O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

FIZIKA – MATEMATIKA FAKULTETI

“AMALIY MATEMATIKA VA INFORMATIKA” KAFEDRASI

“5480100 – Amaliy matematika va informatika” ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha bakalavr darajasini olish uchun

Davlatov Jaloliddin Alisherovichning

“ Nuqta va qattiq jism kinematikasi masalalarini yechishda Mathcad paketidan foydalanish”

mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: o‘qituvchi:F.Shodiyev

“Himoya qilishga ruxsat beraman”

Fizika-matematika fakulteti dekani

____________ prof. A.Tashatov

“___” __________________ 2014 y.

Qarshi – 2014

Mundarija:

Kirish

Biz istedodli, fidoiy bolalarimiz, farzandlarimizga bilim va kasb cho'qqilarini zabt etish uchun qanot berishimiz kerak.

I.A. KARIMOV.

Tatqiqot mavzusining dolzarbligi: Keyingi yillarda xalq xo`jaligining biror sohasi qolmadiki, kommunikatsiya vositalari kirib kelmagan bo`lsa. Ayniqsa keyingi yillarda xalq xo'jaligining qurilish, mashinasozlik, avatsiya, yo'l qurilishi kabi sohalarida uchraydigan masalalarni avtomatlashtirish jadal rivojlanmoqda. Shunday ekan nuqta va qattiq jism kinimatikasining murakkab harakatlarini tadqiq etishda shaxsiy kompyuterlardan foydalanish amaliy ahamiyat kasb etadi. Yuqoridagilarni hisobga olgan holda turli mexanik sistemalarning harakatiga bog'liq holatlarni tadqiq etish, tajriba-sinov natijalarini tahlil qilishda zamonaviy paketlardan foydalanish, bu sohada yechilayotgan masalalarning sifat va samaradorligini oshirishda muhim ahamiyatga ega.

Ishning maqsadi: qattiq jism nuqtalarining murakkab kinematik harakatlarini tadqiq etishda Mathcad paketini qo'llab, qo`yilgan masalalardan sonli va grafik natijalar olish.

Ishda quyilgan vazifalar:

- nuqta va qattiq jismlarning murakkab kinematik harakatlariga doir masalalarining qo'yilinishini o'rganish;
- qo'yilgan masalalarni yechishga Mathcad paketini tadbiq etishni o'rganish;

Mavzuning o'rganilish darajasining qiyosiy tahlili: Ishda qo'yilgan masalalar o'zining keng ko'lamli amaliy qo'llanmalariga ega bo'lganligi uchun bir qator yetuk olimlar bu kabi masalalar bilan shug'ullanishgan. Hozirgi kunda ham ilmiy taroqqiyotlar olib borilmoqda. Bu sohada ish olib borgan olimlardan bir qanchasini keltirib o'tish mumkin. Masalan: M.T. O'rozboyev, S.Q. Azizqoriyev, Sh.X Yangurazov, I.V.Mesherskiy, A.A.

Yablonskiy, A.N. Bondarenko, E.G. Makarov, V.M. Starjinskiy, A.I. Plis, N.A. Silvina va boshqalar.

Olimlardan A.N. Bondarenko, E.G. Makarov, A.I. Plis, N.A. Silvinalar bir qator muhandislik amaliyotida uchraydigan masalalarini yechishda MathCAD paketini tadbiq etish bilan shug'ullanishgan. Shunga qaramasdan hali bu sohada o'rganilishi lozim bo'lgan bir qator masalalar mavjud. Shuning uchun ham ishda o'zining muhim amaliy qo'llanmalariga ega bo'lgan nuqta va qattiq jism kinematikasiga oid masalalarni Mathcad paketi yordamida tadqiq etish masalasi qaralmoqda.

Tadqiqotning ilmiy yangiliklari :

- nuqta va qattiq jismlarning murakkab harakatlarini tadqiq etishda Mathcad paketini qo'llashni o'rganish;
- qo'yilgan masaladan sonli va grafik natijalar olish uchun mo'ljallangan paketga beriladigan buyruqlar strukturasini ishlab chiqish;
- qo'yilgan masala uchun turli parameterlarga bog`liq holda sonli va grafik natijalar olish, hamda ularni tahlil qilish.

Tadqiqot predmeti va ob'ekti: murakkab harakatlanuvchi nuqta va mexanik sistemalar.

Tadqiqotning ilmiy ahamiyati:

- mavzuga oid ilmiy-uslubiy, nazariy adabiyotlarni o'rganish;
- ta'lim to'g'risidagi davlat hujjatlari, DTS talablari, BMI tayyorlash yo'riqnomasi hamda ilg'or mutaxassis olimlarning fikrlarini o'rganish;
- mavzuga aloqador ta'lim sohasidagi internet saytlaridan foydalanish.

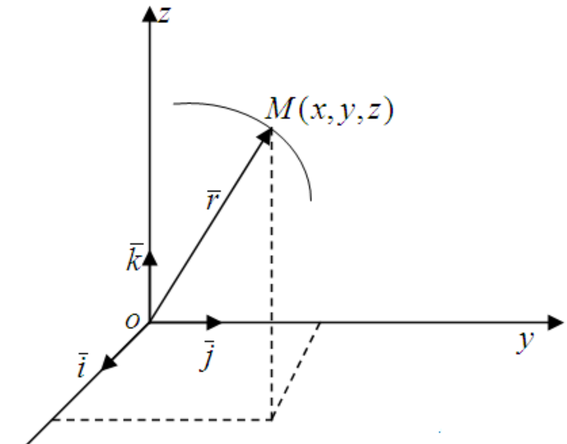
Bitiruv malakaviy ishning tarkibi va tuzilishi: ish kirish, uchta bob, sakkizta bo`lim, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar va internet resurslaridan tashkil topgan.

I bob. Nuqta va qattiq jismlar kinematikasi.

1.1. Jism nuqtasining kinematikasi.

Kinematikada nuqtaning harakati asosan, vektor, koordinatalar va tabiiy usulda beriladi.

Vektor usuli. Bu usulda M nuqtaning holati biror qo‘zg‘almas O markazdan o‘tkazilgan r radius-vektor bilan aniqlanadi (1.1-rasm). M nuqta harakatlanganda uning r radius-vektori vaqt o‘tishi bilan ma’lum qonun asosida o‘zgaradi, ya’ni skalyar argument t ning vektorli funksiyasidan iborat bo‘ladi:



1.1-rasm

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \qquad (1.1)$$

Agar $\bar{r}(t)$ funksiya ma’lum bo‘lsa, t vaqtning har bir payti uchun A nuqtaning holati ma’lum bo‘ladi. Shu sababli (1.1) tenglama nuqtaning vektor shaklidagi harakat tenglamasi yoki harakat qonuni deyiladi. Nuqta harakatining (1.1) vektorli tenglamasi t vaqtning bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanadigan funksiyasi bo‘ladi. $r - const$ bo‘lsa, nuqta tinch holatda bo‘ladi.

Koordinatalar usuli. $Oxyz$ sanoq sistemasiga nisbatan harakatlanayotgan M nuqtaning holatini uning uchta x, y, z Dekart koordinatalari orqali aniqlash mumkin (1.1-rasm). Nuqta harakatlanganda uning koordinatalari vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi. Binobarin, M nuqtning koordinatalari t vaqtning funksiyasidan (bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanadigan) iborat bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= f_1(t), \\ \bar{y} &= f_2(t), \\ \bar{z} &= f_3(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Nuqta koordinatalari bilan vaqt orasidagi (1.2) munosabatlar berilgan bo‘lsa, M nuqtaning fazoda istalgan paytdagi holati ma’lum bo‘ladi. Agar vaqt o‘tishi bilan $x - const,\ y - const,\ z - const$ bo‘lsa, ya’ni x, y, z lar o‘zgarmasa, nuqta mazkur sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda bo‘ladi. Shu sababli nuqtaning Dekart koordinatalaridagi harakat tenglamasi deb ataluvchi (1.2) tenglamalar nuqtaning holatini butunlay aniqlay oladi.

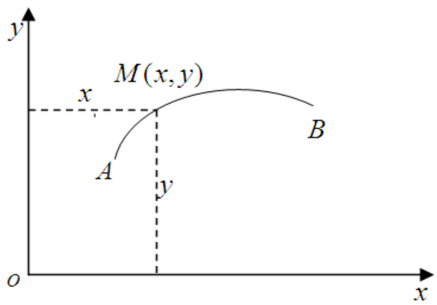
Nuqta harakati vektor va koordinata usullarida berilganda, ular orasida quyidagi munosabat mavjud bo‘ladi: $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, bunda $\bar{i},\ \bar{j}, \bar{k}$ lar koordinata o‘qlarining birlik vektorlaridir.

(1.2) tenglamalardan t vaqtni yo‘qotib, nuqtaning trayektoriya tenglamasi aniqlanadi. Masalan, (1.2) ning birinchisini t ga nisbatan yechib $t = \varphi(x)$ ni olamiz. Topilgan t ni (1.2) tenglamalarning ikkinchisiga va uchinchisiga qo‘yib quyidagi tenglamalarni olamiz:

$$y = f_2\{\varphi(x)\} = F_1(x)\,; \qquad z = f_3\{\varphi(x)\} = F_2(x) \qquad (1.3)$$

(1.3) tenglamalar nuqta trayektoriyasining tenglamasini ifodalaydi.

Agar nuqta trayektoriyasi bir tekislikda yotsa, u holda xy tekislik uchun mazkur trayektoriya yotgan tekislikni olamiz (1.2-rasm). Bunda nuqtaning harakat tenglamasi

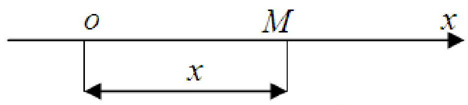


1.2-rasm

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

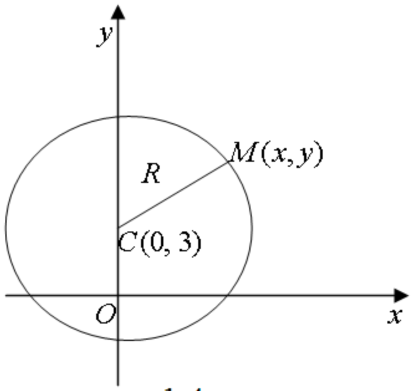
shaklida yoziladi. (1.4) tenglamalar nuqtaning tekislikdagi harakat tenglamalari deyiladi.

Nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsa, harakat trayektoriyasi bo‘ylab x o‘qni yo‘naltiramiz, bu holda $x = f(t)$ nuqtaning to‘g‘ri chiziqli harakat tenglamasini ifodalaydi (1.3-rasm).



1.3-rasm

Nuqtaning harakati, Dekart koordinatalaridan tashqari, qutb koordinatalarida, silindrik koordinatalarda, sferik koordinatalarda yoki egri chiziqli koordinatalarda ham berilishi mumkin. Masalan, harakati
$$\begin{aligned} x &= 5\cos t, \\ y &= 3-5\sin t \end{aligned}$$
tenglamalar bilan berilgan (bunda t sekundda, $x, y-$santimetrda o‘lchanadi) nuqtaning trayektoriyasi tenglamasini aniqlash uchun bu tenglamalarni
$$\begin{aligned} x &= 5\cos t, \\ y-3 &= -5\sin t \end{aligned}$$
ko‘rinishida yozamiz va ularni kvadratga oshirib qo‘yamiz. Bunda t vaqt berilgan tenglamalardan yo‘qotilib, nuqtaning trayektoriyasi tenglamasi hosil bo‘ladi:
$$x^2+(y-3)^2=25.$$
Demak, nuqtaning trayektoriyasi markazi $C(0;3)$ nuqtada bo‘lgan, radiusi $R=5sm$ ga teng aylanadan iborat (1.4-rasm).



1.4-rasm

Aytaylik, nuqta bir vaqtning o‘zida
$$\begin{aligned} x &= Ae^{-ht}\cos(kt+\alpha) \\ y &= Ae^{-ht}\sin(kt+\alpha) \end{aligned},$$
qonun asosida o‘zaro perpendikulyar yo‘nalishda so‘nuvchan tebranma harakatda ishtirok etsin. Bunda $A>0, h>0, k>0$ va α lar o‘zgarmas miqdorlardir. Mazkur nuqtaning qutb koordinatalaridagi harakat tenglamasi va trayektoriyasi tenglamasini aniqlaymiz.

Ma’lumki, qutb koordinatalari r, φ bilan Dekart koordinatalari orasida quyidagi munosabatlar mavjud bo‘ladi:
$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$$
$$r^2=\sqrt{x^2+y^2},\ \ tg\varphi=\frac{y}{x},\ \ x\neq 0.$$

Shundan kelib chiqib,
$$r = Ae^{-ht}\ , \qquad 1.1'$$
$$tg\varphi = tg(kt+\alpha)\quad yoki\quad \varphi = kt+\alpha \qquad 1.2'$$

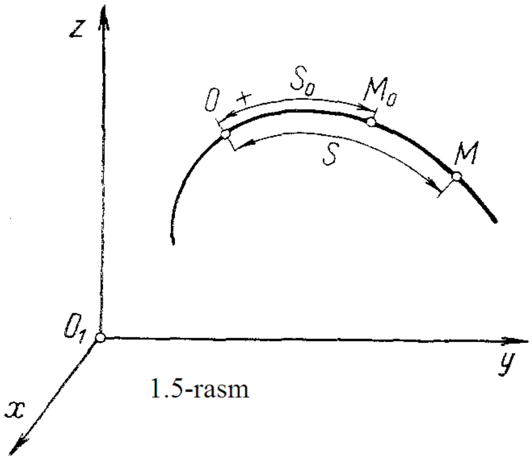
bo‘lishini aniqlaymiz. 1.2$'$ dan t ni topib, uni 1.1$'$ ga qo‘ysak,

$$r = Ae^{-\frac{h}{k}(\varphi-\alpha)} \qquad 1.3'$$

ko‘rinishdagi trayektoriya tenglamasi hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, nuqtaning trayektoriyasi 1.3$'$ tenglama bilan ifodalanadigan logarifmik spiraldan iboratdir.

Tabiiy usul. Nuqtaning trayektoriyasi ma’lum bo‘lsa, nuqta harakatini tabiiy usulda aniqlash qulay bo‘ladi.



1.5-rasm

Nuqtaning trayektoriyasi biror O_1xyz koordinata sistemasiga nisbatan ma’lum bo‘lsin (1.5-rasm). Trayektoriyaning biror O nuqtasini sanoq boshi uchun tanlab olib, uni qo‘zg‘almas nuqta deb qaraymiz. Harakatlanayotgan nuqtaning holati trayektoriya bo‘ylab hisoblanadigan $\left|\breve{OM}\right| = s$ yoy koordinatasi bilan aniqlanadi. Nuqtaning trayektoriyadagi holatini bir qiymatli aniqlash uchun yoy koordinatasning musbat va manfiy yo‘nalishlari ko‘rsatiladi.

Vaqt o‘tishi bilan nuqta chiziq bo‘ylab harakatlanishi natijasida uning yoy koordinatasi s o‘zgarib boradi hamda t vaqtning bir qiymatli, uzluksiz va differensiallanadigan funksiyasidan iborat bo‘ladi:

$$s = f(t). \qquad (1.5)$$

Bu munosabat nuqtaning harakat tenglamasi yoki chiziq bo`ylab harakat qonuni deyiladi.

Agar $f(t)$ funksiya ma’lum bo‘lsa, t vaqtning har bir payti uchun s ni aniqlab, uni ishorasiga qarab O nuqtadan trayektoriya bo‘yicha qo‘yamiz. Natijada M nuqtaning berilgan paytdagi holati aniqlanadi.

Shunday qilib, M nuqtaning harakatini tabiiy usulda anqlash uchun uning trayektoriyasi, trayektoriyada olingan O qo‘zg‘olmas nuqta, yoy koordinatasining hisoblash yo‘nalishi va $s = f(t)$ harakat tenglamasi berilgan bo‘lishi kerak.

Nuqtaning s yoy koordinatasi bilan trayektoriya bo‘ylab o‘tgan σ yo‘li doimo bir xil bo‘lavermaydi. Agar M nuqta O qo‘zg‘almas nuqtadan boshlab $[0, t]$ vaqt oraligida doimo bir yo‘nalishda harakat qilsa, nuqtaning shu vaqt ichida yoy koordinatasi bilan o‘tgan yo‘li o‘zaro teng bo‘ladi.

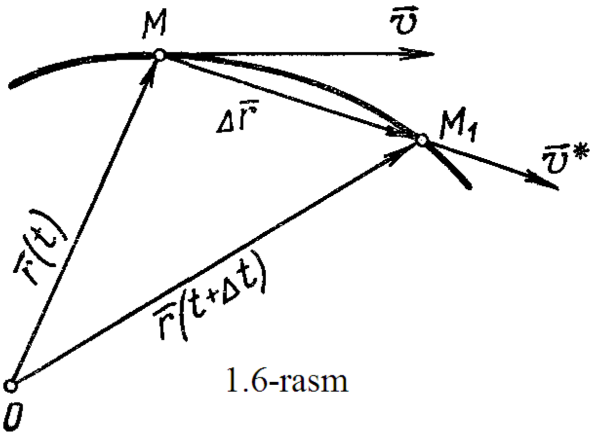
Agar t_0 boshlangich vaqtda nuqta M_0 holatda bo‘lib, uning holati s_0 yoy koordinatasi vositasida, t vaqtdan keyingi M holati $O\breve{M} = s$ yoy koordinatasi bilan aniqlansa (1.5-rasm), $t - t_0$ vaqt oralig‘ida nqtaning bir tomonga harakatlanishi natijasida o‘tilgan yo‘l

$$\sigma = \left| M_0\breve{M} \right| = \left| O\breve{M} - O\breve{M}_0 \right| = \left| s - s_0 \right| \qquad (1.6)$$

formula bilan aniqlanadi; bu holda o‘tilgan yo‘l bilan yoy koordinatasi teng bo‘lmaydi.

Demak, nuqta sanoq boshidan bir tomonga harakatlansa, uning yoy koordinatasi moduli nuqtaning o‘tgan yo‘lini ifodalaydi. Agar doimo $s = const$ bo‘lsa, nuqta berilgan sanoq sistemasiga nisbatan tinch holatda bo‘ladi.

Nuqta harakati vektor usulida berilganda uning radius-vektori $\bar{r} = \bar{r}(t)$ har on uchun vaqt funksiyasi sifatida aniqlanadi. Faraz qilaylik, t vaqt biror O markazga nisbatan $\bar{r}$ radius-vektor bilan aniqlanuvchi nuqta M holati egallasin hamda $t_1 = t + \Delta t$ vaqtdan keyin M_1 holatni egallab, radius-vektori $\bar{r}_1 = \bar{r}(t + \Delta t)$ bo‘lsin (1.6-rasm). U holda $\bar{r}(t + \Delta t) - \bar{r}(t) = \Delta\bar{r}$ nuqtaning Δt vaqtdagi ko‘chishini ifodalaydi. $\Delta\bar{r}$ ni nuqtaning vektor ko‘chishi deyiladi.



1.6-rasm

Nuqtaning vektor ko‘chishi $\Delta\bar{r}$ ning shu ko‘chish uchun ketgan Δt vaqtga nisbati mazkur nuqtaning o‘rtacha tezligi deyiladi. O‘rtacha tezlik vektorini $\bar{v}^*$ bilan belgilasak:

$$\bar{v}^* = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \qquad (1.7)$$

Bunda Δt skalyar miqdor bo‘lganidan, $\bar{v}^*$ vektorning yo‘nalishi $\Delta\bar{r}$ *ning* ning yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi. Nuqta o‘rtacha tezlik vektorining Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan paytdagi tezlik vektori deyiladi va $\bar{v}$ bilan belgilanadi:

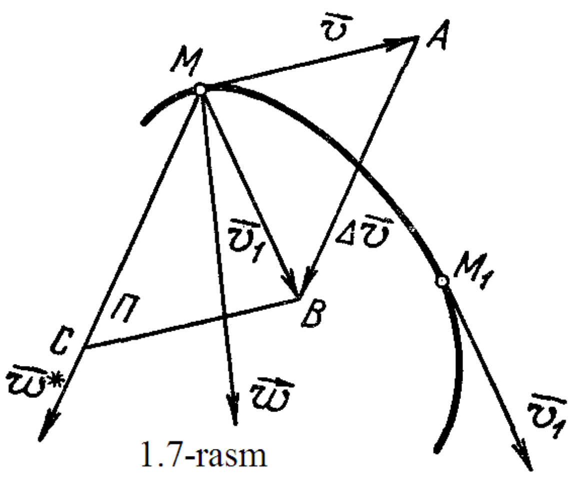
$$\bar{v}^* = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \qquad yoki \qquad \bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \qquad (1.8)$$

Shunday qilib, nuqtaning berilgan paytdagi tezlik vektori nuqtaning radius-vektoridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilagi teng bo‘ladi.

$\bar{v}^*$ vektor harakat yo‘nalishida $\overline{MM_1}$ kesuvchi Bo‘ylab yo‘naladi. Δt nolga intilganda, M_1 nuqta trayektoriya bo‘ylab M ga intiladi, shu sababli MM_1 vektor limit holatida egri chiziqqa M nuqtada o‘tkazilgan urinma bilan ustma-ust tushadi. Binobarin, M nuqtaning tezlik vektori $\bar{v}$ trayektoriyaga M nuqtada o‘tkazilgan urinma bo‘ylab harakat yo‘nalishi tomon yo‘naladi. (1.8) ga ko‘ra, tezlik vektori t vaqtning vektorli funksiyasi bo‘ladi. Vaqt o‘tishi bilan tezlik vektori o‘zgaradi. SI birliklar sistemasida tezlik m/s da o‘lchanadi.

Vaqt o‘tishi bilan nuqta tezligining miqdor va yo‘nalish jihatidan o‘zgarishini ifodalovchi kattalik tezlanish deyiladi.

Faraz qilaylik, harakatlanuvchi nuqta t vaqtda M holatda bo‘lib, tezligi $\bar{v}$ ga teng bo‘lsin, $t+\Delta t$ vaqt o‘tgandan so‘ng nuqta M_1 holatga kelib, tezligi $\bar{v}_1$ bo‘lsin (1.7-rasm). Tezlik vektorining Δt vaqt ichidagi o‘zgarishini aniqlaymiz.



1.7-rasm

Buning uchun vektorni o‘ziga parallel ravishda M nuqtaga ko‘chirib, bu nuqtada tomonlaridan biri $\bar{v}$ tezlikka, diagonali esa $\bar{v}_1$ tezlikka teng $MABC$ parallelogramm yasaymiz. U holda parallelogrammning ikkinchi tomoni Δt vaqt ichida tezlikning o‘zgarishi $\Delta\bar{v}$ ni ifodalaydi.

Nuqta tezlik vektorining o‘zgarishi $\Delta\bar{v}$ ning shu o‘zgarish uchun ketgan Δt vaqtga nisbati mazkur nuqtaning Δt vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezlanshi deyiladi. O‘rtacha tezlanish vektorini $\bar{w}^*$ bilan belgilasak,

$$\bar{w}^* = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}. \qquad (1.9)$$

$\bar{w}^*$ vektorning yo‘nalishi $\Delta\bar{v}$ ning yo‘nalishi bilan bir xil bo‘lib, nuqta trayektoriyasining botiq tomoniga yo‘naladi. Nuqtaning o‘rtacha tezlanish vektori $\bar{w}^*$ ning Δt nolga intilgandagi limiti nuqtaning berilgan paytdagi tezlanish vektori deyiladi va $\bar{w}$ bilan belgilanadi: $\bar{w} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}$ yoki (1.8) ga ko‘ra

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (1.10)$$

Demak, nuqtaning berilgan paytdagi tezlanish vektori nuqta tezlik vektorining vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli xosilasiga yoki radius-vektorining vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli xosilasiga teng.

Agar nuqta bir tekislikda yotuvchi trayektoriya bo‘yicha harakatlansa, u holda $\bar{w}$ tezlanish vektori, o‘rtacha tezlanish vektori $\bar{w}^*$ kabi, trayektoriya tekisligida yotadi hamda trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘naladi.

Agar nuqtaning trayektoriyasi bir tekislikda yotmaydigan egri chiziqdan iborat bo‘lsa, $\bar{w}^*$ vektor M nuqtadan o‘tuvchi $MABC$ parallelogramm tekisligi $Ï$ da yotadi hamda trayektoriyaning botiq tomoniga $\Delta\bar{v}$ ga parallel ravishda yo‘naladi (1.7-rasm). Bunda $Ï \parallel \bar{v}_1$ bo‘ladi. M_1 nuqta M ga intilgandagi limitda, bu tekislikning egallagan holati egrilik tekisligi yoki yopishma tekislik deyiladi. Demak, umumiy holda tezlanish vektori M nuqtada trayektoriyaga o‘tkazilgan egrilik tekisligida yotadi va trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘naladi. SI birliklar sistemasida tezlanish m/c^2 da o‘lchanadi.

Nuqtaning harakati biror qo‘zg‘almas Dekart koordinata o‘qlariga nisbatan $x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t)$ ko‘rinishdagi tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin (1.8a-rasm). U holda nuqtaning radius-vektori $\bar{r}$ va tezligi $\bar{v}$ ni koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari orqali quyidagicha yozish mumkin:

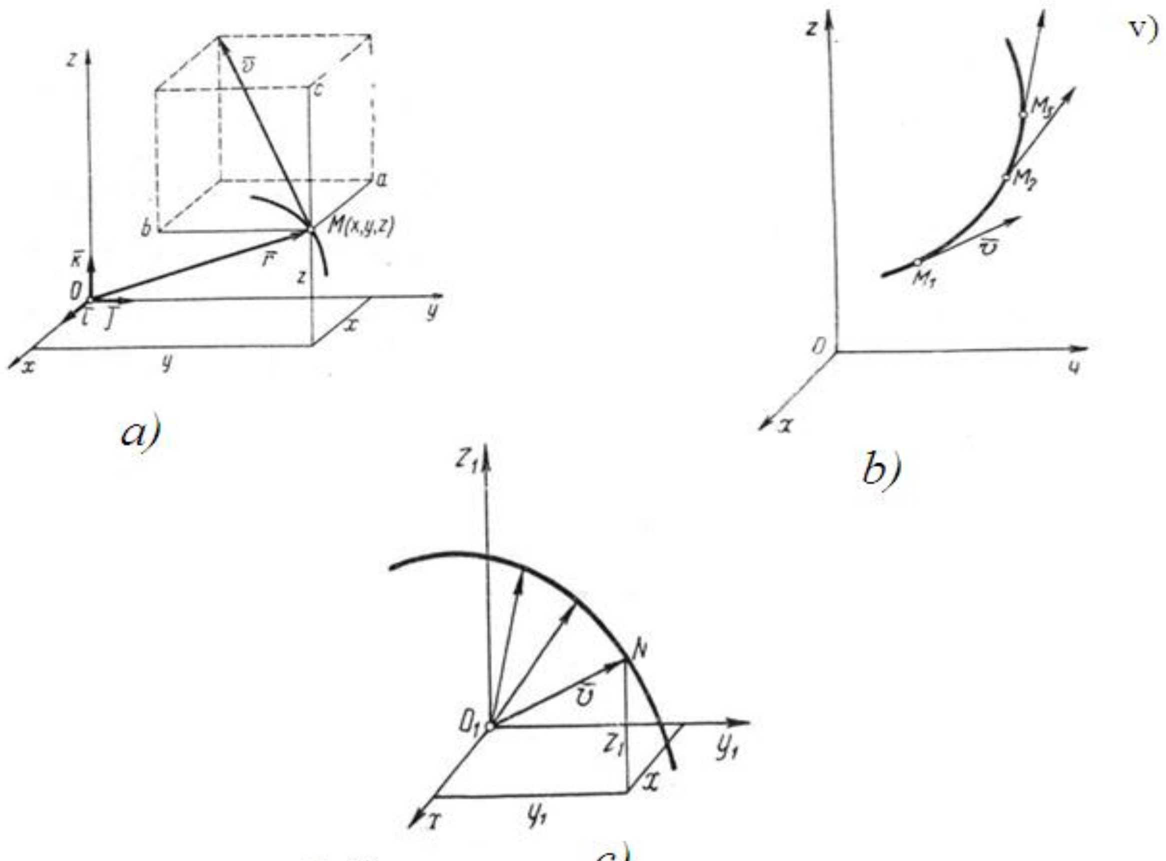
$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,, \tag{1.11}$$

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}\,, \tag{1.12}$$

bu yerda, x, y, z lar M nuqtaning koordinatalarini, $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ lar koordinata o‘qlarining birlik vektorlarini v_x, v_y, v_z lar esa tezlik vektorining koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaydi. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ birlik vektorlarining miqdori va yo‘nalishi o‘zgarmasligini va (1.8) ifodani e’tiborga olib, (1.11) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\bar{v} = \frac{\overline{dr}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \tag{1.13}$$

(1.12) va (1.13) formulalardagi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektorlar oldidagi koeffitsiyentlarni solishtirib, tezlikning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz:



1.8-rasm

$$v_x \frac{dx}{dt} = x,\ v_y \frac{dy}{dt} = y,\ v_z \frac{dz}{dt} = z \tag{1.14}$$

Demak, tezlik vektorining biror qo‘zg‘almas Dekart koordinatalar o‘qidagi proyeksiyasi nuqtaning mos koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilaga teng bo‘ladi. Ma, Mb, Mc qirralari koordinata o‘qlariga parallel va v_x, v_y, v_z larning miqdoriga teng bo‘lgan parallelepipedning diagonali M nuqtaning tezligini ifodalaydi:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ . \tag{1.15}$$

$$\cos(\bar{v}, \bar{i}) = \frac{x}{v},\ \cos(\bar{v}, \bar{j}) = \frac{y}{v}, \cos(\bar{v}, \bar{k}) = \frac{z}{v}\ . \tag{1.16}$$

Nuqta $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan biror traektoriya bo‘ylab harakatlansin (1.8b-rasm). Nuqtaning traektoriyada egallagan bir necha $M_1, M_2, M_3, ...,$ ketma-ket holatlariga mos tezliklarining barchasini miqdor va yo‘nalishlarini o‘zgartirmay, biror O_1 qutbga keltiraylik (1.8v-rasm). Bu holda tezlik vektorlarining uchlari biror uzluksiz egri chiziqni chizadi. Mazkur egri chiziq nuqta tezligining godografi deyiladi.

Nuqtaning $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati ma’lum bo‘lganda tezlik godografi tenglamasini chiqarish uchun tezliklar keltirilgan O_1 qutbda $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga parallel bo‘lgan $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasini o‘tkazamiz. Tezlik godografida biror N nuqtani olib, uning koordinatalarini $x_1y_1z_1$ bilan belgilaymiz. N nuqtaning radius-vektori $\overline{O_1N} = \bar{v}$ bo‘lib, bunda $\bar{v}$ — trayektoriya bo‘ylab harakatlanayotgan nuqtaning tezligi. Agar nuqtaning harakat qonuni (1.2) ko‘rinishida berilsa, u holda N nuqtaning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \dot{x}, \\ y_1 &= \dot{y}, \\ z_1 &= \dot{z}, \end{aligned}\right\} \quad \text{yoki} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{df_1(t)}{dt} \\ y_1 &= \frac{df_2(t)}{dt} \\ z_1 &= \frac{df_3(t)}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

Bu tenglamalar N nuqtaning tezlik godografi bo‘yicha harakat tenglamasini ifodalaydi. (1.17) tenglamalardan t vaqtni chiqarib tashlasak, $O_1x_1y_1z_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan tezlik godografining tenglamasini hosil qilamiz.

Agar nuqta miqdor jihatdan o‘zgarmas tezlik bilan harakatlansa, bunday harakat tekis harakat deyiladi. Egri chiziqli tekis harakatdagi nuqtaning tezlik godografi, radiusi miqdor jihatdan tezlikka teng bo‘lgan sfera sirtidagi egri chiziqdan iborat bo‘ladi. To‘gri chiziqli tekis harakatdagi nuqtaning tezlik godografi bitta nuqtadan iborat bo‘ladi.

Harakati koordinatalar usulida (1.2) tenglamalar bilan berilgan nuqtaning tezlanishini aniqlash uchun $\overline{w}$ tezlanishni koordinata o‘qlaridagi w_x, w_y, w_z proyeksiyalari orqali ifodalaymiz:

$$\overline{w} = w_x\bar{i} + w_y\bar{j} + w_z\bar{k}\,. \tag{1.18}$$

(1.12) va (1.18) larni (1.10) ga qo‘yamiz:

$$w_x\bar{i} + w_y\bar{j} + w_z\bar{k} = \frac{d}{dt}(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}) = \frac{dv_x}{dt}\bar{i} + \frac{dv_y}{dt}\bar{j} + \frac{dv_z}{dt}\bar{k}\,.$$

Bu tenglikning ikki tomonidagi $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ birlik vektorlar oldidagi koeffisentlarni solishtirib, (1.14) ni e’tiborga olsak, quyidagi ifodaga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}. \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Demak, tezlanish vektorining biror qo‘zg‘almas Dekart koordinatalar o‘qidagi proyeksiyasi nuqtaning mos koordinatalaridan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi hosilaga yoki tezlik vektorining mos koordinata o‘qlaridagi proyeksiyasidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi hosilaga teng bo‘ladi.

Nuqta tezlanishining moduli va yo‘nalishi quyidagi formulalardan topiladi:

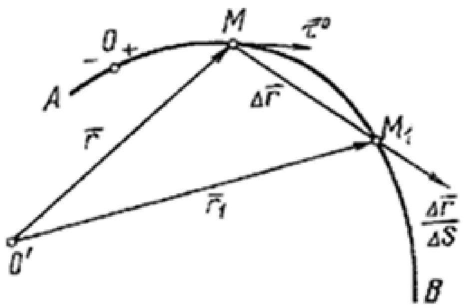
$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\,; \tag{1.20}$$

$$\cos(\overline{w},\bar{i})=\frac{\ddot{x}}{w},\ \ \cos(\overline{w},\bar{j})=\frac{\ddot{y}}{w},\ \ \cos(\overline{w},\bar{k})=\frac{\ddot{z}}{w}. \qquad (1.21)$$

Agar nuqta to‘g‘ri chiziqli harakatda bo‘lsa, uning harakati bitta

$$x=f(t)$$

tenglama bilan aniqlanadi. Bu holda nuqta tezligi va tezlanishining miqdori $v=|v_X|=|\dot{x}|=\left|\frac{dx}{dt}\right|,\ w=|w_X|=\ddot{x}=\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|$ bo‘ladi. Agar $v_X>0$ bo‘lsa, nuqtaning tezligi x o‘qning musbat yo‘nalishi bo‘yicha $v_X<0$ bo‘lsa, x o‘qning musbat yo‘nalishiga teskari yo‘naladi. Tezlanishning yo‘nalishi ham shunday aniqlanadi.



1.9-rasm

Agar vaqt o‘tishi bilan to‘g‘ri chiziqli harakatdagi nuqta tezlanishining miqdori orta borsa, ya’ni nuqtaning tezligi bilan tezlanishi bir yo‘nalishda bo‘lsa, bunday harakat tezlanuvchan harakat deyiladi.

Vaqt o‘tishi bilan nuqta tezlanishining miqdori kamaya borsa, ya’ni tezlanishning yo‘nalishi tezlikka qarama-qarshi yo‘nalsa, bunday harakat sekinlanuvchan harakat deyiladi.

Nuqta harakati tabiiy usulda berilganda, ya’ni uning AB trayektoriyasi, trayektoriyada olingan o‘zralmas O nuqta (sanoq boshi) va yoy koordinatasining hisoblash yo‘nalishi hamda trayektoriya bo‘ylab harakat tenglamasi $s=f(t)$ berilganda nuqtaning tezligini aniqlaymiz (1.9-rasm). Nuqta t vaqtda M holatni, $t+\Delta t$ vaqtdan keyin M_1 holatni egallasin. Mazkur nuqtalarning yoy koordinatalarini aniqlaymiz:

$$s=O\breve{M},\ s_1=OM_1=O\breve{M}+MM_1=s+\Delta s\ .$$

Ixtiyoriy O' nuqtani olib, bu nuqtadan M va M_1 nuqtalarning mos ravishda $\bar{r}$ va $\bar{r}_1$ radius-vektorlarini o‘tkazamiz hamda (1.8) ga asosan M nuqtaning tezligini aniqlaymiz: $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$.

Nuqtaning $\bar{r}$ radius-vektori s yoy koordinatasiga bog‘liq, ya’ni $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Shu sababli nuqtaning tezligi uchun quyidagi ifodani yozish mumkin:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}, \tag{1.22}$$

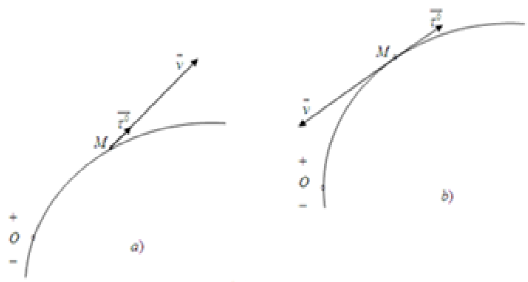
bunda

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}. \tag{1.23}$$

$\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s}$ vektorning yo‘nalishi $\Delta \bar{r}$ vektorniki bilan bir xil bo‘ladi. $\Delta s \to 0$ da uning yo‘nalishi yoy koordinatasi ortib boradigan tomonga M nuqtada trayektoriyaga o‘tkazilgan urinmaning yo‘nalishiga intiladi.

Bu holda

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{M_1 \to M} \frac{\left| \overline{MM_1} \right|}{MM_1} = 1.$$



1.10-rasm

Shunday qilib, $\frac{d\bar{r}}{ds}$ vektor miqdor jihatdan birga teng hamda yoy kordinatasi ortib boradigan tomonga M nuqtada trayektoriyaga o‘tkazilgan urinma bo‘yicha yo‘naladi, ya’ni $\frac{d\bar{r}}{ds}$ vektor urinmaning birlik vektori $\overline{\tau^{\circ}}$ ni ifodalaydi (1.10-rasm):

$$\overline{\tau^{\circ}} = \frac{d\bar{r}}{ds} \tag{1.24}$$

(1.24) ni (1.22) ga qo‘yib, nuqtaning tezligini aniqlaymiz:

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \overline{\tau^{\circ}}, \tag{1.25}$$

bunda

$$\frac{ds}{dt} = v \qquad (1.26)$$

tezlikning algebraik qiymatini ifodalaydi.

Agar vaqtning biror paytida $\frac{ds}{dt} > 0$ bo‘lsa, s funksiya shu paytda o‘suvchan bo‘ladi va $\bar{v}$ tezlikning yo‘nalishi urinmaning birlik vektori $\overline{\tau_1^\circ}$ bilan bir xil bo‘ladi (1.10a-rasm). Agar vaqtning biror paytida $\frac{\Delta s}{dt} < 0$ bo‘lsa, s funksiya shu paytda kamayuvchan bo‘ladi va $\bar{v}$ tezlikning yo‘nalishi $\overline{\tau^\circ}$ ga teskari bo‘ladi (1.10b-rasm).

Agar $\frac{ds}{dt}$ hosila uzluksiz ravishda o‘zgarib $\frac{ds}{dt} = 0$ orqali o‘tganda o‘z ishorasini o‘zgartirsa, s yoy koordinatasi bu paytda maksimum yoki minimum qiymatga erishadi, ya’ni nuqtaning harakat-yo‘nalishi o‘zgaradi.

Shunday qilib, $v = \frac{ds}{dt}$ nuqta tezligining algebraik qiymati bilan birga trayektoriyadagi yo‘nalishini ham ifodalaydi.

Nuqta tezlanishining tabiiy koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalarini aniqlaymiz. Buning uchun (1. 25) formulani quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\bar{v} = v\overline{\tau^\circ},$$

bunda: τ°-urinmaning birlik vektori; $v = \frac{ds}{dt}$ tezlikning algebraik qiymati. U holda nuqta tezlanishi uchun berilgan (1. 10) formula quyidagicha bo‘ladi:

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\tau^\circ + v\frac{d\overline{\tau^\circ}}{dt} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau^\circ} + v\frac{d\overline{\tau^\circ}}{ds}\frac{ds}{dt}. \qquad (1.\ 27)$$

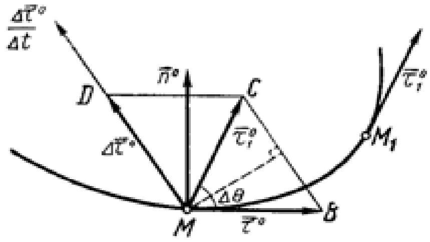
Bu formuladagi $\frac{d\overline{\tau^\circ}}{ds}$ vektorning miqdori va yo‘nalishini aniqlaymiz:

$$\frac{d\overline{\tau^\circ}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\overline{\tau^\circ}}{\Delta s},$$

bunda $\Delta\overline{\tau^\circ}$ vektor trayektoriyaning M va M_1 nuqtalarida mos ravishda olingan $\Delta\overline{\tau^\circ}$ va $\Delta\overline{\tau_1^\circ}$ urinmalar birlik vektorlarining ayirmasiga teng (1.11-rasm).

$\left|\overline{MB}\right|=1,\ \left|\overline{MC}\right|=1$ bo‘lgani uchun, teng yonli MBC uchburchakdan

$$\left|\Delta\overline{\tau^{\circ}}\right|=\left|\overline{BC}\right|=2\sin\frac{\Delta\theta}{2},$$



1.11-rasm

bunda $\Delta\theta$ orqali $\overline{\tau^{\circ}}$ va $\overline{\tau_1^{\circ}}$ birlik vektorlar orasidagi burchak belgilangan. Natijada

$$\left|\frac{d\overline{\tau^{\circ}}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\left|\Delta\overline{\tau^{\circ}}\right|}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta s}$$

yoki

$$\left|\frac{d\overline{\tau^{\circ}}}{ds}\right|=\lim_{\Delta s\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}\cdot\lim_{\Delta s\to 0}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

bu tenglikda $k=\lim\limits_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=\frac{d\theta}{ds}$ va $\rho=\frac{1}{k}=\frac{ds}{d\theta}$ larga ko‘ra $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}=k=\frac{1}{k}$,

bu yerda: k-trayektoriyaning M nuqtadagi egriligi; ρ-egrilik padiusi. Binobarin, $\left|\frac{d\tau^{\circ}}{ds}\right|=\frac{1}{\rho}$, bo‘lib, $\frac{d\overline{\tau^{\circ}}}{ds}$ vektorning moduli trayektoriyaning M nuqtadagi egriligini ifodalaydi. Mazkur vektorning yo‘nalishi $D\widehat{M}B$ ning $\Delta\theta\to 0$ dagi limit holati bilan aniqlanadi: $D\widehat{M}B=D\widehat{M}C+C\widehat{M}B=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\theta}{2}\right)+\Delta\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\Delta\theta}{2}$, bu tenglikdan ko‘ramizki, $\Delta\theta\to 0$ da $D\widehat{M}B\to\frac{\pi}{2}$, ya’ni $\frac{d\overline{\tau^{\circ}}}{ds}$ vektorning yo‘nalishi M nuqtada trayektoriyaga o‘tkazilgan $\overline{n^{\circ}}$ bosh normal birlik vektorining yo‘nalishi bilan bir xil bo‘ladi.

Shunday qilib, $\frac{d\overline{\tau^{\circ}}}{ds}$ vektor miqdor jihatdan $\frac{1}{\rho}$ ga teng, yo‘nalishi bosh normal bo‘ylab trayektoriyaning egrilik markazi tomon yo‘naladi, ya’ni

$$\frac{d\overline{\tau}^{\circ}}{ds}=\frac{1}{\rho}\overline{n^{\circ}}. \qquad (1.28)$$

(1.26) va (1.28) ga asosan, (1.27) quyidagicha yoziladi:

$$\overline{w}=\frac{dv}{dt}\overline{\tau^{\circ}}+\frac{v^2}{\rho}\overline{n^{\circ}} \quad . \tag{1.29}$$

Bu formula yordamida tezlanishning tabiiy koordinata o‘qlaridagi tashkil etuvchilari aniqlanadi. $\frac{dv}{dt}\overline{\tau^{\circ}}$ vektor trayektoriyaga M nuqtada o‘tkazilgan urinma bo‘yicha yo‘naladi va urinma tezlanish deyiladi hamda $\overline{w_{\tau}}$ bilan belgilanadi:

$$\overline{w_{\tau}}=\frac{dv}{dt}\overline{\tau^{\circ}} \quad . \tag{1.30}$$

$\frac{v^2}{\rho}\overline{n^{\circ}}$ vektor esa trayektoriyaga M nuqtada o‘tkazilgan bosh normal bo‘ylab yo‘naladi va normal tezlanshi deyiladi hamda $\overline{w_n}$ bilan belgilanadi:

$$\overline{w_n}=\frac{v^2}{\rho}\overline{n^{\circ}} . \tag{1.31}$$

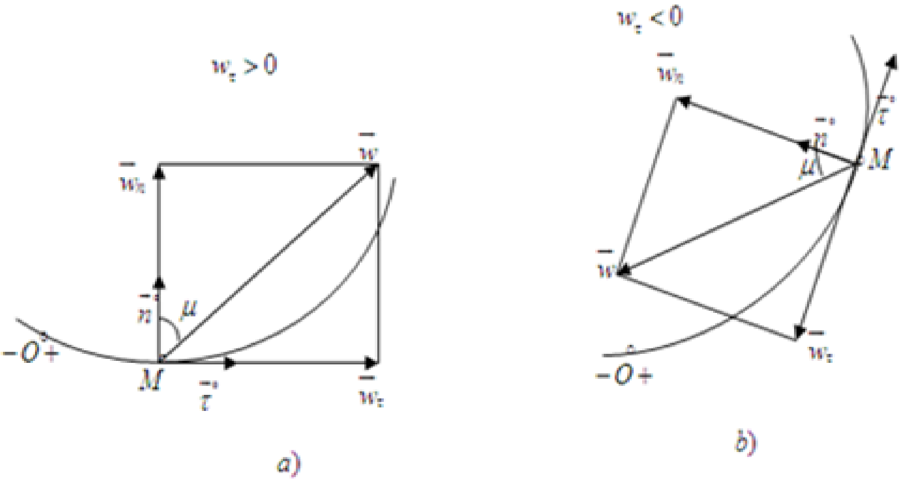
Urinmaning birlik vektori $\overline{\tau^{\circ}}$ va bosh normalning birlik vektori $\overline{n^{\circ}}$ trayektoriyaning M nuqtasida o‘tkazilgan egrilik tekisligida yotganligi tufayli M nuqtaning tezlanishi ham mazkur egrilk tekisligida yotadi. Shu sababli tezlanishning binormaldagi tashkil etuvchisi nolga teng bo‘ladi.

(1.30) va (1.31) ga asosan tezlanishning tabiiy koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha aniqlanadi:

$$w_{\tau}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}, \tag{1.32}$$

$$w_n=\frac{v^2}{\rho} . \tag{1.33}$$

Bu tengliklardan ko‘ramizki, nuqta tezlanishining urinmadagi proyeksiyasi tezlikning algebraik qiymatidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosilaga yoki nuqtaning yoy koordinatasidan vaqt bo‘yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng; nuqta tezlanishining bosh normaldagi proyetsiyasi shu nuqta tezligi kvadratining trayektoriyaning berilgan nuqtadagi egrilik radiusiga nisbatiga teng.



1.12-rasm

Trayektoriyaning M nuqtasida urinma va bosh normalning birlik vektorlari $\overline{\tau^\circ}$, $\overline{n^\circ}$ bo‘yicha yo‘nalgan $\overline{w_\tau}$ va $\overline{w_n}$ vektorlarni tasvirlaymiz (1.12-rasm). Bunda $\overline{w_n}$ normal tezlanish doimo M nuqtada trayektoriyaning botiq tomoniga yo‘naladi va musbat qiymatga ega bo‘ladi. $\overline{w_\tau}$ urinma tezlanish esa $w_\tau > 0$ da $\overline{\tau^\circ}$ bilan bir yo‘nalishda bo‘ladi (1.12a-rasm) $w_\tau < 0$ da $\overline{\tau^\circ}$ ga qarama-qarshi yo‘naladi (1.12b-rasm).

Nuqtaning tezlanish vektori $\overline{w}$ urinma tezlanish $\overline{w_\tau}$ va normal tezlanish $\overline{w_n}$ larning geometrik yig‘indisiga teng.

$$\overline{w} = \overline{w_\tau} + \overline{w_n}\,. \qquad (1.34)$$

Bu ikki tezlanish o‘zaro perpendikulyar yo‘nalganidan to‘la tezlanish moduli

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)}, \qquad (1.35)$$

formuladan, yo‘nalishi esa

$$tg\,\mu = \frac{|w_\tau|}{w_n} \qquad (1.36)$$

formuladan topiladi.

To‘g‘ri chiziqli harakat. Agar nuqtaning trayektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lsa, $\rho = \infty$ bo‘ladi. Bu holda $w_n = \dfrac{v^2}{\rho} = 0$ bo‘lib, nuqtaning tezlanishi faqat urinma tezlanishga teng bo‘ladi:

$$w = w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Bu holda nuqtaning tezligi faqat miqdor jihatdan o‘zgarganligi tufayli nuqtaning urinma tezlanishi tezlikning son qiymati jihatdan o‘zgarishini ifodalaydi.

Egri chiziqli tekis harakat. Agar nuqta egri chiziqli tekis harakat qilsa, ya’ni $v = const$ bo‘lsa, $w_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$ bo‘lib, nuqtaning tezlanishi faqat normal tezlanish $w = w_n = \frac{v^2}{\rho}$ ga teng bo‘ladi. Bu holda nuqtaning tezlanish vektori $\overline{w}$ doimo egri chiziqning botiq tomoniga yo‘nalgan bosh normal bo‘ylab yo‘naladi. $v = const$ bo‘lgani uchun bu tezlanish vaqt o‘tishi bilan faqat nuqta tezligi yo‘nalishiniig o‘zgarishidan hosil bo‘ladi. Binobarin, normal tezlanish nuqta tezligining yo‘nalish jihatdan o‘zgarishini ifodalaydi.

Tekis harakat tenglamasini tuzish uchun (1.26) tenglikdan foydalanamiz, bunda $v = v_0 = \cos nt$ bo‘lganidan $v_0 = \frac{ds}{dt}$ yoki

$$ds = v_0 dt \tag{1.37}$$

Dastlabki paytda, ya’ni $t = 0$ da nuqtaning yoy koordinatasi s_0 ga teng, t vaqtdan keyin esa s ga teng bo‘lsin. U holda (1.37) ni integrallasak,

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^1 v_0 dt \qquad \text{yoki} \qquad s = s_0 + v_0 t \tag{1.38}$$

kelib chiqadi. (1.38) ifoda nuqtaning egri chiziqli tekis harakati tenglamasi deyiladi.

To‘g‘ri chiziqli tekis harakat. Bu holda $w = w_\tau = w_n = 0$ bo‘ladi. Faqat to‘g‘ri chiziqli tekis harakatda nuqtaning tezlanishi doimo nolga teng bo‘lishini ta’kidlab o‘tamiz.

Egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakat. Agar nuqtaning harakati davomida doimo $w_\tau = const$ bo‘lsa, bunday harakat tekis o‘zgaruvchan harakat deyiladi. Tekis o‘zgaruvchan harakat tenglamasini topish uchun harakatning boshlang‘ich shartlari berilgan bo‘lishi kerak. Dastlabki paytda, ya’ni $t = 0$ da $s = s_0$ va $v = v_0$ bo‘lsin. (1.32) formuladan

$$dv = w_\tau dt \qquad (1.39)$$

tenglikni olamiz. (1.39) ni $w_\tau = const$ ekanligini e’tiborga olib integrallaymiz:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t}^{t} w_\tau dt$$

yoki

$$v = v_0 + w_\tau t \qquad (1.\ 40)$$

(1.40) dan egri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakatdagi nuqtaning tezligi aniqlanadi. Bu yerdagi v ning o‘rniga $\dfrac{dt}{ds}$ ni qo‘yamiz: $\dfrac{ds}{dt} = v_0 + w_\tau t$ yoki $ds = v_0 dt + w_\tau t dt$. Bu tenglamaning ikki tomonini yana integrallab tekis o‘zgaruvchan harakat tenglamasini olamiz:

$$s = s_0 + v_0 t + w_\tau \frac{t^2}{2}. \qquad (1.41)$$

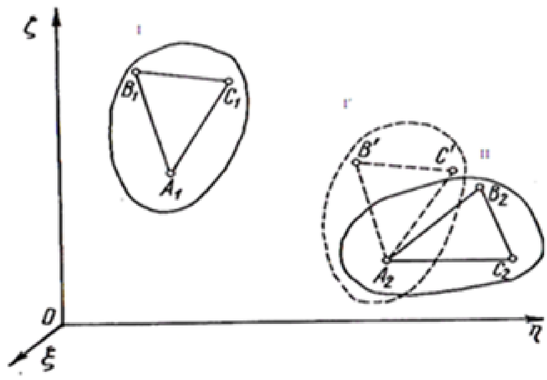
To‘g‘ri chiziqli tekis o‘zgaruvchan harakat tezligi va harakat tenglamasi ham (1.40)-(1.41) formulalar kabi topiladi, faqat yoy koordinatasi s o‘rnida nuqtaning to‘g‘ri chiziqli koordinatasi qatnashadi:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 + wt, \\ x &= x_0 + v_0 t + w_\tau \frac{wt^2}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (1.42)$$

1.2. Qattiq jism harakatining umumiy holi.

Erkin jismning fazoda umumiy holda ko‘chishini o‘rganish quyidagi Shal teoremasiga asoslanadi.

Teorema. Erkin jismning fazodagi har qanday ko‘chishini bir ilgarilanma harakat va qutb deb tanlab olingan nuqtadan o‘tuvchi biror o‘q atrofida bir aylantirish bilan amalga oshirish mumkin.



1.13-rasm

Isboti: Erkin jismning biror qo‘zg‘almas $O\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyati uning bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan A, B, C nuqtalarining holati, ya’ni ΔABC holati bilan aniqlanadi. Erkin jismning ixtiyoriy ikkita holatini, ya’ni t_1 vaqtdagi **I** holatini, t_2 vatstdagi II holatini olamiz (1.13-rasm). Bunda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan A, B, C nuqtalar mos ravishda A_1, B_1, C_1 va A_2, B_2, C_2 holatlarni egallasin. U holda jismning $\Delta t = t_2 - t_1$ vaqtdagi ko‘chishini quyidagicha bajarish mumkin. Jismga shunday ilgarilanma ko‘chish beramizki, natijada A_1 nuqta A_2 nuqta bilan ustma-ust tushsin. Bunda B_1, C_1 nuqtalar B', C' nuqtalarga o‘tadi. U holda ΔABC vaziyati $\Delta A_2 B' C'$ ga almashinadi va jism I′ holatini egallaydi. Eyler-Dalamber teoremasiga ko‘ra, jismni I′ holatdan II holatga A qutbdan o‘tuvchi biror oniy o‘q atrofida bir aylantirish bilan o‘tkazish mumkin. Teorema isbotlandi.

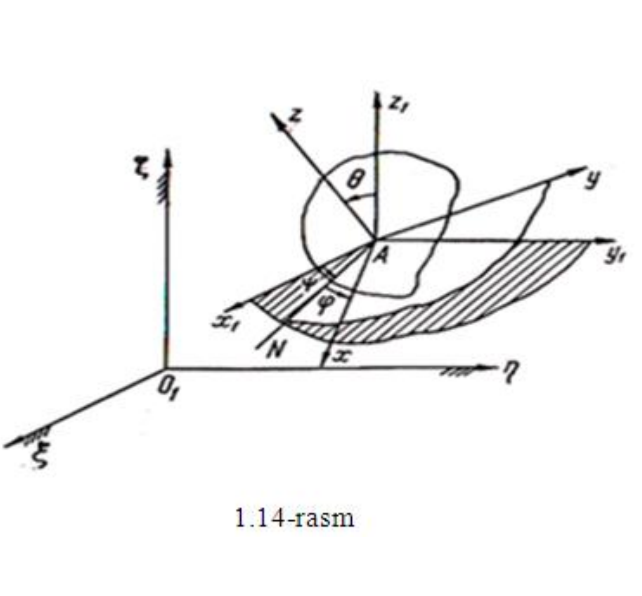
Harakatni bu xilda ilgarilanma va aylanma qismlarga ajratish jismning haqiqiy harakatini aks ettira olmaydi. Jismning haqiqiy harakatini tasvirlash uchun ixtiyoriy Δt vaqt oralig‘ini kichik bo‘laklarga bo‘lib, mazkur bo‘laklarga mos bo‘lgan erkin jismning harakatini qutbning ilgarilanma harakati va qutbdan o‘tuvchi oniy o‘q atrofidagi aylanma harakatlaridan tashkil topgan deb qaraladi.

Erkin jismda olingan qutb koordinatalarini $\xi_A \eta_A \zeta_A$ bilan belgilasak:

$$\left.\begin{aligned} \xi_A &= f_1(t), \\ \eta_A &= f_2(t), \\ \zeta_A &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

tenglamalar qutbning harakat tenglamalarini ifodalaydi.

Jismning qutb atrofidagi harakatini aniqlash uchun qutb nuqtasida $O_1\xi\eta\zeta$ qo‘zg‘almas koordinata sistemasiga parallel bo‘lgan $Ax_1y_1z_1$ hamda jismga



1.14-rasm

biriktirilgan $Axyz$ koordinata sistemalarini o‘kazamiz (1.14-rasm). U holda jismning qutb atrofidagi sferik harakatini ψ, φ, θ Eyler burchaklari bilan aniqlash mumkin. Shu sababli

$$\left.\begin{aligned} \psi &= f_4(t), \\ \varphi &= f_5(t), \\ \theta &= f_6(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1.44)$$

tenglamalar jismning qutb atrofidagi aylanma harakatini ifodalaydi.

Shunday qilib, (1.43)-(1.44) tenglamalar birgalikda erkin qattiq jismning umumiy holdagi harakat tenglamalarini ifodalaydi.

Erkin qattiq jism ixtiyoriy B nuqtasining tezligi, tekis parallel harakatdagi kabi, $\bar{v}A$ qutbning tezligi va $\bar{v}BA$ qutbdan o‘tuvchi oniy o‘q atrofidagi aylanma harakat tezliklarining geometrik yig‘indisiga teng:

$$\bar{v}B = \bar{v}A + \bar{v}BA = \bar{v}A + \bar{\omega} \times \overline{AB}, \qquad (1.45)$$

bunda $\bar{w}$ oniy burchak tezlikdir.

Shunga o‘xshash, B nuqtaning tezlanishi uchun quyidagi formula o‘rinlidir:

$$\bar{w}B = \bar{w}A + \bar{w}BA. \qquad (1.46)$$

(1.45) va (1.46) formulalarning isboti tekis parallel harakatdagi kabi bo‘ladi. (1.46) dagi $\bar{w}BA$ Rivals teoremasidan aniqlanadi:

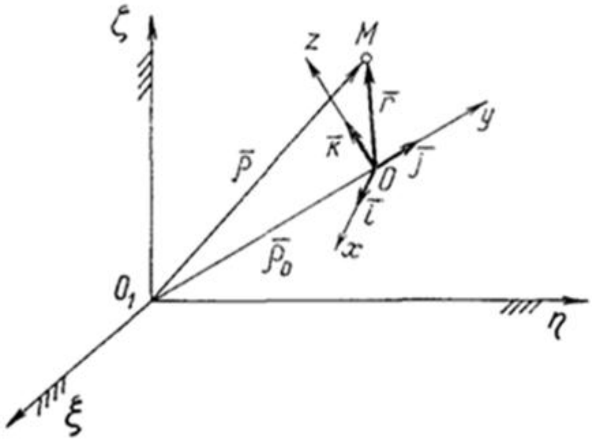
$$\bar{w}BA = \bar{w}_{BA}^{\varepsilon} + \bar{w}_{BA}^{\omega}. \qquad (1.47)$$

1.3. Jism nuqtasining murakkab harakati.

Oldingi bo‘limlarda nuqta yoki jismning harakatini qo‘zg‘almas deb qabul qilingan biror koordinatalar sistemasiga nisbatan tekshirdik. Ko‘pincha texnikada uchraydigan masalalarni yechishda nuqta yoki jismning harakatini ikki va undan ortiq koordinata sistemalariga nisbatan tekshirishga to‘g‘ri keladi. Bunday holda koordinata sistemalaridan biri qo‘zg‘almas deb olinib, qolganlari esa unga nisbatan ma’lum qonunga muvofiq harakat qiladi, deb qaraladi. Bu holda nuqta (yoki jism) qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan murakkab harakatda bo‘ladi.

Masalan, Yerning sun’iy yo‘ldoshi ichida harakatlanayotgan biror nuqta Yerga nisbatan murakkab harakatda bo‘ladi. Vagon ichida yurayotgan yo‘lovchi poyezd harakatlanayotganda Yerga nisbatan murakkab harakatda bo‘ladi. Bu misollarda yer bilan bog‘langan koordinatalar sistemasi qo‘zg‘almas bo‘lib, sun’iy yo‘ldosh va poyezd bilan bog‘langan koordinatalar sistemasi qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasidan iborat bo‘ladi.

Endi nuqtaning nisbiy ko’chirma va murakkab harakatlarini qaraymiz: M nuqtaning qo‘zg‘almas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan murakkab harakatini tekshiramiz. Buning uchun $O_1\xi\eta\zeta$ ga nisbatan ixtiyoriy ravishda harakatlanadigan $Oxyz$ koordinatalar sistemasini olamiz (1.15- rasm).



1.15-rasm

M nuqtaning qo‘zg‘aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati nisbiy harakat deyiladi. Nuqtaning nisbiy harakati tekshirilayotganda qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasining harakati fikran e’tiborga olinmaydi. Nuqtaning nisbiy harakatda chizgan trayektoriyasi nisbiy trayektoriya deyiladi.

Nuqtaning nisbiy trayektoriya bo‘ylab harakat tezligi nisbiy tezlik, nisbiy tezlikning nisbiy harakat trayektoriyasi bo‘yicha o‘zgarishini ifodalovchi tezlanish nisbiy tezlanish deyiladi. Nisbiy tezlik $\bar{v}_r$ bilan, nisbiy tezlanish $\bar{w}_r$ bilan belgilanadi.

Yerning sun’iy yo‘ldoshi ichidagi nuqtaning sun’iy yo‘ldosh bilan biriktirilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati nisbiy harakat bo‘ladi. Nuqtaning sun’iy yo‘ldoshga nisbatan tezligi nisbiy tezlik, tezlanishi nisbiy tezla-nish bo‘ladi.

M nuqtani $Oxyz$ qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan onda fikran qo‘zg‘almas deb qarab, uning qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasi bilan birgalikda qo‘zg‘almas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan qilgan harakati *ko‘chirma harakat* deyiladi. Nuqtaning ko‘chirma harakati qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasining qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati bilan aniqlanadi.

Harakati kuzatilayotgan M nuqtani berilgan onda qo‘zg‘aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasining biror nuqtasi bilan ustma-ust tushgan va unga nisbatan qo‘zg‘almas deb qarab, shu nuqtaning qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasi bilan birgalikda qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakat tezligi berilgan onda *ko‘chirma tezlik* va tezlanishi *ko‘chirma tezlanish* deyiladi. Ko‘chirma tezlik $\overline{v}_e$ bilan, ko‘chirma tezlanish $\overline{w}_e$ bilan belgilanadi.

Keltirilgan misolda M nuqtani sun’iy yo‘ldoshning biror nuqtasida joylashgan deb qarab, mazkur nuqtaning sun’iy yo‘ldosh bilan birgalikda Yerga nisbatan harakati ko‘chirma harakat bo‘ladi. Sun’iy yo‘ldosh M nuqtasining Yerga nisbatan tezligi ko‘chirma tezlikni, tezlanishi ko‘chirma tezlanishni ifodalaydi.

M nuqtaning bevosita qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati *murakkab harakat* yoki *absolyut harakat* deyiladi. Nuqtaning bunday harakat tezligi *absolyut tezlik*, tezlanishi *absolyut tezlanish* deyiladi. Absolyut tezlik $\overline{v}_a$ bilan, absolyut tezlanish $\overline{w}_a$ bilan belgilanadi.

Keltirilgan misolda sun’iy yo‘ldosh ichidagi M nuqtaning yer bilan bog‘langan koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati absolyut harakat bo‘ladi.

1.19-rasmda tasvirlangan M nuqtaning koordinatalar sistemasiga nisbatan harakati murakkab harakat bo‘lib, bu harakatni nisbiy va ko‘chirma harakatdan tashkil topgan deb qaraymiz.

Nuqtaning murakkab harakatini tekshirganda nisbiy, ko‘chirma va absolyut tezliklari hamda tezlanishlari orasidagi munosabatni topish asosiy masala hisoblanadi.

M nuqtaning qo‘zg‘almas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan holati koordinatalar boshi O_1 va M nuqta orqali o‘tuvchi $\overline{\rho}$ radius-vektor bilan aniqlanadi. ya’ni $\overline{\rho}$ radius-vektorining o‘zgarishi absolyut harakatni belgilaydi.

M nuqtaning qo‘zg‘aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan holati koordinatalar boshi O va M nuqta orqali o‘tuvchi $\bar{r}$ radius-vektor vositasida aniqlanadi.

Qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasining birlik vektorlarini $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bilan belgilasak, $\bar{r}$ quyidagicha ifodalanadi:

$$\bar{r} = \overline{xi} + \overline{yj} + \overline{zk}\,.$$

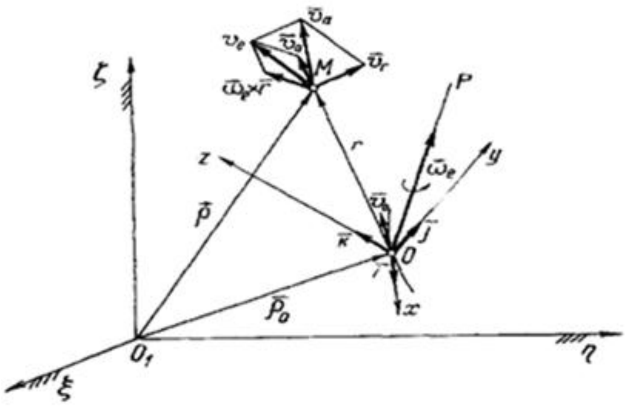
Bunda x, y, z lar M nuqtaning nisbiy harakatini belgilovchi koordinatalaridir. Shunday qilib, nuqtaning nisbiy harakat tenglamalari ushbu ko‘rinishda yoziladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned}\right\} \qquad (1.48)$$

Qo‘zg‘almas sistemaning koordinatalar boshi O_1 va qo‘zg‘aluvchi sistemaning koordinatalar boshi O nuqta orqali o‘tuvchi ρ_0 radius- vektorning o‘zgarishi O nuqtaning absolyut harakatini belgilaydi.

Tezliklarni qo‘shish teoremasi: M nuqtaning $O_1\xi\eta\zeta$ qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasiga nisbatan absolyut tezligini aniqlash uchun harakatni qo‘zg‘aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasiga nisbatan nisbiy harakat va bu koordinatalar sistemasi bilan birgalikda sodir bo‘ladigan ko‘chirma harakatidan tashkil topgan deb qaraymiz (1.15-rasm). Qo‘zg‘aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasi qo‘zg‘almas $O_1\xi\eta\zeta$ koordinatalar sistemasiga nisbatan xuddi erkin jism kabi harakatlansin. U holda yuqorida ko‘rganimizdek, $Oxyz$ koordinatalar sistemasining harakatini koordinatalar boshi O nuqta-qutbning ilgarilanma harakati va bu qutb atrofidagi sferik harakatdan tashkil topgan deb qarash mumkin.

Mazkur sferik harakatni O nuqtadan o‘tuvchi OP oniy o‘q atrofidagi $\overline{w}_e$ burchak tezlik bilan sodir bo‘luvchi aylanma harakatdan iborat deb qaraymiz (1.16-rasm).



1.16-rasm

Rasmdan quyidagi munosabatni olamiz:

$$\overline{\rho} = \overline{\rho}_0 + \overline{r} = \overline{\rho}_0 + (x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}). \tag{1.49}$$

M nuqtaning absolyut tezligini aniqlash uchun (1.49) dan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{a\overline{\rho}_e}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k}\right) + \left(x\frac{d\overline{i}}{dt} + y\frac{d\overline{j}}{dt} + z\frac{d\overline{k}}{dt}\right) \tag{1.50}$$

bu yerda,

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt} = \overline{v}_a \tag{1.51}$$

nuqtaning absolyut tezligini ifodalaydi,

$$\frac{d\overline{\rho}_0}{dt} = \overline{v}_0, \tag{1.52}$$

bunda O qutbning tezligidir; (1.48) ga ko‘ra $\frac{dx}{dt} = v_{rx}, \frac{dy}{dt} = v_{ry}, \frac{dz}{dt} = v_{rz}$ bo‘lib, nisbiy tezlikning qo‘zg‘aluvchi x, y, z koordinatalar o‘qlaridagi proyeksiyalarini ifodalaydi. Shu sababli nuqtaning nisbiy tezligi quyidagicha topiladi:

$$\frac{dx}{dt}\overline{i} + \frac{dy}{dt}\overline{j} + \frac{dz}{dt}\overline{k} = v_{rx}\overline{i} + v_{ry}\overline{j} + v_{rz}\overline{k} = v_r \tag{1.53}$$

Qo‘zg‘aluvchi $Oxyz$ koordinatalar sistemasi O nuqtadan o‘tuvchi OP oniy o‘q atrofida $\overline{w}_e$ burchak tezlik bilan aylanma harakatda bo‘lggani uchun $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ birlik vektorlardan vaqt bo‘yicha olingan hosila, radius-vektorlari $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ ga teng bo‘lgan nuqtalarning chiziqli tezligi kabi olinadi. U holda Eyler formulasiga ko‘ra quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{i}\,; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{j}\,; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_e \times \bar{k}\ . \qquad (1.54)$$

(1.51) - (1.54) larga asosan (1.50) ni quyidagicha yozamiz:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_0 + \bar{v}_r + \bar{\omega}_e \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}), \ \text{ yoki } \ \bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_0 + \bar{\omega}_e \times \bar{r}\,. \qquad (1.55)$$

M nuqtaning ko‘chirma tezligi $Oxyz$ qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasining shu nuqta bilan ustma-ust tushgan nuqtasining $O_1\xi\eta\zeta$ ga nisbatan tezligiga teng bo‘ladi. Ko‘rilayotgan holda $Oxyz$ koordinatalar sistemasi qo‘zg‘almas $O_1\xi\eta\zeta$ ga nisbatan xuddi erkin jism kabi harakatlanayotgani uchun M nuqtaning ko‘chirma tezligi (1.45) ga asosan quyidagicha yoziladi:

$$\bar{v}_0 + \bar{\omega}_e \times \bar{r} = \bar{v}_e\,. \qquad (1.56)$$

Shunday qilib, (1.55) ushbu ko‘rinishni oladi.

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e\,. \qquad (1.57)$$

Bu tenglik *tezliklarni qo‘shish teoremasini* ifodalaydi.

Nuqtaning absolyut harakat tezligi uning nisbiy va ko‘chirma harakat tezliklarining geometrik yig‘indisiga teng.

Bu teorema tezliklarning parallelogramm qoidasi deyiladi. (1.56) dan ko‘ramizki, kuzatilayotgan holda M nuqtaning ko‘chirma harakat tezligi qutb O ning tezligi $\bar{v}_0$ va OP oniy o‘q atrofidagi aylanma harakat tezligi $\bar{\omega}_e \times \bar{r}$ ga qurilgan parallelogrammning diagonali bilan ifodalanadi.

Agar ko‘chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat, ya’ni $\bar{\omega}_e = 0$ bo‘lsa, u holda qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasi bilan bog‘langan barcha nuqtalarning tezliklari geometrik teng bo‘lib, qutbning tezligi $\bar{v}_0$ bilan aniqlanadi: $\bar{v}_e = \bar{v}_0$ bu holda ham (1.57) formula o‘rinli bo‘ladi.

Absolyut tezlikning moduli nisbiy va ko‘chirma tezliklarga qurilgan parallelogrammning diagonali bilan ifodalanadi:

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_e v_r \cos\alpha}\,, \qquad (1.58)$$

bunda $\alpha = (\bar{v}_e, v_r)$. Agar, $\alpha = 0$ ya'ni $\bar{v}_r$ bilan $\bar{v}_e$ bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab bir tomonga yo‘nalgan bo‘lsa, absolyut tezlik quyidagicha topiladi:

$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e} = v_r + v_e$. Agar $\alpha = 90°$, ya'ni $\bar{v}_e \perp \bar{v}_r$ bo‘lsa, absolyut tezlik $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2}$ formuladan, $\alpha = 180°$, ya'ni $\bar{v}_r$ bilan $\bar{v}_e$ bir to‘g‘ri chiziq bo‘ylab qarama-qarshi yo‘nalgan holda esa $v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e} = |v_r - v_e|$ formuladan aniqlanadi.

Agarda nisbiy, ko‘chirma va absolyut tezliklardan ixtiyoriy ikkitasi ma'lum bo‘lsa, uchinchi noma'lum tezlikni tezliklarni qo‘shish haqidagi (1.57) teoremadan foydalanib aniqlash mumkin.

Koriolis teoremasi. M nuqtaning ko‘chirma harakati ilgarilanma bo‘lmagan holda absolyut tezlikning quyidagi

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{\rho}_0}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} \right) + \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} + z\frac{d\bar{k}}{dt} \right)$$

ifodasidan vaqt bo‘yicha hosila olamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_a}{dt} &= \frac{d^2\rho_0}{dt} + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} \right) + \\ &+ \left(\frac{dx}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt} \right) + x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2} \end{aligned} \qquad (1.59)$$

(1.59) da

$$\frac{d\bar{v}_a}{dt} = w_a \qquad (1.60)$$

M nuqtaning absolyut tezlanishini,

$$\frac{d^2\bar{\rho}_e}{dt^2} = \bar{w}_0 \qquad (1.61)$$

O qutbning tezlanishini,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2x}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = \bar{w}_r \qquad (1.62)$$

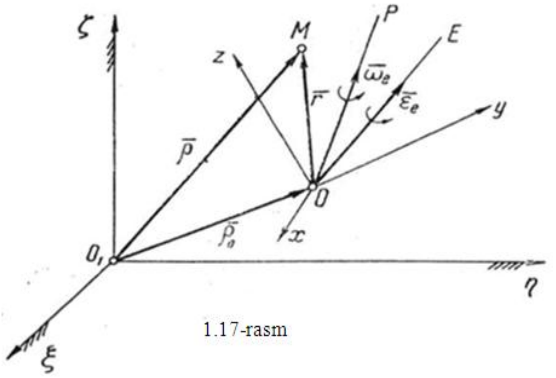
M nuqtaning nisbiy tezlanishini ifodalaydi. (1.54) va (1.53) larga asosan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\bar{i}}{dt}+\frac{dy}{dt}\frac{d\bar{j}}{dt}+\frac{dz}{dt}\frac{d\bar{k}}{dt}=\bar{\omega}_e\times\left(\frac{dx}{dt}\bar{i}+\frac{dy}{dt}\bar{j}+\frac{dz}{dt}\bar{k}\right)=\bar{\omega}_e\times v_r\,,$$

(1.63)

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{i}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\bar{\omega}_e\times\bar{i})=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}\times\bar{i}+\bar{\omega}_e\times\frac{d\bar{i}}{dt}=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{i}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{i})\text{, bunda } \bar{\varepsilon}_e=\frac{d\bar{\omega}_e}{dt}$$

bo‘lib, OE atrofidagi oniy burchak tezlanishdir (1.17-rasm). Xuddi shuningdek,



1.17-rasm

$$\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{j}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{j})\,,$$

$$\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{k}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{k})\,.$$ Shu sababli

$$x\frac{d^2\bar{i}}{dt^2}+y\frac{d^2\bar{j}}{dt^2}+z\frac{d^2\bar{k}}{dt^2}=\left[\bar{\varepsilon}_e\times\bar{i}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{i})\right]x+\left[\bar{\varepsilon}_e\times\bar{j}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{j})\right]y+$$
$$+\left[\bar{\varepsilon}_e\times\bar{k}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times\bar{k})\right]z=\bar{\varepsilon}_e\times(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})+\bar{\omega}_e\times\left[\bar{\omega}_e\times(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})\right]=$$
$$=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times r).$$

(1.64)

(1.60) - (1.64) larga asosan (1.59) ni quyidagicha yozamiz:

$$\bar{w}_a=\bar{w}_0+\bar{w}_r+2(\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r)+\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e\times(\bar{\omega}_e\times r)\,. \quad (1.65)$$

M nuqtaning ko‘chirma tezlanishi $Oxyz$ qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasining shu nuqta bilan ustma-ust tushgan nuqtasining $O\xi\eta\zeta$ ga nisbatan tezlanishiga teng bo‘ladi. Ko‘rilayotgan holda $Oxyz$ koordinatalar sistemasi xuddi erkin jism kabi harakatlangani uchun $\bar{w}_e$ ko‘chirma harakat tezlanishi O qutbning tezlanishi $\bar{w}_0$ hamda qutb atrofidagi aylanma harakat tezlanishi $\bar{w}^{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}$ va OP oniy o‘qqa intilma tezlanish $\bar{w}^{\omega}=\bar{\varepsilon}_e\times(\bar{\omega}_e\times r)$ dan tashkil topadi:

$$\bar{w}_0+\bar{\varepsilon}_e\times\bar{r}+\bar{\omega}_e+(\bar{\omega}_e\times\bar{r})=\bar{w}_e\,. \quad (1.66)$$

(1.65) dagi

$$2(\bar{\omega}_e\times\bar{v}_r)=\bar{w}_k \quad (1.67)$$

Koriolis tezlanishi deyiladi.

Shunday qilib, nuqtaning absolyut tezlanishi quyidagi tenglikdan aniqlanadi:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_e + \overline{w}_k . \qquad (1.68)$$

(1.68) tenglik ko‘chirma harakati ilgarilanma bo‘lmagan nuqtaning tezlanishlarini qo‘shish haqidagi Koriolis (1792-1843) teoremasini ifodalaydi.

Ko‘chirma harakati ilgarilanma bo‘lmagan murakkab harakatdagi nuqtaning absolyut tezlanishi uning nisbiy, ko‘chirma va Kariolis tezlanishlarining geometrik yig‘indisiga teng.

Agar nuqtaning harakati tabiiy usulda berilsa, u holda nisbiy tezlanishni urinma va normal tashkil etuvchilardan iborat deb qarash mumkin. $\overline{w}_r = \overline{w}_r^{\tau} + \overline{w}_r^{n}$, bunda $w_r^{\tau} = \dfrac{dv_r}{dt} = \ddot{s}_r$, $w_r^{n} = \dfrac{v_r^2}{\rho_r}$ bo‘lib, s_r - hisoblash boshidan nuqtaning nisbiy harakat chizig‘i bo‘ylab uning berilgan ondagi holatigacha bo‘lgan yoy koordinatasi; ρ_r - nisbiy harakat chizig‘ining egrilik radiusi.

Ko‘chirma harakat qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakatdan iborat bo‘lgan xususiy holda ko‘chirma harakat tezlanishi uchun $\overline{w}_e = \overline{w}_e^{\tau} + \overline{w}_e^{n}$ formula o‘rinlidir. Agar aylanish o‘qidan nuqtagacha bo‘lgan eng qisqa masofani R bilan, ko‘chirma harakat burchak tezligi va burchak tezlanishini mos ravishda ω_e va $\overline{\varepsilon}_e$ bilan belgilasak, $w_{\tau} = \dfrac{d}{dt}(R \cdot \omega) = R \cdot \varepsilon$, $w_n = \dfrac{(R \cdot \omega)^2}{R} = \omega^2 \cdot R$ larga ko‘ra, ko‘chirma urinma tezlanish $\overline{w}_e^{\tau} = R_{\varepsilon}$, ko‘chirma normal tezlanish esa $\overline{w}_e^{n} = Rw_e^2$ formulalar yordamida aniqlanadi. Bu holda nuqtaning absolyut tezlanishi uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r^{\tau} + \overline{w}_r^{n} + \overline{w}_e^{\tau} + \overline{w}_e^{n} + \overline{w}_k . \qquad (1.68')$$

Agar ko‘chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo‘lsa, u holda $\overline{\omega}_e = 0$, $\overline{\varepsilon}_e = 0$. Shu sababli qo‘zg‘aluvchi koordinatalar sistemasi bilan bog‘langan barcha nuqtalarning tezlanishlari o‘zaro geometrik teng bo‘lib, qutbning tezlanishi $\overline{w}_0$ bilan aniqlanadi: $\overline{w}_e = \overline{w}_0$.

Bu holda $\overline{w}_k = 2(\overline{\omega}_e \times v_r) = 0$. Shu sababli (1.68) ni ko‘rilayotgan holda quyidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\overline{w}_a = \overline{w}_r + \overline{w}_e. \qquad (1.69)$$

(1.69) formula ko‘chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo‘lgan nuqta uchun tezlanishlarni qo‘shish haqidagi quyidagi teoremani ifodalaydi.

Ko‘chirma harakati ilgarilanma harakatdan iborat bo‘lgan nuqtaning absolyut tezlanishi uning nisbiy va ko‘chirma tezlanishlarining geometrik yig‘indisiga teng.

Shunday qilib, ko‘chirma harakat ilgarilanma harakat bo‘lganda, nuqtaning absolyut tezlanishi nisbiy tezlanish $\overline{w}_r$ va ko‘chirma tezlanish $\overline{w}_e$ larga qurilgan parallelogrammning diagonali bilan ifodalanadi. Bu holda absolyut tezlanishning moduli quyidagicha hisoblanadi:

$$w_a = \sqrt{w_r^2 + w_e^2 + 2w_r w_e \cos(\overline{w}_r\, \overline{w}_e)}\,. \qquad (1.70)$$

Koriolis tezlanishi. Yuqorida ko‘rganimizdek, Koriolis tezlanishi murakkab harakatdagi nuqtaning ko‘chirma harakat burchak tezligi bilan nisbiy harakat tezligining vektorli ko‘paytmasining ikkilanganiga teng.

$$\overline{w}_k = 2(\overline{\omega}_e \times \overline{v}_r). \qquad (1.71)$$

Agar $\overline{w}_e$ bilan v_r orasidagi burchak kattaligini α bilan belgilasak, Koriolis tezlanishining moduli

$$w_k = 2\omega_e v_r \sin\alpha \qquad (1.72)$$

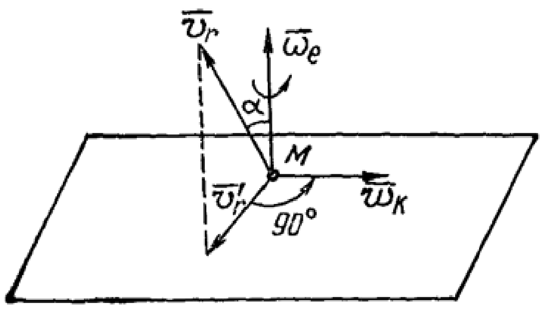
formuladan aniqlanadi.

Koriolis tezlanishining yo‘nalishini quyidagi Jukovskiy qoidasi asosida aniqlash qulaydir.

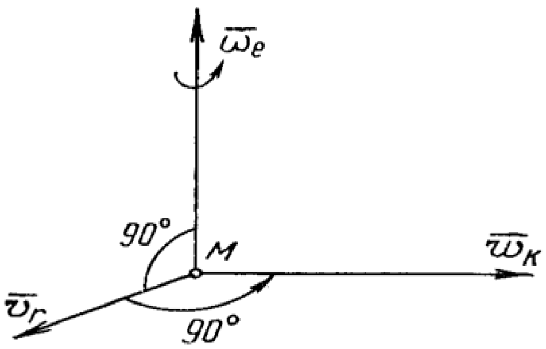
Koriolis tezlanishining yo‘nalishini aniqlash uchun nuqtaning nisbiy tezligini ko‘chirma harakat aylanish o‘qiga perpendikulyar tekislikka proyeksiyalab, bu proyeksiyani mazkur tekislikda, ko‘chirma harakat aylanishi yo‘nalishida $90°$ burchakka burish kerak (1.18-rasm).

Agar $\omega_e \perp v_r$ bo‘lsa (1.19-rasm), $\sin\alpha = 1$. U holda

$$w_k = 2\omega_e v_r. \qquad (1.73)$$



1.18-rasm



1.19-rasm

(1.72) formulaga ko‘ra Koriolis tezlanishi nolga teng bo‘ladigan hollarni ko‘rib chiqamiz:

- yuqorida ko‘rilganidek, $\omega_e = 0$, ya’ni ko‘chirma harakat ilgarilanma harakatdan iborat bo‘lsa, $w_k = 0$ bo‘ladi;

- nisbiy harakat tezligi biror onda nolga teng bo‘lsa, shu onda $w_k = 0$ bo‘ladi;

- $\alpha = 0$ yoki $\alpha = 180°$ bo‘lsa, ya’ni nisbiy harakat ko‘chirma harakat aylanish o‘qiga parallel ravishda sodir bo‘lsa yoki berilgan onda nisbiy harakat tezligi mazkur o‘qqa parallel bo‘lsa, $w_k = 0$ bo‘ladi.

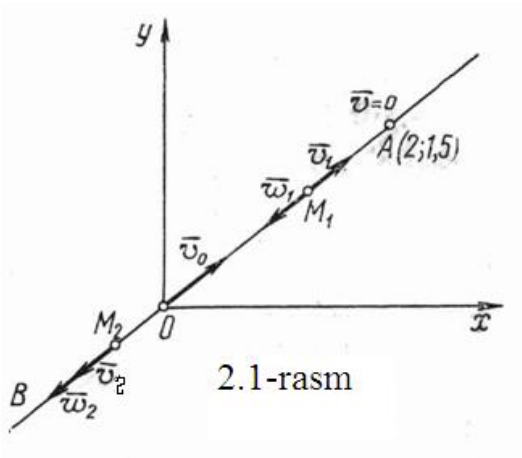
II bob. Nuqta va qattiq jismlar kinematikasi masalalarining qo‘yilishi.

2.1. Nuqtaning tezlik va tezlanishlarini aniqlashga oid masalalar.

Nuqta kinematikasida ko‘pincha nuqtaning harakat tenglamalari berilgan bo‘lib, uning traektoriyasi, tezligi va tezlanishi kabi kinematik elementlarini aniqlash talab etiladi. Ayrim hollarda harakat tenglamasi berilmaydi. Bunday holda masalada berilgan shartlardan foydalanib, dastavval nuqtaning harakat tenglamalari tuziladi, so‘ngra nuqta harakatining kinematik elementlari topiladi. Quyida shunday ikki hol uchun masalalar yechamiz.

1-masala. Harakati $x = 4t - 2t^2, y = 3(t - 0,5t^2)$ tenglamalar bilan berilgan nuqtaning trayektoriyasi, tezligi va tezlanishi topilsin (x, y-metrda, t-sekundda o‘lchanadi).

Yechish: a) Berilgan harakat tenglamasidan t ni yo‘qotsak, nuqtaning trayektoriya tenglamasi $y = \frac{3}{4}x$ ko‘urinishda bo‘ladi. Demak, nuqtaning traektoriyasi koordinata boshidan o‘tuvchi Ox o‘q bilan $\alpha = arctg\frac{3}{4}$ burchak tashkil etuvchi to‘g‘ri chiziqdan iborat (2.1-rasm);



2.1-rasm

b) nuqta tezligining koordinata o‘qlaridagi proeksiyalarini $v_x \frac{dx}{dt} = x,\ v_y \frac{dy}{dt} = y,\ v_z \frac{dz}{dt} = z$ ga, tezligining modulini $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ga muvofiq aniqlaymiz:

$$v_x = \dot{x} = 4(1-t)\ m/s,\ v_y = \dot{y} = 3(1-t)\ \ m/s, \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 5(1-t)m/s;$$

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},\\ \text{v)}\quad w_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y},\\ w_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{d^2t} = \ddot{z}. \end{aligned}\right\}$$ dan tezlanishning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari

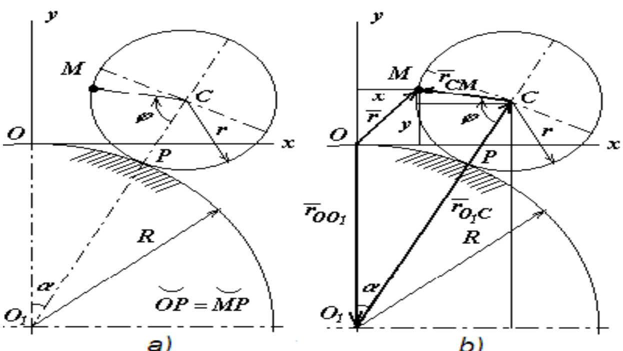
$w_x = \ddot{x} = -4 m/s^2,\ w_y = \ddot{y} = -3\ m/s^2$ va $w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ dan nuqta tezlanishining moduli

$w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 5 m/s^2$ topiladi. Harakat to‘g‘ri chiziqli bo‘lganidan v bilan w, trayektoriyani ifodalovchi to‘g‘ri chiziq bo‘ylab yo‘naladi.

Boshlang‘ich paytda, ya’ni $t = 0$ bo‘lganda, $x = x_0 = 0,\ y = y_0 = 0$, va $v = v_0 = 5\ m/s$ bo‘lganligi uchun nuqta $t = 0$ da koordinata boshidan trayektoriya bo‘ylab O dan A ga v_0 boshlanrich tezlik bilan harakatlanadi. $t = 1\,s$ bo‘lsa, $x = 2m,\ y = 1{,}5m$ bo‘lib, nuqta $A(2;1{,}5)$ holatda, tezligi esa $v = 0$ bo‘ladi. Demak, nuqta 1 sekund davomida O dan A ga sekinlanuvchan harakat bilan ko‘chadi.

$t > 1$ sekunddan boshlab nuqta tezligining moduli orta boradi hamda $v_x < 0,\ v_y < 0,\ w_x < 0,\ w_y < 0$ bo‘lganligidan nuqta A dan B ga qarab tezlanuvchan harakat bilan ko‘chadi (bu hol nuqtaning M_2 holatida tasvirlangan).

2-masala. 2.2-rasmda mexanizm sxemasi va qo‘zg‘almas koordinatalar sistemasi tasvirlangan. Qo‘zg‘almas holda radiusi $R = 100\,sm$ qo‘zg‘aluvchan holda radiusi $r = 20\,sm$. Qo‘zg‘aluvchan halqaning buralish burchagi $\varphi = (t) = t$ qonuniyat bilan o‘zgaradi.



2.2-rasm

Qo‘zg‘aluvchan halqa ishqalanishga ega emas va yoy uzunliklari $OP = MP$. M nuqtaning harakat tenglamasini qurish talab etiladi. $t = t_1 = \dfrac{1}{3}s$ vaqt momentidagi nuqtaning traektoriyasi, tezligi, tezlanishi hamda egrilik radiusi topilsin.

Masalaning yechilishi: Vektorli diagrammani quramiz. Koordinata boshidan qaralayotgan nuqtagacha bo‘lgan masofada r radius-vektorini o‘tkazamiz. Ma’lum yo‘nalish va modul bo‘yicha vektorlar yig‘indisi radius vektorni beruvchi, qaralayotgan radius-vektorlarga tutashuvchi vektorli ko‘pburchakni quramiz.

$$\bar{r} = \bar{r}oo_2 + \bar{r}o_2c + \bar{r}\,sm. \qquad (2.1)$$

Koordinata o‘qlaridagi vektorli ayniyatlar proeksiyalari qaralayotgan nuqta uchun

$$x = (R+r)\cdot\sin\alpha - r\cdot\sin(\alpha+\varphi);$$
$$y = -R + (R+r)\cdot\cos\alpha - r\cdot\cos(\alpha+\varphi);$$

koordinatalar ifodasini beradi. $OP = MP$ yoy uzunliklari shartidan α burchak qiymati aniqlanadi:

$$R\cdot\alpha = r\cdot\varphi; \qquad \alpha = \frac{r}{R}\cdot\varphi \qquad (2.2)$$

(2.2) ni hisobga olib, vaqt bo‘yicha burchak bog‘lanishining

$$x = (R+r)\cdot\sin\left(\frac{r}{R}\cdot\pi\cdot t\right) - r\cdot\sin\left(\left(\frac{r}{R}+1\right)\cdot\pi\cdot t\right);$$
$$y = -R + (R+r)\cdot\cos\left(\frac{r}{R}\cdot\pi\cdot t\right) - r\cdot\cos\left(\left(\frac{r}{R}+1\right)\cdot\pi\cdot t\right)$$

harakat tenglamalarini olamiz, yoki berilgan sonli qiymatlarni o‘rniga qo‘yib,

$$x = 120\cdot\sin(0,2\cdot\pi\cdot t) - 20\cdot\sin(1,2\cdot\pi\cdot t);$$
$$y = -100 + 120\cdot\cos(0,2\cdot\pi\cdot t) - 20\cdot\cos(1,2\cdot\pi\cdot t)$$

bu tenglamalar nuqta trayektoriyasining parametrik tenglamalari hisoblanadi.

Nuqta tezligining koordinata o‘qlaridagi proeksiyalari:

$$v_x = \dot{x} = 24\cdot\pi\cdot\cos(0,2\cdot\pi\cdot t) - 24\cdot\pi\cdot\cos(1,2\cdot\pi\cdot t);$$
$$v_y = \dot{y} = -24\cdot\pi\cdot\sin(0,2\cdot\pi\cdot t) + 24\cdot\pi\cdot\sin(1,2\cdot\pi\cdot t). \qquad (2.3)$$

Nuqta tezlanishining koordinata o‘qlarida proeksiyalari:

$$a_x = \ddot{x} = -4,8\cdot\pi^2\cdot\sin(0,2\cdot\pi\cdot t) + 28,8\cdot\pi^2\cdot\sin(1,2\cdot\pi\cdot t);$$
$$a_y = \ddot{y} = -4,8\cdot\pi^2\cdot\cos(0,2\cdot\pi\cdot t) + 28,8\cdot\pi^2\cdot\cos(1,2\cdot\pi\cdot t) \qquad (2.4)$$

$t = t_1$ vaqtda berilgan qiymat uchun (2.3)-(2.4) lardan tezlik va tezlanish proeksiyalarining navbatdagi qiymatlarini olamiz.

$v_x = 50,4\,sm/s;\;\; v_y = 56,0\,sm/s;\;\;\; a_x = 260\,sm/s^2;\;\;\; a_y = 41,5\,sm/s^2.$

Tezlik va tezlanish modullari:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{50,4^2 + 56^2} = 75,4;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{260^2 + 41,5^2} = 264.$$

Urinma tezlanishi:

$$a_\tau = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} = \frac{50,4 \cdot 260 + 56 \cdot 41}{75,4} = 205\,sm/s^2.$$

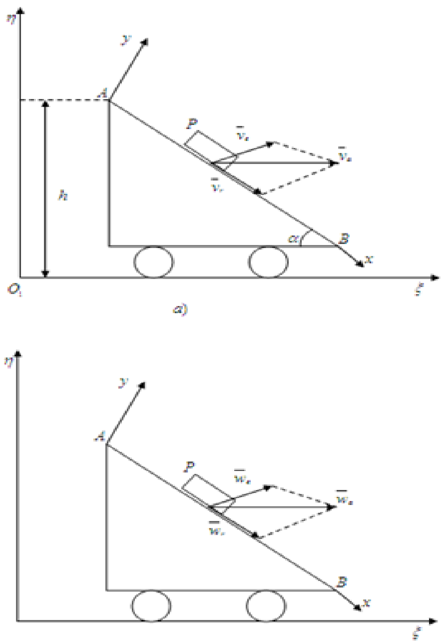
Narmal tezlanish:

$$a_n = \sqrt{a^2 + a_\tau^2} = \sqrt{264^2 - 205^2} = 166\,sm/s^2.$$

Egrilik radiusi:

$$p = \frac{v^2}{a_n} = \frac{75,4^2}{166} = 34,3\,sm.$$

2.2 Murakkab harakatdagi nuqtaning tezlik va tezlanishlarini aniqlashga doir masalalar.



2.3-rasm

3-masala. Aravachaning AB tomoni gorizont bilan $\alpha = 45^\circ$ burchak tashkil etadi. Aravacha $O_1\xi$ bo‘ylab $w_0 = 1\frac{m}{s^2}$ o‘zgarmas tezlanish bilan to‘g‘ri chiziqli harakat qiladi. Shu tekislikda P jism $w_r = \sqrt{2}\frac{m}{s_2}$ o‘zgarmas nisbiy tezlanish bilan tushib keladi. Tekislik bilan jismning boshlang‘ich tezligi nolga teng, jismning boshlangich holati $\varepsilon = 0,\ \eta = h$ koordinatalar bilan aniqlanadi. Jismning absolyut harakati tenglamasi, absolyut tezligi va tezlanishi topilsin (2.3-rasm).

Masalaning yechilishi: Shaklda ko‘rsatilgan $O_1\xi\eta$ tekislik — qo‘zg‘almas tekislik. AB qiya tekislik orqali qo‘zg‘aluvchi Axy koordinatalar sistemasini o‘tkazamiz. P jismning Ax ga nisbatan harakati nisbiy, jismning faqat Axy bilan birgalikda $O_1\xi\eta$ ga nisbatan xarakati ko‘chirma (ilgarilanma), jismning $O_1\xi\eta$ ga nisbatan harakati absolyut (murakkab) harakat bo‘ladi. Nisbiy harakat o‘zgarmas w_r tezlanish bilan sodir bo‘lganda uning nisbiy tezligi

$$v_r = v_{r_0} + w_r t$$

formulaga muvofiq topiladi. Shuningdek, ko‘chirma harakat tezligi ham aniqlanadi:

$$v_e = v_{e_0} + w_e t .$$

Masalaning shartiga ko‘ra, boshlang‘ich $t=0$ paytda qiya tekislik va jismning boshlang‘ich tezliklari nolga teng: $v_{e_0}=0,\ v_{r_0}=0$. Shu sababli

$$v_r = w_r t \text{ va } v_e = w_e t .$$

$\bar{v}_r Ax$ o‘q bo‘ylab, $\bar{v}_e$ esa $O_1\xi$ o‘qqa parallel ravishda yo‘nalgan. Ular orasidagi burchak 45° ga teng. Absolyut tezlikning miqdorini $v_a=\sqrt{v_r^2+v_e^2+2v_e v_r\cos\alpha}$ formulaga mufiq aniqlaymiz (2.3a-rasm):

$$v_a=\sqrt{v_e^2+v_r^2+2v_e v_r\cos 45^\circ}=\sqrt{(w_r t)^2+(w_e t)^2+2w_r w_e t^2\cos 45^\circ};$$

bunda $w_r=\sqrt{2}\dfrac{m}{2},\ w_e=w_0=1\dfrac{m}{s^2},$ bo‘lgani uchun

$$v_a=\sqrt{5}t\,\frac{m}{s}$$

kelib chiqadi. Endi P jismning Ax o‘q bo‘ylab o‘tgan yo‘lini topamiz. Harakat tekis tezlanuvchan bo‘lganidan

$$x=x_0+v_{r_0}+\frac{w_r t^2}{2}.$$

Shunga o‘xshash, ko‘chirma harakat qonunini yozamiz:

$$\xi_e=\xi_0+v_{e_0}+\frac{w_r t^2}{2}.$$

$t=0$ da $\xi_0=0, x_0=0, v_{r_0}=0, v_{e_0}=0$ bo‘lganidan

$$x=\frac{w_r t^2}{2}, \ \ \xi_e=\frac{w_r t^2}{2}$$

hosil bo‘ladi.

Endi P jisshing $O_1\xi\eta$ qo‘zg‘almas sistemaga nisbatan absolyut harakati tenglamasini aniqlaymiz:

$$\xi=x\cos\alpha+\omega_e\frac{t^2}{2},$$

$$\eta=h-x\sin\alpha.$$

Yuqoridagilarchi e’tiborga olsak, absolyut harakat tenglamalari

$$\xi=t^2, \ \eta=h-\frac{t^2}{2}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu harakat tenglamalaridan t vaqtni chiqarib tashlasak, absolyut harakat trayektoriyasining tenglamasini olamiz:

$$\eta=h-\frac{\xi}{2}$$

ya’ni absolyut harakat trayektoriyasi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. Masalada ko‘chirma harakat ilgarilanma bo‘lganidan, $\overline{w}_a=\overline{w}_r+\overline{w}_e$ ga binoan, absolyut tezlanish $\overline{w}_a=\overline{w}_e+\overline{w}_r$ formula yordamida aniqlanadi (2.3b-rasm). Absolyut tezlanish moduli

$$w_a=\sqrt{w_e^2+w_r^2+2w_e w_r\cos 45^\circ}=\sqrt{5}\,\frac{m}{s^2}$$

Absolyut harakat to‘g‘ri chiziqli bo‘lgani uchun bu natijaning to‘g‘riligini absolyut tezlikdan vaqt bo‘yicha hosila olib tekshirish mumkin:

$$w_a=\frac{dv_a}{dt}=\sqrt{5}\,\frac{m}{s^2}.$$

4-masala. Nuqta $x(t)=400\cos(t/3)$ sm; $y(t)=400\sin(t/3)$ sm; $z(t)=2t^3-100$ sm harakat tenglamalariga muvofiq harakatlanadi. Berilgan tenglamalarga asosan uning traektoriyasini tiklash talab etiladi va nuqtaning $t=t_1=0,5$ s berilgan vaqt momentida traektoriyadagi holati, uning tezligi, tezlanishi, hamda egrilik radiuslari aniqlansin.

Masalaning yechilishi: harakatni aniqlash uchun dastlabki ikki tenglamadan vaqtga bog‘lig‘lik holatini olib tashlash mumkin. Aylana radiusi 400 *sm* bo‘lgan yassi egri chiziqli traektoriya tenglamasini olamiz:

$$\frac{x^2}{400^2}+\frac{y^2}{400^2}=1.$$

Qaralayotgan nuqta harakatidagi qolgan tenglamaning z *o‘qi va yassi chiziq bo‘yicha* z *o‘qi bo‘ylab kubik qonuniyatga asosan qadamlar bilan hosil qilamiz:*

Koordinata o‘qlaridagi nuqta tezligi proeksiyalari:

$$v_x=\dot{x}=-400\cdot\pi\cdot\sin(\pi\cdot t/3)/3;$$

$$v_y=\dot{y}=400\cdot\pi\cdot\cos(\pi\cdot t/3)/3.$$

Koordinata o‘qlaridagi nuqta tezlanishining proeksiyalari:

$$a_x=\ddot{x}=-400\cdot\pi^2\cdot\cos(\pi\cdot t/3)/9;$$

$$a_y=\ddot{y}=-400\cdot\pi^2\cdot\sin(\pi\cdot t/3)/9.$$

$t=t_1$ *berilgan vaqt uchun tezlik va tezlanish proeksiyalarining navbatdagi qiymatlarini olamiz:*

$$v_x=-209,4\ sm/s;\quad v_y=362,8\,sm/s;\quad v_z=1,5\,sm/s;$$
$$a_x=-379,9\,sm/s^2;\quad a_y=-219,3\,sm/s^2;\quad a_z=6\,sm/s^2.$$

Tezlik va tezlanish modullari:

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}=\sqrt{(-209,4)^2+362,8^2+1,5^2}=418,9;$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}=\sqrt{(-379,9)^2+(-219,3)^2+6^2}=438,7.$$

Urinma tezlanish:

$$a_\tau=\frac{v_x\cdot a_x+v_y\cdot a_y+v_z\cdot a_z}{v}=\frac{(-209,4)\cdot(-379,9)+362,8\cdot(-219,3)+1,5\cdot 6}{75,4}=0,021$$

.

Narmal tezlanish: $a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\sqrt{438,7^2-0,021^2}=438,7$.

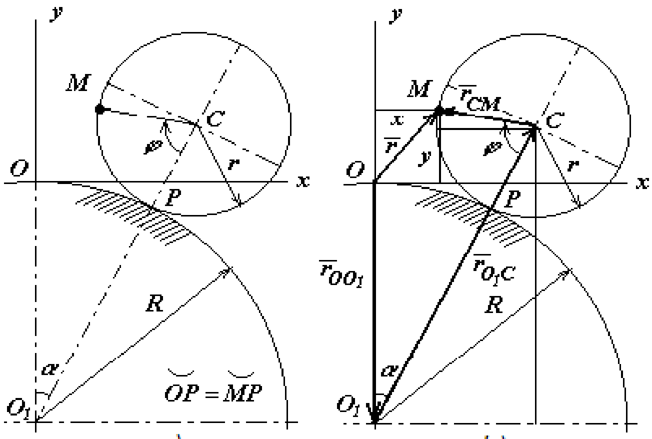
Egrilik radiusi: $\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{418,9^2}{438,7}=400$.

III bob. Nuqta va qattiq jism kinematikasi masalalaridan paket yordamida sonli va grafik natijalar olish.

3.1. Jism nuqtasining aylanma harakatini modellashtirish.

Ushbu bo'limda nazariy mexanikaning kinematik masalalaridan biri bo'lgan jism nuqtasining aylanma harakati masalasini yechishda Mathcad paketini qo'llash qaraladi.

Masalaning qo'yilishi: 3.1-rasmda mexanik sistema sxemasi va qo'zg'almas koordinatalar sistemasi tasvirlangan. Qo'zg'almas halqa radiusi $R = 98.5sm$, qo'zg'aluvchan halqa radiusi $r = 18.8sm$. Qo'zg'aluvchan halqaning buralish burchagi $\varphi = (t) = t$ qonuniyat bilan o'zgaradi. Qo'zg'aluvchan halqa ishqalanishga ega emas va yoy uzunliklari $OP = MP$. M nuqtaning harakat tenglamasi keltirib chiqarilib, $t = t_1 = \frac{1}{3}s$ vaqt momentidagi nuqtaning trayektoriyasi, tezligi, tezlanishi hamda egrilik radiusi topilsin.



3.1-rasm

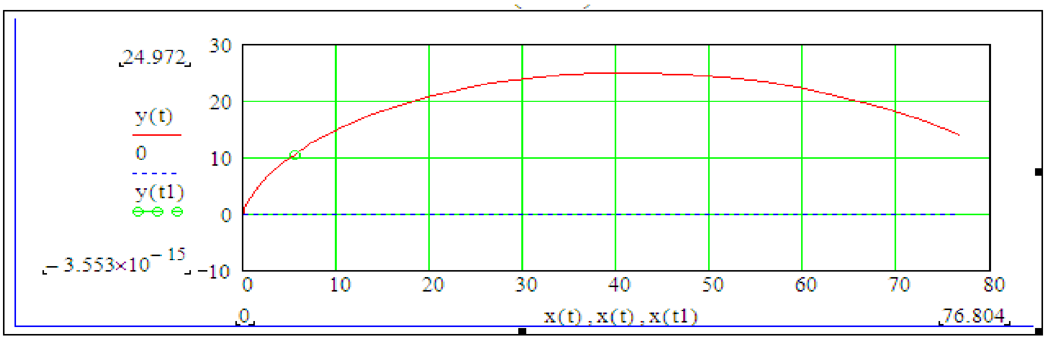
Masalani Mathcad paketi yordamida yechish:

Berilganlar: $R := 98.5sm \quad r := 18.8sm \quad t1 := \frac{1}{3}s \quad phi(t) := \pi \cdot t$

Harakat tenglamalari: $alpha(t) := \frac{r}{R} \cdot phi(t)$

$$x(t) := (R + r) \cdot \sin(alpha(t)) - r \cdot \sin(phi(t) + alpha(t))$$
$$y(t) := -R + (R + r) \cdot \cos(alpha(t)) - r \cdot \cos(phi(t) + alpha(t))$$

Nuqta harakati traektoriyasi: $t := 0, \left(0.1 \cdot \frac{1}{3}\right)..1$



Nuqtaning tezligi:

$$vx(t) := 22.38\cdot\pi\cdot\cos(0.19\cdot\pi\cdot t) - 22.38\cdot\pi\cdot\cos(1.19\cdot\pi\cdot t) \qquad vx(t1) = 46.496$$

$$vy(t) := -22.38\cdot\pi\cdot\sin(0.19\cdot\pi\cdot t) + 22.38\cdot\pi\cdot\sin(1.19\cdot\pi\cdot t) \qquad vy(t1) = 52.739$$

$$vxm(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad vxm(t1) = 46.561$$

$$vym(t) := \frac{d}{dt}y(t) \qquad vym(t1) = 52.717$$

$$v(t) := \sqrt{vx(t)^2 + vy(t)^2} \qquad v(t1) = 70.309$$

Nuqtaning tezlanishi:

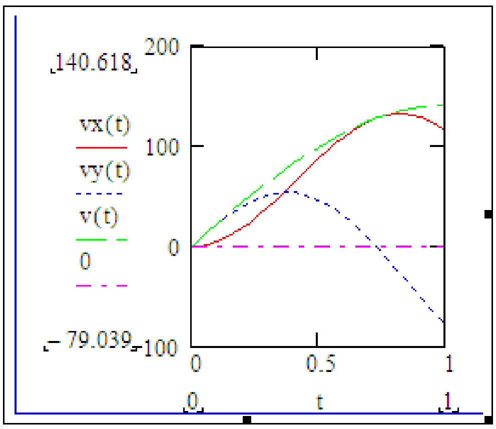
$$ax(t) := -4.25\cdot\pi^2\cdot\sin(0.19\cdot\pi\cdot t) + 26.63\cdot\pi^2\cdot\sin(1.19\cdot\pi\cdot t) \qquad ax(t1) = 240.809$$

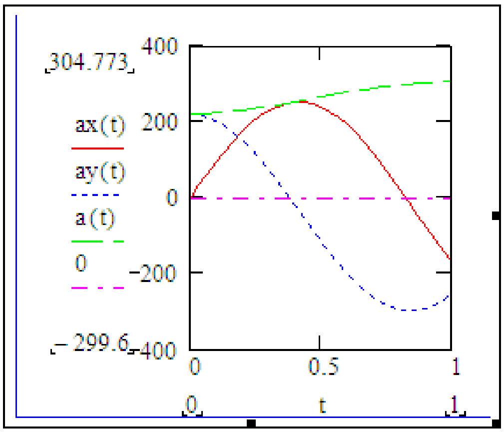
$$ay(t) := -4.25\cdot\pi^2\cdot\cos(0.19\cdot\pi\cdot t) + 26.63\cdot\pi^2\cdot\cos(1.19\cdot\pi\cdot t) \qquad ay(t1) = 42.713$$

$$axm(t) := \frac{d}{dt}vxm(t) \qquad axm(t1) = 241.095$$

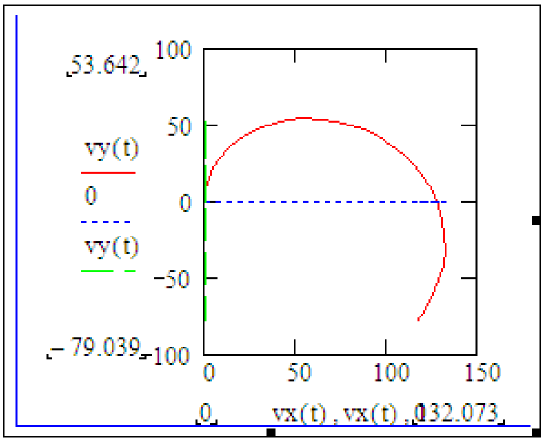
$$aym(t) := \frac{d}{dt}vym(t) \qquad aym(t1) = 42.37$$

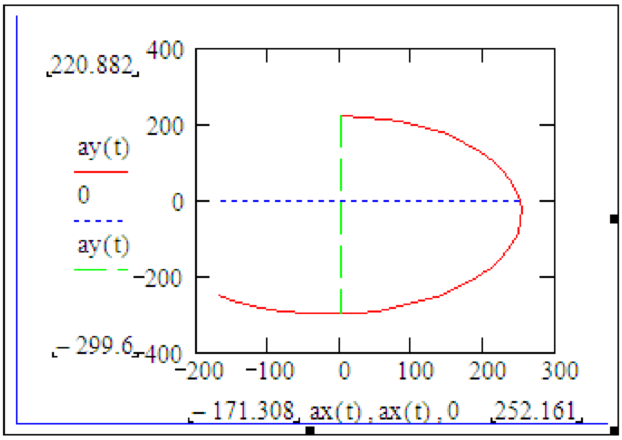
$$a(t) := \sqrt{ax(t)^2 + ay(t)^2} \qquad a(t1) = 244.568$$





Mexanik sistemaning tezligi va tezlanishi:





Urinma tezlanish:

$$\mathrm{at}(t) := \frac{v(t)\cdot \mathrm{ax}(t) + vy(t)\cdot \mathrm{ay}(t)}{v(t)} \qquad \mathrm{at}(t1) = 191.289$$

$$\mathrm{at}(0) = 0$$

$$\mathrm{at0}(t) := 24\cdot\pi^2\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{2}\right) \qquad \mathrm{at0}(t1) = 205.136$$

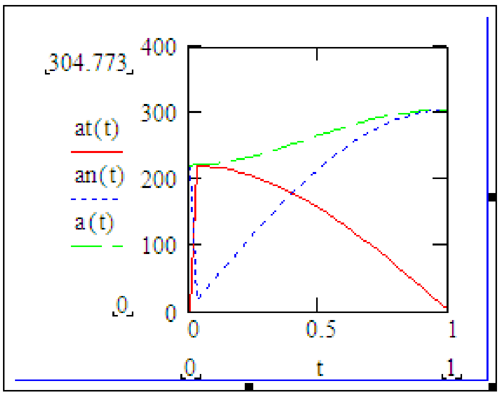
$$\mathrm{at0}(0) = 236.871$$

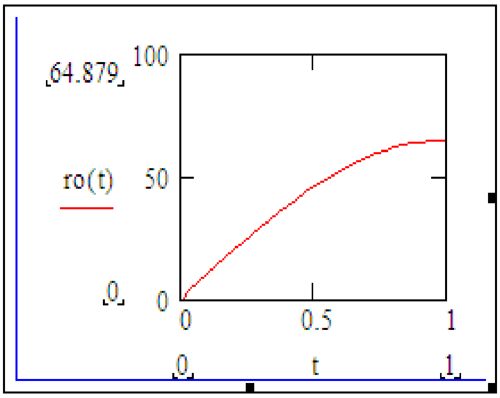
Normal tezlanish:

$$\mathrm{an}(t1) := \sqrt{a(t)^2 + at(t)^2} \qquad \mathrm{an}(t1) = 152.387$$

Egrilik radiusi:

$$ro(t) := \frac{v(t)^2}{\mathrm{an}(t)} \qquad ro(t1) = 32.439$$





$\mathrm{at}(0) = 0$ $\qquad$ $\mathrm{at0}(0) = 236.871$ $\qquad$ $\mathrm{an}(0) = 220.882$

$\mathrm{at}(0.00001) = 220.882$ $\qquad$ $\mathrm{an}(0.00001) = 4.787\times10^{-3}$

Olingan sonli natijalardan va grafiklardan ko'rinadiki, nuqta traektoriyasi, nuqtaning berilgan vaqt momentidagi tezligi, tezlanishi hamda egrilik radiuslarining grafiklari berilgan son qiymatlarga mos ravishda aniq tasvirlangan. Demak, bu turdagi masalalarni yechishda amaliy paketlarni qo'llash hisob-kitob ishlarini osonlashtiradi hamda samaradorlikni oshiradi.

3.2 Nuqtaning fazoviy harakatini tadqiq etish.

Ushbu bo'limda murakkab kinemetik nuqtaning fazoviy harakati masalasini yechishda Mathcad paketidan foydalanish masalasi qaraladi.

Masalaning qo'yilishi: Nuqta $x(t) = 175\cos(t/3)\ sm$, $y(t) = 175\sin(t/3)\ sm$, $z(t) = 3t^3 - 98\ sm$ harakat tenglamalariga muvofiq harakatlanadi. Berilgan tenglamalarga asosan uning trayektoriyasini tiklash talab etiladi va nuqtaning $t = t_1 = 0,5s$ berilgan vaqt momentida trayektoriyadagi holati, uning tezligi, tezlanishi, hamda egrilik radiuslari aniqlansin.

Masalaning Mathcad paketi yordamida yechilishi:

$$x(t) := 175 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right) \qquad t1 := 0.5$$

$$y(t) := 175 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{t}{3}\right)$$

$$z(t) := 3 \cdot t^3 - 98$$

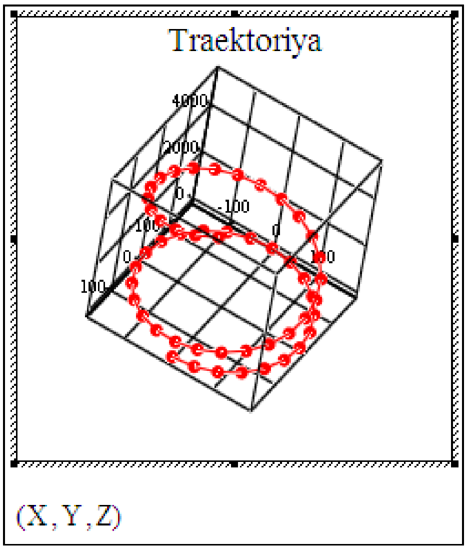
Berilgan vaqt momentidagi nuqta koordinatalari:

$$x(t1) = 151.554 \qquad y(t1) = 87.5 \qquad z(t1) = -97.625$$

Koordinata vektorini qurish:

$$1 := 1..50 \quad t(1) := (1-1) \cdot 0.25 \quad X_1 := x(t(1)) \quad Y_1 := y(t(1)) \qquad Z_1 := z(t(1))$$

Tezliklar, tezliklar proeksiyasi:



$$vx(t) := \frac{d}{dt}x(t) \qquad vy(t) := \frac{d}{dy}y(t) \qquad vz(t) := \frac{d}{dt}z(t)$$

$$i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tezliklar vektori:

$$v(t) := vx(t)\cdot i + vy(t)\cdot j + vz(t)\cdot k$$

Tezliklar moduli:

$$|v(1)| = 183.273 \qquad v(t1) = \begin{pmatrix} -91.63 \\ 158.707 \\ 2.25 \end{pmatrix}$$

Tezlanishlar: tezlanishlar proeksiyasi:

$$\mathrm{ax}(t) := -175\cdot\frac{\pi^2}{9}\cdot\cos\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right) \qquad \mathrm{ay}(t) := -175\cdot\frac{\pi^2}{9}\cdot sin\left(\pi\cdot\frac{t}{3}\right) \qquad \mathrm{az}(t) := \frac{d}{dt}vz(t)$$

Tezlanish vektori:

$$\mathrm{a}(t) := ax(t)\cdot i + \mathrm{ay}(t)\cdot j + \mathrm{az}(t)\cdot k$$

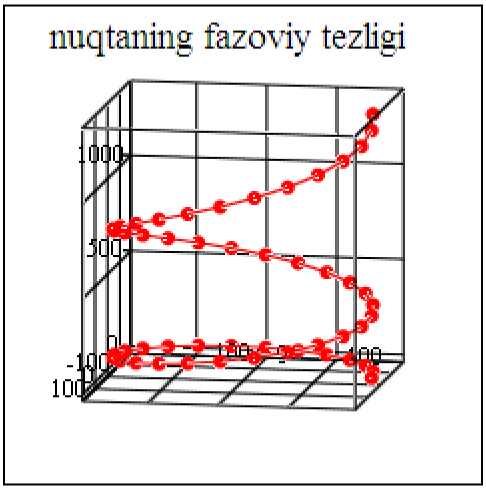
Tezlanish moduli:

$$|\mathrm{a}(t1)| = 438.69 \qquad \mathrm{a}(t1) = \begin{pmatrix} -166.198 \\ -95.954 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Tezlik va tezlanish vektorlarining proeksiyalarini qurish:

$VX_1 := vx(t(1)) \quad VY_1 := vy(t(1)) \qquad VZ_1 := vz(t(1))$

$AX_1 := ax(t(1)) \qquad AY_1 := ay(t(1)) \qquad AZ_1 := az(t(1))$



(VX, VY, VZ)

(AX, AY, AZ)

Urinma va normal tezlnishlar:

$$at(t) := \frac{v(t)\cdot a(t)}{|v(t)|} \qquad at(t1) = 0.11$$

$$an(t) := \frac{|v(t)\times a(t)|}{|v(t)|} \qquad an(t1) = 192.12$$

Egrilik radiusi:

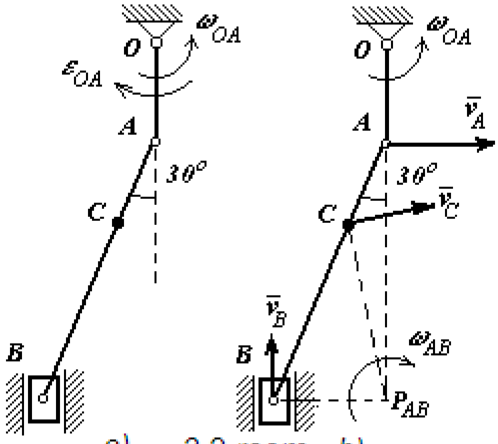
$$\rho := \frac{(|v(t1)|^2)}{an(t1)} \qquad \rho := 174.834$$

Masalaning yechimi shuni ko'rsatadiki, bu turdagi masalalarni yechish uchun zamanoviy paketlardan foydalanish, olinadigan natijalarning ishonchli bo'lishini hamda hisob-kitob ishlarining osonlashuvini ta'minlaydi, bundan tashqari masalada berilganlarning qiymatlarini o'zgartirish hisobiga shu tipdagi yangi masalalarni yechish imkoniyati tug'iladi.

3.3 Mexanik sistemadagi murakkab harakat jarayonini kompyuterli modellashtirish.

Ushbu bo'limda mexanik sistemadagi murakkab kinemetik harakat jarayoni masalasini yechishda Mathcad paketi qo'llaniladi.

Masalaning qo'yilishi: Yassi mexanizm 3.2a-rasmda keltirilgan. Krivoship uzunligi $OA = 15\,sm$. Shatun uzunligi $AB = 65\,sm$. A sharner va berilgan C nuqta orasidagi masoga $18\,sm$. Kuzatilayotgan vaqtda shatunning vertikaldan og'ish burchagi 30^{o}. AB krivoshipning burchak tezligi $1.2\,rad/s$, burchak tezlanishi esa $1.8\,rad/s^2$ ga teng. Mexanizmning joriy holati uchun B va C nuqtalarning tezlik va tezlanishlari hamda AB shatunning burchak tezlik va tezlanishlari topilsin.



3.2-rasm

Masalani Mathcad paketi yordamida yechish:

Berilganlar:

$OA := 15\,sm \qquad AB := 65\,sm \qquad AC := 18\,sm$

$\omega OA := 1.2\ rad/s^2 \qquad \varepsilon OA := 1.8\ rad/s^2$

$$alpha := 30 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Tezliklarni aniqlash:

$vA := \omega OA \cdot OA \qquad vA = 18\ sm/s$

$$\omega AB := \frac{vA}{AB \cdot \cos(alpha)} \qquad \omega AB = 0.32\,rad/s$$

$vB := \omega AB \cdot AB \cdot \sin(alpha) \qquad vB = 10.392\ m/s$

$$vC := \omega AB \cdot \sqrt{AC^2 + (AB \cdot \cos(alpha))^2 - 2 \cdot AB \cdot (AB \cdot \cos(alpha)) \cdot \cos(alpha)}$$

$$vC = 13.33\ sm/s$$

$\phi(t) := \omega OA \cdot t + \varepsilon OA \cdot \frac{t^2}{2}$ *-OA boshlang'ich qismning joylashuv funksiyasi;*

AB qismning joylashuv funksiyasi:

$$\psi(t) := \mathrm{asin}\left(\frac{-AB \cdot \sin(alpha) - OA \cdot \sin(\phi(t))}{AB}\right)$$

AB qismning burchak tezligi:

$$\omega ABt(t) := \frac{d}{dt}\psi(t) \qquad \omega ABt(0) = -0.32\ rad/s$$

AB qismning burchak tezliklar vektori:

$$\omega ABv(t) := \omega ABt(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Boshlang'ich qismning burchak tezliklar vektori:

$$\omega OAv(t) := (\omega OA + \varepsilon OA \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A nuqtaning radius vektori:

$$rOA(t) := OA \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) \\ \sin(\phi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

A nuqtaning tezligi:

$$vAt(t) := \omega OAv(t) \times rOA(t) \qquad vAt(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

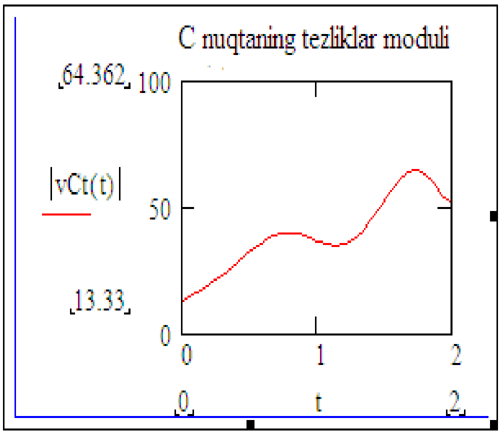
AB radius vekor: $\quad rAB(t) := AB \cdot \begin{pmatrix} \cos(\psi(t)) \\ \sin(\psi(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$

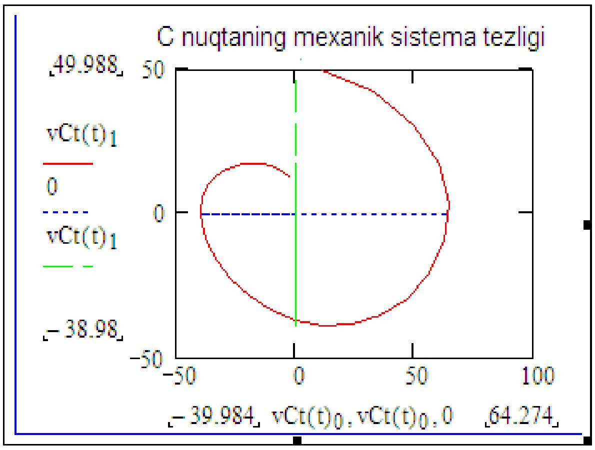
B nuqtaning tezligi: $\quad vBt(t) := vAt(t) + \omega ABv(t) \times rAB(t) \quad vBt(0) = \begin{pmatrix} -10.392 \\ 7.354 \times 10^{-13} \\ 0 \end{pmatrix}$

C nuqtaning tezligi: $\quad vCt(t) := vAt(t) + (\omega ABv(t) \times rAB(t)) \cdot \frac{AC}{AB}$

$$vCt(0)=\begin{pmatrix}-4.317\\19.523\\0\end{pmatrix} \qquad |vCt(0)|=19.995\,sm/s$$

$$T:=2 \qquad t:=0,\frac{T}{30}..T$$





Tezlanishni aniqlash:

$aA\hat{a}p:=|\varepsilon OA|\cdot OA$ $\quad aA\hat{a}p=27\ sm/s^2$ - A nuqtaning aylanma tezlanishi

$aAoc:=\omega OA^2\cdot OA$ $\quad aAoc=21.6\ sm/s^2$ - A nuqtaning o‘qli tezlanishi

$aBAoc:=\omega AB^2\cdot AB$ $\quad aBAoc=6.646\ sm/s^2$ - A qutb atrofidagi B nuqtaning o‘qli tezlanishi

$aBA\hat{a}p:=1$

$aBx:=1$ $\quad aBy:=0$ - B nuqtaning tezlanish proeksiyasi

$aBx=-aAoc-aBAoc\cdot\cos(alpha)-aBA\hat{a}p\cdot\sin(alpha)$

$aBy=-aA\hat{a}p+aBAoc\cdot\sin(alpha)-aBA\hat{a}p\cdot\cos(alpha)$

$\begin{pmatrix}aBx\\aBA\hat{a}p\end{pmatrix}:=Find(aBx,aBAbp)$ $\quad aBx=-13.686$ $\quad aBA\hat{a}p=-27.34$

$\varepsilon AB:=\frac{|aBA\hat{a}p|}{AB}$ $\qquad \varepsilon AB=0.421$

C nuqtaning tezlanishi:

$aCAoc:=\omega AB^2\cdot AC$ $\quad aCAoc=1.84\ sm/s^2$ - A utb atrofidagi C uqtaning o‘qli tezlnishi.

$aCA\hat{a}p:=\varepsilon AB\cdot AC$ $\quad aCA\hat{a}p=7.571\ sm/s^2$ - A qutb atrofidagi C uqtaning aylanma tezlanishi.

$$aCx := -aAoc - aCAoc \cdot \cos(alpha) + aCAâp \cdot \sin(alpha)$$

$$aCy := -aAâp + aCAoc \cdot \sin(alpha) + aCAâp \cdot \cos(alpha)$$

$aCx = -19.408$ $\quad aCy = -19.523$ $\quad aC := \sqrt{aCx^2 + aCy^2}$ $\quad aC = 27.529$

AB shatunning burchak tezlanishi: $\varepsilon ABt(t) := \frac{d}{dt}\omega ABt(t)$ $\quad \varepsilon ABt(0) = -0.539$

AB shatundagi burchak tezlanish vektori: $\varepsilon ABv(t) := \varepsilon ABt(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

OA boshlang‘ich qismdagi burchak tezlanish vektori: $\varepsilon OAv := \varepsilon OA \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$aAocv(t) := \omega OAv(t) \times (\omega OAv(t) \times rOA(t)) \quad aAocv(0) = \begin{pmatrix} -21.6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aAâpv(t) := \varepsilon OAv \times rOA(t) \quad aAâpv(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -27 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aBAocv(t) := \omega ABv(t) \times (\omega ABv(t) \times rAB(t)) \quad aBAocv(0) = \begin{pmatrix} -5.756 \\ 3.323 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|aBAocv(0)| = 6.646$

$$aBAâpv(t) := \varepsilon ABv(t) \times rAB(t) \quad aBAâpv(0) = \begin{pmatrix} -17.507 \\ -30.323 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$|aBAâpv(0)| = 35.014$

$$aBv(t) := aAocv(t) + aAâpv(t) + aBAocv(t) + aBAâpv(t) \quad aBv(0) = \begin{pmatrix} -44.863 \\ 3.656 \times 10^{-9} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$aCAocv(t) := \omega ABv(t) \times \left(\omega ABv(t) \times rAB(t) \cdot \frac{AC}{AB} \right) \quad aCAocv(0) = \begin{pmatrix} -1.594 \\ 0.92 \\ 0 \end{pmatrix}$$

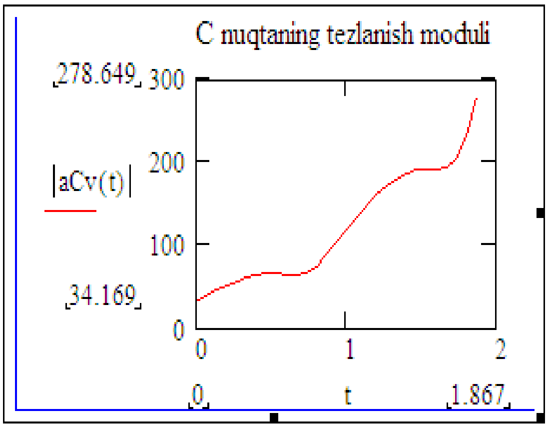
$$|aCAocv(0)| = 1.84$$

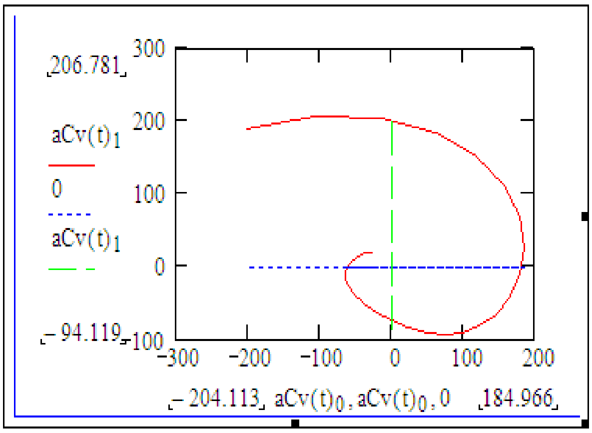
$$aCA\hat{a}pv(t) := \varepsilon ABv(t) \times rAB(t) \cdot \frac{AC}{AB} \quad aCA\hat{a}pv(0) = \begin{pmatrix} -4.848 \\ -8.397 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|aCA\hat{a}pv(0)| = 9.696$$

$$aCv(t) := aAocv(t) + aA\hat{a}pv(t) + aCAocv(t) + aCA\hat{a}pv(t)$$

$$aCv(0) = \begin{pmatrix} -28.042 \\ 19.523 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |aCv(0)| = 34.169$$





Masalaning yechimidan ko'rinadiki, bu turdagi masalalarni yechish uchun zamanoviy paketlardan foydalanish, olinadigan natijalarning ishonchli bo'lishini hamda hisob-kitob ishlarining osonlashuvini ta'minlaydi.

Xulosa

Ishda qaralgan nuqta va qattiq jismlarning murakkab kinematik harakatlarini tadqiq etishda Mathcad paketidan foydalanish masalasini ijobiy hal etishni amalga oshirish maqsadida quyidagi ishlar bajarildi:

1. Ishning birinchi bobida nuqta va qattiq jism kinematikasi harakatlariga oid adabiyotlar o`rganildi.

2. Ishning ikkinchi bobida nuqta va qattiq jism kinematikasining murakkab harkatlarini ifodalovchi masalalarning qo`yilishi o`rganib chiqildi.

3. Ishda harakatlanuvchi nuqta va mexanik sistemalarni Mathcad paketida tadqiq etish masalasi qaraldi va bu masalalarning bir necha parametrlariga bog`liq sonli va grafik natijalar olindi.

4. Jism nuqtasining aylanma harakatiga doir masala Mathcad paketi yordamida yechildi, hamda yechimlarga mos sonli va grafik natijalar olindi.

5. Ishda nuqtaning fazoviy harakati va mexanik sistemadagi murakkab harakat jarayonlari tadqiq etildi. Ishda yechilgan har bir masalaning yechimlari qisqacha tahlil qilib chiqildi.

Ishda qaralgan masalalarni turli harakatlanuvchi nuqtalar va mexanik sistemalar asosida ishlaydigan sohalarga tadbiq etish, ushbu sohalardagi ish jarayonlarini kiskin jadallashtirish imkonini yaratadi.

Foydalanilgan adabiyotlar va internet resurslari.

1. I. A. Karimov “Yuksak ma’naviyat yengilmas kuch.” T. Ma’naviyat, 2010 y. 173 s.

2. I. A. Karimov “O’zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida” T.O’zbekiston 2011 y. 432 s.

3. M.T. O’rozboyev “Nazariy mexanika asosiy kursi”. T.: O’qituvchi,1966 y. 573s.

4. S.Q. Azizqoriyev. Sh.X. Yangurazov “ Nazariy mexanikadan masalalar yechish metodikasi”. T.: O’qituvchi. 1974 y. 160 s

5. И.В.Мещерский “Задачи по теоретической механики”: Учебное пособие 37-е издание, исправл. Под пед. В.А. Палмова, Д.Р. Меркина. СПД:Изд-во ”Лан” 1998г. 448с

6. А.А. Яблонский В.М. Никифорова. “Курс теоретической механики”. Ч.1. Статика, Кинематика. Учебник для ВТУЗов. Изд.5-е, испр., М.:”Высшая школа”, 1977г. 368с

7. T.R. Rashidov (Nazariy mexanika asoslari) 1990 yil T. «O‘qituvchi».

8. J. Zoirov «Nazariy mexanika» 1- va 2-qismlar T. «Fan.» 1995 yil.

9. А.Н. Бондаренко “Типовые расчеты по теоретической механике на базе математического процессора MathCAD”.Ч.1. Статика. Учебное пособие для вузов. – Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2002г. 100с

10. А.Н. Бондаренко “Теоретическая механика в примерах и задачах”. Ч.2. Кинематика. Електронной учебное курс. – Новосибирск: 2002г

11. Е.Г. Макаров “Инженерные расчеты в Mathcad”. Изд. Питер. М. 2009г. 381с

12. А.И. Плис, Н.А.Силвина “Mathcad 2000: Математический практикум для экономистов и инженеров”: Учеб.пособие. –М. Финансы и статистика, 2000г. 523с

13. S.M.Targ Kratkiy kurs «Teoreticheskaya mexanika» M. «Visshaya shkola» 1996 g.

14. В.М. Старжинский “Теоретическая механика” М.: Наука. 1980г. 425 с.

15. www.Ziyonet.uz. // O’zbekiston ta’lim portali.

16.http://www.mathcad.com

17.www.google.uz

18.http://www.autocad.com

19.www.ter-mex.ru

20. http://www.library.ru