

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

ТАШКЕНТСКИЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ

РАСУЛ-ЗАДЕ Л.У., МИРХАМИДОВ Д.Х.

**НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
(ПЕРСПЕКТИВА И ТЕНИ)**

ТАШКЕНТ 2014

УДК 514. 18(075)

Расул-Заде Л.У., Мирхамидов Д.Х. Начертательная геометрия (Перспектива и тени). Учебное пособие для направлений: архитектура, дизайн, художественная графика. Ташкент. 2014. 160с.

Учебное пособие содержит следующие сведения по выполнению графических построений теней в ортогональных проекциях, аксонометрии и в перспективе: общие сведения, основные понятия и определения теней в архитектурном проектировании; тени (точки, прямой линии, плоских фигур, геометрических тел, многогранников, объемных тел, цилиндрических и конических тел, шара, зданий и его фрагментов); краткие сведения о перспективе; перспективы (прямых линий, плоских фигур, объемного объекта); построение теней в перспективе.

Учебное пособие рассчитан на студентов, обучающихся по направлениям: архитектура, дизайн, художественная графика.

Рекомендован в качестве учебного пособия Координационным Советом при МВССО Республики Узбекистан «_____» _____ 2014г. (протокол № _____).

Рецензенты:

Зав. кафедрой «Промышленный дизайн» ТГТУ, кандидат архитектуры, доцент Дмитриева И.К.

Доцент кафедры «Начертательная геометрия и компьютерное проектирование» ТАСИ, кандидат архитектуры Джумабаев Х.Ю.

Annotation

Rasul-Zade L. U., Mirkhamidov D.H. Descriptive geometry (Perspective and shadows). Teaching aid.

Teaching aid contains the following data on performance of graphic creation of shadows in orthogonal projections, an axonometric and in the long term: general information, the main concepts and definitions of shadows in architectural design; shadows (points, straight line, flat figures, solids, polyhedrons, volume bodies, cylindrical and conic bodies, sphere, buildings and its fragments); short data on prospect; prospects (straight lines, flat figures, volume object); creation of shadows in the long term.

Teaching aid is calculated on the students who are training in the directions: architecture, design, art graphics.

Аннотация

Расул-Заде Л.Ў., Мирхамидов Д.Х. “Чизма геометрия (Перспектива ва соялар)”. Ўқув қўлланма.

Ўқув қўлланмада ортогонал проекциялар, аксонометрия ва перспективада сояларни яшаш бўйича қуйидаги маълумотлар келтирилган: умумий маълумот, архитектуравий лойиҳалашда соялар ҳақида асосий тушунчалар ва қўникмалар; соялар (нукта, тўғри чизиқ, ясси шакл, геометрик жисмлар, кўпёқлар, хажмли жисмлар, цилиндр ва конуссимон жисмлар, шар, бино ва унинг фрагментлари); перспектива ҳақида қисқа маълумотлар; перспективалар (тўғри чизиқлар, ясси шакллар, хажмли объектлар); перспективада соялар яшаш.

Ўқув қўлланма “Архитектура”, “Дизайн” ва “Бадий график” йўналишларида таълим олувчи талабаларга мўлжалланган.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕНЯХ В АРХИТЕКТУРНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ.

При наблюдении какого-либо здания или сооружения, как и любого другого пространственного объекта, благодаря наличию светотени воспринимаются его объемная форма, положение, рельеф поверхностей. Это наблюдается как при освещении прямыми лучами (солнечными или от светящейся точки), так и при рассеянном (диффузном) освещении. В первом случае светотень будет четкая, интенсивная, с резкими границами, во втором – менее интенсивная, с мягкими переходами от света к тени.

В архитектурно-строительной практике светотень имеет важное значение. Для проверки композиционных решений и придания архитектурным чертежам большей наглядности, рельефности изображений архитектор сопровождает их построением теней. Принципы, на которых основано построение теней, применяются в ряде специальных областей, например при расшифровке изображений и фотоснимков по зафиксированным контурам теней, выборе освещенности зданий, исследованиях при аэрофотоснимках, маскировке и пр.

Работники изобразительного искусства отлично понимают формообразующее значение светотени в восприятии пространственного объекта, а тем более архитектурного сооружения. Об этом свидетельствуют памятники архитектуры разных эпох, в которых зодчие умело использовали архитектурные качества светотени, мастерски учитывая местные световые условия.

В египетской архитектуре при ярком и высоком солнце незначительные рельефы стен придавали им выразительную фактуру. Особенно умелое использование архитектурных свойств света и законов оптики наблюдаем в сооружениях Греции и Рима.

В эпоху Ренессанса широко использовались и формообразующие свойства светотени, и законы зрительного восприятия. По словам Леонардо да Винчи, рельефность «происходит от теней и светов или, другими словами, от светлого и темного. Итак, кто избегает теней, избегает славы искусства».

Такое серьезное значение светотени требует проверки ее формирующих качеств в задуманном объекте еще в начальной стадии проектирования. Поэтому для более полного выявления пространственного решения композиции, пластичности форм, рельефности поверхности, масштабности деталей и пр. архитектурные чертежи сопровождаются изображением светотени, выполненным различными графическими приемами на основе геометрических и физических закономерностей, с учетом физиологии зрительного восприятия.

Архитектурный чертеж с изображением светотени гораздо полнее создает представление о реальном объекте, чем чертеж, выполненный в линейной графике. Даже по одной проекции, дополненной построением теней, можно «прочитать» чертеж, т.е. представить пространственную организацию объекта, что можно подтвердить следующими примерами.

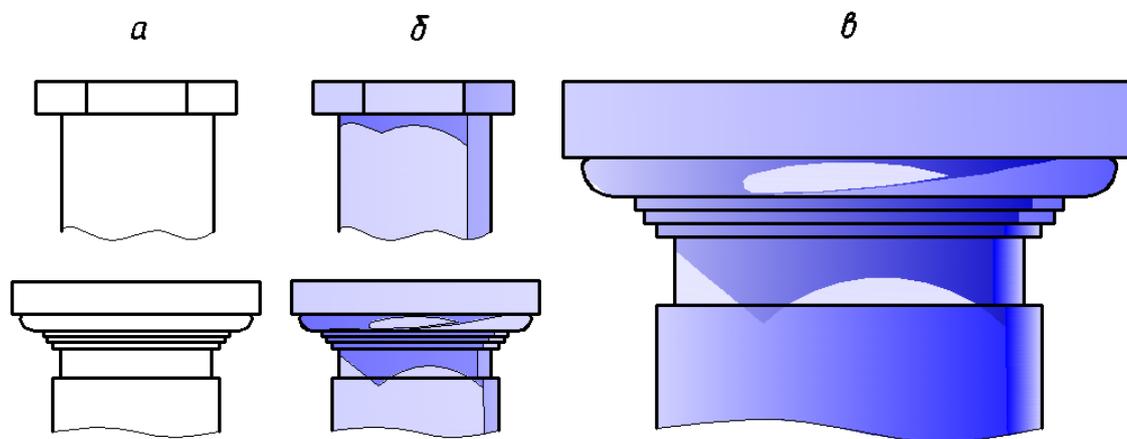


Рис. 1. Изображение колонн:

a – линейное;

б – с контурами собственных и падающих теней;

в – с учетом воздушной перспективы

В восприятии архитектурного сооружения формообразующее значение светотени играет большую роль. Умелое использование архитектурных качеств светотени дает сооружению большой дизайнерский эффект. Чертеж с изображением светотени гораздо полнее создает представление о реальном объекте, чем чертеж, выполненный в линейной графике. На рис. 1, а по одному изображению колонн в линиях форму объекта определить невозможно. На рис. 1, б по контурам теней (линиям пересечения световых плоскостей с поверхностью объекта) уже можно частично определить форму объекта, а по рис. 1, в, где показаны границы теней и градация освещенности на основе воздушной перспективы, форму объекта можно прочесть по одному изображению.

Начертательная геометрия обычно ограничивается геометрическими построениями, относящимися к определению границы тени.

Само понятие тени вытекает из трех физических положений, не зависящих от гипотез о происхождении света:

1) *в однородной среде свет распространяется по прямым линиям;*

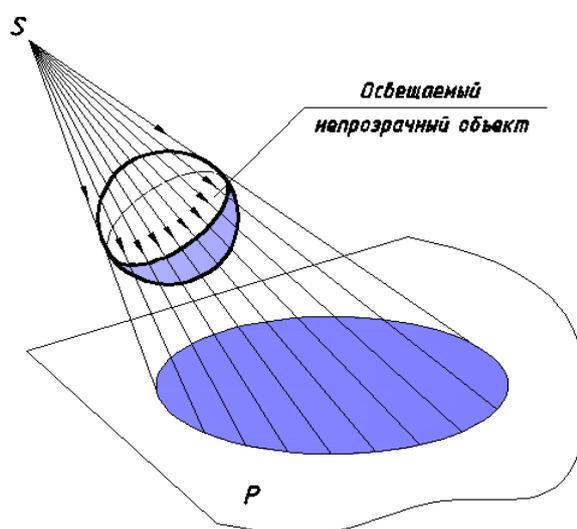


Рис.2. Образование теней от конического пучка лучей

2) *лучи света выходят из светящейся точки по всем направлениям.*

На этом основании, на какое-либо тело, взятое в пространстве, падает пучок лучей, ограниченных конической поверхностью, образующие которой касательны к данному телу (рис.2).

3) Лучи света проходят через прозрачное тело и задерживаются непрозрачным.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Предметы в окружающей среде освещаются либо лучами солнца, либо другими источниками света.

Тени, придающие плоским чертежам большую выразительность, разделяют на *собственные* и *падающие*.

Пусть источник света (солнце), освещая какой-либо геометрический объект (например, шар), удален в бесконечность в направлении, противоположном S . Тогда световые лучи, идущие от источника, будут параллельны друг другу. Множество лучей, упирающихся в поверхность шара, образуют *световой цилиндр*. Оболочка цилиндрической поверхности, касаясь шара, отделит освещенную поверхность шара от неосвещенной.

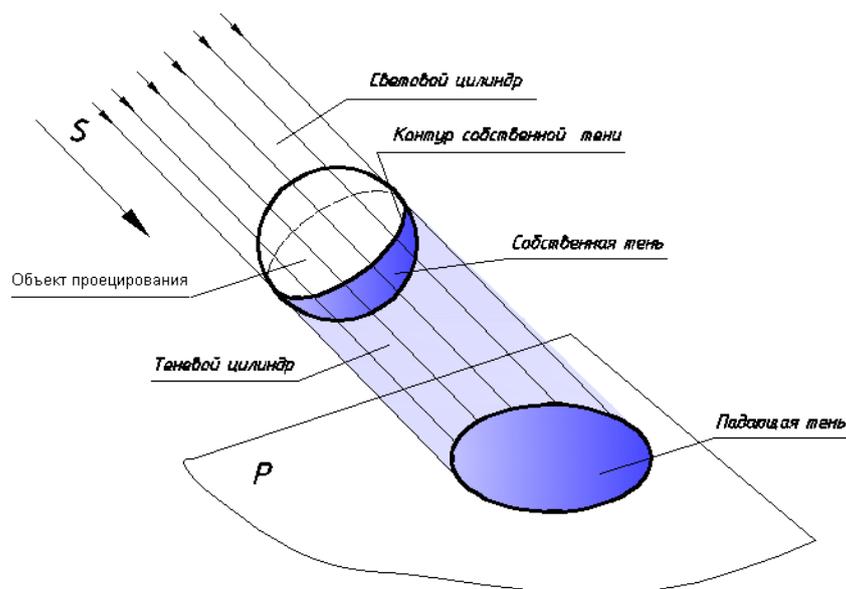


Рис. 3. Механизм получения собственных и падающих теней

Поскольку цилиндрическая поверхность, образованная световыми лучами, соосна со сферой, ограничивающей шар, – общим элементом для обеих поверхностей будет окружность, за которой поверхность шара не освещается. За окружностью находится *теневого* цилиндр. Образованная множеством световых лучей цилиндрическая поверхность называется *проецирующей*.

Граница между освещенной и неосвещенной частями поверхности предмета – *контур собственной тени*.

Собственная тень объекта проецирования – это совокупность неосвещенных элементов поверхности предмета.

В рассматриваемом случае объектом освещения был шар, следовательно, множество световых (*проецирующих*) лучей образовали поверхность *кругового* цилиндра. Последняя, являясь поверхностью 2-го порядка, пересечется с *плоскостью проекций P* по эллипсу, который представляет собой *падающую тень* шара. Поэтому *падающая тень* – это тень, отбрасываемая предметом на другой предмет или на какую-либо плоскость (в том числе и на плоскость проекций) или поверхность (рис.3). Следовательно, в случае бесконечно-удаленного источника света *тень* – это *параллельная косоугольная проекция предмета*.

При построении ортогональных проекций теней направление световых лучей принимают параллельным диагонали куба, что упрощает построения и позволяет во многих случаях судить об относительных размерах отдельных элементов архитектурного объекта по ширине падающих от них теней. При этом направлении световых лучей их проекции располагаются под углом 45° к оси x .

В аксонометрии направление луча света и его проекции выбирают с таким расчетом, чтобы наглядность была наибольшей.

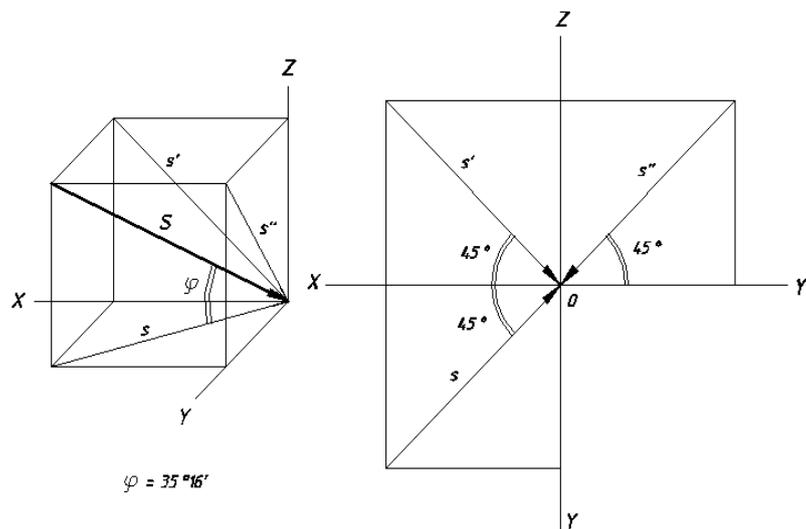


Рис. 4. Световой куб и световые квадранты

3. ТЕНЬ ТОЧКИ

Простейшим геометрическим объектом является точка.

Тенью точки будем считать точку пересечения светового луча с какой-либо плоскостью или поверхностью.

Рассмотрим построение тени точки в ортогональных проекциях. Пусть даны чертежи двух точек A (рис. 5). Заметим, что первая точка имеет меньшую аппликату и большую ординату, следовательно, она ближе расположена к плоскости H и отстоит дальше от плоскости V по сравнению со второй. Проведем в пространстве световой луч через точку $A(a, a')$.

Фронтальная проекция луча пройдет через точку a' , а горизонтальная – через точку a на основании свойства параллельных проекций.

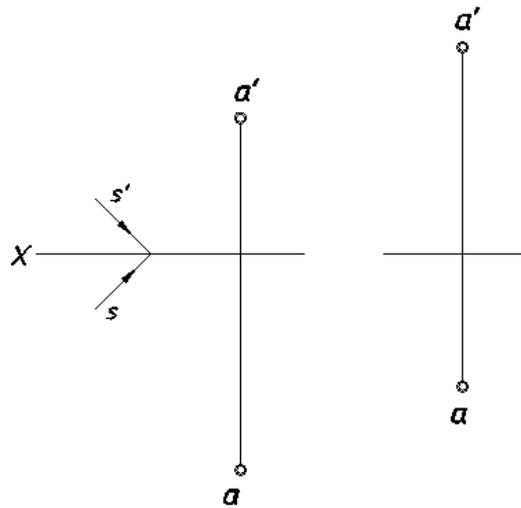


Рис. 5. Условие задачи

Поскольку в первом случае точка A ближе к плоскости H и дальше находится от плоскости V – пересечение луча произойдет с горизонтальной плоскостью проекций. Во втором случае – с плоскостью V (рис. 6). Точки пересечения светового луча с плоскостями проекций обозначим следующим образом:

A_n – действительная тень точки A на плоскости H ;

A_v – действительная тень точки A на плоскости V .

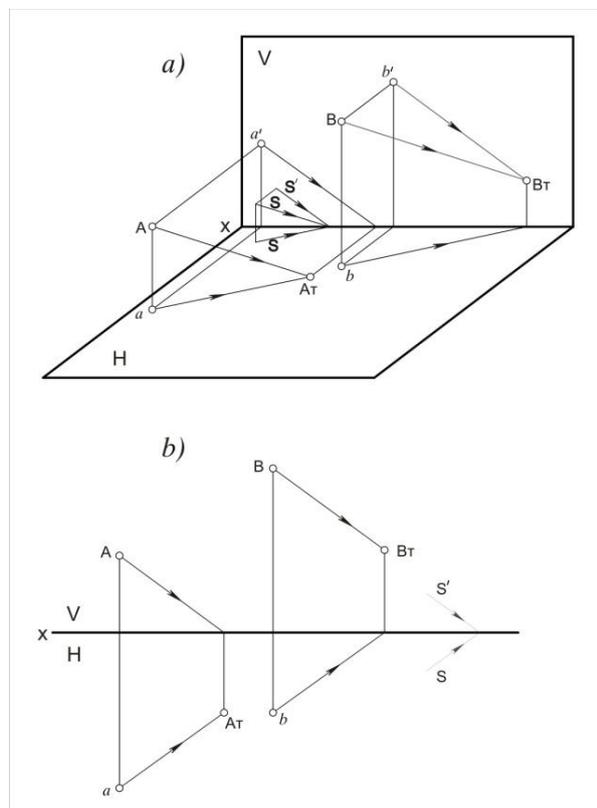


Рис. 6. Построение теней точки на плоскостях проекций

Из приведенных рассуждений можно сделать

вывод: *тень точки падает на ту плоскость проекций, к которой точка расположена ближе.*

Заметим, что плоскости проекций считаются непрозрачными, поэтому действительная тень точки A может получиться только на одной из них. При мысленном продолжении луча его пересечение произойдет и с другой плоскостью проекций, на которой получится *мнимая (фигтивная) тень* точки (рис. 7). Обозначим эти тени следующим образом:

$a_{T(\phi)}$ — мнимая тень точки A на плоскости H ;

$a_{T'(\phi)}$ — мнимая тень точки A на плоскости V .

Конечно, в реальной жизни мнимых теней не бывает, но для решения практических геометрических задач их используют довольно часто.

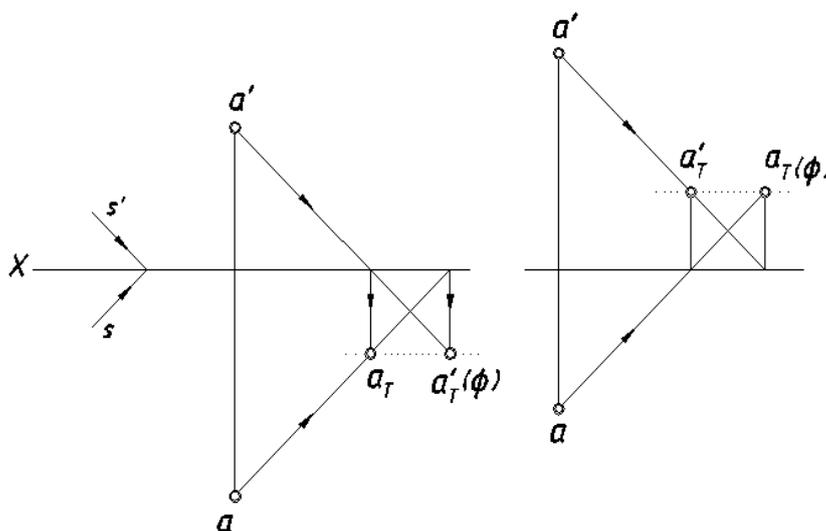


Рис. 7. Построение мнимых теней точки

Из построений, приведенных на рис.7, можно сделать

вывод: *действительная и мнимая тень точки лежат на прямой, параллельной оси проекций.*

4. ТЕНЬ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

4.1. ТЕНЬ ГОРИЗОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ

РАССМОТРИМ ПОСТРОЕНИЕ ТЕНИ ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ H . НА РИС. 8 ИЗОБРАЖЕНЫ ДВА ОТРЕЗКА $[AB]$. РАССМОТРИМ ПЕРВЫЙ ПРИМЕР. ЧЕРЕЗ КАЖДУЮ ТОЧКУ ОТРЕЗКА $[AB]$ ПРОХОДИТ СВЕТОВОЙ ЛУЧ, МНОЖЕСТВО ЭТИХ ЛУЧЕЙ ОБРАЗУЕТ СВЕТОВУЮ ПЛОСКОСТЬ.

Поскольку эта плоскость содержит отрезок $[AB]$ – на основании признака перпендикулярности двух плоскостей она будет горизонтально-проецирующей и пересечет плоскость H по прямой. Любая прямая определяется парой несовпадающих точек, следовательно, для построения тени отрезка $[AB]$ достаточно определить тени двух его точек.

Заметим, что точка $B (b, b')$ принадлежит плоскости H , поэтому $b = b_T$. Одна из искомым точек определена. Построим тень верхней точки – $A (a, a')$. Рассуждения для ее построения приведены выше.

Действительная тень точки A – точка a_T принадлежит плоскости H . Соединив одноименные проекции точек (a_T и b_T) получим тень отрезка прямой $[AB]$, которая является следом P_H лучевой плоскости P . Другой отрезок $[AB]$ расположен близко к стене (плоскости V) поэтому частично тень данного отрезка будет отброшена на нее. Следуя предыдущим рассуждениям, отметим, что $b = b_T$, а действительная тень точки A – a_T' окажется на фронтальной плоскости. Поскольку точки b_T и a_T' находятся в разных плоскостях проекций их нельзя соединить, поэтому воспользуемся мнимой тенью $a_{T(\phi)}$, которая определяется пересечением двух множеств – прямой, параллельной оси X , и горизонтальной проекцией луча, проходящего через точку A . Теперь одноименные проекции точек b_T и $a_{T(\phi)}$ можно соединить, как лежащие в одной плоскости H .

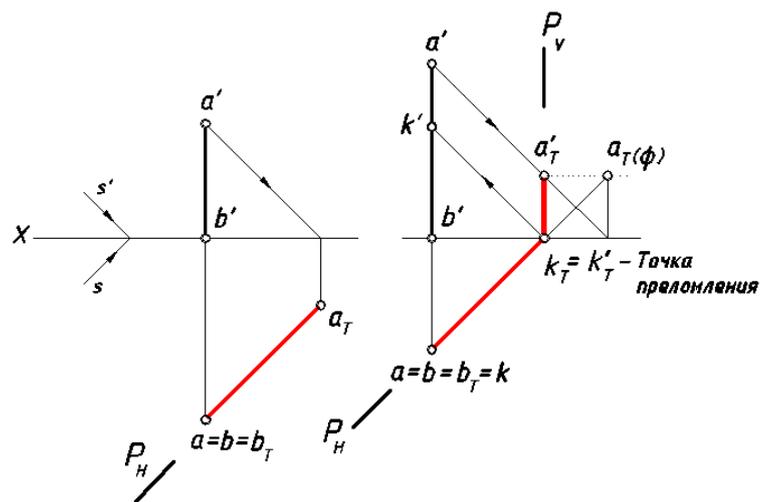


Рис. 8. Построение тени прямой, перпендикулярной H

Построенный отрезок $[b_T a_{T(\phi)}]$ – это горизонтальный след лучевой плоскости P . Поскольку точка $a_{T(\phi)}$ расположена во второй четверти пространства, мнимая часть тени отрезка показана вспомогательной тонкой линией (рис. 8). Точка пересечения отрезка $[b_T a_{T(\phi)}]$ с осью X называется *точкой преломления*. Она одновременно принадлежит плоскостям H и V

поэтому ее можно соединить с точкой a_T' и получить тень данной прямой на плоскости V это будет фронтальный след лучевой плоскости P .

Из приведенных выше рассуждений можно сделать

вывод: тени прямой линии на плоскостях проекций представляют собой следы световой (лучевой) плоскости.

Воспользуемся построенными тенями точки A и усложним задачу. Пусть требуется на отрезке $[AB]$ определить точку $K(k, k')$, которая отбросит тень на ось X . Поскольку ось X одновременно принадлежит плоскостям H и V можно отметить, что $k_T = k_T'$ – *точка преломления*. Проведем через эту точку световой луч, параллельный S , в обратном направлении (рис.8) и определим проекции искомой точки. Такой прием, который был применен в поставленной задаче, называется *способом обратных лучей*.

4.2. ТЕНЬ ФРОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ И ГОРИЗОНТАЛЬНО-ПРОЕЦИРУЮЩЕЙ ПРЯМОЙ.

Пусть дан отрезок $[AB]$, перпендикулярный плоскости V (рис. 9). Поскольку точка $B \in V \Rightarrow b' = b_T'$.

Построим тень точки A , проведя через нее луч, параллельный S . Соединив одноименные проекции точек b_T' и a_T' получим тень данной прямой на плоскости V .

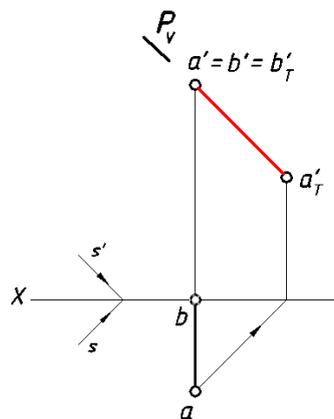
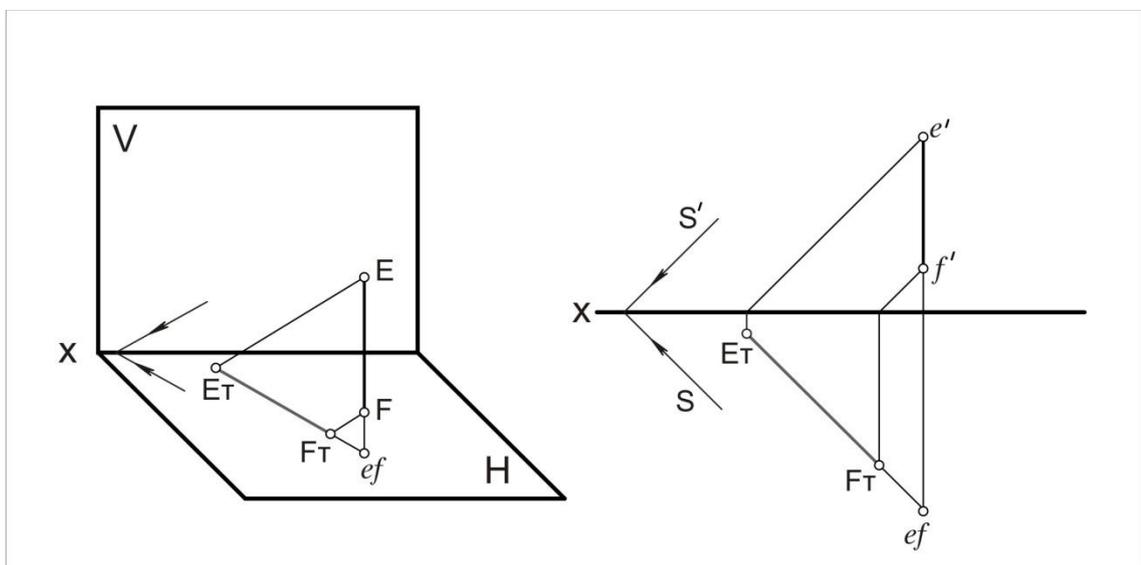


Рис.9. Построение тени прямой, перпендикулярной V .



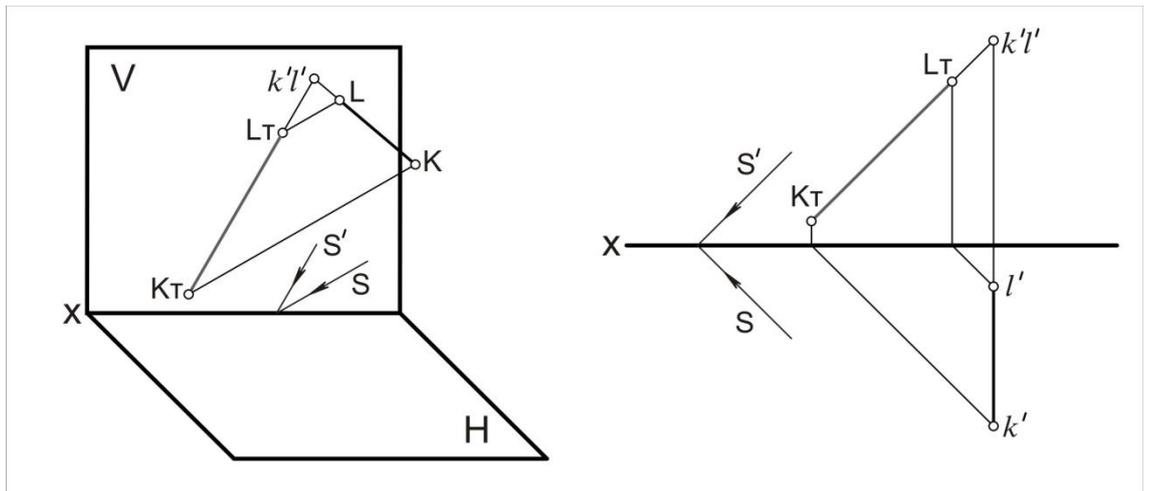


Рис. 10. Построение тени прямых, перпендикулярных H и V.

На следующем рисунке приведен пример построения тени от прямой, перпендикулярной плоскости H и прямой, перпендикулярной плоскости V, но в данном случае ни одна из точек прямых не принадлежит проецирующим плоскостям, как на предыдущем примере. (Рис.10.)

4.3. ТЕНЬ ПРЯМОЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ ПРОЕКЦИЙ

Дано: отрезок $[AB] \parallel V$. Из рис. 11. следует, что обе тени концов отрезка будут отброшены на фронтальную плоскость проекций, поэтому на основании свойства параллельных проекций можно сделать **ВЫВОД**: *тень отрезка прямой, на параллельную ему плоскость, равна и параллельна самому отрезку.*

Символическая запись этого вывода выглядит следующим образом:

$$a_T' b_T' \parallel a' b' \wedge a_T' b_T' = a' b'$$

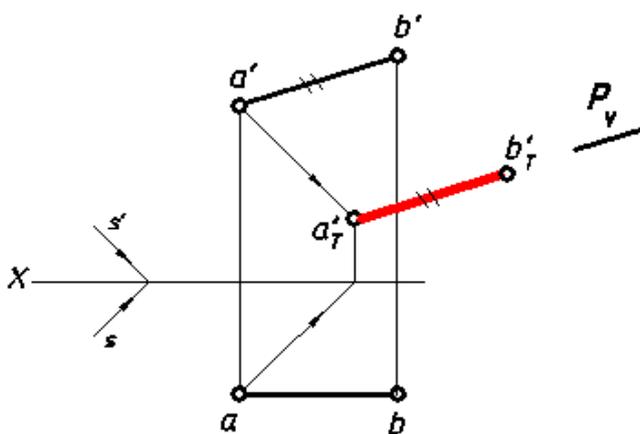


Рис. 11. Построение тени прямой, параллельной плоскости V .

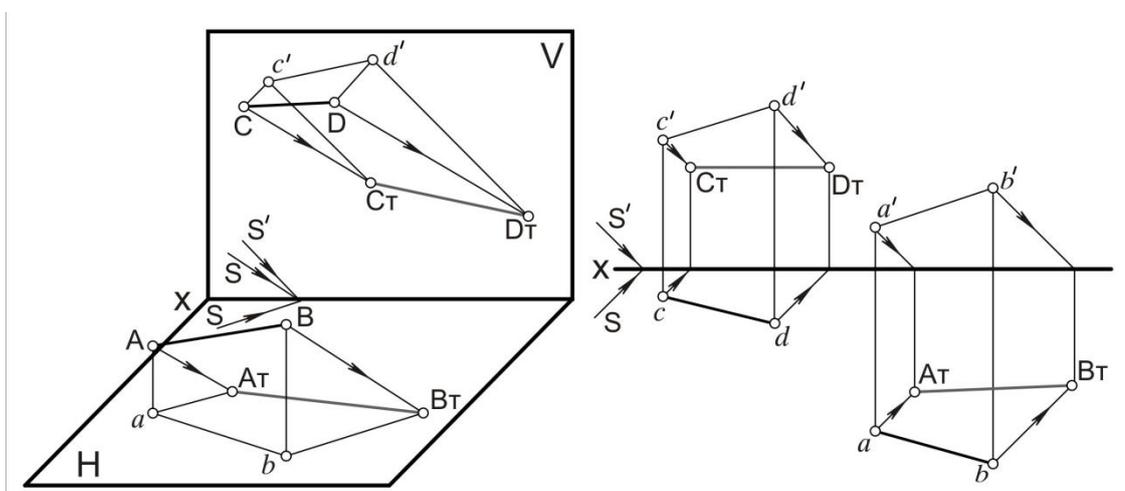


Рис. 12. Построение тени прямых уровня.

4.4. ТЕНЬ ПРЯМОЙ ОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть отрезок $[AB]$ занимает в пространстве общее положение (рис. 13). Тогда множество лучей, проходящих через $[AB]$ образует плоскость общего положения, следы которой P_H и P_V будут являться тенями этого отрезка на плоскостях проекций H и V . Для решения задачи использована мнимая тень точки B .

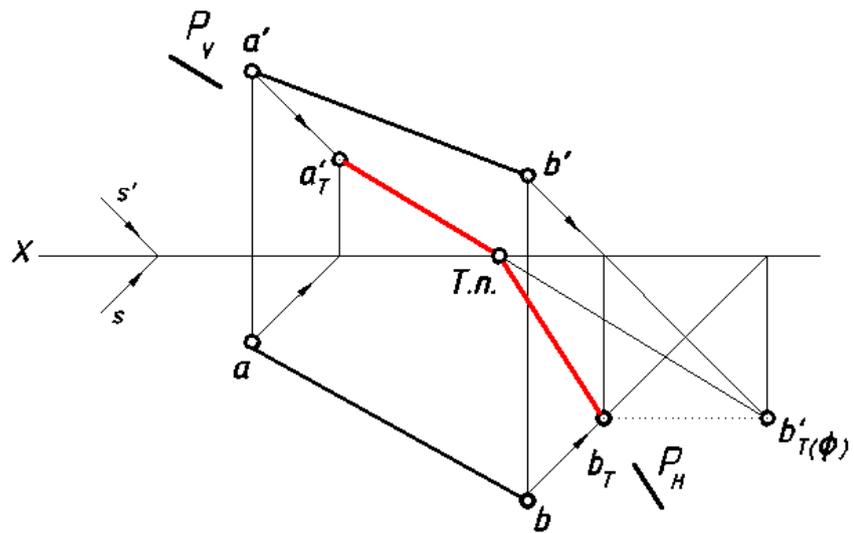


Рис. 13. Построение тени отрезка общего положения в ортогональных проекциях.

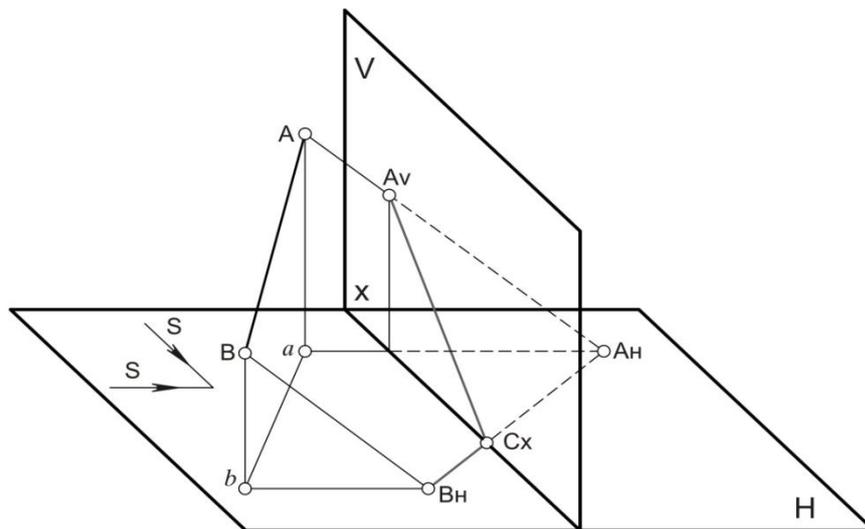


Рис. 14. Тени отрезка [AB] общего положения.

5. ТЕНИ ПЛОСКИХ ФИГУР

До сих пор нами рассматривались геометрические образы, у которых могли быть только падающие тени. У фигур, ограниченных плоскими отсеками, наряду с падающими тенями будут существовать и собственные, поскольку плоскость – двусторонняя поверхность.

Рассмотрим отсеки плоских фигур (квадрата и круга), соответственно параллельные плоскостям V и H . Очевидно, что при заданном направлении светового потока, неосвещенные стороны отсеков плоскостей на соответствующих проекциях будут закрыты самими плоскостями.

Совокупность сторон квадрата представляет собой контур собственной тени. Лучевые плоскости, проходящие через стороны квадрата, образуют призматическую поверхность, которая, пересекая плоскость V , образует на ней фигуру, равную данному квадрату, поскольку $(EFGK) \parallel V$. Построение падающей тени квадратного отсека показано на рис. 15.

На основании этих построений можно сделать **вывод**: граница падающей тени плоской фигуры является тенью от контура собственной тени этой фигуры.

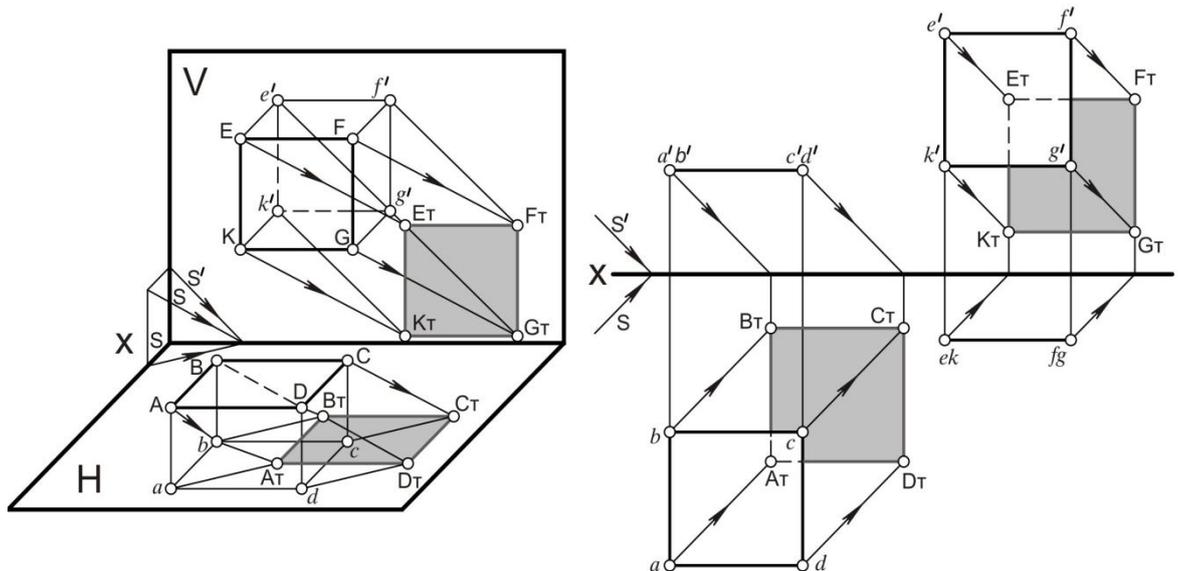


Рис. 15. Падающая тень плоскости квадрата.

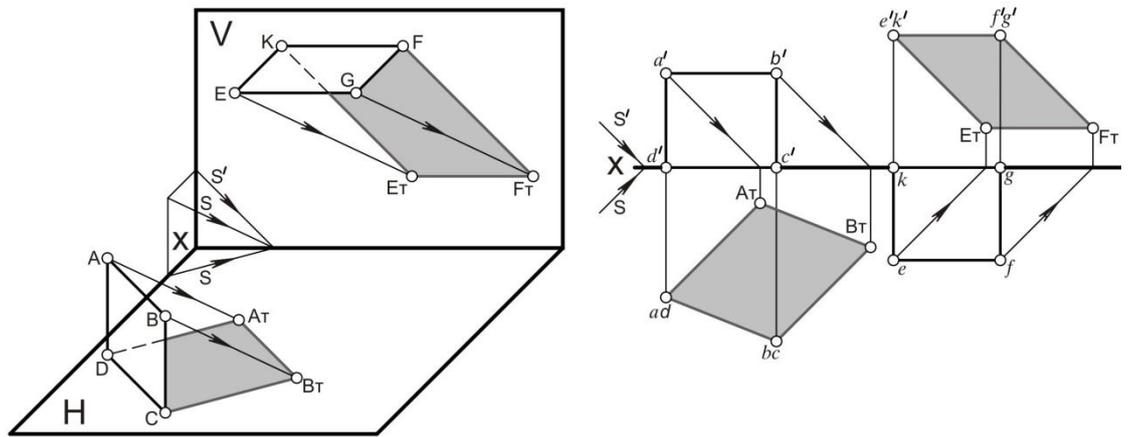


Рис.16. Построение теней прямоугольника.

Прямоугольник ABCD, изображенный на рис.16, перпендикулярен плоскости H. Тени от сторон AD и BC совпадают с горизонтальными проекциями лучей света, а тень от стороны AB – $A_n B_n$ равна и параллельна стороне AB. Аналогично строится тень от четырехугольника EFGK, перпендикулярного к плоскости V.

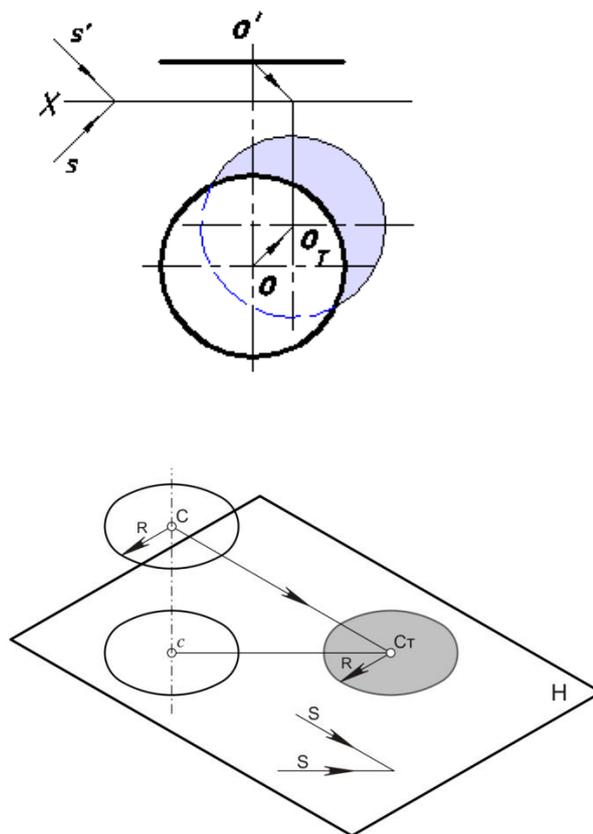


Рис. 17. Падающая тень круга

Множество световых лучей, проходящих через каждую точку окружности другого плоского отсека, образуют поверхность эллиптического цилиндра, которая пересекает плоскость H по окружности. Саму окружность и ее падающую тень на плоскости H можно считать параллельными сечениями светового эллиптического цилиндра. Для **нахождения местоположения падающей тени следует определить** действительную тень центра данного круга на плоскости H (рис. 17).

Аналогичные рассуждения можно провести для нахождения падающей тени круга, плоскость которого параллельна плоскости V (рис. 18).

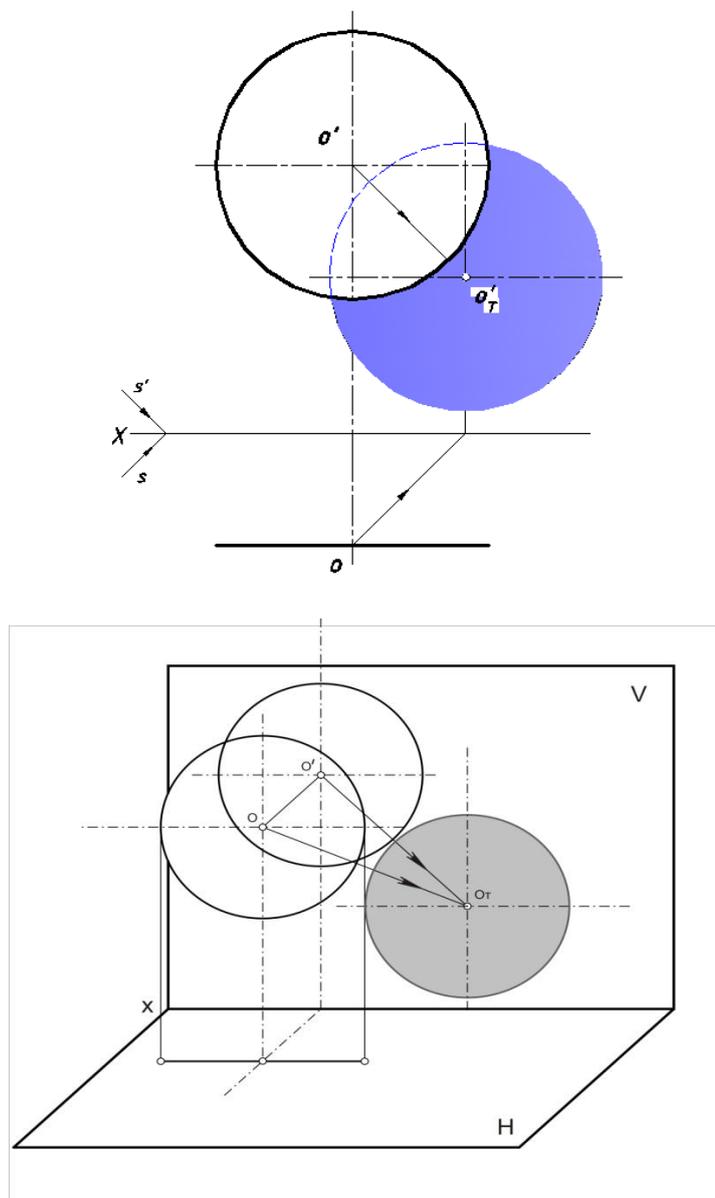


Рис. 18. Тень круга на плоскости V

Вывод: тень плоской фигуры, на параллельную ей плоскость, равна и параллельна одноименной проекции этой фигуры.

На рис. 19. дан эюр плоскости (ABC) , занимающей общее положение. В отличие от предыдущих примеров *определение теневой стороны плоскости* является самостоятельной задачей.

Для нахождения собственной тени плоского отсека поступим следующим образом. Возьмем произвольную точку $K(k, k')$ в плоскости треугольника на прямой, лежащей в этой плоскости. Проведем через эту точку прямую, параллельную направлению S .

Рассмотрим конкурирующие точки $1 = (2')$, принадлежащие стороне $[AC]$ и проведенному лучу.

По горизонтальным проекциям 1 и 2 решаем вопрос о взаимной видимости плоской фигуры и прямой, проведенной через точку $K(k, k')$.

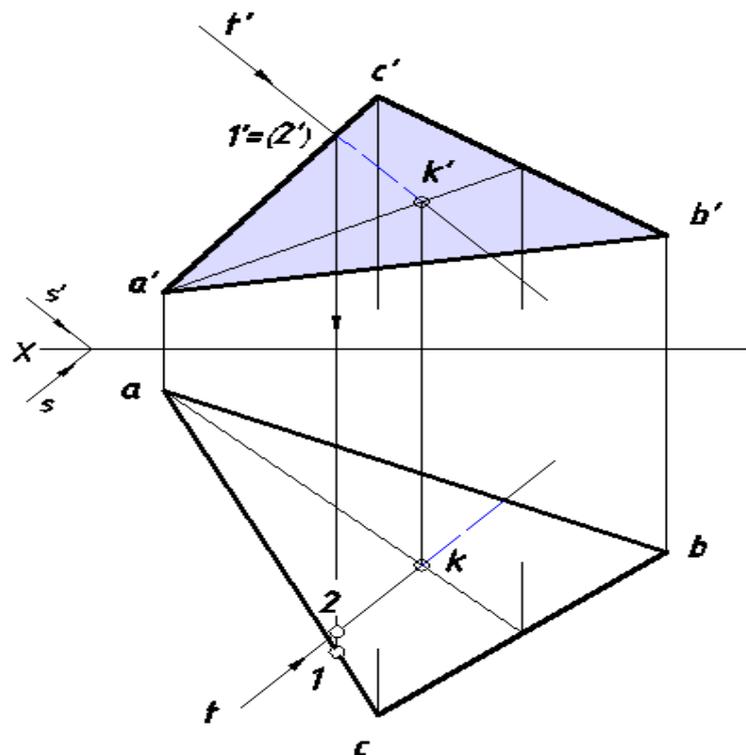


Рис. 19. Определение собственной тени плоскости треугольника.

Поскольку точка на стороне $[AC]$ находится ближе к наблюдателю она перекрывает точку на вспомогательной прямой. Отсюда следует вывод о видимости, показанной на эюре.

Все множество лучей освещает плоскость (ABC) со стороны, невидимой наблюдателю, в собственной тени будет находиться сторона отсека, выделенная на эюре цветом.

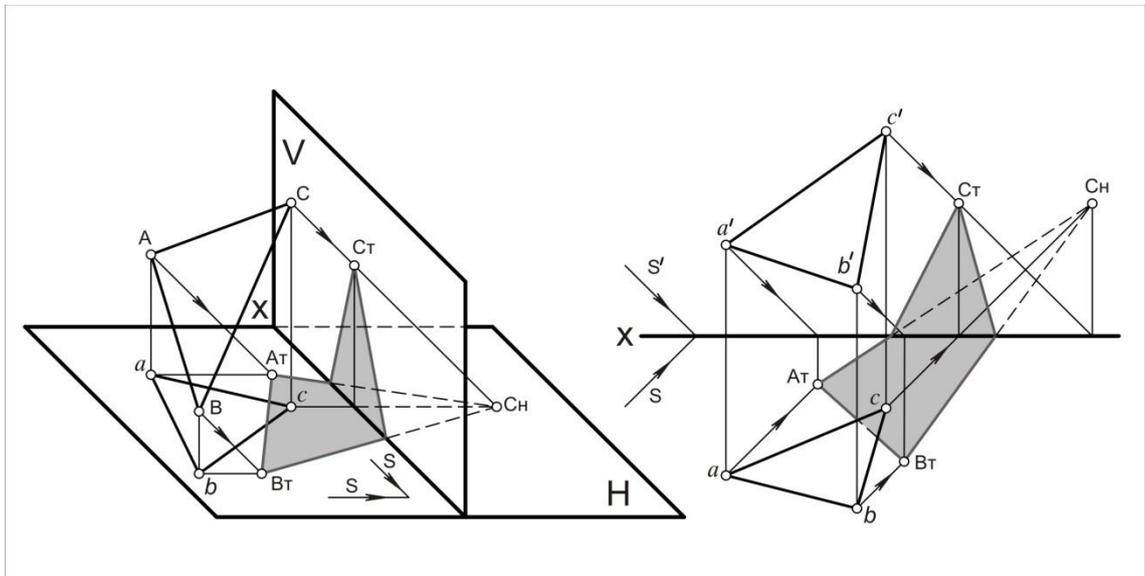


Рис. 20. Построение падающей тени плоскости треугольника.

Построение тени от многоугольника сводится к построению теней от всех его сторон. На приведенном выше рисунке (Рис. 20) построена тень от треугольника ABC . Тень от данного треугольника падает одновременно на плоскости V и H . Чтобы найти точки перелома, строят мнимую тень от точки A на горизонтальную плоскость, хотя фактическая тень от этой точки падает на фронтальную плоскость.

Пусть дана плоскость круга, параллельная плоскости V (рис. 21). Собственная тень закрыта самой плоскостью круга. Реальная часть падающей тени на плоскости V представляет собой сегмент круга.

Лучевая поверхность эллиптического цилиндра, проходящая через окружность данного круга, пересекает плоскость H по эллипсу. Поскольку эллипс – лекальная кривая ее следует строить по множеству точек, две из которых являются точками преломления и лежат на оси X . Для нахождения промежуточных

точек можно поступить следующим образом: описать квадрат вокруг данной окружности и построить его падающие тени.

Заметим, что точка $A(a, a')$ одновременно принадлежит кругу и квадрату, поэтому точка a_T для эллипса является искомой. Построение еще двух точек показано на чертеже.

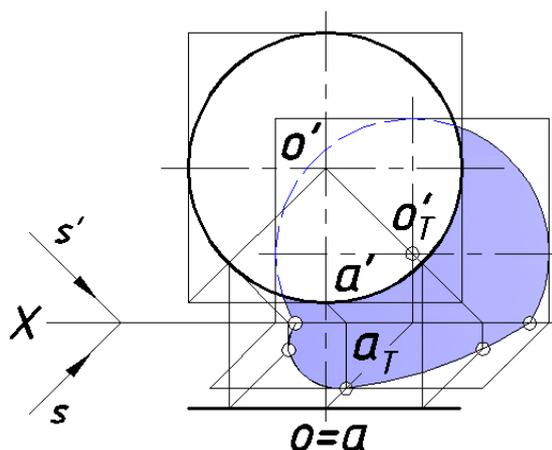


Рис. 21. Тень круга на двух плоскостях проекций

Рассмотрим задачи, связанные с построениями собственных и падающих теней на плоских фигурах.

Задача 1

Построить тень отрезка $[MN]$ на плоскости (ABC) .

Возможны различные подходы к решению поставленной задачи. Один из них состоит в том, что можно построить падающие тени данных отрезка и прямой на плоскости проекций независимо друг от друга, а затем применить *способ обратных лучей*. На рис. 22. показаны эти построения. Далее определены точки 1_T и 2_T , общие для контура падающей тени треугольника и прямой, содержащей точки m_T и n_T .

По действительным теням 1_T и 2_T с помощью обратных лучей построены точки 1 и 2 , а затем найдена горизонтальная проекция падающей тени отрезка $[MN]$ на плоскость данного треугольника. С

помощью линий связи на основании свойства инцидентности построены все недостающие фронтальные проекции точек.

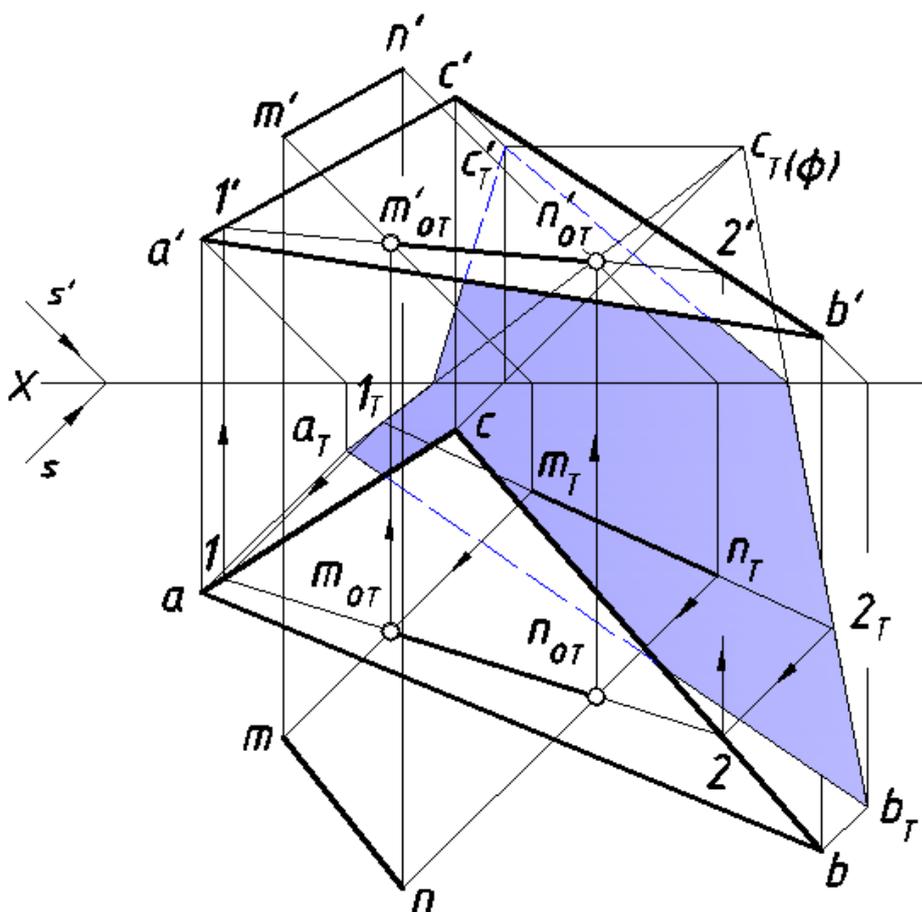


Рис. 22. Использование обратных лучей для решения задачи

Рассмотрим другой вариант решения задачи. Если в данной задаче не ставится вопрос о нахождении падающих теней отрезка и плоскости треугольника можно воспользоваться классической задачей начертательной геометрии о пересечении прямой с плоскостью (рис.23).

Лучевая плоскость, проходящая через отрезок $[MN]$, согласно выводам, сделанным ранее, оставит след на плоскости в виде прямой линии. Любая прямая определяется парой несовпадающих точек, которыми можно считать точки пересечения световых лучей, проходящих через концы отрезка $[AB]$.

Для их нахождения применим алгоритм классической задачи:

1. проведем через световой луч фронтально-проецирующую плоскость;

(луч, проходящий через точку M , заключен во фронтально-проецирующую плоскость P , а через точку N – во фронтально-проецирующую плоскость T)

2. построим линию пересечения данной и вспомогательной плоскости;

(на эюре показаны проекции (12) , $(1'2')$ для плоскости P и (34) и $(3'4')$ для плоскости T)

3. определим искомые точки пересечением данной и построенной прямых;

(на эюре отмечены их горизонтальные и фронтальные проекции).

Искомая тень на плоскости (ABC) – отрезок $[M_0N_0]$.

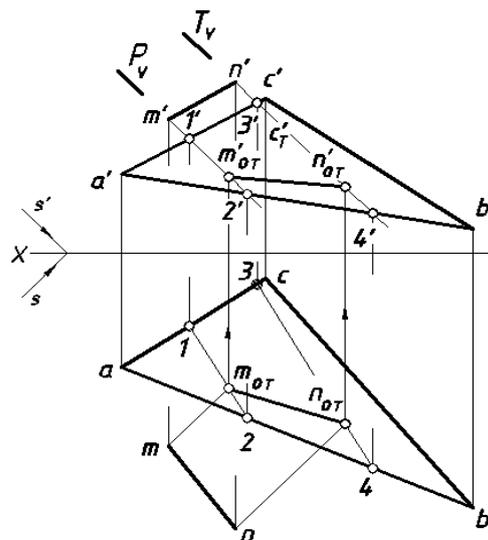


Рис. 23. Второй вариант решения задачи

Задача 2

Построить тень отрезка $[MN]$ на плоскости параллелограмма (рис. 24).

Для решения задачи применим способ *обратных лучей*. Построим падающие тени отрезка $[MN]$ и параллелограмма. Поскольку отрезок $[AD]$ и точка M принадлежат плоскости H

$$a = a_T; d = d_T \text{ и } m = m_T.$$

У падающих теней данных оригиналов есть общие точки 1_T и $2_T = 2_{OT}$, по которым с помощью обратных лучей можно определить проекции искомых точек и линии пересечения.

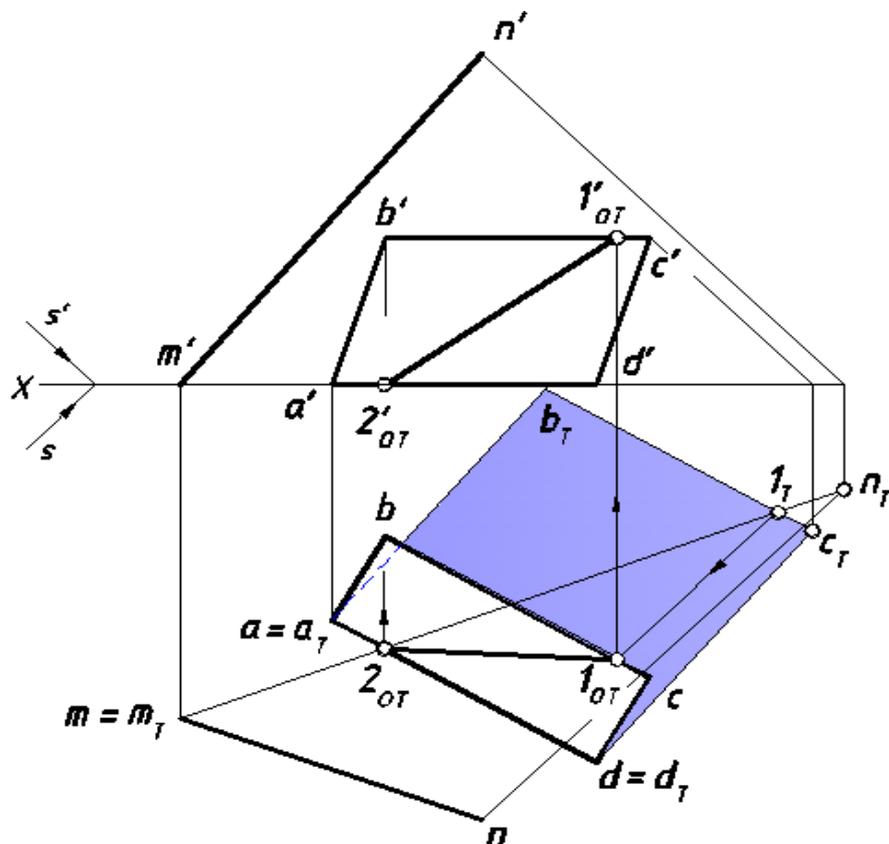


Рис. 24. Построение тени от одного объекта на другой.

Заметим, что эту задачу также можно было решить и другим способом, изложенным в предыдущей задаче.

6. ТЕНИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

6.1. ТЕНИ МНОГОГРАННИКОВ

Пусть дана прямая призма, стоящая на плоскости H . Требуется построить ее собственные и падающие тени на плоскости проекций H и V . (рис. 25). Проанализируем освещенность граней. При заданном направлении светового потока будут освещены верхняя и левая передняя грань. Остальные грани (в том числе и нижняя) находятся в тени. Для построения падающей тени объемного тела необходимо выявить контур собственной тени, который в данном случае будет представлять собой пространственную ломаную линию. Элементами этой линии являются ребра призмы, находящиеся на границах освещенных и неосвещенных плоскостей. На этом же рисунке представлено изометрическое изображение замкнутого контура собственной тени, от которого построена падающая тень.

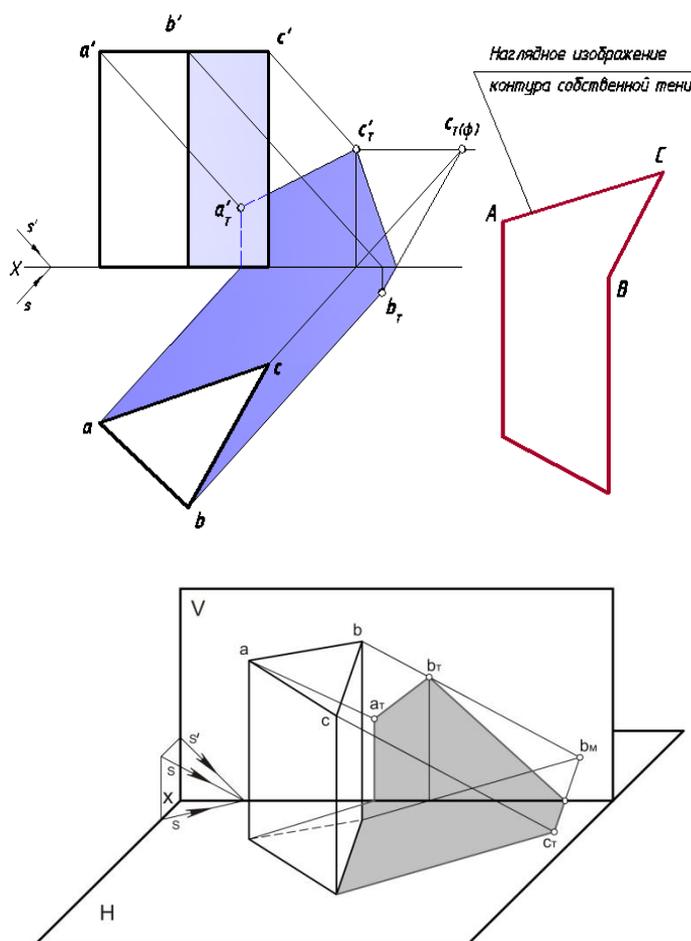


Рис. 25. Построение собственных и падающих теней призмы

Приведем задачи, связанные с построением теней многогранников.

Задача 1

Построить собственные и падающие тени пирамиды $SABC$; определить, какая часть отрезка $[MN]$ отбросила тень на поверхность данного многогранника (рис. 26).

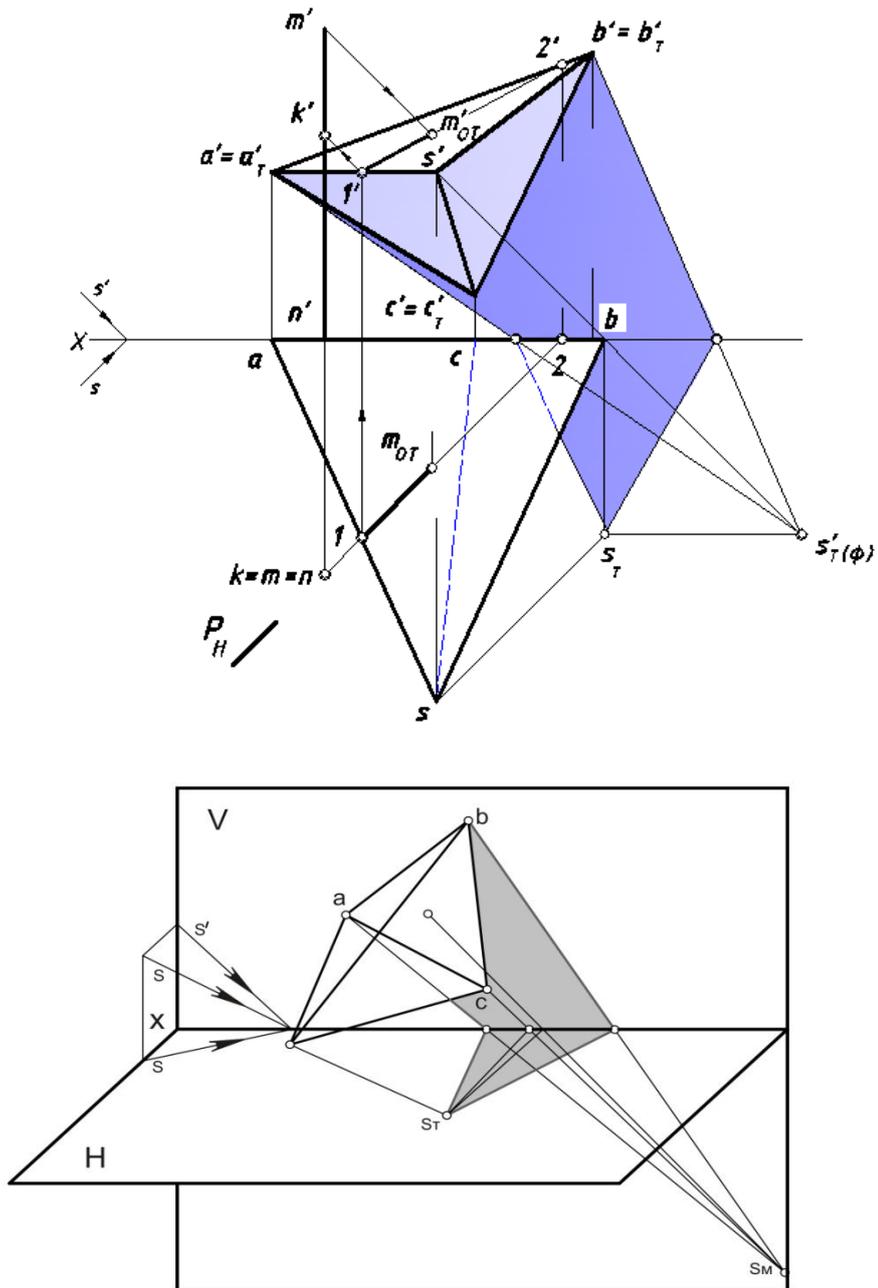


Рис. 26. Падающая тень пирамиды на две проецирующие плоскости.

При заданном направлении светового потока единственная грань пирамиды (ASB) будет освещена, остальные находятся в собственной тени. Контур собственной тени объекта – стороны треугольника ASB .

Для определения падающей тени *прямой* на поверхность пирамиды заключим отрезок $[MN]$ в горизонтально-проецирующую плоскость P , параллельную направлению светового потока. Эта плоскость пересечет освещенную грань пирамиды по прямой, проекции которой 12 и $1'2'$ показаны на чертеже. Поскольку луч, проходящий через точку M , находится в этой же плоскости, то можно определить тень точки M на грани ASB . Отметим точку $(1, 1')$ на ребре $[AS]$, по которой с помощью обратного луча определим точку $K(k, k')$ на отрезке $[MN]$.

Задача 2

Определить освещенность видимых граней правильной шестиугольной пирамиды (рис. 27 а).

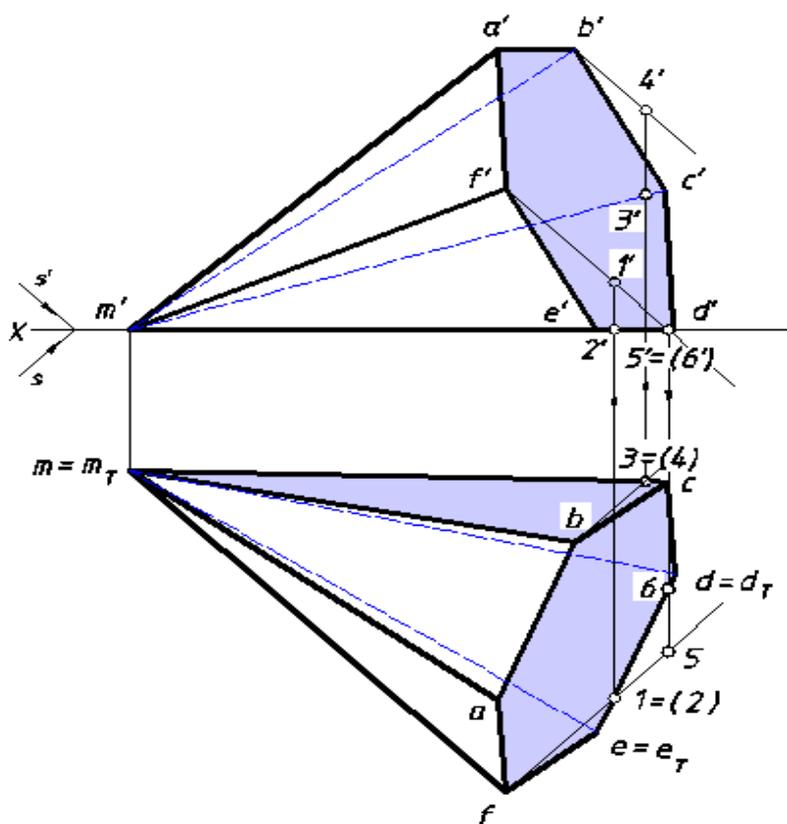


Рис. 27а. Определение освещенности видимых граней

Заметим, что построение графического условия этой задачи – это уже задача, при решении которой целесообразно применить преобразование чертежа (на рис.27а. эти построения не показаны). Видимость ребер на проекциях многогранника устанавливается с помощью конкурирующих точек.

Для нахождения контура собственной тени многогранников в учебных источниках дается следующая рекомендация:

для многогранного тела достаточно провести лучи только через вершины и найти падающие тени от этих точек.

По сути дела предлагается вначале построить падающую тень, а по ней найти собственную.

На наш взгляд такой подход возможен, но не всегда приемлем, поскольку если у многогранника большое количество вершин, то многие падающие тени от последних могут оказаться внутри контура падающей тени многогранника и ряд построений окажется нецелесообразным.

В задачах, рассмотренных ранее, определение освещенности граней не вызывает трудностей. Если количество видимых на эюре граней многогранника велико или их освещенность не очевидна – рекомендуем применить *метод конкурирующих точек для определения освещенности граней многогранников*. Это позволит избежать ошибок при установлении контура собственной тени объекта и при этом выполнить минимальное количество построений.

Проведем световой луч через точку $F(f, f')$ и рассмотрим конкурирующие точки, принадлежащие этому лучу и ребру $[DE]$. По аппликатам фронтальных проекций точек делаем заключение о видимости точек 1 (2). Поскольку точка 2, находящаяся на ребре $[DE]$, закрыта точкой 1 светового луча – она невидима, следовательно, вся 6-угольная грань пирамиды находится в тени. Отсюда можно сделать вывод об освещенности грани (AFM) .

Часть луча, проходящего через вершину $B(b, b')$ находится над гранью (BMC) , что определяется с помощью конкурирующих точек 3 и 4, принадлежащих лучу и ребру $[MC]$. Устанавливаем, что 3 = (4) и делаем вывод о том, что эта грань находится в собственной

тени, а грань (ABM) – освещена. Аналогичным образом анализируем освещенность остальных граней. Часто оказывается, что при установлении теневой грани отпадает необходимость проверки вершин многогранника, тени которых попадает в область контура падающей тени.

Задача 3

Построить собственные и падающие тени правильной шестиугольной пирамиды (рис. 276).

Анализ видимых освещенных граней приведен в предыдущей задаче. В собственной тени будет находиться грань (DEM) , расположенная в плоскости H , следовательно, $e = e_T$; $d = d_T$ и $m = m_T$, т.е. три вершины пирамиды и их действительные тени на плоскости H совпадают.

Ребро $[ME]$ входит в состав контура собственной тени пирамиды, т.к. грань (EFM) освещена.

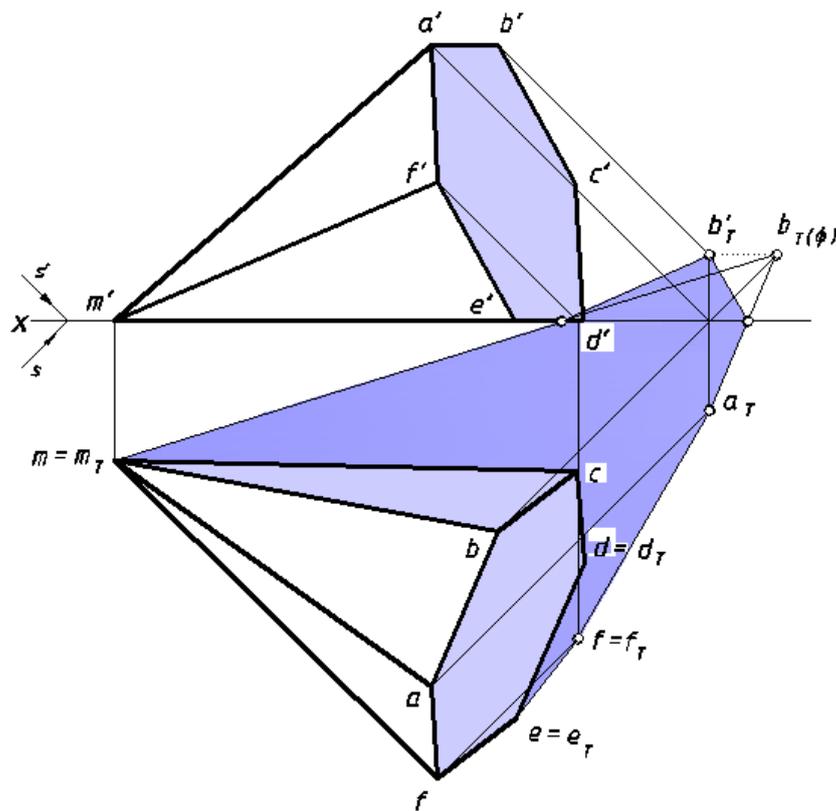


Рис. 276. Построение падающих теней пирамиды

Рассуждая аналогичным образом, определяем весь замкнутый контур собственной тени – это совокупная

последовательность ребер $[ME] - [EF] - [FA] - [AB] - [BM]$. От этих ребер определяем контур падающей тени данной пирамиды. Решение задачи показано на рис. 27б.

Задача 4.

Построить тень от пирамиды, которая падает на две плоскости. Тень от основания пирамиды на плоскость H совпадает с основанием, так как пирамида стоит на плоскости H . Тень от вершины S пирамиды падает на плоскость V в точку S_v . Чтобы построить тень пирамиды на плоскость H , находим мнимую тень ее вершины-точку S и через нее проводим касательные к основанию, которые ограничивают контур падающей на плоскость H тени. Контур падающей на плоскость V тени проходят через точки S_v , 1 и 2, в которых касательные, проведенные ранее пересекают ось X . Контур собственной тени проходит через ребра SB и SD , так как тени от этих ребер ограничивают контур падающей тени (Рис. 28).

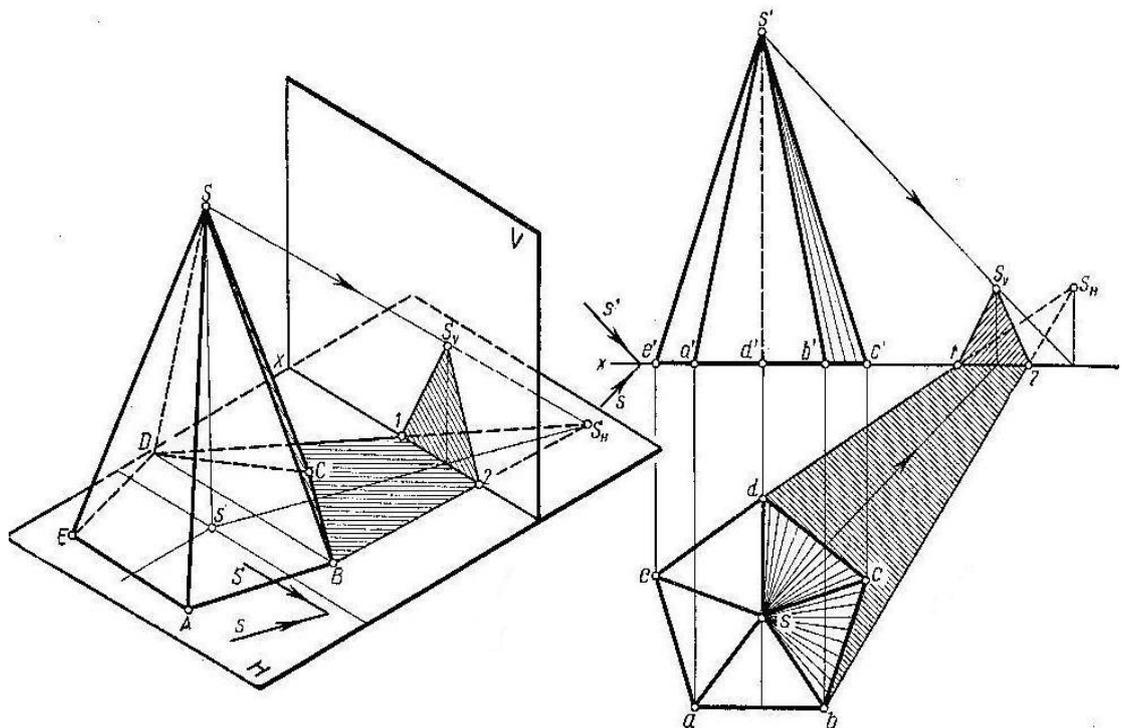


Рис. 28. Тень от пирамиды на две проецирующие плоскости.

6.2. ТЕНИ ОБЪЕМНЫХ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ КРИВЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

6.2.1. ТЕНЬ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА.

Задача 1.

Построить собственные и падающие тени прямого кругового цилиндра, стоящего на плоскости V (рис. 29).

Плоскость основания кругового цилиндра, параллельная плоскости V , освещена световым потоком. Из всего множества лучей можно выделить те, которые образуют плоскости P и T (на чертеже показаны их следы), касательные к поверхности цилиндра.

Касание происходит по двум образующим, до которых освещена половина боковой поверхности, другая половина находится в собственной тени, следовательно, обе образующие входят в состав контура собственной тени цилиндра. На границе света и тени находится часть дуги освещенного основания, которая также входит в состав этого контура.

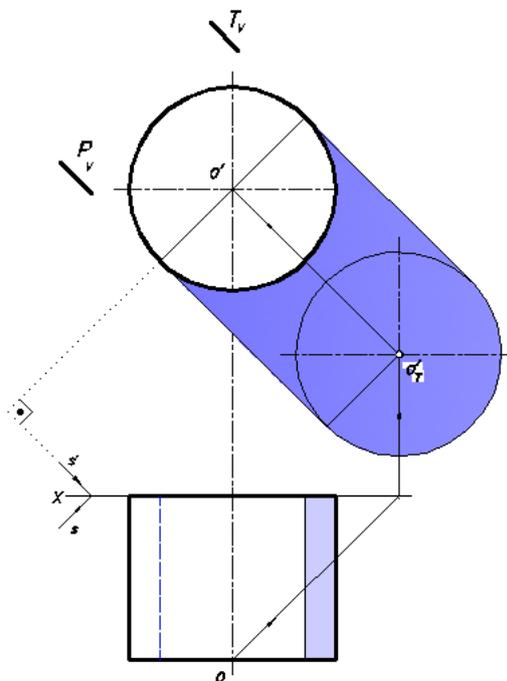


Рис. 29. Собственные и падающие тени цилиндра

Освещенная боковая часть поверхности цилиндра и другое основание, расположенное в плоскости V и находящееся в собственной тени, образуют еще один участок *замкнутого* контура собственной тени цилиндра.

После этих рассуждений на горизонтальной проекции можно выделить цветом видимую часть контура собственной тени.

От этого контура определяется падающая тень. Вначале выполняется вспомогательное построение – определяется действительная тень точки $O (o, o')$, затем тень круга переднего основания цилиндра, равная этому кругу на основании свойства, приведенного ранее.

Две образующие, входящие в состав контура собственной тени цилиндра, стоящего на плоскости V , отбрасывают тени в виде отрезков прямых, касательных к данной и построенной окружностям. Общим контуром падающей тени будет полное очертание фигуры, изображенной на фронтальной проекции.

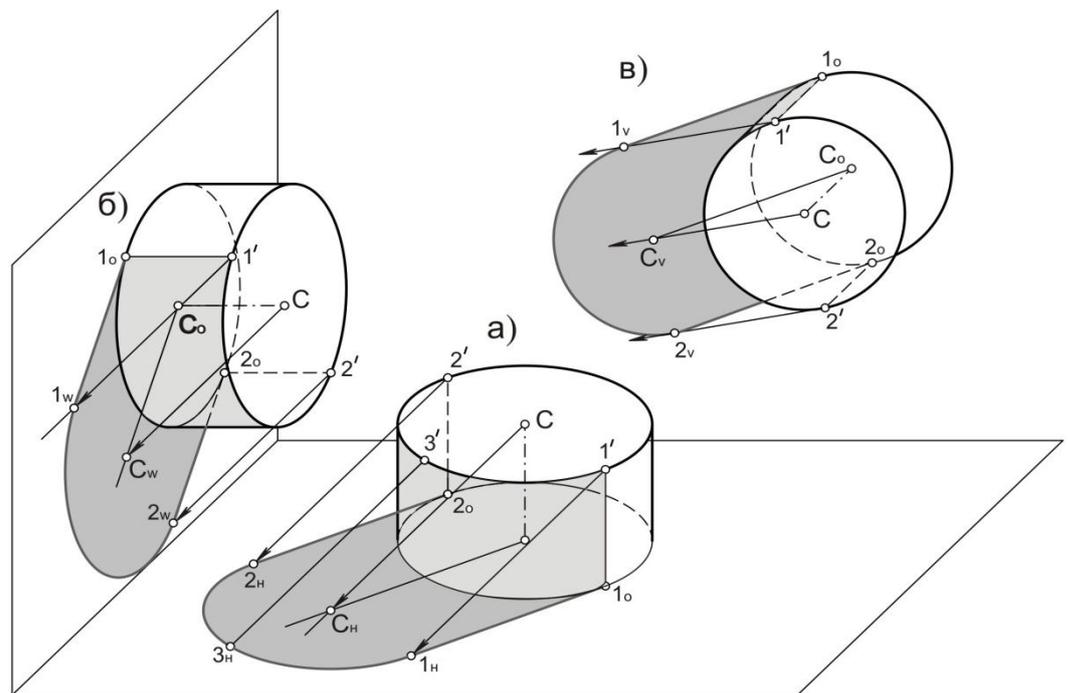


Рис.30. Построение собственных и падающих теней цилиндров на три проецирующие плоскости.

Задача 2.

Построить собственные и падающие тени прямого кругового цилиндра, стоящего на плоскости H .

Построение падающей тени цилиндра начнем с определения действительной тени центра верхнего основания. Проведем через точку $O(o, o')$ луч, параллельный направлению S (рис. 31). Поскольку аппликата точки O больше ее ординаты – действительная тень o_T' окажется на плоскости V на основании вывода, приведенного ранее, а тень цилиндрического тела упадет одновременно на две плоскости проекций. Определим мнимую падающую тень окружности верхнего основания (точнее ее часть, входящую в контур собственной тени). Зная точку o_T' , найдем мнимую тень $a_{T(\phi)}$. С центром в этой точке проведем окружность радиуса основания цилиндра, на которой отметим мнимые тени $1_{T(\phi)}, 2_{T(\phi)}, \dots, 5_{T(\phi)}$ и по ним построим тени действительные. (вставить изометрию цилиндра с тенями)

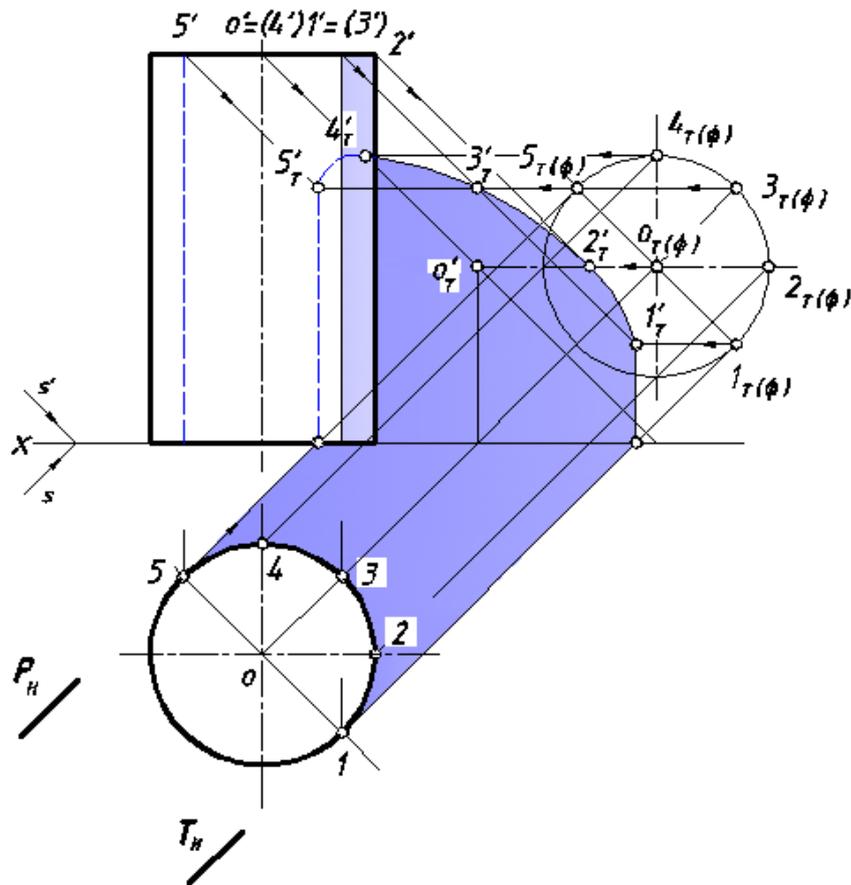


Рис. 31. Построение падающих теней цилиндра с использованием мнимых теней.

Покажем, как это сделать на примере точки $(1, 1')$. Через точку $1_{T(\phi)}$ проведем прямую, параллельную оси X , а через $1'$ – фронтальную проекцию луча, параллельную s' . На пересечении этих двух множеств определим действительную тень $1_{T'}$. Остальные действительные тени строятся аналогично.

В контур собственной тени входит часть окружности верхнего основания, действительная тень которого определяется пересечением лучевого эллиптического цилиндра с плоскостью V и образует фигуру сечения эллипс, содержащую точки $1_{T'}, 2_{T'}, \dots 5_{T'}$.

Две образующие цилиндра, лежащие в плоскостях P и T , и полуокружность нижнего основания – оставшаяся часть контура собственной тени цилиндра, от этих геометрических образов построены падающие тени. Заметим, что точки $1_{T'}$ и $5_{T'}$ являются точками касания построенной дуги эллипса и падающими тенями двух образующих цилиндра.

Задача 3

Построить тени в цилиндрической нише (рис. 32).

При заданном направлении светового потока S часть наружной и внутренней поверхности ниши освещена, а границей освещенности будет левая очерковая образующая цилиндрической поверхности, проходящая через точку $(4, 4')$. На внутренней поверхности, на эпюре тень выделена бледным цветовым оттенком.

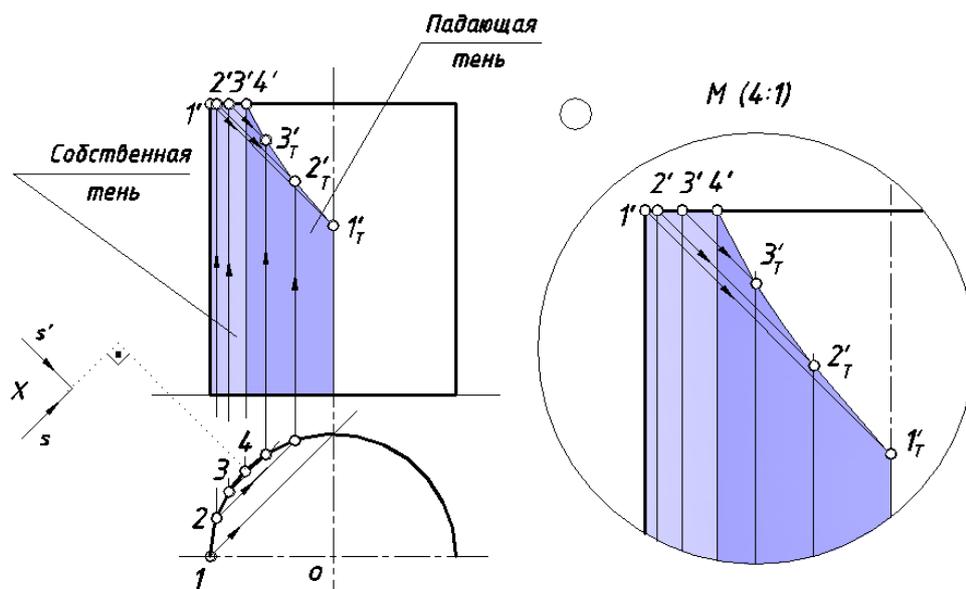


Рис.32. Построение тени в цилиндрической нише.

Часть дуги верхней дуги окружности от точки $(1, 1')$ до $(4, 4')$ находится на границе света и тени, следовательно, входит в состав контура собственной тени оболочки. Через каждую точку этой дуги проходит световой луч. Множество лучей образует поверхность эллиптического цилиндра. Ее пересечение с внутренней поверхностью ниши – кривая четвертого порядка. Для построения этой кривой через вышеуказанные точки проводим световые лучи и отмечаем их пересечение с внутренней поверхностью. Полученные точки $1_T', 2_T', 3_T'$ и $4_T'$ соединяем плавной кривой – это падающая тень верхней дуги окружности. Лучевая горизонтально-проецирующая плоскость, проходящая через левую очерковую образующую, пересекает внутреннюю поверхность ниши по прямой, ей параллельной, которая является ее падающей тенью. На рис. 33. изображено построение собственной и падающей тени цилиндрической ниши и цилиндрической полуколонны.

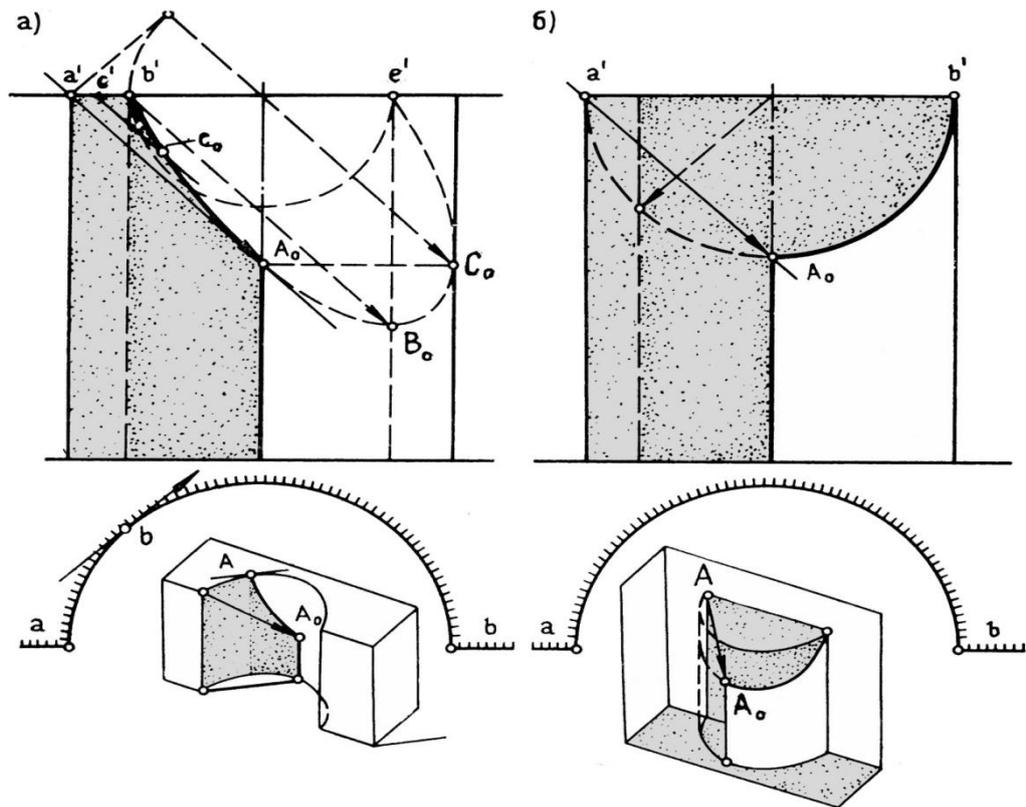


Рис. 33. Собственная и падающая тень цилиндрической ниши и цилиндрической полуколонны.

Задача 4

Построить тень отрезка $[AB]$ на поверхности цилиндрической ниши (рис. 34).

Нахождение теней оболочки показано в предыдущей задаче, поэтому на чертеже, приведенном ниже, построения не показаны.

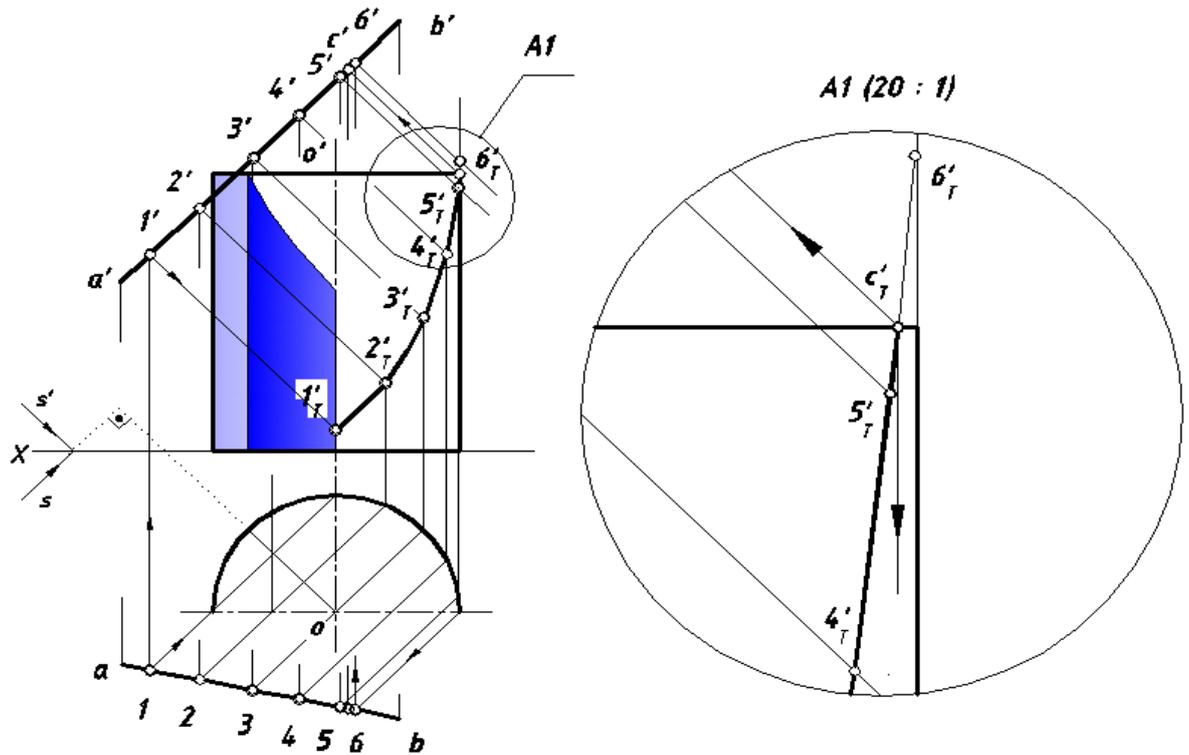


Рис. 34. Падающая тень отрезка $[AB]$ в цилиндрическую нишу.

Для решения этой задачи использовано *свойство проецирующей цилиндрической поверхности*.

Множество лучей, проходящих через отрезок $[AB]$, образует лучевую плоскость. Поскольку она является плоскостью общего положения и пересекает все образующие цилиндрической ниши, то результатом пересечения этих образов (тенью) будет эллипс (или часть его дуги).

Ввиду того, что эллипс это лекальная кривая, ее построение выполняется по множеству точек. Возьмем на отрезке $[AB]$ точку $(1, 1')$. Это первая левая точка на данном отрезке, которая заведомо отбросит тень на внутреннюю поверхность ниши.

Точки, расположенные на отрезке влево от нее, отбрасывают тени на наружную часть цилиндрической поверхности, которая на фронтальной проекции не видна ввиду своей непрозрачности, поэтому их тени строить не имеет смысла.

Проведем через точку $(1, 1')$ луч, параллельный S и отметим его пересечение с цилиндрической поверхностью – действительную тень $1_{T'}$. Затем на отрезке $[AB]$ возьмем случайные точки $(2, 2')$, $(3, 3')$, ... $(6, 6')$ и выполним аналогичные построения. Заметим, что точка $6_{T'}$ оказалась за пределами левой очерковой образующей ниши. Соединим построенные точки плавной кривой. Заметим, что точка $C(c, c')$, отбрасывающая тень на окружность верхнего основания цилиндра, может быть найдена лишь приближенно после построения эллиптической дуги по множеству случайных точек.

Для построения теней от одного объекта на другой применяются следующие приемы:

метод секущих плоскостей;

метод обратного луча.

Архитекторы обычно используют для своих целей девять различных способов.

Рассмотрим *метод секущих плоскостей*, который заключается в следующем. Заданные геометрические объекты пересекаются вспомогательными плоскостями, параллельными световому лучу и перпендикулярными к какой-либо плоскости проекций. Затем определяются линии сечения каждого объекта вспомогательными плоскостями. Плоское сечение первого объекта необходимо для определения лучей, касательных к его поверхности. Пересечение этих лучей с поверхностью другого объекта позволяет найти точки контура тени, падающей с одного объекта на другой.

Решение задачи, приведенной выше, можно объяснить, применяя *метод секущих плоскостей*.

Проведем вспомогательные плоскости, параллельные световому лучу и перпендикулярные плоскости H (на чертеже следы этих плоскостей не обозначены). Каждая из этих плоскостей пересекает отрезок $[AB]$ в точке, а цилиндрическую поверхность по образующей. Проведя через построенные точки, лучи до пересечения с оболочкой, найдем их действительные тени, по которым найдем очертание контура падающей тени отрезка $[AB]$.

В приводимых ранее задачах использовался *метод обратных лучей*. Приведем общие рекомендации по применению этого метода.

Метод обратных лучей заключается в том, что вначале строятся контуры падающих теней от заданных геометрических объектов (эти построения для решения задачи являются вспомогательными). Далее определяются точки пересечения полученных контуров. Из этих точек проводятся в пространстве лучи, направление которых противоположно лучам света. Точки встречи проекций обратных лучей с соответствующими проекциями первого объекта позволяют определить те точки, которые отбрасывают тени на другой объект.

Покажем решение предыдущей задачи с применением *метода обратных лучей*.

Построим падающие тени двух геометрических объектов на плоскости проекций независимо друг от друга. При нахождении последних использованы мнимые тени. На падающей тени отрезка взяты случайные точки, которым обеспечена принадлежность оболочки цилиндра его образующими. С помощью обратных лучей на отрезке $[AB]$ определены точки, которые отбросили тени на другой объект. Заметим, что применение этого способа позволяет точно построить точку $C(c, c')$.

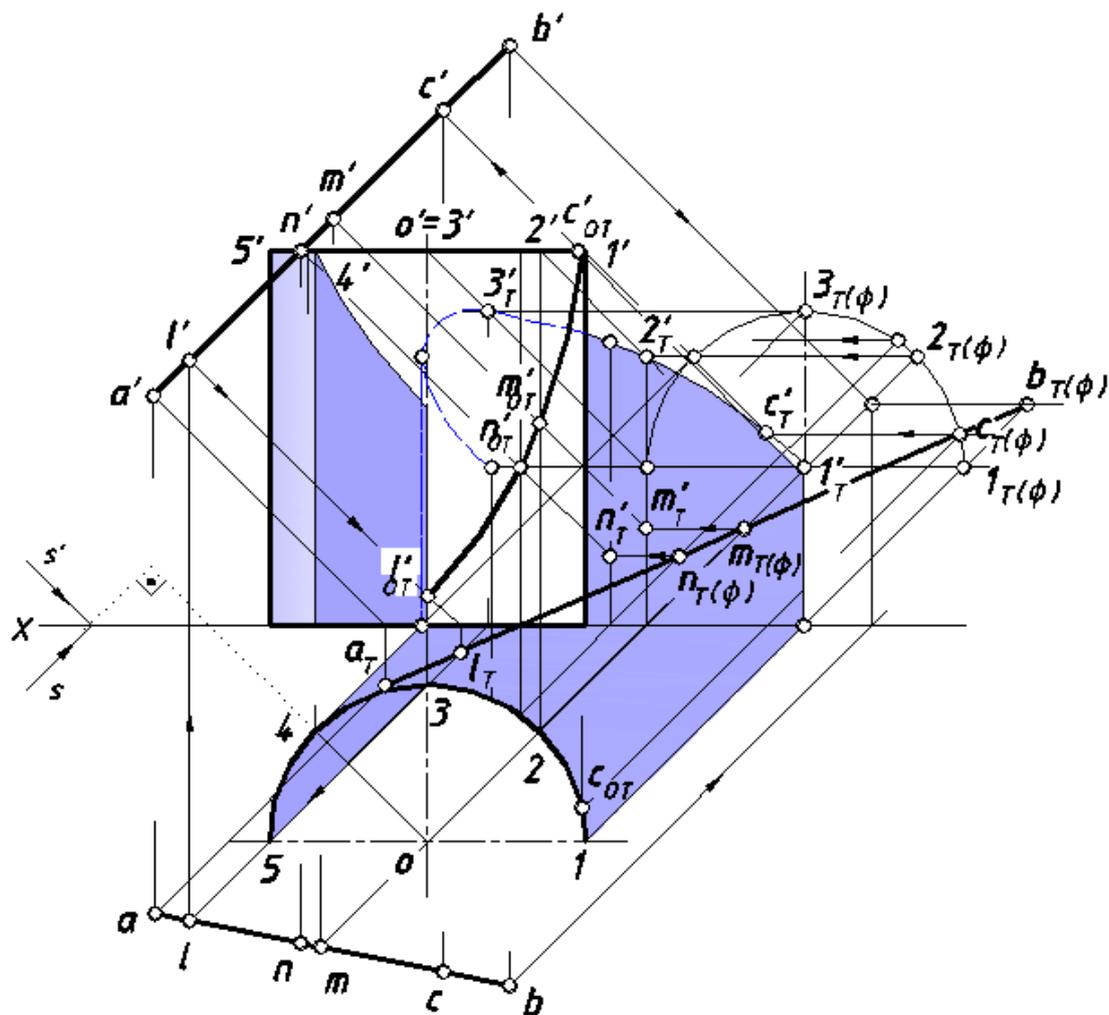


Рис. 35. Решение задачи с применением метода обратных лучей

На приведенных выше рисунках представлены решения задачи с применением различных способов. В первом случае нельзя найти точное положение последней точки $C(s, s')$ отрезка $[AB]$, которая отбросила тень на оболочку цилиндра, но можно обойтись без построений падающих теней. Применяя способ обратных лучей можно точно определить местонахождение точки $C(s, s')$, но в этом случае, необходимо строить падающие тени.

6.2.2. ТЕНЬ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Задача 1.

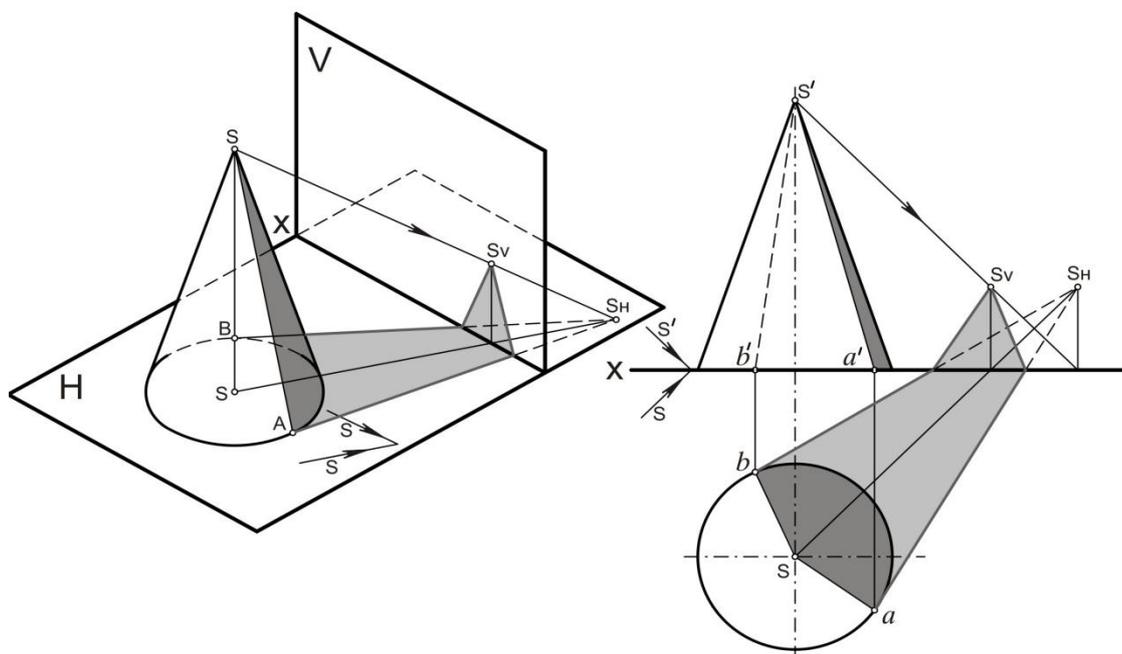


Рис. 37. Построение собственных и падающих теней конуса на две проецирующие плоскости.

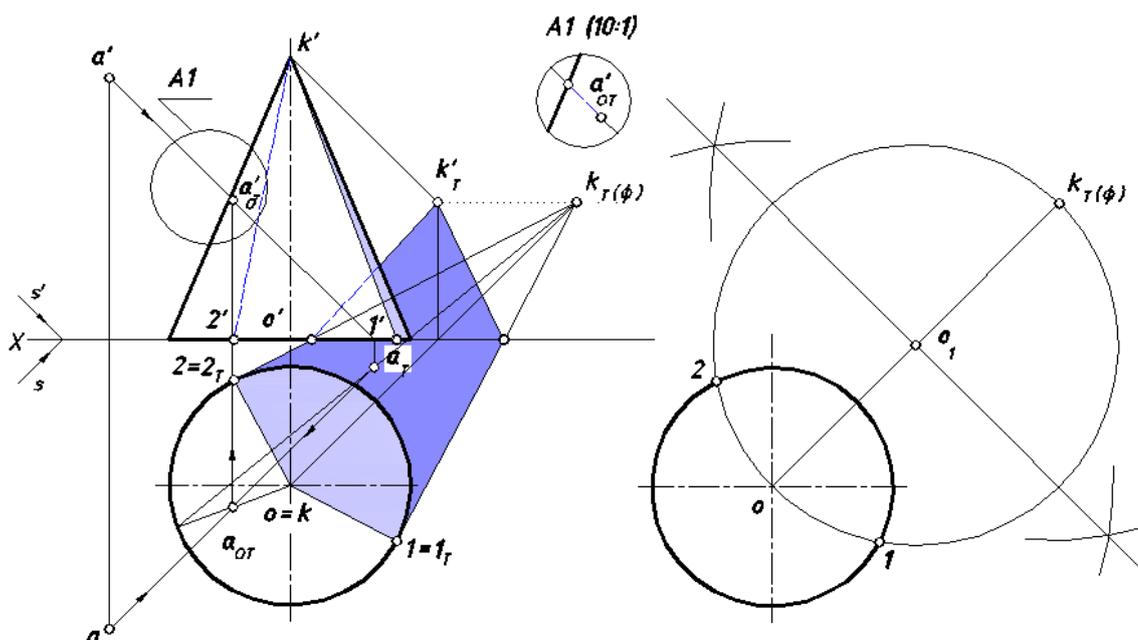
Построить тень от конуса на две проецирующие плоскости.

Контур падающей тени конуса ограничен прямыми, проведенными через точку S_H касательно к основанию. Эти прямые представляют собой тени от образующих конуса SA и SB , ограничивающих контур собственной тени.

Задача 2.

Построить собственные и падающие тени конуса на плоскости проекций H и V .

Обычно построение падающих теней начинается с определения контура собственных теней. Но в отдельных случаях выгоднее поступить наоборот.



Ри

с. 36. Построение теней на поверхности конуса.

Определим падающую тень вершины конуса – точку k_T' . Из множества световых лучей, падающих на боковую поверхность конуса, можно выделить два подмножества, образующих лучевые плоскости общего положения, проходящие через вершину $K(k, k')$ и касающиеся окружности основания.

Если мысленно отбросить плоскость V , то падающая тень конуса окажется на плоскости H . Поскольку на ней находится основание конуса, можно отметить, что $1 = 1_T$ и $2 = 2_T$.

Проведя через точку $k_{T(\phi)}$ касательные к окружности основания (их построение показано на рис. 32 справа), получим падающие тени двух образующих конуса, которые входят в состав контура собственной тени тела.

Задача 3

Определить тень точки A на поверхности конуса.

Покажем различные варианты решения и воспользуемся графическим условием предыдущей задачи.

Применим *метод обратных лучей*, для реализации которого следует построить падающие тени двух объектов: точки $A(a, a')$ и конуса на обе плоскости проекций. Через точку a_T проведем

падающую тень той образующей, которая содержит эту точку. Затем найдем горизонтальную проекцию этой образующей, на которой с помощью горизонтальной проекции обратного луча определим точку $a_{от}$, а с помощью фронтальной – $a_{от}'$.

Другой вариант решения задачи заключается в использовании известного алгоритма нахождения точки пересечения прямой с поверхностью:

1. через световой луч, содержащий точку $A(a, a')$ и вершину $K(k, k')$ конуса, проведем плоскость общего положения (на рис. 38 она задана двумя пересекающимися прямыми);

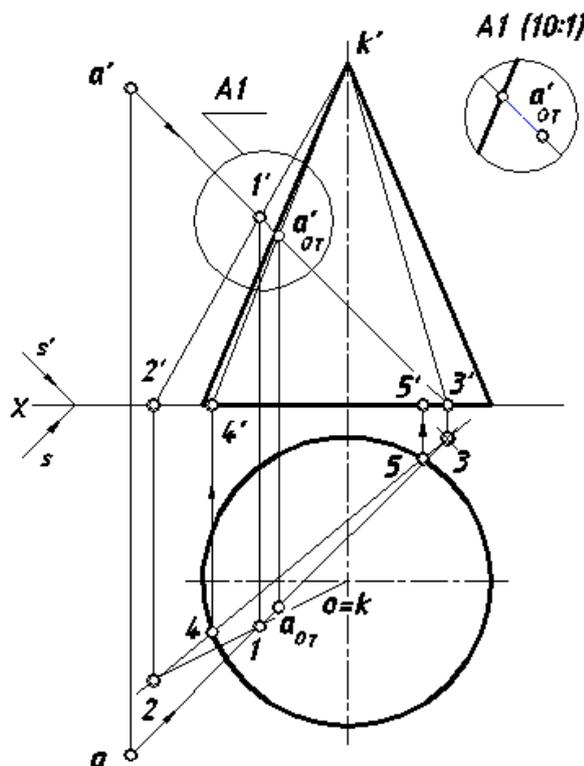


Рис. 38. Второй вариант решения задачи

2. определим линию пересечения проведенной плоскости с конической поверхностью (поскольку вспомогательная плоскость проходит через вершину конуса, результатом пересечения будут две образующие);

3. найдем точку пересечения светового луча с построенными образующими – искомую точку.

Заметим, что луч и две образующие пересекутся в двух точках, но только одна из них является действительной тенью точки $A(a, a')$,

a'), которая расположена перед главным меридианом конической поверхности (мнимая тень точки на эюре не показана). Во избежание лишних построений найдены только фронтальные проекции образующих.

Возможный вариант решения задачи *методом секущих плоскостей* нецелесообразен, т.к. требует построения кривых второго порядка, что приведет лишь к приближенному решению поставленной задачи.

Задача 4

Построить тень отрезка $[AB]$ на поверхности конуса *методом секущих плоскостей*.

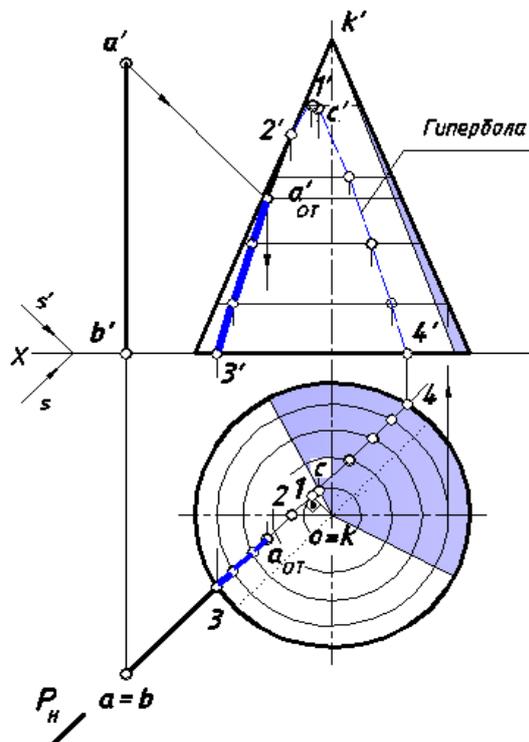


Рис. 39. Тень вертикальной прямой на поверхности конуса

Заклучим отрезок $[AB]$ в горизонтально-проецирующую плоскость P , параллельную направлению светового потока. Поскольку проведенная плоскость параллельна двум образующим конуса (на рис. 39. на горизонтальной проекции они показаны точечными линиями), она пересечет его по гиперболе.

Для ее построения поступим следующим образом. Ввиду того, что гипербола расположена в плоскости P , ее горизонтальная проекция на чертеже отображается отрезком [39]. Фронтальной проекцией гиперболы также будет гипербола (только с другими параметрами).

Рассмотрим пример построения тени от прямой на произвольную поверхность вращения. Любая лекальная кривая строится по множеству точек. Вначале определим характерные наименьшие точки $(3, 3')$ и $(4, 4')$. Горизонтальную проекцию 1 наивысшей точки найдем на середине отрезка [34], а для построения ее фронтальной проекции $1'$ проведем параллель на конической поверхности, касательную к плоскости P . Еще одна характерная точка $(2, 2')$ расположена на главном меридиане, плоскость которого параллельна V . Между характерными точками намечаем случайные, горизонтальные проекции которых лежат на следе P_H . Этим точкам обеспечиваем принадлежность конической поверхности с помощью параллелей. Построив множество точек, соединяем их плавной кривой с учетом видимости непрозрачного тела. Часть гиперболы, заключенная между точками $(3, 3')$ и $(a_{от}, a_{от}')$, будет искомой тенью отрезка $[AB]$ на поверхности конического тела.

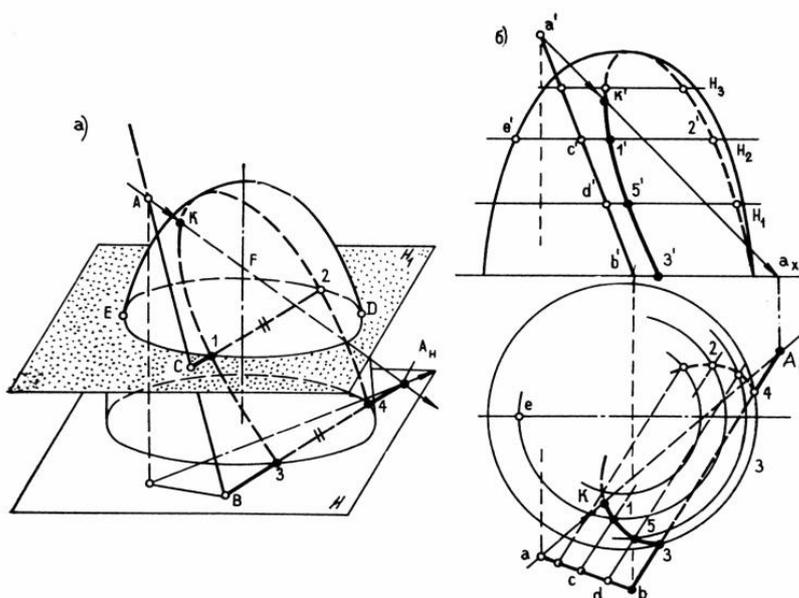


Рис.40. Тень от прямой на произвольную поверхность.

6.2.3. ТЕНЬ ШАРА

Множество лучей, падающих на шар (рис. 41), образует *световой цилиндр*, соосный с его поверхностью, поэтому общим элементом для двух поверхностей будет окружность, представляющая собой *контур собственной тени* шара. Теневой цилиндр пересекает плоскость H по эллипсу, который является *падающей тенью* шара. При нахождении очертаний этих теней можно использовать преобразование чертежа, например, метод перемены плоскостей проекций. Проведем плоскость V_1 , параллельную направлению S , и построим новые фронтальные проекции шара и луча. Контур собственной тени шара отобразится на этой плоскости отрезком прямой $[a_1' b_1']$. Поскольку аппликаты всех точек контура в старой и новой системе плоскостей проекций одинаковы, можно найти множество точек, принадлежащих очертанию контура на обеих проекциях. Вначале определим с помощью характерных точек размеры осей эллипсов, в которые проецируется контур, а затем аналогичным образом построим необходимое количество случайных точек. Соединив плавной кривой линией одноименные проекции найденных точек с учетом видимости, получим проекции очертания контура собственной тени.

Построение падающей тени шара начнем с нахождения тени точки $O(o, o')$ (центра шара) – точки o_T . Искомая тень на плоскости V_1 отобразится прямолинейным отрезком, равным большой оси искомого эллипса

Размер малой оси эллипса $[m_{1T} n_{1T}]$ равен диаметру шара. Нахождение случайных точек очертания контура выполняется следующим образом:

На построенном контуре собственной тени берется произвольная точка и определяется ее падающая тень. По множеству найденных падающих теней случайных точек завершаем построение эллипса (нахождение случайных точек на чертеже не показаны для удобства восприятия изображений).

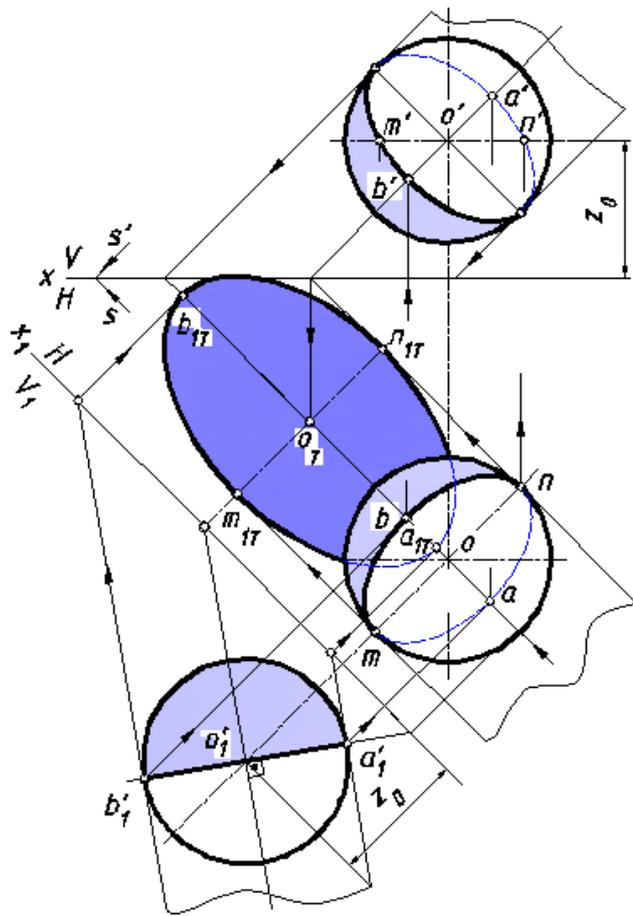


Рис. 41. Построение теней на шаре.

На рис. 42. показан другой способ нахождения теней шара. Как отмечалось выше, контурами собственных теней шара являются эллипсы. Большие оси этих эллипсов – отрезки $[ab]$ и $[c'd']$ равны диаметру шара. Точки $A(a, a')$ и $B(b, b')$ расположены на экваторе сферы, а $C(c, c')$ и $D(d, d')$ на главном меридиане, плоскость которого параллельна V . Учитывая симметрию эллипса относительно его большой и малой осей, можно получить точки, симметричные точкам c и d , и a' и b' на соответствующих проекциях. После этого по восьми полученным точкам выполнить очертание эллипсов с учетом видимости.

Построение падающей тени шара как и в предыдущем случае начинаем с нахождения точки o_T . Малая ось эллипса, представляющего собой падающую тень, равна отрезку $[a_T b_T]$. Большая полуось – высоте правильного треугольника, построенного на отрезке $[a_T b_T]$. Определив точку n_T , строим точку, ей симметричную относительно оси $[a_T b_T]$. По большой и малой оси можно построить эллипс различными способами (их около шестисот!), один из которых показан на рис. 38 в правом нижнем

углу – способ родственного соответствия. Ввиду того, что этот раздел не изучается студентами в курсе начертательной геометрии, приведем только порядок нахождения случайных точек искомого эллипса.

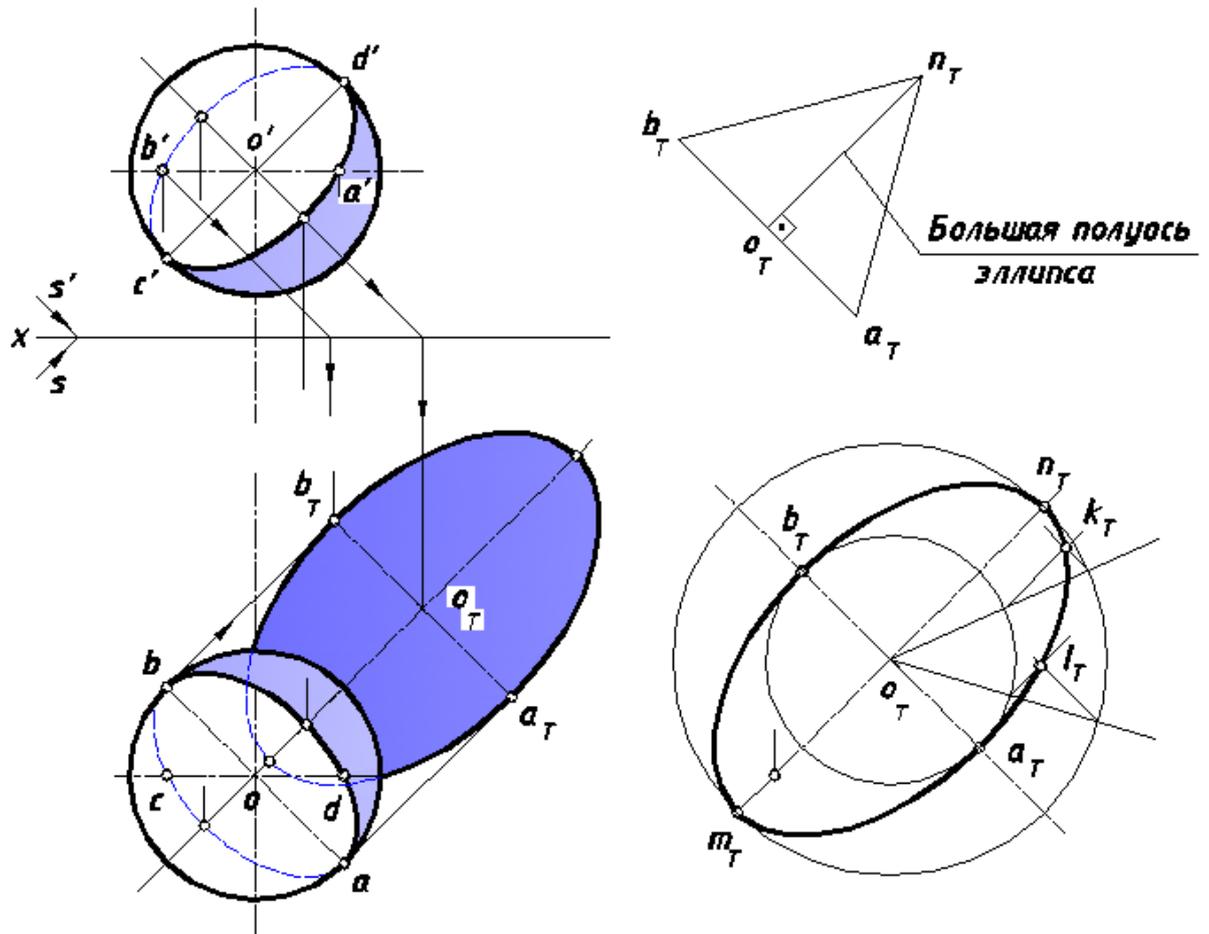


Рис. 42. Второй способ нахождения теней шара.

С центром в точке o_T построим две окружности, диаметры которых равны большой и малой осям эллипса. Затем через точку o_T проведем какой-либо луч и отметим точки его пересечения с каждой окружностью.

Из полученных точек проведем прямые, параллельные большой и малой осям и на их пересечении зафиксируем одну из искомым точек эллипса, На рисунке ниже показано построение

одной из таких точек – точки 1_T . Остальные точки определяются аналогично и соединяются плавной кривой.

В том случае, когда требуется определить собственную тень шара на одном изображении, можно воспользоваться приемом, показанным на рис. 43.

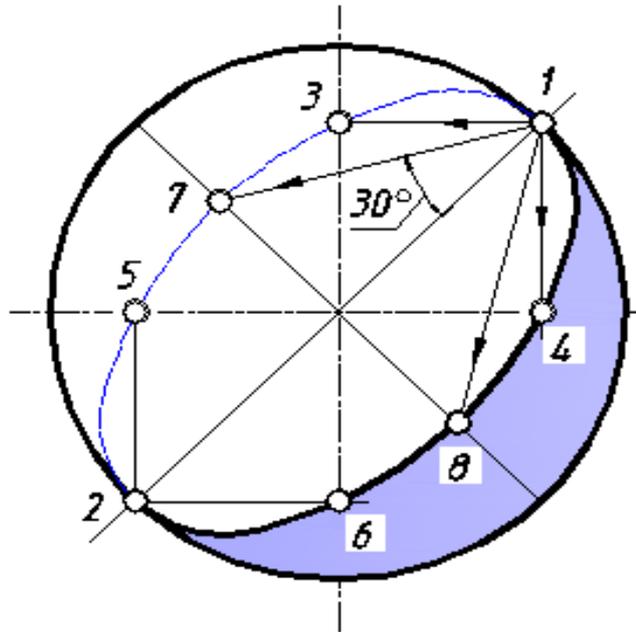


Рис. 43. Построение собственной тени шара по 8-ми точкам

Точки 1, 2, ..., 8 указывают на последовательность нахождения восьми точек искомого эллипса.

На следующем рис. 44. показано построение собственных и падающих теней шара с помощью касательных конусов. В этом случае можно определить уже двенадцать точек собственной тени. Точки 1 и 2 точнее определяются не касательными проекциями лучей, а проведением нормали через центр C . Точки 3 и 4, а так же 5 и 6 находят проведением горизонталей и вертикалей из точек 1 и 2; точки 7 и 8 – построением равностороннего треугольника $1ab$ или проведением прямых из точки 1 под углом 30° к диаметру $1,2$. Точки 9, 10, 11 и 12 построены с помощью касательных конусов под углом 35° .

И так, линия собственной тени будет эллипс, у которого большая ось равна диаметру шара, а малая – $0,6$ диаметра (точнее $0,618$).

На рис.44,б тень полусферы построена по осям эллипса его собственной тени. Эллипс падающей тени имеет большую полуось $c7_v$, равную $1,7$ радиуса сферы, которая находится засечкой отрезком, равным диаметру, из точки 1 .

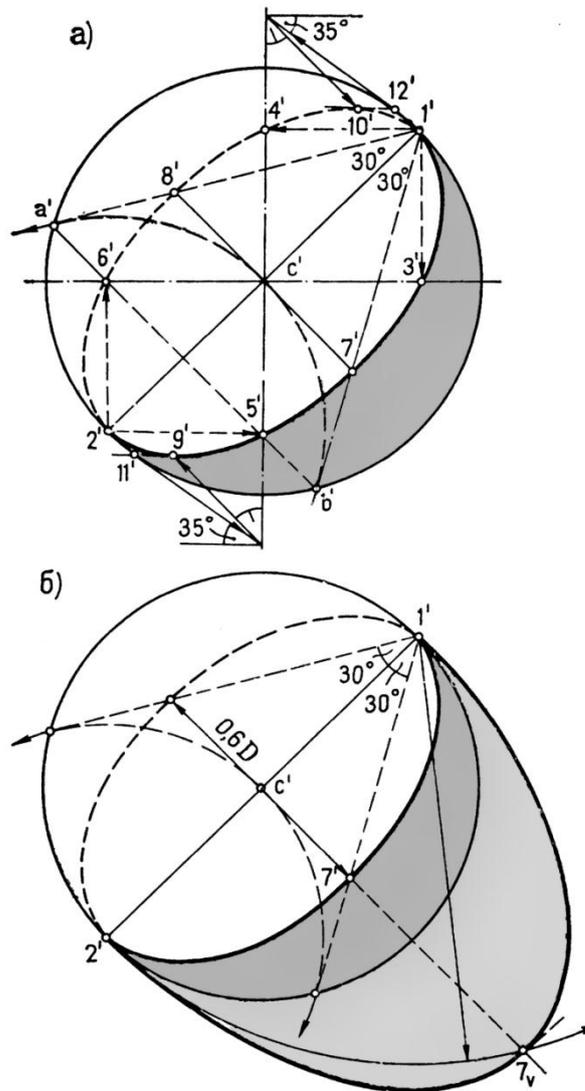


Рис.44. а, б. Построение собственных и падающих теней сферы.

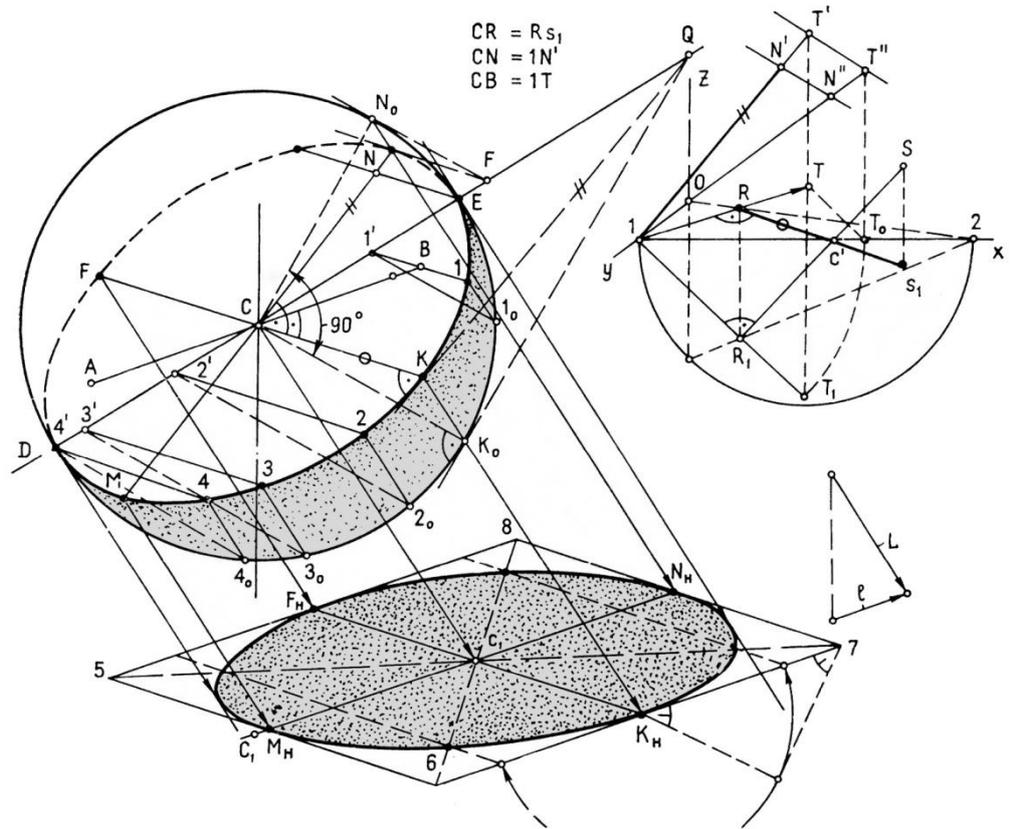


Рис.45. Построение теней сферы в аксонометрии.

Построение собственной и падающей тени сферы в аксонометрии сводится к проведению касательной цилиндрической поверхности и построения ее пересечения с плоскостью, перпендикулярной направлению световых лучей L . Совмещением (рис. 45) определяем величину радиуса $A_1 B_1$ шара, параллельного вторичной проекции l заданного направления и величину радиуса $C_2 K_1$, расположенного перпендикулярно l . Откладывая от центра C' эти размеры, получаем диаметры $A'B'$ и $K'F'$ горизонтальной окружности шара (экватора), из которой точки K' и F' будут принадлежать линии прикосновения. Определяем высшую N и низшую M точки линии прикосновения следующим способом.

Находим (на рис. 45.) натуральные величины $A_2 B_1$ и $A_2 D_1$ и строим по ним треугольник $A_2 B_0 D_2$, проводим прямую $F_2 Q_1$ перпендикулярно к $B_0 D_2$ и откладываем на ней радиус шара $A_2 N_0$. Восстановив в исходном положении точки Q' и N_1 , будем иметь

направление и размер A_2N_1 радиуса окружности прикосновения в плоскости, перпендикулярной к заданному направлению, т.е. определяющую высшую N и низшую M точки линии прикосновения. Они будут лежать на линии наклона плоскости прикосновения. На основе двух сопряженных диаметров $K'F'$ и $N'M'$ определяется линия прикосновения. Построив проекции этих диаметров на плоскость YX по заданному направлению L , получим сопряженные диаметры эллипса K_nF_n и N_nM_n следа соприкасающейся цилиндрической поверхности на плоскости YX .

Эта задача сходна с построением границ собственной и падающей теней шара.

Задача 1

Определить тень точки A на поверхности шара (рис. 46).

Решение данной задачи сводится к нахождению точки пересечения светового луча, проведенного через точку A , с поверхностью шара.

Поскольку в задаче не ставится вопрос о нахождении собственных и падающих теней шара, то достаточно определить только точки пересечения светового луча с поверхностью шара.

Задачи такого рода решаются по известному алгоритму:

1. луч заключается в какую-либо плоскость (или поверхность);
2. строится линия пересечения данной поверхности с проведенной плоскостью (или поверхностью) – фигура сечения;
3. определяются искомые точки пересечения луча с построенной фигурой сечения.

Поскольку луч занимает в пространстве общее положение, авторы учебников по начертательной геометрии обычно рекомендуют применять в этом случае преобразование чертежа (например, метод замены плоскостей проекций), для того чтобы луч или прямая линия заняли в пространстве частное положение, поскольку только в этом случае можно получить точное решение задачи.

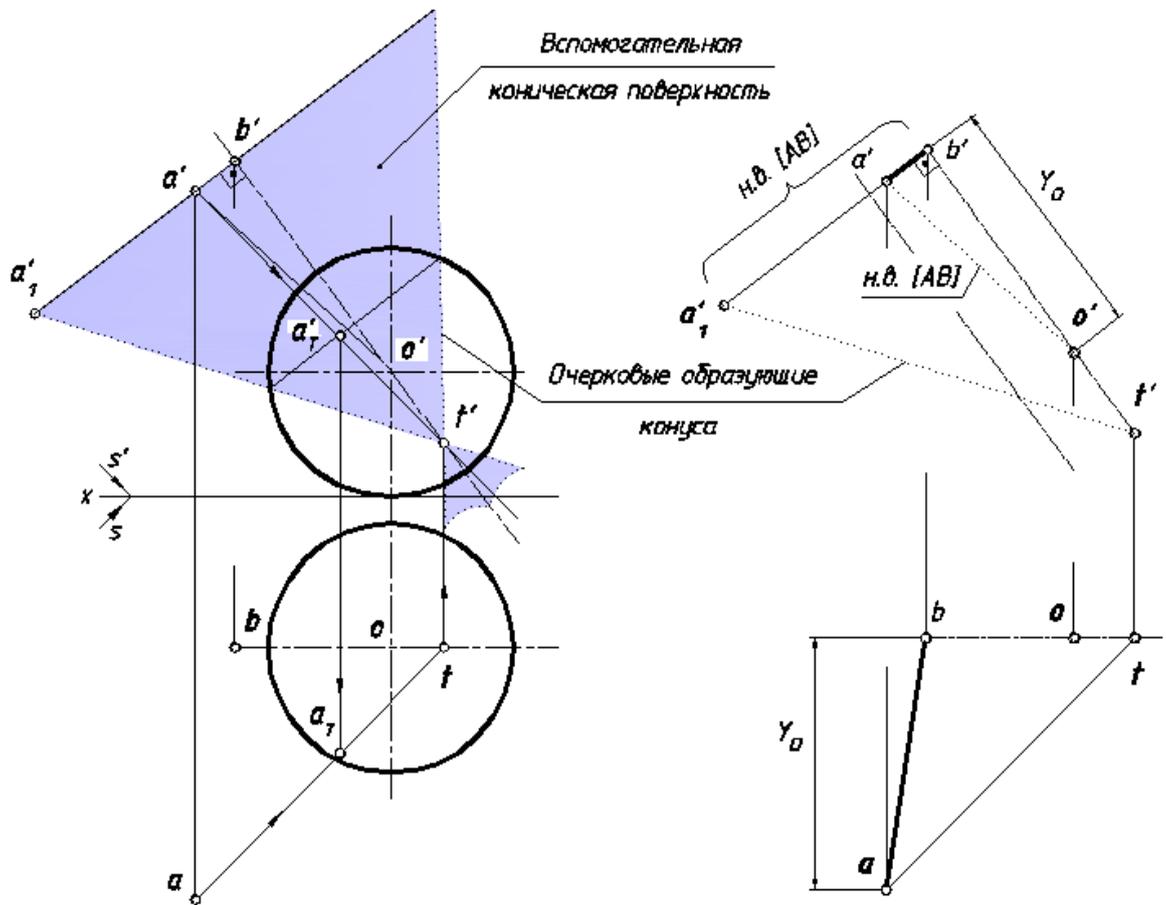


Рис. 46. Решение задачи 1

Заметим, что преобразованные чертежи имеют большие достоинства: они легко читаются, их применение позволяет избежать построения лекальных кривых по множеству точек и получить точное решение задачи. Но, к сожалению, преобразованные чертежи занимают большую площадь на поле листа бумаги и потому являются довольно громоздкими.

Известно, что любую задачу по начертательной геометрии можно решить, не прибегая к преобразованию чертежа. Покажем, как в данной задаче обойтись без последнего и в то же время получить точное решение.

Воспользуемся приведенным выше алгоритмом нахождения точки пересечения прямой линии с поверхностью:

1. Заклучим световой луч, проходящий через точку A , в коническую поверхность вращения, соосную со сферой. За вершину

этой поверхности примем точку $T(t, t')$, лежащую в плоскости главного меридиана сферы. Ось конической поверхности определится парой точек $O(o, o')$ и $T(t, t')$.

Для построения главного меридиана конической поверхности, параллельного плоскости V , применим способ прямоугольного треугольника (рис. 46.), который реализован на графическом условии данной задачи, а необходимые пояснения к нему приведены на этом же рисунке справа.

После построения очертания конической поверхности перейдем к выполнению второго пункта алгоритма:

2. Найдем линию пересечения данной сферы с проведенной вспомогательной поверхностью;

Обе поверхности соосны по построению, поэтому согласно правилу о пересечении соосных поверхностей они пересекутся по окружностям столько раз, сколько раз пересекутся их главные полумеридианы. В данном случае пересечение произошло по двум окружностям, которые на фронтальной проекции отобразились отрезками прямых линий (на рис. 46 показана только одна из них, которая задействована в задаче).

3. Определяем искомые точки пересечения светового луча, принадлежащего конической поверхности, с построенными фигурами сечения (окружностями).

На эпюре зафиксирована только одна точка $a_{T'}$ поскольку она является действительной тенью точки A на фронтальной проекции. Горизонтальную проекцию a_T определим с помощью линии связи на горизонтальной проекции луча, пользуясь свойством принадлежности.

Задача 2

Построить тень отрезка $[AB]$ на поверхности шара (рис. 47.)

Наличие собственной тени для решения поставленной задачи необходимо. Способ ее нахождения изложен ранее. Применять способ обратных лучей для этой задачи нерационально, поскольку по условию не требуется определение падающих теней шара.

Подойдем к решению задачи следующим образом. Из аналитической геометрии известно, что любая плоскость пересекает сферу по окружности. Лучевая плоскость, проходящая через отрезок $[AB]$ – горизонтально-проецирующая, поэтому пересекает сферу по окружности, которая на горизонтальной проекции отобразится отрезком прямой [12].

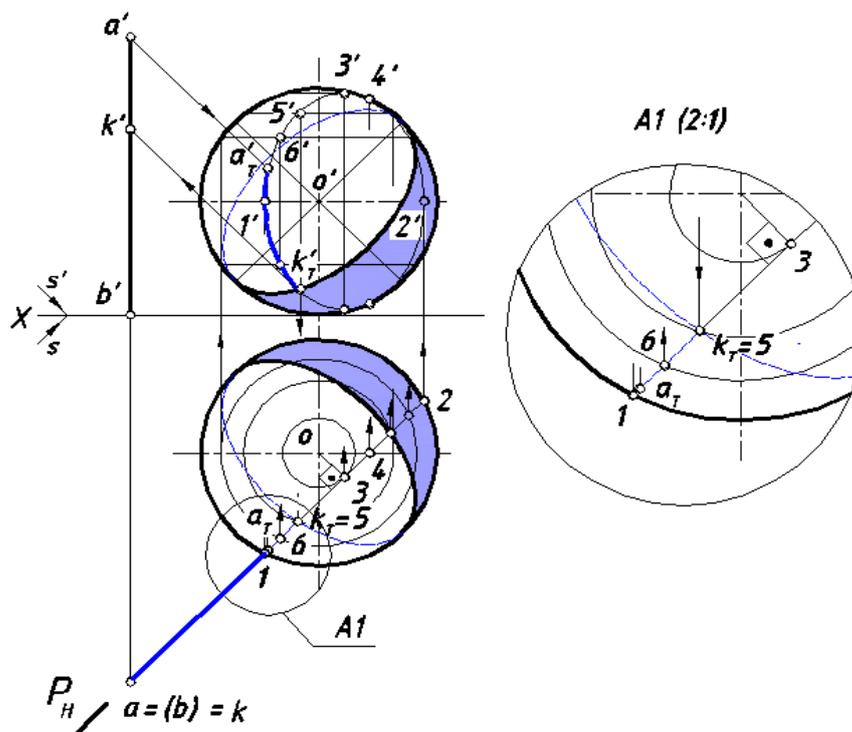


Рис. 47. Нахождение тени отрезка $[AB]$ на поверхности шара.

Поскольку окружность одновременно принадлежит лучевой плоскости и данной сфере ее фронтальная проекция (представляющая собой эллипс) может быть построена по точкам, исходя из условия их принадлежности поверхности сферы. Точке обеспечивается принадлежность сфере с помощью параллели, заведомо на ней лежащей. Горизонтальная проекция параллели отобразится окружностью, фронтальная – отрезком прямой, на котором определяется фронтальная проекция точки. На рис. 47. показаны построения всех характерных точек кривой линии и нескольких случайных, затем все точки соединены плавной кривой.

Точка пересечения светового луча с построенным по точкам эллипсом является действительной тенью точки A на поверхности шара, от которой идет дальнейшее отбрасывание тени отрезка $[AB]$ вплоть до точки $K (k, k')$, построенной на этом отрезке способом

обратного луча, после того как на фронтальной проекции определена точка k_T' пересечением контура собственной тени с дугой эллипса. Отрезок $[KB]$ частично отбрасывает тень на поверхность шара в области его собственной тени и на землю (плоскость H) в виде горизонтального следа лучевой плоскости.

6.2.4. ТЕНЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Пусть требуется построить собственные и падающие тени тела вращения с криволинейными образующими.

На рис. 48. изображено тело вращения, состоящее из эллипсоида, плавно переходящего в торовую поверхность.

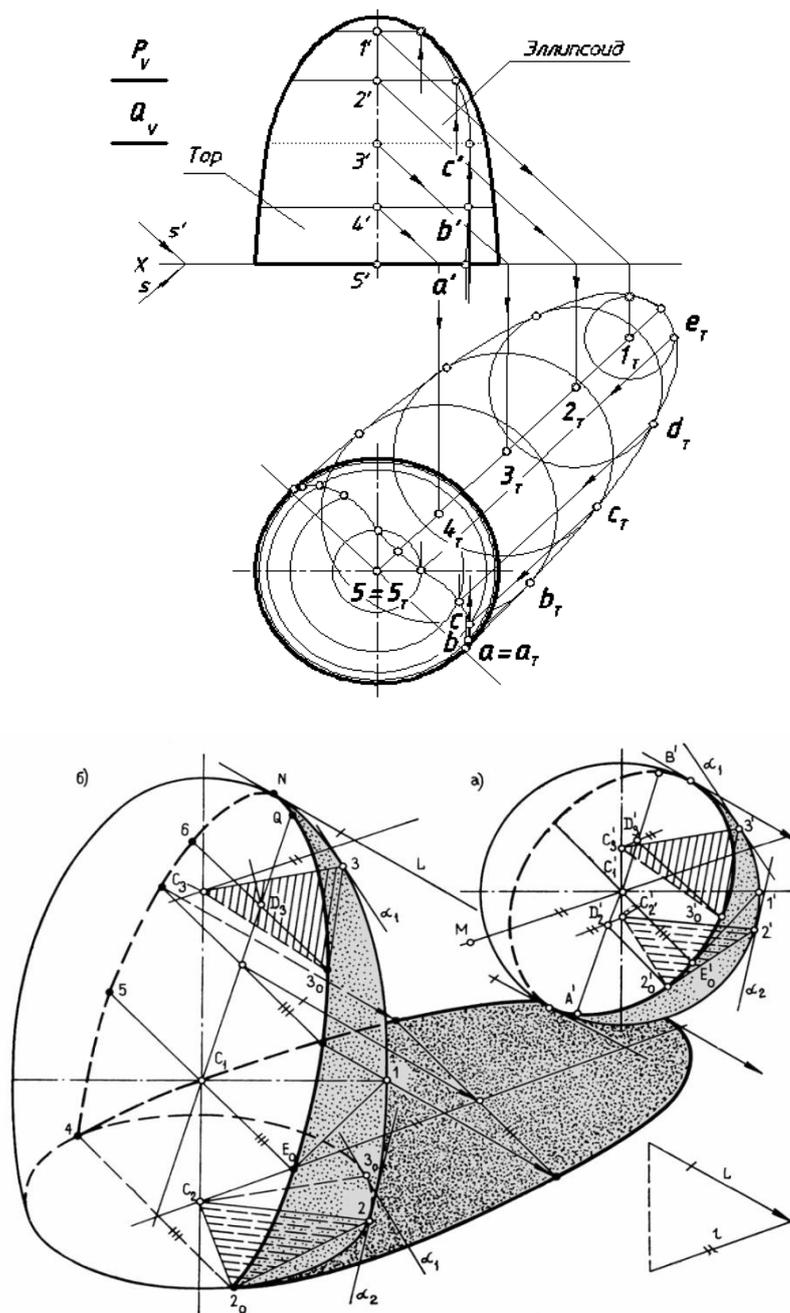


Рис. 48. Построение теней произвольного тела вращения.

Тени поверхностей вращения могут быть построены с использованием в качестве промежуточного этапа собственной сферы, что дает достаточно простое решение. Этот способ может быть назван «способом сферической диаграммы», что применено на рис. 47 и 48.

Поскольку образующими данных поверхностей являются кривые линии определение контура собственной тени более сложная задача по сравнению с предыдущими случаями. Поступим следующим образом.

Проведем на поверхности данного комплексного тела множество параллелей, плоскости которых параллельны плоскости H (две такие произвольные плоскости P и Q отмечены на чертеже). Построим их падающие тени, которые будут представлять собой множество окружностей. Огибающая этих окружностей – контур падающей тени. В данном случае очертание контура может быть построено только приближенно. Отметим точки касания полученного контура с падающими тенями параллелей $a_T, b_T, \dots e_T$. С помощью обратных лучей восстановим точки на поверхности данного тела, которые отбросили эти тени. Соединив их одноименные горизонтальные и фронтальные проекции, получим очертание контура собственной тени.

В некоторых случаях возникает необходимость показать только одно изображение некоторых тел вращения с собственными тенями. Покажем, как это выполнить на примерах конуса, цилиндра и шара, оси которых вертикальны.

Пристроим к фронтальной проекции конуса полуокружность. Через точку 1 проведем прямую, параллельную левой очерковой образующей конуса до пересечения с горизонтальным диаметром в точке 2. Через точку 2 проведем две прямые под углами 45° и -45° до пересечения с полуокружностью и отметим на ней точки 3 и 5. Из построенных точек опустим перпендикуляры на горизонтальный диаметр, на котором зафиксируем точки 4 и 6. Соединив последние с точкой s' с учетом видимости, получим границу собственной тени конуса на фронтальной проекции (рис. 49, а).

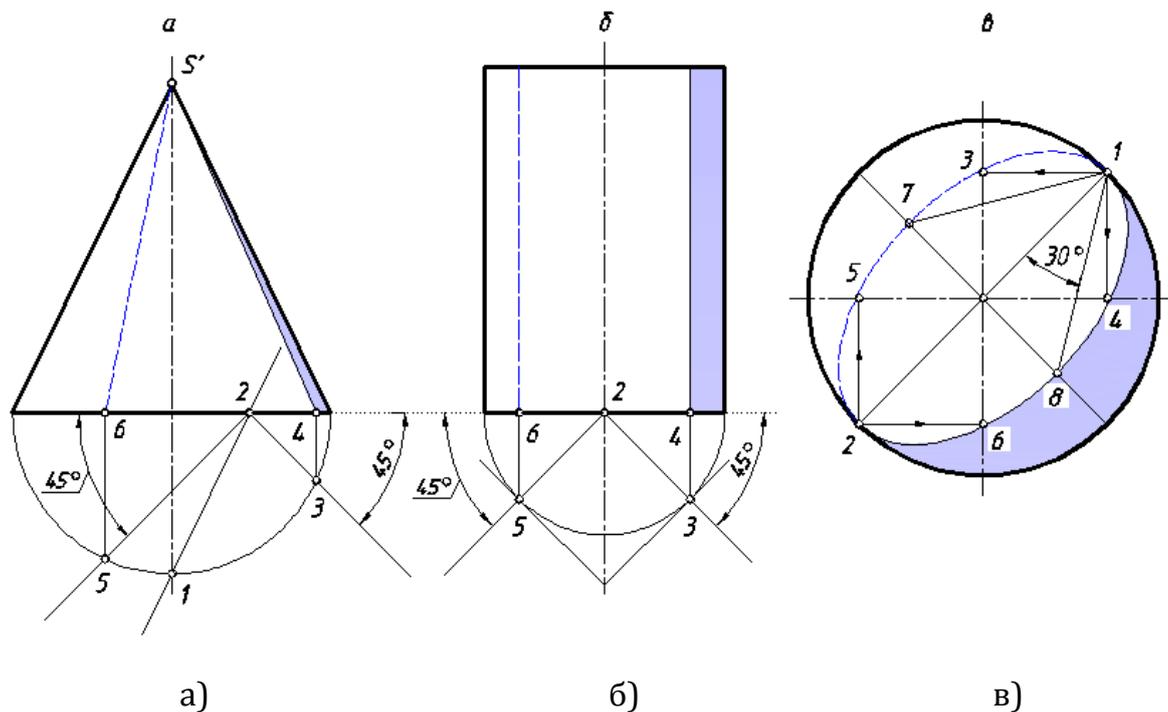


Рис. 49. Собственные тени на телах вращения.

Аналогичным образом строятся собственные тени на цилиндре. Поскольку его образующие имеют общую несобственную точку, то точка 2 совпадает с центром окружности (рис. 49, б).

На поверхности шара контуром собственной тени является окружность, отображенная на проекции эллипсом, построенная по восьми точкам (рис 49, в).

Как говорилось выше, архитекторы применяют несколько способов построения собственных и падающих теней. Одним из таких способов является СПОСОБ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ.

Тени кругового цилиндра, кругового конуса и сферы применяются для построения теней поверхностей вращения. Если представить себе, что данная поверхность вращения соприкасается с цилиндром (конусом или сферой), то точка А, принадлежащая границе собственной тени цилиндра на линии прикосновения, будет принадлежать так же и границе собственной тени данной поверхности вращения.

На этом свойстве основан способ построения границы собственной тени поверхности вращения, называемый способом касательных конусов.

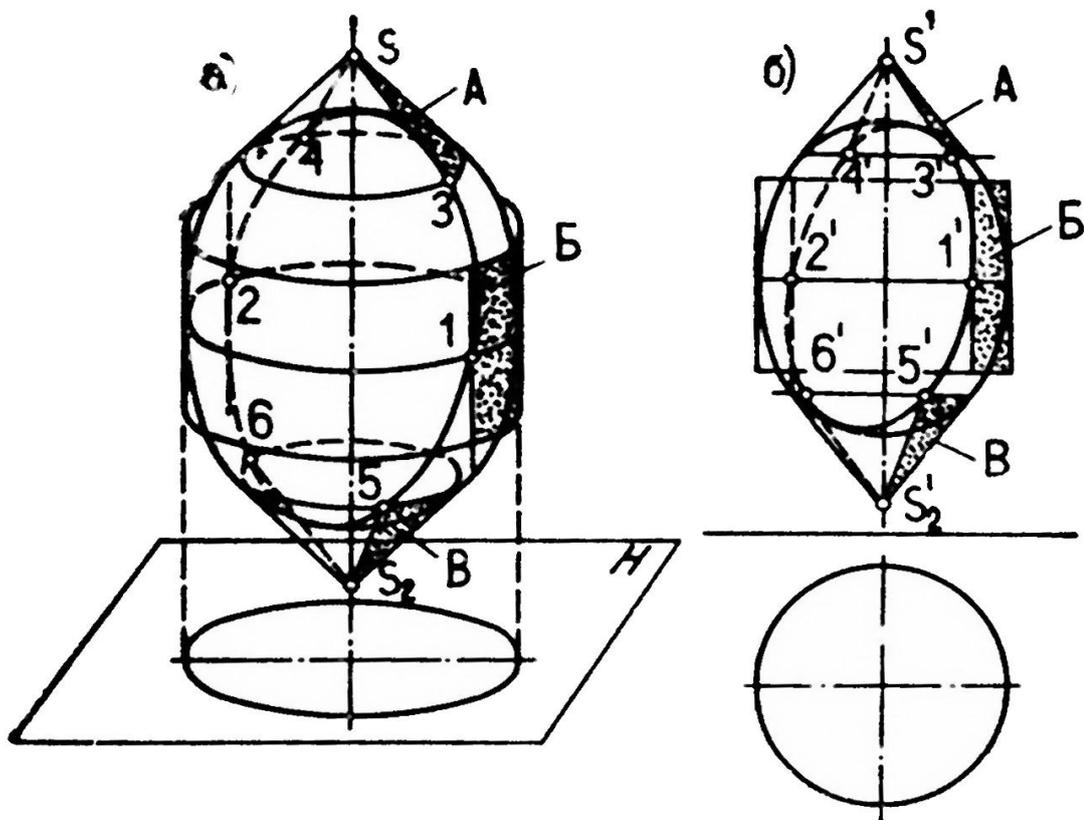


Рис. 50.(а, б). Способ касательных конусов

Берется конус А (рис.50а) или цилиндр В (рис.50б), соосный и касательный к поверхности вращения, и на окружности прикосновения отмечаются точки 3 и 4(или 1 и 2)- границы собственной тени конуса, принадлежащие и границе собственной тени поверхности, как расположенные на одной параллели поверхности.

Рассмотрим пример построения собственной тени произвольной поверхности вращения способом касательных конусов. (рис51.). Сначала берется касательный цилиндр и определяются точки 1' и 2' на экваторе поверхности; затем прямой и обратный конусы с образующими под углом 45° , которые дают точки 3' и 5' на фронтальном и 4' и 6' на профильном очерках. Потом берутся два конуса с образующей под углом 35° , из которых

прямой конус определяет высшую точку $8'$, а обратный конус – низшую точку $7'$ контура тени поверхности. Если необходимо, берутся и еще конусы с другими углами наклона образующих.

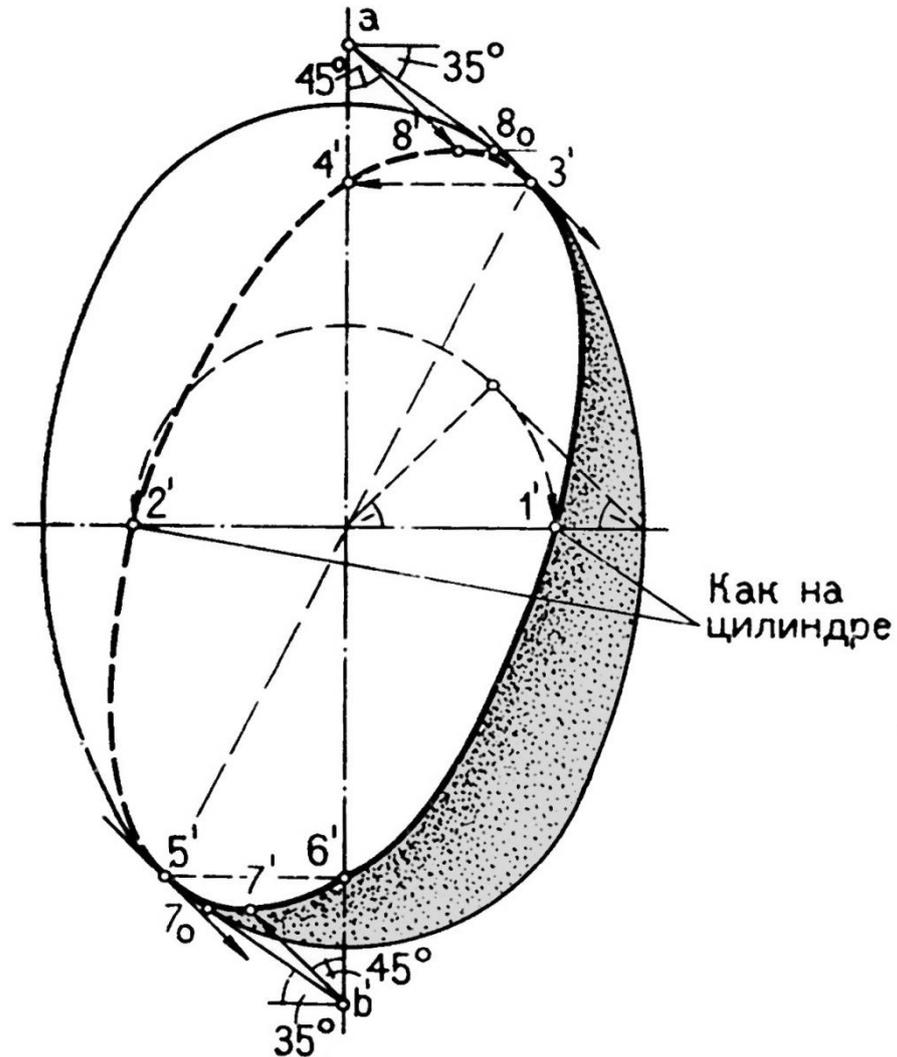


Рис. 51. Построение собственной тени поверхности вращения методом касательных конусов.

Рассмотрим другой пример построения этим же способом собственной и падающей тени валика (рис.52.).

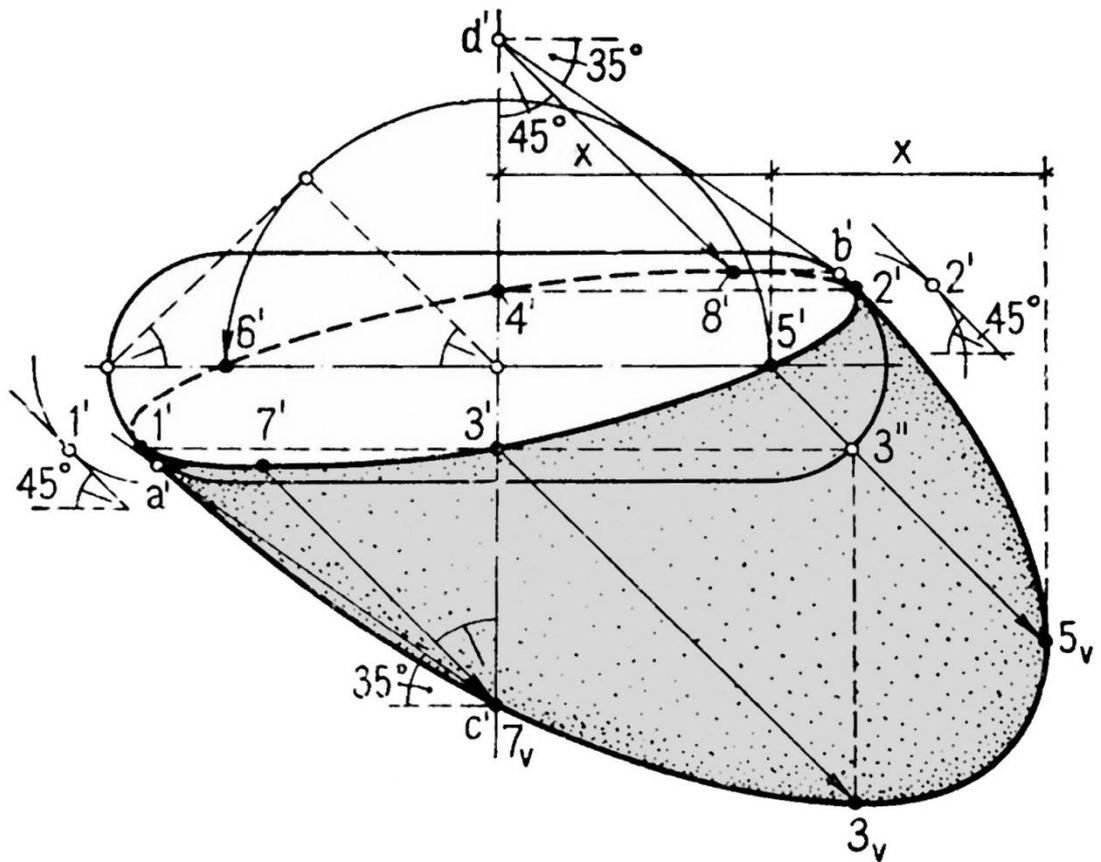


Рис.52. Построение собственных и падающих теней валика.

Проводя касательные лучи к очерку поверхности, определим точки $1'$ и $2'$ на фронтальном очерке и на одних горизонталях с ними соответственно $3'$ и $4'$. На линии экватора найдены точки $5'$ и $6'$, аналогично тому, как находилась собственная тень цилиндра. Низшую и высшую точки $7'$ и $8'$ находим так: под углом 35° проведем касательные прямые к очерку поверхности до пересечения с осью поверхности в точках C' и D' . Из этих точек проведем прямые под углом 45° до горизонталей, проведенных из точек касания a' и b' , и найдем высшую и низшую точки $7'$ и $8'$.

Построим падающую тень на фронтальную плоскость. Тень от точки $7'$, лежащей в лучевой осевой плоскости, будет расположена на оси поверхности – точка 7_v . Через точку $3'$ проведем горизонталь до правого очерка и вынесем ее до пересечения с лучем под 45° , получив тень 3_v . Тень 5_v точки $5'$ определим по выносу X ($0,707$ радиуса). Граница падающей тени проходит через точки $1'$ и $2'$ и построенные точки падающей тени.

Этим же способом построены собственные тени ТОРОИДА (скоции). Рассмотрим пример построения на рис. Рис.53 .

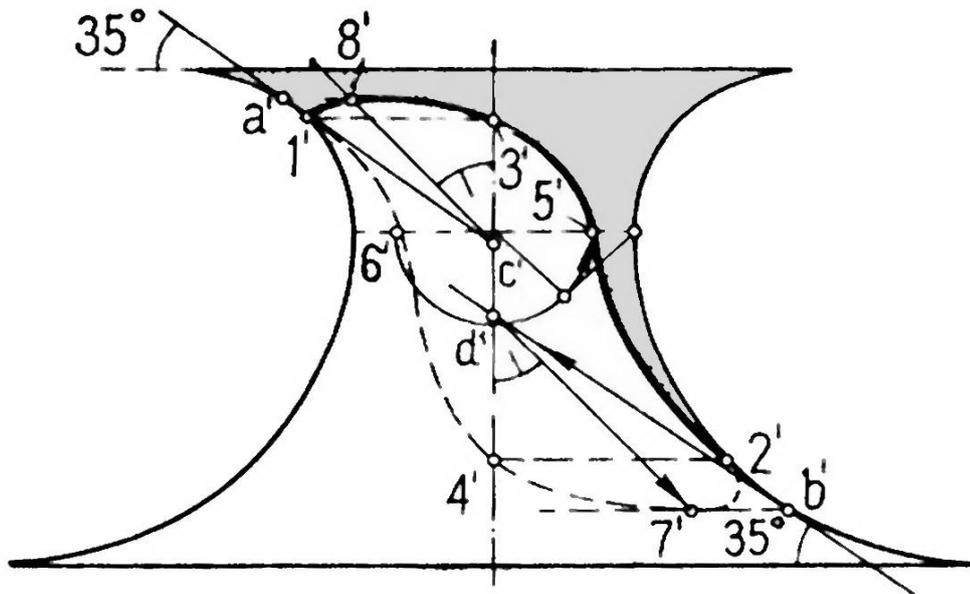


Рис. 53. Построение собственных теней скоции.

Лучи, касательные к очерку определяют точки 1' и 2' и соответственно 3' и 4' собственной тени на профильном очерке. Точки 5' и 6' определяются аналогично собственной тени цилиндра. Точки 7' и 8' находятся с использованием касательных конусов с наклоном образующих в 35° .

Далее рассмотрим примеры построения теней как собственных, так и падающих с применением выше изложенных способов.

На рис. 54 построена тень от круглой плиты на круглую колонну. План приведен только для пояснений, в дальнейшем все построения; производится без плана. Положение от характерных образующих цилиндра на биссекторный экран может быть определена непосредственно на фасаде: а) от левой очерковой образующей 1' тень падает на середину левого радиуса 10; б) от бликовой 2'- на ось цилиндра 20; в) От профильной 3'- на середину правого радиуса 30. Сюда же падает тень и от правой очерковой образующей 5' при обратном направлении луча.

Построив тень от плиты на экран (это будет окружность), находим пересечение ее с тенями от образующих цилиндра, т.е. точки 10, 20, 30, 4', 5' на фронтальной проекции. Проведением обратных лучей из этих точек до проекции соответствующих образующих находим точки падающих теней. Точка 2'-высшая; точки 1' и 3' – на одном уровне; точка 4' – точка пересечения падающей тени с границей собственной тени цилиндра.

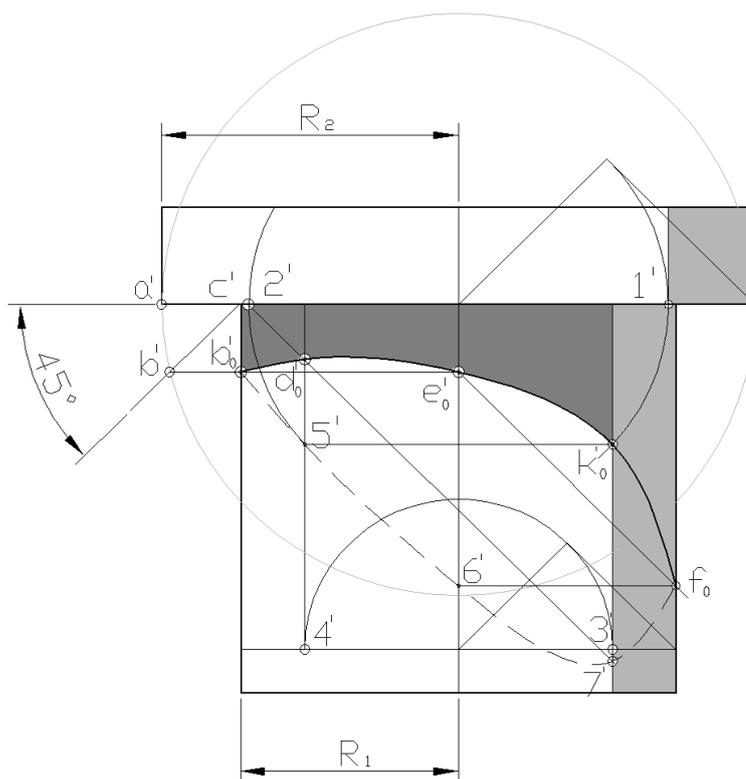


Рис. 54. Построение падающей тени от цилиндра на цилиндрическую колонну.

На рис.55а построена тень от круглой плиты на поверхность вращения. Тени на экран от нижней кромки плиты и от параллели пересеклись в точке 40. Пересечение обратного луча из этой точки с параллелью дало тень точки 4', принадлежащую границе падающей тени. Взяв еще две-три параллели, определим несколько точек границы падающей тени.

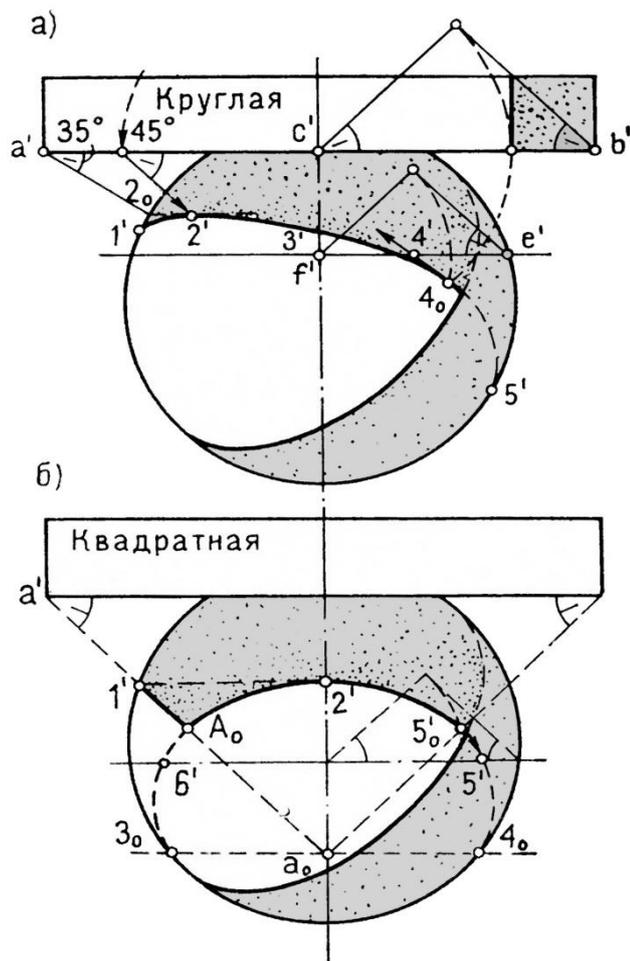


Рис. 55(а,б). Построение падающих теней на поверхность вращения от круглой и от квадратной плиты.

Тень от квадратной плиты на поверхность вращения (рис. 55б) находится так же, только тень от квадрата на экран изобразится так же квадратом со стороной $0,707$ от стороны данного квадрата, которая служит диагональю квадрата тени.

Используя выше указанные методы можно построить падающую тень на поверхности скоции (рис.56). Тень от верхней окружности на стену определяет точки $11'$ и $13'$ - тени на скоцию. Точка $12'$ - на одном уровне с точкой $11'$. Точка $14'$ -высшая, определена с использованием конуса с углом образующей в 35° и основанием на нижней окружности полочки.

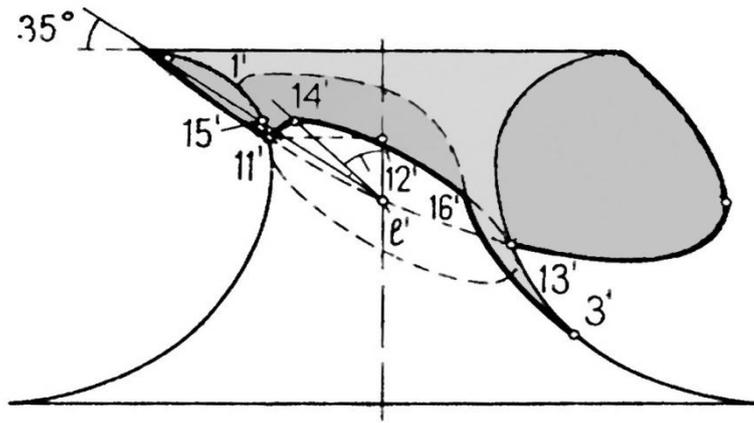


Рис.56. Построение падающей тени скоции.

Построение тени капители (рис.57.) представляет собой комплексную задачу, объединяющую ранее построенные тени на отдельных геометрических поверхностях

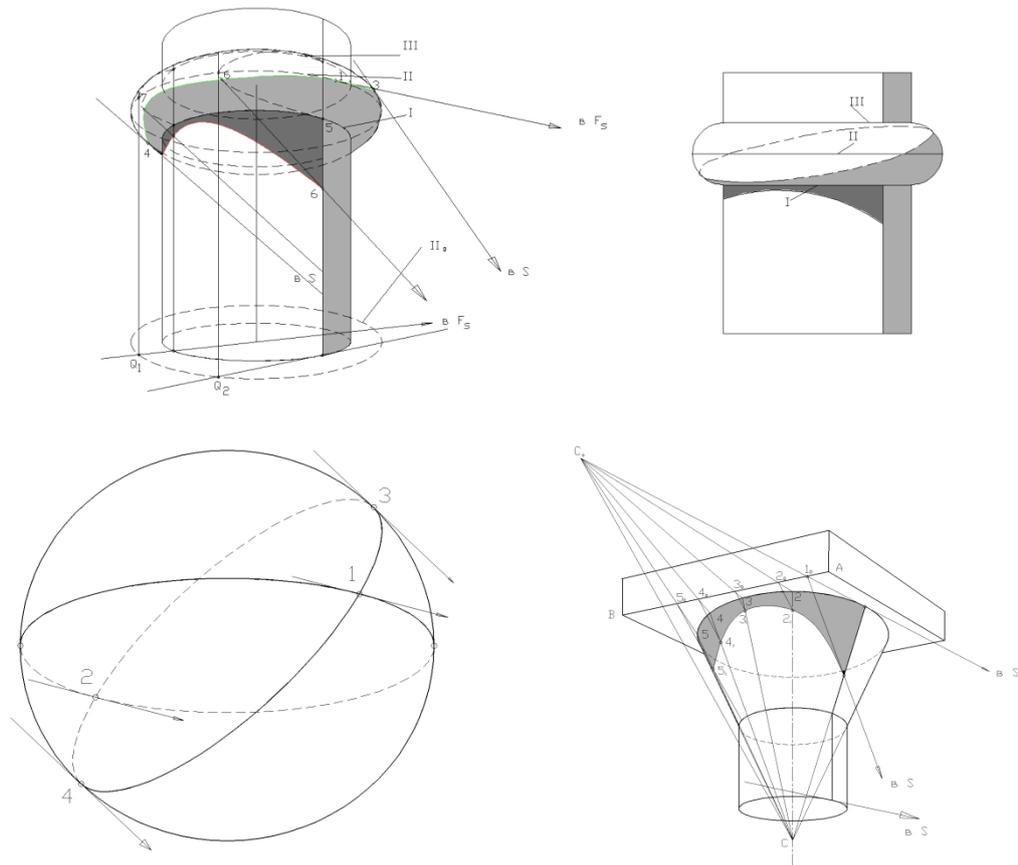


Рис. 57. Комплексная задача построения собственных и падающих теней.

7. ТЕНИ ФРАГМЕНТОВ ЗДАНИЙ

7.1. ТЕНИ В НИШАХ

Напомним, что для построения контура падающей тени какой либо поверхности выявляется контур ее собственной тени (иногда достаточно определить только элементы контура).

Рассмотрим тени в нишах различной конфигурации. На рис. 58, а изображена прямоугольная ниша. Проведем анализ освещенных и неосвещенных фрагментов ниши и стены. При заданном направлении светового потока стена здания освещена, левая грань – в тени, следовательно, ребро $[AB]$ (столб) является частью контура собственной тени и от него следует строить тень падающую. Поскольку отрезок $[AB]$ параллелен задней стенке ниши, то согласно выводу, приведенному ранее, падающая тень отрезка $[AB]$ равна и параллельна этому отрезку.

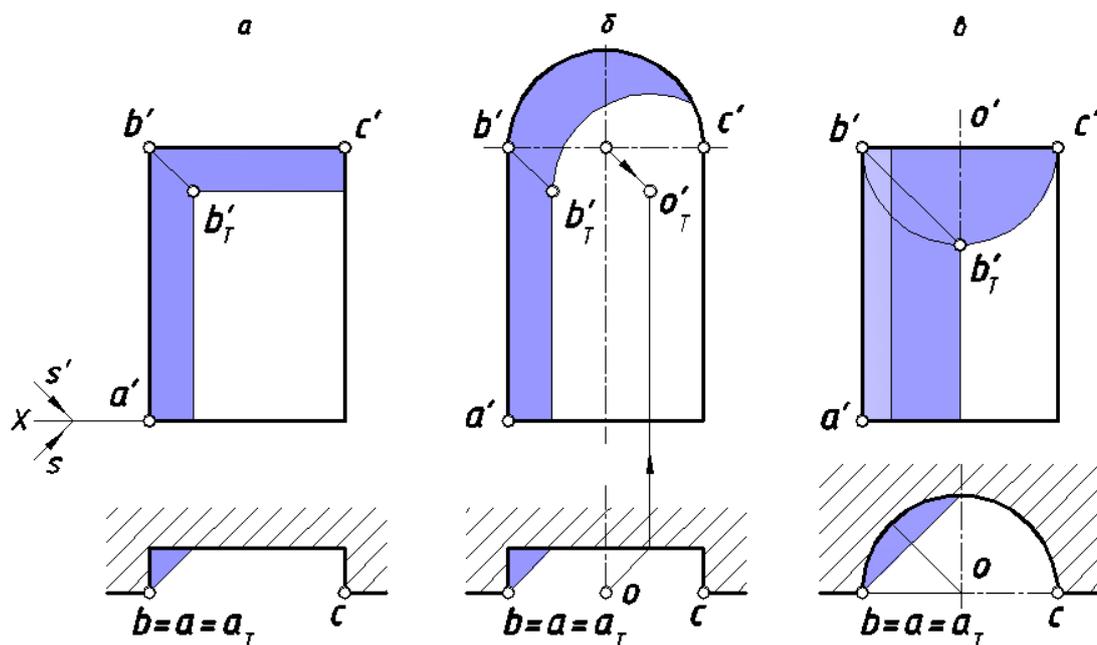


Рис. 58 (а, б, в.) Построение теней в нишах.

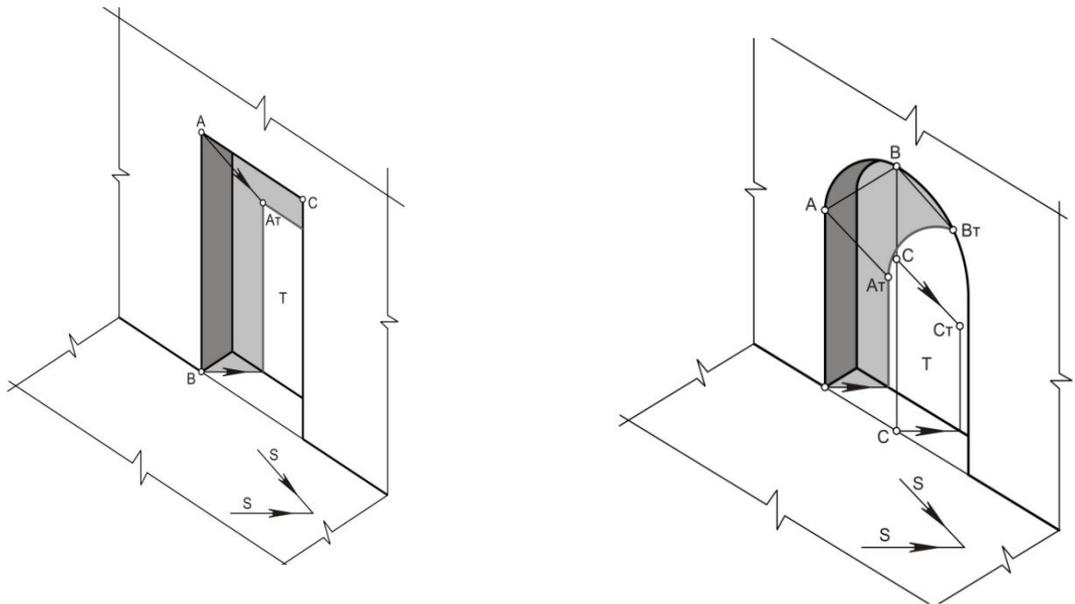


Рис. 59. Тени в нишах:

а – ниша прямоугольной формы;

б – ниша с плоской задней стенкой и цилиндрическим потолком.

На фронтальной проекции ниши будет видна только реальная часть этой тени. На нижнюю грань ниши (подоконник) отрезок $[AB]$ отбрасывает тень в виде следа лучевой горизонтально-проецирующей плоскости, проходящего через точку A .

Стена здания и верхняя грань ниши пересекаются по отрезку $[BC]$. Поскольку эта грань находится в тени, ребро $[BC]$ лежит на границе света и тени, следовательно, оно входит в часть контура собственной тени, от которого построим тень падающую.

Ребро $[BC]$, как и ребро $[AB]$, параллельно задней стенке ниши, поэтому его падающая тень так же равна и параллельна этому отрезку.

У ниши, изображенной на рис. 59, *б*, в контур собственной тени входит отрезок $[AB]$ и дуга полуокружности, параллельные задней стенке ниши, поэтому падающая тень на эту стенку идентична фигуре контура.

У третьей ниши в контур собственной тени входит отрезок $[AB]$ и $[BC]$, т.к. по нему пересекается освещенная стена и потолок ниши, находящийся в тени. Кроме того, в собственной тени оказывается часть цилиндрического отсека, выделенная на чертеже более бледным тоном. Лучевая плоскость, проходящая через ребро $[AB]$ пересекает подоконник также как в двух предыдущих случаях, а цилиндрическую стенку ниши по горизонтально-проецирующей прямой, поскольку оно параллельно образующим цилиндра. Лучевая плоскость, проходящая через ребро $[BC]$, равно наклонена к плоскостям проекций H и V . Поскольку это ребро перпендикулярно плоскости W – лучевая плоскость – профильно-проецирующая, поэтому она пересекает цилиндрическую поверхность по эллипсу, который отображается на горизонтальной и фронтальной проекциях окружностями (точнее – одинаковыми симметричными дугами окружностей).

7.2. ТЕНЬ КОЗЫРЬКА

На рис. 60. над прямоугольной нишей в стене изображен козырек.

Построение тени в нише было рассмотрено ранее. Проведем анализ освещенности граней козырька для определения его контура собственной тени. При заданном направлении S освещены верхняя, передняя и левая боковая грань козырька, остальные грани (в том числе и грань ,примыкающая к стене) находятся в тени, следовательно, ребра $[ME]$, $[ED]$, $[DC]$, $[CB]$, $[BA]$ и $[AM]$, входят в состав контура собственной тени козырька.

На этом же рисунке справа дано наглядное изображение контура собственной тени, по которому легко ориентироваться при нахождении падающих теней.

Построим от этого контура падающую тень. Ребро $[ME]$ принадлежит стене, поэтому его тенью является отрезок $[m_T'e_T]$. Ребро $[ED]$ по отношению к стене является *гвоздем*. Падающая тень гвоздя представляет собой след лучевой фронтально-проецирующей плоскости, определяемый точками e_T' и d_T' .

Для получения точки d_T' через точку D в пространстве проводим луч, параллельный направлению S , а на эюре

отображаем его проекции. Точка пересечения проведенного луча со стеной – падающая тень точки D .

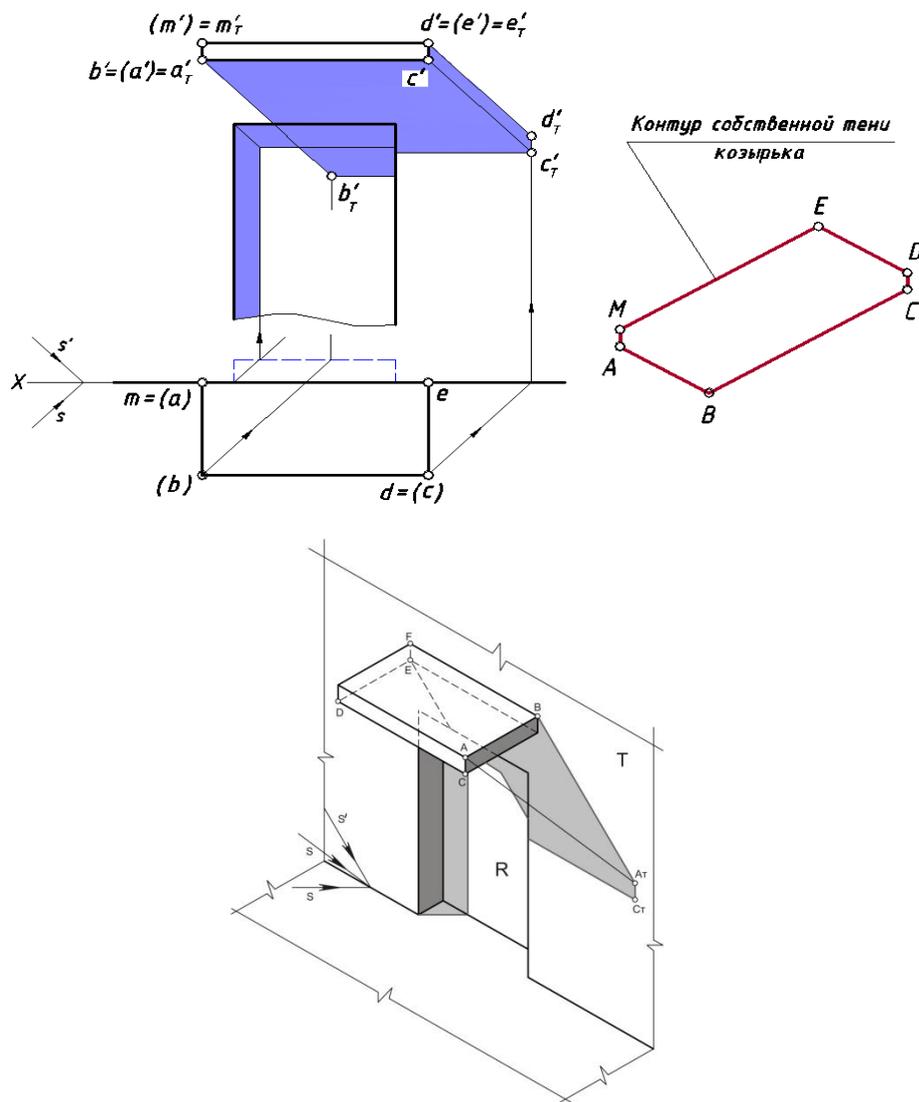


Рис. 60. Тень козырька.

Ребро $[DC]$ параллельно стене, поэтому отбрасывает на него тень в виде равного ему и параллельного отрезка $[d_T'c_T']$. Следующее ребро $[CB]$ также параллельно стене здания, поэтому $[b'c'] \parallel [b_T'c_T']$. Поскольку ребро $[BA]$ *гвоздь* по отношению к стене, а $[BA] \parallel [ED]$, то их падающие тени также параллельны между собой $[a_T'b_T'] \parallel [e_T'd_T']$. Заметим, что луч, проведенный через точку B , пересекает заднюю стену ниши в точке b_T' , поэтому часть ребер $[CB]$ и $[BA]$ отбрасывают тени на нее.

7.3. ТЕНЬ КРОНШТЕЙНА

Пусть дано два изображения кронштейна, у которого требуется найти собственные и падающие тени (рис. 61). Выявим на его поверхности контур собственной тени. Для этого проведем анализ освещенных и неосвещенных поверхностей, ограничивающих кронштейн.

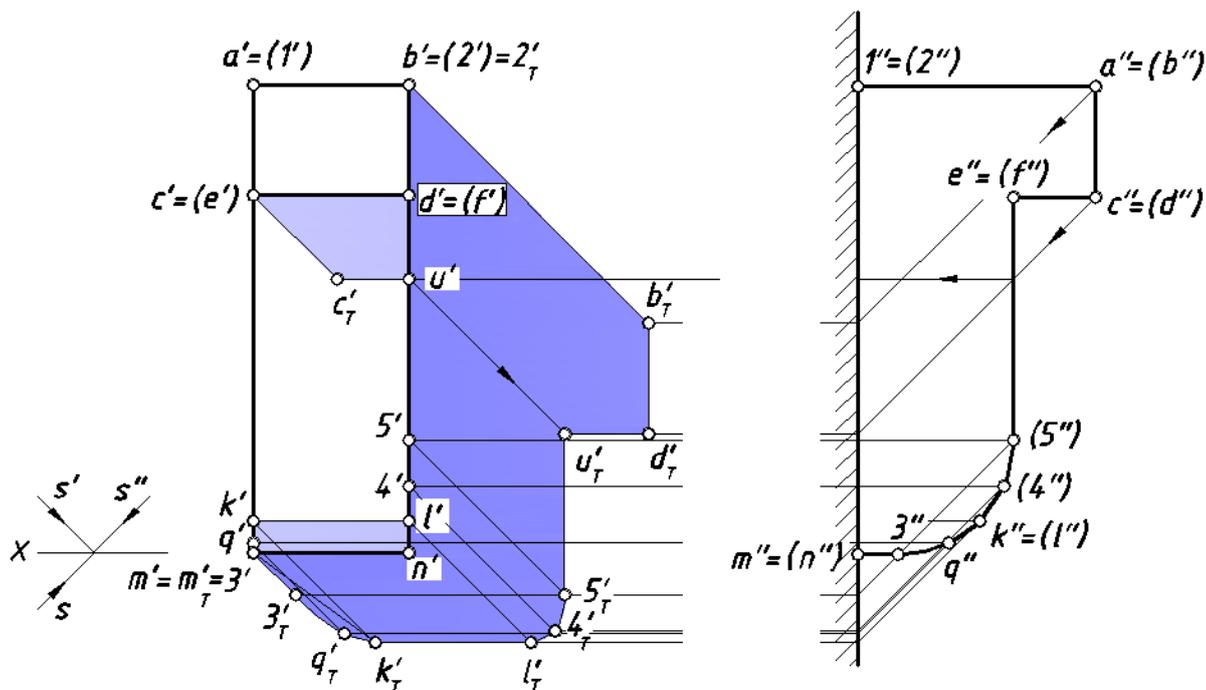


Рис. 61. Построение падающих теней кронштейна

При заданном направлении S освещенными окажутся две передние грани поверхности кронштейна, параллельные плоскости V , ограниченные прямоугольниками $(ABCD)$ и $(KLFE)$; грань, примыкающая к стене, параллельная плоскости H , и левый отсек плоской фигуры, параллельный плоскости W .

Заметим, что при определении контура следует учесть наличие цилиндрической поверхности, часть которой находится в собственной тени и границей света и тени на ней служит отрезок $[KL]$.

Общий контур собственной тени представляет собой пространственную линию и состоит из отрезков прямых и двух дуг окружностей. Наглядное изображение контура показано на рис. 61.

В этой задаче следует обратить внимание на одну деталь. При определении освещенности отдельных частей поверхности

предмета для установления контура собственной тени необходимо иметь в виду такую тонкость, которая в учебной литературе не рассматривается. Заключается она в том, что, устанавливая освещенность плоского отсека, следует давать по этому поводу однозначный ответ (освещена, либо не освещена), поскольку на освещенный участок может упасть тень от фрагмента данного геометрического объекта. Так, в нашем случае, на плоскость прямоугольниками ($KLFE$) падает тень от верхнего фрагмента кронштейна, но она *не влияет* на установление контура собственной тени объекта.

Заметим, что если объект состоит из большого числа геометрических тел – определение контура собственной тени может оказаться непростой задачей.

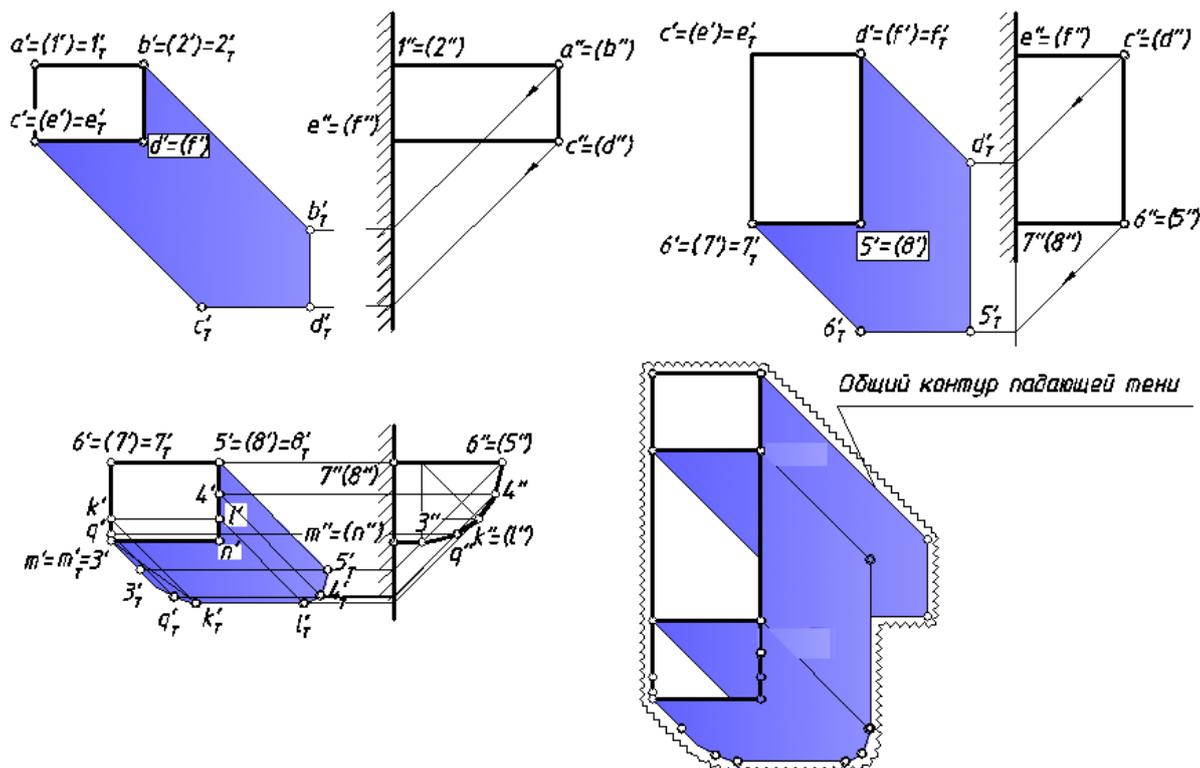


Рис. 62. Построение падающих теней фрагментов кронштейна

В таких случаях рекомендуется применять другой прием для решения задачи. Покажем, как это выполнить, на примере той же самой задачи.

Поступим следующим образом: мысленно разобьем геометрический объект на простые составляющие (рис.62.) – два

параллелепипеда и $\frac{1}{4}$ цилиндра, переходящего в призму. Определим контур собственной тени на каждом из этих тел, независимо друг от друга. Построим падающие тени и обведем их общий контур (все эти построения выполним на исходном чертеже). После этого удалим на данном изображении те участки падающей тени, которые находятся за непрозрачным кронштейном, и определим падающую тень от верхнего фрагмента объекта на нижнюю грань, параллельную плоскости V . Результат будет таким же, как на рис. 61.

Падающие тени расчлененного объекта показаны на отдельных изображениях в целях удобства восприятия чертежа.

7.4. ТЕНЬ ОТ АБАКИ НА КОЛОННУ

На рис. 63 изображена абака, имеющая форму шестигранной плиты, отбрасывающая тень на полуцилиндрическую колонну.

Вначале определим контур собственной тени на шестигранной плите. Проанализируем освещенность ее граней. При заданном направлении S светового потока неосвещенными окажутся правая, нижняя и задняя грани плиты (они будут находиться в собственной тени). Поскольку правая грань видна на фронтальной проекции – выделим ее бледным тоном. Определим контур собственной тени полушестигранника. Ввиду того, что последний примыкает к стене, можно отметить $e' = e'_T$, $f' = f'_T$, и отрезок $[EF]$ входит в состав контура собственной тени, т.к. стена освещена, а задняя грань в тени. Следующим отрезком контура будет $[EL]$, потому что верхняя грань освещена, а правая в тени. Рассуждая аналогично, определяем другие отрезки, входящие в этот контур – это $[LA]$, $[AB]$, $[BQ]$ и $[QF]$. Определение замкнутого контура плиты завершено.

На этом же рисунке показана падающая тень плиты на стену независимо от полуколонны (ее контур, находящийся за непрозрачной колонной, изображен точечными линиями). Заметим, что часть цилиндрической колонны находится в собственной тени (ее построение рассмотрено в предыдущем разделе), которая на чертеже выделена бледным тоном.

Тени ребер $[EL]$ и $[LA]$ по построению полностью оказались на стене, а ребро $[AB]$ частично отбрасывает тень на стену в виде прямой, параллельной ребру, а также на колонну. Лучевая плоскость, проходит через отрезок $[AB]$, перпендикулярный плоскости W , поэтому на основании признака перпендикулярности прямой и плоскости, она является профильно-проецирующей (рис. 63).

На поверхности цилиндра от пересечения с ней образуется эллипс, поскольку плоскость пересекает все его образующие. Кроме того, она равно наклонена к плоскостям проекций H и V , поэтому проекциями этого эллипса будут окружности (или дуги окружностей, т. к. величина ребра конечна). Горизонтальная проекция окружности совпадает со следом цилиндра на плоскости H . Для нахождения фронтальной проекции окружности определим точку b_T' и проведем через нее дугу, радиус которой равен радиусу цилиндра, а ее центр лежит на оси.

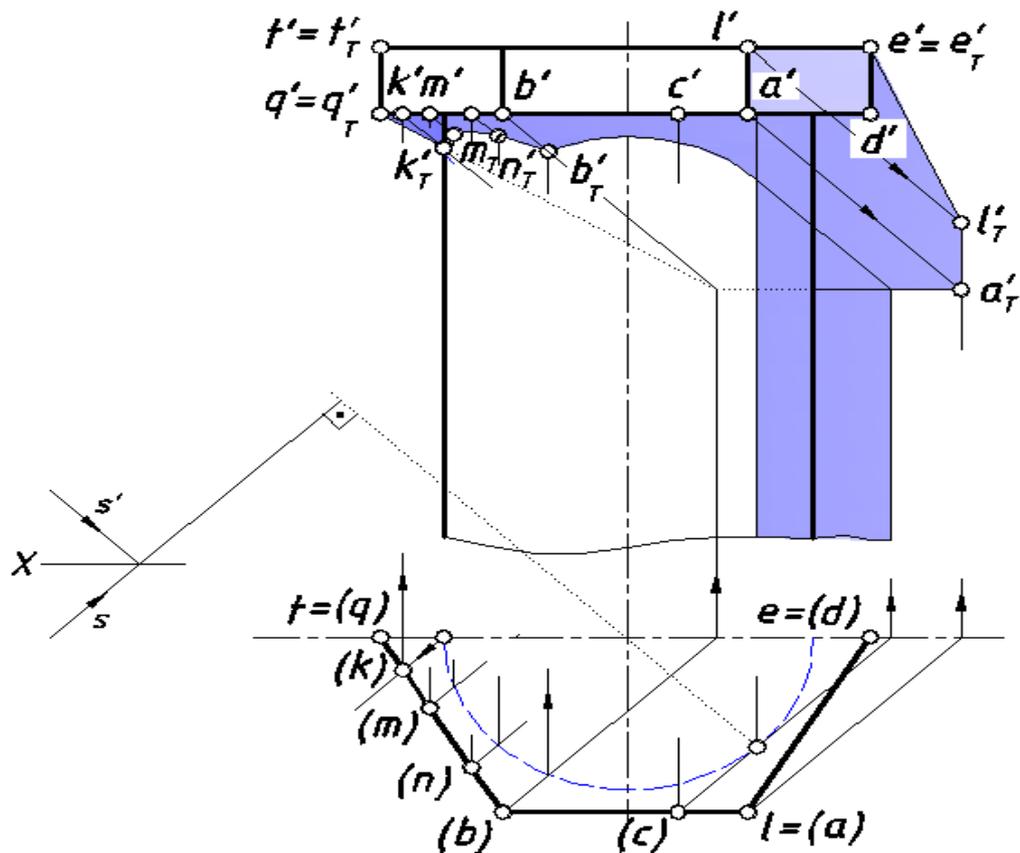


Рис. 63. Собственные и падающие тени абак на колонну

Отрезок $[BQ]$ также отбрасывает тень на поверхность цилиндра. Через него проходит лучевая плоскость общего

положения, которая, пересекая цилиндр, оставляет на нем тень виде дуги эллипса.

Построение этого эллипса выполняем по множеству точек. На отрезке $[BQ]$ берем случайные точки (на рис. 63 это точки $M(m, m')$ и $N(n, n')$). Строим точки пересечения лучей, проходящих через эти точки, с поверхностью цилиндра (падающие тени точек) и соединяем их плавной кривой. С помощью обратного луча определяем точку $K(k, k')$ на отрезке $[BQ]$, которая отбрасывает тень на левую очерковую образующую цилиндра.

На рис. 64, приведенном ниже показано построение собственных и падающих теней от квадратной плиты на цилиндрическую колонну. При этом при построении падающих теней используется метод обратных лучей, которые параллельны направлению горизонтального луча в аксонометрии.

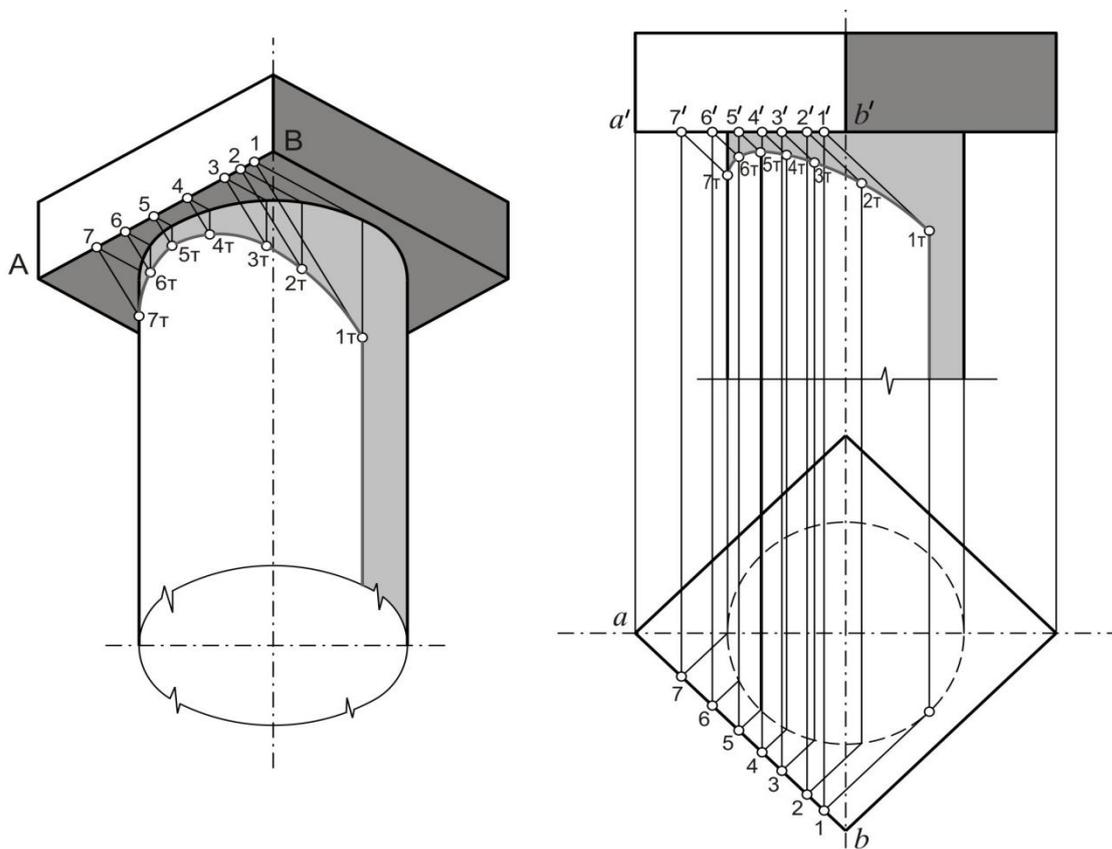


Рис.64. Построение теней от квадратной плиты на круглую колонну.

7.5. ТЕНИ НА ЛЕСТНИЦАХ

Задача 1

Построить тени от прямого барьера на лестнице (рис. 65).

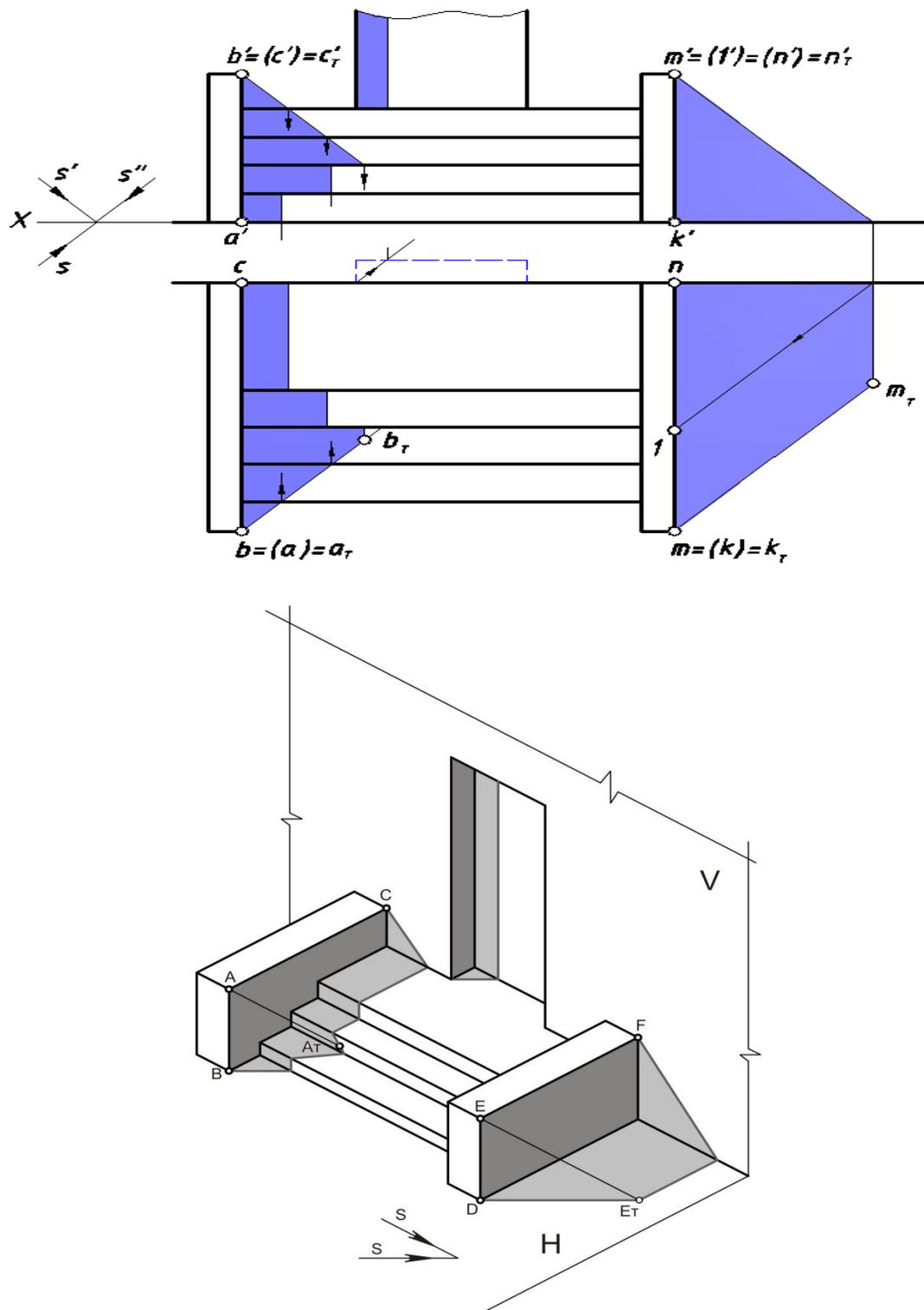


Рис.65. Тени от прямого барьера на лестнице.

Вначале рассмотрим построение теней от правого барьера. В собственной тени будут находиться правая, нижняя и задняя грани его грани. Прямой барьер имеет форму параллелепипеда. Определение контура собственной тени такого объекта уже рассматривалось. Тень от правого барьера упадет на землю и стену. Ребро $[KM]$ – *горизонтально-проецирующее* отбросит тень на землю полностью в виде отрезка $[k_T m_T]$. Ребро $[MN]$ частично отбросит тень на землю до точки, найденной с помощью обратного луча; другая часть ребра отбросит тень на стену.

У левого барьера в процессе нахождения теней будут участвовать ребра, параллельные рассмотренным. Тень столба $[AB]$, начиная от точки $a = a_T$, будет представлять собой плоскую ломаную линию. Вначале часть этой линии окажется на земле, затем пойдет по подступенку, на котором отобразится в виде отрезка, параллельного ребру $[AB]$. После этого перекинется на первую ступеньку, плоскость которой параллельна земле, поэтому тени столба на земле и ступеньке также будут параллельны. Тень на втором подступенке получается как и на первом, затем переходит на вторую ступень и заканчивается в точке b_T . Далее начинает отбрасывать тень ребро $[BC]$ – *фронтально-проецирующее*. Поскольку это ребро параллельно всем ступенькам и площадке перед дверью тени на них будут параллельны этому ребру, а тень отбрасываемая на подступеньки и стену, будет параллельна тени гвоздя $[MN]$.

Задача 2

Построить тени от наклонного барьера на лестнице (рис.66).

Рассмотрим построение падающей тени лестничного марша. Правая грань марша находится в собственной тени, но она является профильной плоскостью уровня, отображается на обеих проекциях отрезками прямых линий, поэтому на чертеже ее тени не видно.

Поскольку все ступени и подступеньки освещены – в контур собственной тени будут входить ребра, представляющие профиль марша, и только от них следует строить падающие тени, потому что другие ребра, входящие в состав контура собственной тени, расположены на стене и земле и их падающие тени совпадают с самими ребрами. Тени от параллельных ребер также параллельны и

представляют собой падающие тени либо *от горизонтально-проецирующих*, либо *от фронтально-проецирующих* прямых.

У наклонного барьера при заданном направлении светового потока неосвещенными окажутся правая грань и грани, примыкающие к стене и земле. В состав контура собственной тени входят ребра $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ и те ребра, которые совпадают со своими падающими тенями. Последние не участвуют в процессе определения теней.

Построим падающую тень *столба* $[AB]$. Вначале она идет по земле, затем по подступеньку, на котором тень параллельна ребру. Далее тень оказывается на первой ступеньке. Поскольку плоскость ступени параллельна земле тени на них параллельны друг другу. По построению тень верхней точки ребра $[AB]$ попадает на первую ступень – точка b_T .

Определим тень ребра – *гвоздя* $[CD]$. Поскольку точка $D(d, d')$ находится на стене точка $d' = d'_T$. Тень этого отрезка на стене (до точки 1) и подступеньке – след лучевой фронтально-проецирующей плоскости, идущий под углом 45° к оси X . Конечная точка $C(c, c')$ этого ребра отбросила тень на верхний подступенок. Это точка c'_T .

Тени ребра $[CD]$ на стене и верхнем подступеньке параллельны, поскольку параллельны их плоскости.

Через наклонное ребро $[BC]$ проходит лучевая плоскость общего положения. Определим мнимую тень точки $C(c, c')$ на первой ступеньке. Проведем через эту точку луч и отметим точку пересечения $c_{1T(\phi)}$. Затем соединим точки b_T и $c_{1T(\phi)}$ и отметим точку z_T на линии пересечения первой ступеньки и второго подступенка. На фронтальной проекции этой линии определим точку z'_T . Действительной частью тени отрезка $[BC]$ на первой ступеньке будет отрезок $[b_T z_T]$.

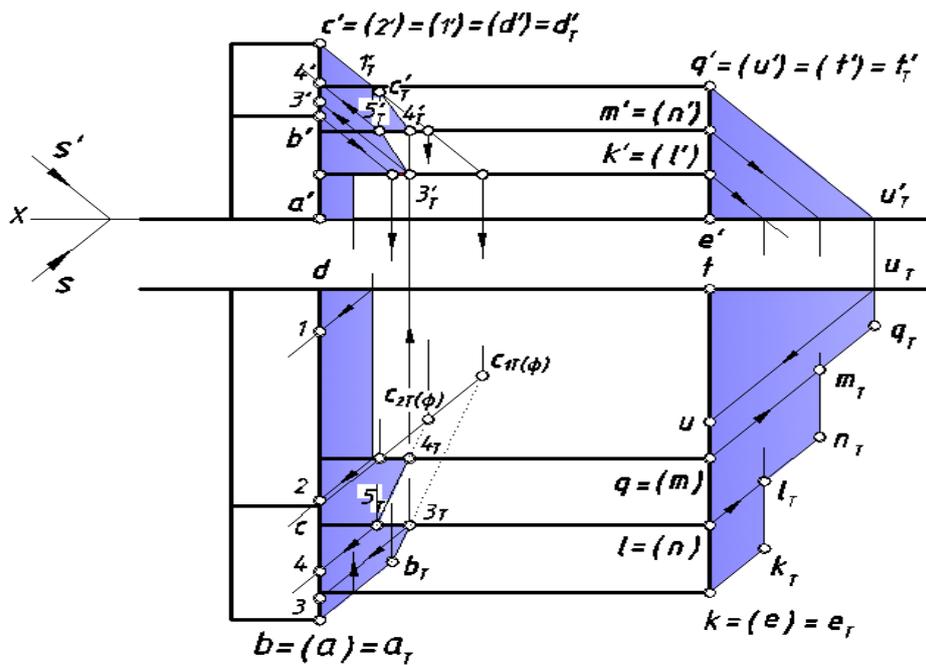


Рис. 66. Построение теней на ступени от наклонного барьера.

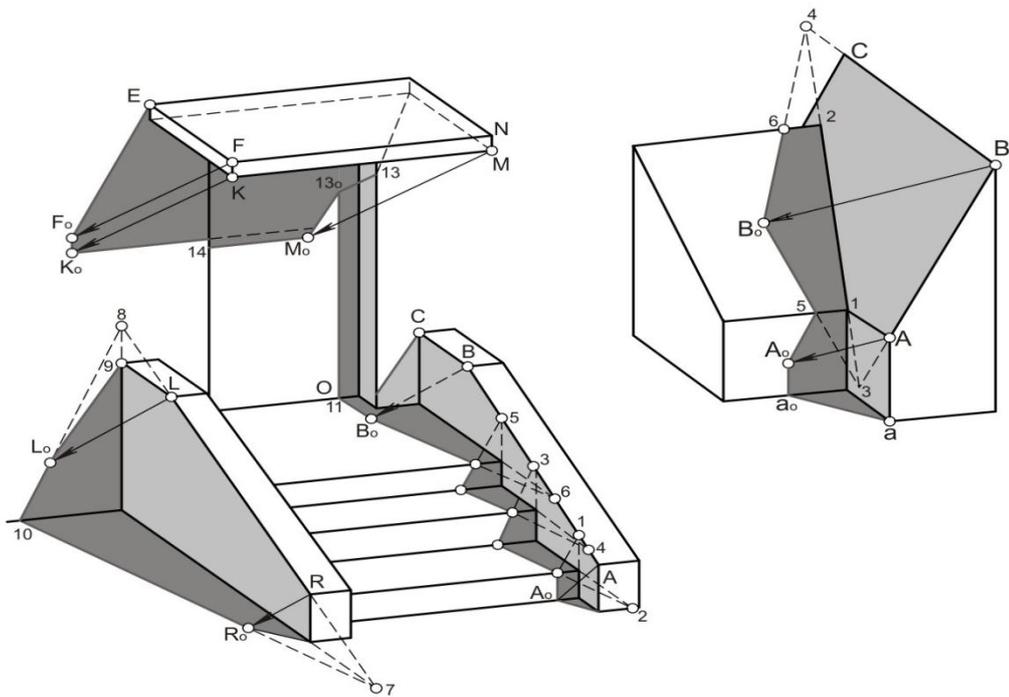


Рис. 67. Тени наклонного барьера на лестнице в аксонометрии.

Определим мнимую тень точки C (c, c') на второй ступеньке – точку $c_{2T(\phi)}$. Тени, отбрасываемые ребром $[BC]$ на параллельные ступени, будут параллельны между собой на основании свойства параллельных проекций. Поэтому через точку $c_{2T(\phi)}$ следует провести прямую, параллельную отрезку $[b_T 3_T]$, зафиксировать

точки 4_T и $4_T'$ и отметить реальную часть тени ребра $[BC]$ на второй ступеньке – отрезок $[4_T 5_T]$.

Построим точку $5_T'$. Соединив ее с точкой $3_T'$, получим действительную тень ребра $[BC]$ на втором подступенке.

На подступенках, как на параллельных плоскостях, тени отрезка $[BC]$ также будут параллельны. Поэтому для определения тени на третьем подступенке проведем через точку $4_T'$ прямую, параллельную отрезку $[3_T' 5_T']$. На этой прямой окажется действительная тень точки C по построению.

Точки 1, 2 и 3, найденные с помощью обратных лучей, позволяют определить, какие части ребер $[AB]$, $[BC]$ и $[CD]$ отбросили свои тени на конкретные фрагменты лестницы.

7.6. ТЕНЬ ТРУБЫ

Задача 1

Построить тени труб на крыше здания (рис. 68).

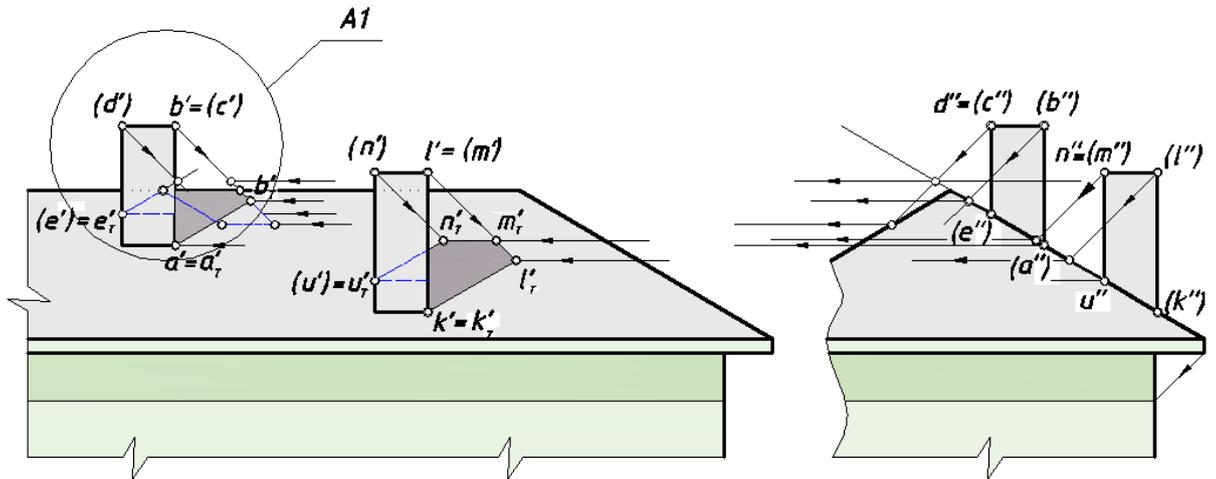
Вначале определим тень нижней трубы и контур ее собственной тени. При заданном направлении S светового потока неосвещенными окажутся правая, нижняя и задняя грани трубы. Потому ее контур собственной тени будет представлять пространственную линию, состоящую из цепочки ребер $[KL] - [LM] - [MN] - [NU]$, переднего нижнего ребра и левого ребра, совпадающего с плоскостью крыши (последние ребра не обозначены на чертеже).

Заметим, что тень этой трубы падает на ту часть крыши, которая является профильно-проецирующей плоскостью, поэтому на профильной проекции тень располагается на ее следе.

Найдем тень ребра $[KL]$. Поскольку точка K (k, k') расположена на крыше, можно отметить, что $k' = k'_T$. Для нахождения следа лучевой плоскости, проходящей через это ребро, определим тень верхней точки *столба* (точки L (l, l')). Проведем через эту точку луч и отметим точку его пересечения с профильно-проецирующей плоскостью – точку l'_T . Соединив точки k'_T и l'_T , завершим построение тени. Рассуждая аналогичным образом, найдем падающие тени остальных ребер, входящих в состав контура

собственной тени. Считая трубу непрозрачной, покажем в учебных целях часть контура падающей тени штриховой линией.

Тень верхней трубы падает на два плоских участка крыши, что следует из профильной проекции.



A1 (2.5:1)

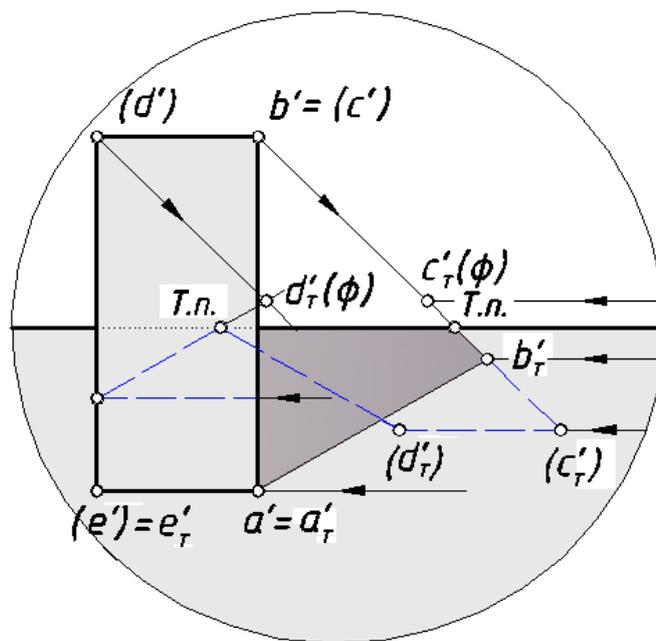


Рис. 68. Тени труб на крыше фасада здания.

Контур собственной тени верхней трубы будет идентичен контуру нижней трубы. При нахождении падающей тени на верхнем ребре крыши необходимо построить точку преломления, определив предварительно мнимую тень $c'_T(\phi)$. Остальные моменты построения хорошо видны на выносном элементе рисунка.

направлению S . Эта плоскость пересечет скат крыши по прямой ($12, 1'2'$). Луч, проходящий через точку L , расположен в этой же плоскости, поэтому пересечет построенную линию в точке (l_T, l_T'), которая будет ее падающей тенью. Соединив одноименные проекции точек k_T и l_T , а также k'_T и l'_T получим две проекции тени ребра $[KL]$ на скате крыши. Через другие вертикальные ребра проводим плоскости, параллельные P и, рассуждая аналогичным образом, определяем очертание падающей тени трубы на обеих проекциях.

7.7. ТЕНЬ ОТ ОДНОГО ФРАГМЕНТА ЗДАНИЯ НА ДРУГОЙ

Построение тени козырька на стену здания и в нишах было рассмотрено ранее.

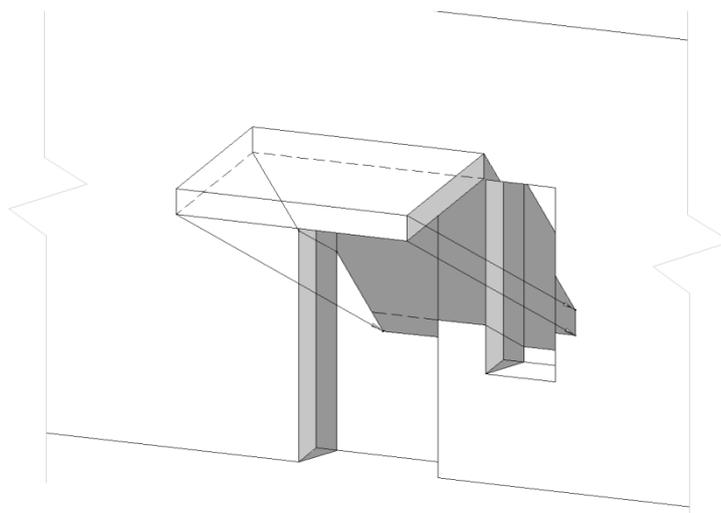


Рис. 70. Тень от козырька в двух нишах.

В случае, приведенном на рис. 70, нижнее ребро козырька отбрасывает тень на окно. Поскольку задние грани ниш и стена параллельны, то параллельны и их тени. Следует отметить, что глубины двух ниш одинаковы, поэтому их тени находятся на одном уровне.

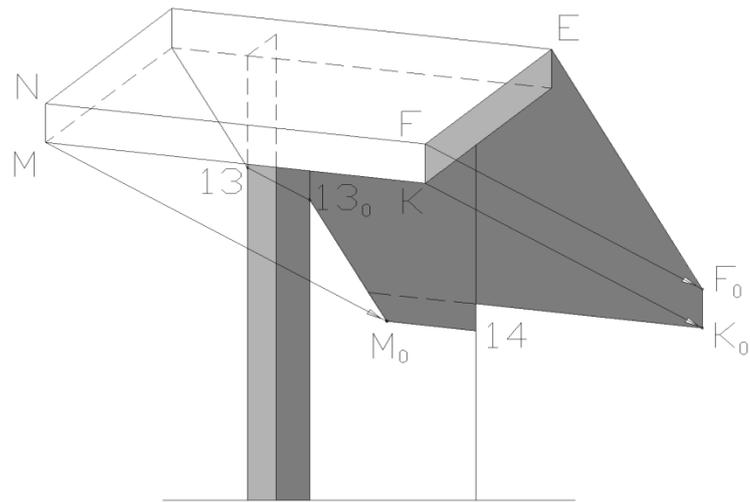


Рис. 71. Тень козырька на стене и в нише.

Тени от козырька над входом построены на рис. 71. Контур собственной тени проходит через точки $BACDEFB$. Так как прямая AB перпендикулярна к плоскости T и пересекает ее в точке B , тень от нее совпадает с проекцией луча на плоскости T и проходит через точки B и A_T (последняя находится в пересечении луча света, проведенного через точку A , с плоскостью T). Тени от прямых AC и CD , параллельных плоскости T , параллельны указанным прямым. Тень от точки D падает не на плоскость стены T , а на плоскость ниши R . Тень от прямой DE проходит через точки D_R (на аксонометрии не видна) и E и совпадает с проекциями луча на плоскости T и R .

На рис. 72 тень выступа здания отбрасывает тень на стену и окно. Контуры падающей тени на этих фрагментах одинаковы, т.к. они параллельны между собой и смещены относительно друг друга вглубь ниши в направлении S (мнимая тень на стене в области окна показана точечной линией).

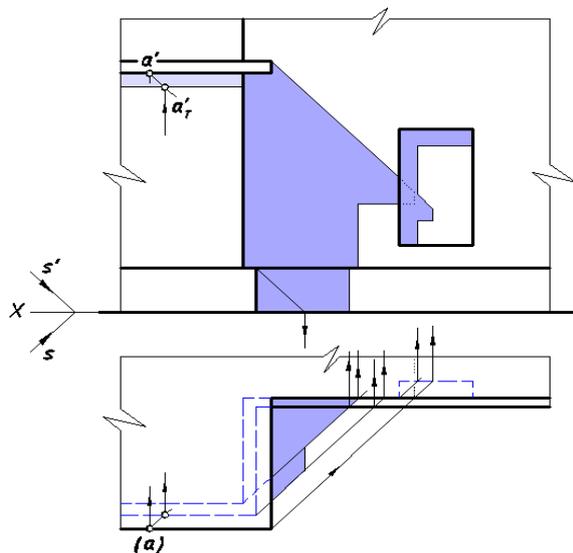


Рис. 72. Тень выступа здания

Частично тень выступа здания оказалась на земле. Ребро выступа, параллельное ей, отбрасывает тень в виде параллельного отрезка. Тени вертикальных его ребер представляют собой следы лучевых плоскостей, расположенных под углом 45° к оси X .

7.8. ТЕНЬ ЗДАНИЯ

Рассмотрим построение собственных и падающих теней схематизированного здания. Ранее было приведено большое количество примеров определения теней геометрических тел и наиболее распространенных фрагментов здания, поэтому если Вы разобрались во всех приведенных рассуждениях и построениях в предыдущих разделах, то легко прочтаете чертеж, приведенный на рис. 73. При изучении раздела начертательной геометрии по теории теней студенты выполняют эпюры здания в ортогональных проекциях и перспективе с изображением собственных и падающих теней и отмывкой.

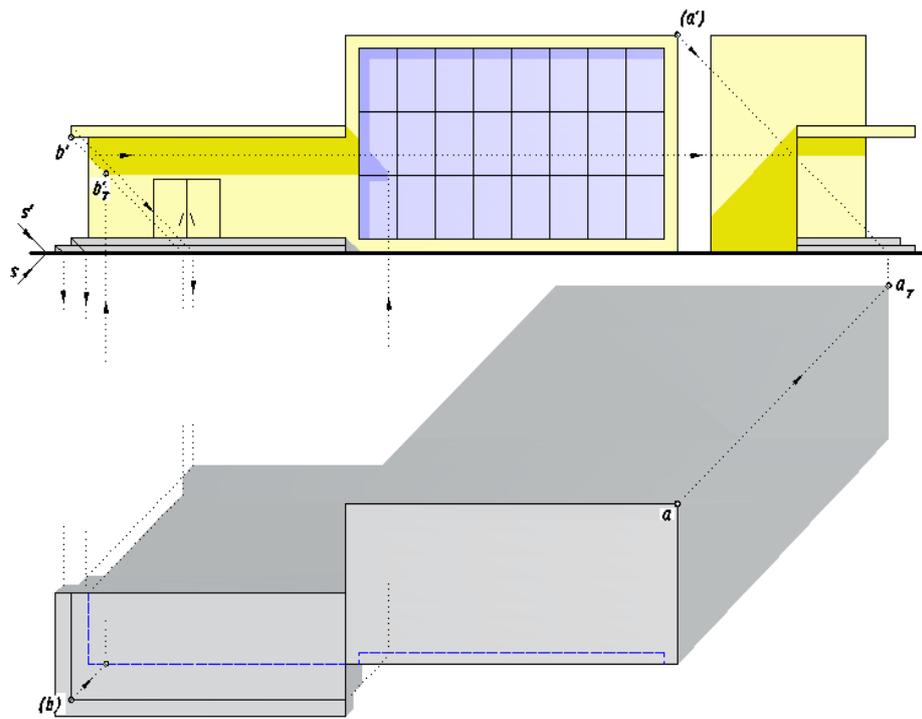


Рис. 73. Собственные и падающие тени здания

Дадим некоторые рекомендации по компоновке эпюра в ортогональных проекциях на листе бумаги. В зависимости от формы и размеров здания выбираем необходимый формат с горизонтальным или вертикальным расположением. Поскольку придется строить тень здания на земле, то нужно расположить главный вид и сверху (в проекционной связи) на достаточном расстоянии так, чтобы очертание тени на земле не пересекало бы изображение фасада. Для этого следует отметить точку a' , построить фронтальную проекцию луча до пересечения с жирной чертой (землей), провести вертикальную линию связи, на которой взять произвольную точку a_7 ниже жирной черты, построить горизонтальную проекцию луча, на которой в проекционной связи с точкой a' зафиксировать точку a , а затем уже вычерчивать вид сверху. Построения такого рода показаны на рисунке выше точечными линиями. Вспомогательные линии на изображениях следует удалить.

Выполнение графической работы может осуществляться вручную или машинным способом. Ранее говорилось о том, что эпюр выполняется с отмывкой. Отмывка вручную – это очень трудоемкий и долгий процесс. Совсем непросто отмыть большой по площади участок бумаги так, чтобы цветовая гамма была равномерной.

7.9. ВЫПОЛНЕНИЕ ОТМЫВКИ ВРУЧНУЮ

- Взять кусок ваты, смочить водой, хорошо отжать и протереть весь лист бумаги для того, чтобы удалить жировой слой.
- Лист бумаги положить на плоскость (доски, стола или картона), установленную под углом 20 ...25°.
- Отмывка выполняется тушью (лучше сухой). Можно применять акварель или гуашь.
- Тушь растирается в фарфоровой тарелочке и фильтруется через вату. В обычную тушь добавляется вода. Раствор должен быть негустым (слабым).
- Отмывка производится мягкими кистями (беличьими, колонковыми, хорьковыми). В крайнем случае, можно применить вату, намотанную на палочку или заточенный карандаш, и привязать ее нитками.
- Для проведения отмывки кроме сосуда с раствором нужно иметь стакан с водой и лист бумаги для пробы насыщенности раствора.
- При отмывке нельзя пользоваться ластиком, т.к. на стертую поверхность плохо ложится раствор.
- Раствором покрывается все изображение кроме освещенных мест.
- Каждый *новый* слой отмывки делается после того, как подсохнет *предыдущий*.
- В зависимости от желаемого тона следует наносить разное количество покрытий.
- Отмывка делается слева направо (проводится одно движение кистью, одна полоска). Внизу на полоске должен оставаться наплыв в виде небольшого валика. Следующая полоска захватывает после себя этот наплыв и оставляет новый. И так делается до конца изображения сверху вниз.
- В конце работы наплыв убирается отжатой кистью.

8. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРСПЕКТИВЕ

8.1. АППАРАТ ЛИНЕЙНОЙ ПЕРСПЕКТИВЫ

Перспектива – изображение, построенное на основе центрального проецирования. Такие изображения более наглядны по сравнению с аксонометрическими. Объясняется это тем, что аппарат центрального проецирования наиболее близок к аппарату зрительного восприятия.

Способы изображения формы предметов независимо от их физических качеств изучаются в разделе начертательной геометрии, называемом *геометрической перспективой*.

Геометрическая перспектива делится на:

1. *линейную* (изображение строится на вертикальной плоскости);
2. *панорамную* (на цилиндрической поверхности);
3. *купольную* (на внутренней поверхности сферы);
4. *плафонную* (на горизонтальной плоскости).

В предлагаемой работе будет рассматриваться только линейная перспектива.

несобственная прямая и несобственная плоскость. Такое пространство называется *проективным*.

Если в Евклидовом пространстве параллельные прямые не пересекались, то в проективном – параллельные прямые образуют *пучок* с общей несобственной точкой (центром пучка).

Представим, что на предметной плоскости расположено множество прямых линий различного направления по отношению к картине. У каждой такой прямой есть своя несобственная точка. Множество таких точек образует бесконечно удаленную прямую плоскости T .

Лучи зрения, проходящие через точку S и каждую несобственную точку прямой, образуют плоскость, параллельную предметной. Такая плоскость называется *плоскостью горизонта* и пересекает картину по прямой $h - h$ – *линии горизонта*. Поэтому эту линию можно считать перспективой несобственной прямой.

Построим перспективу заданной прямой. Известно, что любая прямая определяется парой несовпадающих точек. Одну из таких точек можно определить, если продолжить данную прямую до пересечения с картиной (точку A_0). Назовем эту точку «*начальной точкой прямой*».

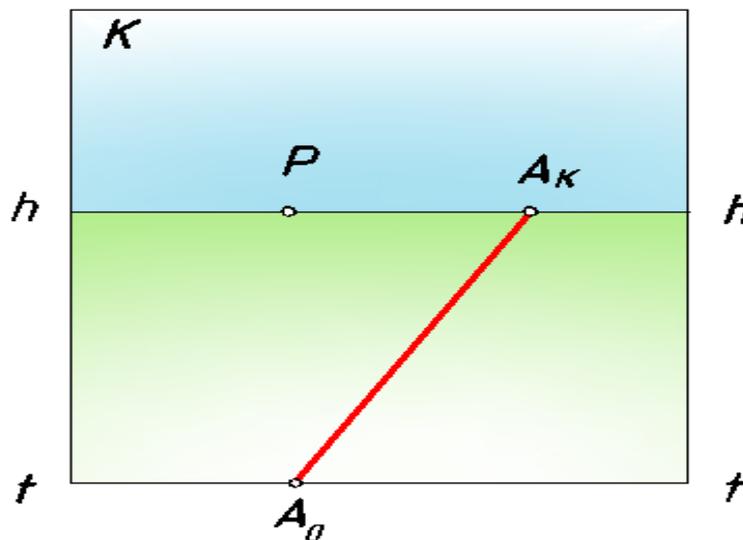


Рис. 75. Перспектива прямой, лежащей в предметной плоскости

Затем определим перспективу бесконечно удаленной точки A_∞ , проведя через точку S и эту точку луч, параллельный предметной плоскости. Пересечение луча с картиной определит точку A_K . Назовем ее *предельной* или *точкой схода прямой*, или «*конечной точкой*» прямой. Соединив точку A_K с точкой A_0 получим перспективу данной прямой, изображенную конечным отрезком $[A_0 A_K]$ на рис. 75.

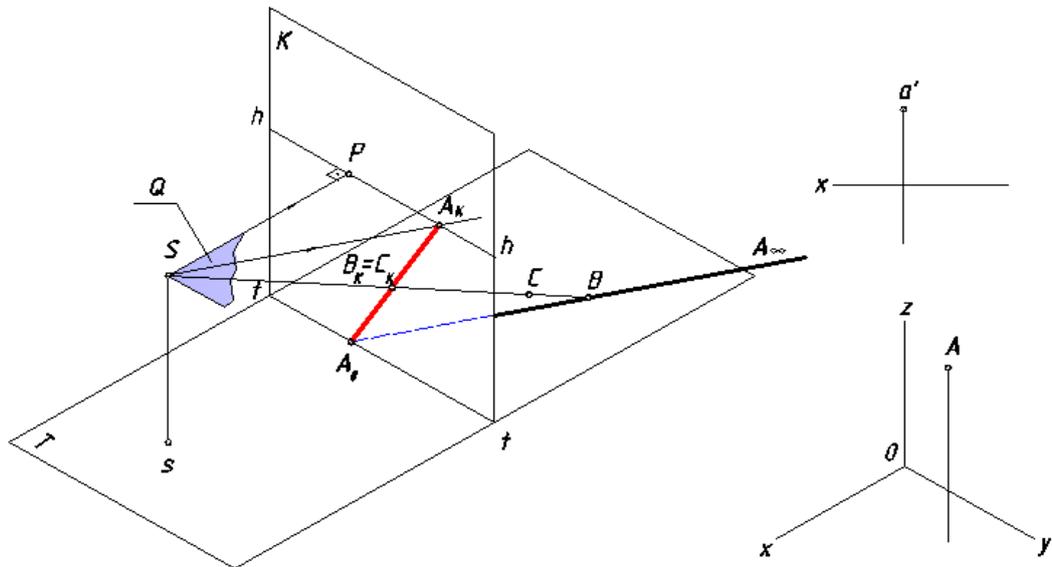


Рис. 76. Неопределенные чертежи

Если на этой прямой взять случайную точку B и провести через нее луч, то перспектива точки (точка B_K) определится пересечением луча с картиной и будет принадлежать отрезку $[A_0 A_K]$. Но с этой же точкой совпадают перспективы всех точек проведенного луча (например, точки C) и т.о. приведенный чертеж становится неопределенным. На рис. 76 приведены примеры чертежей такого рода и в параллельных проекциях.

Поэтому и в центральных проекциях, также как и в параллельных для однозначного прочтения любого геометрического объекта требуется наличие двух его проекций, которые полностью определяют его положение в пространстве и позволят решать как метрические, так и позиционные задачи.

Поступим следующим образом: возьмем за картинной плоскостью точку A (оригинал) с ее *вторичной* проекцией на предметной плоскости – точкой a (рис. 77). Из точки зрения проведем луч в эту точку. Луч и отрезок $[Ss]$ задают плоскость,

перпендикулярную T , на основании признака перпендикулярности двух плоскостей. Построим линию пересечения проведенной плоскости и плоскости K . Поскольку обе плоскости перпендикулярны T , их линия пересечения будет вертикальной прямой.

Отметим на ней точку a_0 . Пересечение проведенного луча с этой прямой определит перспективу точки A – точку A_K . Построим перспективу вторичной проекции a , проведя луч из точки S в эту точку. Точка пересечения луча с картинной плоскостью a_K – перспектива вторичной проекции точки (*точки на земле*).

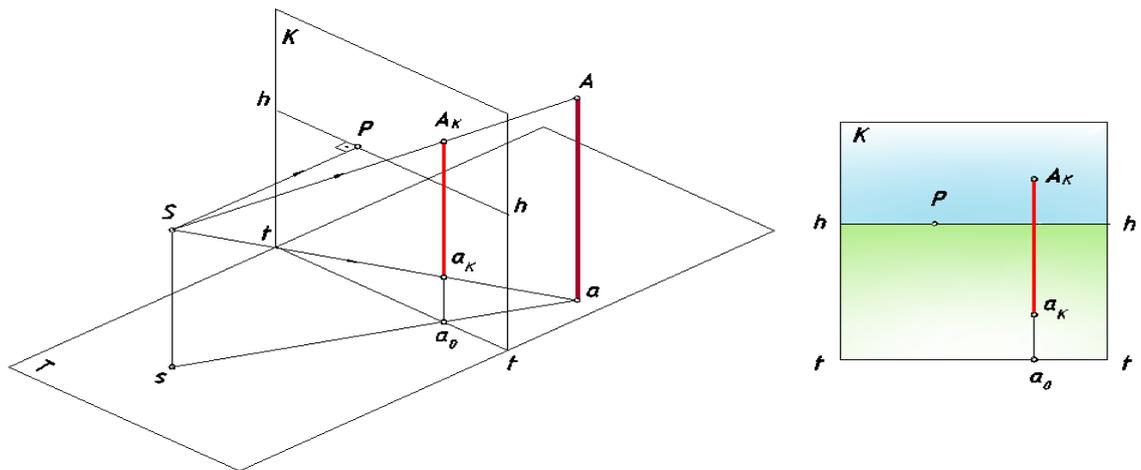


Рис. 77. Вертикальная прямая в перспективе

8.2. ПЕРСПЕКТИВА ПРЯМЫХ ЛИНИЙ

Заметим, что в линейной перспективе принято допущение: **прямые, параллельные картине, точек схода не имеют.**

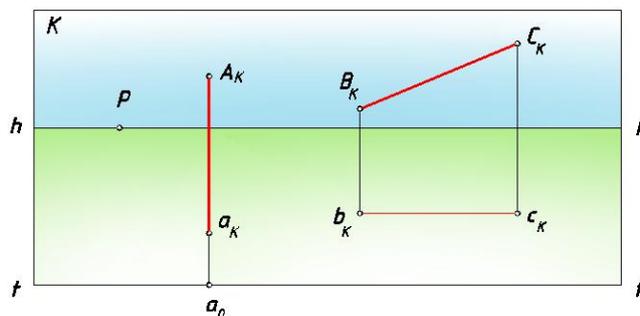


Рис. 78. Перспективы прямых, параллельных картине

Рисунок, приведенный выше, иллюстрирует это положение.

Рассмотрим *перспективу пучка параллельных прямых произвольного направления*, параллельных предметной плоскости.

Пучок – это множество прямых, проходящих через данную точку. В проективном пространстве эта точка может быть *несобственной* (бесконечно удаленной).

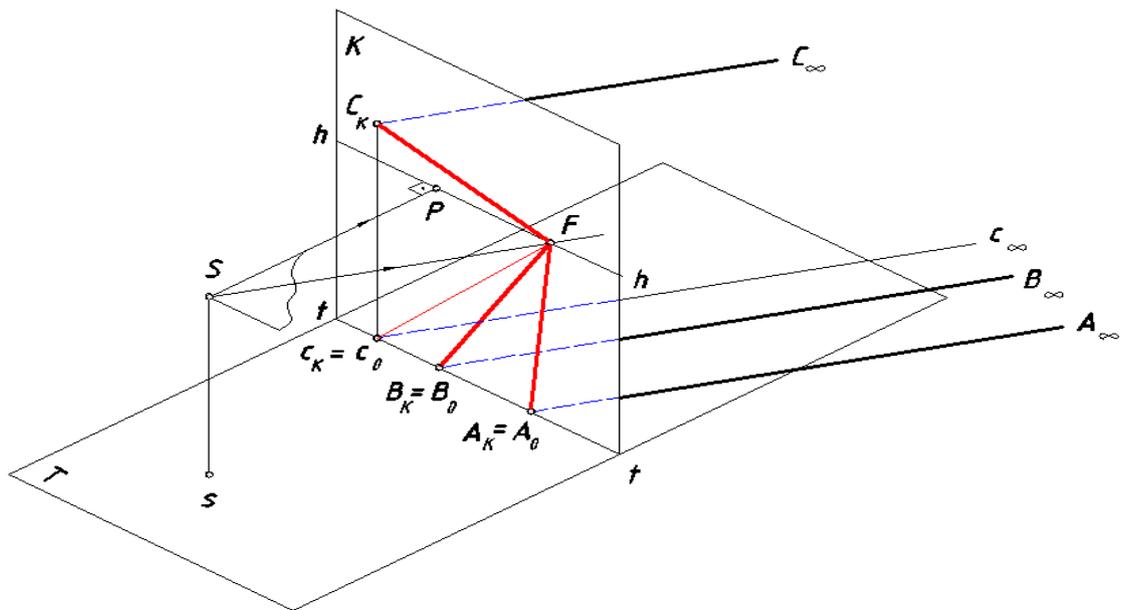


Рис. 79. Пучок параллельных прямых произвольного направления

На рис. 79 изображены параллельные прямые произвольного направления, две из которых расположены в предметной плоскости, а третья ей параллельна. Ранее отмечалось, что перспективу прямой линии можно построить по двум точкам: *начальной* и *конечной*.

Начальные точки всех прямых и их вторичных проекций отмечены на рисунке выше (это точки пересечения прямых с картиной). Поскольку все данные прямые параллельны, то в проективном пространстве у них есть общая бесконечно удаленная точка. Для построения ее перспективы через точку *S* проводим луч в эту точку (на приведенном изометрическом рисунке он параллелен этим прямым) и отмечаем точку его пересечения с картиной – это перспектива общей несобственной точки данных прямых или *точка схода* прямых.

Соединив начальные точки данных прямых с *точкой схода F*, получаем изображение пучка прямых на картине (рис. 80).

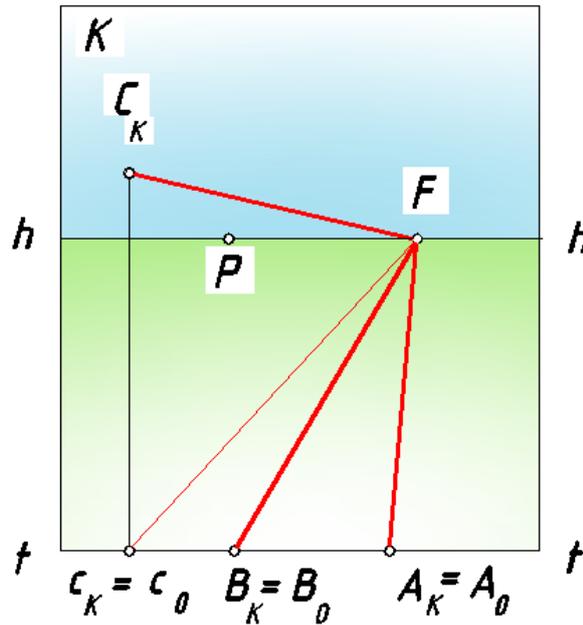


Рис. 80. Картина пучка параллельных прямых произвольного направления

На рис. 81 представлено наглядное изображение прямых линий, перпендикулярных картине.

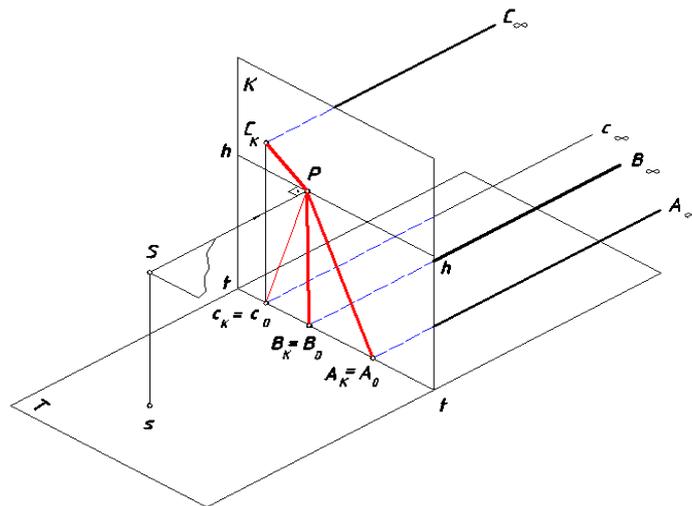


Рис. 81. Пучок прямых, перпендикулярных картине

Как и в предыдущем случае, у этих прямых существует общая несобственная точка. Для нахождения ее перспективы через точку *S* проводим луч, параллельный этим прямым, в эту бесконечно

удаленную точку. Пересечение проведенного луча с картиной происходит в точке P – *главной точке картины*, которая является точкой схода этих прямых. Соединяем начальные точки прямых с точкой P и получаем перспективное изображение этих прямых (рис. 82).

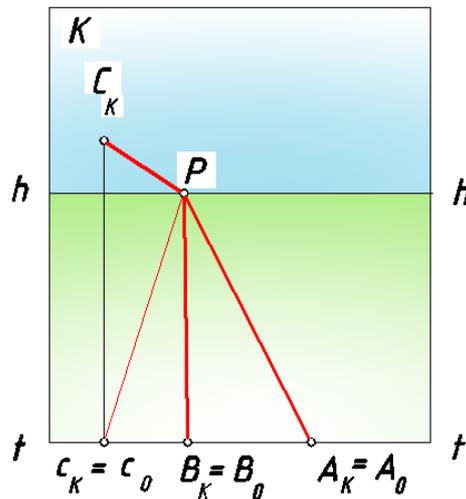


Рис. 82. Перспектива пучка прямых, перпендикулярных картине

Сравним рисунки, представленные ниже. На каждом из них изображена плоская фигура, выделенная темным оттенком. На рис. 83, *а* она представляет собой прямоугольник, а на рис. 83, *б* – параллелограмм.

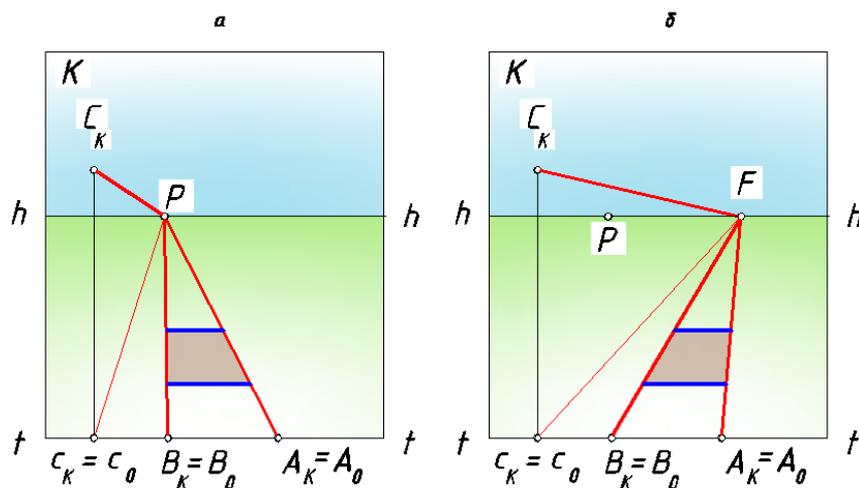


Рис. 83. Рисунки плоских фигур

Введем понятия *восходящих* и *нисходящих* прямых линий.

Восходящими называются прямые, которые идут, возвышаясь от картины. Поэтому, каждая следующая за картиной точка, взятая на прямой, имеет большую высоту, чем предыдущая. *Нисходящие* прямые идут, понижаясь от картины.

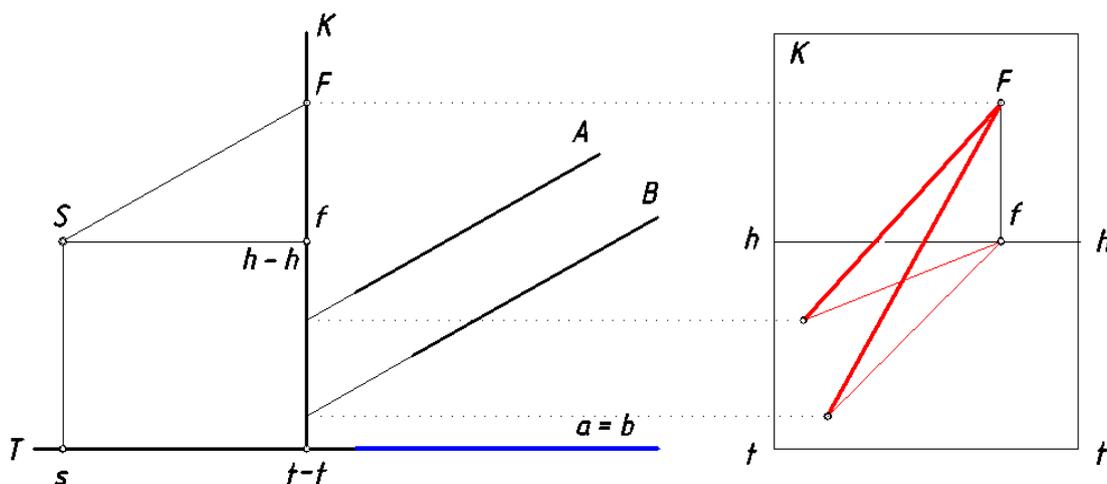


Рис. 84. Восходящие прямые

На рис. 84 слева показаны две параллельные восходящие прямые (картина и предметная плоскость изображены двумя перпендикулярными линиями). Из этого чертежа наглядно следует только то, что данные прямые являются восходящими, но полной информации об этих линиях не дано. Тем не менее, из рисунка следует, что точка схода этих прямых (точка F) расположена выше линии горизонта. Вторичные проекции этих линий лежат на предметной плоскости. Поскольку предметная плоскость отображена прямой линией – вторичные проекции прямых на рисунке совпадают. Вторичные проекции линий параллельны на основании свойства параллельных проекций, их точка схода f находится на линии горизонта. На рис. 84 справа хорошо видно, что точки F и f находятся в проекционной связи на перпендикуляре к линии $h - h$. Заметим, что этот рисунок иллюстрирует перспективу случайных восходящих параллельных прямых и не имеет прямой связи с рисунком слева. Изображенные прямые занимают в пространстве общее положение. Если параллельные восходящие прямые будут параллельны воображаемой плоскости, перпендикулярной одновременно плоскостям T и K , то точкой схода их вторичных проекций будет главная точка картины P , а сами прямые сойдутся на перспективном чертеже в точке F , находящейся выше линии горизонта, в проекционной связи с точкой P .

Проведем через точки M_0 и N_0 вспомогательные прямые в предметной плоскости под углом 45° к оси X . Эти прямые называются *линиями переноса*. Отметим на оси Y точки A и B . Поскольку ось Y перпендикулярна картине, ее точка схода находится в точке P , а начальная точка находится в начале координат. Перспектива оси Y на картине отобразилась отрезком $[OP]$.

Начальными точками линий переноса являются точки M_0 и N_0 . Построим перспективу их общей несобственной точки. Для этого через точку S проведем в нее луч, который пересечет картину в точке D на линии горизонта. Соединив начальные точки с точкой D , получим перспективы линий переноса. На пересечении построенных перспектив определим точки A_K и B_K .

Точка D называется *дистанционной*. Поясним, почему она носит такое название. Из построений, приведенных на рис. 85, следует подобие треугольников AOM_0 и SPD_1 . Кроме того, оба треугольника – прямоугольные и равнобедренные, поэтому $[SP] = [PD_1]$. Отрезок $[SP]$ это *дистанция* между наблюдателем и картиной, и отрезком $[PD_1]$ она зафиксирована на линии горизонта на картине. На рисунке выше обозначены две дистанционные точки D_1 и D_2 , которыми можно пользоваться при построении перспективных изображений.

Если требуется отложить равные отрезки на *глубинной* прямой (прямой, перпендикулярной K), следует поступать так, как показано на рис. 86.

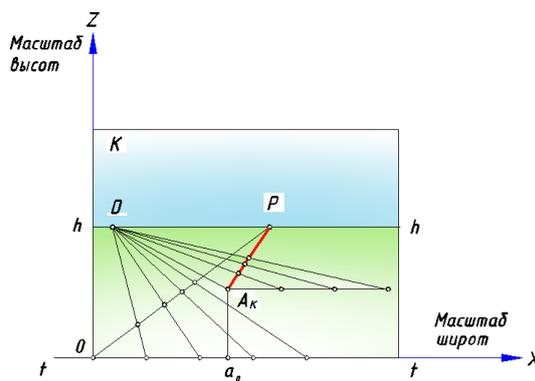


Рис. 86. Построение масштаба на глубинной прямой

Масштаб, построенный на прямой, параллельной основанию картины, называется *масштабом широт*. Построение масштаба широт показано на рис. 87. Для примера изображены перспективы прямых, находящихся на и вне предметной плоскости.

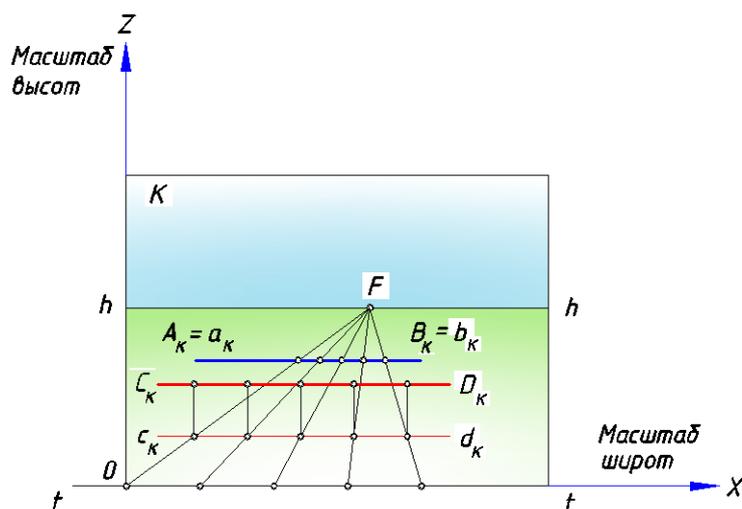


Рис. 87. Построение масштаба на прямой широт

Масштаб, построенный на прямой, перпендикулярной предметной плоскости, называется *масштабом высот* (рис. 88).

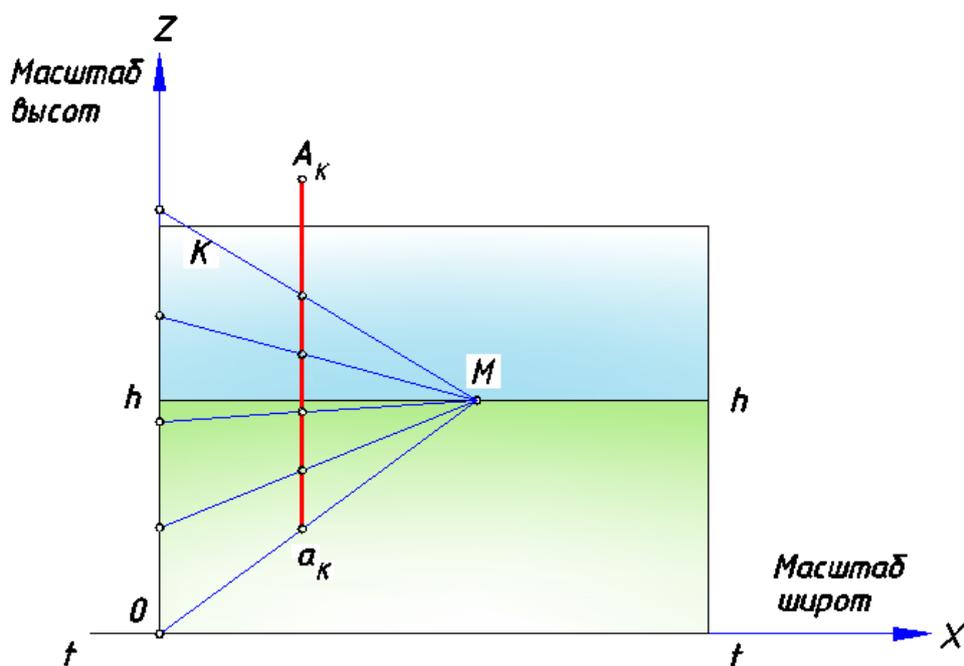


Рис. 88. Построение масштаба на прямой высот

Рассмотрим построение перспективного *масштаба на прямой общего положения*.

Пусть на предметной плоскости расположена прямая общего положения (рис. 89). Определим начальную точку прямой A_0 и ее точку схода F . На картине отрезок $[A_0F]$ является перспективой этой прямой. От точки A_0 отложим натуральный масштаб (равные отрезки). Через построенные точки в предметной плоскости проведем линии переноса, отсекающие на данной прямой отрезки, равные построенным на линии $t-t$. Это начальные точки линий переноса. Точка схода этих линий – точка M . Соединив точки $1_0, 2_0$ и 3_0 с точкой M , получим перспективные изображения линий переноса. Пересечение построенных линий с отрезком $[A_0F]$ зафиксирует отрезки перспективного масштаба на прямой общего положения. Заметим, что на рисунке ниже треугольники A_01_01' и SFM подобны и равнобедренны по построению, поэтому отрезки $[SF]$ и $[FM]$ равны. Совместим треугольник SFM с плоскостью картины, вращая его вокруг линии горизонта. Тогда отрезок $[S_1P]$ на картине будет равен отрезку $[SP]$.

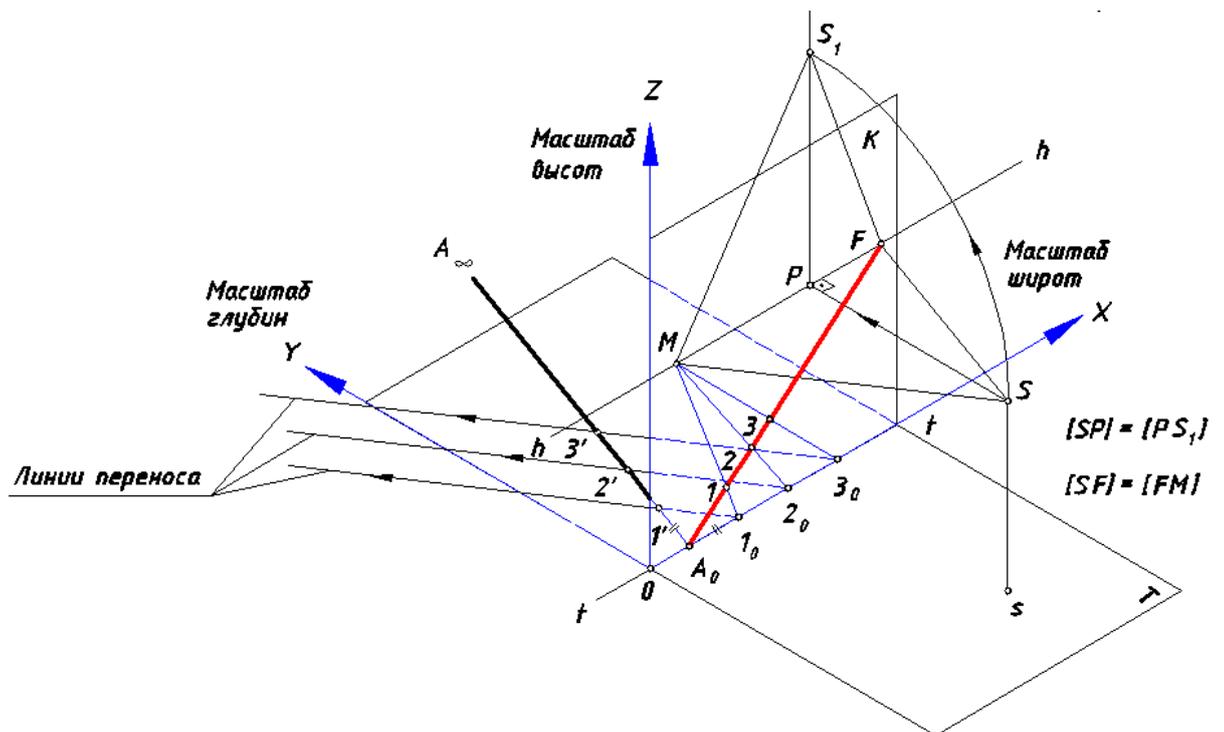


Рис. 89. Построение масштаба на прямой общего положения

При построении перспективы объекта может возникнуть необходимость построения перспективного масштаба на прямой

На рис. 91. построена перспективная сетка, с помощью которой можно определять координаты точек какого-либо объекта и его размеры.

Рассмотрим некоторые метрические и позиционные задачи, связанные с использованием перспективных масштабов.

Задача 1

По заданному перспективному изображению определить координаты точки A (рис. 91).

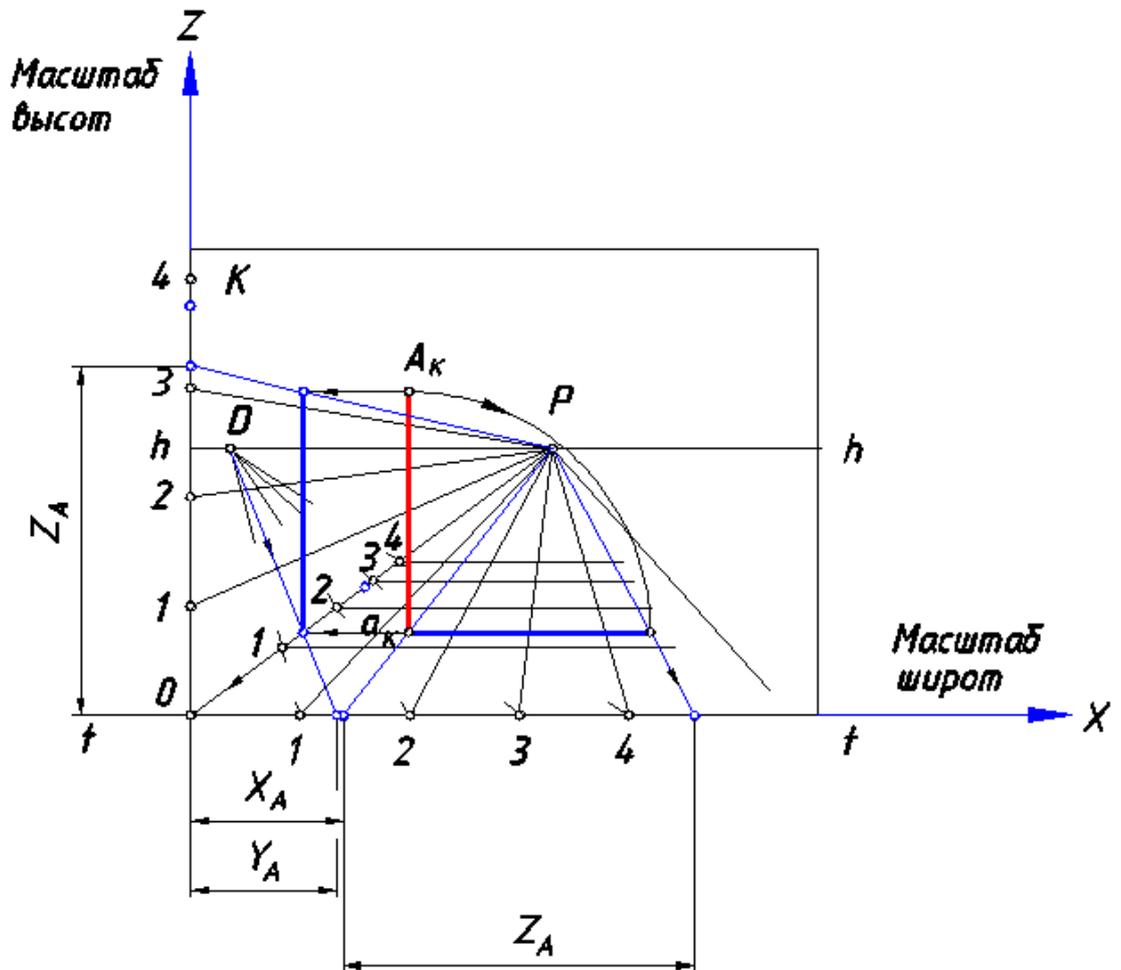


Рис. 91. Перспективная сетка

Опустив из точки a_k в предметной плоскости перпендикуляр на ось X (линия построения пройдет через точку P), определим абсциссу X_A . Проведем на картине перпендикуляр к оси Y (отрезок $[OP]$) и отметим точку пересечения с ней. С помощью дистанционной точки D и линии переноса определим натуральную величину ординаты Y . Аппликата Z_A найдена двумя способами. В

одном случае перспектива аппликаты сдвинута в указанном направлении в картинную плоскость. В другом – использовано свойство равенства перспективных масштабов высот и широт в любой плоскости, параллельной картине.

Задача 2

Определить натуральные величины данных отрезков по их перспективным изображениям, если на линии горизонта задана точка P (рис. 92).

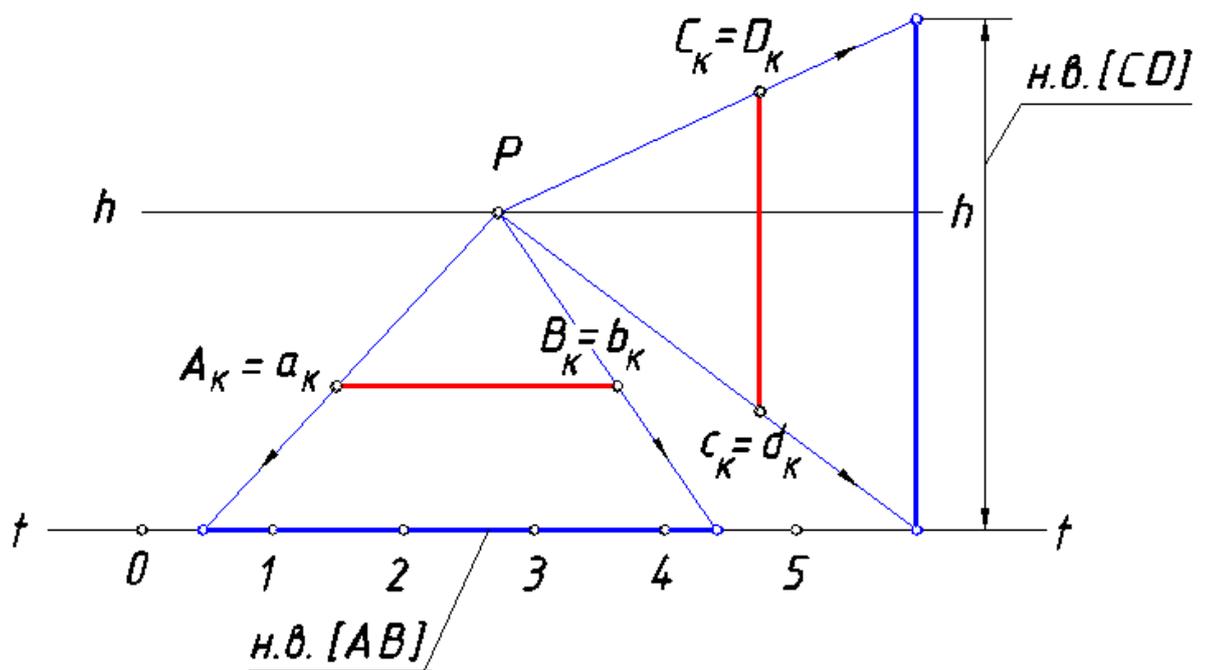


Рис. 92. Определение натуральных величин отрезков прямых, параллельных картине

Задача 3

Определить натуральную величину отрезка прямой общего положения. На линии горизонта заданы точки P и D (рис. 93).

Задача 4

Разделить отрезок нисходящей прямой на три части (рис.95).

Используем для решения поставленной задачи теорему Фалеса. Проведем через точку a_K (или b_K) линию широт, на которой отложим три любых, но равных между собой отрезка. Соединим последнюю точку 3 с точкой b_K . Определим точку схода F прямой, содержащей эти точки. Построим прямые, ей параллельные, проходящие через точки 1 и 2. Отметим точки деления на перспективе вторичной проекции данного отрезка. С помощью вертикальных прямых, на основании той же теоремы, найдем искомые точки деления.

Заметим, что при построении перспективы различных архитектурных элементов, расположенных на одинаково небольших расстояниях (таких как ограда, решетка, перила и т. д.) часто применяются геометрические приемы, основанные на теореме Фалеса.

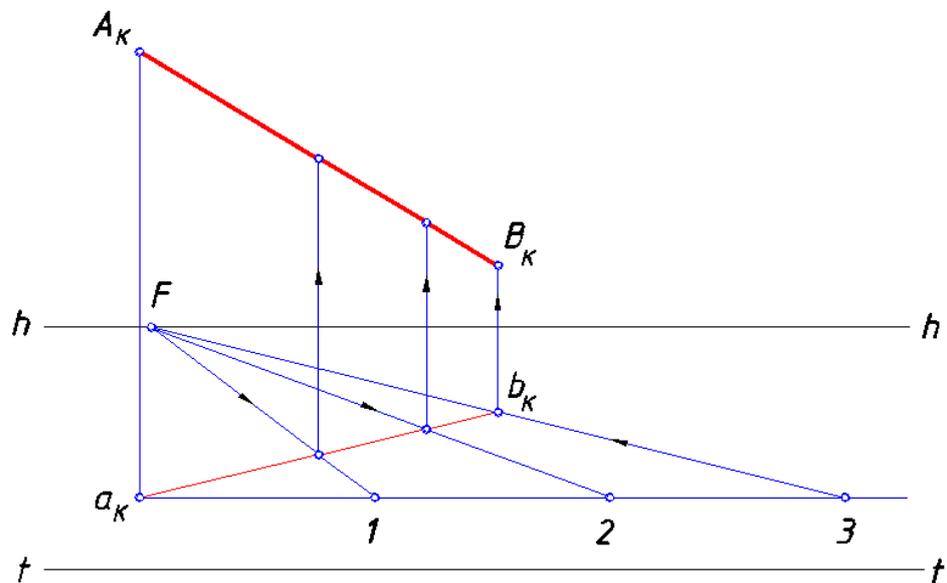


Рис. 95. Деление отрезка на равные части

Задача 5

Увеличить отрезок восходящей прямой в три раза (рис. 96 и 97).

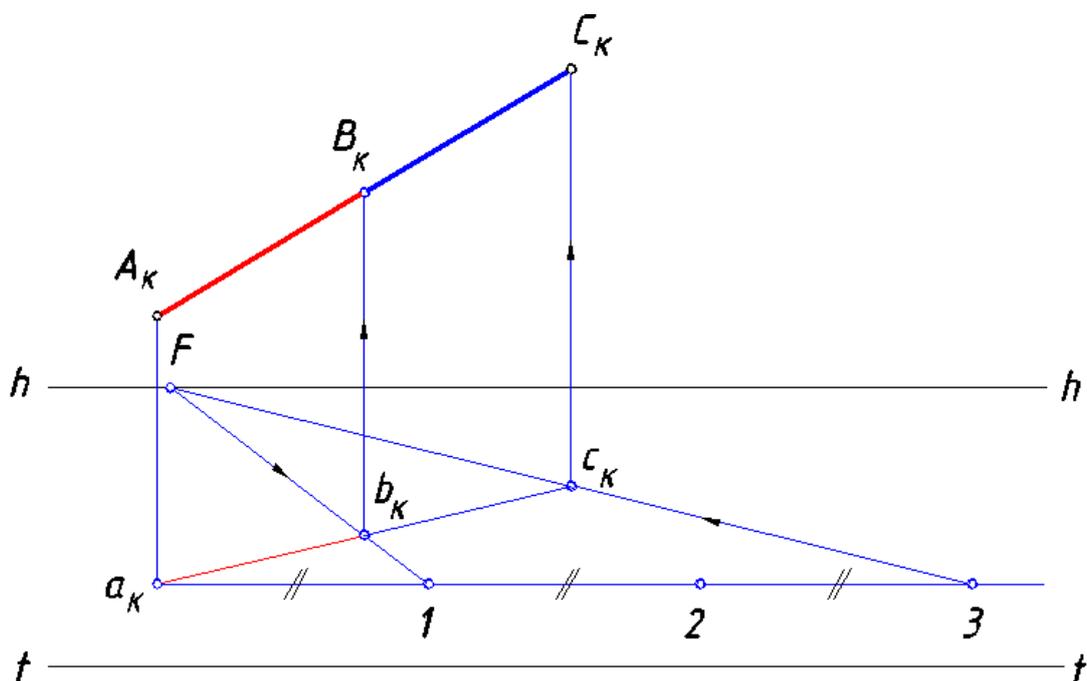


Рис. 96. Первый вариант решения задачи 5

Построим прямую широт, проходящую через точку a_K .

На линии горизонта выберем произвольную точку F линий переноса, с помощью которой перебросим перспективу вторичной проекции отрезка на линию широт. Отметим на ней точку 1 , и отложим от нее два отрезка, равных $[a_K 1]$. Через точку 3 проведем линию переноса и на продолжении отрезка $[a_K b_K]$ определим точку c_K . Перспектива вторичной проекции отрезка увеличилась в три раза. Проведя через точку c_K вертикальную прямую до пересечения с перспективой отрезка, найдем точку C_K . Все построения выполнены в соответствии с теоремой Фалеса.

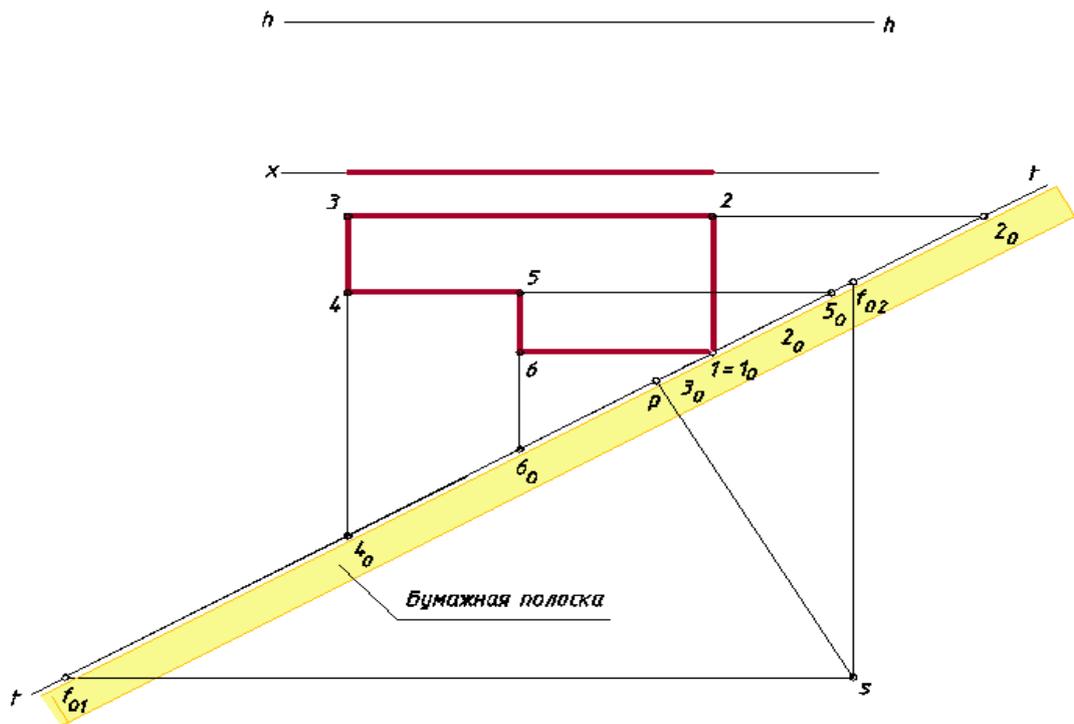


Рис. 98. Плоская фигура (план здания)

Существует множество способов построения перспективных изображений. Решим поставленную задачу **методом архитекторов**, который удобно применять в том случае, если изображение содержит семейства параллельных прямых.

Примечание.

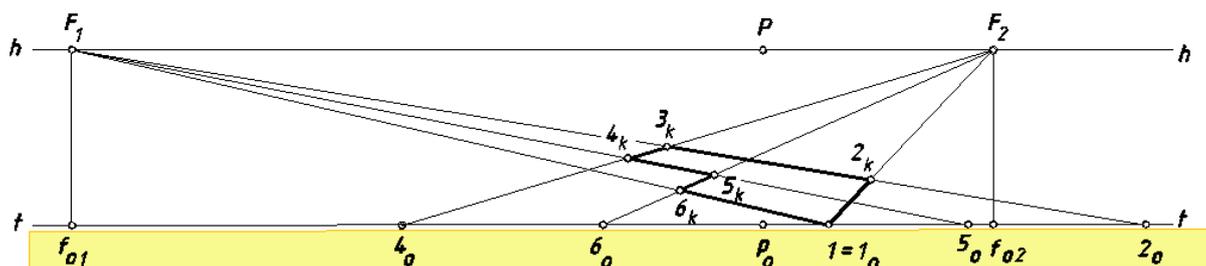
Рекомендации по выбору элементов перспективы (точки зрения, картинной плоскости и линии горизонта) будут даны при построении объемного предмета.

Проведем через вершину 1 картинную плоскость, которая на эюре отобразится основанием $t - t$. Выберем точку зрения S , которая спроецируется на данном чертеже в точку стояния s .

У параллельных прямых, содержащих точки 1 – 6, 5 – 4 и 2 – 3, общая несобственная точка F_1 (на эюре показана ее проекция на основании картины точка f_{01}). Для ее нахождения из точки зрения S проводим луч, им параллельный до пересечения с картиной. Поскольку проведенный луч параллелен предметной плоскости его точка пересечения с картиной будет находиться на линии горизонта. Точка схода другого семейства прямых – точка F_2 .

Определим «начальные точки» всех прямых линий на основании картины $1_0, 2_0, 4_0, 5_0$ и 6_0 . Проведем главный луч картины. Построение перспективы картины начнем с ее основания $t - t$, проведя произвольную горизонтальную прямую $t - t$. С помощью бумажной полоски зафиксируем точки, построенные на эюре, и перенесем их на картину (рис. 99). Построим линию горизонта параллельно линии $t - t$ на расстоянии, взятом с эюра (расстояние между осью x и $h - h$).

По точкам f_{01}, f_{02} и p_0 определяем F_1, F_2 и P на линии горизонта.



M 2:1

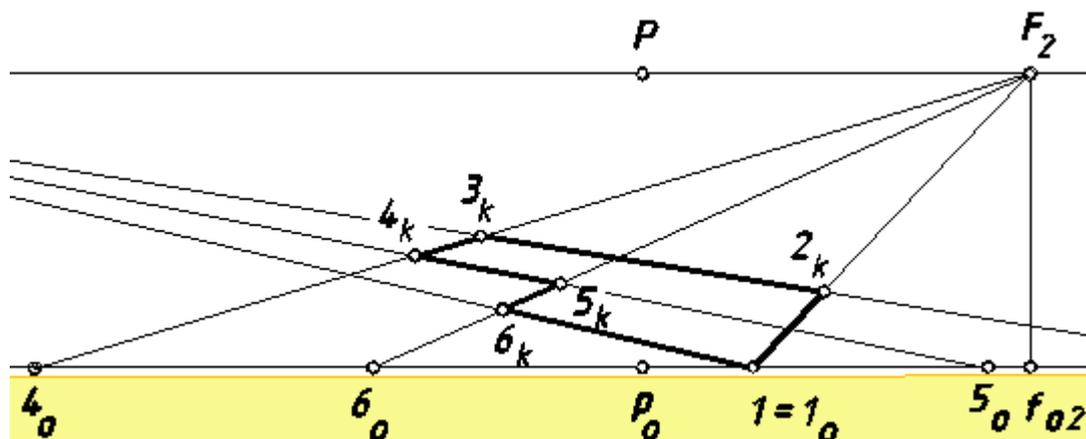


Рис. 99. Перспектива плоской фигуры

Строим перспективные изображения параллельных прямых с точками схода F_1 и F_2 . Поскольку точки $1, 2, \dots 6$ принадлежат одновременно двум семействам параллельных прямых, то на пересечении соответствующих определяем перспективные изображения точек $2_k, 3_k, 4_k, 5_k$, и 6_k . Соединив построенные точки соответствующим образом, получаем картину плоской фигуры.

Заметим, что центральную проекцию предмета можно построить при любых точках зрения (за исключением особых),

любом положении картины и линии горизонта. Но при этом далеко не всегда полученное изображение будет наглядным. При построении перспективного изображения предмета необходимо соблюдать условия, при которых можно достичь желаемого результата.

8.5. РАЦИОНАЛЬНЫЙ ВЫБОР ЭЛЕМЕНТОВ ПЕРСПЕКТИВЫ

Выбор картинной плоскости осуществляется следующим образом. Картинную плоскость проводят либо через ребро здания под углом $\alpha = 25 \dots 35^\circ$ к плоскости фасада, либо располагают параллельно одной из диагоналей, проведенных на плане здания (рис. 100).

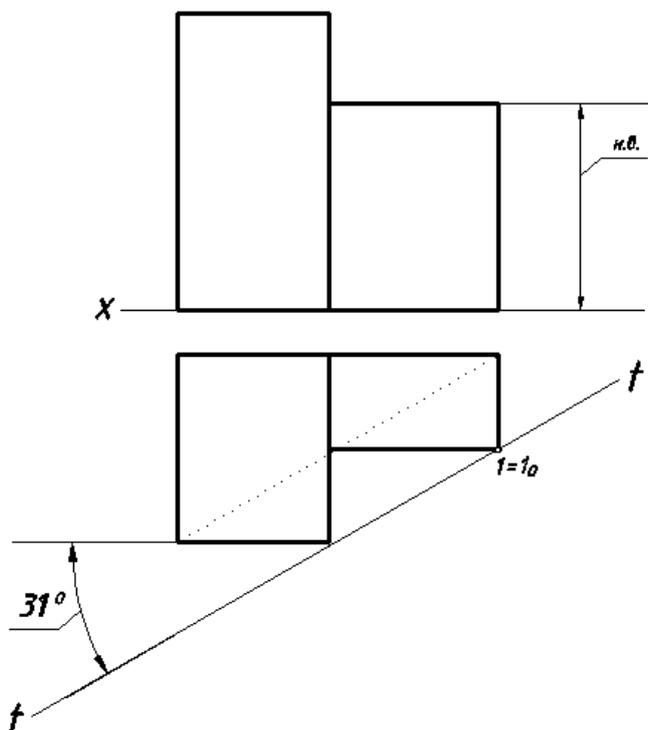


Рис. 100. Проведение картинной плоскости на эюре.

На рисунке, приведенном выше, картинная плоскость проведена параллельно диагонали, показанной точечной линией. При этом угол между основанием картины и передними плоскостями фасадов оказывается в рекомендуемых пределах.

При выборе **линии горизонта** ее высоту принимают равной 1,6...1,8 метра, что примерно соответствует высоте человеческого р

ста, или в зависимости от предмета на половине высоты предмета (например, здания).

При одновременном построении перспективы большого количества объектов высота горизонта выбирается на уровне 100 метров и более. Такую перспективу называют *перспективой с птичьего полета*.

Выбор точки зрения осуществляется установлением следующих взаимосвязанных элементов перспективы:

1. удаление точки зрения от объекта (дистанция);
2. положение главного луча;
3. положение картины;
4. положение линии горизонта.

Расстояние от точки зрения до плоскости картины должно быть не менее одного и не более трех наибольших габаритных размеров сооружения (рис. 101).

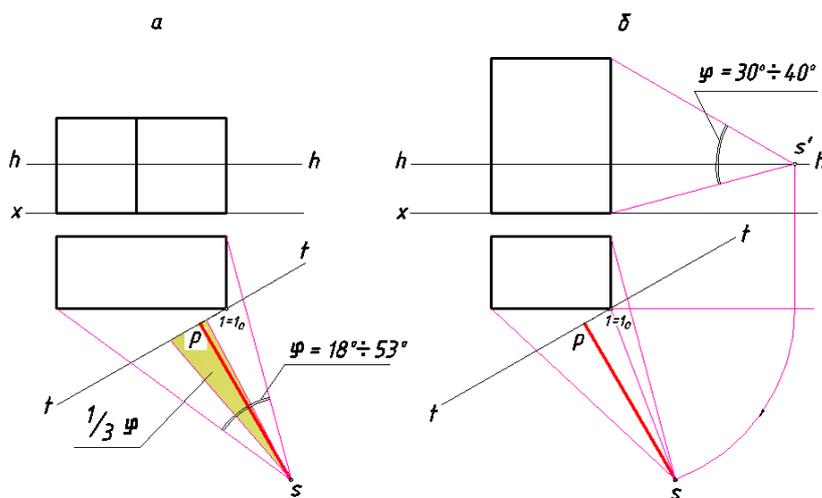


Рис. 101. Выбор точки зрения

Точка зрения выбирается т.о., чтобы из нее просматривалась наиболее полно форма предмета. Для этого угол зрения φ между крайними лучами в плане должен быть равен 18 ... 53° (рис. 101, а). Если объект высокий, необходимо проконтролировать, чтобы этот угол не выходил за эти пределы в вертикальной плоскости (рис. 101, б). Оптимальное значение $\varphi = 30 \dots 40^\circ$.

Главный луч картины не должен выходить за пределы $1/3$ угла φ , как показано на рисунке выше.

8.6. ПЕРСПЕКТИВА ОБЪЕМНОГО ОБЪЕКТА

Пусть требуется построить перспективу объемного сооружения (рис. 102). На ортогональном чертеже проведем картинную плоскость, линию горизонта и выберем точку зрения согласно вышеизложенным рекомендациям.

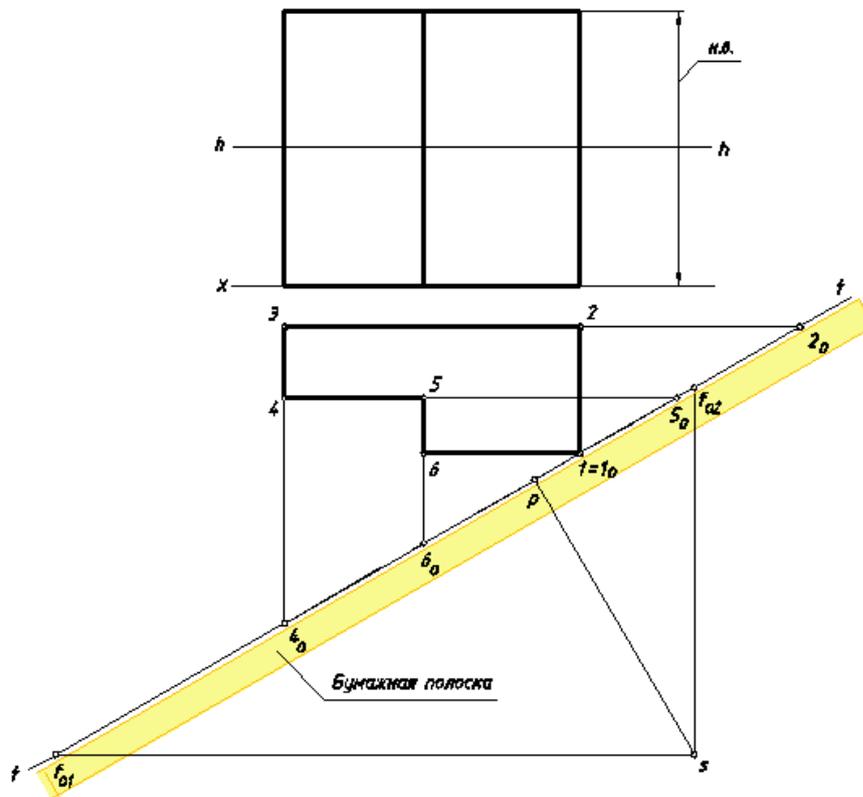


Рис. 102. Выбор картинной плоскости и нахождение начальных точек параллельных прямых.

Определим начальные точки каждого семейства параллельных прямых и их точки схода. С помощью бумажной полоски перенесем на основание картины полученные точки. Построим линию горизонта, на которой отметим точки P , F_1 и F_2 .

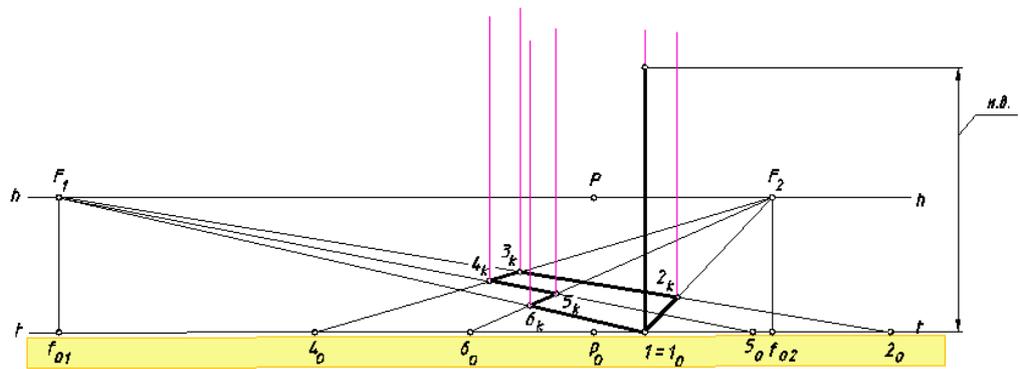


Рис. 103. Построение вертикалей в перспективе

Соединим начальные точки двух семейств параллельных прямых с соответствующими точками схода F_1 и F_2 . На пересечении построенных линий отметим перспективы вершин прямоугольника с вырезом и соединим их между собой (рис. 103).

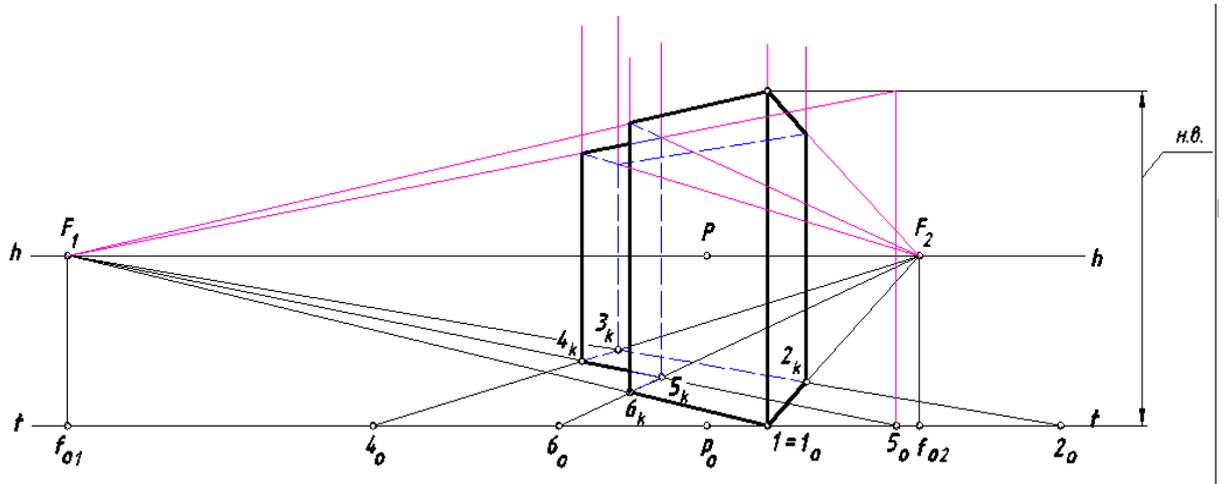


Рис. 104. Построение горизонталей в перспективе

После построения перспективы плана через точку $1 = 1_o$ проведем вертикальную прямую, на которой от этой точки отложим натуральную величину высоты сооружения, взятую с ортогонального чертежа (рис. 103).

Заметим, что на перспективном чертеже только одно вертикальное ребро, находящееся в картинной плоскости, отображается без искажения.

Проведем через вершины плоской фигуры вертикальные прямые, у которых, согласно допущению линейной перспективы, не имеется точек схода (рис.103).

Построим горизонтальные прямые с точками схода F_1 и F_2 , проходящие через верхнюю точку ребра, лежащего в картинной плоскости. Пересечение этих прямых с вертикальными линиями, проходящими через точки 2_k и 6_k , позволяет обрисовать две видимые грани данного сооружения (рис. 104).

Исходный ортогональный чертеж и картина в приведенном примере выполнены в одном масштабе. Поскольку в этом случае перспективное изображение получается довольно мелким, рекомендуется для построения картины применять масштаб увеличения, согласовывая его с размерами листа формата. При этом величины отрезков, которые переносятся с ортогонального чертежа, увеличиваются в координатных направлениях X и Y на картине в нужное количество раз.

Рассмотрим более сложную задачу. По данному ортогональному чертежу построим перспективу лестницы с прямыми барьерами (рис.105) и покажем некоторые другие приемы построения картины.

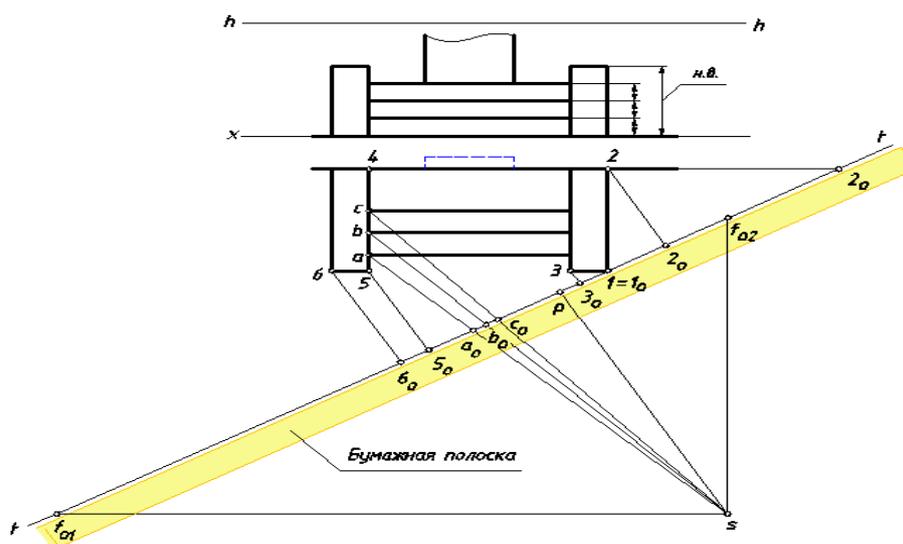


Рис. 105. Проведение картинной плоскости

На данном чертеже покажем картинную плоскость, точку зрения, главную точку картины и точки схода доминирующих прямых. Построение картины начнем с ее основания $t - t$, на котором отметим точки p , f_{01} и f_{02} . По этим точкам определим на линии горизонта точки P , F_1 и F_2 . Найдем перспективы двух перпендикулярных прямых с общей начальной точкой $1 = 1_0$, соединив ее с точками схода F_1 и F_2 .

На ортогональном чертеже проведем через точки 2, 3, 5 и 6 прямые, перпендикулярные картине, и найдем их начальные точки. Перенесем их на картину. На перспективном чертеже точкой схода прямых, перпендикулярных картине, является главная точка картины P . Соединим начальные точки $2_0, 3_0, 5_0$ и 6_0 этих линий с точкой P .

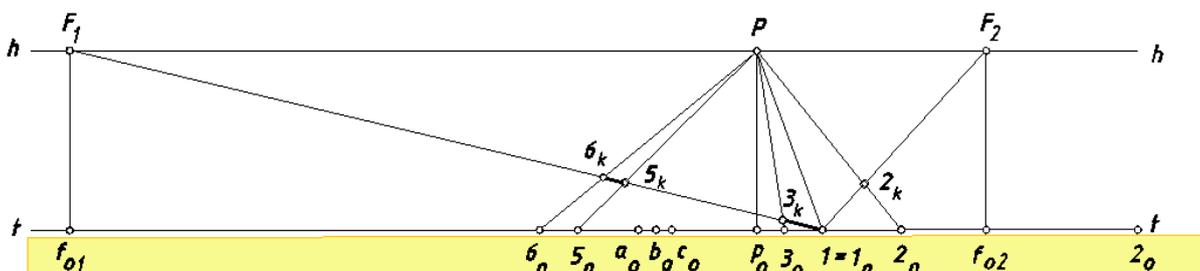


Рис. 106. Построение прямых, перпендикулярных картине

Пересечение построенных линий с проведенными ранее определит перспективы точек, отмеченных на картине (рис. 106).

Поскольку картинная плоскость проведена через вертикальное ребро левого барьера, последнее отобразится на картине в натуральную величину, взятую с ортогонального чертежа (рис. 107).

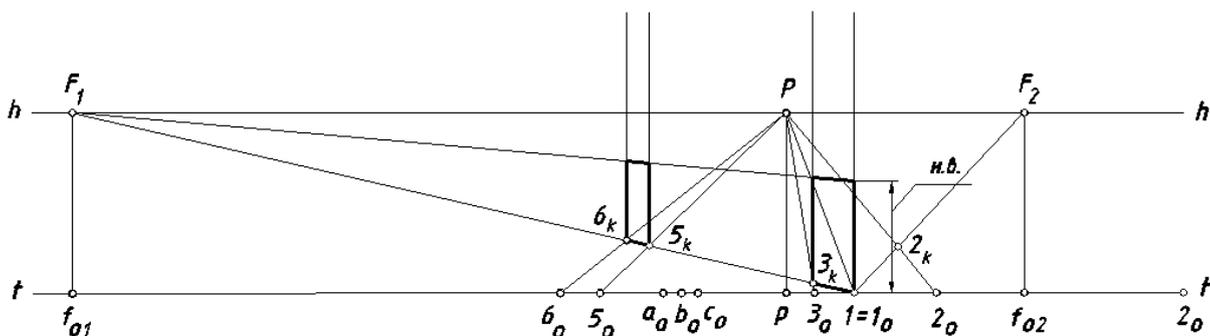


Рис. 107. Построение очертаний передних граней барьеров

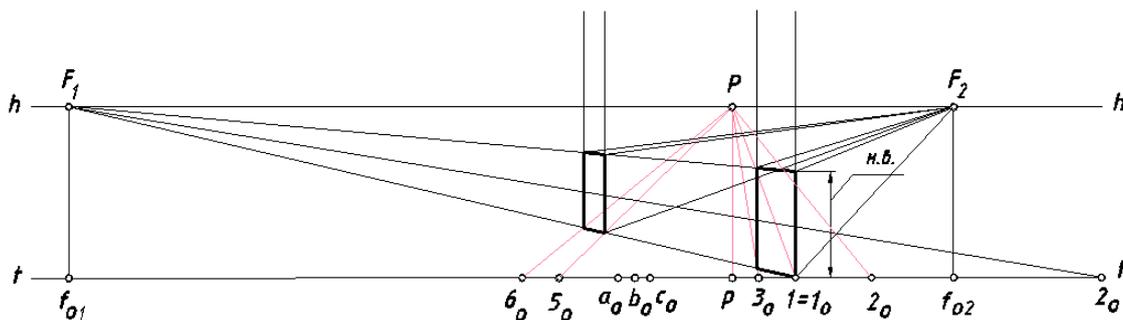


Рис. 108. Начало обрисовки боковых граней барьеров

Проведение горизонтальной прямой с точкой схода F_1 через верхнюю точку вертикального ребра, лежащего в картинной плоскости позволяет найти все верхние точки вертикальных ребер передних граней барьеров и полностью их обрисовать (рис. 108).

После этого приступаем к вычерчиванию других видимых граней обоих барьеров. Строим в предметной плоскости прямую с начальной точкой 2_0 и точкой схода F_1 .

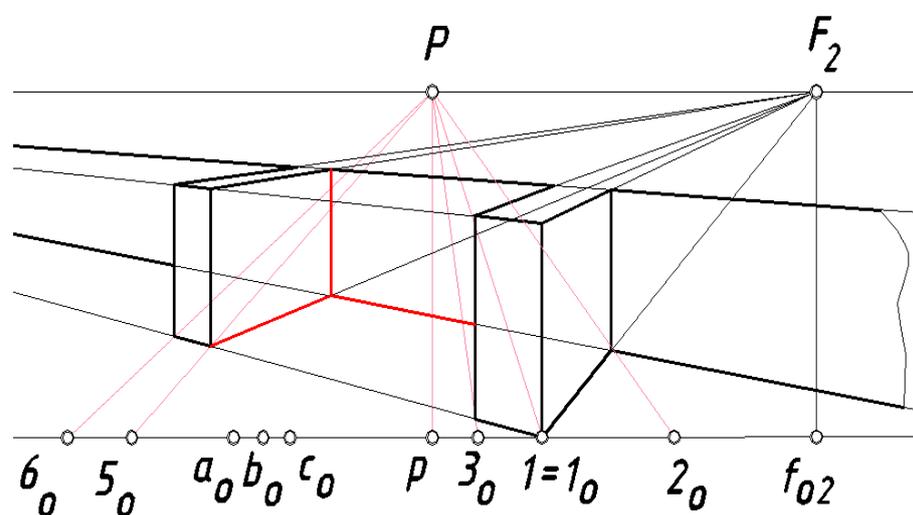
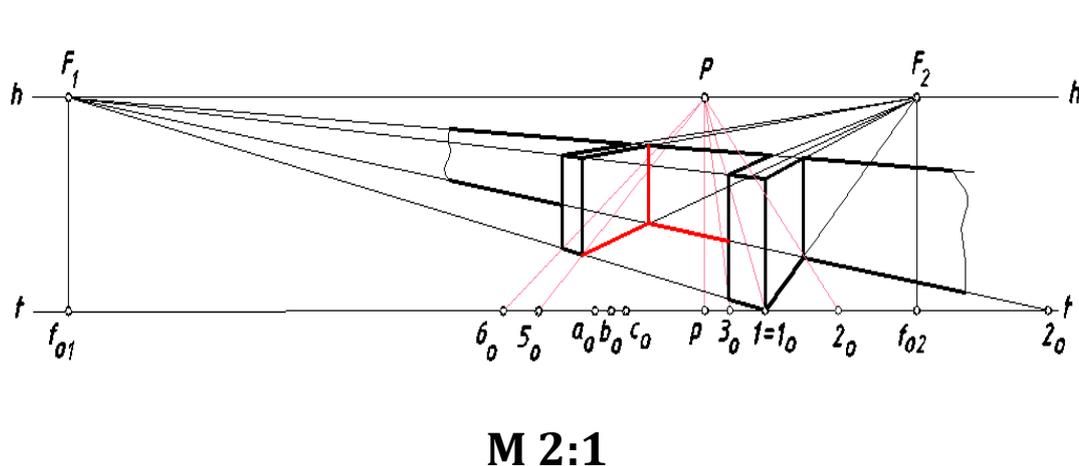


Рис. 109. Завершение обрисовки боковых граней барьеров

Затем через вершины прямоугольников, ограничивающих передние грани барьеров, проводим горизонтальные прямые

сточкой схода F_2 . Пересечение построенных горизонталей с вертикальными прямыми позволяет получить очертания видимых боковых граней барьеров (рис. 109).

Проведем на ортогональном чертеже через точки a , b и c из точки зрения проецирующие лучи и отметим начальные точки a_0 , b_0 и c_0 на основании картины. Перенесем отмеченные точки на перспективное изображение. Проведенные лучи и их вторичные проекции задают в пространстве горизонтально-проецирующие плоскости, которые пересекают картину по прямым, перпендикулярным предметной плоскости, поскольку картинная плоскость тоже перпендикулярна T (рис. 110).

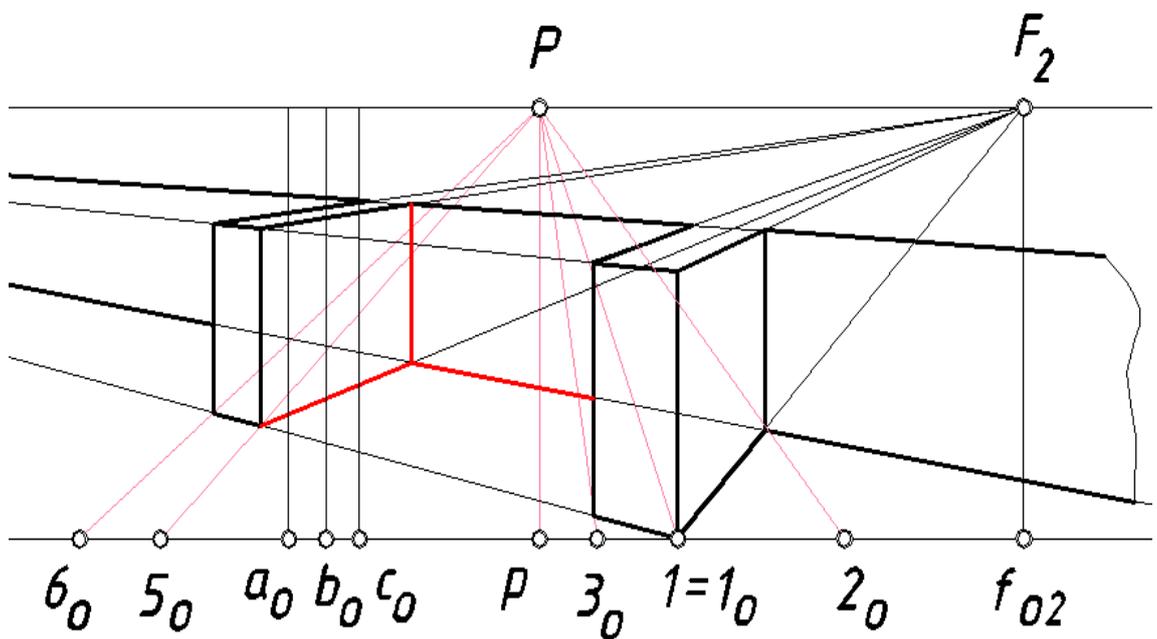


Рис. 110. Проведение вертикалей для построения профиля лестницы

Используя для решения задачи проецирующие лучи, проведенные из точки зрения, мы фактически применили *способ конических сечений* одновременно со способом архитекторов.

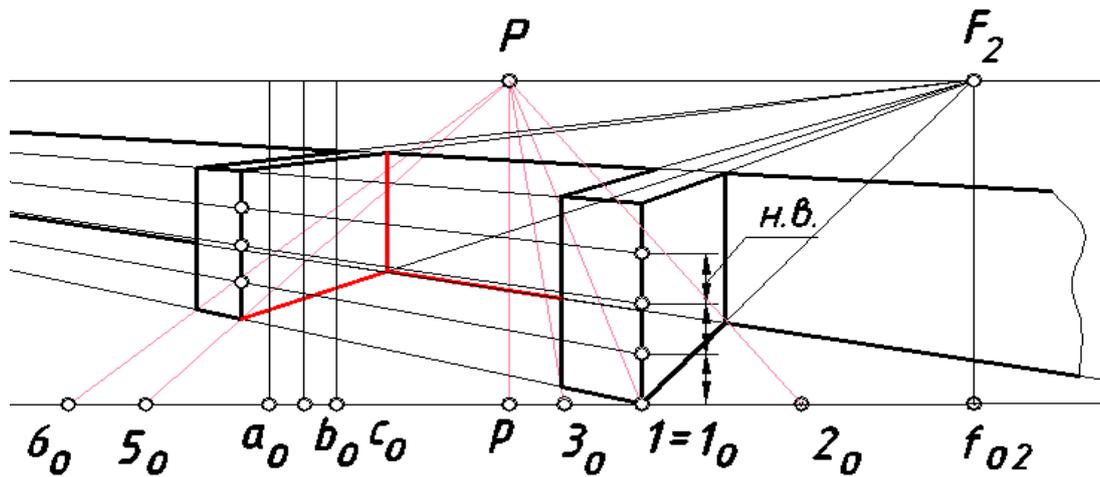


Рис. 111. Построение горизонталей для обрисовки профиля лестницы

Отметим на ребре, лежащем в плоскости картины, натуральные величины подступенков и проведем через точки деления горизонтальные прямые с точкой схода F_1 . На вертикальном ребре левого барьера зафиксируем отрезки, пропорциональные построенным в картинной плоскости (рис. 111).

Через построенные точки на вертикальном ребре левого барьера проведем горизонтальные прямые в точку схода F_2 (рис. 111).

Точки пересечения горизонтальных и вертикальных линий на правой грани левого дают возможность построить очертание профиля лестницы (рис. 112).

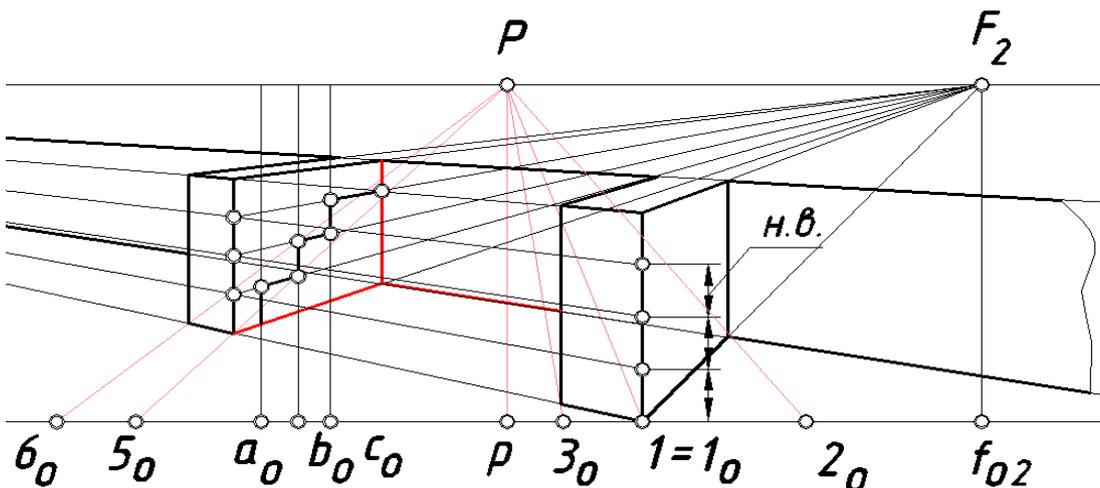


Рис. 112. Построение очертания профиля лестницы

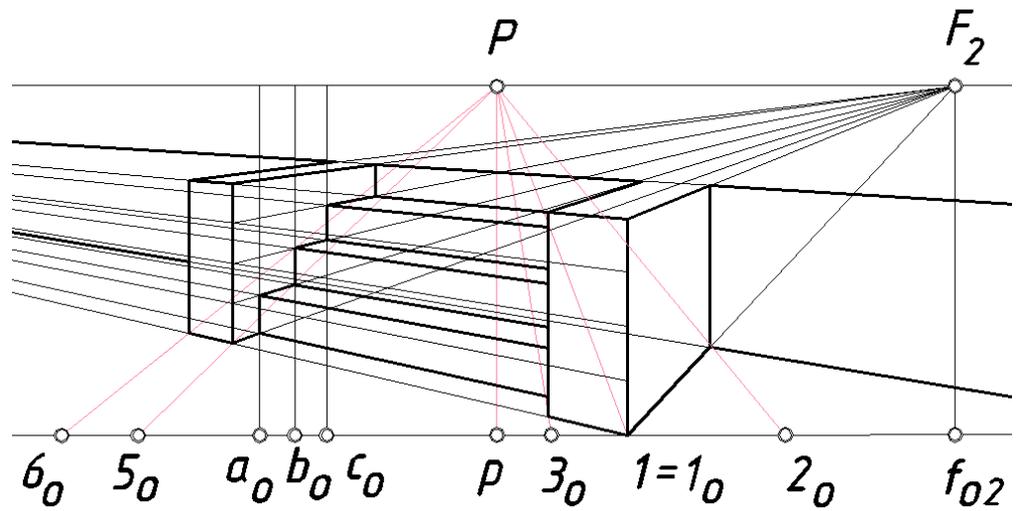


Рис. 113. Завершение построения лестницы

Через вершины построенной ломаной линии, образующей профиль лестницы, проводим горизонтальные прямые в точку схода F_1 . Выполняем обводку линий видимого контура и завершаем решение задачи (рис. 113).

8.7. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ОКРУЖНОСТИ.

Существует много способов построения перспективы окружности, но здесь будут проведены только наиболее удобные в практике архитектурного проектирования.

1. Способ восьми точек (Рис. 114, а) (окружность лежит в горизонтальной плоскости). По данному центру и радиусу строится описанный квадрат, желательно со сторонами, параллельными и перпендикулярными к картине, и определяются восемь точек: четыре точки 1, 2, 3, 4 касания к сторонами квадрата и четыре точки 5, 6, 7, 8 пересечения с диагоналями квадрата. При этом используется известное деление половины стороны квадрата в отношении 0,707. Для более точного изображения отрезки Cb_0 и Bb_0 откладываются по другую сторону и соединяются с точками 5 и 7 диагоналей. Эти прямые будут касательными к эллипсу в точках 5 и 7. Если стороны квадрата расположены не параллельно картине, то надо половину стороны квадрата «вынести» в плоскость картины с использованием любой точки на горизонте, в данном случае F_2 ,

построить отношение $0,707$ и перенести на сторону квадрата (рис. 114, б).

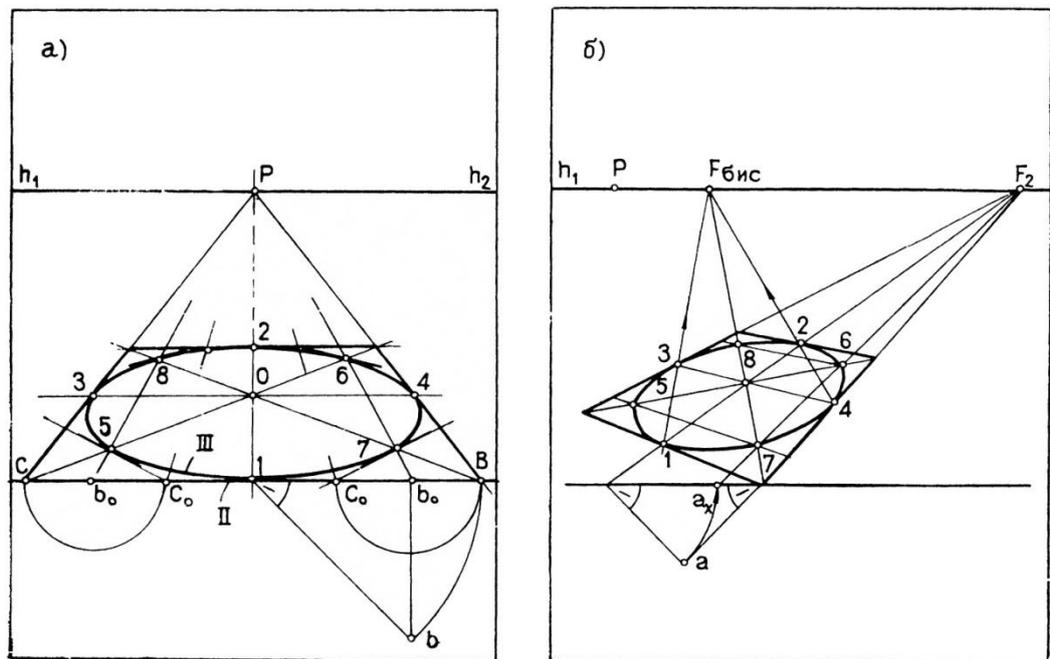


Рис. 114. Построение окружности в перспективе

8.8. ПОСТРОЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В ПЕРСПЕКТИВЕ.

Очень распространенными в архитектурно-строительной практике являются круглые формы, основой которых служат поверхности вращения. Изображение поверхности вращения почти всегда строится на основе изображения окружностей, ей принадлежащих.

Восприятие цилиндра и конуса на перспективе получается близким к натуре только тогда, когда их оси располагаются близко от главного луча. При удалении их осей от главного луча они получают с искажениями: при угле зрения до 20° – малозаметными, а при большем угле – уже такими, что обязательно

требуется корректировка. Поэтому при наличии в объекте круглых форм угол зрения следует брать возможно меньшим.

На приведенном выше рисунке (рис.114) правая окружность при угле зрения 48 град. изображается искаженно; это надо скорректировать и изобразить так же, как и левую окружность. То же касается при построении поверхностей цилиндров и конусов.

Исходя из этого цилиндрические колонны с плоскостью осей, параллельной плоскости картины, принято изображать одного диаметра.

При расположении колонн с плоскостью осей, не параллельной картине, отношение диаметра к размеру оси на картине может быть принято по ортогональной проекции. Положение осей колонн определяется делительным масштабом, устанавливаются диаметры крайних колонн, а диаметры промежуточных принимаются по интерполяции.

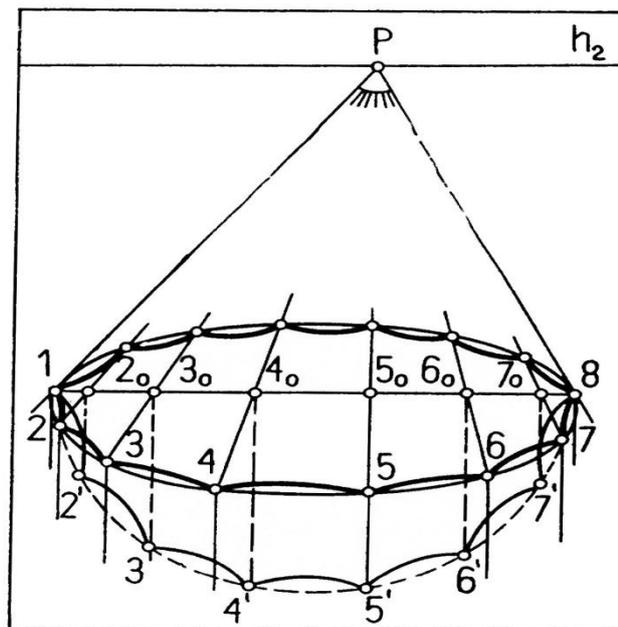


Рис. 115. Деление окружности в перспективе на равные части.

Иногда, необходимо, построенную окружность разделить на части. Для этого на фронтальном диаметре вычерчивают полуокружность с делениями (8). Из точек деления проводят вертикали до диаметра, а из полученных на диаметре точек проводят прямые в главную точку, пересечение их с построенной кривой (эллипсом) определит искомые точки. Эллипс, как

изображение окружности, должен быть построен точно, без малейшей подрисовки.

Шар в перспективе изображается окружностью только тогда, когда его центр расположен на главном луче. При другом расположении изображение будет эллипсом и с удалением шара от главного луча разница его осей будет увеличиваться. (рис. 116).

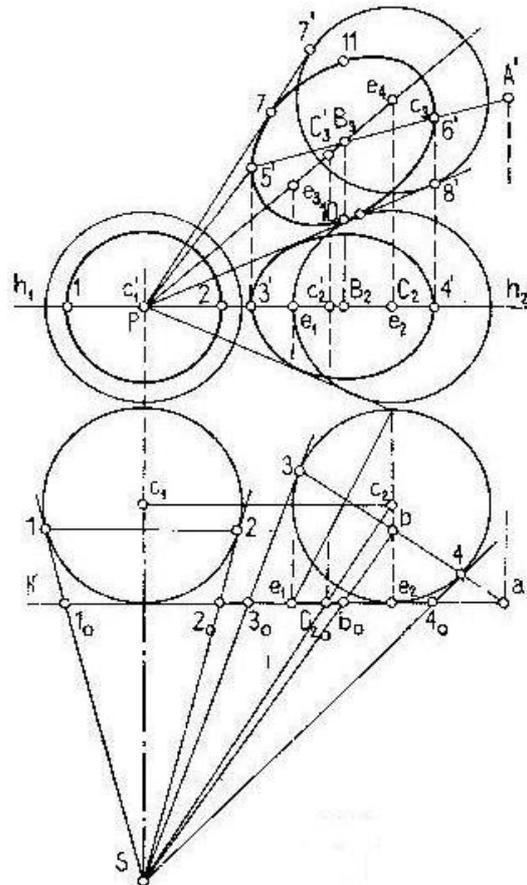


Рис. 116 Изображение шара в перспективе

Построение очерковой линии поверхности вращения в перспективе чаще всего выполняется способом параллелей. Изображается ряд параллелей, из которых обязательно будут: нижняя(верхняя), экватор и горловина; к ним вкчерчивается общая огибающая кривая, которая и будет очерковой линией поверхности. Этот способ применяется при поверхностях, вытянутых в направлении их оси.

На (рис.117) построена перспектива купола в виде “луковицы”, где использованы параллели- экватор, две параллели одинакового диаметра- и к ним проведена очерковая касательная линия. Надо иметь в виду, что очерк в перспективе не повторяет очерк

ортогонального изображения, а несколько сжат в вертикальном направлении.

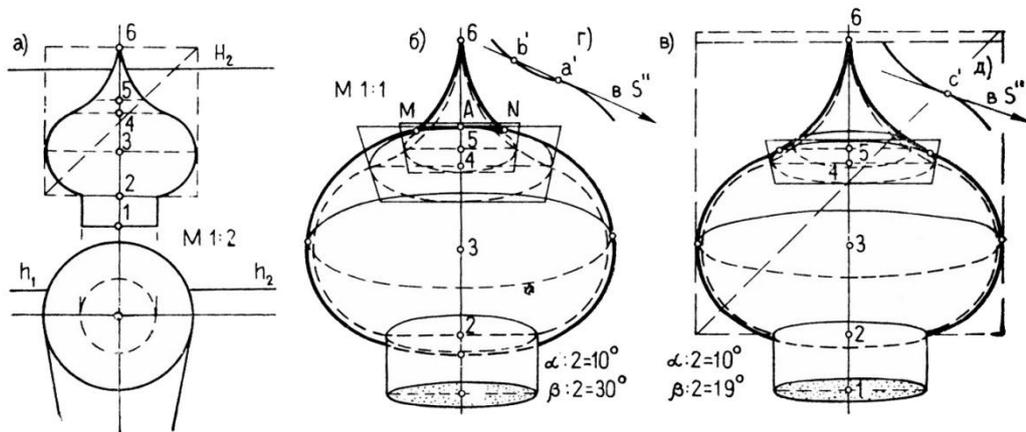


Рис. 117 Построение купола в перспективе.

В некоторых случаях, а именно для поверхностей, сжатых в направлении оси, удобнее применять способ меридианов (рис.118). Как в предыдущем случае, вычерчиваются линии сечения поверхности меридиональными плоскостями: фронтальной и двумя, идущими под углом 45град, к картине. Затем к ним вычерчивается общая огибающая линия, дающая изображение очерка. Линии меридианов особо точно надо вычертить в тех местах, где их будет касаться очерковая линия.

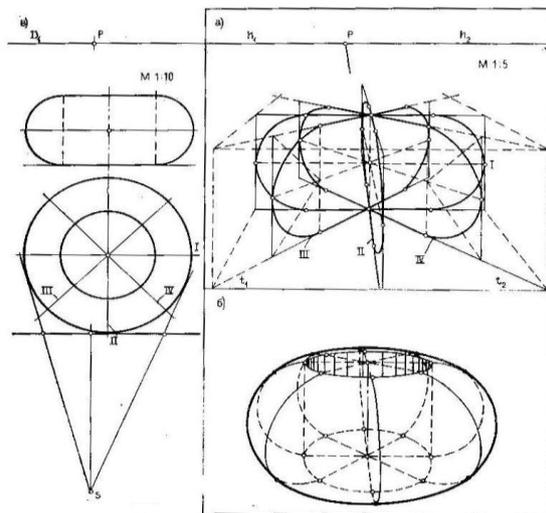


Рис.118 Построение валика в перспективе.

8.9. ПОСТРОЕНИЕ ТЕНЕЙ В ПЕРСПЕКТИВЕ

При построении теней на перспективных чертежах за источник света принимается солнце, которое по отношению к картине может занимать различные положения:

1. солнце расположено позади предмета и тень падает в сторону наблюдателя (рис. 119);

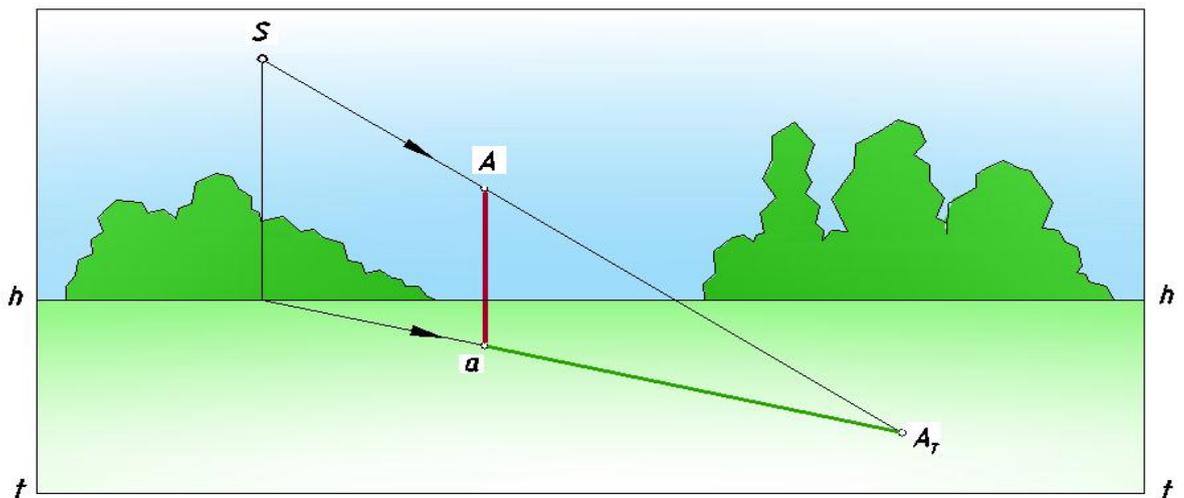


Рис. 119 Солнце позади предмета

2. солнце расположено позади зрителя, тень падает в сторону линии горизонта от основания предмета (рис. 120);

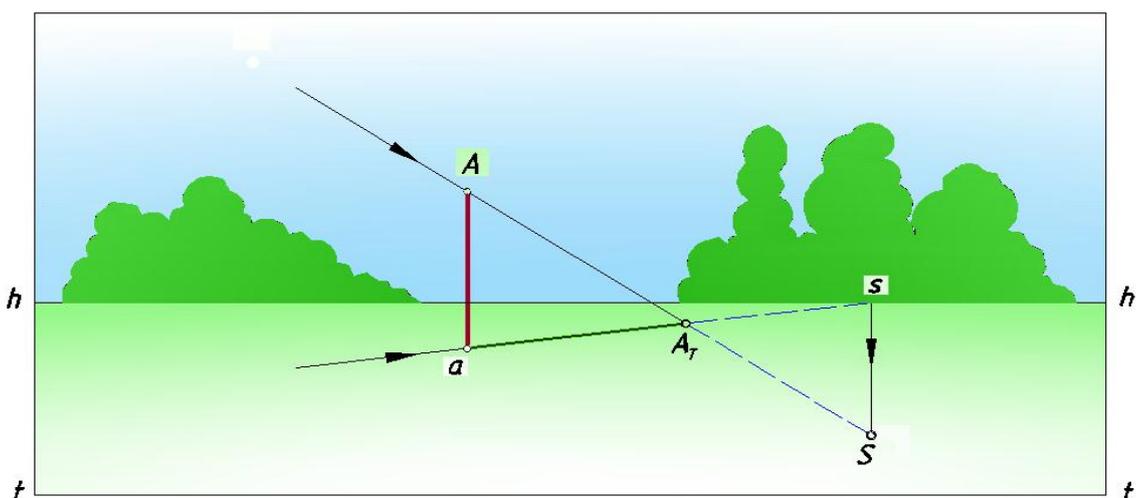


Рис. 120. Солнце позади зрителя

3. солнце расположено сбоку так, что лучи идут параллельно картине (рис. 121).

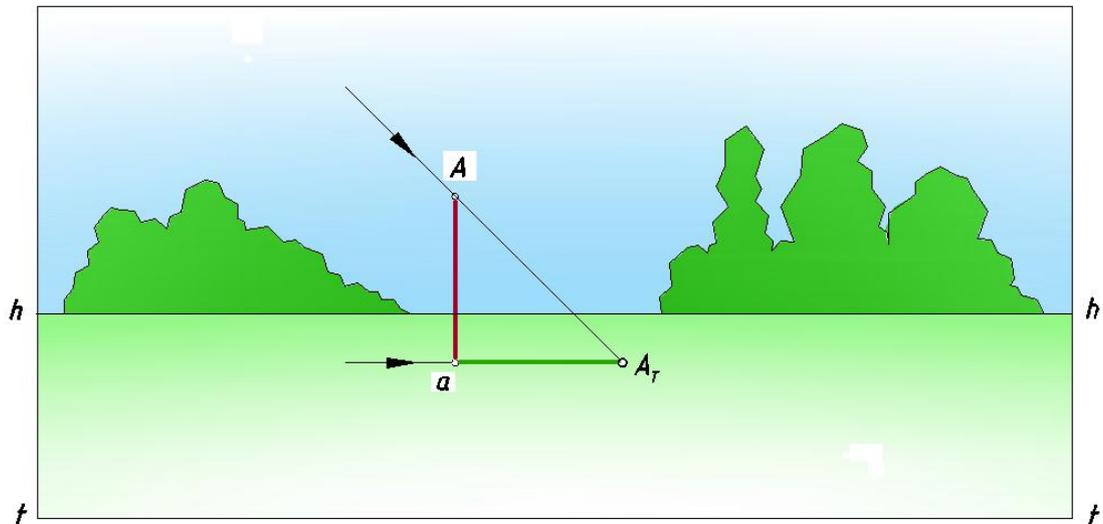


Рис. 121. Солнце сбоку предмета

Последний случай чаще других применяется инженерами при построении перспективных изображениях зданий и сооружений, поэтому остановимся на нем более подробно.

Рассмотрим построение точки в перспективе. Будем считать, что объект освещается слева (или справа), лучи идут параллельно картине, составляя угол 45° с предметной плоскостью. Запишем эти условия символически:

$$1. S \parallel K;$$

$$2. \widehat{S T} = 45^\circ.$$

Проведем через точку A (рис. 122) перспективу луча, а через ее вторичную проекцию (точку a) – вторичную проекцию луча. Поскольку луч параллелен картине, его вторичная проекция параллельна основанию картины $t - t$. Точка пересечения перспективы луча с его вторичной проекцией определит действительную тень точки A на земле – точку A_T .

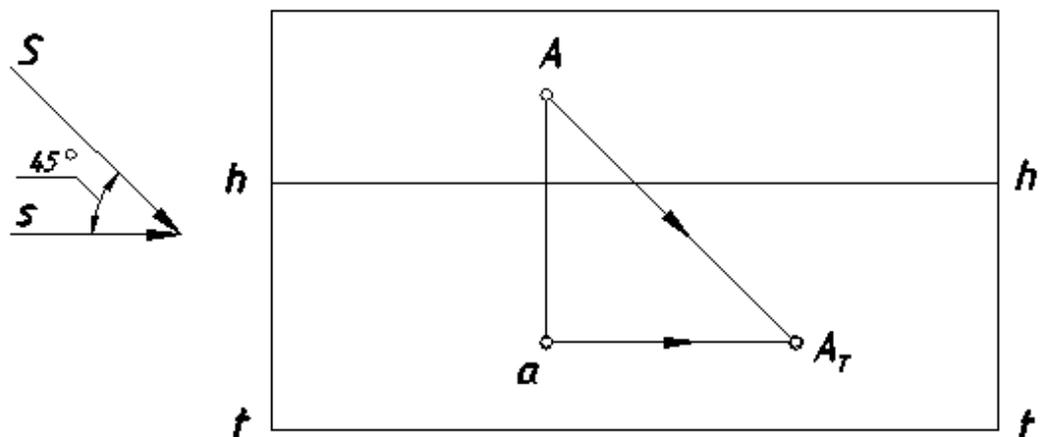


Рис. 122. Тень точки в перспективе

Построим собственные и падающие тени параллелепипеда, стоящего на земле (рис. 123).

Заметим, что те выводы, которые были сформулированы ранее для построения теней в ортогональных проекциях, справедливы и для центральных.

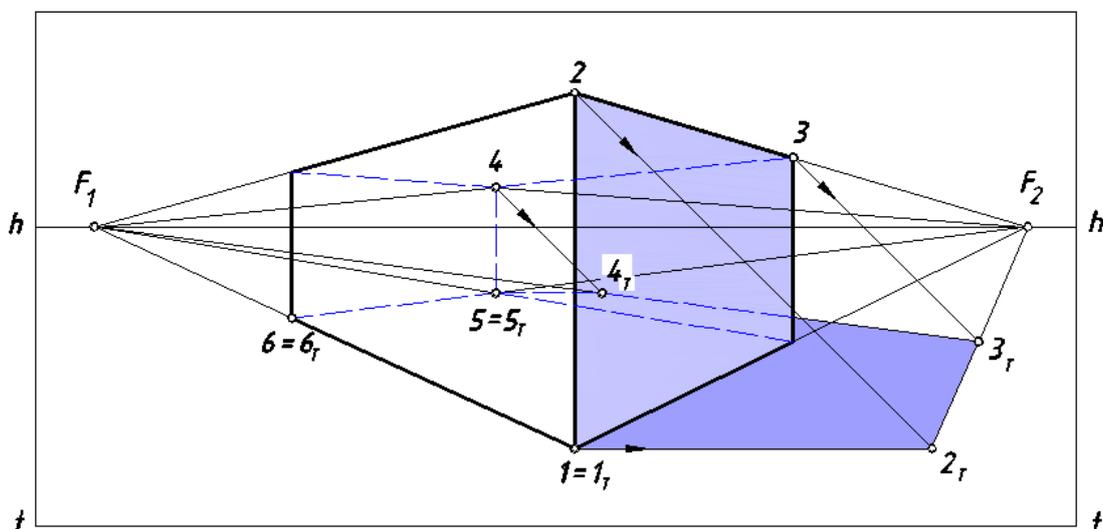


Рис. 123. Построение теней параллелепипеда

Проанализируем освещенность граней параллелепипеда. При заданном направлении лучевого потока освещенными будут

верхняя, левая видимая и невидимая на чертеже грани объекта. Остальные грани окажутся в собственной тени. Определим контур собственной тени данного тела. В его состав войдут ребра [12] – [23] – [34] – [45] – [56] – [61], составляющие замкнутую цепочку в виде пространственной ломаной линии. От выявленного контура строим падающую тень. Поскольку точка 1 лежит на земле $1 = 1_T$. Проведем через точку 2 перспективу луча, а через ее вторичную проекцию (точку 1) – его вторичную проекцию. На пересечении этих линий находим точку 2_T . Поскольку ребро [23] параллельно предметной плоскости, его падающая тень равна и параллельна ему. Точка схода ребра [23] находится на линии горизонта (точка F_1). Соединяем точку 2_T с этой точкой (т.е. проводим через нее прямую, параллельную этому ребру). На этой же прямой находится тень точки 3. Проведем через точку 3 перспективу луча до пересечения с построенной прямой – определим точку 3_T . Вторичную проекцию луча в этом случае строить не следует, поскольку искомая точка уже установлена пересечением двух линий. Ребро [34] также параллельно плоскости T , его тень параллельна ребру.

Точкой схода этих прямых – фокус F_1 . Проведем перспективу луча через точку 4 до пересечения с отрезком $[3_T F_1]$, определим точку 4_T . Точки 5 и 6 расположены на предметной плоскости T , поэтому $5 = 5_T$ и $6 = 6_T$. Очертание контура падающей тени параллелепипеда состоит из совокупности отрезков $[1_T 2_T] - [2_T 3_T] - [3_T 4_T] - [4_T 5_T] - [5_T 6_T] - [3_T 4_T]$, представляющих собой замкнутый контур.

Рассмотрим задачи, связанные с построением перспективы и теней фрагментов зданий

Задача 1

Построить тени от прямых барьеров на лестнице, земле и стене (рис. 124).

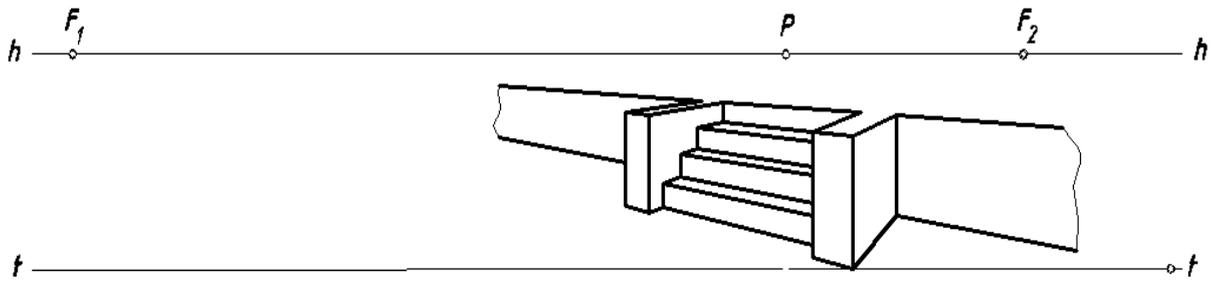


Рис. 124. Лестница с прямыми барьерами

Вначале построим тени правого барьера (рис. 125). Поскольку при заданном направлении светового потока правая грань барьера находится в собственной тени легко видеть, что ребра, находящиеся на границе света и тени войдут в состав контура собственной тени. Определим падающую тень вертикального ребра. Точка A принадлежит T , поэтому можно отметить, что $A = A_T$. Проведем через точку B перспективу луча, а через ее вторичную проекцию – точку A перспективу вторичной проекции луча. На пересечении построенных линий определим тень B_T . Другое ребро $[BC]$ параллельно предметной плоскости, следовательно, его тень параллельна ребру и имеет ту же точку схода F_2 . Реальная часть этой тени на земле – отрезок $[B_T 1_T]$. Поскольку точка 1_T находится на границе земли и стены $1_T = 1_T'$. С помощью обратного луча можно определить точку на ребре $[BC]$, которая отбросила эту тень. Точка C горизонтального ребра находится на стене, поэтому $C = C_T'$. Тень отрезка $[1C]$ падает на стену. Его тенью является отрезок $[1_T' C_T']$.

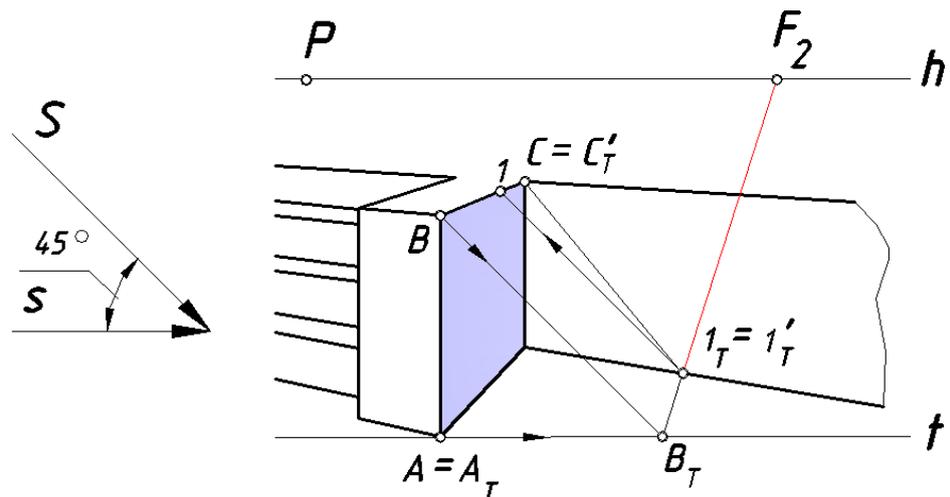


Рис. 125. Построение контура падающей тени правого барьера

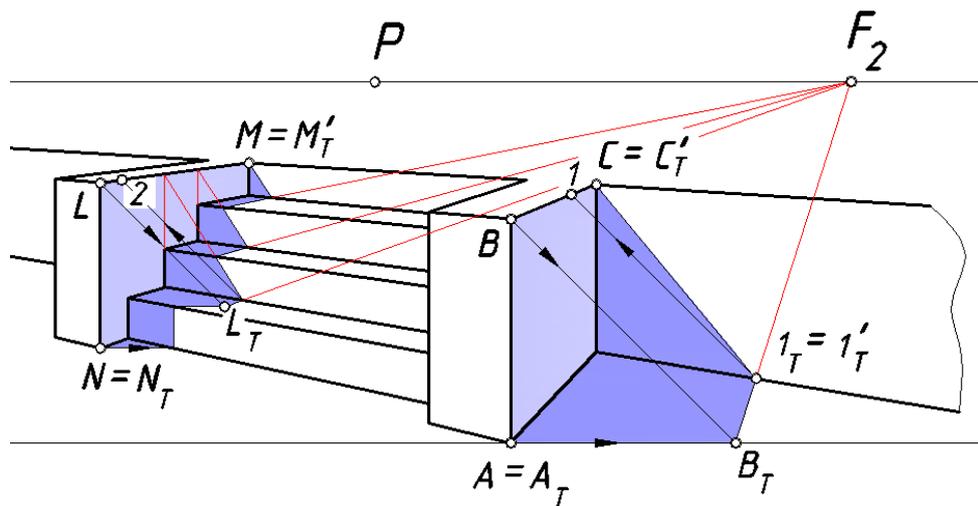


Рис. 127. Собственные и падающие тени от прямых барьеров

На рис. 127. представлен окончательный вариант решения задачи.

Тени ребер $[LM]$ и $[BC]$ на стене и подступенках параллельны и представляют собой пример *восходящих прямых*. Их точка схода расположена выше линии горизонта, а точка схода их вторичных проекций лежит на линии горизонта.

Задача 2

Построить перспективу карниза крыши и определить собственные и падающие тени (рис. 128).

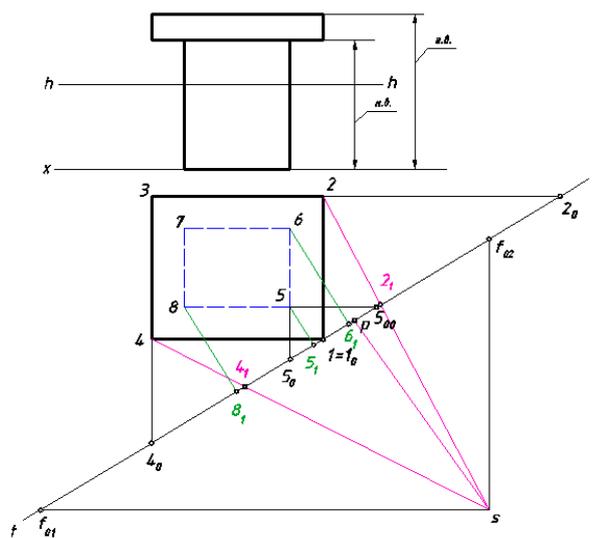


Рис. 128. Условие задачи 2

Укажем на ортогональном чертеже условия задачи положение картинной плоскости и выберем точку зрения в соответствии с рекомендациями, приведенными ранее.

Для решения задачи применим способ архитекторов и используем некоторые другие приемы построения перспективы. Определим начальные точки прямых доминирующих направлений и отметим их на перспективном чертеже на основании картины. Определим точки схода этих прямых.

Соединив начальные точки с соответствующими точками схода, получим перспективу плоской фигуры (плана карниза крыши). Проведем через точку зрения и точки 2 и 4 лучи, которые вместе с их вторичными проекциями задают горизонтально-проецирующие плоскости, пересекающие картину по вертикальным прямым (рис. 129).

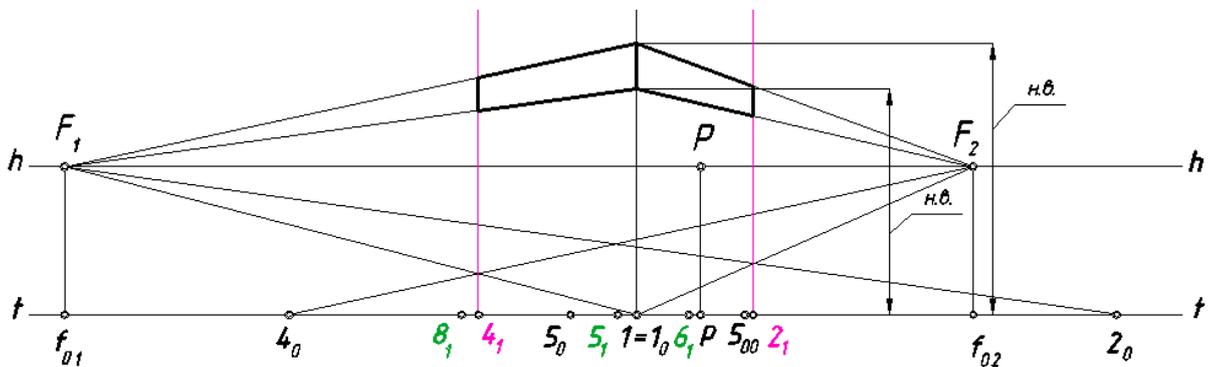


Рис. 129. Применение двух методов построения перспективы

В соответствии с этими рассуждениями на перспективном чертеже проведем через точки 2₁ и 4₁ вертикальные прямые, по которым пересекутся построенные плоскости с картиной. Ребро, попавшее в картинную плоскость, изобразится на ней в натуральную величину, взятую с ортогонального чертежа. Проведя через верхнюю и нижнюю точки этого ребра прямые в точки схода F₁ и F₂, завершим построение двух боковых видимых граней карниза (рис. 130).

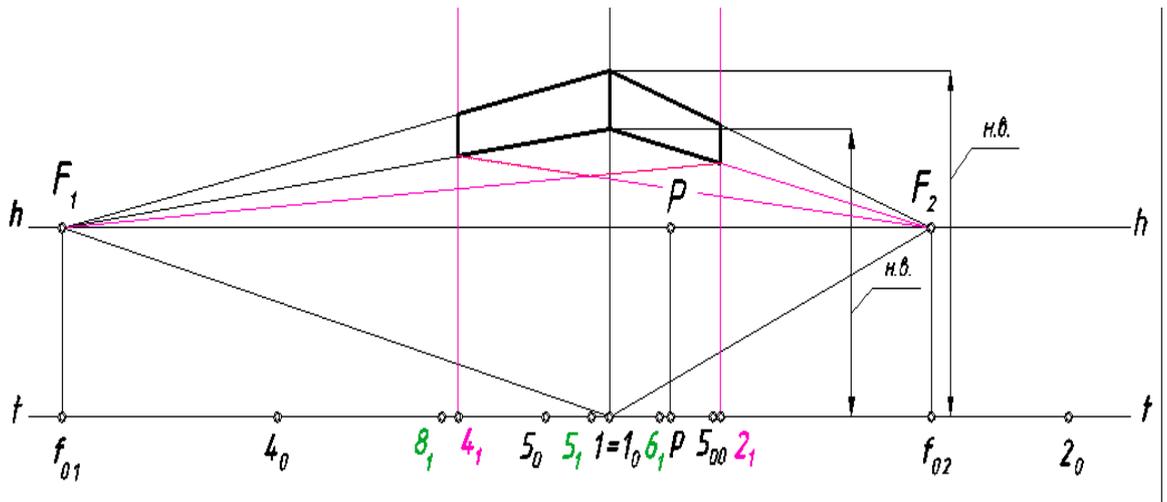


Рис. 130. Построение боковых граней карниза с использованием способа конических сечений

Проведем две прямые через нижние точки вертикальных боковых ребер карниза в точки схода F_1 и F_2 , и выделим очертание нижней грани (рис.131).

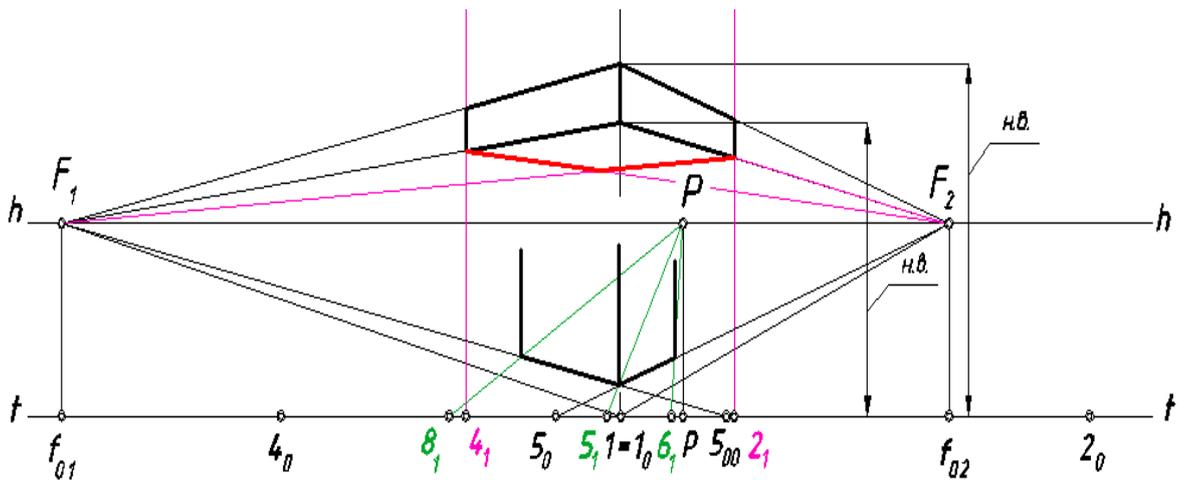


Рис. 131. Проведение прямых, перпендикулярных картине

Для построения перспективы стен использованы прямые, перпендикулярные картине, проходящие через точки 5, 6 и 8.

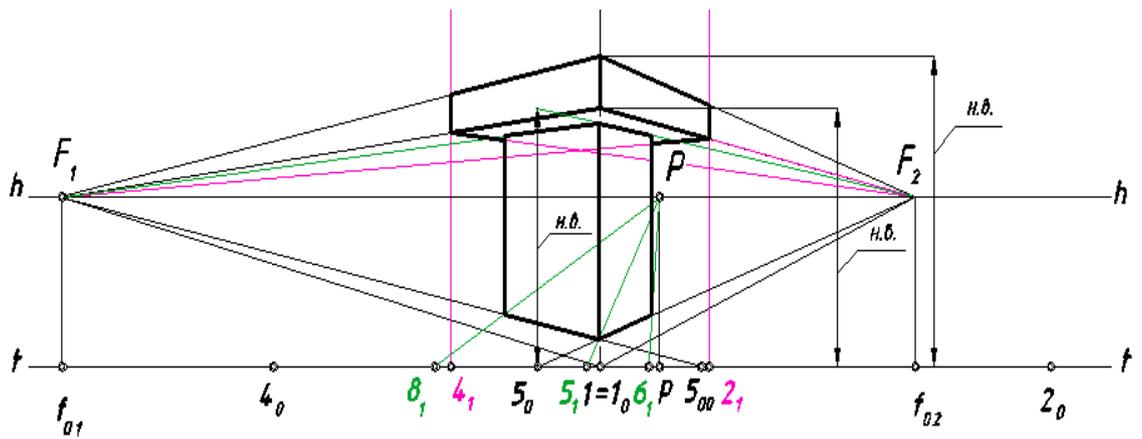


Рис. 132. Построение видимых стен в перспективе

После нахождения вторичных проекций этих точек на перспективном чертеже проводим через них вертикальные линии (рис. 131).

Сдвинем одно из вертикальных ребер в картинную плоскость в любом направлении. Отложим на нем от основания картины от точки 5_0 натуральную величину ребра, взятую с ортогонального чертежа (рис. 132).

Проведем через верхнюю точку этого ребра прямую в точку схода F_2 . Обведем очертание правой стены. Затем построим параллельные прямые с точкой схода F_1 и обрисуем левую стену.

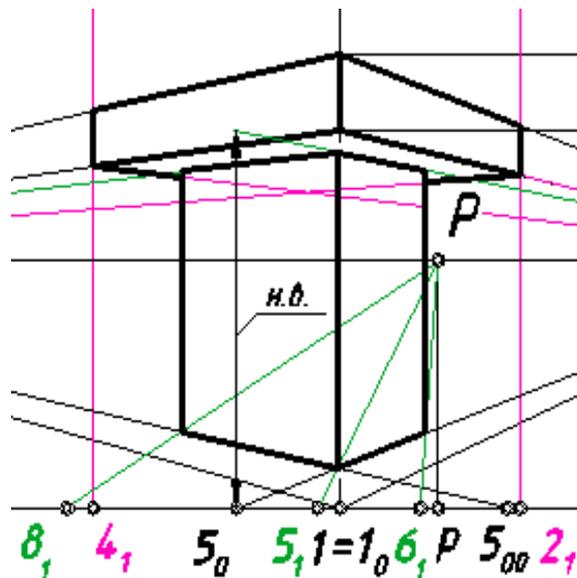


Рис. 133. Завершающий этап построения перспективы

На рис.133 показан окончательный результат построения перспективы сооружения.

Перейдем к построению теней. Определим освещенность граней объекта при заданном направлении светового потока и выделим его собственные тени. Построим падающую тень карниза крыши на стены.

Найдем тень точки A на левой видимой стене. Проведем через точку A перспективу луча, а через a вторичную проекцию до пересечения с левой стеной. Заметим, что луч и ребро представляют собой скрещивающиеся линии.

Пересечение проведенного луча со стеной произойдет в точке A_T' . Поскольку нижнее переднее ребро левой грани карниза параллельно левой стене, то тень от него пойдет по стене вправо от точки A_T' параллельно этому ребру. Поэтому через A_T' и точку схода F_1 проводим прямую.

В точке A сходятся три ребра карниза. Его левое нижнее ребро является *гвоздем* по отношению к левой стене. Определим тень этого ребра. На рис. 134 показано два варианта нахождения тени.

В первом случае (рис. 134, а) на этом ребре строим с помощью обратного луча точку B , которая отбросит тень B_T' на левое вертикальное ребро. Тенью гвоздя является отрезок $[A_T' B_T']$.

Во втором случае (рис. 134, б) найдена общая точка для левой стены *гвоздя*. Для этого верхнее горизонтальное ребро левой стены продолжено до пересечения с *гвоздем* и отмечена точка C_T' . Поскольку отрезок $[C_T' A_T']$ лежит в плоскости стены и пересекает ее левое вертикальное ребро, на нем можно отметить точку B_T' и выделить реальную часть тени гвоздя.

Оба приема дают одинаковый результат.

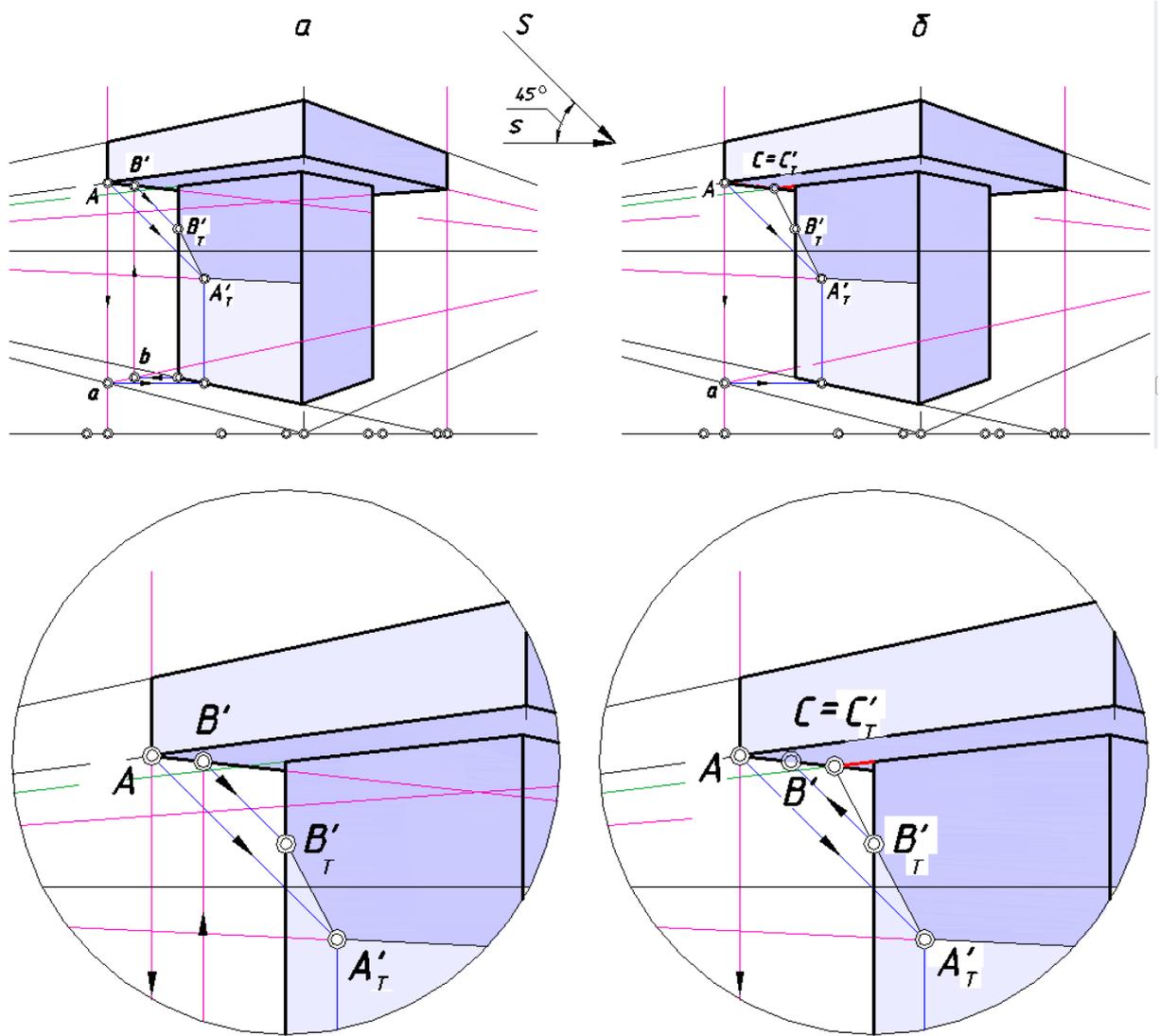


Рис. 134. Варианты нахождения падающей тени карниза на стену здания: а – с помощью точки B_T' ; б – с помощью точки C_T' («основания» гвоздя на стене)

На рис. 135 приведена перспектива этого сооружения при выборе другой точкой зрения, при которой тень точки A падает на невидимую на картине стену. По отношению к этой стене ребро $[AB]$ является *гвоздем* и частично отбрасывает на нее тень в виде отрезка $[C_T' A_T']$. На левой стене построена тень нижнего ребра видимой левой грани карниза.

Построение теней карниза на фрагменты сооружения выполнено в различных вариантах, поскольку вызывает трудности у студентов при выполнении работ.

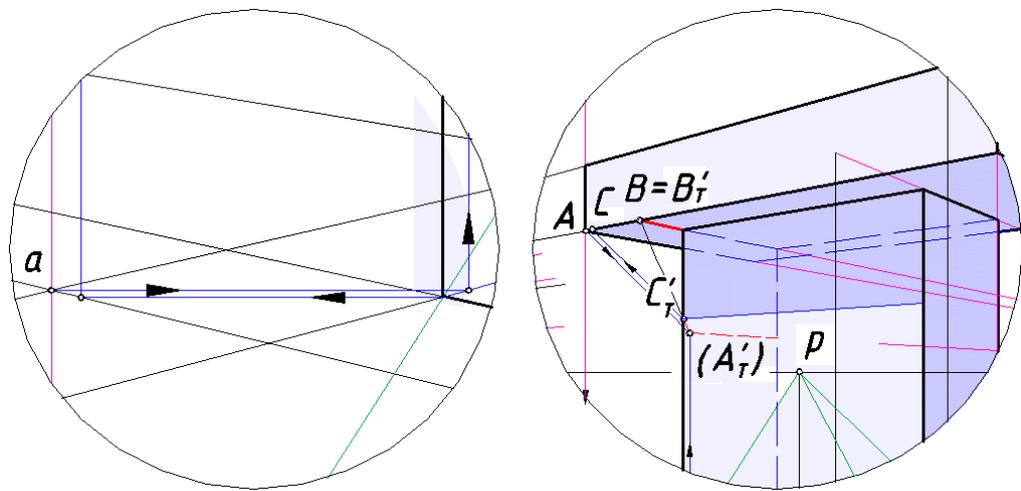
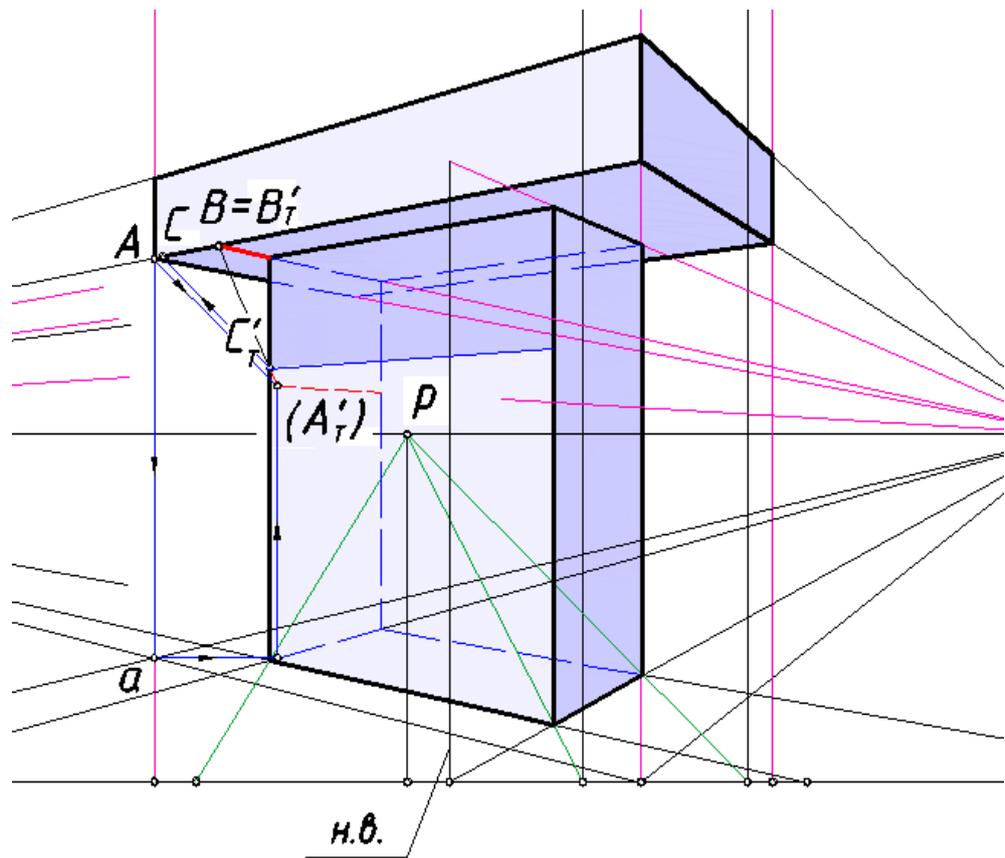
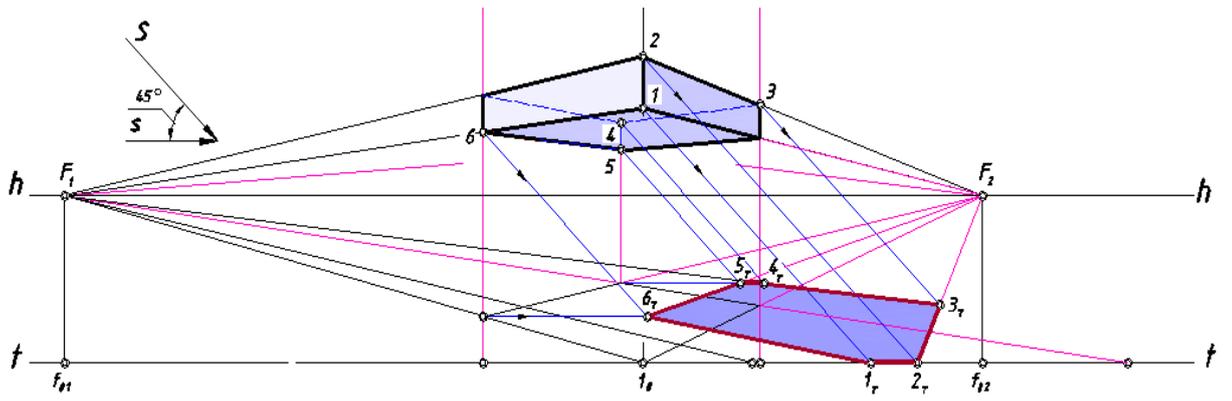


Рис. 135. Построение тени карниза при измененной точке зрения

Построим падающую тень карниза на землю отдельно от нижней части сооружения (рис. 136), предварительно определив его контур собственной тени.



M 2:1

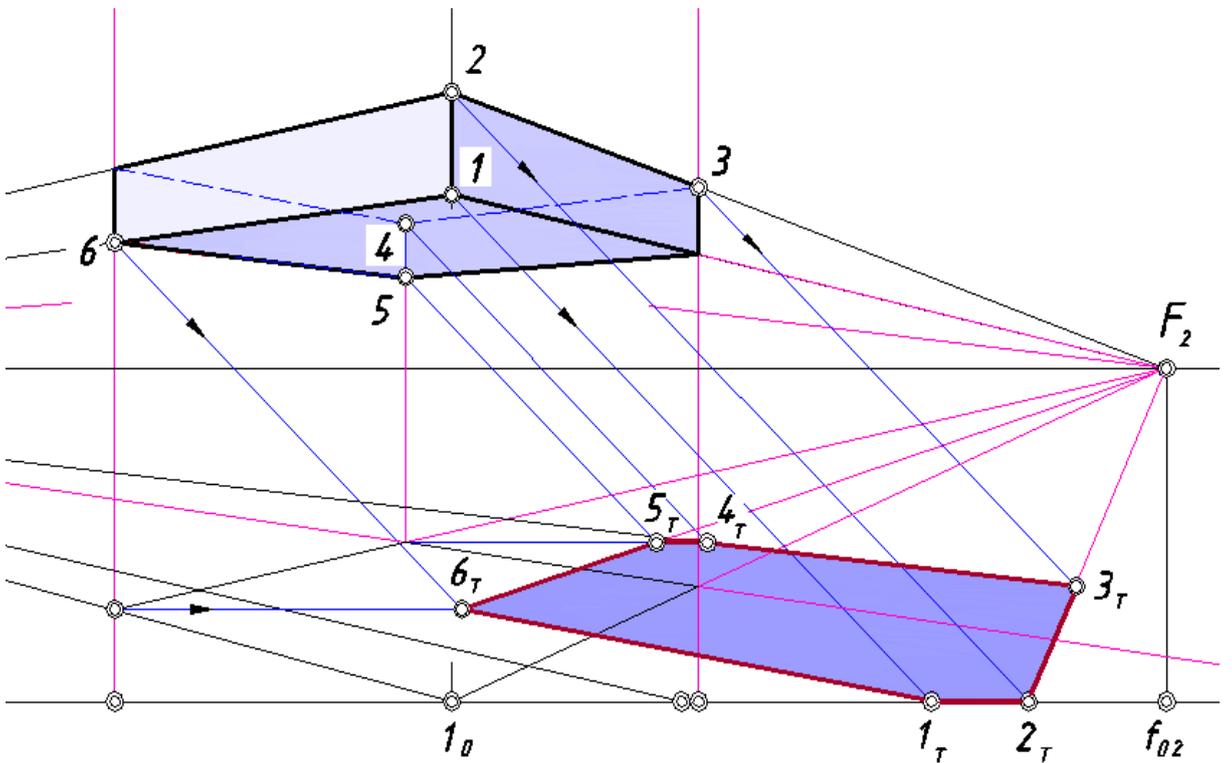


Рис. 136. Падающая тень карниза

Затем найдем контур собственной тени и определим контур падающей тени здания без учета карниза (рис. 137).

Обрисуем очертание общего контура падающей тени сооружения и выделим его цветом (рис. 138).

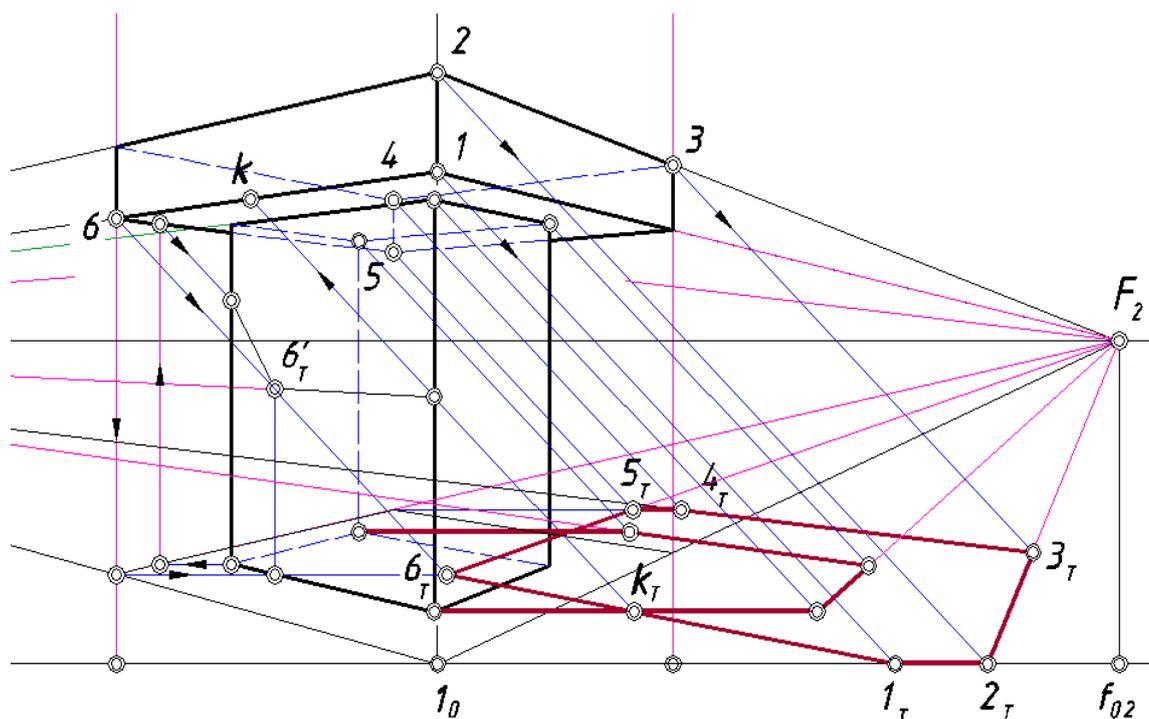


Рис. 137. Контуры падающих теней двух объектов

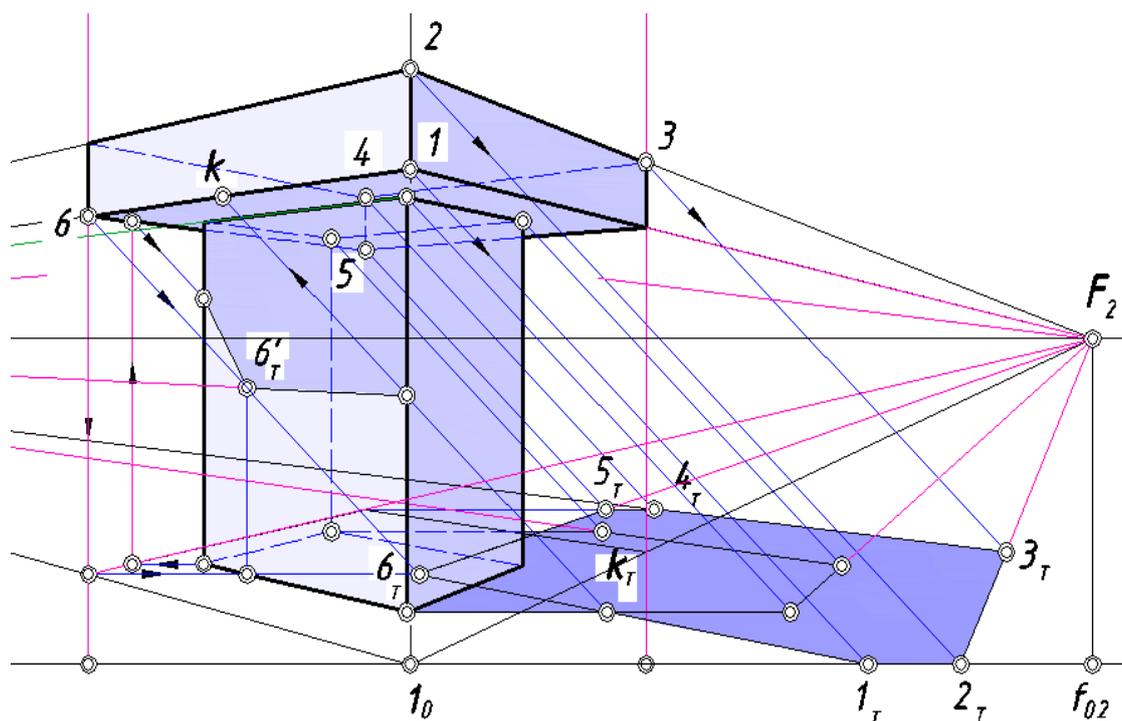


Рис. 138. Собственные и падающие тени объекта

Цвет падающей тени зависит от объекта, на котором она оказалась (на траве, асфальте и т. п.) и имеет более густой оттенок по сравнению с собственной тенью, как показано на рисунке выше.

Задача 3

По заданным видам здания выполнить вид слева и построить собственные и падающие тени (рис.139).

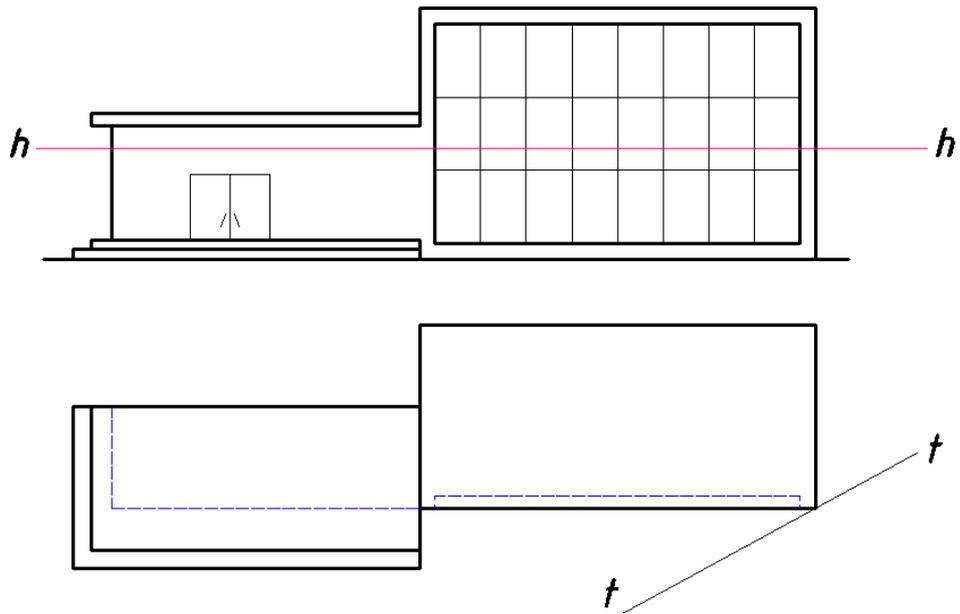


Рис. 139. Условие к задаче 3

Покажем на плане здания положение картинной плоскости, точку зрения, точки схода параллельных прямых двух направлений и проведем вспомогательные прямые для построения перспективы (рис.140).

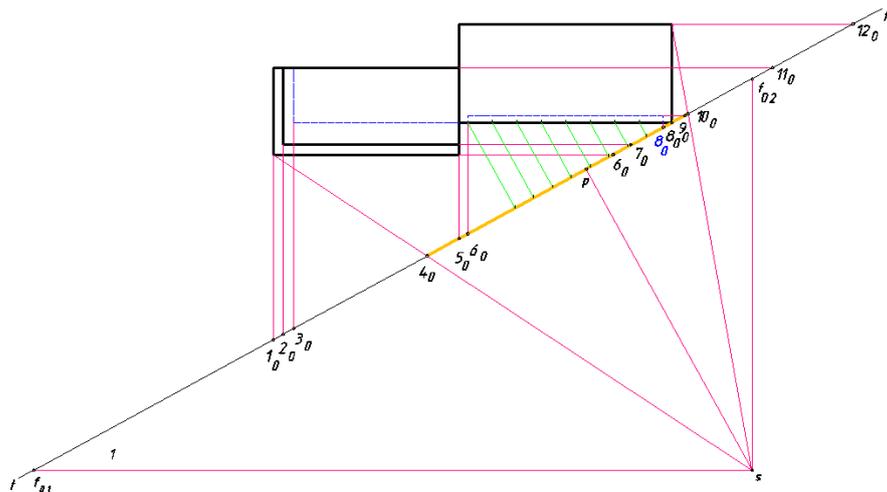


Рис. 140. Выбор картины и точки зрения на плане здания

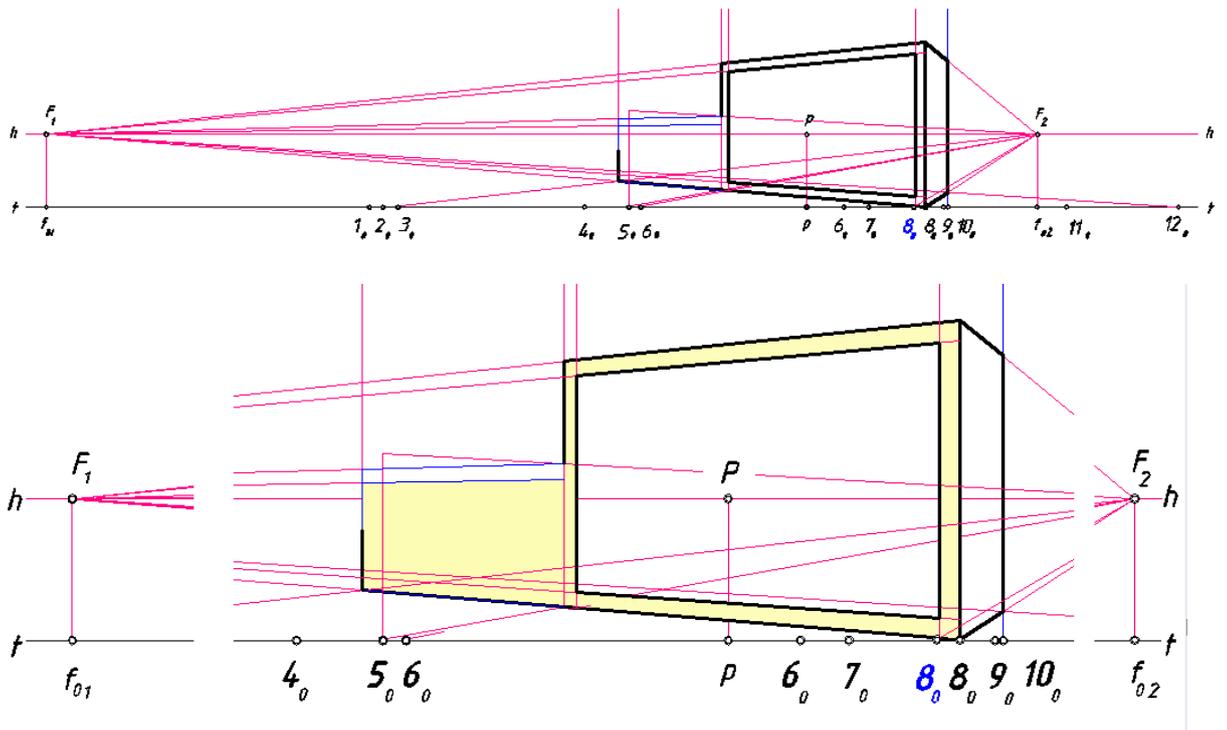


Рис. 141. Перспектива видимых стен здания

Нанесем на основании картины начальные точки прямых. Построим перспективу видимых стен здания (рис. 141).

Сформируем нишу в стене фасада. Фрагменты ниши с линиями построения показаны на рис. 142.

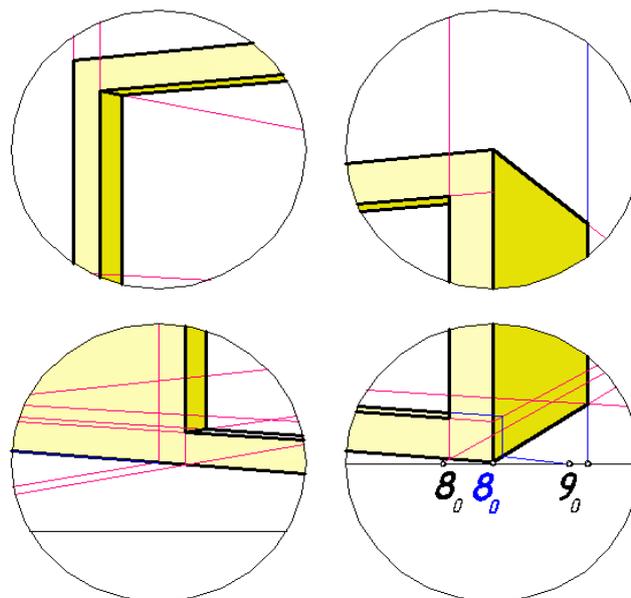


Рис. 142. Перспективы фрагментов ниши

По нанесенным на плане линиям начинаем построение ступенек (рис. 145).

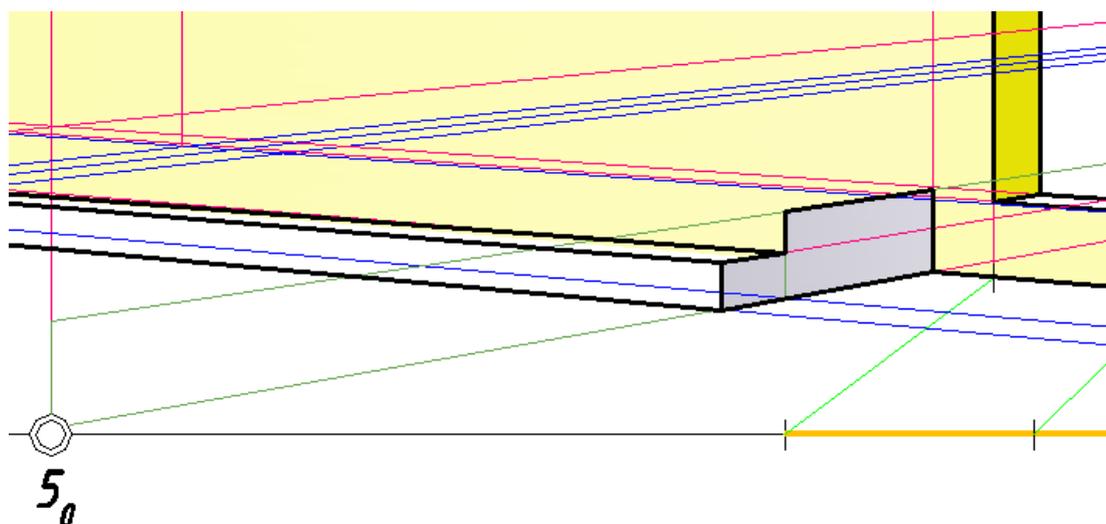


Рис. 145. Начало построения ступенек

По натуральным величинам вертикальных отрезков на картинной плоскости выполняем очертание профиля ступенек и правой части козырька (рис. 146).

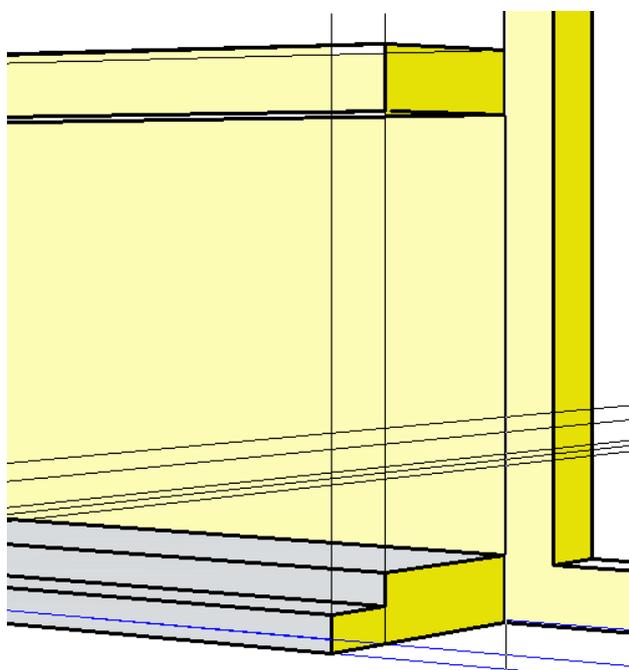


Рис. 146. Построение профиля ступенек и части козырька.

Строим левую часть лестницы и козырька (рис. 147).

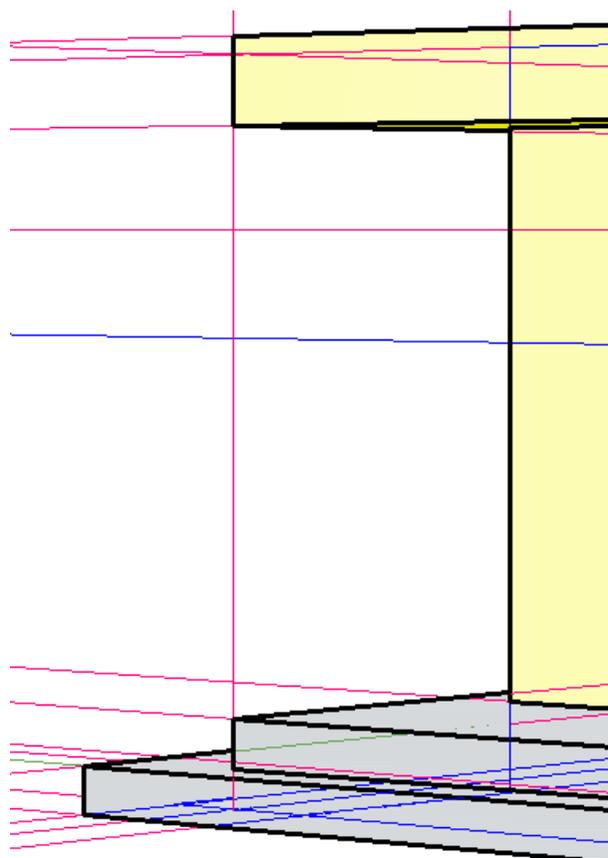


Рис. 147. Построение левого фрагмента здания

На рис. 148. показан увеличенный фрагмент части козырька, на котором видна грань, находящаяся в собственной тени,

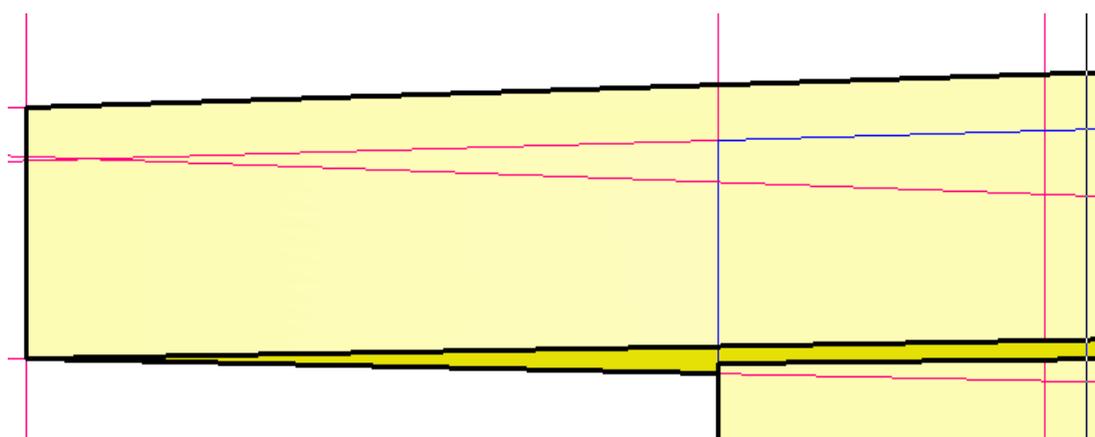


Рис. 148. Левая часть козырька

В приведенных выше рисунках на изображениях показывались собственные тени для полноценного восприятия

чертежа. Объяснений по поводу их построений не приводилось, поскольку ранее было рассмотрено на эту тему достаточное количество задач.

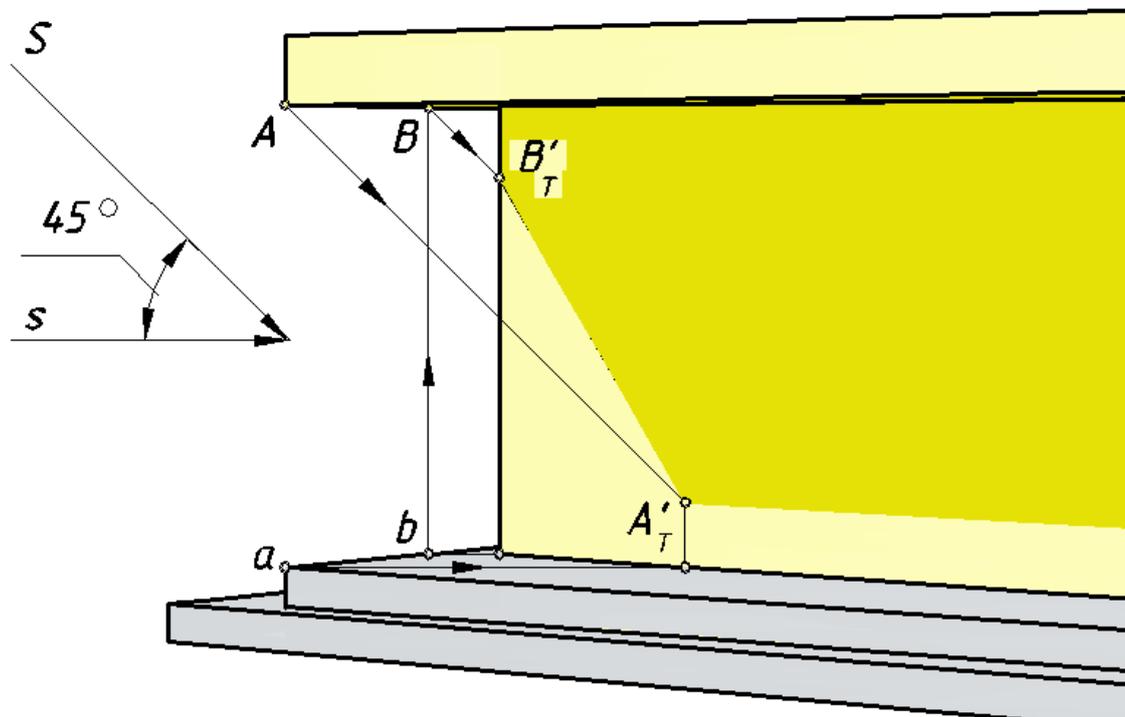


Рис. 149. Построение падающей тени козырька на стену здания

Падающие тени козырька (рис.149) следует строить от тех ребер, которые находятся на границе света и тени. Эту границу (контур собственной тени) хорошо видно на рис. 150.

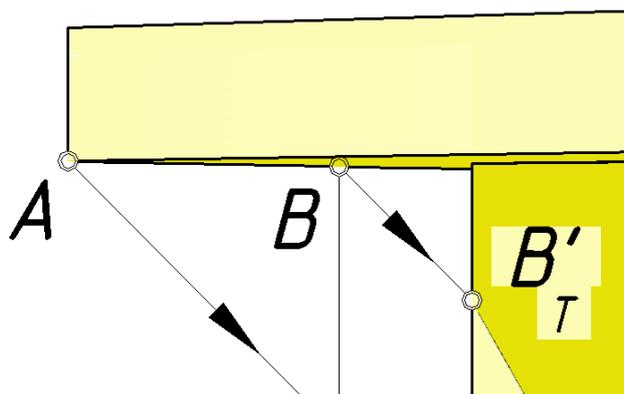


Рис. 150. Фрагмент козырька с собственной и падающей тенями

Элементами этого контура являются нижнее переднее ребро козырька, параллельное стене, и левое нижнее ребро, перпендикулярное стене. Точка *A* является общей для этих ребер. Для нахождения тени через нее проводим луч и строим его

вторичную проекцию. Пересечение луча со стеной произойдет в точке A_T' . Проводим через эту точку прямую в точку схода F_1 . С помощью обратного луча определяем точку B на ребре, перпендикулярном стене, которая отбросит тень на левое ребро стены. Отрезок $[A_T' B_T']$ – падающая тень *гвоздя* на стене.

На рис. 151 видно, что ребра профиля лестницы, параллельные земле, и их тени имеют общую точку схода F_2 , ребро [45] частично отбрасывает тень на стену, начиная от точки 6 , найденной с помощью обратного луча.

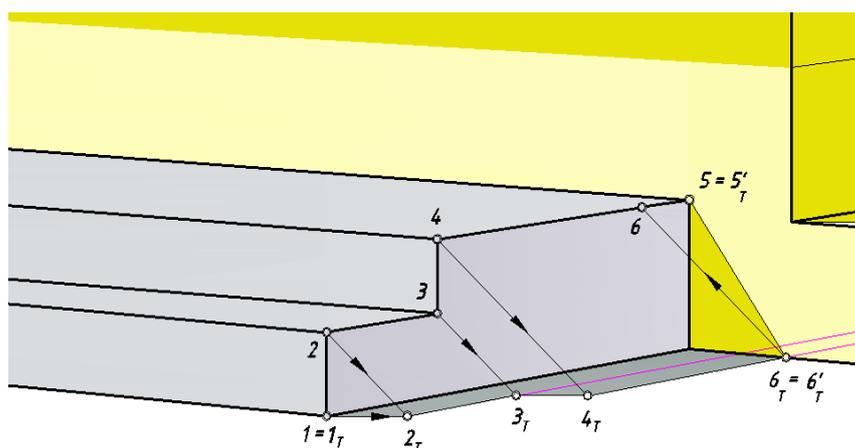


Рис. 151. Падающие тени от ступенек на земле и стене

Для нахождения тени козырька в нише можно поступить следующим образом. Вначале построить полное очертание падающей тени на стене без учета ниши (рис. 152). Определим тень точки A на плоскости стены (точку A_{1T}'). Соединим построенную точку с B_T' и изобразим реальную часть тени гвоздя на стене. Сместив точку A_{1T}' вглубь ниши до совпадения с ее задней гранью найдем на ней тень точки A (точку A_{1T}').

Можно было провести построения в обратном порядке. Вначале определить тень точки A в нише окна (точку A_T'). Затем найти в ней тени вертикального и горизонтального ребер.

На рис. 153 видна тень на подоконнике и на оконных стеклах от переднего вертикального ребра боковой грани ниши.

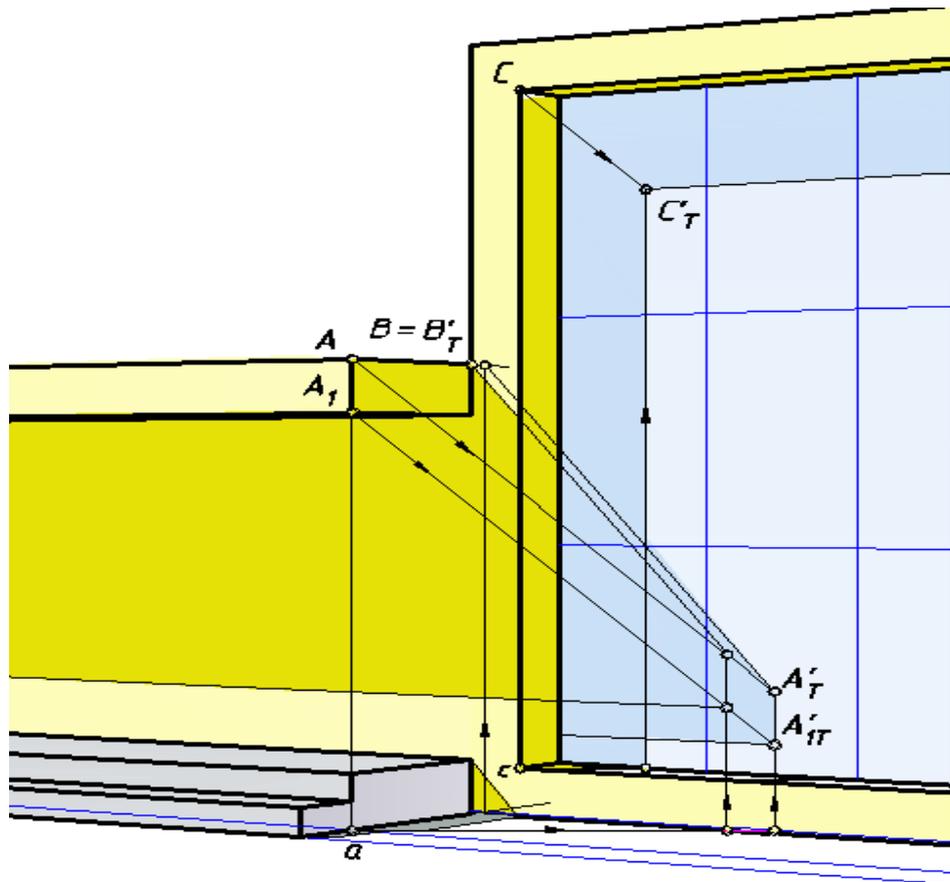
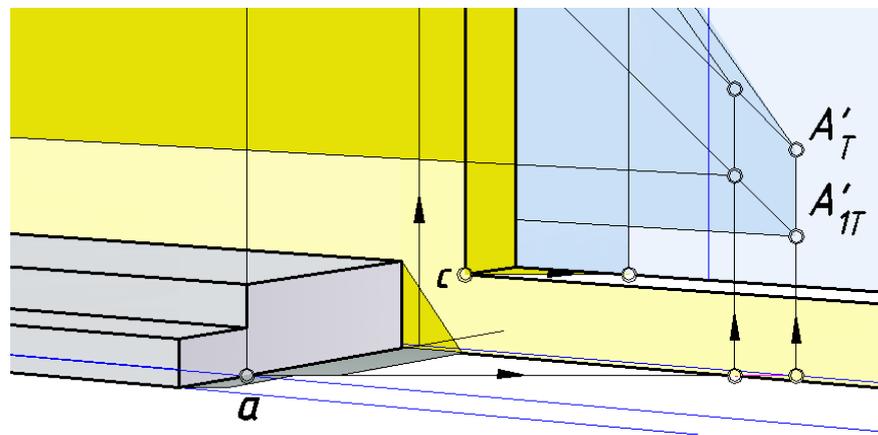


Рис. 152. Падающая тень козырька на стене и в нише



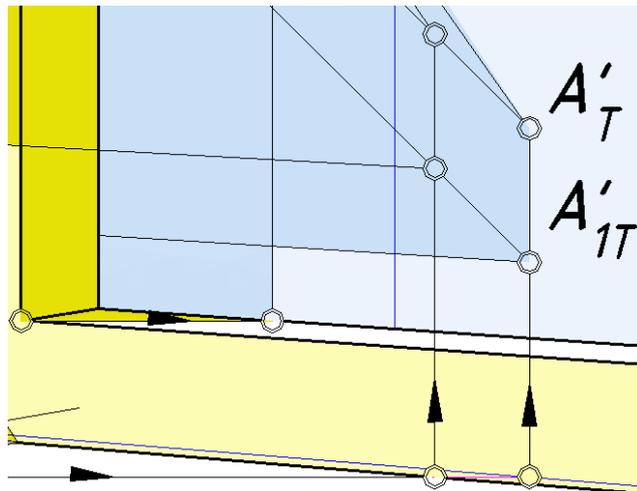


Рис. 153. Фрагмент построения падающей тени козырька

В правой части рис.153 видно, что вторичная проекция луча, проходящая через точку a , пересекает вторичную проекцию задней грани ниши. Через точку пересечения проведена вертикальная прямая, на которой отмечена точка A_T' .

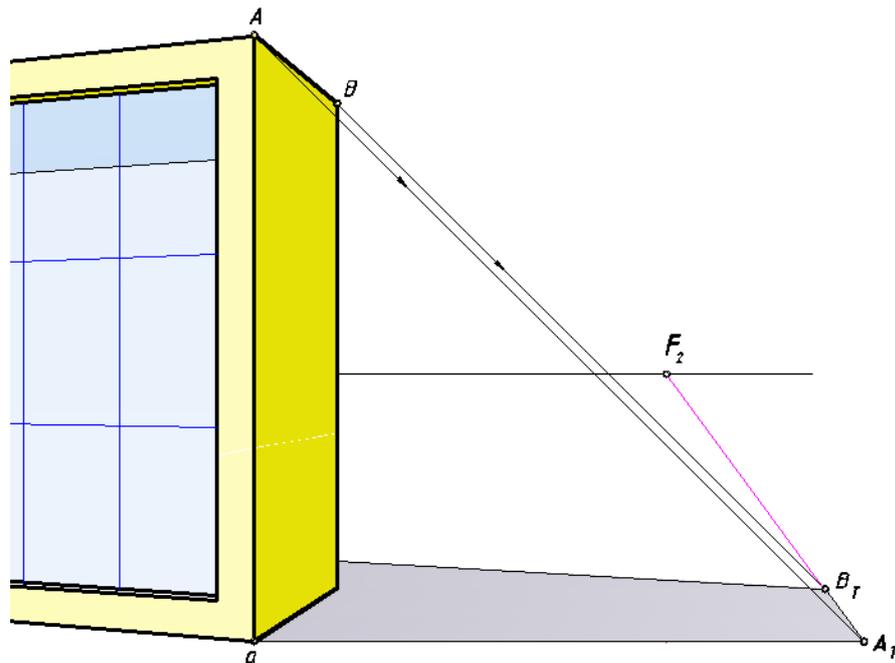


Рис. 154. Построение падающей тени здания на землю

При определении падающей тени здания (рис. 154) задействованы ребра, входящие в контур собственной тени. Это вертикальное ребро, находящееся в картинной плоскости, верхнее правое видимое ребро с точкой схода F_2 и верхнее невидимое ребро с точкой схода F_1 . Тени этих ребер на земле параллельны самим ребрам и имеют те же точки схода.

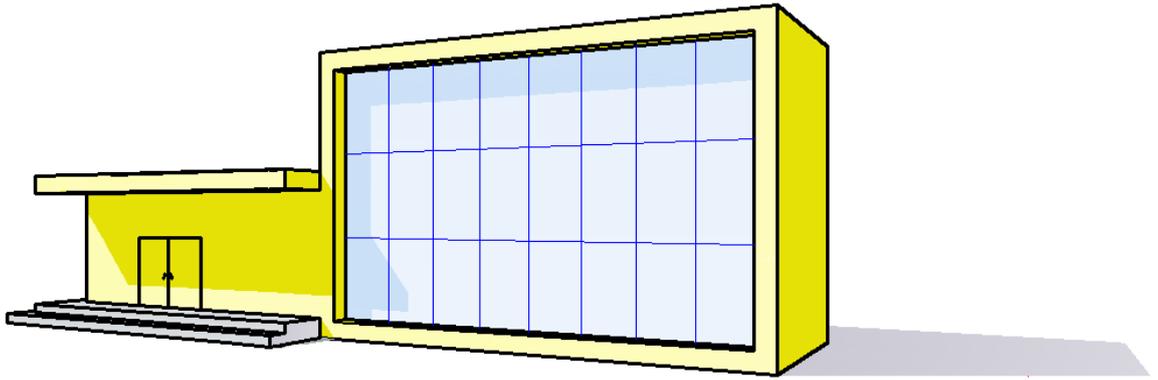


Рис. 155. Перспектива здания с собственными и падающими тенями

На завершеном изображении (рис. 155) показано, что падающие тени приобретают окраску той поверхности, на которую они отброшены, но тон окраски становится более густым.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Климухин А.Г.* Начертательная геометрия / А.Г. Климухин. – М.: Стройиздат, 1978.
2. *Кириллов А.Ф. / Соколовский М.С.* Черчение и рисование, 1966.
3. *Почуева Ю.А.* Тени и перспектива при архитектурно-строительном проектировании. УПИ-НТТИ., Нижний Тагил, 2008.
4. *Макарова М.Н.* Перспектива. Академический проект, 2002. 512 с.
5. *Пеклич В.А.* Начертательная геометрия. М., Изд. АСВ, 2000. 248 с.
6. *Mirhamidov J.X, Alaviya G.U, Abidov H.T.* Perspektiva va perspektivada soylar. Toshkent, "O'zbekiston", 2005.
7. *Мирхамидов Д.Х., Расул-Заде Л.Ў.* Ортогонал проекцияларда соялар. Тошкент. ТАҚИ, 2007.

ПРИЛОЖЕНИЯ

(Образцы студенческих работ)

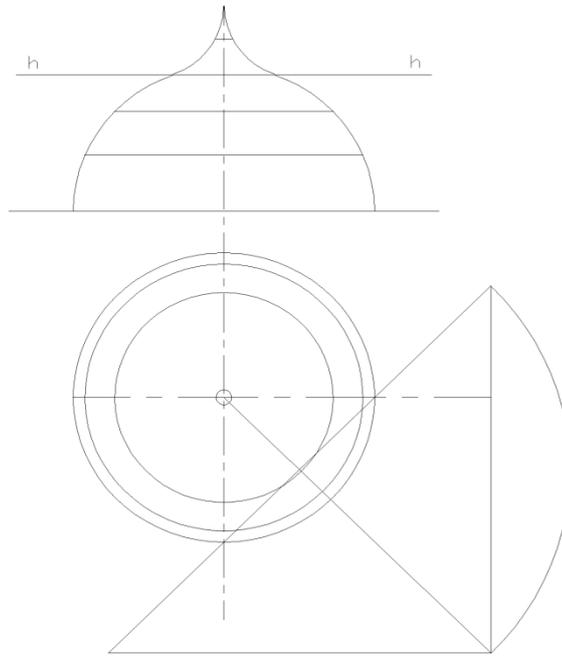


Рис. 156 Аппарат перспективы купола

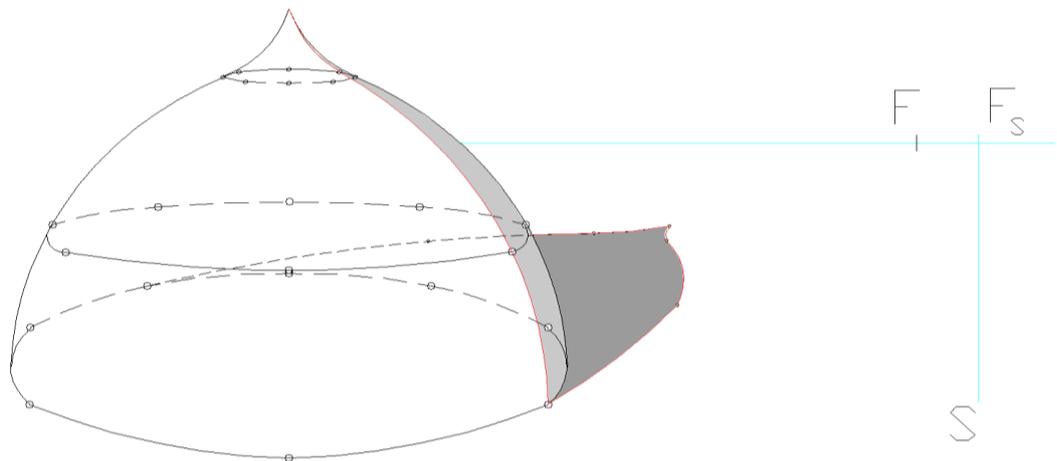


Рис. 157 Собственные и падающие тени купола

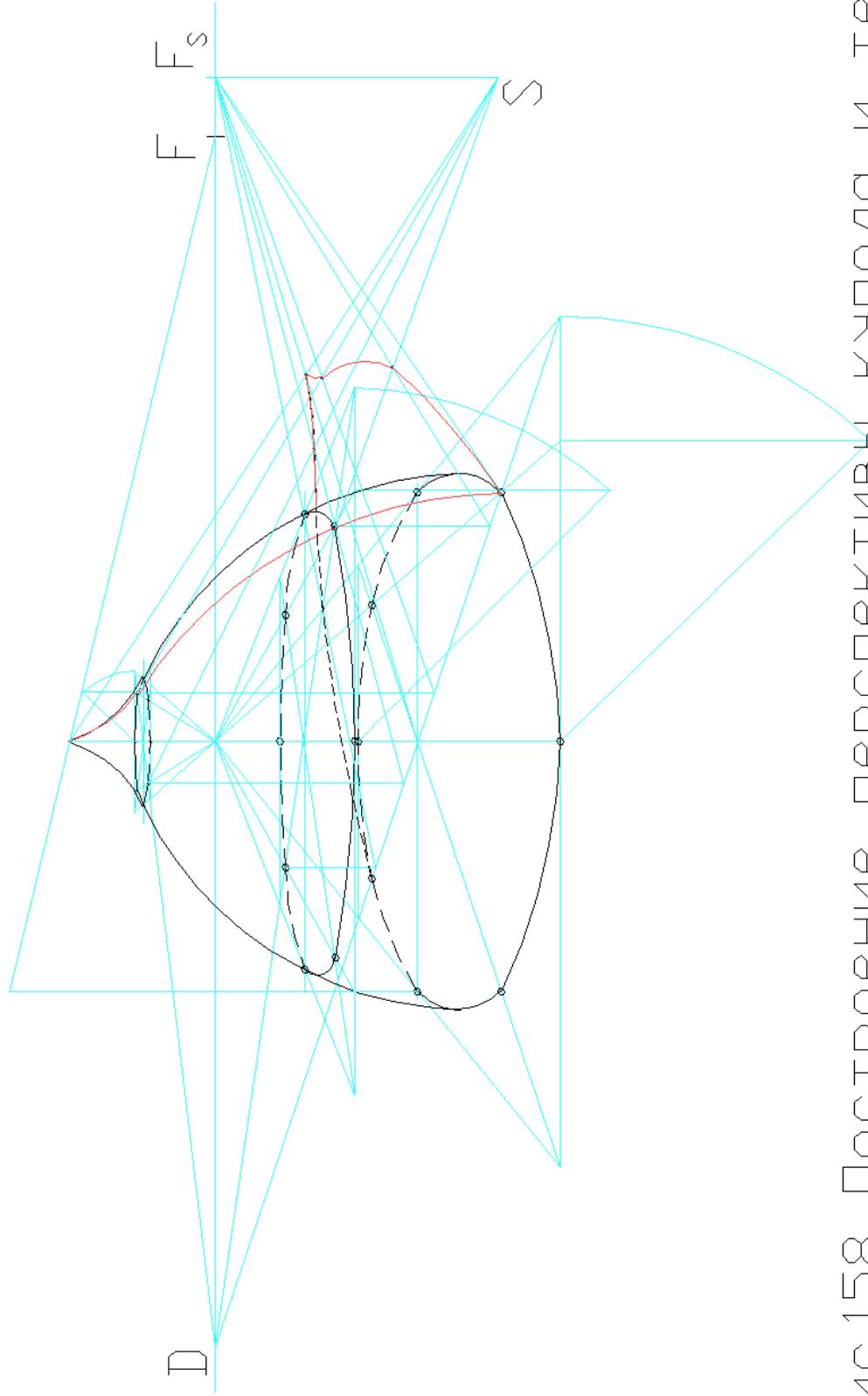


Рис.158 Построение перспективы купола и теней

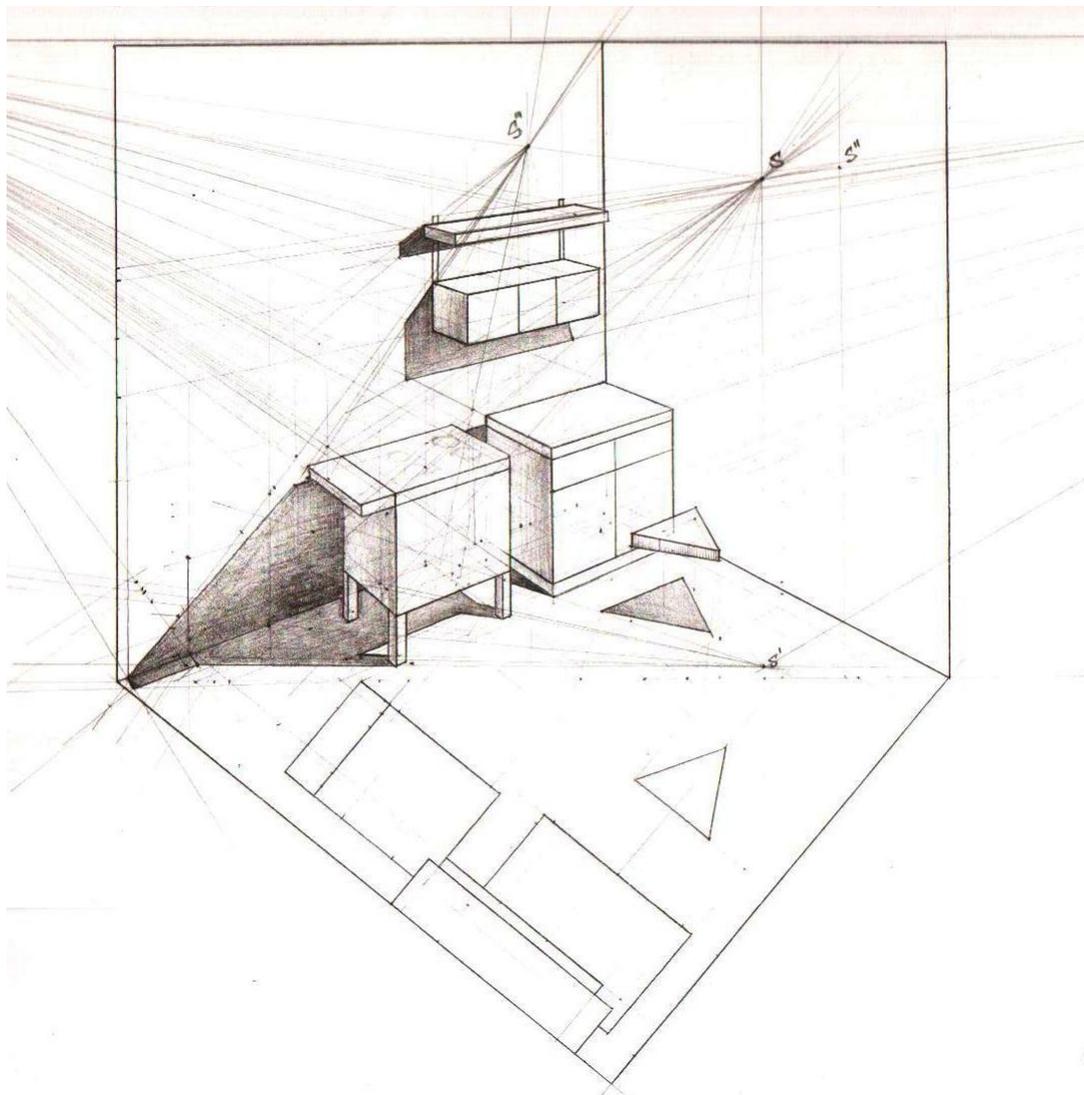


Рис.159 Интерьер угловой

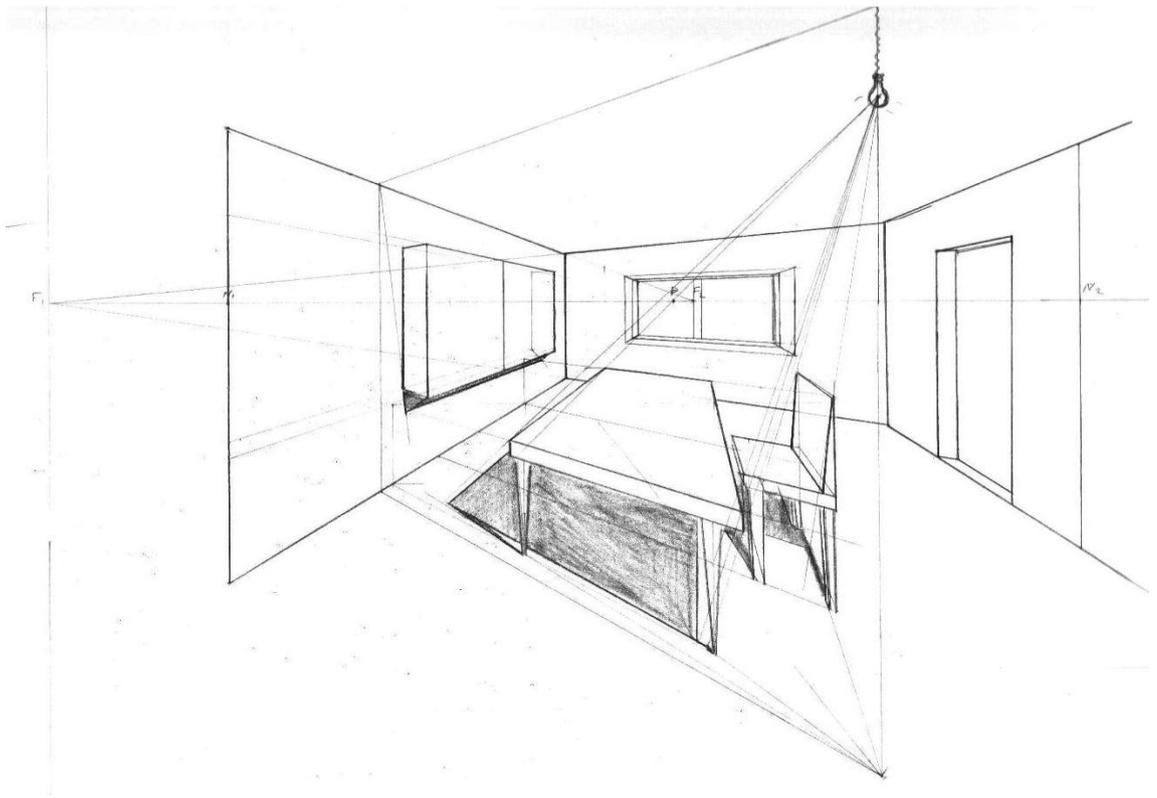


Рис.160 Интерьер фронтальный

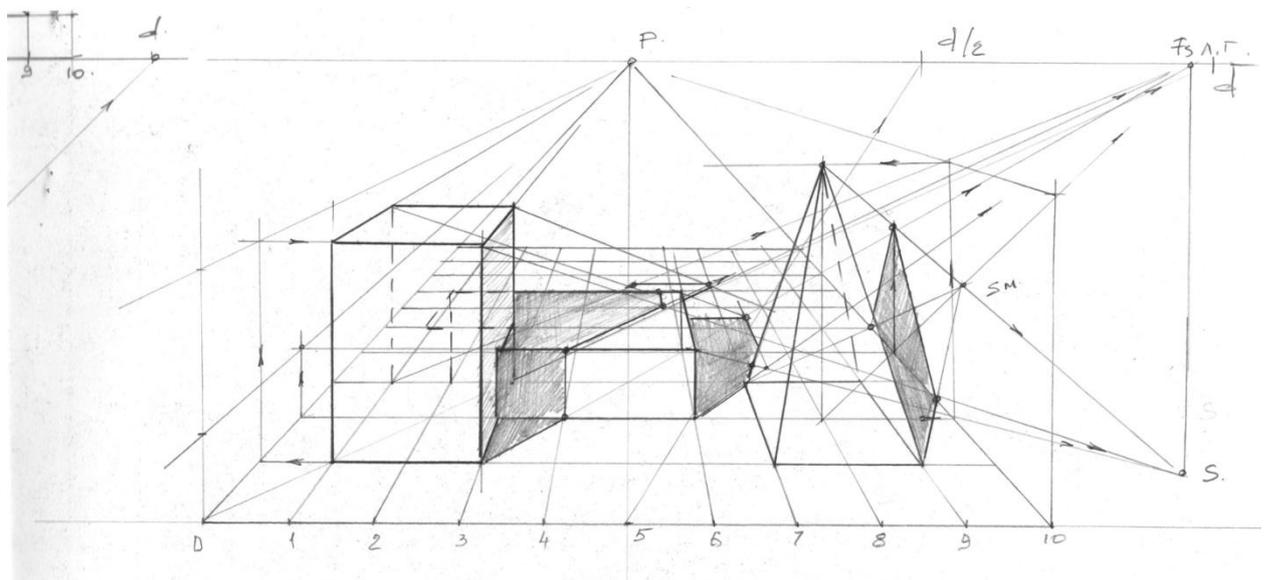


Рис.161 Перспектива при высокой точке зрения (птичий полет)

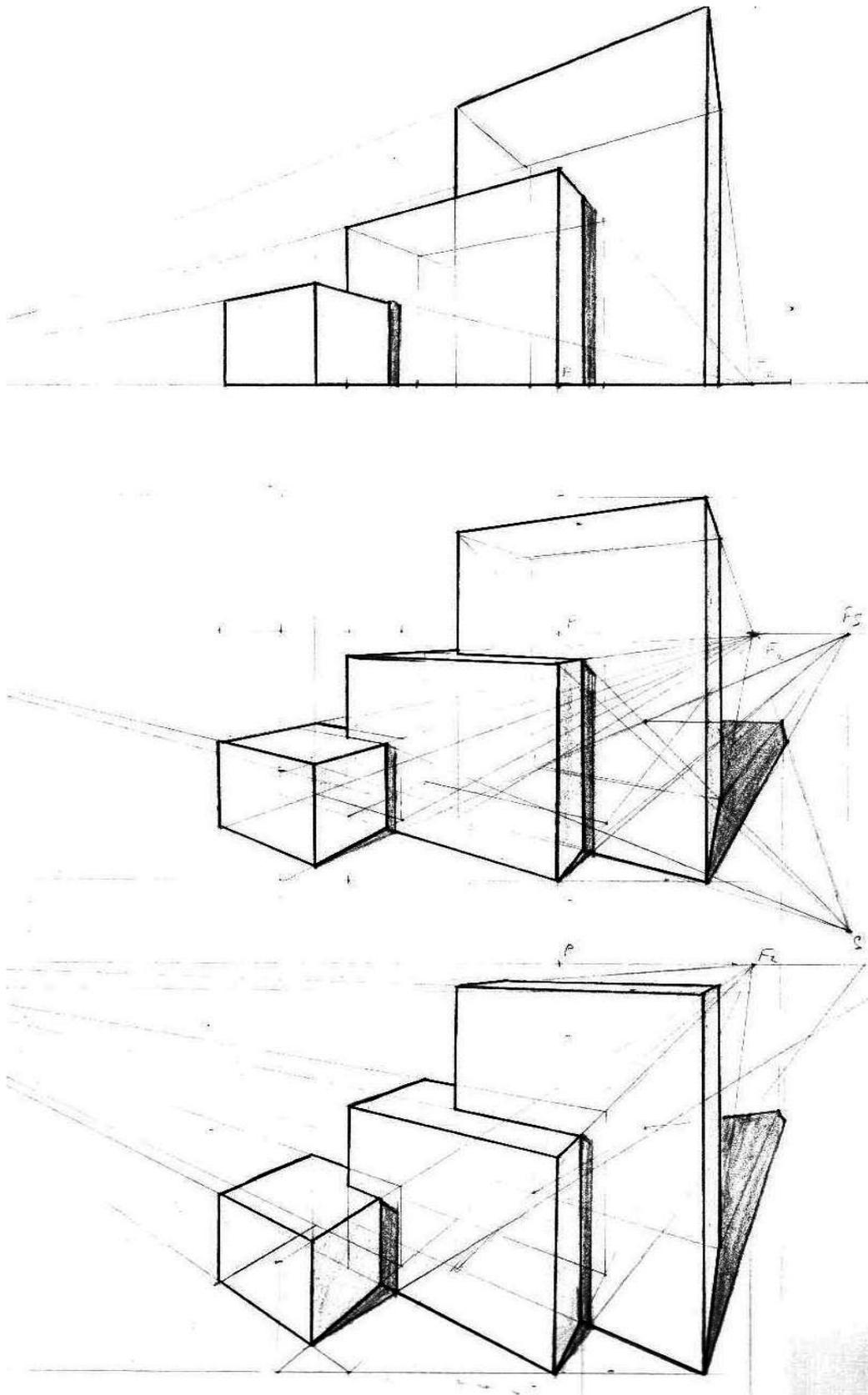


Рис.162 Перспектива группы тел при различной высоте точки зрения

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация	2
1. Общие сведения о тенях в архитектурном проектировании.	4
2. Основные понятия и определения	7
3. Тень точки	9
4. Тень прямой линии	12
4.1. Тень горизонтально-проецирующей прямой	12
4.2. Тень фронтально-проецирующей и горизонтально-проецирующей прямой.	14
4.3. Тень прямой, параллельной плоскости проекций	15
4.4. Тень прямой общего положения	16
5. Тени плоских фигур	17
6. Тени геометрических тел	27
6.1. Тени многогранников.....	27
6.2. Тени объемных тел, ограниченных кривыми поверхностями.	33
6.2.1. Тень поверхности цилиндра.....	33
6.2.2. Тень конической поверхности.....	42
6.2.3. Тень шара	47
6.2.4. Тень произвольного тела вращения	58
7. Тени фрагментов зданий	68
7.1. Тени в нишах	68
7.2. Тень козырька	70
7.3. Тень кронштейна	72
7.4. Тень от абаки на колонну	74
7.5. Тени на лестницах	77
7.6. Тень трубы.....	81
7.7. Тень от одного фрагмента здания на другой.....	84
7.8. Тень здания	86
7.9. Выполнение отмывки вручную	88
8. Краткие сведения о перспективе	89
8.1. Аппарат линейной перспективы	89
8.2. Перспектива прямых линий.....	93
8.3. Перспективный масштаб. Дистанционная точка.....	98

8.4. Перспектива плоской фигуры, лежащей в предметной плоскости	108
8.5. Рациональный выбор элементов перспективы	111
8.6. Перспектива объемного объекта	113
8.7. Построение перспективы окружности.....	120
8.8. Построение поверхностей вращения в перспективе.	121
8.9. Построение теней в перспективе	125
Список используемой литературы	149
ПРИЛОЖЕНИЯ	15050

МУНДАРИЖА

АННОТАЦИЯЛАР	2
1.АРХИТЕКТУРАВИЙ ЛОЙИҲАЛАШДА СОЯЛАР ҲАҚИДА УМУМИЙ МАЪЛУМОТЛАР	4
2. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР ВА КЎНИКМАЛАР	7
3. НУҚТА СОЯСИ	9
4. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ СОЯСИ	11
4.1. Горизонтал проекцияланувчи тўғри чизиқни сояси	11
4.2. Фронтал проекцияланувчи тўғри чизиқни сояси	13
4.3. Проекция текислигига параллел тўғри чизиқнинг сояси..	15
4.4. Умумий вазиятдаги тўғри чизиқни сояси	16
5. ЯССИ ШАКЛЛАРНИНГ СОЯСИ	17
6. ГЕОМЕТРИК ШАКЛЛАРНИНГ СОЯСИ	26
6.1. Кўпёкларнинг соялари	26
6.2. Эгри сиртлик жисмларнинг сояси	32
6.2.1. Цилиндрик жисмнинг сояси	32
6.2.2. Конуссимон жисмнинг сояси	41
6.2.3. Шар сояси	46
6.2.4. Ихтиёрий айланма сиртнинг сояси	57
7. БИНО ФРАГМЕНТЛАРИНИНГ СОЯЛАРИ	67
7.1. Токчалардаги соялар.....	67
7.2. Соябон сояси	69
7.3. Кронштейн сояси.....	71
7.4. Абакани устинга тушган сояси	73
7.5. Зинадаги соялар.....	76
7.6. Мўри сояси.....	80
7.7. Бино бир фрагментидан бошқа фрагментига тушган соя...	83

7.8. Бино сояси	85
7.9. Сояларни бўяш	87
8. ПЕРСПЕКТИВА ҲАҚИДА ҚИСҚА МАЪЛУМОТЛАР	88
8.1. Чизикли перспектива аппарати	88
8.2. Тўғри чизиклар перспективаси	92
8.3. Перспектив масштаб. Дистанцион нуқта	97
8.4. Нарсалар текислигида ётган ясси шаклнинг перспективаси	107
8.5. Перспектива элементларини режали танлаш	110
8.6. Хажмли объектни перспективаси	112
8.7. Айлананинг перспективасини яшаш	119
8.8. Айланма сиртларни перспективада яшаш	120
8.9. Перспективада соялар яшаш	124
Адабиётлар.....	149
ИЛОВАЛАР.....	150

CONTENTS

Summary	2
1. General information about shadows in architectural design.	3
2. Main concepts and definitions	6
3. Shadow of a point	8
4. Shadow of a straight line	10
4.1. A shadow of a horizontally projecting straight line	10
4.2. A shadow face-to-face a projecting and horizontally projecting straight line.....	12
4.3. Shadow of the straight line parallel to the plane of projections	14
4.4. Shadow of a straight line of the general provision	15
5. Shadows of flat figures	16
6. Shadows of solids	25
6.1. Shadows of polyhedrons	25
6.2. Shadows of the volume bodies limited to curve surfaces.....	31
6.2.1. Shadow of a surface of the cylinder.....	31
6.2.2. Shadow of a conic surface	40
6.2.3. Shadow of a sphere	45
6.2.4. Shadow of any body of rotation	55
7. Shadows of fragments of buildings	66
7.1. Shadows in niches	66
7.2. Shadow of a peak	68
7.3. Shadow of an arm	70
7.4. A shadow from an abacus on a column	72
7.5. Shadows on ladders	75
7.6. Shadow of a pipe	79
7.7. A shadow from one fragment of a building on another	82
7.8. Shadow of a building	84

7.9. Otmývka performance manually	86
8. Short data on prospect	95
8.1. Device of linear prospect	95
8.2. Prospect of straight lines	99
8.3. Perspective scale. Remote point	104
8.4. Prospect of the flat figure lying in the subject plane	115
8.5. Rational choice of elements of prospect	118
8.6. Prospect of volume object	120
8.7. Creation of prospect of a circle	127
8.8. Creation of surfaces of rotation in the long term	128
8.9. Creation of shadows in the long term	132
The list of used literature	149
APPENDICES	150