МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. НИЗАМИ
ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

"Разрешить к защите"
Декан факультета, к.ф.-м.н.
_____________ Г.Ф.Джаббаров
"____" __________________ 2014 г.

Студент направления"5140100-математика"

Шаниязов Ислам Абатович
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему: **Методы решения уравнений, содержащих параметр**"

Выполнил:___________И.А. Шаниязов
Научный руководитель:
Старший преподаватель кафедры
«"Математика и методика ее
преподавания" »
к.ф.-м.н. _________________М. Баракаев
Рецензенты:
Старший преподаватель кафедры
«"Математика и методика ее
преподавания" »
_________________Ж.Ю.Сапарбоев

Заместитель директора «Колледжа
предпринимательства» по учебной части
_______________________М. Хасанова

"Допустить к защите"
Заведующий кафедрой "Математика
и методика ее преподавания"
д.ф.-м.н. _____________ Р.Б.Бешимов
"____" __________________ 2014 г.

Ташкент 2014 год

Содержание

Введение

Разнообразие мнений в реализации приоритетов дальнейшего развития системы непрерывного, в особенности профессионального, образования, обеспечения должного качества подготовки кадров, способных удовлетворить сложные и разнообразные потребности инновационной экономики страны, предопределяют необходимость систематического анализа хода осуществления Национальной программы по подготовке кадров, совершенствование исследований Национальной модели образования в контексте динамичных прогрессивных изменений в экономике, социальной, культурной и духовной сферах, развития самой системы образования, с учетом кардинального обновления материально-технической базы, масштабного использования новой техники и технологий, включая ИКТ, в образовательных учреждениях. На этой основе возможна выработка верных подходов и механизмов реализации как базовых, стратегических задач Национальной программы, так и обоснование ее современных акцентов.

Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр. Решение задач с параметрами вызывает большие трудности у учащихся, так как их изучение не является отдельной составляющей школьного курса математики, и рассматривается только на немногочисленных факультативных занятиях.

Трудности при изучении данного вида уравнений связаны со следующими их особенностями:

- Обилие формул и методов, используемых при решении уравнений данного вида;
- Возможность решения одного и того же уравнения, содержащего параметр различными методами;

Выше изложенное обусловило проблему исследования, которая заключается в исследовании целесообразности и возможности изучения методов решения уравнений, содержащих параметры, в старших классах средней школы и в разработке соответствующей методики. Решение этой проблемы составило цель исследования.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре в 7-9 классах и алгебре и началам анализа в академических лицеях.

Предметом исследования являются классы уравнений, содержащих параметры, и их методы решения.

Гипотеза исследования: применение разработанной на основе общих методов решения уравнений, содержащих параметры, методики их решения позволит учащимся решать уравнения, содержащие параметры, на сознательной основе, выбирать наиболее рациональный метод решения, применять разные методы решения.

Проблема, предмет, гипотеза исследования обусловили следующие задачи:

1. проанализировать действующие учебники алгебры и начала анализа для выявления в них использования понятия «параметра» и методов решения уравнений, содержащих параметр;
2. выделить классы уравнений, содержащих параметры, и их методы решения;
3. разработать программу факультативных занятий на тему «Методы решения уравнений, содержащих параметр»;
4. осуществить опытное преподавание.

1. Теоретические основы решения уравнений, содержащих параметр

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, z, б, в, \ \ldots, г) = 0 \qquad (F)$$

с неизвестными $x, \ y, \ \ldots, \ z$ и с параметрами $\alpha, \beta, \ \ldots, \gamma$. При всякой допустимой системе значений параметров α_0, β_0, ..., γ_0 уравнение (F) обращается в уравнение

$$\mathrm{F}(x, y, \ldots, z, б, в, \ \ldots, г) = 0 \qquad (F_0)$$

с неизвестными $x, \ y, \ldots,$ z, не содержащих параметров. Уравнение (F_0) имеет некоторое вполне определенное множество (быть, может, пустое) решений.

Аналогично рассматриваются неравенства и системы, содержащие параметры. Допустимыми системами значений параметров считаются системы, допустимые для каждого уравнения в отдельности.

Определение. *Решить уравнение, содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения.*

Понятие эквивалентности применительно к уравнениям, содержащие параметр, устанавливается следующим образом.

Определение. *Два уравнения*

$F(x, y, \ldots, z; \ \alpha, \beta, \ \ldots, \gamma) = 0 \qquad (F)$,

$\Phi(x, y, \ldots, z; \ \alpha, \beta, \ \ldots, \gamma) = 0 \qquad (\Phi)$

с неизвестным $x, \ y, \ldots, \ z$ *и с параметрами* $\alpha, \beta, \ \ldots, \gamma$ *называются эквивалентными, если для обоих уравнений множество допустимых систем значений параметров одно и то же и при всякой допустимой системе значений, параметров оба уравнения эквивалентны.*

Итак, *эквивалентные уравнения при всякой допустимой системе значений параметров имеют одно и то же множество решений.*

Преобразование уравнения, изменяющее множество допустимых систем значений параметров, приводит к уравнению, не эквивалентному данному уравнению.

Предположим, что каждое из неизвестных, содержащихся в уравнении

$F(x, y, z; \alpha, \beta, \ldots, \gamma)=0 \quad (F)$

задано в виде некоторой функции от параметров:

$x = x(\alpha, \beta, \ldots, \gamma);$

$y = y(\alpha, \beta, \ldots, \gamma);$

$z = z(\alpha, \beta, \ldots, \gamma). \qquad (X)$

Говорят, что система функций (X), заданных совместно, удовлетворяет уравнению (F), если при подстановке этих функций вместо неизвестных x, y,..., z в уравнение (F) левая его часть обращается в нуль тождественно при всех допустимых значениях параметров:

$F(x(\alpha, \beta, \ldots, \gamma), y(\alpha, \beta, \ldots, \gamma), \ldots, z(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)) \equiv 0.$

При всякой допустимой системе численных значений параметров $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, $\ldots, \gamma = \gamma_0$ соответствующие значения функций (X) образуют решение уравнения.

2. Основные виды уравнений, содержащих параметр

2.1. Линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр

Линейные и квадратные уравнения, содержащие параметр, можно объединить в одну группу – группу уравнений с параметром не выше второй степени.

Уравнения с параметром не выше второй степени являются самыми распространенными в практике итоговых и конкурсных заданий. Их общий вид определяется многочленом $F(a,x)=f(a)x^2+g(a)x+h(a)$. Для таких уравнений всякое частное уравнение не выше второй степени принадлежит одному из следующих типов:

1. $f(a)=g(a)=h(a)=0$, тогда $x\in(-\infty;+\infty)$,
2. $f(a)=g(a)=0$ и $h(a)\neq 0$, тогда решений нет,
3. $f(a)=0$ и $g(a)\neq 0$, тогда $x=-\dfrac{h(a)}{g(a)}$,
4. $f(a)\neq 0,\ D=g^2(a)-4f(a)h(a)=0$, тогда $x=-\dfrac{g(a)}{2f(a)}$,
5. $f(a)\neq 0,\ D<0$, тогда решений нет,
6. $f(a)\neq 0,\ D>0$, тогда $x=\dfrac{-g(a)\pm\sqrt{D}}{2f(a)}$.

Контрольные значения параметра определяются уравнением $D=0$. На выделенных контрольными значениями промежутках допустимых значений параметра дискриминант имеет определенный знак, соответствующие частные уравнения принадлежат одному из двух последних типов.

Тогда решением всякого уравнения с параметром не выше второй степени осуществляется по следующим этапам:

1. На числовой прямой отмечаются все контрольные значения параметра, для которых соответствующие частные уравнения не определены.

2. На области допустимых значений параметра исходного уравнения при помощи равносильных преобразований приводится к виду $F(a,x) = f(a)x^2 + g(a)x + h(a)$.

3. Выделяют множество контрольных значений параметра, для которых $f(a) = 0$.

Если уравнение $f(a) = 0$ имеет конечное множество решений, то для каждого найденного контрольного значения параметра соответствующее частное уравнение решается отдельно. Проводится классификация частных уравнений по первым трем типам.

На бесконечном множестве решений уравнения $f(a) = 0$ проводится решение уравнения $g(a) = 0$, выделяются типы бесконечных и пустых особых частных уравнений. Множеству значений параметра, для которых $f(a) = 0$ и $g(a) \neq 0$, соответствует третий тип не особых частных уравнений.

4. Выделяются контрольные значения параметра, для которых дискриминант обращается в нуль. Соответствующие не особые частные уравнения имеют двукратный корень $x = -\dfrac{g(a)}{2f(a)}$.

5. Найденные контрольные значения параметра разбивают область допустимых значений параметра на промежутки. На каждом из промежутков определяется знак дискриминанта.

Множеству значений параметра, для которых $f(a) \neq 0$ и $D < 0$, соответствует тип не особых частных уравнений, не имеющих решений, для значений параметра из множества, где $f(a) \neq 0$ и $D > 0$, частные уравнения имеют два различных действительных корня.

Пример. Решить уравнение

$2a \cdot (a-2) \cdot x = a-2.$ (2)

Решение. Здесь контрольными будут те значения параметра, при которых коэффициент при x обращается в 0. Такими значениями являются, a=0 и a=2. При этих значениях параметра a, невозможно деление обеих частей уравнения на коэффициент при x. В то же время при значениях параметра $a\neq 0$ и $a\neq 2$ деление возможно. Таким образом, целесообразно множество всех действительных значений параметра разбить на подмножества

$A_1=\{0\}$, $A_2=\{2\}$ и $A_3=\{a\neq 0, a\neq 2\}$

и решить уравнение (2) на каждом из этих подмножеств, т. е. решить уравнение (2) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) $a=0$; 2) $a=2$; 3) $a\neq 0$, $a\neq 2$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $a=0$ уравнение (2) принимает вид $0\cdot x=2$. Это уравнение не имеет корней.

2) При $a=2$ уравнение (2) принимает вид $0\cdot x=0$. Корнем этого уравнения является любое действительное число.

3) При $a\neq 0$, $a\neq 2$ уравнение соответствует третьему типу откуда $x = \frac{a-2}{2a(a-2)} = \frac{1}{2a}$.

Ответ: 1) если $a=0$, то корней нет;

2) если $a=2$, то x — любое действительное число;

3) если $a\neq 0$, $a\neq 2$, то $x = \frac{1}{2a}$.

Пример. Решить уравнение

$$(a - 1)\cdot x^2+2\cdot (2a+1)\cdot x + (4a+3) =0. \qquad (3)$$

Решение. В данном случае контрольным значением параметра a является единица. Дело в том, что при $a=1$ уравнение (3) является линейным, а при $a \neq 1$ оно квадратное (в этом и состоит качественное изменение уравнения). Значит, целесообразно рассмотреть уравнение (3) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) $a=1$; 2) $a \neq 1$.

Рассмотрим эти случаи.

1) При $a=1$ уравнение (3) примет вид $6x+7=0$. Из этого уравнения находим $x = -\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a \neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (3) обращается в 0.

Дело в том, что если дискриминант $D=0$ при $a=a_o$, то при переходе значения D через точку a_o дискриминант может изменить знак (например, при $a<a_o$ $D < 0$, а при $a>a_o$ $D > 0$). Вместе с этим при переходе через точку a_o меняется и число действительных корней квадратного уравнения (в нашем примере при $a<a_o$ корней нет, так как $D < 0$, а при $a>a_o$ $D > 0$ уравнение имеет два корня). Значит, можно говорить о качественном изменении уравнения. Поэтому значения параметра, при которых обращается в 0 дискриминант квадратного уравнения, также относят к контрольным значениям.

Составим дискриминант уравнения (3):

$\frac{D}{4} = (2a+1)^2 - (a-1)(4a+3)$. После упрощений получаем $\frac{D}{4} = 5a+4$.

Из уравнения $\frac{D}{4}=0$ находим $a = -\frac{4}{5}$ — второе контрольное значение параметра *a*. При этом если $a < -\frac{4}{5}$, то $D < 0$; если $a \geq -\frac{4}{5}$, то $D \geq 0$; и $a \neq 1$.

Таким образом, осталось решить уравнение (3) в случае, когда $a < -\frac{4}{5}$ и в случае, когда $a \geq -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$.

Если $a < -\frac{4}{5}$, то уравнение (3) не имеет действительных корней;

если же $a > -\frac{4}{5}$ и $a \neq 1$, то находим $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$;

если $a = -\frac{4}{5}$, то $D = 0$ и тогда $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

2) если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

3) если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

4) если $\begin{cases} a > -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$ то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

2.2. Дробно-рациональные уравнения, содержащие параметр, сводящиеся к линейным

Процесс решения дробно-рациональных уравнений протекает по обычной схеме: данное уравнение заменяется целым путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. После чего учащиеся решают известным им способом целое уравнение, исключая посторонние корни, то есть числа, которые обращают общий знаменатель в нуль. В случае уравнений с параметрами эта задача более сложная. Здесь, чтобы посторонние корни исключить, требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решать соответствующие уравнения относительно параметра.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}. \qquad (4)$$

Решение. Значение a=0 является контрольным. При a=0 уравнение (4) теряет смысл и, следовательно, не имеет корней. Если $a \neq 0$, то после преобразований уравнение (4) примет вид:

$$x^2+2(1 - a)x + a^2 - 2a - 3=0. \qquad (5)$$

Найдем дискриминант уравнения (5) $\frac{D}{4} = (1 - a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = 4$.

Находим корни уравнения (5): $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$. При переходе от уравнения (4) к уравнению (5) расширилась область определения уравнения (4), что могло привести к появлению посторонних корней. Поэтому необходима проверка.

Проверка. Исключим из найденных значений x такие, при которых $x_1+1=0$, $x_1+2=0$, $x_2+1=0$, $x_2+2=0$.

Если $x_1+1=0$, т. е. $(a+1)+1=0$, то $a = -2$.

Таким образом, при $a = -2$ x_1-посторонний корень уравнения (4).

Если $x_1+2=0$, т. е. $(a+1)+2=0$, то $a = -3$.

Таким образом, при $a = -3$ x_1- посторонний корень уравнения (4).

Если $x_2+1 =0$, т. е. (a-3)+1=0, то a=2.

Таким образом, при a=2 x_2 - посторонний корень уравнения (4)'.

Если $x_2+2=0$, т. е. $(a - 3)+2=0$, то a=1.

Таким образом, при $a = 1$ x_2- посторонний корень уравнения (4).

При $a = -3$ получаем $x = -6$; при $a = -2$ $x = -5$;

При a=1 $x = 1+1=2$; при a=2 x=2+1=3. Итак, можно записать

Ответ: 1) если $a = -3$, то $x = -6$;

2) если $a = -2$, то $x = -5$;

3) если a=0, то корней нет;

4) если $a = 1$, то x=2;

5) если a=2, то x=3;

6) если $\begin{cases} a \neq -3 \\ a \neq -2 \\ a \neq 0 \\ a \neq 1 \\ a \neq 2 \end{cases}$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$.

2.3. *Иррациональные уравнения, содержащие параметр*

Главными особенностями при решении уравнений такого типа являются:

1. ограничение области определения неизвестной x, так как она меняется в зависимости от значения параметра.

2. в решении уравнений вида $\sqrt{f(x,a)} = g(x,a)$ при возведении в квадрат необходимо учитывать знак $g(x,a)$ и проводить проверку корней.

При рассмотрении всех особых случаев и возведении обеих частей иррационального уравнения в квадрат мы переходим к решению квадратного уравнения с параметром.

Рассмотрим несколько примеров и попробуем заметить эти особенности при решении.

Пример. Решить уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$. (6)

Решение: метод решения: возведем в квадрат обе части иррационального уравнения с последующей проверкой полученных решений.

Перепишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{a - x^2} = x - 1 \qquad (7)$$

При возведении в квадрат обеих частей исходного уравнения и проведения тождественных преобразований получим:

$2x^2 - 2x + (1 - a) = 0$, $D = 2a - 1$.

Особое значение: $a = 0{,}5$. Отсюда:

1) при $a > 0{,}5$ $x_{1,2} = 0{,}5\cdot(1 \pm \sqrt{2a-1})$;

2) при $a = 0{,}5$ $x = 0{,}5$;

3) при $a < 0{,}5$ уравнение не имеет решений.

Проверка:

1) при подстановке $x = 0{,}5$ в уравнение (7), равносильное исходному, получим неверное равенство. Значит, $x = 0{,}5$ не является решением (7) и уравнения (6).

2) при подстановке $x_2 = 0{,}5\,(1 - \sqrt{2a-1})$ в (7) получим:

$-0{,}5\,(1 + \sqrt{2a-1}) = \sqrt{a - (0{,}5\,(1+\sqrt{2a-1}))^2}$

Так как левая часть равенства отрицательна, то x_2 не удовлетворяет исходному уравнению.

3) Подставим $x_1 = 0{,}5\,(1 + \sqrt{2a-1})$ в уравнение (7):

$$\sqrt{a - \left(\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}\right)^2} = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2} - 1.$$

Проведя равносильные преобразования, получим:

Если $\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2} \geq 0$, то можно возвести полученное равенство в квадрат:

$$\frac{a-\sqrt{2a-1}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2}\right)^2.$$

Имеем истинное равенство при условии, что $\frac{\sqrt{2a-1}-1}{2} \geq 0$.

Это условие выполняется, если $a \geq 1$. Так как равенство истинно при $a \geq 1$, а x_1 может быть корнем уравнения (6) при $a > 0{,}5$, следовательно, x_1– корень уравнения при $a \geq 1$.

Ответ.

1. при $a \geq 1$ $x = 0{,}5\cdot(1 + \sqrt{2a-1})$;

2. при $a < 1$ уравнение не имеет решений.

2.4. Показательные уравнения, содержащие параметр

Большинство показательных уравнений с параметрами сводится к показательным уравнениям вида: $a^{f(x)} = b^{\varphi(x)}$ (*), где $a>0$, $b>0$.

Область допустимых значений такого уравнения находится как пересечение областей допустимых значений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Для решения уравнения (*) необходимо рассмотреть следующие случаи:

1) При $a=b=1$ решением уравнения (*) является область его допустимых значений D.

2) При $a=1$, $b\neq1$ решением уравнения (*) служит решение уравнения $\varphi(x)=0$ на области допустимых значений D.

3) При $a\neq1$, $b=1$ решение уравнения (*) находится как решение уравнения $f(x) = 0$ на области D.

4) При $a=b$ ($a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$) уравнение (*) равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$ на области D.

5) При $a\neq b$ ($a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $b\neq1$) уравнение (*) тождественно уравнению $\log_c a^{f(x)} = \log_c b^{\varphi(x)}$ ($c>0$, $c\neq1$) на области D (см. [3]).

Пример. Решить уравнение: $a^{x+1} = b^{3-x}$

Решение. ОДЗ уравнения: $x \in R$, $a > 0$, $b > 0$.

1) При $a \leq 0, b \leq 0$ уравнение не имеет смысла;

2) При $a = b = 1$, $x \in R$;

3) При $a = 1, b \neq 1$ имеем: $b^{3-x} = 1$ или $3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$;

4) При $a \neq 1, b = 1$ получим: $a^{x+1} = 1$ или $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$;

5) При $a = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$) имеем: $x + 1 = 3 - x \Rightarrow x = 1$;

6) При $a = \frac{1}{b}$, $b \neq 0$ получим: уравнение $x+1 = x-3$, которое не имеет решения;

7) При $a \neq b$ и $a \neq \frac{1}{b}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) прологарифмируем исходное уравнение по основанию a, получим:

$$\log_a a^{x+1} = \log_a b^{3-x}, \quad x + 1 = (3 - x)\log_a b, \quad x = \frac{3\log_a b - 1}{\log_a b + 1}.$$

Ответ: при $a \leq 0$, $b \leq 0$ или $a = \frac{1}{b}$, $b \neq 0$ уравнение не имеет решений;

при $a = b = 1$, $x \in R$;

при $a = 1, b \neq 1$ $x = 3$;

при $a \neq 1, b = 1$ $x = -1$;

при $a = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) $x = 1$;

при $a \neq b$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$) $x = \frac{3\log_a b - 1}{\log_a b + 1}$.

2.5. Логарифмические уравнения, содержащие параметр

Решение логарифмических уравнений с параметрами сводится к нахождению корней элементарного логарифмического уравнения. Важным моментом решения уравнений такого типа является проверка принадлежности найденных корней ОДЗ исходного уравнения.

Пример. Решить уравнение

$2 - \log_{a^2}(1 + x) = 3\log_a \sqrt{x-1} - \log_{a^2}(x^2 - 1)^2$.

Решение. ОДЗ: $x > 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Осуществим на ОДЗ цепочку равносильных преобразований исходного уравнения:

$\log_a a^2 + \log_a(x^2 - 1) = \log_a (\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1}$,

$\log_a (a^2 (x^2 - 1)) = \log_a ((\sqrt{x-1})^3 \sqrt{x+1})$,

$a^2 (x^2 - 1) = (x - 1)\sqrt{(x-1)(x+1)}$,

$a^2 (x - 1)(x + 1) = (x - 1)\sqrt{(x-1)(x+1)}$.

Так как $x \neq -1$ и $x \neq 1$, сократим обе части уравнения на $(x - 1)$ и на $\sqrt{x+1}$. Тогда получим $a^2\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$.

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$a^4 (x + 1) = x - 1 \Rightarrow a^4 x + a^4 = x - 1 \Rightarrow x(1 - a^4) = a^4 + 1.$

Так как $a \neq -1$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$.

Для того чтобы значения x являлось решением уравнения, должно выполняться условие $x > 1$, то есть $\frac{1+a^4}{1-a^4} > 1$.

Выясним, при каких значениях параметра a, это неравенство истинно:

$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1 > 0$, $\frac{2a^4}{1-a^4} > 0$.

Так как $a > 0$, то полученная дробь положительна, если $1 - a^4 > 0$, то есть при $a < 1$.

Итак, при $0 < a < 1$ $x > 1$, значит при $0 < a < 1$ x является корнем исходного уравнения.

Ответ: при $a \leq 0$, $a = 1$ уравнение не имеет смысла;

при $a > 1$ решений нет;

при $0 < a < 1$ $x = \frac{1+a^4}{1-a^4}$.

Замечание: Тригонометрические уравнения, содержащие параметр, не рассматриваем, то есть, не рассматриваем методы решения уравнений такого вида, так как существует большое количество специфических методов решения, именно, тригонометрических уравнений, содержащих параметр. Для этих методов существует большое количество материала, исследование которого может рассматриваться, как отдельная тема.

3. Основные методы решения уравнений, содержащих параметр

3.1. Аналитический метод

4.1.1. Поиск решений уравнений, содержащих параметр. Метод «ветвления»

В самом начале знакомства с параметром у учеников возникает некий психологический барьер, который обусловлен противоречивыми характеристиками параметра. С одной стороны, параметр в уравнении следует считать величиной известной, а с другой – он может принимать различные значения. Получается, что параметр в уравнении – это неизвестная известная, переменная постоянная величина. Этот «каламбур» очень точно отражает существо тех сложностей, которые нужно преодолевать ученикам.

Именно этот факт и позволяет нам решать уравнения с параметром таким методом («ветвления»).

Пример. Решить уравнение $\sqrt{4^x - 6\cdot 2^x + 1} = 2^x - a$.

Решение. Пусть $2^x = t$. Тогда $\begin{cases} t > 0, \\ \sqrt{t^2 - 6t + 1} = t - a. \end{cases}$

Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} t > 0, \\ t \geq a, \\ t^2 - 6t + 1 = t^2 - 2at + a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t \geq a, \\ 2t(a-3) = a^2 - 1. \end{cases}$$

Очевидно, при $a = 3$ уравнение системы не имеет решения.

Если $a \neq 3$, то тогда

$$\begin{cases} t > 0, \\ t \geq a, \\ t = \dfrac{a^2 - 1}{a - 3}. \end{cases}$$

Следовательно, нужно проверить условия $t>0$ и $t \geq a$. То есть

$$\begin{cases} \dfrac{a^2-1}{2(a-3)} > 0, \\ \dfrac{a^2-1}{2(a-3)} \geq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a^2-1}{2(a-3)} > 0, \\ \dfrac{-a^2+6a-1}{2(a-3)} \geq 0. \end{cases}$$

решая из системы первое неравенство, получаем что $a \in (-1;1) \cup (3;+\infty)$.

Решением второго есть $(-\infty;3-2\sqrt{2}] \cup (3;3+2\sqrt{2}]$. Решением системы будет пересечение интервалов, а, именно, $a \in (-1;3-2\sqrt{2}] \cup (3;3+2\sqrt{2}]$.

Ответ. Если $a \in (-1;3-2\sqrt{2}] \cup (3;3+2\sqrt{2}]$, то $x = \log_2 \dfrac{a^2-1}{2(a-3)}$;

при остальных значениях параметра *a* уравнение решений не имеет.

Пример. Решить уравнение $m(\sin^2 x - 5\cos^2 x) = \cos x\sqrt{3m^2 + 5m^2 tg^2 x}$.

Решение. Имеем $m(\sin^2 x - 5\cos^2 x) = |m|\cos x\sqrt{3+5tg^2 x}$.

Достаточно рассмотреть три случая:

1. $m = 0 \Rightarrow x \in D_f = R / \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k\right\}, k \in Z$.

2. $m > 0$.

$\sin^2 x - 5\cos^2 x = \cos x\sqrt{3+5tg^2 x}$.

$(\sin^2 x - 5\cos^2 x)^2 = 3\cos^2 x + 5\sin^2 x,$

$(1-6\cos^2 x)^2 = 5 - 2\cos^2 x,$

$18\cos^4 x - 5\cos^2 x - 2 = 0.$

Делая замену $\cos^2 x = t, 0 \leq t \leq 1$, получаем, что $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. То есть $x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$. Проверим, являются ли найденные значения переменной корнями. Подставляя значения переменной в уравнение, получаем, что $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ не подходит, тогда корнями являются значения $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

3. $m<0$

$-\sin^2 x+5\cos^2 x=\cos x\sqrt{3+5tg^2 x},$

$(5-6\sin^2 x)^2=3+2\sin^2 x,$

$18\sin^2 x-31\sin^2 x+11=0.$

Делая замену $\sin^2 x=t, 0\le t\le 1$, получаем $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ или $\sin x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Аналогично, как и при $m>0$, проверкой устанавливаем, что только $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$ и $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$ не являются корнями. Тогда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$ является корнем. Итак,

Ответ. При $m<0$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$;

при $m=0, x\in D_f=R/\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k\right\}, k\in Z$;

при $m>0$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$.

4.1.2. Параметр и количество решений уравнений, содержащих параметр

Выделим класс задач, где за счет параметра на переменную накладывается какие-либо ограничения. Для таких задач характерны следующие формулировки:

- «При каком значении параметра уравнение имеет одно решение, два решения, бесконечно много, ни одного»;

- Решением уравнения (неравенства, системы) является какое-то подмножество множества действительных чисел и другие.

Пример. В зависимости от значения параметра a найти число корней уравнения

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{4}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}+\frac{1}{4}=a.$$

Решение. Наличие сложного корня наводит на мысль выделения квадрата двучлена под внешним корнем.

$$x+\sqrt{x+\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{4}}=a,$$

$$x+\sqrt{\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2}=a,$$

$$x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=a,$$

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)^2=a.$$

Итак, мы вплотную подошли к задаче рассмотрения различных случаев параметра a.

Если $a<0$, то уравнение не имеет решения.

Если $a\geq 0$, то рассмотрим $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}$. Если $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}>0$, то $\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\sqrt{a}$. При условии $a\geq\frac{1}{4}$, $x+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{2}\right)^2$, и очевидно это уравнение имеет только один корень.

Ответ. При $a\geq\frac{1}{4}$ – одно решение,

при $a<\frac{1}{4}$ – решений нет.

Пример. При каких значениях параметра k уравнение

$$\frac{x^2+(3-2k)x+4k-10}{\sqrt{2x^2-2x-1}}=0$$

имеет единственное решение?

Решение. Уравнение переписываем в равносильную систему

$$\begin{cases} 2x^2-2x-1>0, \\ x^2+(3-2k)x+4k-10=0. \end{cases}$$

Решением неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty;\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$. Уравнение системы имеет один корень когда $D=0$. $D=(2k-7)^2$, то есть при $k=\frac{7}{2}$ $x=2$.

Теперь проверим, принадлежит ли корень нашим интервалам: $x=2\in\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.Тогда

Ответ. При $k=\frac{7}{2}$ уравнение имеет единственное решение.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2-x+3)=2\log_{2ax+4}(x^2+2x+1).$$

имеет единственное решение?

Решение. Запишем равносильное уравнение.

$$\log_{2ax+4}(2x^2-x+3)=\log_{2ax+4}(x^2+2x+1).$$

Теперь перейдем к следствию $2x^2-x+3=x^2+2x+1$. Откуда $x_1=1$, $x_2=2$. Возникла ситуация, которая дает нам возможность воспользоваться механизмом отсеивания корней.

Область определения исходного уравнения найдем из условий

$$\begin{cases} 2x^2-x+1>0, \\ x^2+2x+1>0, \\ 2ax+4>0, \\ 2ax+4\neq 1. \end{cases}$$

Очевидно, x_1 и x_2 удовлетворяют первым двум условиям. Тогда для единственности решения достаточно потребовать

$$\begin{cases} 2ax_1+4>0, \\ 2ax_1+4\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 2ax_2+4\le 0, \\ 2ax_2+4=1. \end{array}\right. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2ax_2+4>0, \\ 2ax_2+4\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} 2ax_1+4\le 0, \\ 2ax_1+4=1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Найдем решение первой системы, преобразуем ее.

$$\begin{cases} a>-2, \\ a\neq -\frac{3}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -1, \\ a=-\frac{3}{4}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Имеем, что решением первой системы является объединение интервалов $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

Вторая система решения не имеет.

Ответ. $a\in\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right]\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

4.1.3. Параметр и свойства решений уравнений, содержащих параметр

В этом пункте мы рассмотрим задачи, в которых условие требует, чтобы ответ был каким-либо наперед заданным подмножеством или идут ограничения на множество значений переменной x.

Пример. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2-6ax+\sqrt{2-2a+9a^2}=0$ больше 3?

Решение. Корнями данного уравнения будут

$$x_1 = 3a + \sqrt{9a^2 - \sqrt{2 - 2a + 9a^2}},$$
$$x_2 = 3a - \sqrt{9a^2 - \sqrt{2 - 2a + 9a^2}}.$$

Для условия необходимо выполнение системы

$$\begin{cases} 3a + \sqrt{9a^2 - \sqrt{2 - 2a + 9a^2}} > 3, \\ 3a - \sqrt{9a^2 - \sqrt{2 - 2a + 9a^2}} > 3. \end{cases}$$

Первое неравенство системы и второе будут иметь общие точки только в том случае если выражение под корнем равно нулю.

Решим уравнение $9a^2 - \sqrt{2 - 2a + 9a^2} = 0$.

Ответ. Ни при каких значениях параметра a оба корня данного уравнения не могут быть больше 3.

4.1.4. Параметр как равноправная переменная

Во всех разобранных задач параметр рассматривался как фиксированное, но неизвестное число. Между тем с формальной точки зрения параметр – это переменная, причем равноправная с другими. Подобная интерпретация, естественно, формирует еще один тип (а точнее метод решения) задач с параметрами.

Пример. Указать все значения параметра a, для которых уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + \sin x}} = \sin x$ имеет решение?

Решение. Обозначим $\sin x = t$ $|t| \le 1$. Исходное уравнение $\sqrt{a + \sqrt{a + t}} = t$, с учетом $|t| \le 1$, равносильно системе

$$\begin{cases} a + t = (t^2 - a)^2, \\ 0 \le t \le 1, \\ t^2 \ge a. \end{cases}$$

Рассмотрим квадратное уравнение, относительно параметра a $a^2 - a(2t^2+1) + t^4 - t = 0$. Найдем дискриминант рассматриваемого уравнения $D = (2t^2+1)^2 - 4t^4 + 4t = 4t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^4 + 4t = (2t+1)^2$.

$a = \dfrac{2t^2+1+2t+1}{2} = t^2 + t + 1$ *или* $a = t^2 - t$, так как $t^2 \geq a$ и $0 \leq t \leq 1$, то $t^2 - a + t + 1 > 0$. Поэтому последняя система равносильна $\begin{cases} a = t^2 - t, \\ 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$

Рассмотрим функцию $y = t^2 - t$. Вершина параболы – есть точка с координатами $\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$. Минимум функции есть значение ординаты вершины параболы. Поэтому можем утверждать, что параметр a принимает значения в отрезке $\left[-\dfrac{1}{4}; 0\right]$ на отрезке $t \in [0;1]$.

Ответ. $-\dfrac{1}{4} \leq a \leq 0.$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$.

Важно показать при изучении параметров связь параметра с конкретными значениями и эта задача показывает эту связь. Цель этой задачи в том, чтобы показать что задачи, не содержащие параметр, можно решать и способами решения уравнений, содержащих параметр. Решение этого уравнения показывает, что исследования различных решений с параметрами позволяет решать задачи более простыми методами.

Решение. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 - x = (x^2 - 5)^2, \\ x^2 - 5 \geq 0. \end{cases}$$

Представим уравнение системы в виде квадратного уравнения относительно числа 5.

$$5^2-5(1+2x^2)+x+x^4=0,$$
$$D=(2x-1)^2,$$
$$5=x^2+x \quad \textit{или} \quad 5=x^2-x+1,$$
$$x^2+x-5=0 \quad \textit{или} \quad x^2-x-4=0.$$

Откуда, учитывая $x^2 \geq 5$, получаем

Ответ. $x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ *или* $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

4.1.5. Методы поиска необходимых условий. Использование симметрии аналитических выражений

В тех случаях, когда непосредственный поиск значений переменной затруднен, можно сначала выделить необходимые условия, а затем от необходимых условий перейти к достаточным условиям.

Будем называть задачи, решаемые таким методом, задачами с поиском необходимых условий.

Необходимые условия задач этого пункта:

1) В каждой задаче обязательно фигурирует аналитическое выражение, геометрический образ которого имеет ось или плоскость симметрии.

2) Во всех задачах в той или иной форме присутствует требование единственности решения.

Если описываемые задачи имеют решением координаты точки М, то найдется симметричная точка M_1, координаты которой тоже являются решением, тогда точка М должна лежать (в силу единственности решения) на оси симметрии, но заметим, что это требование не является достаточным.

Высказанные соображения и составляют основу одного из метода поиска необходимых условий, о котором будет идти речь в следующих задачах.

Пример. При каких a уравнение $\log_2(\sqrt{2x^2+2y^2-z}+1)+\left|\arcsin(3x+3y-z+a)\right|=0$ имеет одно решение.

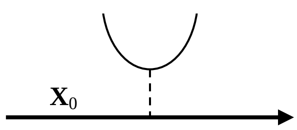
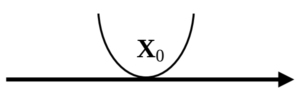
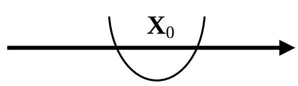
Решение. При замене x на y (и наоборот) уравнение не меняет смысла, поэтому если точка с координатами $(x_0; y_0)$ – решение то и $(y_0; x_0)$ – решение. А так как в условии необходимо единственность решения, то $x = y$.

Тогда $\log_2(\sqrt{4x^2 - z} + 1) + |\arcsin(6x - z + a)| = 0$. Так как $|\arcsin(6x - z + a)| \geq 0$, то $\log_2(\sqrt{4x^2 - z} + 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4x^2 - z} + 1 \leq 1$, что возможно только для случая равенства и при $z = 4x^2$. Тогда получаем $6x - 4x^2 - a = 0$. Откуда находим два корня уравнения, а в силу единственности, дискриминант приравниваем к нулю и получаем $a = \frac{9}{4}$.

Ответ. При $a = \frac{9}{4}$ уравнение имеет одно решение.

4.1.6. «Каркас» квадратичной функции. Дискриминант, старший коэффициент.

Фактически все важные свойства квадратичной функции определяются таблицей. Где D, a, x_0 – конструируют «каркас», на котором строится теория квадратичной функции.

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a > 0$			

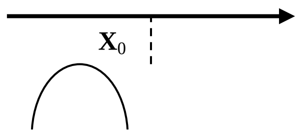
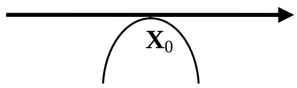
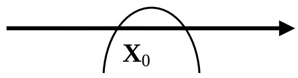
$a<0$			

Таблица 1

Пример. При каких значениях параметра a все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству $y>5(x-a)^2-\sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и $y>x^2-3$?

Решение. Часто бывает удобно начать решение задачи с рассмотрения упрощенной модели. Так, в конкретном случае уместно поставить задачу: при каком соотношении m и n все решения неравенства $y>m$ одновременно являются решениями неравенства $y>n$. Ответом на этот вопрос очевиден: $n\le m$.

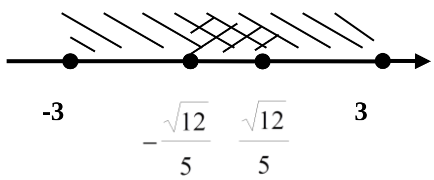
Тогда в этом примере нужно, чтобы $x^2-3\le 5(x-a)^2-\sqrt{9-a^2}$ при всех x.

$4x^2-10ax+5a^2+3-\sqrt{9-a^2}\ge 0$.

Найдем дискриминант, $D=100a^2-16(5a^2+3-\sqrt{9-a^2})=$ $=20a^2+16\sqrt{9-a^2}-12$. Дискриминант меньший либо равный нулю определит искомый параметр.

$5a^2-12+4\sqrt{9-a^2}\le 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{9-a^2}\le 12-5a^2$, что равносильно системе

$$\begin{cases}12-5a^2\ge 0,\\ 9-a^2\ge 0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2\le \dfrac{12}{5},\\ a^2\le 9.\end{cases} \Leftrightarrow a^2\le\frac{12}{5}$$

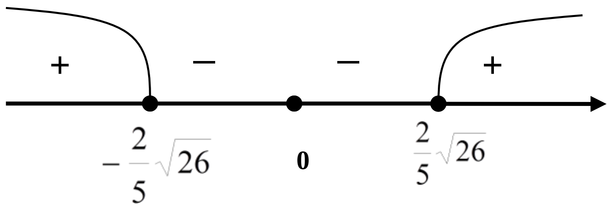


$$-\sqrt{\frac{12}{5}}\le a\le\sqrt{\frac{12}{5}}$$

$$9-a^2 \le \frac{144-120a^2+25a^4}{16}$$

$$25a^4-104a^2 \ge 0$$

$$a=0 \quad \vee \quad a=\pm\sqrt{\frac{104}{25}}=\pm\frac{2}{5}\sqrt{26}$$



Ответ. $a=0$.

4.1.7. «Каркас» квадратичной функции. Вершина параболы

Пример. При каких значениях a наибольшее значение трехчлена $ax^2+4x\sqrt{24-2a-a^2}$ меньше 4.

Решение.

a. Так как графиком трехчлена является парабола, то необходимость наибольшего значения меньшего 4 обязывает параметр $a<0$.

b. Наибольшее значение будет в вершине параболы.

$x_0=-\dfrac{2\sqrt{24-2a-a^2}}{a}$. Ограничение $24-2a-a^2\ge 0$ тоже обязательно. Решением этого неравенства есть $[-6;4]$. Учитывая необходимость $a<0$, то $a\in[-6;0)$.

$$a\cdot\frac{4(24-2a-a^2)}{a^2}+4\cdot\frac{2\sqrt{24-2a-a^2}}{-a}\cdot\sqrt{24-2a-a^2}<4$$

$$\frac{(24-2a-a^2)}{a}>-1 \Leftrightarrow \quad \frac{a^2+a-24}{a}<0$$

так как $a<0$, то решением будет объединение $\left(-\infty;\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{-1+\sqrt{97}}{2};+\infty\right)$. Тогда *Ответ*. $a\in\left[-6;\dfrac{-1-\sqrt{97}}{2}\right]$.

4.1.8. Корни квадратичной функции. Теорема Виета

Рассмотрим квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$. Найдем корни этого уравнения $x = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. По теореме Виета выполняется следующая система уравнений $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p \end{cases}$, где $x_1 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$. Рассмотрим задачу, решение которой при использовании теоремы Виета намного упрощается.

Пример. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение?

Решение. Найдем дискриминант, $D = a^2 + 8$. Уравнение имеет два корня при любом $a \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty)$. Используя теорему Виета, найдем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 4$. Таким образом, найдем наименьшее значение функции $f(a) = a^2 - 2a + 4$ на множестве $(-\infty;0] \cup [4;+\infty)$. Поскольку при $a \le 0$ $f(a) \ge f(0) = 4$, а при $a \ge 4$ $f(a) \ge f(4) = 12$, то наименьшее значение при $a = 0$.

Ответ. $a = 0$.

4.1.9. Аппарат математического анализа (касательная к прямой)

Учащиеся, как правило, затрудняются с определением касательной к кривой (типичен ошибочный ответ: «Касательная – это прямая, имеющая с кривой одну общую точку»), не видят связь между касательной к графику и ее производной, не понимают смысла переменных в уравнении касательной, не могут применить соответствующие факты к решению задач, особенно геометрического характера. Пояснить учащимся суть вещей могут помочь, например, следующие задачи.

Пример. При каком значении параметра k касательная к графику функции $f(x) = k\sqrt{x}$ образует с осью ОХ угол, равный $\frac{\pi}{3}$, и отсекает от второй четверти треугольник, площадь которого равна $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

Решение. Пусть $(x_0; y_0)$ – координаты точки касания. Уравнение касательной к графику функции f в точке $(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

По условию имеем $f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}}$, $f'(x_0) = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Тогда $\frac{k}{2\sqrt{x_0}} = \sqrt{3}$. Уравнение касательной становится таким: $y = \sqrt{3}(x - x_0) + 2\sqrt{3}x_0 = \sqrt{3}x + \sqrt{3}x_0$. Найдем координаты точки пересечения касательной с осями.

При $x = 0 \to y = \sqrt{3}x_0$.

При $y = 0 \to x = -x_0$.

Тогда, с учетом второй четверти и $x < 0$:

$$S = \frac{1}{2}(-x_0) \cdot (-\sqrt{3}x_0) = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

$$\Downarrow$$

$$x_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$k = 4\sqrt[4]{3}.$$

Ответ. $k = 4\sqrt[4]{3}.$

Пример. Найти все значения параметра a, при которых на графике функции $f(x) = a\sqrt[3]{x} + (a-1)\sqrt[3]{x^2}$ существует единственная точка с отрицательной абсциссой, касательная в которой параллельна прямой $y = 2x$.

Решение. Ясно, что угловой коэффициент касательной, о которой говорится в условии, равен 2. Тогда, если x – абсцисса точки касания, то $f'(x) = 2$, то есть $f'(x) = \dfrac{a}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2(a-1)}{3\sqrt[3]{x}} = 2$.

Остается потребовать, чтобы это уравнение имело единственный корень. $\dfrac{a\sqrt[3]{x} + 2(a-1)\sqrt[3]{x^2}}{3x} = 2$. При $x = 0$ уравнение не имеет смысла, при $x \neq 0$ уравнение равносильно:

$$a\sqrt[3]{x} + 2(a-1)\sqrt[3]{x^2} - 6x = 0,$$

$$\sqrt[3]{x}\left(a + 2(a-1)\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[3]{x^2}\right) = 0,$$

$$\Updownarrow$$

$$6\sqrt[3]{x^2} - 2(a-1)\sqrt[3]{x} - a = 0$$

Введем замену $\sqrt[3]{x} = t$. Тогда $6t^2 - 2(a-1)t - a = 0$. Для единственности корня необходимо, чтобы дискриминант был равен нулю, $D = 0$.

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 + 6a = 0,$$

$$(a+2)^2 = 3,$$

$$a = -2 \pm \sqrt{3}.$$

При таких значениях параметра a корнем уравнения является $x = \dfrac{(a-1)^3}{216}$, который, как очевидно, принимает отрицательные значения.

Ответ. $a = -2 \pm \sqrt{3}$.

Пример. Найти критические точки функции $f(x) = (2x-1)\sqrt[4]{x-a}$.

Решение. Напомним определение критической точки. Внутренняя точка области определения функции, в которой производная равна 0 или не существует, называется критической.

Имеем $f'(x)=2\sqrt[4]{x-a}+\dfrac{2x-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}=\dfrac{10x-8a-1}{4\sqrt[4]{(x-a)^3}}$. Поскольку найденная производная существует во всех внутренних точках области определения функции f, то критические точки следует искать среди корней уравнения $f'(x)=0$, откуда $x=\dfrac{4a}{5}+\dfrac{1}{10}$. Осталось потребовать, чтобы $\dfrac{4a}{5}+\dfrac{1}{10}>a \quad \Rightarrow \quad a<\dfrac{1}{2}$.

Ответ. Если $a<\dfrac{1}{2}$, то $x=\dfrac{4a}{5}+\dfrac{1}{10}$ - критическая точка;

если $a\geq\dfrac{1}{2}$ - критических точек нет.

3.2. Свойства функций в задачах, содержащих параметр. Функциональный подход

Учащиеся не всегда умеют сознательно использовать информацию о свойствах функций, например, о ее множестве значений, непрерывности, экстремумах и так далее.

Многие школьники лишь формально усваивают понятие производной, не понимают ее геометрического смысла. Есть проблемы и при изучении понятий первообразной и интеграла. Задачи, которые приведены ниже, призваны пояснить школьнику смысл всех этих понятий и показать возможности их применения.

Предложенные задачи классифицированы в зависимости от того, какое свойство функции является основным в решении.

4.2.1. Область значения функции

Иногда задачи не содержат прямой подсказки использовать область значения функции. Такая необходимость возникает в ходе решения. [5], [15] *Пример*. Решить уравнение $x(2x^2-1)\sqrt{1-x^2}=a$.

Решение. Так как $|x|\le 1$, то пусть $x=\cos\beta$, $\beta\in[0;\pi]$. Получаем $\cos\beta\cos 2\beta\sin\beta=a \quad\Rightarrow\quad \sin 4\beta=4a$. Очевидно, при $|a|\le\frac{1}{4}$ решение имеется. Найдем корни $\beta=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}$, так как $\beta\in[0;\pi]$, то рассмотрим три случая:

1. $a=0$, тогда $\beta=\frac{\pi k}{4}, \quad k=0,1,2,3,4$
2. $-\frac{1}{4}\le a<0$, $\beta=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}, \quad k=1,2,3,4$
3. $0<a\le\frac{1}{4}$, $\beta=(-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}, \quad k=0,1,2,3$

Ответ. Если $-\frac{1}{4}\le a<0$, то $x=\cos\left((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}\right), \quad k=1,2,3,4$;

если $a=0$, то $x=\cos\frac{\pi k}{4}, \quad k=0,1,2,3,4$;

если $0<a\le\frac{1}{4}$, то $x=\cos\left((-1)^k\frac{1}{4}\arcsin 4a+\frac{\pi k}{4}\right), \quad k=0,1,2,3$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{p-x}+\sqrt{p+x}=x$.

Решение. Рассмотрим область допустимых значений $|x|\le p$. Отсюда $x=p\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$. Тогда получаем равносильное уравнение

$$\sqrt{1-\cos\alpha}+\sqrt{1+\cos\alpha}=\sqrt{p}\cdot\cos\alpha.$$

Откуда $\sin\alpha=-1$ *и* $\sin\alpha=\frac{p-2}{p}$. Учтем два случая, так как $|x|\le p$, то $p\ge 0$.

1. $p=0$. Тогда $\sqrt{-x}+\sqrt{x}=x \quad\Rightarrow\quad x=0$.

2. $p > 0$. При $\sin\alpha = -1$ $x = 0$, а $p = 0$. Этот случай мы рассмотрели. Тогда рассмотрим случай $\sin\alpha = \frac{p-2}{p}$. Откуда $x = \frac{4p-4}{p}$.

Итак,

Ответ. Если $p < 0$ решений нет;

если $p = 0$, $x = 0$;

если $p > 0$, $x = \frac{4p-4}{p}$.

4.2.2. Наибольшее и наименьшее значения

При решении задач весьма полезным оказывается следующее обстоятельство. Если в уравнении $f(x) = g(x)$, где $x \in X$, $f(x) \geq a$, а $g(x) \leq a$ для всех $x \in X$, то можно перейти к равносильной системе уравнений $\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$

Пример. Решить уравнение $(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$.

Решение. Произведем преобразование правой части. $(\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}} = (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$. Тогда наше уравнение будет иметь вид $(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$.

Оценим левую и правую части уравнения $1 \leq (\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}} \leq 1$. Тогда заключаем, что обе части уравнения должны быть равны единице и это нас приводит к системе $\begin{cases} \sqrt{x+a+2} = 0, \\ \sqrt{x^2+a^2-6a-5} = 0. \end{cases}$

Запишем равносильную систему $\begin{cases} x+a+2 = 0, \\ x^2+a^2-6a-5 = 0. \end{cases}$

Выразим x из первого уравнения системы и подставим во второе уравнение.

$$\begin{cases} x = -a-2, \\ a^2+4a+4+a^2-6a-5=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-a-2, \\ 2a^2-2a-1=0. \end{cases}$$

Решением последней системы будут $\begin{cases} a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ x = \dfrac{-5-\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$ и $\begin{cases} a = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Тогда *Ответ*. Если $a = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, то $x = \dfrac{-5-\sqrt{3}}{2}$,

Если $a = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$, то $x = \dfrac{-5+\sqrt{3}}{2}$.

Пример. Найти все действительные значения a, при которых область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1-\log_{5+4a-a^2}(5-a) - \log_{5+4a-a^2}(4+\sin x)}$$

совпадает с множеством всех действительных чисел.

Решение. Область определения будет все действительные числа, если функция будет определена, то есть задача состоит в нахождении значений параметра a.

Для этого необходимо решить систему

$$\begin{cases} 5+4a-a^2>0, \\ 5+4a-a^2 \neq 1, \\ 5-a>0, \\ \log_{5+4a-a^2}\left(\dfrac{a+1}{4+\sin x}\right) \geq 0. \end{cases}$$

Учитывая условие $a<5$, решением последнего неравенства будет являться интервал $\left(+2\sqrt{2};5 \right)$.

Ответ. При $a \in \left(+2\sqrt{2};5 \right)$ условие выполняется.

4.2.3. Монотонность

Прежде всего заметим, что в случае возрастания (убывания) функции $f(x)$ имеет место равносильность уравнений $f(x)=f(y)$ и $x=y$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x-a}=\sqrt[3]{a}$

Решение. Так как функция монотонна и возрастает, а значение справа фиксировано, то данное уравнение имеет не более одного корня. Легко заметить, что $x=a$ - корень.

Ответ. $x=a$.

Пример. Для $0<a<\dfrac{1}{4}$ решить уравнение

$$x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде $(x+a)^2+\dfrac{1}{16}-a^2=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}$.

Пусть $\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}=t,\quad t>0 \quad\Rightarrow\quad x-t^2=\dfrac{1}{16}-a^2$.

Тогда исходное уравнение становится таким

$$(x+a)^2+x-t^2=-a+t,$$
$$(x+a)^2+x+a=t^2+t.$$

Рассмотрим функцию $f(y)=y^2+y$. Функция возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, так как $x\geq\dfrac{1}{16}-a^2$ *и* $0<a<\dfrac{1}{4}$, то $x+a>0$. Следовательно, принадлежат промежутку монотонности функции $f(y)$. Отсюда имеем $f(x+a)=f(t)$. Тогда $x+a=t$, то есть $\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}=x+a \quad\Rightarrow\quad x=-a+\sqrt{a^2+x-\dfrac{1}{16}}$. Сопоставим с исходным и получим $x^2+2ax+\dfrac{1}{16}=x$.

Для $0<a<\frac{1}{4}$ полученное квадратное уравнение имеет положительный дискриминант $x=\dfrac{1-2a\pm\sqrt{4a^2-4a+\frac{3}{4}}}{2}$.

Ответ. $x=\frac{1}{4}\left(2-4a\pm\sqrt{16a^2-16a+3}\right)$. $x=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$

Замечание: другой способ решения будет рассмотрен ниже.

Пример. Определить число корней уравнения $\sqrt{3x-5}=b-\sqrt{3x+11}$.

Решение. Имеем $\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+11}=b$.

Функция $f(x)=\sqrt{3x-5}+\sqrt{3x+11}$ возрастает на $D(f)=\left[\frac{5}{3};+\infty\right)$. Тогда $f(x)\geq f\left(\frac{5}{3}\right)=4$ *и* $E(f)=[4;+\infty)$. Исходное уравнение имеет не более одного корня. При $b\geq 4$ он единственен.

Ответ. Если $b\geq 4$, то уравнение имеет единственный корень;

если $b<4$, корней нет.

4.2.4. Четность. Периодичность. Обратимость

Пример. Указать все значения параметра a, для которых уравнение $\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$ имеет решения.

Решение. Пользуясь тем, что эта задача уже была решена, рассмотрим сразу систему

$$\begin{cases}\sqrt{a+t}=t^2-a,\\ 0\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y=t^2-a$ при $0\leq t\leq 1$. Отметим, что эта функция обратима и обратной к ней является $y=\sqrt{t+a}$. Так как функция возрастающая, то общие точки лежат на прямой $y=t$. Получаем $\begin{cases} t^2-a=t \\ 0\le t\le 1 \end{cases}$.

Решение которой нам известно.

Ответ. $-\frac{1}{4}\le a\le 0$.

Пример. Решить уравнение $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(a)=a^5+x$ и $g(a)=\sqrt[5]{a-x}$ они взаимно обратные и возрастающие. Тогда $a^5+x=a$ равносильно исходному.

Ответ. $x=a-a^5$.

Пример. Для $0<a<\frac{1}{4}$ решить уравнение $x^2+2ax+\frac{1}{16}=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$.

Решение. Очевидно $x\ge\frac{1}{16}-a^2$, то $x>0$. Рассмотрим функцию $y=x^2+2ax+\frac{1}{16}$. Она возрастает на $[-a;+\infty)$. Следовательно, при $x\ge\frac{1}{16}-a^2$ эта функция обратима, причем функция $y=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$ является для нее обратной. Отсюда $x=-a+\sqrt{a^2+x-\frac{1}{16}}$. Заметим, что мы использовали функцию, стоящую в правой части уравнения, потому что такой выбор не изменяет область определения первоначального уравнения. Решение же уравнения приведено было выше.

Ответ. $x=\frac{1}{4}\left(2-4a\pm\sqrt{16a^2-16a+3}\right)$.

3.3. Графический метод. Координатная плоскость (x;y)

Задачи, содержащие параметр, требуют к себе своеобразный подход, здесь необходимо грамотное и тщательное исследование. Для применения графических методов требуется умение выполнять дополнительное построение различных графиков, вести графические исследования, соответствующие данным значениям параметра.

Уравнения с параметром вызывают серьезные трудности логического характера. Каждое такое уравнение – это, по существу, краткая запись семейства уравнений. Ясно, что выписать каждое уравнение из бесконечного семейства невозможно, но, тем не менее, каждое из них должно быть решено. Легче всего это сделать с помощью графического представления зависимости переменной x от параметра a.

На плоскости $(x;y)$ функция $y=f(a)$ задает семейство кривых зависящих от параметра a. Нас будет интересовать с помощью какого преобразования плоскости можно переходить к другим кривым семейства.

4.3.1. *Параллельный перенос*

Пример. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

Решение. Построим график функции $y=\sqrt{2|x|-x^2}$.

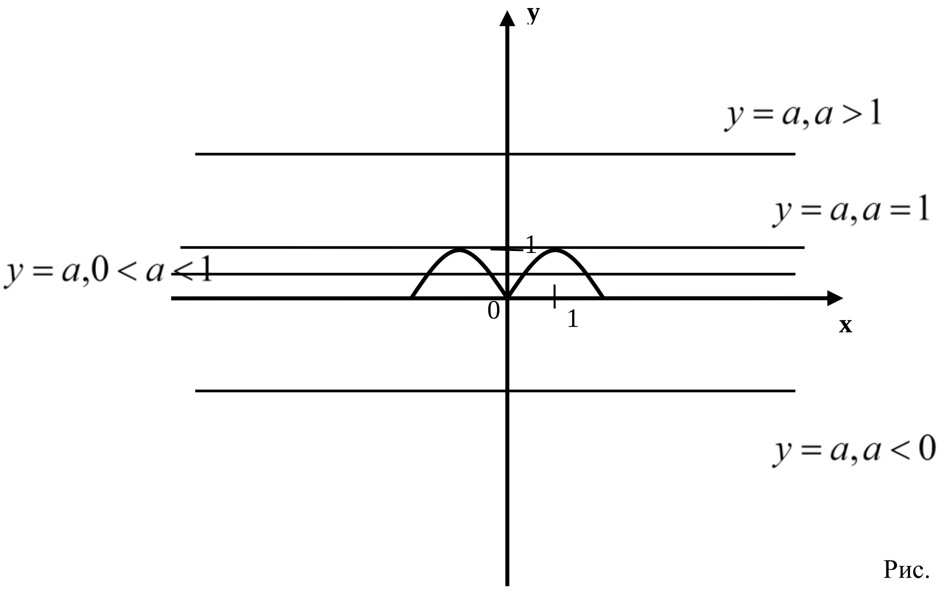


Рис. 1

Рассмотрим $y=a$. Это прямая параллельна оси OX.

Ответ. Если $a<0$ *или* $a>1$, то решений нет;

если $a=0$, то 3 решения;

если $a=1$, то 2 решения;

если $0<a<1$, 4 решения.

4.3.2. Поворот

Сразу следует отметить, что выбор семейства кривых не отличается однообразием (в отличие от самих задач), а точнее он один: во всех задачах $y=f(x;a)$ - прямые. Более того, центр поворота принадлежит прямой.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$ имеет единственное решение?

Решение. Рассмотрим функцию $y = ax$ и $y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$. График второй функции – это полуокружность с центром в точке с координатами $(4;1)$ и радиусом =1 (рис. 2).

$$(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1, \qquad y \geq 1$$

, дуга AB.

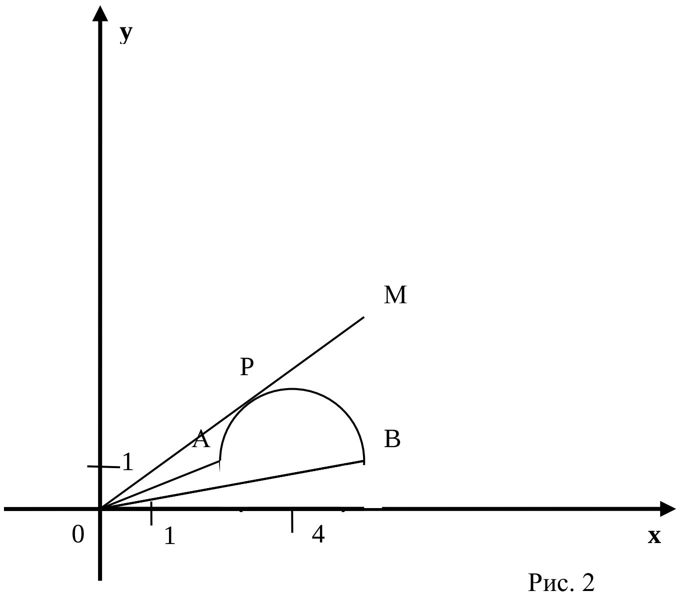


Рис. 2

Все лучи проходящие между OA и OB пересекаются в одной точке, также в одной точке пересекаются OB и OM (касательная). Угловые коофициэнты OA и OB равны соответственно $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$. Угловой коэффициент касательной равен $\frac{8}{15}$. Легко находится из системы

$$\begin{cases} (y-1)^2 + (x-4)^2 = 1, \\ y = ax, \\ a > 0. \end{cases}$$

Итак, прямые семейства $y = ax$ имеют с дугой только одну общую точку при $a \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{8}{15}\right\}$.

Ответ. $a \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right] \cup \left\{\frac{8}{15}\right\}$.

Пример. При каких k уравнение $\sqrt{6-x} + \sqrt{x+3} = kx$ имеет решение?

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}$. Исследуя ее на монотонность узнаем, что она возрастает на промежутке $[-3;1,5]$ и убывает на $[1,5;6]$. Точка $x=1,5$ - является точкой максимума.

Функция же $y=kx$ - это семейство прямых, проходящих через точку $(0;0)$. Обратимся к рисунку 2. Графиком функции $y=\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}$ является дуга АВ. Прямые $y=kx$, которые будут находиться между прямыми ОА и ОВ, удовлетворяют условию задачи. Коэффициент наклона прямой ОА является число -1, а ОВ — $\frac{1}{2}$.

Ответ. При $k\le -1$ *или* $k\ge \frac{1}{2}$ уравнение имеет 1 решение;

при остальных значениях параметра k решений нет.

4.3.3. Гомотетия. Сжатие к прямой

Пример. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ имеет ровно 8 решений.

Решение. Имеем $\sqrt{a^2-x^2}=2\pi k,\ k\in Z$. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{a^2-x^2}$ *и* $y=2\pi k$. Первая из них задает семейство полуокружностей с центром в точке с координатами $(0;0)$, второе семейство прямых параллельных оси абсцисс.

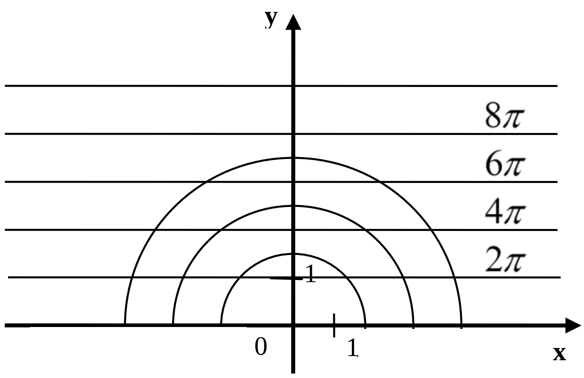


Рис. 3

Число корней будет соответствовать числу 8 тогда, когда радиус полуокружности будет больше 6π и меньше 8π, то есть $6\pi<r<8\pi$. Заметим, что r

есть $|a|$.

Ответ. $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$.

3.4. Графический метод. Координатная плоскость (x;a)

Вообще, уравнения, содержащие параметр, не обеспечены какой-либо четкой, методически оформленной системой решения. Те или иные значения параметра приходится искать на ощупь, перебором, решая большое количество промежуточных уравнений. Такой подход далеко не всегда обеспечивает успех в отыскании всех значений параметра, при которых уравнение не имеет решений, имеет одно, два и более решений. Зачастую часть значений параметра теряются или появляются лишние значения. Для того чтобы эти последние, приходится проводить специальное исследование которое может оказаться довольно трудным.

Рассмотрим метод, упрощающий работу по решению уравнений с параметром. Метод состоит в следующем

1. Из уравнения с переменной *x* и параметра *a* выразим параметр как функцию от *x*: $a = f(x)$.

2. В координатной плоскости *x*О*a* строим график функции $a = f(x)$.

3. Рассмотрим прямые $a = const$ и выделим те промежутки оси О*a*, на которых эти прямые удовлетворяют следующим условиям: а) не пересекает график функции $a = f(x)$, б) пересекает график функции $a = f(x)$ в одной точке, в) в двух точках, г) в трех точках и так далее.

4. Если поставлена задача найти значения *x*, то выражаем *x* через *a* для каждого из найденных промежутков значения *a* в отдельности.

Взгляд на параметр как на равноправную переменную находит свое отражение в графических методах. Таким образом, возникает координатная плоскость $(x;a)$. Казалось бы, такая незначительная деталь, как отказ от традиционного обозначения координатной плоскости буквами x и y определяет один из эффективнейших методов решения задач с параметрами.

Описанный метод очень нагляден. Кроме того, в нем находят применение почти все основные понятия курса алгебры и начал анализа. Задействуется весь набор знаний, связанных с исследованием функции: применение производной к определению точек экстремума, нахождение предела функции, асимптот и т. д.

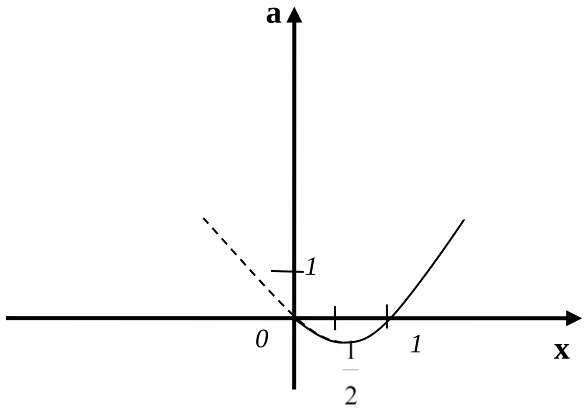
Пример. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+a}=x$ имеет два корня?

Решение. Переходим к равносильной системе

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ a = x^2 - x. \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = -\frac{1}{4}$$



Из графика видно, что при $-\frac{1}{4} < a \le 0$ уравнение имеет 2 корня.

Рис. 4

Ответ. При $-\frac{1}{4} < a \le 0$ уравнение имеет два корня.

Пример. Найдите множество всех чисел a, для каждого из которых уравнение $\sqrt{x+2a^2}\,(x^2-(a-1)x-a)=0$ имеет только два различных корня.

Решение. Перепишем данное уравнение в следующем виде:

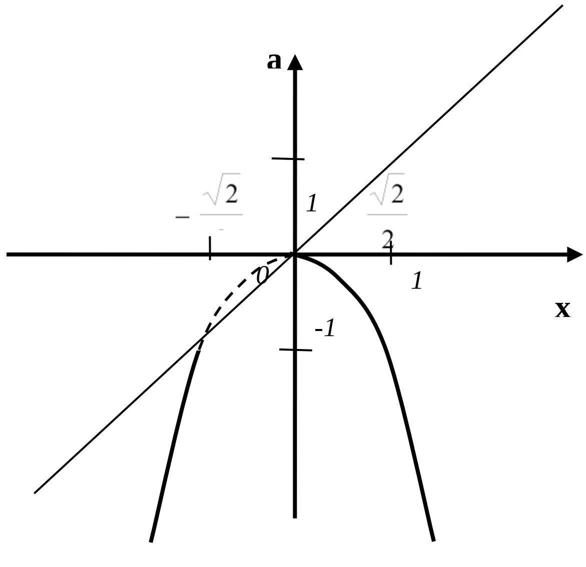


Рис. 5

$$\sqrt{x+2a^2}(x+1)(x-a)=0$$

Теперь важно не упустить, что $x=-2a^2$, $x=a$ и $x=-1$ – корни исходного уравнения лишь при условии $x \geq 2a^2$. Обратим внимание на то, что график удобнее строить на координатной плоскости $(a;x)$. На рисунке 5 искомый график – объединение сплошных линий. Здесь ответ «считывается» вертикальными прямыми.

Ответ. При $a=-1$, или $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a < -\frac{1}{2}$, или $0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Опытное преподавание

Программа факультативных занятий на тему «Методы решения уравнений, содержащих параметр».

Все методы, рассмотренные в данной работе, рассматривать на факультативах не имеет смысла. Необходимо рассмотреть основные методы решения наиболее часто встречаемых на выпускных экзаменах и вступительных тестах, а именно, методы решения квадратных уравнений, линейных, аналитический и графический методы и методы решения уравнений методом исследования области значения функции.

Цели факультатива:

1. познакомить учащихся с некоторыми методами решения уравнений, содержащих параметр;
2. показать применение различных методов при решении уравнений одного типа;
3. формировать умение видеть рациональный метод для решения конкретных типов уравнений, содержащих параметр;
4. формировать логическое мышление;

5. формировать настойчивость, целеустремленность, трудолюбие через решение сложных задач;

6. развивать математическую речь с присущей ей краткостью, точностью и лаконичностью;

7. подготовить учащихся к поступлению в ВУЗы.

Планирование:

Данный курс рассчитан на 16 часов. Занятия проводятся по два часа. В эти часы не входит время, предоставленное для проверки знаний и умений и повторения.

Краткое содержание занятий

Занятие № 1.

Тема: Параметр и решение линейных уравнений и простейших квадратных уравнений с параметром.

Оно проведено и рассмотрено в опытном преподавании.

Занятие № 2.

Тема: Квадратные уравнения. Дискриминант. Старший коэффициент.

Цель занятия: познакомить учеников с методом исследования дискриминанта и старшего коэффициента квадратных уравнений, содержащих параметр.

Краткое содержание: относительно знака дискриминанта и старшего коэффициента определить количество корней и найти их, определить при каких значениях параметра функция касается осей координат.

Занятие № 3.

Тема: Квадратные уравнения. Расположение корней.

Цель занятия: научить находить место расположение корней уравнения относительно некоторой точки или двух точек.

Краткое содержание: используются теорема Виета (корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ удовлетворяют системе $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$) и вершина параболы, для определения расположения корней относительно некоторых точек координатной оси.

Занятие № 4.

Тема: Аналитический метод. Метод «ветвлений».

Цель занятия: познакомить учеников с основным методом решения уравнений, содержащих параметр.

Краткое содержание: рассмотрение различных значений, принимаемых параметром. Упрощение уравнения и приведение уравнения к произведению многочленов или выделение полного квадрата. Составление системы логических следований, при которых используется один из выше приведенных способов упрощения уравнения.

Занятие № 5.

Тема: Аналитический метод. Параметр как равноправная переменная.

Цель занятия: показать ученикам, что уравнения, содержащие параметр, можно решать не только относительно переменной, но и относительно параметра.

Краткое содержание: решение уравнений относительно параметра. Решение уравнений, не содержащих параметра, но использование методов решения уравнений, содержащих параметр. Например: решения уравнения четвертой степени не относительно переменной, а относительно числа.

Занятие № 6.

Тема: Метод исследования области значения функции.

Цель занятия: научить учеников использовать область значения функции.

Краткое содержание: если необходимо найти, при каких значениях переменной две функции равны, а пересечение их областей значений есть одно значение, то обе функции можно приравнять к этому значению и найти значение переменной ($f(x)=g(x)$ и $E_f=(a;b]$, а $E_g=[b;c)$, то уравнение равносильно системе $\begin{cases} f(x)=b, \\ g(x)=b \end{cases}$).

Ученики при изучении области значения зачастую не понимают ее практического значения. Это занятие покажет им, как можно использовать данное свойство функций.

Занятие № 7.

Тема: Графический метод. Координатная плоскость (x, y).

Цель занятия: научить использовать, при решении уравнений, координатную плоскость.

Краткое содержание: Основой решения уравнений данным методом является построение графиков функций правой и левой частей и рассмотрение количества точек пересечения в зависимости от значения параметра. Поэтому задачи решаемые данным методом имеют свою специфику, а именно, рассматриваются задачи на нахождение количества корней уравнения при различных значениях параметра.

Занятие № 8.

Тема: Графический метод. Координатная плоскость (x, a).

Цель занятия: научить использовать, при решении уравнений, координатную плоскость (x, a); показать особенности решения при помощи этой плоскости.

Краткое содержание: в отличие от предыдущего занятия здесь используется координатная плоскость (x, a) при решении уравнений, содержащих параметр.

Опытное преподавание.

Опытное преподавание осуществлялось во время прохождения практики на 4 курсе. Практика проходила в 10 классе 28 школы. Было разработано и проведено два занятия на тему «Параметр и решение линейных и простейших квадратичных уравнений с параметром».

Цели занятий:

1. ввести понятие параметра;
2. научить решать линейные и простейшие квадратичные уравнения с параметром;
3. повторить методы решения квадратных уравнений;
4. научить мыслить логически;
5. научить видеть особые значения параметра, которым соответствуют частные решения данного уравнения;

Разработка факультативного занятия на тему: «Параметр и решение линейных уравнений и простейших квадратных уравнений с параметром».

Ход занятия.

Для того чтобы понять, что такое параметр разберем несколько простых примеров, с помощью которых мы и попытаемся понять смысл параметра.

Рассмотрим уравнение $ax = 6$ (1).

Зададим себе вопрос, как мы будем решать это уравнение. При делении на неизвестную величину a необходимо учесть, что эта величина может быть равна нулю. Рассмотрим случай когда $a = 0$.

При $a = 0$ получаем следующее уравнение $0 \cdot x = 6$, которое не имеет решения. Если же $a \neq 0$, то мы можем разделить на a и получим $x = \frac{6}{a}$.

Теперь запишем ответ, но нужно учитывать то, что мы рассматривали различные значения неизвестной a и поэтому ответ нужно записывать для всех случаев.

Ответ. При $a \neq 0$ $x = \frac{6}{a}$;

При $a = 0$ нет корней.

Следующее уравнение $(a^2 - 1)x = a - 1$ (2) также как и (1) требует рассмотрения случаев, когда коэффициент при x равен нулю или нет.

Решение.

$a^2 - 1 = 0$, то есть $a = -1$ или $a = 1$. При первом значении мы получаем уравнение $0 \cdot x = -2$, у которого решений нет, а при втором значении получаем уравнение $0 \cdot x = 0$, решением которого является все множество действительных чисел.

Если $a^2 - 1 \neq 0$, то мы можем разделить на коэффициент при x и получим $x = \frac{1}{a+1}$.

Запишем ответ.

Ответ. Если $a = -1$, то $x \in R$;

Если $a = 1$, то нет решения;

Если $a \neq -1$ и $a \neq 1$, то $x = \frac{1}{a+1}$.

Дальше рассмотрим уравнение $a(x-1) = x^2 - 1$ (3).

Решение.

Решаем это уравнение методом группировки

$$ax - a = x^2 - 1$$
$$ax - a - (x-1)(x+1) = 0$$
$$(x-1)(a - x - 1) = 0$$

и получаем

Ответ. $x=1, \quad x=a-1$.

В этом уравнении мы не рассматривали различные значения, принимаемые неизвестной *a*, так как при решении нам не приходилось делить на *a*.

Решая эти три уравнения, мы имели дело с уравнениями, содержащие параметр, где a - это параметр. Итак, давайте попробуем дать определение параметру. Мы узнали о параметре, решая эти три уравнения, что параметр есть неизвестная, так как он (параметр) принимал различные значения, но, с другой стороны, мы решали эти уравнения, принимая параметр за известную величину. Итак, параметр – это неизвестная, при некоторых значениях которой необходимо рассматривать и решать частные уравнения. Эти значения называются особыми. В первом уравнении особым значением параметра было значение неизвестной *a*, равное нулю, во втором – равное 1 и -1, а в третьем особых значений нет.

Сейчас рассмотрим еще два уравнения, решить которые предлагается учащимся.

$40x+13a=\sqrt{a}+15 \quad и \quad 40x+12a=\sqrt{a-2}+\sqrt{a}+36x$.

Решение первого:

a. Если $a<0$, то решений нет, так как уравнение не имеет смысла.

b. Если $a\geq 0$, то

$$40x+13a=\sqrt{a}+15x$$

$$25x=\sqrt{a}-13a$$

так как деление на выражение с параметром нет, то дополнительно рассматривать различные значения, принимаемые параметром не нужно. То есть $x=\dfrac{\sqrt{a}-13a}{25}$.

Ответ. Если $a<0$, то решений нет;

Если $a \geq 0$, то $x = \dfrac{\sqrt{a} - 13a}{25}$.

Решение второго:

Для начала найдем, какие значения может принимать параметр. Для этого необходимо решить систему $\begin{cases} a - 2 \geq 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$, решением которой является промежуток $[2;+\infty)$.

Теперь решаем само уравнение. В ходе решения у нас снова нет необходимости рассматривать какие-либо дополнительные условия.

Получаем, что $x = \dfrac{\sqrt{a-2} + \sqrt{a} - 12a}{4}$.

Для тех значений параметра, которые не вошли в область значений параметра уравнение не имеет корней.

Ответ. Если $a \geq 2$, то $x = \dfrac{\sqrt{a-2} + \sqrt{a} - 12a}{4}$;

Если $a < 2$, то корней нет.

Для уравнений, в решении которых рассматривается различные значения параметра, будем пользоваться следующим алгоритмом решения.

Алгоритм.

1. Находим область значений параметра.
2. Для тех значений параметра, которые входят в область:

a. Находим особые значения параметра, при которых, содержащее параметр выражение, на которое происходит деление, обращается в 0. Для них рассматриваем уравнения, которые получились при подстановке значений параметра.

b. Решаем уравнение, исключая эти значения.

3. Для тех значений параметра, которые не входят в область - корней нет.

4. Собираем все значения параметра и соответствующие им значения неизвестной записываем ответ.

Дальше решим, используя алгоритм, следующее уравнение $ax-\sqrt{a+2}-3=2x+1$.

Решение. Это линейное уравнение. Найдем область значения принимаемые параметром – $a\geq 2$.

Для $a\geq 2$. Рассмотрим $a=2$, «нулевое» значение. Получаем уравнение $0\cdot x=6$, которое не имеет решения. Если $a\neq 2$, то решаем уравнение $ax-\sqrt{a+2}-3=2x+1$. Решением, которого есть $x=\dfrac{\sqrt{a+2}+4}{a-2}$.

Для $a<2$ - решений нет.

Ответ. Для $a>2$ $x=\dfrac{\sqrt{a+2}+4}{a-2}$;

Для $a\leq 2$ - корней нет.

Итак, подведем **итог**. При решении уравнений, содержащих параметр, существуют особые способы решения. Главным отличием является то, что при решении происходит перебор значений параметра и рассмотрения для этих значений соответствующего значения неизвестной.

Домашнее задание.

Решить уравнения:

1. $2ax+4x+3=1-2x$.
2. $2a(a-2)x=a-2$.
3. $\sqrt{a^2-2a-3}\cdot x=a+1$.

Выводы: Во время проведения занятий было выявлено, что ученики не имеют ни малейшего представления о том, что такое параметр и встретились на практике с уравнений, содержащих параметр, впервые. Это осложнило мою работу, которая заключалась в том, чтобы дать ученикам образное понятие о параметре, а так же общее представление о том, как решаются линейные и простейшие квадратные уравнения, содержащие параметр.

Заключение

При проведении исследования были решены следующие задачи:

1. проведен анализ действующих школьных учебников по алгебре и началам анализа с целью выявления использования параметра и методов решения уравнений с параметром. Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

- в каждом проанализированном учебнике задания, содержащие параметр, используется для проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения той или иной темы. Предлагаются задания творческого характера, требующие от учащихся применения полученных знаний и умений в нестандартных условиях;
- ни в одном из рассмотренных учебников не даётся чёткого определения параметра;
- во всех учебниках задания однотипны;

2. выделены классы уравнений, содержащих параметр, и общие их методы решения;

3. показано, что методы, изложенные в данной работе, применимы для решения всех видов уравнений, содержащих параметр. Тригонометрические уравнения, содержащие параметр, при проведении данного исследования специально не были выделены. Для данного класса уравнений существует большое количество специфических методов решения. Исследованию которых может быть посвящена отдельная работа;

4. все методы решения уравнений, содержащих параметр, рассматриваются на факультативных занятиях, но возможно так же и рассмотрение некоторых методов решения уравнений, содержащих параметр, в основное время изучения курса алгебры и начал анализа, например, метода решения квадратных уравнений с параметром. Учитывая, что уравнения, содержащие параметр, встречаются уже в 7 классе, можно разбить все методы решения уравнений, содержащих параметр, на группы, которые возможно рассмотреть во время учебных занятий;

5. разработана программа факультативных занятия на тему «Методы решения уравнений, содержащих параметр»;

6. в ходе исследования также было осуществлено опытное преподавание.

Литература

1. И.А.*Каримов*. О Национальной программе по подготовке кадров. Т.1997 г

2. И.А. Каримов. *БЕЗ ИСТОРИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ НЕТ БУДУЩЕГО.* Т. 1999г

3. Горнштейн, П.И. Задачи с параметрами [Текст] : учеб. пособие/ П.И. Горнштейн, В.Б. Полонский, М.С. Якир – Киев, 1992.

4. Здоровенко, М.Ю. Учимся решать задачи с параметрами: рациональные уравнения и неравенства. [Текст] / М.Ю. Здоровенко, В.М. Караулов – Киров, 1999.

5. Ястребинецкий Г.А. Задачи с параметрами [Текст]: Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1986.

6. Meliqulov A., Qurbonov P. Matematika. 1-2 – qism. O‘qituvchi, 2003.

7. Горбачев, В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами [Текст]/ В.И. Горбачев// Математика в школе – 1999. - №6. – С. 60-68.

8. Горбачев, В.И. Общие методы решения уравнений и неравенств с параметрами не выше второй степени [Текст]/ В.И. Горбачев// Математика в школе – 2000. - №2. – С. 61-68.

9. S. Alixonov “Matematika o’qitish metodikasi” T.:O’qituvchi, 2008-yil.

10. Дегтяренко, В.А. Три решения одной задачи с параметром [Текст]/ В.А. Дегтяренко // Математика в школе – 2001. - №5. – С. 62-64.

11. Евсеева, А.И. Уравнения с параметрами [Текст]/ А.И. Евсеева // Математика в школе – 2003. - №7. – С. 10-17.

12. Епифанова, Т.Н. Графические методы решения задач с параметрами [Текст]/ Т.Н. Епифанова// Математика в школе – 2003. - №7. – С. 17-20.

13. Зубов, А.Б. Использование симметрии при анализе систем с параметрами [Текст]/ А.Б.Зубов// Математика в школе – 2002. - №5. – С. 56-63.

14. Кожухов, С.К. Об одном классе параметрических задач [Текст]/ С.К. Кожухов // Математика в школе – 1996. - №3. – С. 45-49.

15. Кожухов, С.К. Различные способы решения задач с параметром [Текст]/ С.К. Кожухов // Математика в школе – 1998. - №6. – С. 9-12.

16. Кожухова, С.А. Свойства функций в задачах с параметром [Текст]/ С.А. Кожухова, С.К. Кожухов // Математика в школе – 2003. - №7. – С. 17-24.

17. Кормихин, А.А. Об уравнениях с параметром [Текст]/ А.А. Кормихин // Математика в школе – 1994. - №1. – С. 33-35.

18. Кочерова, К.С. Об уравнениях с параметром и модулем (графический способ решения) [Текст]/ К.С. Кочерова// Математика в школе – 1995. - №2. – С. 2-4.

19. Мещерякова, Г.П. Задачи с параметрами, сводящиеся к квадратным уравнениям [Текст]/ Г.П. Мещерякова // Математика в школе – 2001. - №5. – С. 60-62.

20. Мещерякова, Г.П. Функционально-графический метод решения задач с параметром [Текст]/ Г.П. Мещерякова // Математика в школе – 1999. - №6. – С. 69-71.

21. Мещерякова, Г.П. Уравнения и неравенства с параметром и задачи на экстремум [Текст]/ Г.П. Мещерякова, И.И. Чучаев // Математика в школе – 1999. - №6. – С. 72-74.

22. Неискашова, Е.В. Квадратный трехчлен в задачах вступительных экзаменов [Текст]/ Е.В. Неискашова// Математика в школе – 2001. - №8. – С. 24-26.

23. Постникова, С.Я. Уравнения с параметрами на факультативных занятиях [Текст]/ С.Я. Постникова// Математика в школе – 2002. -№ 8. – С. 45-46.

24. Ратников, Н.П. От уравнения с параметром – к графику, задающему параметр [Текст]/ Н.П. Ратников // Математика в школе – 1990. - №3. – С. 80.

25. http://www.problems.ru

26. http://zadachi.mccme.ru