Bir o'lchamli simpleksda aniqlangan kubik stoxastik operatorning qo'zg'almas nuqtalari haqida

O'qituvchi: *Sh.D. Nodirov*

Talaba: *Sh. Jamolov*

Ushbu ishda bir o'lchamli simleksda koeffitsientlari qatiiy musbat aniqlangan kubik stoxastik operatorlarning qo'zg'almas nuqtalari o'rganilgan. Chekli o'lchamli simleksda aniqlangan kubik stoxastik operatorlar bilan [1]-[4] adabiyotlarda tanishish mumkin. Shuni alohida ta'kidlash mumkinki kubik stoxastik operatorlarning matematik biologiyaga alohida tadbiqi bo'lib, u keyingi avlodning genini tavsiflashda muhim o'rin tutadi [4].

Bizga $E=\{1,2,3,...,n\}$ to'plam berilgan bo'lsin.

$$S^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i\geq 0, \forall i\in E, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$$

to'plamga $(n-1)$ o'lchamli simleks deyiladi.

$S_{>}^{n-1}$ orqali S^{n-1} simpleksning ichini belgilaymiz, ya'ni

$$S_{>}^{n-1}=\{x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i> 0, \forall i\in E, \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}.$$

Har bir $x\in S^{n-1}$ element E dagi ehtimollik o'lchovi va uni n elementdan tuzilgan biologik sistemaning holati sifatida baholash mumkin. Kubik stoxastik $\mathrm{C}: S^{n-1}\to S^{n-1}$ operator quyidagi ko'rinishda aniqlanadi [1]: $\mathrm{C}x=x'$, ya'ni

$$x_l'=\sum_{i,j,k=1}^{n}P_{ijk,l}x_ix_jx_k,\ l\in E.$$

Bu yerda

$$P_{jik,l}=P_{ijk,l}=P_{kij,l}=P_{kji,l}=P_{ikj,l}=P_{jki,l}\geq 0,\ \forall i,j,k,l\in E,\ \sum_{l=1}^{n}P_{ijk,l}=1.$$

Agar $P_{jki,l}>0, \forall i,j,k,l\in E$ bo'lsa, u holda C kubik stoxastik operator musbat aniqlangan deymiz.

Quyidagicha belgilash kiritamiz $a_{ij}=P_{iij,1},\ b_{ij}=P_{iij,2},\ i,j\in E=\{1,2\}$.

U holda bir o'lchamli $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x+y=1\}$ simpleksda aniqlangan qatiiy musbat C KSO quyidagi ko'rinishga keladi

$$\mathrm{C}(x,y)=(a_{11}x^3+3a_{12}x^2y+3a_{21}xy^2+a_{22}y^3, b_{11}x^3+3b_{12}x^2y+3b_{21}xy^2+b_{22}y^3),\quad (1)$$

bu yerda $a_{ij} > 0,\ b_{ij} > 0,\ a_{ij} + b_{ij} = 1,\ i, j \in \{1,2\}$. Ma’lumki C KSO (1) operator uchun $C(S^1) \subset S^1_>$ munosabat o’rinli.

Ta'rif 1. *Agar V operator uchun $V(\omega^*) = \omega^*$ o'rinli bo'lsa, u holda ω^* nuqta V operatorning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi.*

$Fix(C)$ orqali C operatorning qo’zgalmas nuqtalari to’plamini belgilaymiz, ya’ni

$$Fix(C) = \{\omega \in S^1 : C\omega = \omega\}.$$

Bu yerda $Fix(C) \subset S^1_>$ munosabat o’rinli ekanini ko’rish qiyin emas.

Lemma 1. C *KSO (1) ning $S^1_>$ da qo’zg’almas nuqtasi mavjud va ularning soni uchtadan oshib ketmaydi, ya’ni* $1 \le |Fix(C)| \le 3$.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\mu_0 = a_{11} - a_{22} + 3(a_{21} - a_{12}),\ \mu_1 = 3a_{22} + 3a_{12} - 6a_{21},\ \mu_2 = 3a_{21} - 3a_{22} - 1,\ \mu_3 = a_{22}.$$

Teorema 1. *Agar* $\mu_0 \ge 0$ *bo’lsa, u holda* C *KSO (1)* $S^1_>$ *da yagona qo’zg’almas nuqtaga ega bo’ladi, ya’ni* $|Fix(C)| = 1$.

Teorema 2. *Agar quyidagi shartlardan biri o’rinli bo’lsa*

1. $\mu_0 < 0, \mu_1 < 0,\ \mu_2 < 0,$
2. $\mu_0 < 0, \mu_1 > 0,\ \mu_2 > 0,$
3. $\mu_0 < 0, \mu_1 < 0,\ \mu_2 > 0,$

u holda C *KSO (1)* $S^1_>$ *da yagona qo’zg’almas nuqtaga ega bo’ladi, ya’ni* $|Fix(C)| = 1$.

Adabiyotlarro’yxati

[1]Розиков У.А., Хамроев А.Ю.:О кубических операторах определенных в конечномерном симплексе, *Укр. мат. журн.,* 2004. Т. 56, № 10. С. 1424-1433.

[2] Шахиди Ф.А.:О биостохастических операторах, определенных в конечномерномсимплексе, *Сибирский математический журнал,* Март-апрель, 2009.Том. 50, № 2. С. 463-468.

[3] Mamurov B. J., Rozikov U. A.: On cubic stochastic operators and processes, *Journal of Physics*, Conference Series 697 (2016) 012017.

[4] Jamilov U.U., KhamraevA.Yu., Ladra M.: On a Volterra Cubic Stochastic Opearator, *Bull Math Biol*, 80:2 (2018) 319-334.