется пороговым значением константы связи.*

Замечание 2. *Пусть число* $E_{\min}(k)$ *является пороговым виртуальным уровнем оператора* $H_\mu(k)$, *т.е., число* $1-$ *собственное значение оператора* $B_\mu(k, E_{\min}(k))$, *и* $\psi \in L_2^o(\mathrm{T}^1)-$ *соответствующая собственная функция. Тогда функция*

$$f(q) = \frac{-\mu(V^{\frac{1}{2}}\psi)(q)}{E_k(q) - E_{\min}(k)} = \frac{-\sqrt{2}\mu \sin q}{E_k(q) - E_{\min}(k)} \int_{\mathrm{T}^1} \sin t \psi(t) \eta(\mathrm{d}t) \notin L_2^o(\mathrm{T}^1)$$

удовлетворяет уравнению Шредингера $H_\mu(k) f = E_{\min}(k) f$.

Введем следующие множества:

$$S_>(\mu) = \{k \in \Gamma : \quad \mu > \mu(k)\},$$
$$S_=(\mu) = \{k \in \Gamma : \quad \mu = \mu(k)\},$$
$$S_<(\mu) = \{k \in \Gamma : \quad \mu < \mu(k)\}.$$

Сформулируем основные результаты параграфа 2.2 главы 2.

Теорема 4. *Для любого* $\mu < 0$ *и при всех* $k \in S_<(\mu)$ *оператор* $H_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $z(\mu, k)$. *При этом* $z(\mu, k)$ *лежит левее порога спектра* $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu(k))$. *Соответствующая собственная функция* $f_{\mu,k}(q) = \dfrac{-\mu C \sin q}{E_k(q) - z(\mu,k)} \in L_2^o(\mathrm{T}^1)$ *является вещественно-аналитической функцией, где* $C \neq 0$ *- нормирующий множитель. Кроме того,* $z(\mu, k)$ *является четной вещественно-аналитической функцией на* $S_<(\mu)$. *Более того, отображение* $f_{\mu,k}(q) : S_<(\mu) \to L_2^o(\mathrm{T}^1)$, $k \to f_{\mu,k}(\cdot)$ *является векторнозначным аналитическим отображением;*

b) Для любого $\mu < 0$ *и* $k \in S_{=}(\mu)$ *оператор* $H_\mu(k)$ *имеет виртуальный уровень на пороге* $E_{\min}(k)$ *спектра* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$;

c) Для любого $\mu < 0$ *и при всех* $k \in S_{>}(\mu)$ *оператор* $H_\mu(k)$ *не имеет собственного значения, лежащего левее порога спектра* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$.

Следствие 2. *Так как функция* $\mu(k) < 0$ *является аналитической на торе* T^1 *при больших* $\mu < 0$ *следует существование собственного значения, лежащего левее порога спекра* $\sigma_{ess}(H_\mu(k))$.

Теорема 5. *Соотношение* $\mu \to \mu(k),\, k \in S_{<}(\mu)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $z(\mu,k) \to E_{\min}(k),\, k \in S_{<}(\mu)$. *При достаточно малых* $\mu(k) - \mu$, *имеет место следующее разложение:*

$$z(\mu(k),k) - z(\mu,k) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} b_n(k)(\mu(k)-\mu)^n\right]^2,$$

где $b_n(k), k = 1,2,\ldots$ *- действительные числа и* $b_1(k) = 2/J(0,k)\mu^2(k) > 0$.

Теорема 6. *Пусть* $\mu^* \in (\inf_\Gamma \mu(k), \sup_\Gamma \mu(k))$. *При* $k \in S_{=}(\mu^*) \cup S_{>}(\mu^*)$ *оператор* $H_{\mu^*}(k)$ *не имеет собственного значения, лежащего вне существенного спектра. Для любого* $k \in S_{<}(\mu^*)$ *оператор* $H_{\mu^*}(k)$ *имеет единственное собственное значение* $z^*(k) = z(\mu^*,k)$. *При этом* $z(\mu^*,k)$ *лежит левее существенного спектра и является аналитической функцией в* $S_{<}(\mu^*)$. *Более того, для любого* $k^* \in S_{=}(\mu^*)$ *имеет место следующая асимптотика при* $k \to k^*$, $k \in S_{<}(\mu^*)$:

$$z^*(k) = E_{\min}(k^*) + \frac{\partial E_{\min}(k)}{\partial k}\Big|_{k=k^*}(k-k^*) + O(|k-k^*|^2).$$

Теорема 7. *При* $\mu \to -\infty$ *для любого* $k \in \Gamma$ *функция* $z(\mu,k)$ *имеет следующую асимптотику* $z(\mu,k) = \dfrac{\mu}{2} + z^{(1)}(\mu,k)$, *где* $z^{(1)}(\mu,k) = O(1)$ *равномерно по* $k \in \Gamma$..

Рассмотрим строгое математическое описание главы III. Во третьей главе предположим, что $d = 2$. В этой главе рассматривается дискретный оператор Шредингера $h_\mu(k),\, k \in T^2$, определенной по формуле (1) .

Теорема 8. *При всех* $\mu \in P_{+} = (0,+\infty)$ *и* $k \in T^2$ *оператор* $h_\mu(k)$ *имеет единственное собственное значение* $z(\mu,k)$. *При этом* $z(\mu,k)$ *лежит правее спектра* $\sigma_{ess}(h_\mu(k))$. *Для любого* $k \in T^2$ *функция* $z(\cdot,k)$ *монотонно* *возрастает на* P_+ *и для любого* $\mu \in \mathrm{P}_+$ *функция* $z(\mu,\cdot)$ *является четной, вещественно-аналитической функцией на* T^2. *При всех* $k \in \mathrm{T}^2 \setminus \{\vec{\pi}\}$ *выполняются соотношения* $z(\mu,k) < z(\mu,\vec{\pi})$. *Для любых* $\mu \in \mathrm{P}_+$ *и* $k \in \mathrm{T}^2$ *собственная функция* $\psi_{\mu,k}(\cdot) = \dfrac{\mu c}{z(\mu,k) - \varepsilon_k(\cdot)}$ *аналитична на* T^2, *где* $c \neq 0$ *– нормирующий множитель. Более того, векторнозначное отображение* $\psi_\mu : \mathrm{T}^2 \to L^{2,e}(\mathrm{T}^2)$, $k \to \psi_{\mu,k}$ *также аналитично.*

Введем следующие множества:

$$\Pi_1 = \{k = (k_1,\pi) \in \mathrm{T}^2, k_1 \in (-\pi,\pi)\},\ \Pi_2 = \{k = (\pi,k_2) \in \mathrm{T}^2, k_2 \in (-\pi,\pi)\}.$$

Теорема 9. *a) Пусть* $k \in (-\pi,\pi)^2$. *Тогда существует* $\mu_0 > 0$ *и при* $\mu \in (0,\mu_0)$ *имеют места следующие равенства:*

$$z(\mu,k) = \varepsilon_{\max}(k) + b(k)\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\} + \sum_{n,m\ge 1,\, n+m>2} c(n,m;k)\mu^n \sigma^m,$$

где $b(k) > 0;\ c_0(k) = \pi\left(\cos\frac{k_1}{2}\cos\frac{k_2}{2}\right)^{-1/2} > 0;\ \sigma = \frac{1}{\mu}\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\}$ *и* $c(n,m;k)$, $n,m = 1,2,\ldots$ - *некоторые действительные числа.*

b) Пусть $k \in \Pi_i, i = 1,2.$ *Тогда*

$$z(\mu,k) = 2 + \varepsilon_{\max}(k\ \ ) + \mu^2\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)}(k)\mu^n\right]^2,$$

где $a_n^{(i)}(k)$, $n = 1,2,\ldots$ *- действительные числа и* $a_0^{(i)}(k) = \pi\left(\cos\frac{k_i}{2}\right)^{-1/2} > 0;$

c) Пусть $k = \vec{\pi} = (\pi,\pi)$. *Тогда* $z(\mu,\vec{\pi}) = 4 + \mu.$

Следствие 3. *a) Пусть* $k \in (-\pi,\pi)^2$. *Тогда* $z(\mu,k)$ *имеет следующую асимптотику при* $\mu \to 0$:

$$z(\mu,k) = \varepsilon_{\max}(k) + b(k)\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\} + o[\exp\{-\frac{1}{\mu c_0(k)}\}].$$

b) Пусть $k \in \Pi_i, i = 1,2.$ *Тогда при* $\mu \to 0$ *функция* $z(\mu,k)$ *имеет следующую асимптотику*

$$z^{(i)}(\mu,k) = 2 + \varepsilon_{\max}(k_i) + \frac{\pi^2\mu^2}{\cos\frac{k_i}{2}} + z^{(2)}(\mu,k),$$

где $z^{(2)}(\mu,k) = O(\mu^3)$.

c) Пусть $k = \vec{\pi}$. *Тогда* $z(\mu,\vec{\pi}) = 4$ *при* $\mu \to 0.$

Теорема 10. *Для любого* $k \in \mathrm{T}^2$ *при* $\mu \to +\infty$ *функция* $z(\mu, k)$ *имеет следующую асимптотику* $\mathrm{z}(\mu, k) = \mu + \mathrm{z}^{(1)}(\mu, k),$ *где* $\mathrm{z}^{(1)}(\mu, k) = O(1)$ *равномерно по* $k \in \mathrm{T}^2$.

Отметим, что при $\mu \in \mathrm{P}_{-}$ и $k \in \mathrm{T}^2$ верны аналогичные результаты.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертация посвящена исследованию существенного и дискретного спектра оператора Шредингера, соответствующего системе двух одинаковых частиц(бозоны и фермионы) на одномерной или двумерной решетке.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Установлено местонахождение существенного спектра и доказано существование собственного значения, лежащего левее или правее существенного спектра оператора Шредингера с контактным притягивающим или отталкивающим взаимодействием на одномерной и двумерной решетках.
2. Найдено разложение в сходящийся ряд в пороговом значении константы связи для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера системы двух частиц (бозоны) с контактным притягивающим или отталкивающим взаимодействием на одномерной и двумерной решетках.
3. Показано существование или отсуствие собственного значения, лежащего левее существенного спектра двухчастичного оператора Шредингера системы двух частиц (фермионы) с взаимодействием на соседних узлах одномерной решетки.
4. Найдено разложение в сходящийся ряд в отрицательном пороговом значении константы связи для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера системы двух частиц (фермионы) с взаимодействием на соседних узлах одномерной решетки.
5. Найдена асимптотика в окрестности порогового значения квазиимпульса для собственного значения двухчастичного оператора Шредингера системы двух частиц (фермионы).

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) PhD.27.06.2017.FM.02.01 SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY
TASHKENT INSTITUTE OF AGRICULTURAL IRRIGATION AND MECHANIZATION ENGINEERS

LAKAEV SHUHRAT SAIDAXMATOVICH

EIGENVALUES AND RESONANCES OF THE SCHRÖDINGER OPERATOR CORRESPONDING TO A SYSTEM OF TWO PARTICLES ON LATTICE

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand -2018

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2017.4.PhD/FM148.

Dissertation has been prepared at Samarkand State University and Tashkent Institute of Agricultural Irrigation and Mechanization engineers

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Xalxujaev Axmad Miyassarovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Official opponents:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Botirov G'olib Isroilovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**National university of Uzbekistan**

Defense will take place «____» _____________2018 at _____ at the meeting of Scientific Council number PhD.27.06.2017.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2018 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2018 year)

A.S. Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

A. Khatamov
Acting Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

I.A. Ikromov
Vice-chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to study the existence of eigenvalues and also to obtain a convergent expansion for the eigenvalue lying outside the essential spectrum of the Schrödinger operator corresponding to system of two identical particles (fermions or bosons) interacting via pairwise short-range potentials on one and two dimensional lattices.

The object of the research work Schrödinger operators corresponding to a system of two identical particles interacting via pairwise short-range potentials on one and two dimensional lattices.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the existence of eigenvalue and explicit form of the corresponding eigenfunction of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two identical particles(bosons) interacting via contact attractive or repulsive potential on one and two dimensional lattices is established;

a convergent expansion for eigenvalue at the coupling constant threshold of the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two identical particles (bosons) interacting via contact attractive or repulsive potential on one and two dimensional lattices;

it is shown that the left threshold of the essential spectrum may be a virtual level (resonance) or an eigenvalue for the two-particle Schrödinger operator associated to a system of two particles (fermions) interacting at neighboring sites on one-dimensional lattice and the existence or absence of eigenvalue lying to the left of the essential spectrum is proved;

a convergent expansion at the coupling constant threshold and quasi-momentum threshold for the eigenvalue of the two-particle Schrödinger operator associated to the two-particle system (fermions) with pair interactions at neighboring sites on a one-dimensional lattice is found.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation are applied in the following areas:

the existence of eigenvalues and threshold resonances of the two-particle discrete Schrödinger operators in the PhD dissertation of Shuhrat Lakaev with the title "Eigenvalues and resonances of the Schrödinger operators of a system of two-particles on a lattices" have been used in the research project LRGS/ TD/2011/ UKM/ ICT/03/02 (certificate of National University of Malaysia, December 28, 2017). The results and methods in the dissertation enabled to construct example for two-particle discrete Schrodinger operators having the threshold resonance, or threshold eigenvalues or regular points;

the existence of eigenvalues and threshold resonance of two-particle discrete Schrödinger operators in the PhD dissertation of Shuhrat Lakaev with title "Eigenvalues and resonances of Schrödinger operators of two-particle systems on a lattice" have been used in the research project PPP/GP/FST/30/14915(certificate of Islamic Science University of Malaysia, December 27, 2017). The results and methods in the dissertation enabled to obtain the basic properties of integral operators and lattice Schrödinger operators, and also approximation formulas and methods provide to receive approximating eigenvalues, singular points and eigenfunctions of the considered operators;

from the results on the dependence of the eigenvalues of the two-particle Schrödinger operator on the quasimomentum, the systems were used foreign journals J.Physics A: Math. Theor.-50,-2017.- 335202, J. Physics. A: Math. Theor.- 49, - 2016.- 145204., Theor. Math. Phys. 2014, Vol. 178 No 3, p336-346. 11p, when studying the spectrum of a discrete Schrödinger operator corresponding to a system of two identical particles.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 88 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (I часть; I part)

1. Lakaev S.N., Lakaev Sh.S. The existence of bound states in a system of three particles in an optical lattice // J.Phys. A: Math.Theor., 50 (2017), No. 335202, 17pp (№40. Research Gate. IF=1.84).
2. С. Н. Лакаев, А.М. Халхужаев, Ш.С.Лакаев. Асимптотики собственного значения двухчастичного дискретного оператора Шредингера // Теоретическая и математическая физика. - Москва, 2012. - т. 171. - №3. - С. 438-451. (№ 11. Springer. IF=0.831).
3. Халхужаев А.М., Лакаев Ш.С. Асимптотики собственных значений Дискретного оператора Шредингера с контактном потенциалом// Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2011. -№ 3. –С. 196-208 бетлар. (01.00.00; №6).
4. Лакаев Ш.С. Асимптотика собственного значения дискретного оператора Шредингера на одномерной решетке // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2012. -№ 2. –С. 44-53, (01.00.00; №6).
5. Халхужаев А.М., Лакаев Ш. С. Асимптотики собственного значения гамильтониана системы двух фермионов на одномерной решетке // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2013. -№ 4, -С. 152-164. (01.00.00; №6).
6. Лакаев Ш.С. Связанное состояние двухчастичного гамильтониана с отталкивающим потенциалом // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2015. -№ 2. –С. 52-62. (01.00.00; №6).
7. Лакаев Ш.С. Асимптотика собственного значения дискретного оператора Шредингера на двумерной решетке с отталкивающим потенциалом // Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2015. №3. –С. 54-64, (01.00.00; №6).

II бўлим (II часть; II part)

8. Lakaev S., Lakaev Sh. The existence of bound states of the two-particle discrete Schrödinger operators on lattices // -Математикалық Қоғамы, -Astana-2017.kz. – twms.
9. Lakaev S.N, Lakaev Sh.S. The existence of bound states of a system of three particles in an optical lattice // The second USA-Uzbekistan Conference on Analysis and Mathematical Physics. Urgench, Uzbekistan. August 08-12, 2017.
10. Lakaev Sh.S. The asymptotics behavior of an eigenvalue of the discrete Shrodinger operator on the two-dimensional lattice // Third International Russian-Kazakh Symposium. Kabardino-Balkarian Republic, Terskol, December, 2014. pp. 3-7.

11. Ш. С.Лакаев, А. М. Халхужаев Асимптотики собственного значения двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке // Амалий математика ва ахборот технологияларнинг замонавий муаммолари номли республика илмий конференцияси тўплами, -Урганч, 2012.
12. Xalxujaev A.M, Lakaev Sh.S.   On an asymptotics of eigenvalues of the Discrete Shrodinger operators// The 4 th Congress of the Turkic World Mathematical Socity(TWMS Baku), -Azerbayjan, July, 2011.
13. Xalxujaev A.M, Lakaev Sh.S. Asymptotics of the eigenvalues of discrete Shrodinger operator // Samarkand State University and Malaysian Mathematical Sciences Society Joint Mathematics Meeting, International training-seminars on mathematics (ITSM). -Samarkand, Uzbekistan, 2011. -pp.166-168.
14. Xalxujaev A.M, Lakaev Sh.S. The spectrum of two particle Hamiltonian on a one-dimensional lattice // Proceedings of the Scientific Republic Conference. *"Young Scientists*".   -Samarkand, Uzbekistan, 2009.