

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ
БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ**

**БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК
УНИВЕРСИТЕТИ**

Магистратура бөлими

Қол жазба ҳуқықында

Қудайбергенова Гулнара Абатбаевна

«Дара туўындылы дифференциаллық теңлемелерге қойылған шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў»

Қәнигелик: 5А 480103- «Әмелий математика ҳәм информациялық технологиялар»

Әмелий математика ҳәм информациялық технологиялар қәнигелиги бойынша магистр дәрежесин алыў ушын жазылған

ДИССЕРТАЦИЯ

Илимий басшы:
ф.-м. и.к. Бекиев А.Б.

Нөкис-2012

Кирисиў	3
I БАП. Эллипслик түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў	9
1-§. Екинши тәртипли дара туўындылы теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди қойылыўы.....	9
2-§. Айырмалы схемалар, олардың жыйнақлылығы хәм жуўықласыўы.....	16
3-§. Эллипслик түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў	18
4-§. Пуассон теңлемеси ушын қойылған Дирихле мәселесин туўрылар усылы менен шешиў	24
5-§. Санлы мысаллар	30
II БАП. Параболалық хәм гиперболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў	35
1-§. Параболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди шешиўдиң туўрылар усылының кесесине схемасы	35
2-§. Параболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди шешиўдиң туўрылар усылының бойына схемасы	40
3-§. Гиперболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди шешиўдиң туўрылар усылының кесесине хәм бойына схемасы	46
4-§. Санлы мысаллар	58
Жуўмақлаў.....	60
Пайдаланылған әдебиятлар.....	62
Қосымшалар.....	63

Кирисиў

Дара туўындылы дифференциаллық теңлемелерге илим хәм техниканың бир қанша мәселелерин шешкенде ушырасамыз. Себеби бул теңлемелер менен математикалық физиканың, гидродинамиканың, акустиканың хәм т.б. тараўлардың көп мәселелери өз-ара байланыслы. Бул теңлемелердин шешимлерин аналитикалық көринисте, яғный шешимди шекли формулалар түринде көрсетиў көп жағдайларда мүмкин болмайды. Сол себептен бул теңлемелерге қойылған мәселелерди қандайда бир жуўық усыллар менен шешиўге туўры келеди.

Дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегералық мәселелерди шешиўдин жуўық усыллары, әдеттеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегералық мәселелерди шешиў усылларындай етип еки топарға бөлинеди:

1) жуўық аналитикалық усыллар. Бул усылларда мәселениң жуўық шешими аналитикалық көринисте, яғный базы бир дәрежели қатардың шекли сандағы бөлек қосындысы түринде табылады. Бундай усылларға Ритц хәм Галеркин усыллары, Канторович усылы, коллокация усылы, дәрежели яки Фурье қатарына жиклеў усылы, киши квадратлар усылы хәм т.б. усыллар киреди. Бул усылларды қолланғанда теңлемелердин көринисине итибар бериў керек;

2) санлы усыллар. Мәселелер бул усыллар менен шешилгенде қаралып атырған областтың базы бир ноқатларында, шешимниң жуўық мәнислери санлар кестеси түринде көрсетиледи. Бундай усылларға шекли айырмалар (торлар), айдаў хәм т.б. усыллар тийисли болады.

Дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелер шекли айырмалар (торлар) усылы менен шешилгенде, бул теңлемелер сызықлы ямаса сызықлы емес алгебралық теңлемелер системасы менен алмастырылады. Кейин бул алынған теңлемелер системасы қандай да бир усыл менен, мәселен, Гаусс, Крамер, эпиўайы итерация, Зейдель хәм т.б.

усыллар менен шешиледи [8-11]. Бирақ жыйнақлылығы тез болған итерациялық усулларды жасаудың өзи, әдеуір кыйын мәселе болады. Дара туұындылы дифференциаллық теңлемелер шешилгенде туұрылар усылынан пайдаланыўға болады. Бул усулда дара туұындылы дифференциаллық теңлемелер әдеттеги дифференциаллық теңлемелерге алып келинип шешиледи. Яғный теңлемедегі өзгериўшилердиң айырымлары бойынша тор киритиледи. Бул өзгериўшилер дискрет деп қаралады, ал бир өзгериўши болса үзликсиз деп қаралады. Дискрет өзгериўшилер бойынша туұындылар айырмалы теңлемелер менен алмастырылады. Солай етип, дара туұындылы дифференциал теңleme әдеттеги дифференциал теңлемелердиң системасы болған дифференциал-айырмалы теңleme менен алмастырылады. Айырым жағдайларда бул усулдан пайдаланыў да жақсы нәтийже береді.[5,6]

Дара туұындылы теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шешіўдиң туұрылар усылының торлар усылынан парқы, дифференциаллаў операциясы қандайда бир таңланып алынған өзгериўши бойынша шекли айырмалар менен жуўық алмастырылады. Демек, бул усул дифференциаллық теңleme ушын шегаралық мәселениң өлшемін төменлетиўге мүмкиншилик береді. Туұрылар усылын торлар усылының бир дара жағдайы деп қараўға да болады. Бул усул менен қәлеген тәртиптеги сызықлы хәм сызықлы емес дифференциаллық теңлемелер ушын, олардың системалары ушын қойылған шегаралық мәселелерди шешіў мүмкин. Параболалық яки гиперболалық түрдеги теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелер туұрылар усылы менен шешилгенде, x бойынша яки y бойынша туұындылардың қайсы бирин шекли айырмалар менен алмастырылыўына қарап, туұрылар усылының кесе яки бойына варианты алынады. Бул еки жағдайлардың хәр қайсысында басқа хәр түрлі әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасын шешіўге келтириледі. Бирақ бул эллипстик түрдеги теңлемелер ушын ондай айырмашылыққа ийе емес.

Бир қанша физикалық мәселелер эллипстик түрдеги теңлемелерди шешіўге келтириледі: жүкли мембрана ийилиўи мәселеси, биртеккли емес

күш майданындағы газ басымы, денедегі жыллылықтың стационар (ұақыттан ғәрезли емес) бөлистрилиүйи х.т.б. Бул мәселелердин хәммеси улыўма қәсийетке ийе, яғный сыртқы тәсир етиўши күшлер ұақыттан байланыслы емес хәм басланғыш шәртлер қойылмайды яки жеткиликли дәрежеде алдын қойылған болады.

Бул магистрлик диссертациясында екинши тәртипли дара туўындылы теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў усыллары қаралған. Бунда туўрылар усылының дәслепки түсиниклери: дара туўындылы дифференциаллық теңлемелерди айырым аргументлер бойынша айырмалы теңлемелер менен алмастырыў түсиниги хәм оның қәтелиги, оны шешиў усыллары, жыйнақлылығы, орнықлылығы, бул усылдың кесесине хәм бойына схемалары түсиниклери киритиледи. Кейин болса пайда болған әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасын шешиў усылы туўралы айтылады. Екинши тәртипли дара туўындылы теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди хәм аралас-шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў усыллары тийкарынан [1-7], [12-13] әдебиятларда қаралған.

Теманың актуаллығы хәм заманагөйлиги. Дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелер бул усыл менен шешилгенде дифференциаллық теңleme өзгериўшилериның санын кемеўтиўге мүмкиншилик береди. Усыларды есапқа алып, магистрлик диссертацияда, дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шешиў усыллары тийкарлары хәм олардың есаплаў алгоритмлерин жетилистрийў бойынша орынланған изертлеў жумыслары нәтийжелери баянланады.

Мәселениң изертлениў дәрежеси. Сызықлы, дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шешиў усыллары арасында кем изертленген усыллардан бири болып есапланылады. Бул усыл туўралы оқыў әдебиятларында хәм басқа илимий әдебиятларда да мағлыўматлар жетерли дәрежеде емес. Туўрылар усылы М.Г. Слободянский,

Р.В. Шамин, В.Н.Фаддеева, Л.В. Конторович, А.М. Блохин, Б.М. Будақ хәм т.б. жұмысларында изертленген. Бул алымлардың мийнетлери нәтийжесинде усылдың бир қанша өзгертилген варианлары исленип шығылған.

Диссертацияның мақсети хәм ұазыйпалары. Диссертацияның тийкарғы мақсети – екинши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди жуўық -аналитикалық усыллар менен шешиў.

Диссертация жұмысы ұазыйпалары төмендегилерден ибарат:

- дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шешиў бойынша оқыў хәм илимий әдебиятларда бар материалларды үйренип, толықтырып, бир системаға келтирип баянлаў;

- шегаралық мәселелерди шешиўдиң бурын қәлиплескен усылларына тийкарланып, жаңа мәселелерди шешиў.

Изертлеў предмети хәм объекти. Екинши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер хәм олар ушын қойылған шегаралық хәм аралас мәселелер.

Изертлеўлерди алып барыў усыллары. Дара туўындылы теңлемелер ушын шегаралық мәселелерди шешиўдиң усылларын үйрениў, диссертацияның мазмунына байланыслы оқыў хәм арнаўлы әдебиятларда бар болған материалларды терең өзлестириў, хәр түрли жуўық аналитикалық усылларда алынған нәтийжелерди салыстырып көриў мақсетинде көп санлы тәжрийбелер орынлаў.

Изертлеўдиң илимий жаңалығы. Бул усыл жәрдемінде мәселелер шешилгенде теңледеги өзгериўшилердиң саны бир бирликке кемейтириледі. Шешим жуўық - аналитикалық көринисте алынады. Вариациялық проекциялық усыллардан парқы, бунда шешим изленип

атырған областты бөліп атырған туўрыларда (көп өлшемлі жағдайларда тегісликлерде) жазылады.

Изертлеўдиң әмелий хәм илимий нәтийжелериниң апробациясы.

Диссертация жумысында алынған тийкарғы нәтийжелер:

- 1) бул бағдар бойынша илимий изертлеў жумысларын орынлыў ушын тийкар болып хызмет етеди, бир неше илимий мақалалар жазыўға материал болады;
- 2) «Әмелий математика хәм информатика» қәнигелиги студентлерине хәм «Әмелий математика хәм информациялық технологиялар» магистрлерине арнаўлы курслар өтиў ушын материал болады;
- 3) студентлердиң бакалавриатты питкерий қәнигелик жумысларын жазыўы хәм де илимий изертлеў жумысларын орынлаўы ушын материал болып хызмет етеди;
- 4) илимий –техникалық мәселелерди шешкенде алынатуғын дифференциаллық теңлемелер ушын шегаралық хәм аралас- шегаралық мәселелердиң шешимин жуўық аналитикалық көринисте аңлатыўға мүмкиншилик береді.

Диссертация жумысында алынған тийкарғы нәтийжелери Өзбекстан Республикасы илимлер академиясы Қарақалпақ бөлимінде 20 апрель 2012жылы өткерилген Қарақалпақстан Республикасы XII жас алымлар конференциясында «Эллипслик түрдеги теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешийў» темасында баянат жасалды (XII жас алымлар конференциясы.-Нөкис: «Илим» баспаханасы, 2012, 9-10 бет). Жәнеде Бердақ атындағы Қарақалпақ Мәмлекетлик Университети Магистратура бөлими «Магистрантлардың илимий мийнетлери» топламында «Параболалық түрдеги теңлемелер ушын қойылған басланғыш шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешийў» темасында илимий мақаласы басылып шықты. (ҚМУ магистрлериниң

илимий мийнетлери топламы.-Нөкис: ҚМУ баспаханасы, 2012, 17-19 бетлери).

Жумыстың дүзилиси хәм көлеми. Диссертация кирисиў бөлиминен, еки бапдан, жуўмақлаў бөлиминен, пайдаланылған әдебиятлар дизиминен хәм қосымшалардан турады.

Кирисиў бөлиминде жумыстың темасының актуаллығы, диссертацияның мақсети хәм ўазыйпалары, изертлеў предмети хәм объекти, изертлеўлерди алып барыў усыллары, изертлеўдиң илимий жаңалығы, тийкарғы нәтийжелериниң апробациясы мәселелери баянланады.

Диссертацияның биринши бабында екинши тәртипте дара туўындылы теңлемелер ушын шегаралық мәселелердиң, аралас-шегаралық мәселелердиң, Коши мәселесиниң хәм т.б. мәселелердиң қойылыўы баянланады. Кейин болса эллипстик түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў усылы баянланады. Соның менен бирге бул айтылғанларға тийкарланып санлы мысаллар шешиледі.

Диссертацияның екинши бабында екинши тәртипте гиперболалық хәм параболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас – шегаралық мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў усыллары қаралады. Шешишниң қәтелиги баҳаланады. Санлы мысаллар шешиледі.

Диссертацияның жуўмақлаў бөлиминде диссертация темасында алынған илимий нәтийжелердиң теориялық тәрәптен хәм әмелий тәрәптен әҳмийети, оларды әмелиятда қолланыў мәселелери баянланады.

Пайдаланылған әдебиятлар дизиминде диссертация темасы бойынша 13 тийкарғы әдебиятлар келтирилген. Диссертацияға қосымшаларда болса, ЭЕМ ушын Turbo-Pascal алгоритмлик тилинде дүзилген программалардың хәм оларды компьютерде иске асырылғанда алынған тийкарғы нәтийжелердиң басылып шығарылған нусқалары тигилген.

I БАП

Эллипстик түрдеги дифференциаллық теңлемелер үшін қойылған шегаралық мәселелерди туұрылар усылы менен шешиў

1-§. Екинши тәртипли дара туұындылы теңлемелер үшін қойылған шегаралық мәселелердиң қойылыўы

Дара туұындылы дифференциал теңлемелерди шешиўге газодинамика мәселелери, жыллылық өткизиўшилиқ мәселелерди электромагнитлик майданы мәселелери, квант механикасы мәселелери, гидродинамика мәселелери хәм т.б. мәселелер келтириледи.

Екинши тәртипли дара туұындылы дифференциаллық теңлеме улыўма түрде алынғанда төмендегише болады:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0,$$

бунда x хәм y белгисиз өзгериўшилер, $u(x, y)$ изленип атырған функция, $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ болса $u(x, y)$ функциялық x хәм y бойынша дара туұындылары. Бул теңлемениң шешими деп, бул теңлемени бирдейликке айландыратуғын $u(x, y)$ функцияға айтылады. Бул теңлемеге сызықлы теңлеме деп айтылады, егер теңлеме изленип атырған функцияға хәм оның x, y бойынша дара туұындыларына қарата сызықлы болса.

Екинши тәртипли сызықлы, дара туұындылы, биртеккли емес дифференциаллық теңлеме улыўма түрде

$$Lu \equiv a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + g(x, y)u = f(x, y) \quad (1.1)$$

көринисте болады, бул жерде $a(x, y), b(x, y), \dots, g(x, y)$ функциялар (1.1) теңлемениң коэффициентлери, f x, y болса салтаң ағзасы болады. Егер (1.1) теңлемедіе коэффициентлер x хәм y тиң функциялары болмастан, тек ғана санлар болса, онда бул теңлеме турақлы коэффициентли теңлеме болады.

(1.1) дифференциаллық теңleme өзiнiң a, b хәм c коэффициентлерине байланыслы бир қанша түрлерге бөлинеди.

$$\delta(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$$

шамаға (1.1) теңлемениң дискриминанты деп айтылады. Егер (1.1) дифференциаллық теңleme ушын, қаралып атырылған областта:

1) $\delta > 0$ болса, онда (1.1) теңleme гиперболалық түрге

2) $\delta = 0$ болса онда (1.1) теңleme параболалық түрге

3) $\delta < 0$ болса онда (1.1) теңleme эллипсик түрге тийисли болады. Егер (1) теңлемениң δ дискриминанты бул теңleme қаралып атырған областта белгисин сақламаса, онда ол аралас түрге тийисли деп айтылады.

(1.1) дифференциаллық теңлемениң жоқарыдағы түрлерге тийисли болған үәкиллери төмендеги келтирилген теңлемелер болады.

1) Толқын теңлемеси

$$u_{xx} - u_{yy} = f(x, y)$$

2) Жыллылық өткизиўшилик теңлемеси

$$u_y - u_{xx} = f(x, y)$$

3) Пуассон теңлемеси

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

Дара туўындылы дифференциал теңлемелер улыўма алғанда шексиз көп шешимге ийе болады. Егер физикалық процесс дара туўындылары дифференциаллық теңleme менен аңлатылса, онда бул физикалық процессти бир мәнисли анықлаў ушын бул теңlemeге қандайда бир қосымша шәртлер бириктирилди. Бул шәртлерди әдетте биз басланғыш хәм шегаралық шәртлер деп айтамыз. Басланғыш ўақыт моментине қойылған шәртлерди басланғыш шәртлер, ал координаталардың фиксирленген мәнислерине тийисли болған шәртлерди шегаралық шәртлер деп аталады.

Енди екинши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелердиң түрлерине қарап, олар ушын басланғыш шәртлериниң

қойылуына, сондай ақ, шегаралық хәм аралас-шегаралық мәселелериниң қойылуына қараймыз.

Дәслеп эллипслик түрдеги теңлемелер ушын шегаралық мәселелердин қойылуына қараймыз. Мейли (1.1) теңleme D областта эллипслик түрге тийисли болсын, яғнай $(x, y) \in D$ ушын $\delta < 0$ шәрт орынлы болсын.

Эллипслик түрге тийисли теңлемелерге D областының Γ шегарасында төмендеги 3 шегаралық шәртлерден бири қойылады:

1) биринши шегаралық шәрт

$$u|_{\Gamma} = \varphi(M) \tag{1.2}$$

бул жерде φ берилген функция, M болса Γ контурға тийисли ноқат:

2) екнинши шегаралық шәрт

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \varphi(M) \tag{1.3}$$

бул жерде φ берилген функция, M болса Γ контурдың ноқаты, $\frac{\partial u}{\partial n}$ сыртқы нормал бойынша туўынды.

3) үшінши шегаралық шәрт

$$\left[\alpha(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \beta(x, y) u \right] \Big|_{\Gamma} = \varphi(M) \tag{1.4}$$

бул жерде α, β, φ – берилген функциялар, M ноқат контурдың ноқаты, $\frac{\partial u}{\partial n}$ сыртқы нормал бойынша туўынды.

D областта (1.1) теңлемени қанаатландыратуғын, бул областтың Γ шегарасында (1.2)-(1.4) шәртлердин биреўин қанаатландыратуғын, $u(x, y)$ функциясын табыў талап етиледи.

(1.1)-(1.2) мәселеге Дирихле мәселеси, (1.1), (1.3) мәселеге Нейман мәселеси, (1.1), (1.4) мәселеге аралас-шегаралық мәселе деп айтылады.

Биз энди екнинши тәртипли сызыклы гиперболалық түрдеги теңлемелерди қараймыз. Бундай теңлемелер энергияны өткизиў менен байланыслы мәселелерде, тербелис мәселелеринде хәм т.б. физикалық

мәселелерде ушырасып турады. Егер гиперболалық түрдегі теңлемелер үшін торлар усылын карасак, онда өзиниң структурасы бойынша эллипслик хәм параболалық түрдегі теңлемелер үшін торлар усылына карағанда көп улыўмалыққа ийе.

Мейли (1.1) теңлеме D областта гиперболалық түрге тийисли болсын, яғный $(t, y) \in D$ үшін $\delta > 0$ шәрт орынлы болсын. Биз гиперболалық түрдегі теңлемелердиң ўәкиллериниң бири болған

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (1.5)$$

теңлемени караймыз, бул жерде $f(x, t)$ функция $D = \{t > 0, -\infty < x < +\infty\}$ областта еки мәрте ўзликсиз дифференциалланатуғын, берилген функция. (1.5) теңлеме үшін бир қанша түрдегі мәселелерди қойыўға болады. Олардың тийкарғыларынан 2 мәселени караймыз.

Коши мәселеси. D областта (1.1) теңлемени хәм $y=0$ болғанда

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (1.6)$$

басланғыш шәртлерин қанаатландыратуғын, еки мәрте ўзликсиз дифференциалланатуғын $u(x, t)$ функцияны табыў керек, бул жерде $\varphi(x)$ хәм $\psi(x)$ функциялар - берилген функциялар.

Аралас-шегаралық мәселе. $D = \{t > 0, \alpha < x < \beta\}$ областта (1.5)

теңлемени қанаатландыратуғын, D областтың Γ шегарасында $t=0$ болғанда (1.6) басланғыш шәртлерди, ал $x = \alpha, x = \beta$ болғанда төмендеги ўш шегаралық шәртлерден бирейин қанаатландыратуғын еки мәрте ўзликсиз дифференциалланатуғын $u(x, t)$ функцияны табыў талап етиледи.

$$а) \quad u(\alpha, t) = \mu_1(t), \quad u(\beta, t) = \mu_2(t) \quad (1.7)$$

(бул шәртлер биринши түр шәртлер деп аталады.)

$$б) \quad u_{x|x=\alpha} = \sigma_1(t), \quad u_{x|x=\beta} = \sigma_2(t) \quad (1.8)$$

(бул шәртлер екинши түр шәртлер деп аталады.)

$$в) \quad \begin{aligned} \tau_1(t)u_x + \tau_2(t)u \Big|_{x=\alpha} &= \omega_1 t, \\ \delta_1(t)u_x + \delta_2(t)u \Big|_{x=\beta} &= \omega_2 t \end{aligned} \quad (1.9)$$

(бул шартлер үшінши түр шартлер деп аталады). Бул жерде $\mu(t), \sigma_i(t), \tau_i(t), \delta_i(t), \omega_i(t), i=1,2$ - берилген функциялар болып, $\tau_i(t)$ хәм $\delta_i(t)$ коэффициентлер

$$|\tau_1(t)| + |\tau_2(t)| > 0, \quad |\delta_1(t)| + |\delta_2(t)| > 0$$

шартке бойсынады. (1.7-3), (1.8-4) шартлерге қарасак, бул шартлер (1.9) шарттиң дара жағдайы болатуғынлығын көремиз. Яғный (1.9) шарттен $\tau_1(t) = \delta_1(t) = 0, \tau_2(t) \neq 0, \delta_2(t) \neq 0$ болса (1.7) шарт келип шығады, егер $\tau_2(t) = \delta_2(t) = 0, \tau_1(t) \neq 0, \delta_1(t) \neq 0$ болса (1.8) шарт келип шығады.

Гурса мәселеси. Мейли бизге туйық төртмүйешли \bar{D} , бул жерде $D = \{x, t : 0 < x < p, 0 < t < q\}$, областта коэффициентлери үзликсиз болған, каноникалық көринисте гиперболалық түрдеги

$$u_{xt} + au_x + bu_t + cu = f(x, t) \quad (1.10)$$

дифференциаллық теңлеме берилген болсын. D областта (1.10) теңлемени хәм

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad u|_{y=0} = \psi(x)$$

шартлерин, $u \in C^1 D \cap C \bar{D}$ хәм $u_{xt} \in C D$ шартлерин канаатландыратуғын $u(x, t)$ функцияны табыў талап етиледі. Бул жерде $f \in C D, \psi \in C [0, p], \varphi \in C [0, q]$ хәм $\varphi(0) = \psi(0)$ шартлер орынланыўы керек. Көрип турғанымыздай, Гурса мәселесинде шегаралық шартлер (1.10) теңлемениң еки кесилиўши характеристикаларда бериледи.

Мейли (1.1) теңлеме D областта параболалық түрге тийисли болсын, яғный $(x, y) \in D$ ушын $\delta = 0$ шарт орынлы болсын. Параболалық түрдеги теңлеме болған

$$u_t - u_{xx} = f(x, t) \quad (1.11)$$

теңлемени қараймыз. Параболалық теңлемениң шешимин бирден бир түрде анықлаў ушын, бул теңлемеге басланғыш хәм шегаралық шартлер бириктириледі. Басланғыш шартлер гиперболалық түрдеги теңлемелерден

парқлы түрде $u(x, t)$ функцияға тек ғана $t = t_0$ басланғыш моментте бериледи. Шегаралық шәртлер болса областтың шегарасында температура режиминен ғәрезли болып, хәр түрли болыуы мүмкин. (1.11) теңлеме ушын тийкарғы үш шегаралық шәртлер қойылыуы мүмкин.

1. Стержннің $x = 0$ хәм $x = l$ шегараларында температура бериледи, яғный

$$u(0, t) = \mu_1 t \quad \text{хәм} \quad u(l, t) = \mu_2 t$$

бул жерде, $\mu_1 t$ хәм $\mu_2 t$ функциялар $t_0 \leq t \leq T$ аралықта берилген, T болса процесс үренилетуғын ўақыт моменти.

2. Стержннің $x = 0$ хәм $x = l$ шегараларында функцияның туўындысының мәнислери бериледи, яғный

$$u_x(0, t) = \nu_1 t \quad \text{хәм} \quad u_x(l, t) = \nu_2 t$$

болады. Стержннің кесе кесими арқалы ағып өтетуғын Q жыллылық ағымы берилген жағдайда бундай мәселеге келемиз.

3. Кесиндинің $x = 0$ хәм $x = l$ шегараларында функцияның хәм оның туўындысының мәнислеринің сызықлы комбинациясы бериледи, яғный

$$u_x(0, t) = -\lambda_1 [u(0, t) - \theta_1 t] \quad \text{хәм} \quad u_x(l, t) = -\lambda_2 [u(l, t) - \theta_2 t].$$

Сыртқы орталық пенен денениң сыртынды Ньютон нызамы бойынша жыллылық алмасығы берилген жағдайда бул шәрт қойылады.

Буннан басқада (1.11) теңлеме ушын басланғыш шәртлер де қойылады. $-\infty < x < +\infty$, $t_0 \leq t$ областта (1.11) теңлемениң

$$u(x, t_0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty$$

басланғыш шәртін қанаатландыратуғын шешимін табыу керек. Бул мәселеге Коши мәселеси деп айтылады.

Биринши, екинши хәм үшінши шегаралық мәселелер гиперболалық теңлемелер ушын қойылғандай етип қойылады.

Математикалық физика мәселелери реал физикалық процесслердің математикалық модели болғанлығы үшін, олар қойылғанда төмендегі тәбй шәртлерді қанаатландырыу керек:

1. Мәселенің шешими қандайда бир M_1 функциялар классында бар болыу керек.

2. Мәселенің шешими базы бир M_2 функциялар классында бирден бир болыу керек.

3. Мәселенің шешими басланғыш берилгенлерден, яғный, басланғыш хәм шегаралық шәртлеринен, теңлеме коэффициентлеринен, салтаң ағзадан хәм т.б дан үзликсиз байланыслы болыу керек. Бул дегени басланғыш берилгенлердің киши өзгерисине шешимнің киши өзгериси тууры келеди дегени.

Шешими 1-3 шәртин қанаатландыратуғын мәселеге корректли қойылған (Адамар бойынша) мәселе, ал функциялардың $M_1 \cap M_2$ көплигине болса, корректлик классы деп айтылады. Бул шәртлерден ең болмағанда биреуин қанаатландырмайтуғын мәселеге корректли емес қойылған мәселе деп айтылады. Корректли емес қойылған мәселерге көп жағдайларда математикалық физиканың кери мәселелери алып келинеди.

2-§. Айырмалы схемалар, олардың жыйнақлылығы хәм жууықласыуы

Мейли u Γ шегаралы D областта берилген

$$Lu = f \quad (1.12)$$

дифференциаллық теңлемениң шешими болсын.

$\bar{D} = D + \Gamma$ областқа тийисли M_h изолирленген ноқатлардан дүзилген $D_h = M_h$ көпликти қараймыз. D_h көпликтің ноқатларының саны h шамасы менен анықланады. Егер h киши болса, онда D_h көпликтеги ноқатлар саны көп болады. D_h көпликке тор деп айтылады. Бул көпликтің M_h ноқатларына тор түйинлери деп айтылады. Тор түйин ноқатларында анықланған функция тор функциясы деп айтылады.

D областта үзликсиз v x, y функциялардың кеңислигин U деп белгилеймиз. D_h да анықланған v_h x, y функциялардың көплигинен жаратылған кеңисликти U_h деп белгилеймиз. Торлар усылында U кеңислик U_h кеңислик пенен алмастырылады.

Мейли u x, y функция (1.12) теңлемениң шешими хәм u $x, y \in U$ болсын. Онда мәселени бундай қоямыз: u_h x, y функцияның мәнислерин есаплау керек. Бул мәнислердің топламы, мәнислердің саны D_h дағы ноқатлардың санына тең болған кесте пайда етеди. Бул анық қойылған мәселени тек айырым жағдайларда шешіуге болады. Қосымша шәртлер орынланғанда айырым u^h тордағы мәнислерди есаплауға болады хәм $u^h \approx u_h$ x, y деп қабыл етиледи. u^h шаманы u x, y шешимнің тордағы жууық мәниси деп атаймыз. Оларды есаплау ушын

$$L_h u^h = f^h \quad (1.13)$$

көринистеги санлы теңлемелер системасы қурылады, бул жерде L_h оператор L операторға сәйкес айырмалы оператор, $f^h \in F_h$. Егер $f \in F$ болса, U дан U_h қандай алынған болса, F тен F_h да сондай алынады.

(1.13) формулаға айырмалы схема деп айтылады. Мейли U_h хәм F_h сызықлы кеңісліклерде сәйкес түрде $\|\cdot\|_{U_h}$ хәм $\|\cdot\|_{F_h}$ нормалары киритілген болсын. Егер $h \rightarrow 0$ болғанда $\|u_h(x, y) - u^h\|_{U_h} \rightarrow 0$ болса, онда (1.13) айырмалы схема жыйнақлы деп айтылады. Егер $\|u_h(x, y) - u^h\|_{U_h} \leq Ch^s$ шәрти орынланса, бул жерде $C - h, s > 0$ ға ғәрезли болмаған турақлы, онда h ға қарата s тезлик пенен жыйнақлылы болады деп айтылады.

Егер

$$L_h u_h(x, y) = f^h + \delta f^h$$

хәм $h \rightarrow 0$ болғанда

$$\|\delta f^h\|_{F_h} \rightarrow 0$$

болса, онда (1.13) айырмалы схема (1.12) мәселениң $u(x, y)$ шешимин жуўықластырады деп айтылады. δf^h шамаға жуўықластырыў қәтелиги деп айтылады.

Егер $\|\delta f^h\|_{F_h} \leq Mh^\sigma$ шәрт орынлы болса, онда (1.13) айырмалы схема (1.12) мәселениң $u(x, y)$ шешимин h ға қарата σ тәртіпли қәтелик пенен жуўықластырады деп айтылады, бул жерде M турақлысы $h, \sigma > 0$ лардан ғәрезли болмаған турақлы.

Енди (1.13) айырмалы схема үшін тийкарғы түсиниклерден бири болған орнықтылық түсинигин киритемиз.

Мейли L_h сызықты дифференциаллық оператор болсын.

1-анықлама. (1.13) айырмалы схемаға орнықты деп айтылады, егер $h_0 > 0$ турақты бар болып, хәмме $h < h_0$ хәм $f^h \in F_h$ үшін төмендеги шертлер орынланса:

1) (1.13) айырмалы схема тек бир шешимге ийе;

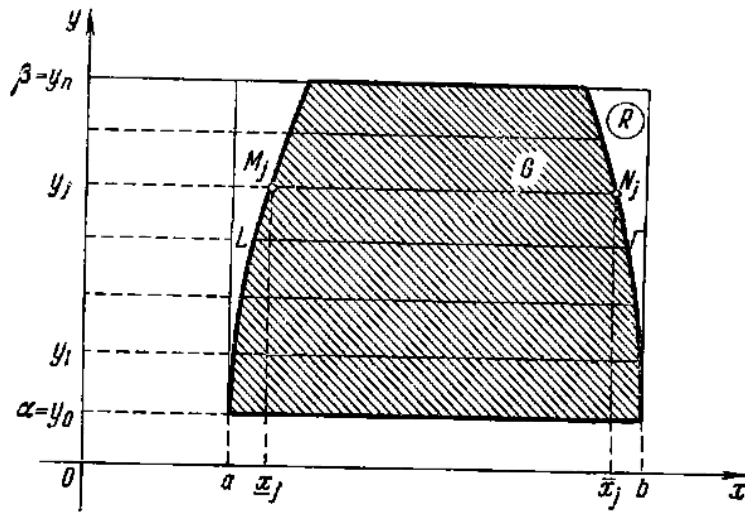
2) $\|u^h\|_{U_h} \leq M \|f^h\|_{F_h}$, бул жерде M - h хәм f^h тан гәрезли болмаған

турақты [6].

Бул киритилген анықламадан айырмалы схеманың орнықтылығы U_h хәм F_h кеңисликлерде киритилген нормалар менен байланыссы болады.

3-§. Эллипстик түрдеги дифференциаллық теңлемелер үшін қойылған шегаралық мәселелерди туұрылар усылы менен шешіу

Туұрылар усылын торлар усылының предел жағдайы деп қарау мүмкин, егер де туұрымүйешли торда оның сызықты өлшемлеринен бири нольге умтылса, ал түйин ноқатлар көплиги предел жағдайында туұры сызықты параллел кесиндилер системасын пайда етсе. Биз бул параграфда коэффициентлери аналитикалық болған еки өзгеріушили, сызықты эллипстик түрдеги дара туұындылы дифференциаллық теңлемелер үшін айтылған усылды қараймыз.



1-суўрет

Мейли, Oxy тегислигинде ултанлары $y = \alpha$ хэм $y = \beta$ ($\alpha < \beta$) туўры сызықларында жатқан, қаптал тәрәплери болса $L: x = g_0(y)$ хэм $\Gamma: x = g_1(y)$, ($\alpha \leq y \leq \beta, g_0(y) < g_1(y)$) аналитикалық иймек сызықлар менен шегараланган трапеция көринисиндеги G областы берилген болсын, хэм бул област $R = \{x, y : a \leq x \leq b, \alpha \leq y \leq \beta\}$ минимал туўрымүйешликте жайласқан болсын (1-суўрет). G областта

$$L \equiv A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y), \quad (1.14)$$

сызықлы екинши тәртипли эллипстик түрдеги дифференциаллық теңлемени караймыз. (1.14) теңлеме ушын G областта төмендеги мәселени қоямыз. (1.14) теңлемениң G областтың шегарасында төмендеги

$$\left. \begin{aligned} u(x, a) = \varphi_0(x), u(x, \beta) = \varphi_1(x), \\ u(g_0(y), y) = \psi_0(y), u(g_1(y), y) = \psi_1(y) \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

шәртлерин қанаатландыратуғын $u = u(x, y)$ шешимин табыў талап етиледі. (1.14) коэффициентлери хэм оң тәрәпиндеги салтаң ағза R туўрымүйешликте анықлаған хэм аналитикалық функция деп уйғарамыз. Бундан басқада

$$\delta = B^2(x, y) - A(x, y) \cdot C(x, y) < 0, \quad (x, y) \in R$$

шәрт орынланатуғын болсын, бул жерде

$$A(x, y) \neq 0, \quad C(x, y) \neq 0, \quad \forall(x, y) \in R.$$

$\varphi_0(x)$ хәмде $\varphi_1(x)$ функциялар $[a, b]$ кесиндисинде, $\psi_0(y)$ хәм $\psi_1(y)$ функциялар болса $[\alpha, \beta]$ кесиндисинде аналитикалық функциялар болсын. Буннан басқа да

$$\varphi_0(g_i(\alpha)) = \psi_i(\alpha), \quad \varphi_1(g_i(\beta)) = \psi_i(\beta), \quad i = 0, 1$$

(1.14)-(1.15) мәселениң жуўық шешимин туўрылар усылы менен табыў ушын α, β кесиндисин n саны тең бөлекке

$$y_j = y_0 + jh, \quad (y_0 = \alpha, y_n = \beta)$$

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

ноқатлар арқалы бөлемиз, хәм де ишки бөлиниў ноқатлары арқалы $y = y_j, (j = 1, 2, \dots, n - 1)$ параллел туўрыларының кесиндилерин жүргиземиз.

Бул жүргизилген ишки туўрылардың хәр биринде (1.14) эллипслик түрдеги дара туўындылы дифференциаллық теңлемени, изленип атырған $u(x, y_j)$ функция ушын әдеттеги дифференциаллық теңлеме менен жуўық алмастырамыз. Буның ушын изленип атырған функцияның (1.14) дифференциаллық теңлемедегі y бойынша дара туўындыларын шекли айырмалы қатнастар менен алмастырып аламыз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=y_j} &= \frac{1}{h^2} [u(x, y_{j+1}) - 2u(x, y_j) + u(x, y_{j-1})], \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{y=y_j} &= \frac{1}{2h} [u'_x(x, y_{j+1}) - u'_x(x, y_{j-1})], \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_j} &= \frac{1}{2h} [u(x, y_{j+1}) - u(x, y_{j-1})] \\ (j = 1, 2, \dots, n - 1) \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Төмендегидей етип қысқаша белгилеулер киритемиз:

$$u(x, y_j) = u_j(x), \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = u'_j(x), \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} = u''_j(x),$$

$$A(x, y_j) = A_j(x), \quad B(x, y_j) = B_j(x) \quad \text{х.т.б.}$$

(1.16) шекли айырмалы қатнастарды (1.14) теңлемде функцияның дифференциалларының орнына қойып, төмендегі әдеттегі дифференциаллық теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$A_j(x)u''_j(x) + \frac{B_j(x)}{h} [u'_{j+1}(x) - u'_{j-1}(x)] + \frac{C_j(x)}{h^2} [u_{j+1}(x) - 2u_j(x) + u_{j-1}(x)] + \\ + a_j(x)u'_j(x) + \frac{b_j(x)}{2h} [u_{j+1}(x) - u_{j-1}(x)] + c_j(x)u_j(x) = f_j(x); \quad (j = 1, 2, \dots, n-1). \quad (1.17)$$

(1.15) шегаралық шәртлер тийкарында аламыз:

$$u_0(x) = \varphi_0(x), \quad u_n(x) = \varphi_1(x). \quad (1.18)$$

Демек,

$$u'_0(x) = \varphi'_0(x), \quad u'_n(x) = \varphi'_1(x).$$

Солай етип, биз (1.14) сызықты, екінші тәртіпті дара туынддылы, дифференциаллық теңлемеден $u_1(x), u_2(x), \dots, u_{n-1}(x)$ белгисіз функцияларға карата $(n-1)$ белгисізлі $(n-1)$ әдеттегі дифференциаллық теңлемелер системасына келдик. Ал $u_0(x)$ хәм $u_n(x)$ функциялар (1.18) формулалар менен анықланатуғын берілген функциялар. Жоқарыдағы (1.17) әдеттегі дифференциаллық теңлемелер системасына туурылар усылының теңлемелер системасы деп айтылады.

(1.17) теңлемелер системасының оң тәрәпи хәм коэффициентлери аналитикалық функция, демек ол $[a, b]$ кесиндисинде үзликсиз болады хәмде $a \leq x \leq b$ болғанда $A_j(x) \neq 0$. Онда дифференциаллық теңлемелер теориясынан бизге мәлим теорема тийкарында бул системаның

$$u_j(x) = \varphi_j(x; c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}), \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

улыўма шешими $[a, b]$ кесиндисинде анықланған болады хәм $c_1, c_2, \dots, c_{2n-2}$ турақлыларды өзинде сақлайды. Бул белгисізлерди анықлау ушын (1.15) шегаралық шәртлер тийкарында сонша сандағы

алгебралық теңдемелер системасына ийе боламыз. $y = y_j$ кесиндисінде жатқан $M_j N_j$ кесиндисинің Ох көшеріндегі проекциясының ушлары $\underline{x}_j = g_0(y_j)$ хәм $\bar{x}_j = g_1(y_j)$ ноқатлар болсын (1-суўрет). Онда (1.15) шәртлер тийкарында

$$u_j(\underline{x}_j) = \psi_0(y_j), u_j(\bar{x}_j) = \psi_1(y_j) \quad (1.19)$$

шегаралық шәртлерге ийе боламыз, бунда $a \leq \underline{x}_j < \bar{x}_j \leq b$, ($j = 1, 2, \dots, n-1$).

Демек, (1.14)-(1.15) мәселемиз (1.17)-(1.19) әдеттегі дифференциаллық теңдемелер системасы ушын шегаралық мәселелерди шешиўге келтирилди.

Егер (1.17) әдеттегі дифференциаллық теңдемелер системасы дәл шешимге ийе болса, онда (1.17)-(1.19) шегаралық мәселениң шешимин анық усыллар менен табыўға болады. Егер бул болмаса, онда жуўық усыллардың бири менен табамыз, соның менен бирге u_j x функция $[a, b]$ кесиндисинде толық анықланыўы керек.

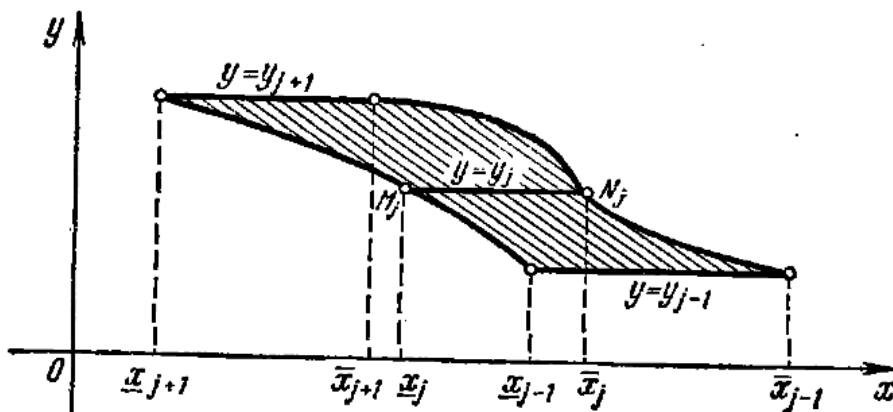
Буннан кейин биз изленип атырған $u(x, y)$ функцияның $y = y_j$, ($j = 0, 1, \dots, n$) параллел туўрылардағы жуўық мәнисин билиўмиз керек. $u(x, y)$ функцияның G областтың аралық ноқатларындағы мәселесин интерполяциялаў усылы менен табыў мүмкин.

(1.17)-(1.19) мәселениң өзине тән өзгешелигин көрсетемиз.

Хәр бир изленип атырған $u_j(x)$ функцияны оның еки ноқаттағы мәниси бойынша, улыўма алғанда $[a, b]$ кесиндисин ишки \underline{x}_j хәм \bar{x}_j ноқатларындағы мәниси бойынша пүтин $[a, b]$ кесиндисинде анықлаў керек. Егерде биз қандайда бир $u_j(x)$ функцияны тек ғана $\underline{x}_j \leq x \leq \bar{x}_j$ аралықта анықласақ хәм, ол бул мәселени толық шешиў ушын жеткиликли емес.

$y = y_j$ ($x_j \leq x \leq x_j$) туўрысындағы $M_j N_j$ кесиндисинің Ох көшерине проекциясы улыўма алғанда $y = y_{j-1}$, ($\underline{x}_{j-1} \leq x \leq \bar{x}_{j-1}$) хәм $y = y_{j+1}$, ($\underline{x}_{j+1} \leq x \leq \bar{x}_{j+1}$) қоңсы параллел туўрыларындағы кесиндилердиң Ох көшеріндегі проекцияларын қапламайды. Демек, бул жағдайда (1.17)

системадан $u_{j-1}(x)$ хәм $u_{j+1}(x)$ функцияларын анықлаў ушын $u_j(x)$ функциясының мәнислерин $[\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ кесиндисиниң сыртында билиў керек. (2-сүўрет).



2-сүўрет

Биз басланғыш берилгенлер аналитикалық функция болғанда туўрылар усылының әпиўайы жағдайын көрип шықтық. (1.14) теңлемениң коэффициентлери хәм (1.15) шегаралық шәртлер тек үзликсиз болғанда туўрылар усылын пайдаланыў қосымша қыйыншылықларға алып келеди. Себеби туўрылар усылының (1.17) теңлемелер системасының шешилиўи G областының R сыртында анық коэффициентлеринен хәм $u_0(x)$ хәм $u_n(x)$ функцияларының мәнислеринен ғәрезли болады. Егер G областы шегаралары координаталар көшерлерине параллел болған туўрымүйешлик болса, онда бул қыйыншылықлар болмайды.

Егер (1.14) теңлемени коэффициентлери x өзгериўшиден ғәрезли болса, онда туўрылар усылының (1.17) туўрылар системасы өзгериўши коэффициентлерди теңлемелер системасы болады. Оны шешиў қыйын болады. Сол себепли бул жағдайда туўрылар усылынан пайданылмастан, торлар усылын пайдаланыў қолай болады.

Егер (1.14) теңлемениң коэффициентлери x тан ғәрезли болмаса, онда туўрылар усылының (1.17) системасы, әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасы болады. Бул теңлемелер системасын шешиў қыйын емес хәмде туўрылар усылы бул жағдайда жақсы нәтийже береді.

4-§. Пуассон теңлемесі үшін қойылған Дирихле мәселесін туұрылар усылы менен шешиў

Мейли туұрымүйешли $G = \{ \alpha < x < \beta, y_0 < y < y_0 + \ell \}$ областта

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (1.20)$$

Пуассон теңлемесиниң

$$\left. \begin{aligned} u(x, y_0) = \varphi_0(x), u(x, y_0 + \ell) = \varphi_1(x), (\alpha \leq x \leq \beta) \\ u(\alpha, y) = \psi_0(y), u(\beta, y) = \psi_1(y), (y_0 < y < y_0 + \ell) \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

шегаралық шәртлерин қанаатландыратуғын шешимин туұрылар усылы менен табыў талап етилсин.

(1.20) теңлемедегі туұындыларды (1.16) формуладағы айырмалы қатнаслар менен алмастырып аламыз:

$$u_k''(x) + \frac{1}{h^2} u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x) = f_k(x) + O(h^2)$$

Бул теңлемеді $O(h^2)$ ағзаны таслап, $u(x, y)$ функцияның $y = y_k$ туұрысындағы жуўық мәнисин $U_k(x)$ деп белгилесек, онда төмендегі мәселеге келеміз:

$$\left. \begin{aligned} U_k''(x) + \frac{1}{h^2} U_{k+1}(x) - 2U_k(x) + U_{k-1}(x) = f_k(x), (k = 1, 2, \dots, n) \\ U_0(x) = \varphi_0(x), U_{n+1}(x) = \varphi_1(x) \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

$$U_k(\alpha) = \psi_0(y_k), U_k(\beta) = \psi_1(y_k), (k = 1, 2, \dots, n) \quad (1.23)$$

(1.20)-(1.21) мәселениң шешиминиң сыйпақлығы жоқары деп уйғарып, (1.20) теңлемени және де анық аппроксимациялаўды қараймыз. Буның ушын $u(x, y)$ функцияны y бойынша y_k нокаттың дөгерегинде Тейлор қатарына жиклейміз:

$$u_{k+1}(x) = u_k(x) + \frac{\partial u(x, y_k)}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u(x, y_n)}{\partial y^2} \cdot \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x, y_n)}{\partial y^3} \cdot \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u(x, y_k)}{\partial y^4} \cdot \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^5 u(x, y_n)}{\partial y^5} \cdot \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x, y_n + \theta_1 h)}{\partial y^6} \cdot \frac{h^6}{6!}, \quad (0 < \theta_1 < 1)$$

$$u_{k-1}(x) = u_k(x) - \frac{\partial u(x, y_k)}{\partial y} h + \frac{\partial^2 u(x, y_n)}{\partial y^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 u(x, y_k)}{\partial y^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4(x, y_k)}{\partial y^4} \frac{h^4}{4!} - \frac{\partial^5 u(x, y_n)}{\partial y^5} \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x, y_k + \theta_2 h)}{\partial y^6} \frac{h^6}{6!}, \quad (0 < \theta_2 < 1)$$

Бул еки теңликтің оң хәм шеп тәреплерин ағзама-ағза қосып төмендегилерди аламыз:

$$\begin{aligned} u(x, y_{k+1}) - 2u(x, y_k) + u(x, y_{k-1}) &= u(x, y_k + h) - 2u(x, y_k) + u(x, y_k - h) = \\ &= h^2 \frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} + \frac{h^4}{12} \frac{\partial^4 u(x, y_k)}{\partial y^4} + O(h^4). \end{aligned}$$

Жоқарыда $u(x, y_k)$ функцияның $y = y_k$ нокаттың дөгерегинде Тейлор қатарына жиклениўине уқсас етип, $u_{yy}(x, y)$ функцияны хәм қатарға жиклесек хәмде оларды қосып төмендегилерге ийе боламыз.

$$\frac{\partial^2 u(x, y_{k+1})}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{k-1})}{\partial y^2} = h^2 \frac{\partial^4 u(x, y_k)}{\partial y^4} + O(h^6)$$

Бул ақырғы еки теңликтен $\frac{\partial^4 u(x, y_k)}{\partial y^4}$ ағзасы жоқ етип,

$$\begin{aligned} u(x, y_{k+1}) - 2u(x, y_k) + u(x, y_{k-1}) &= \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x, y_{k+1})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y_{k-1})}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \frac{5h^2}{6} \frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} + O(h^6) \end{aligned} \quad (1.24)$$

теңлемеге ийе боламыз. (1.20) теңлемеден аламыз:

$$\frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial y^2} = f(x, y_k) - \frac{\partial^2 u(x, y_k)}{\partial x^2} = f_k(x) - u_k''(x)$$

(1.24) теңлемде $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ туўындыларын алмастырып аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}u_k''(x) + \frac{1}{12}[u_{k+1}''(x) + u_{k-1}''(x)] + \frac{1}{h^2}u_{k+1}(x) - 2u_k(x) + u_{k-1}(x) = \\ = \frac{5}{6}f_k(x) + \frac{1}{12}f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x) + O(h^4) \end{aligned}$$

$O(h^4)$ ағзаны таслап, туўрылар усылынан төмендеги теңлемелер системасын аламыз:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6}U_k''(x) + \frac{1}{12}[U_{k+1}''(x) + U_{k-1}''(x)] + \frac{1}{h^2}[U_{k+1}(x) - 2U_k(x) + U_{k-1}(x)] = \\ = \frac{5}{6}f_k(x) + \frac{1}{12}f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$U_0(x) = \varphi_0(x), U_{n+1}(x) = \varphi_1(x),$$

ал шегаралық шәртлер болса

$$U_k(\alpha) = \psi_0(y_k), U_k(\beta) = \psi_1(y_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.26)$$

көринисте болады. (1.25)-(1.26) мәселе (1.20)-(1.21) мәселени h^2 дәллик пенен аппроксимирлейди.

(1.22) хәм (1.25) әдеттеги дифференциал теңлемелер системалары сызықлы болғанлығы себепли, хәр бириниң улыўма шешимлери олардың дара шешими хәм биртеккли системаның улыўма шешимлери қосындысына тең. Биртеккли система f функциядан хәм шегаралық шәртлеринен де, егер n берилген болса областтың өлшемлеринен де ғәрзли емес. Сол себептен де ол шешимди хәмме ўақыт табыўға болады. Биз хәзир ол шешимди табыўға хәрекет етеміз:

(1.22) системаға сәйкес биртеккли системаны қараймыз:

$$\begin{aligned} U_k''(x) + \frac{1}{h^2}U_{k+1}(x) - 2U_k(x) + U_{k-1}(x) = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ U_0(x) = U_{n+1}(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.22')$$

(1.22') дифференциаллық теңлемелер системасының дара шешимин

$$U_k(x) = \gamma(k) \cdot \mathcal{G}(x) \quad (1.27)$$

көринисте излейміз. (1.27) ны (1.22') теңлемелер системасының орнына қойып, төмендегилерге ийе боламыз:

$$\gamma(k)\mathcal{G}''(x) + \frac{1}{h^2}\mathcal{G}(x) \gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1) = 0, (k=1,2,\dots,n) \quad (1.28)$$

$$\gamma(0) = \gamma(n+1) = 0.$$

Алынған біртекли теңлемелер системасының екі тәрәпин хәм $\gamma(k)\mathcal{G}(x)$ бөліп, x тан ғәрезли бөлегин теңлигин бир тәрәпине, k дан ғәрезли бөлегин екинши тәрәпине өткізсек:

$$\frac{\mathcal{G}''(x)}{\mathcal{G}(x)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{-h^2\gamma(k)}$$

теңлемесине ийе боламыз. Бул теңлемениң шеп тәрәпи тек x тан ғәрезли, оң тәрәпи тек k дан ғәрезли. Бул дегени ол қатнастар тек турақлы болған жағдайда болады, яғный:

$$\frac{\mathcal{G}''(x)}{\mathcal{G}(x)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{-h^2\gamma(k)} = \delta^2 = const, (k=1,2,\dots,n) \quad (1.29)$$

$\gamma(k)$ ны табыў ушын

$$\gamma(k+1) - [2 - h^2\delta^2]\gamma(k) + \gamma(k-1) = 0 \quad (1.30)$$

біртекли айырмалы теңлемеге ийе боламыз. $\gamma(k)$ ны бир мәнисли анықлаў ушын шегаралық шәртлер болса (1.28) деги шәртлер болады, яғный:

$$\gamma(0) = \gamma(n+1) = 0. \quad (1.31)$$

(1.30-19) айырмалы теңлемениң улыўма шешими

$$\gamma(k) = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k \quad (1.32)$$

болады. Бунда c_1 хәм c_2 -еркли турақлылар, ал λ_1 хәм λ_2 лер болса

$$\lambda^2 - [2 - h^2\delta^2]\lambda + 1 = 0$$

характеристикалық теңлемениң коренлери болады.

(1.32) деги c_1 хәм c_2 турақлыларын анықлаў ушын (1.31) шегаралық шәртлеринен пайдалансақ

$$\gamma(0) = c_1 + c_2 = 0, \quad c_2 = -c_1$$

$$\gamma(n+1) = c_1 \lambda_1^{n+1} + c_2 \lambda_2^{n+1} = c_1 (\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = 0$$

теңлемелерге ийе боламыз. Бул жерден

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{n+1} = 1 \quad \text{яки} \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2\pi is}{n+1}}, \quad s = 0, 1, \dots, n$$

болады. Жоқарыдағы характеристикалық (квадрат) теңлемеден Виет теоремасы бойынша $\lambda_1 \lambda_2 = 1$. Онда $\lambda_1^2 = e^{\frac{2\pi is}{n+1}}$ болады. Бул жерден

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi is}{n+1}}$$

болады.

λ_1 хәм λ_2 коренлерди анықлағанымыздан кейин, δ белгисиз турақлыны анықлаймыз. Виет теоремасы бойынша

$$2 - h^2 \delta^2 = \lambda_1 + \lambda_2 = e^{\frac{\pi is}{n+1}} + e^{-\frac{\pi is}{n+1}} = 2 \cos \frac{\pi s}{n+1}$$

болады. Бул жерден

$$\delta_s^2 = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi s}{2(n+1)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi(y_s - y_0)}{2l}, \quad (s = 0, 1, \dots, n)$$

$$\gamma_s(k) = c_1 \left(e^{\frac{\pi isk}{n+1}} - e^{-\frac{\pi isk}{n+1}} \right) = c \sin \frac{\pi sk}{n+1} = c \sin \frac{\pi s(y_k - y_0)}{l}$$

тривиал болмаған шешим тек ғана $s = 1, 2, \dots, n$ болғанда алынады. (1.29) теңлемеден

$$\mathcal{G}''(x) - \delta_s^2 \mathcal{G}(x) = 0$$

теңлемени аламыз. Бул биртеккли, турақлы коэффициентли екинши тәртиптеги әдеттеги дифференциаллық теңлемениң шешими

$$\mathcal{G}_s(x) = A_s e^{\delta_s x} + B_s e^{-\delta_s x}$$

болады. Демек биз (1.22') системаның бир-бири менен сызықлы байланыслы болмаған

$$U_{k,s}(x) = \left[A_s e^{\delta_s x} + B_s e^{-\delta_s x} \right] \sin \frac{\pi s(y_k - y_0)}{l}, \quad (s = 1, 2, \dots, n)$$

көринистеги n дара шешимін алдық, бұл жерде A_s хәм B_s лер еркли турақлылар. Онда системаның улыўма шешими

$$U_k(x) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{s\pi}{l} (y_k - y_0) \cdot (A_s e^{\delta_s x} + B_s e^{-\delta_s x})$$

көринисте болады. Буған уқсас етип (1.25) системаға сәйкес биртеккли системаның шешиминиң

$$U_k(x) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{s\pi}{l} (y_k - y_0) \cdot (A'_s e^{\delta'_s x} + B'_s e^{-\delta'_s x})$$

көринисте екенлигин көрсетиўге болады, бұл жерде

$$\delta_s'^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi(y_s - y_0)}{2l}}{h^2 \cdot \left(5 + \cos \frac{\pi(y_s - y_0)}{l} \right)}, (s = 1, 2, \dots, n)$$

A'_s хәм B'_s лер болса еркли турақлылар.

(1.22) хәм (1.25) системаларға сәйкес биртеккли системалардың шешимін, анық бир жағдайда болса сол системалардың дара шешимін қандайда бир усыл менен, мәселен турақлыларды вариациялаў усылы менен табыў мүмкин. Демек, биртеккли емес системаның улыўма шешимін табыўға болады. Улыўма шешим табылғаннан кейин шегаралық шәртлерин пайдаланып, A_s хәм B_s турақлыларын анықлаў ушын $2n$ саны сызықлы алгебралық теңлемелер системасына ийе боламыз. Бұл системаны шешип коэффициентлерди анықлағаннан кейин (1.20) хәм (1.21) мәселениң $u(x, y)$ шешиминиң $y = y_k$ туўрысындағы жуўық мәнислерин табамыз.

Төртмүйешли область болған жағдайда (1.22)-(1.23) мәселениң шешиминиң (1.20)-(1.21) мәселениң шешимине жыйнақлылығы шешим жеткиликли сыйпақ деп уйғарылғанда, усылдың кәтелеги (1.22)-(1.23) системаның шешими ушын максимум принципи жәрдемінде көрсетиледи. (1.25)-(1.26) мәселе шешиминиң (1.20)-(1.21) мәселениң шешимине жыйнақлылығы көрсетилгенде бұл усыл қолланылмайды.

5-§. Санлы мысаллар

Бул параграфда эллипстик түрдеги теңлеме ушын Дирихле мәселесин туўрылар усылы менен шешиў мәселеси қаралған.

Мәселе 1. $\Omega = 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ туўрымүйешли областта

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 + y$$

Пуассон теңлемесиниң

$$u(x, 0) = x(1-x), \quad u(x, 1) = 1,$$

$$u(0, y) = y^2, \quad u(1, y) = y$$

шегералық шәртлерди қанаатландыратуғын шешимин туўрылар усылы менен табың.

Шешилиўи. $c = 0$ хәм $d = 1$ болады. $h = \frac{1}{3}$ деп аламыз. $a = 0$ хәм $b = 1$

болады. $x_k = kh, k = \overline{0, 3}, y_l = lh, l = \overline{0, 3}$ түйин ноқатлары болады. Онда

$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1, y_0 = 0, y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = \frac{2}{3}, y_3 = 1$ түйин ноқатларын

белгилеймиз. Теңлемениң оң тәрепи $f(x, y) = x^2 + y$. y_k түйин ноқатларында

$f(x, y_k) = f_k(x) = x^2 + y_k$. Онда $f_0(x) = x^2, f_1(x) = x^2 + \frac{1}{3}, f_2(x) = x^2 + \frac{2}{3},$

$f_3(x) = x^2 + 1$ болады. $y = \frac{1}{3}$ хәм $y = \frac{2}{3}$ туўрыларын жүргиземиз.

Онда (1.25) теңлемелер системасы төмендегише болады:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{6}U_1''(x) + \frac{1}{12}[U_2''(x) + U_0''(x)] + \frac{1}{h^2}[U_2(x) - 2U_1(x) + U_0(x)] = \\ \quad = \frac{5}{6}f_1(x) + \frac{1}{12}f_2(x) + f_0(x), \\ \frac{5}{6}U_2''(x) + \frac{1}{12}[U_3''(x) + U_1''(x)] + \frac{1}{h^2}[U_3(x) - 2U_2(x) + U_1(x)] = \\ \quad = \frac{5}{6}f_2(x) + \frac{1}{12}f_3(x) + f_1(x), \end{array} \right.$$

$f_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$ лердің мәнісін орнына қойып, алынған теңдемелерді әйіуәластырып, аламыз:

$$\begin{cases} U_2'' + 10U_1'' + 108U_2 - 216U_1 = 120x^2 - 108x + 6 \\ 10U_2'' + U_1'' - 216U_2 + 108U_1 = 12x^2 - 100. \end{cases} \quad (1.33)$$

(1.26) шәртлер болса

$$U_1(0) = \frac{1}{9}, U_1(1) = \frac{1}{3}, U_2(0) = \frac{4}{9}, U_2(1) = \frac{2}{3} \quad (1.34)$$

көринисте болады. Дәслеп (1.33) системаға сәйкес биртеккли

$$\begin{cases} U_2'' + 10U_1'' + 108U_2 - 216U_1 = 0, \\ 10U_2'' + U_1'' - 216U_2 + 108U_1 = 0 \end{cases} \quad (1.35)$$

системаны шешимиз. Оның шешимін $U_1(x) = Ae^{kx}$, $U_2(x) = Be^{kx}$ көринисте ізлеймиз. Буларды биртеккли системада орнына қойып

$$\begin{cases} A(10\lambda^2 - 216) + B(\lambda^2 + 108) = 0, \\ A(\lambda^2 + 108) + B(10\lambda^2 - 216) = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

системаны аламыз. Бул биртеккли система ноль емес шешимге ийе болыуы үшін оның детерминанты нольге тең болыуы керек, яғный

$$\begin{vmatrix} 10\lambda^2 - 216 & \lambda^2 + 108 \\ \lambda^2 + 108 & 10\lambda^2 - 216 \end{vmatrix} = 0.$$

Буннан $9\lambda^2 - 324 - 11\lambda^2 - 108 = 0$ болады. Буны шешип $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = -6$,

$\lambda_3 = 6\sqrt{\frac{3}{11}}$, $\lambda_4 = -6\sqrt{\frac{3}{11}}$ шешимлерге ийе боламыз. (1.36) системаның

бириншисинен аламыз:

$$\frac{A}{\lambda^2 + 108} = -\frac{B}{10\lambda^2 - 216} = C.$$

$\lambda^2 = 36$ болғанда аламыз: $\frac{A_k}{144} = -\frac{B_k}{144}$, $k = 1, 2$. $\lambda^2 = \frac{108}{11}$ болғанда

$\frac{A_k}{117\frac{9}{11}} = \frac{B_k}{117\frac{9}{11}}$, $k = 3, 4$ болады. (1.35) биртеккли системаның шешими

$$U_1 x = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-6x} + c_3 e^{6x\sqrt{\frac{3}{11}}} + c_4 e^{-6x\sqrt{\frac{3}{11}}}$$

$$U_2 x = -c_1 e^{6x} - c_2 e^{-6x} + c_3 e^{6x\sqrt{\frac{3}{11}}} + c_4 e^{-6x\sqrt{\frac{3}{11}}}$$

болады.

(1.33) система үшін анық емес коэффициенттер ұсылын пайданамыз. Оның шешими

$$U_1 x = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-6x} + c_3 e^{6x\sqrt{\frac{3}{11}}} + c_4 e^{-6x\sqrt{\frac{3}{11}}} - \frac{7}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{67}{486}$$

$$U_2 x = -c_1 e^{6x} - c_2 e^{-6x} + c_3 e^{6x\sqrt{\frac{3}{11}}} + c_4 e^{-6x\sqrt{\frac{3}{11}}} - \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{235}{486}$$

болады. c_i $i=1,2,3,4$ коэффициентлерин (1.34) шегаралық шәртлеринен пайдаланып анықлаймыз. Онда қаралып атырған мәселениң шешими

$$U_1 x = \frac{1}{162sh6} [sh6x + 38sh6 \cdot 1 - x] + \frac{1}{243sh6\sqrt{\frac{3}{11}}} \left[73sh6x\sqrt{\frac{3}{11}} - 35sh6 \cdot 1 - x \sqrt{\frac{3}{11}} \right] - \frac{7}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{67}{486}$$

$$U_2 x = -\frac{1}{162sh6} [sh6x + 38sh6 \cdot 1 - x] + \frac{1}{243sh6\sqrt{\frac{3}{11}}} \left[73sh6x\sqrt{\frac{3}{11}} - 35sh6 \cdot 1 - x \sqrt{\frac{3}{11}} \right] - \frac{4}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{235}{486}$$

болады.

Мәселе 2. $\Omega = 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3$ туұрымүйешли областта

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Лаплас теңлемесиниң

$$u(x,0) = x^2, \quad u(x,3) = x^2 - 3x + 9,$$

$$u(0,y) = y^2, \quad u(4,y) = 16 + y^2 - 4y$$

шегаралық шәртлерди қанаатландыратуғын шешимин туұрылар ұсылы менен табың.

Шешилиўи. $h=1$ деп аламыз. $y=1$ хэм $y=2$ туўрыларын жүргиземиз.

Онда (1.25) теңлемелер системасы төмендегише болады:

$$\begin{cases} U_2'' + 10U_1'' + 12U_2 - 24U_1 = 12x^2 - 2 \\ 10U_2'' + U_1'' - 24U_2 + 12U_1 = -12x^2 + 36x - 110. \end{cases}$$

(1.26) шэртлер болса

$$u_1(0) = 1, u_1(4) = 13, u_2(0) = 4, u_2(4) = 12$$

көринисте болады. Дәслеп бул системаға сәйкес биртеккли системаны шешимиз. Оның шешимин $u_1(x) = Ae^{kx}$, $u_2(x) = Be^{kx}$ көринисте излеймиз. Биртеккли системаны шешип, (7) система ушын анық емес коэффициентлер усылын пайланамыз. Оның шешими

$$U_1(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x\sqrt{\frac{12}{11}}} + c_4 e^{-x\sqrt{\frac{12}{11}}} + x^2 - x + 5$$

$$U_2(x) = -c_1 e^{2x} - c_2 e^{-2x} + c_3 e^{x\sqrt{\frac{12}{11}}} + c_4 e^{-x\sqrt{\frac{12}{11}}} + x^2 - 2x + 8$$

болады. c_i $i=1,2,3,4$ коэффициентлерин шегаралық шэртлеринен пайдаланып анықлаймыз. Онда қаралып атырған мәселениң шешими

$$U_1(x) = \frac{-4}{sh4\sqrt{\frac{12}{11}}} \left[shx\sqrt{\frac{12}{11}} + sh(4-x)\sqrt{\frac{12}{11}} \right] + x^2 - x + 5$$

$$U_2(x) = \frac{-4}{sh4\sqrt{\frac{12}{11}}} \left[shx\sqrt{\frac{12}{11}} + sh(4-x)\sqrt{\frac{12}{11}} \right] + x^2 - 2x + 8$$

болады.

Бул мәселени шекли айырмалар усылы менен шешийў ушын адымды $h=1$ деп алып, компьютерде программа дүзиллип төмендеги нәтийжелер алынды.

1-iteratsiyada alingan natiyjeler

3.750000	6.437500	9.609375
5.687500	7.281250	9.472656

2-iteratsiyada alingan natijeler

3.531250	6.105469	9.394531
5.453125	7.007813	9.350586

3-iteratsiyada alingan natijeler

3.389648	5.947998	9.324646
5.349365	6.911987	9.309158

.....

18-iteratsiyada alingan natijeler

3.285714	5.857143	9.285714
5.285714	6.857143	9.285714

19-iteratsiyada alingan natijeler

3.285714	5.857143	9.285714
5.285714	6.857143	9.285714

20-iteratsiyada alingan natijeler

3.285714	5.857143	9.285714
5.285714	6.857143	9.285714

Бул алынған нәтижелерди салыстырып көргенимизде төмендегише болады.

0,156374	0,167259	0,156374
0,156374	0,167259	0,156374

II БАП

Параболалық хәм гиперболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди туўрылар усылы менен шешиў

1-§. Параболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди шешиўдиң туўрылар усылының кесесине схемасы

Мейли $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$ ярым жолақда төмендеги шегаралық мәселесин шешиў талап етилсин.

$$u_t = L u + f(x, t) \quad (2.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.2)$$

$$u(0, t) = \psi_0(t), \quad u(1, t) = \psi_1(t), \quad (2.3)$$

бул жерде, $L(u) = a(x, t)u_{xx} + b(x, t)u_x + c(x, t)u$. Қаралып атырған мәселениң жеткиликли сыйпақ шешими бар хәм ол бирден бир деп уйғарамыз. Бул мәселениң жуўық шешимин туўрылар усылы бойынша $\Pi = \{x, t : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T < +\infty\}$ туўрымүйешликте излеймиз. x яки t бойынша туўындылардың аппроксимирлеўге қарап биз туўрылар усылының бойына яки кесесине вариантларын аламыз. Биз бул жумыста дәслеп туўрылар усылының кесесине вариантын қараймыз.

Π_τ менен биз $0 \leq x \leq 1$, $t = t_n = n\tau$, $n = 1, 2, \dots, N$; ($N\tau = T$) тор областын белгилеймиз, ол оның шегарасы Γ_τ деп $t = 0$ туўры сызығының $0 \leq x \leq 1$ кесиндиси хәм $(0, t_n)$, $(1, t_n)$, $n = 1, 2, \dots, N$ ноқатларынан дузилген көпликті түсинемиз. $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$ областта $\langle \cdot \rangle_\tau$ мәселени қарастырамыз. $u \in \langle \cdot \rangle_\tau$

функцияның (2.1) теңлемедегі $u_t(x, t)$ дара туындасын $t = t_n, n = 1, 2, \dots, N$ болғанда

$$u_t(x, t_n) \approx \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau} \quad (2.4)$$

шеп айырманы қатнас пенен жууық алмастырамыз.

Онда $0 \leq x \leq 1$, кесиндисінде $t = t_n, n = 1, 2, \dots, N$ туурыларда $u(x, t)$ функцияның туындасын жууық $u_n = u_n(x), n = 1, 2, \dots, N$ функциялар менен алмастырамыз. $u_n = u_n(x), n = 1, 2, \dots, N$ функцияларды анықлау үшін $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$ областта

$$\frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\tau} = L_n(u_n) + f_n(x) \quad (2.5)$$

$$u_0(x) = \varphi(x) \quad (2.6)$$

$$u_n(0) = \psi_0(t_n), \quad u_n(1) = \psi_1(t_n) \quad (2.7)$$

айырмалы-дифференциал шегаралық мәселеге келеміз. Бул жерде

$$L_n(u_n) = a_n(x)u_n''(x) + b_n(x)u_n'(x) + c_n(x)u_n(x),$$

$$a_n(x) = a(x, t_n), \quad b_n(x) = b(x, t_n),$$

$$c_n(x) = c(x, t_n), \quad f_n(x) = f(x, t_n)$$

(2.5)-(2.7) мәселе екинши тәртіпті әдеттегі дифференциаллық теңлемелер үшін N саны шегаралық мәселеге ажыратылады. Ұақықатында да, $u_0(x)$ функция (2.6) шегаралық шәрттен бизге мәлім. $u_n(x) \approx u(x, t_n), n = 1, 2, \dots, N$ функцияларын $n = 1, 2, \dots, N$ мәніслерде (2.5) көринистеги әдеттегі дифференциаллық теңлемелерди сәйкес түрдегі (2.7) шегаралық шәртлерде шешіп табамыз.

Туурылар усылының жасалған есаплау схемасы бул усылдың геометриялық тәрептен мәніске ийелигі менен де түсіндириледи. Усы себептен де қаралып атырған метод көп өлшемлі жағдайларда тегисликлер усылы яки гипертегисликлер усылы деп те аталады.

(2.5)-(2.7) есаплау схемасы мысалында туурылар усылының хәм торлар усылының арасындағы байланысты көрсетиу мүмкин. Егер Π

туұрымүйешлікте $t = t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$, туұрыларға қосымша $x = x_m = mh$, $m = 0, 1, \dots, M$; ($Mh = 1$) туұрыларды өткізсек хәм алынған тор областының хәмме ишки (x_m, t_n) , $m = 1, 2, \dots, M - 1$, $n = 1, 2, \dots, N$ ноқатларда (2.4) типтеги алмастырыўдан басқа u_x, u_{xx} туўындыларды хәм u функцияның сәйкес түрдеги мәнислери менен алмастырсак, (2.2) хәм (2.3) қосымша шәртлерди есапқа алсак, онда торлар усылының әмелиятта кең тарқалған еки қатламлы, үш бағаналы анық емес схемасын аламыз. $h \rightarrow 0$ болғанда лимитке өтсек, бул схема туұрылар усылының (2.5)-(2.7) схемасына өтеди. Жыллылық өткізиўшилик теңлемеси болған жағдайда торлар усылының бундай анық емес схемасын, τ хәм h адымлардың қәлеген қатнасында колланыў мүмкин. Сол себептен $h \rightarrow 0$ болғанда лимитке өтиў дурыс болады, хәм де туұрылар усылының (2.5)-(2.7) схемасын есаплаў ушын дурыс деп қабыл етиўге болады.

Бул схемаға параллель түрде u_t туўындыны оң тәреплемели айырмалы қатнастар менен алмастырып, бул методтың басқа кесе схемасын аламыз. Бирақ бул жағдайда туұрылар усылының есаплаўлар ушын қолайлылығы төмен болыўы мүмкин. Хәқыйқатында да u_t туўындыны оң тәреплемели айырмалы қатнастар менен алмастырып, жасалған жыллылық өткізиўшилик теңлемеси ушын торлар усылының анық схемасын $\tau \leq O(h^2)$ түрдеги шәртлерде t бойынша кәдемлер үлкен санда болғанда есаплаўлар ушын колланыў мүмкин. Туұрылар усылының бул соңғы есаплаў схемасы торлар усылының бундай анық схемасында $h \rightarrow 0$ болғанда лимитке өтиў арқалы алынады.

Улыўма алғанда, туұрылар усылының есаплаў схемасының аппроксимация қәтелиги, оның менен байланыслы болған торлар усылының айырмалы схемасының сәйкес қәтелигинен киши болады. Мәселен, (2.5)-(2.7) схемада бул қәтелик тек ғана (4) жуўық алмастырыўда пайда болады хәм ол төмендеги көринисте болады:

$$r_n(x) = \frac{\tau}{2} u_{tt}(x, t_n - \theta_n \tau), \quad 0 < \theta_n < 1, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.8)$$

Торлар усылының сәйкес есаплау схемасы жасалғанда (2.8) ге қосымша тууындыларын хәм шекли айырмалар менен алмастырыудың есабынан да қәтелик пайда болады. Хәқыйқатында да, соңғы жағдайда аппроксимацияланыуы мәселе, оның әмелге асырылыуы бойынша әпиуайы.

Бирақ айырым дара жағдайларда туурылар усылы жүдә қолай есапланады. Мәселен, (2.5)-(2.7) схемада (1) теңлемениң коэффициентлери x тан ғәрезли болмаса, онда ол жүдә қолай болады. Бул жағдайда мәселени шекли айырмалар менен алмастырылғаннан кейин алынған мәселе, турақлы коэффициентли 2-тәртипли әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасы ушын шегаралық мәселелерди шешиуге келтириледі.

Егер Π туурымүйешликте u_{tt} дара тууынды абсолют шамасы бойынша шегараланған болса, онда бул жағдайда (2.8) қәтелик τ тәртипли шама болады. Сыйпақлығы жоқары болған шешимли мәселелер ушын әдеуір жоқары дәлликтеги есаплау схемасын қурыу мәселесин қойыу мүмкин.

(2.1) теңлемени $t = t_n$ хәм $t = t_{n-1}$ болғанда қараймыз. $t = t_n$ болған жағдайда u_t дара тууындыны шеп айырмалы қатнастар менен, $t = t_{n-1}$ болғанда оң айырмалы қатнастар менен алмастырамыз.

Бул алмастырыулардан кейин төмендегилерге ийе боламыз.

$$\begin{aligned} \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau} &= L(u)|_{t=t_n} + f_n(x) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x, t_n - \theta_n \tau), \\ \frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau} &= L(u)|_{t=t_{n-1}} + f_{n-1}(x) + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x, t_n - \theta'_n \tau), \quad 0 < \theta'_n < 1 \end{aligned}$$

Бул жерден төмендегилер келип шығады:

$$\frac{u(x, t_n) - u(x, t_{n-1})}{\tau} = \frac{L(u)|_{t=t_n} + L(u)|_{t=t_{n-1}}}{2} + \frac{f_n(x) + f_{n-1}(x)}{2} + \rho_n(x),$$

бул жерде,

$$\rho_n(x) = \frac{\tau}{4} u_{tt}(x, t_n - \theta_n \tau) - u_{tt}(x, t_n - \theta'_n \tau) = \frac{\tau^2}{4} \theta'_n - \theta u_{ttt}(x, t_n - \tilde{\theta}_n \tau), \quad 0 < \tilde{\theta}_n < 1. \quad (2.9)$$

Туурылар усылының буған сәйкес схемасы төмендеги көринисте болады:

$$\frac{u_n(x) - u_{n-1}(x)}{\tau} = \frac{L_n(u_n) + L_{n-1}(u_{n-1})}{2} + \frac{f_n(x) + f_{n-1}(x)}{2}, \quad 0 < x < 1 \quad (2.10)$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.11)$$

$$u_n(0) = \psi_0(t_n), \quad u_n(1) = \psi_1(t_n), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (2.12)$$

(2.10)-(2.12) кесе схема менен (2.5)-(2.7) анық схемаларды алып қарасақ, (2.10)-(2.12) схемада τ ның дәрежесі аппроксимация қәтелигинде бір бірлік жоқары болады. Буны (2.8) хәм (2.9) қалдық ағзалар ушын жазылған формулалардан көриўге болады.

Хәр бир дифференциал теңлеме жоқарыда қаралған туўрылар усылының кесе схемасы шешилгенде u x, t белгисиз функцияның еки қоңсы туўрыдағы жуўық мәнисин байланыстырады. Туўрылар усылының бундай еки қатламлы схемасы әмелий есаплаўларда тез-тез ушырасып турады. Бул усылдың дәллик тәртибин жәнede жоқарылатыўды, көп қатламлы схемаларды жасаў усылы менен әмелге асырыў мүмкин. Буның ушын (2.1) теңлеmede u_t туўындының $t = t_n$ ($n = q, q+1, \dots, N$) туўрылардағы жуўық аңлатпасын u функцияның $t = t_n, t = t_{n-1}, \dots, t = t_{n-q}$ болғандағы мәнислери менен жуўық алмастырып, жоқарыда қаралған усылға уқсас етип, туўрылар усылының кесе схемасының $q+1$ қатламлы схемасын жасаўымыз мүмкин. Егер u функцияның $t = t_1, t = t_2, \dots, t = t_{q-1}$ басланғыш туўрылардағы жуўық мәнислери дәслепп табылған болса, онда қурылған $q+1$ қатламлы схемада u функцияның нәўбеттеги $t = t_q, t = t_{q+1}, \dots, t = t_N$ туўрылардағы жуўық мәнислерин, сәйкес екинши тәртипте әдеттеги дифференциаллық теңлемениң (2.7) көринистеги шегаралық шәртлердеги шешими деп қараўға мүмкиншилик береди.

$t = t_n, t = t_{n-1}, \dots, t = t_{n-q}$ болғанда u функцияның мәнислери арқалы u_t функцияны тек ғана $t = t_n$ болғанда емес, қәлеген $t = t_{n-1}, t = t_{n-2}, \dots, t = t_{n-q}$ туўрыларда жуўық аңлатыўға болады. Сәйкес түрде бул усылдың кесе схемасының хәр түрли $q+1$ қатламлы вариантларын алыўға болады. Бирақ алынған вариантлар хәмме ўақыт орнықлы болмағанлығы себепли, оларды

есептеулер үшін пайдаланылу қолайлы бола бермейді. Екі қатламлы жағдайдағыдай етип, оларды комбинирлейміз хәм де жоқары аппроксимация анықлықда $(q+1)$ қатламлы схеманы жасаймыз. Бул жағдайда (2.10) формуланың орнына оған қарағанда улыўма болған

$$\frac{1}{\tau} \sum_{i=0}^q A_i u_{n-i}(x) = \sum_{i=0}^q B_i \mathbf{L}_{n-i}(u_{n-i}) + f_{n-i}(x) \quad n = q, q+1, \dots, N \quad (2.13)$$

формулаға ийе боламыз.

(2.1) теңлемени аппроксимациялау мүмкин хәм оны тиккелей анық емес A_i хәм B_i , $i = 0, 1, \dots, q$ коэффициентли (2.13) көринисте излеу мүмкин. Бул параметрлерди таңлап алыу, мәселен, аппроксимациялау тәртибинің максимал болыу хәм есептеулердің орнықты болыуына бойсыныуы мүмкин.

2-§. Параболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер үшін қойылған аралас мәселелерди шешиудің туўрылар усылының бойына схемасы

Биз алдын (2.1)-(2.3) мәселени шешиудің туўрылар усылының кесе схемасын қараған едик. Бирақ енди биз туўрылар усылының бойына схемасын қарағанымызда дифференциаллау операциясын t бойынша емес, x бойынша аппроксимирлейміз. Буның үшін туўрылар усылының кесе схемасындағыдай етип, дәслеп областты тор областы менен алмастырамыз, яғный $x = x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$ туўрыларын жүргиземіз ($Nh=1$). Хәр бир ишки $x = x_n$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ туўрыларда u_x хәм u_{xx} туўындыларын u функцияның бир қанша қоңсы туўрылардағы мәнислери менен жуўық алмастырамыз. Усындай етип, жоқарыдағы туўындыларын керекли аңлатпалар менен алмастырып алсақ, онда туўрылар усылының бойына схемасын аламыз:

$$u'_n(t) = a_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)}{h^2} + b_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2h} + c_n(t)u_n(t) + f_n(t), \quad t > 0 \quad (2.14)$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t), \quad t \geq 0 \quad (2.15)$$

$$u_n(0) = \varphi(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.16)$$

бул жерде $u_n(t) \approx u(x_n, t)$, $a_n(t) \approx a(x_n, t)$, $b_n(t) \approx b(x_n, t)$, $c_n(t) \approx c(x_n, t)$, $f_n(t) \approx f(x_n, t)$. Бул айтылған мәселе $u(x, t)$ шешимнің $x = x_n$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ туұрылардағы $u_n(x)$ жууық мәнісін табыу мәселесін биринши тәртипли сызықлы әдеттеги дифференциаллық теңлемелердің $N-1$ системасы үшін Коши мәселесін шешиуге келтириледі.

Шешим жүдә сыйпақ болса, жүдә жоқары тәртипли аппроксимация қәтелигине ийе болған есаплау схемасын жасау мәселесін қойыу мүмкин. Туұрылар усылының кесе схемасына уқсас, хәр түрли көринисте аппроксимация дәллігін жоқарылатыуға болады. Биз хәзир бул мәселени шешиудің тек ғана айырым бир әпиуайы жағдайын қараймыз.

(2.14)-(2.16) аппроксимирлеуши мәселеде $n = 1, 2, \dots, N-1$ болғанда сәйкес әдеттеги дифференциаллық теңлемелер алынады. Ол дифференциаллық теңлемелердің хәр бири $u_{n-1}(t)$, $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ функциялардан хәм олардың бириниң туұындысынан ғәрезли болады. Жоқарыда айтылғандай, үш қоңсы избе-из функциялардан ибарат, бирақ хәр түрли туұындыларды сақлайтуғын етип, бир-биринен парықлы әдеттеги дифференциаллық теңлеме үшін (2.14)-(2.16) көринистеги схемалардың бир қаншасын жасау мүмкин. Бундай системалардың сызықлы комбинациясынан тек ғана номери бойынша избе-из қоңсы функцияларды сақлайтуғын емес, олардың туұындыларын да сақлайтуғын биринши тәртипли әдеттеги дифференциаллық теңлемелер үшін жаңа есаплау схемасын жасау мүмкин. Туұрылар усылының кесе схемасындағыдай етип, сәйкес сызықлы комбинация қолай сайлап алынса, онда жәнede жоқары аппроксимация қәтелигине ийе схеманы жасау мүмкин.

Бундай есаплау схемасы жасалғанда, қаралып атырған областта берилген мәселени төмендеги көринисте жазыу қолай болады:

$$\rho(x, t)u_t = u_{xx} + c(x, t)u + f(x, t) \quad (2.17)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (2.18)$$

$$u(0,t) = \psi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_1(t) \quad (2.19)$$

Бул теңleme (2.1) теңlemeде x бойынша биринши туўындының коэффициенти ноль болған жағдай болады. (2.17) теңlemени үш саны коңсы $x = x_{n+1}$, $x = x_n$, $x = x_{n-1}$ туўры сызықларда қарап, A , B , C еркин коэффициентли сызықлы комбинация дүзиў мүмкин. Солай етип, екінши тәртипли туўындылардың мәнислериниң төмендеги сызықлы комбинациясын жазамыз:

$$Au_{xx}(x_{n+1},t) + Bu_{xx}(x_n,t) + Cu_{xx}(x_{n-1},t) \quad (2.20)$$

Бул комбинацияны u функцияның мәнислери арқалы мүмкин болғанынша дәлирек жазыға болады. Оны төмендеги формада жазамыз:

$$\frac{\alpha u(x_{n+1},t) + \beta u(x_n,t) + \gamma u(x_{n-1},t)}{h^2} \quad (2.21)$$

Солай етип бизди қызықтырып атырған (2.17)-(2.19) мәселениң аппроксимациясын жасаўмыз мүмкин. ((2.17) теңleme u_x туўындыны өз ишине алмайтуғынлығын есапқа алыўымыз керек).

A , B , C хәм α , β , γ коэффициентлерин төмендегише таңлап алыўымыз керек: (2.20) хәм (2.21) аңлатпаларда h тың дәрежелери бойынша жиклениўинде, h тың мүмкин болған жоқары дәрежелерине шекемги қосылыўшылар сәйкес келиўи керек. Егер дәслеп Тейлор формуласы жәрдемінде u хәм u_{xx} функцияларының $u(x_n + h, t)$ хәм $u_{xx}(x_n + h, t)$ мәнислериниң x_n, t ноқаттың дөгерегинде жиклениўин дүзип билсек, онда жоқарыда айтылған жиклениўди жазыў аңсат болады. Әпиўайы есаплаўлар менен тексерий мүмкин, A , B , C хәм α , β , γ параметрлерин таңлап алыўдың есабына бундай жиклениўге h^3 ға шекем ағзаларын алып ерисиў мүмкин. Сол себептен айтылған параметрлер арасында төмендеги байланыслар болады, яғный усы айтылатуғын шеклеўлерге бойсынады.

$$\gamma = \alpha, \quad \beta = -2\alpha, \quad A = C = \frac{1}{12}\alpha, \quad B = \frac{5}{6}\alpha$$

Онда төмендеги теңликтің дурыслығын тиккелей көриүге болады:

$$\frac{u_{xx}(x_{n+1}, t) + 10u_{xx}(x_n, t) + u_{xx}(x_{n-1}, t)}{12} = \frac{u(x_{n+1}, t) - 2u(x_n, t) + u(x_{n-1}, t)}{h^2} + r_n(t), \quad (2.22)$$

бул жерде

$$r_n(t) = \frac{h^4}{240} \frac{\partial^6 u(\xi_n, t)}{\partial x^6}, \quad x_{n-1} < \xi_n < x_{n+1} \quad (2.23)$$

Енди (2.22) катнасты пайдаланып, туўрылар усылының бойына вариантының нәўбеттеги есаплаў схемасын жазамыз:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left[p_{n+1}(t)u'_{n+1}(t) + 10p_n(t)u'_n(t) + p_{n-1}(t)u'_{n-1}(t) \right] = \\ & = \frac{1}{h^2} u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t) + \\ & + \frac{1}{12} p_{n+1}(t)u_{n+1}(t) + 10C_n(t)u_n(t) + C_{n-1}(t)u_{n-1}(t) + \\ & + \frac{1}{12} f_{n+1}(t) + 10f_n(t) + f_{n-1}(t), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$u_0(t) = \varphi_0(t), \quad u_n(t) = \varphi_1(t), \quad t \geq 0 \quad (2.25)$$

$$u_n(0) = \varphi(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.26)$$

Бул жазыўларда пайдаланылған белгилер мәниси бойынша алдыңғы пайдаланылғанларға уқсас.

Егер дәслепки берилген мәселениң шешими абсолют шамасы бойынша $\frac{\partial^6 u(x, t)}{\partial x^6}$ шегараланған туўындыға ийе болса, онда (2.23) шәрт

тийкарында (2.24)-(2.26) схемада аппроксимация кәтелиги, (2.14)-(2.16) схемадан еки бирлик жоқары болады.

Туўрылар усылының бойына схемасында аппроксимация дәллигин жоқарлатыў ушын, үш коңсы туўры сызықтан көбирек информация топлаў есабына ерисиў мүмкин. Бунда хәм туўрылар усылының кесе схемасындағыдай аппроксимациялаўшы теңлемени тиккелей (2.13) системаға уқсас еркин коффициентли теңлеме көринисте изленеди. Бирақ буны белгилеўимиз керек, усылдың көп қатламлы бойына схемасында дифференциал теңлемелер шегараға жақын туўрыларда аппроксимацияланғанда жуўықластырыў процессинде биртекклигиниң бузылыўы менен байланыслы кыйыншылықлар пайда болады. Айырым дара жағдайларда шегарада берилген шәртлерди есапқа алған жағдайда бул кыйыншылықлардан қутылыў мүмкин.

Енди параболалық түрдеги теңлемелердиң ең әпиўыларынан бири ушын

$$u_t - u_{xx} = f(x, t) \quad (2.27)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad 0 \leq x \leq l; \quad u(0, t) = \varphi_1(t); \quad u(l, t) = \varphi_2(t), \quad 0 \leq t < \infty \quad (2.28)$$

мәселени туўрылар усылы менен шешиўди қараймыз.

Буның ушын бул теңлемедә x бойынша туўындыны айырмалы қатнаслар

менен алмастырамыз. $x = x_k = kh, \quad \left(k = 0, 1, \dots, n+1; h = \frac{l}{n+1} \right)$ бөлиниў

ноқатлары арқалы туўрылар өткизип

$$u_{xx}|_{x=x_k} = \frac{1}{h^2} [u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t)] + O(h^2)$$

айырмалы қатнастан пайдаланамыз. Егер $O(h^2)$ киши ағзаны есапқа алмай,

$u(x, t)$ функцияның $x = x_k$ туўрысындағы мәнисин $U_k(t)$ арқалы белгилесек,

онда

$$\left. \begin{aligned} U'_k t - \frac{1}{h^2} [U_{k+1} t - 2U_k t + U_{k-1} t] &= f_k t, \quad k=1,2,\dots,n, \\ u_0(t) &= \psi_1(t), \quad u_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\} (2.29)$$

хәмде

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{6} U'_k t + \frac{1}{12} [U'_{k+1} t + U'_{k-1} t] - \frac{1}{h^2} U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t) &= \\ = \frac{5}{6} f_k + \frac{1}{12} f_{k-1}(t) + f_{k-1}(t), \quad k=1,2,\dots,n \\ U_0(t) &= \psi_1(t), \quad U_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\} (2.30)$$

айырмалы теңлемелер системаларына ийе боламыз. (2.29) айырмалы теңleme (2.27) теңлемени h^2 тәртип пенен, (2.30) болса h^4 тәртип пенен аппроксимирлейди. u x, t функция ушын қойылған басланғыш шәрттен $U_k(t)$ ушын басланғыш шәртлерин аламыз.

$$U_k(0) = \varphi(x_k) = \varphi_k, \quad k=1,2,\dots,n \quad (2.31)$$

(2.29) хәм (2.30) теңлемелер системасына сәйкес биртеккли теңлемелер системасының улыўма шешимин қурыў ушын, дара шешимди төмендеги көбейме түринде излеймиз:

$$U_k(t) = \gamma(k)v(t).$$

Ал шегаралық шәртлер болса $\gamma(0) = \gamma(n+1) = 0$ көринисте болады. $v(t)$

функцияны табыў ушын $\frac{v'(t)}{v(t)} = -\sigma_s^2$ теңлемени аламыз. Буның шешими

$v_s(t) = C_s^{-\alpha_s^2 t}$ болады. Демек (2.29) системаға сәйкес биртеккли системаның шешимин

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n c_s \sin \frac{\pi s x_k}{l} e^{-\alpha_s^2 t}, \quad (k=1,2,\dots,n)$$

түрде жазыўға болады, бул жерде

$$\sigma_s^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{x_s \pi}{2l}}{h^2}, \quad (s=1,2,\dots,n).$$

(2.30) системаға сәйкес биртеккли системаның шешими

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n D_s \sin \frac{\pi s x_k}{l} e^{-\alpha_s^2 t}, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

болады, бул жерде

$$\sigma_s'^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi x_s}{2l}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{\pi x_s}{l} \right]}, \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Берилген f, ψ_1, ψ_2 лерде (2.29) хәм (2.30) системалардың улыўма шешимлери турақлыны вариациялаў усылы менен табыўға болады. Ал C_s яки D_s турақлылар болса (2.31) басланғыш шәрт жәрдемінде табылады.

[11] әдебиятта (2.29), (2.31) мәселениң шешиминиң (2.27), (2.28) мәселениң шешимине жыйнақлылығы максимум принципи жәрдемінде көрсетилген.

$0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ көринистеги қәлеген туўрымүйешликте (2.29), (2.31) хәм (2.30), (2.31) мәселелердиң шешиминиң (2.27), (2.28) мәселениң шешимине жыйнақлылығын, басланғыш шәртлер ноль болғанда, ал теңлемениң оң тәрәпи $f(x, t)$ болса,

$$\int_0^T \int_0^l f^2(x, t) dx dt < c, \quad \left[\int_0^l f_x^2(x, t) dx \right]_{t=0} < c, \quad \int_0^T \int_0^l f_t^2(x, t) dx dt < c, \quad c = \text{const} > 0$$

шәртлерин қанаатландырғанда ишине жайластырыў теоремасын пайдаланып көрсетиўге болады.

3-§. Гиперболалық түрдеги дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған аралас мәселелерди шешийдиң туўрылар усылының кесесине хәм бойына схемасы

Мейли $0 \leq x \leq l, t \geq 0$ ярым паласада төмендеги шегаралық мәселе қойылған болсын.

$$u_{tt} + g(x,t)u_t = L(u) + f(x,t) \quad (2.32)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \Phi(x) \quad (2.33)$$

$$u(0,t) = \psi_0(t), \quad u(1,t) = \psi_1(t), \quad (2.34)$$

бул жерде $L(u) = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u$, $a(x,t) \geq a > 0$ деп есаплаймыз. (2.32)-(2.34) шегаралык мәселениң жеткиликли сыйпақ шешими бар хәм бирден бир деп уйғарамыз. Бул мәселениң шешимин $\Pi = 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T < +\infty$ туўрымүйешликте туўрылар усылы менен табамыз.

Гиперболалык түрдеги теңлемелер ушын шегаралык мәселелер туўрылар усылы менен шешилгенде бул усылдың кесесине хәм бойына вариантлары ҳаққында айтыўға болады. Дәслеп бул усылдың кесе схемасына қараймыз.

Π туўрымүйешли областты $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$ тор областы менен алмастырамыз. Бунда параболалык теңлемелер ушын койылған шегаралык мәселелерди туўрылар усылы менен шешкендегиден айырмашылығы қаралып атырған областтың Γ_τ шегарасына $0 < x < 1$ интервалдың $t = t_1 = \tau$ туўры сызығын да қосамыз. $n = 1, 2, \dots, N-1$ болғанда $t = t_{n+1}$ туўрыларда u_t хәм u_{tt} дара туўындыларын шеп тәреплеме айырмалы қатнастар менен алмастырамыз:

$$u_t(x, t_{n+1}) \approx \frac{u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)}{\tau}, \quad (2.35)$$

$$u_{tt}(x, t_{n+1}) \approx \frac{u(x, t_{n+1}) - 2u(x, t_n) + u(x, t_{n-1}))}{\tau^2}. \quad (2.36)$$

Буннан басқада $t = 0$ туўры сызықта u_t дара туўындысын алмастырыў ушын

$$u_t(x, 0) \approx \frac{u(x, \tau) - u(x, 0)}{\tau} \quad (2.37)$$

оң тәрәплеме айырмалы қатнастан пайдаланамыз. $u_n(x) \approx u(x, t_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$ деп белгилеу киритемиз. Бул белгилеуді есапқа алып (2.35)-(2.37) айырмалы қатнастарды (2.32)-(2.34) мәселеде орнына апарып қойып, $\Pi_\tau + \Gamma_\tau$ тор областында

$$\frac{u_{n+1}(x) - 2u_n(x) + u_{n-1}(x)}{\tau^2} + g_{n+1}(x) \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} = L_{n+1}(u_{n+1}) + f_{n+1}(x), \quad (2.38)$$

$$u_0(x) = \varphi(x), \quad \frac{u_1(x) - u_0(x)}{\tau} = \Phi(x) \quad (2.39)$$

$$u_{n+1}(0) = \psi_0(t_{n+1}), \quad u_{n+1}(1) = \psi_1(t_{n+1}) \quad (2.40)$$

(2.38)-(2.40) аппроксимация мәселесін шешиу төмендеги этаплар бойынша әмелге асырылады. (2.39) қатнастардан аламыз.

$$u_1(x) = \varphi_0(x) + \tau\Phi(x)$$

Буннан кейін табылған $u_1(x)$ функцияны пайдаланып, $u_2(x)$ функцияны кейін $u_3(x), \dots, u_N(x)$ ларды табамыз. Бул функциялар табылғанда (2.38) көринистеги 2-тәртіптегі әдеттегі дифференциаллық теңлемелер (2.40) түрдегі шегаралық шәртлерде шешиледи. Улыўма түрде алғанда (2.35)-(2.37) жуўық теңликлердің қәтелиги тек τ дың тәртиби бойынша киши шама есапланады. Онда қурылған есаплау схемасы аппроксимация қәтелигинің тек ғана биринши тәртиби менен характерленеди. (2.32) дифференциаллық теңлемеді u_t туўындыны (2.35) қатнас пенен алмастырыудың орнына, оған қарағанда дәлліги жоқары болған

$$u_t(x, t_{n+1}) \approx \frac{3u(x, t_{n+1}) - 4u(x, t_n) + u(x, t_{n-1}))}{2\tau} \quad (2.41)$$

қатнас пенен алмастырамыз. Онда киши $\tau > 0$ ушын дәслепки берілген теңлемениң аппроксимация қәтелигин киширейтириуге болады. Буннан

басқада қосымша шәртлерде биринши тәртипли туўындыны хәмде шегаралық шәртлерди аппроксимациялайды дәллиги жоқары болған қатнастар менен алмастырыўға болады. Мейли дәслепки мәселениң шешимин τ бойынша ең болмағанда $t=0$ туўры сызықтан бир кәдем төменге даўам етиў керек болсын. Онда (2.37) қатнастың орнына t бойынша биринши туўындыны дәллиги жоқары болған симметриялы

$$u_t(x,0) \approx \frac{u(x,\tau) - u(x,-\tau)}{2\tau} \quad (2.42)$$

қатнасы менен алмастырамыз. Тазадан киритилген u_{-1} x белгисиз функцияны (2.38) теңлемеге қарап, $n = 0$ деп алып жоқ етиўге болады.

(2.41)–(2.42) көринистеги жуўық теңлемелерден пайдаланыў, берилген мәселени айырмалы теңлемелер менен алмастырылғандағы қәтеликти бир қанша киширейтиреди. Улыўма алғанда ол өспейди, себеби (2.32) теңлемени аппроксимация еткенде t бойынша екинши тәртипли туўындыны алмастырыў ушын түрпайы шеп тәреплеме айырмалы қатнастар пайдаланылды. Егерде u_{tt} дара туўындыны алмастырыў ушын үш қоңсы түйинлерде u функцияның анық симметриялы аңлатпасынан пайдалансақ, онда есаплаў схемасы есаплаў ушын қолайсыз болыўы мүмкин. Буны торлар усылы тийкарында да көриў мүмкин. Екинши тәртипли туўындыны оң тәреплеме қатнастар менен алмастырыўға тийкарланған есаплаў схемасы да буған мысал болады.

(2.38)–(2.40) мәселе менен салыстырғанда жоқары тәртипли аппроксимация қәтелигине ийе болған туўрылар усылының кесесине схемасын жасаў ушын, u_{tt} хәм u_t дара туўындыларын оң тәреплеме айырмалы қатнастар менен алмастырып, (2.38) ге уқсас схеманы дүзиў керек. Басланғыш шәртлерин аппроксимациялаў әдетте (2.42) жуўық

теңлик жәрдеминде әмелге асырылады. Бундай есаплай схемасының аппроксимация қәтелиги τ^2 тәртіпте шама болады.

Егерде (2.22) түрдеги формуланы пайдалансақ, онда дәслепки теңлемени аппроксимациялайтуғын үш қатламлы дәллігі жоқары болған схеманы жасау мүмкін. Буның ушын дәслеп сәйкес алмастыру жәрдеминде, теңлемеден t уақыт бойынша изленип атырған функцияның биринши туғындысын жоқ етиу керек. Дәслепки берилген теңлемени алмастырудың дәллігін жоқарылатыу ушын көп қатламлы аппроксимациялау усылынан пайдаланыу мүмкін. (Бул усыл параболалық түрдеги теңлемелер ушын қаралған усылға уқсас болады.)

Гиперболалық түрдеги теңлемелер ушын қойылған аралас-шегаралық мәселелерди туурылардың кесе схемасы усылы менен шешиу, параболалық теңлемелер ушын қойылған аралас-шегаралық мәселелерди туурылар усылының кесе схемасын шешиуге жүдә уқсас. Бундай уқсаслық усылдың бойына схемасында да көринеди. Буның ушын мәселе қаралып атырған областты $x = x_n = nh, n = 0, 1, \dots, N$ ($Nh \leq 1$) тууры сызықлар арқалы бөлеклерге бөлемиз. Онда параболалық теңлемелер ушын туурылар усылының бойына схемасына уқсас етип, (2.32)-(2.34) мәселе ушын туурылар усылының бойына схемасын қурамыз:

$$u''_n(t) + g_n(t)u'_n(t) = a_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)}{h^2} + b_n(t) \frac{u_{n+1}(t) - u_{n-1}(t)}{2h} + c_n(t)u_n(t) + f_n(t), t > 0 \quad (2.43)$$

$$u_0(t) = \psi_0(t), \quad u_N(t) = \psi_1(t) \quad t \geq 0, \quad (2.44)$$

$$u_n(0) = \varphi(x_n), \quad u'_n(0) = \Phi(x_n), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (2.45)$$

бул жерде $u(x_0, t) \approx u_0(t)$, $u(x_N, t) \approx u_N(t)$ хәм т.б.(2.43)-(2.45) аппроксимация мәселесин $u(x, t)$ функциясын $x = x_n$, $n = 1, 2, \dots, N-1$, туурыларда жууық алмастырылған $u_n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N-1$ белгисиз функцияларға қарата

екінші тәртіпті, сызықты әдеттегі дифференциалдық теңдемелердің $N - 1$ системасы үшін Коши мәселесін шешіуге келтіреміз.

(2.43)-(2.45) схеманы құрыу схемасы параболалық теңдемелер үшін туұрылар ұсылының бойына схемасын құрыуға ұқсас.

Биз енді

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) \quad (2.46)$$

тар тербеліс теңлемесі үшін $0 \leq x \leq l, 0 \leq t < \infty$ областта қойылған

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= \varphi_1(x), & u_t|_{t=0} &= y_2(x) \quad (0 \leq x \leq l) \\ u|_{x=0} &= \psi_1(t), & u|_{x=l} &= \psi_2(t) \quad (0 \leq t < \infty) \end{aligned} \quad (2.47)$$

аралас - шегаралық мәселені туұрылар ұсылы менен шешіуді қарастырамыз.

$$x = x_k = kh, \left(k = 0, 1, \dots, n + 1; h = \frac{l}{n + 1} \right).$$

Параллел туұрыларды өткіземіз $x = x_n$ туұрыларында (2.46-2.47) мәселенің дәл шешимін $u_k(x)$ пенен белгілейміз

Егер $u_{xx}|_{x=x_k}$ айырмалы қатнасы

$$\frac{1}{h^2} u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t)$$

айырмалы қатнас пенен алмастырсақ, онда туұрылар ұсылының төмендегі теңдемелер системасын аламыз:

$$\begin{aligned} U''_k(t) - \frac{1}{h^2} U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t) &= f_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \\ U_0(t) = \psi_1(t), U_{n+1}(t) = \psi_2(t). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Басланғыш шәртлер болса

$$U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1,k}, \quad U'_k(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2,k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

бул (2.48) теңleme (2.46) теңлемени h^2 тәртіп пенен аппроксимирлейді.

$U_k(x)$ функция $y = y_k$ туұрылардағы $O(h^2)$ ағзаларды таслағандағы шешим.

Туўрылар усылының (2.46) теңлемени буннан да дәл аппроксимирлейтуғын теңлемелер системасын аламыз. Буның ушын $u(x,t)$ функция x өзгертиўши бойынша x_k ноқаттың дөгерегинде Тейлор қатарына жиклениўинен пайдаланып аламыз.

Буған уқсас $\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2}$ функцияның жиклениўинен аламыз:

$$\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} - \frac{2\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2} = h^2 \frac{\partial^4 u(x_k, t)}{\partial x^4} + O(h^4)$$

Бул еки теңликтен $\frac{\partial^4 u(x, t_k)}{\partial t^4}$ ағзаны жоқ етип аламыз:

$$\begin{aligned} u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t) &= \frac{5h^2}{6} \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{h^2}{12} \left[\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2} \right] + O(h^6) \end{aligned} \quad (1.24')$$

(2.46) дифференциал теңлемеден аламыз:

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} - f(x_k, t) = u_k''(t) - f_k(t).$$

Бул теңлемениң оң тәрәпин (1.24') теңлемеге апарып қойсақ:

$$\begin{aligned} \frac{5}{6} u_k''(t) + \frac{1}{12} [u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] &= \\ = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)] + O(h^4). \end{aligned}$$

$O(h^4)$ ағзаны таслап, $u_k(t)$ функцияны $U_k(t)$ функциясы менен алмастырып, туўрылар усылының төмендеги теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{6} U_k''(t) + \frac{1}{12} [U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] &= \\ = \frac{5}{6} f_k(t) + \frac{1}{12} [f_{k+1}(t) + f_{k-1}(t)], \quad k = (1, 2, \dots, n) \\ U_0(t) = \psi_1(t); U_{n+1}(t) = \psi_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Буған басланғыш шәртлер:

$$U_k(0) = \varphi_1(x_k) = \varphi_{1,k}; U_k'(0) = \varphi_2(x_k) = \varphi_{2,k}, (k = 1, 2, \dots, n) \quad (2.50)$$

Бул система h^4 тәртіпті аппроксимацияға ийе. (2.48) хәм (2.49) теңлемелер системасы сызықлы, биртеккли болмаған әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасы. Бул системаларды шешіў ушын буларға сәйкес биртеккли системалардың улыўма шешими табылады. Дәслеп (2.49) системаға сәскес биртеккли системаны жазамыз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{5}{6}U_k''(t) + \frac{1}{12}[U_{k+1}''(t) + U_{k-1}''(t)] - \frac{1}{h^2}U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t) = 0 \\ k = 1, 2, \dots, n; U_0(t) = U_{k+1}(t) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Буның дара шешимин

$$U_k(t) = \gamma(t)v(t)$$

көринисте излеймиз.

Буны (2.51) теңлемелер системасының орнына қойып аламыз:

$$\begin{aligned} v''(t) \left[\frac{5}{6}\gamma(k) + \frac{1}{12}\gamma(k+1) + \frac{1}{12}\gamma(k-1) \right] - \frac{v(t)}{h^2} \gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1) = 0 \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n) \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0 \end{aligned}$$

Бул системаны шешіў ушын өзгеріўшилерди ажратыў усылынан пайдаланамыз, яғный:

$$\frac{\mathcal{G}''(t)}{\mathcal{G}(t)} = \frac{\gamma(k+1) - 2\gamma(k) + \gamma(k-1)}{h^2 \left[\frac{5}{6}\gamma(k) + \frac{1}{12}\gamma(k+1) + \frac{1}{12}\gamma(k-1) \right]} = -\delta^2 = \text{const} \quad (2.52)$$

$\gamma(k)$ ны табыў ушын биз төмендеги мәселеге ийе боламыз:

$$\begin{aligned} \left[1 + \frac{1}{12}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k+1) - \left[2 - \frac{5}{6}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k) + \left[1 + \frac{1}{12}\delta^2 h^2 \right] \gamma(k-1) = 0 \\ \gamma(0) = \gamma(n+1) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

(2.53) тиң улыўма шешими

$$\gamma(k) = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k$$

көринисте болады, бул жерде λ_1 хәм λ_2 лер

$$\lambda^2 - \frac{2 \left[2 - 5\delta^2 h^2 \right]}{12 + \delta^2 h^2} \lambda + 1 = 0$$

теңлемениң коренлери. Шегаралық шәртлеринен аламыз:

$$\gamma(n+1) = c_1 \lambda_1^{n+1} + c_2 \lambda_2^{n+1} = c(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) = 0$$

Солай етип $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \sqrt[n+1]{1} = e^{\frac{2\pi is}{n+1}}$, $s = (0, 1, 2, \dots, n)$

яки Виет теоремасы бойынша $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ болғанлығы ушын, $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{\frac{\pi is}{n+1}}$

Буннан басқа да

$$\frac{2\sqrt{12 - 2\delta^2 h^2}}{12 + \delta^2 h^2} = \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \cos \frac{\pi s}{n+1}$$

теңликке ийе боламыз.

$$12 - 5\delta^2 h^2 = 12 \cos \frac{\pi s}{n+1} + \delta^2 h^2 \cos \frac{\pi s}{n+1}$$

δ^2 ты табамыз:

$$\delta_s^2 = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi s}{2(n+1)}}{h^2 \left[5 + \cos \frac{\pi s}{n+1} \right]} = \frac{24 \sin^2 \frac{\pi(y_s - y_0)}{2c}}{h^2 \left(5 + \cos \frac{\pi(y_s - y_0)}{e} \right)}, (s = 1, 2, \dots, n)$$

Онда

$$\gamma_s(k) = c_1 \left(e^{\frac{\pi isk}{n+1}} - e^{-\frac{\pi isk}{n+1}} \right) = c \sin \frac{\pi sk}{n+1} = c \sin \frac{\pi s x_k}{l}$$

$(s = 1, 2, \dots, n)$

Егер $s = 0$ болса, $\gamma_0(k) \equiv 0$ тривиал шешимге ийе боламыз, (2.52) теңлемеден аламыз

$$v''(t) + \delta^2 v(t) = 0$$

Бул турақлы коэффициентли, бир текли теңлемениң улыўма шешими

$$v_s(t) = A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t$$

болады. Онда

$$U_{k,s}(t) = \sin \frac{\pi s x_k}{l} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t)$$

Демек, онда (2.51) биртекли сызықлы әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасының шешими

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi s x_k}{l} (A_s \cos \delta_s t + B_s \sin \delta_s t) \quad (2.54)$$

бул жерде A_s, B_s - еркили турақлылар. Турақлыларды вариациялаў усылы менен (2.49) биртеккли емес системаның дара шешимин табамыз. Оның улыўма шешими бул системаның дара шешими хәм оған сәйкес биртеккли системаның (2.54) улыўма шешиминиң қосындысы түринде болады. A_s хәм B_s турақлылар болса (2.50) шәртлеринен анықланады.

(2.48) биртеккли емес әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасына тийисли биртеккли система.

$$U_k(t) = \sum_{s=1}^n \sin \frac{\pi s x_k}{l} (c_s \cos \delta_s' t + D_s \sin \delta_s' t), (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

улыўма шешимге ийе болады, бул жерде

$$\delta_s'^2 = \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{2l} x_s}{h^2}.$$

Егер басланғыш хәм шегаралық шәртлер биртеккли болса, ал $f(x, t)$ функция болса қандай да бир C турақлысы ушын

$$\int_0^T \sqrt{\int_0^l f^2 dx} dt < c, \left[\int_0^l f^2 dx \right]_{t=0} < c,$$

$$\int_0^T \sqrt{\int_0^l f_x^2 dx} dt < c$$

шәртлерин қанаатландырса, онда $0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$ қәлеген туўрымүйешликте (2.46)-(2.47) мәселениң улыўма шешимине туўрылар усылы менен алынған шешими жыйнақлы болады.

Енди биз биртеккли емес тар тербелис теңлемеси ушын қойылған төмендеги мәселени қараймыз:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u + f(x, t);$$

$$\rho(x) \geq \rho_{\min} > 0, \sigma(x) \geq \sigma_{\min} > 0, 0 \leq x \leq l, 0 < t < T,$$

$$u(0, t) = \psi_1(t), u(l, t) = \psi_2(t), 0 \leq t \leq T,$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), u_t(x,0) = \varphi_2(x), 0 < x < l.$$

Бул мәселениң $x = x_n = kh$ туўрылардағы шешиминиң жуўық мәнисин төмендеги турақлы коэффицентли әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасының шешими деп алыў мүмкин.

$$\rho_k u_k''(t) = \frac{1}{h^2} \left[\rho_k (u_{k-1}(t) - u_k(t)) - \sigma_{k-1} (u_k(t) - u_{k-1}(t)) \right] - q_k u_k(t) + f_k(t),$$

$$\rho_k = \rho(x_k), \sigma_k = \sigma(x_k), q_k = q(x_k), f_k(t) = f(x_k, t)$$

$$\left. \begin{aligned} u_k(0) &= \varphi_1(x_k), u_k'(0) = \varphi_2(x_k) \\ u_0(t) &= \psi_1(t), u_{n+1}(t) = \psi_2(t) \end{aligned} \right\}$$

Бул усылдың қәтелигин бахалаў хәм жыйнақлылығын дәлиллеў төмендегише көрсетилиўи мүмкин. $\gamma_k(t) = u(x_k, t) - u_k(t)$ деп белгилеў киритемиз. Тейлор формуласына жиклеўден пайдаланып, $\gamma_k(t)$ ушын төмендеги системаға ийе боламыз:

$$\rho_k \gamma_k'' = \frac{1}{h^2} \left[\rho_k (\gamma_{k+1} - \gamma_k) - \sigma_{k-1} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) \right] - q_k \gamma_k + h \frac{1}{2} R_k(t) \quad (2.55)$$

$$\gamma_0(t) = \gamma_{n+1}(t) = 0, \gamma_k(0) = \gamma_k'(0) = 0, (k = 0, 1, 2, \dots, n+1) \quad (2.56)$$

бул жерде

$$|R_k(t)| \leq M = M_{\sigma''} \cdot M_{u_x} + M_{\sigma'} M_{u_{xx}} + \frac{2}{3} M_{\sigma} M_{u_{xxx}} \quad (2.57)$$

(2.57) деги $M_{\sigma}, M_{\sigma'}, \dots, M_{u_{xxx}}$ турақлылар $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$ туўрымүйешликте индексте көрсетилген шамалардың модуллериниң максимуми.

$$I(t) = \sum_{k=1}^n \rho_k \gamma_k^2 + \sum_{k=0}^n \sigma_k \left(\frac{\gamma_{k+1} - \gamma_k}{h} \right)^2 + \sum_{k=1}^n q_k \gamma_k^2 \quad (2.58)$$

деп алайық.

(2.58) деги функцияны дифференциаллаймыз. (2.55), (2.56), (2.57) теңлемелеринен хәм шәртлеринен хәм де Коши - Буняковский теңсизлигинен пайдаланамыз.

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt} &= 2 \sum_{k=1}^n \gamma'_k (\rho_k \gamma_k'' + q_k \gamma_k') + 2 \sum_{k=0}^n \sigma_k \frac{(\gamma_{k+1} - \gamma_k)(\gamma'_{k+1} - \gamma'_k)}{h^2} = \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{h^2} \sigma_k (\gamma_{k+1} - \gamma_k) - \sigma_{k-1} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) \gamma'_k + \\
&\quad + 2 \sum_{k=0}^n \sigma_k \frac{1}{h^2} (\gamma_{k+1} - \gamma_k)(\gamma'_{k+1} - \gamma'_k) + \sum_{k=1}^n \gamma'_k h R_k = \\
&= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{h^2} \left[\sigma_k \gamma'_k (\gamma_{k+1} - \gamma_k) - \sigma_{k-1} \gamma'_k (\gamma_k - \gamma_{k-1}) \right] + \\
&\quad + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{h^2} \left[\sigma_k \gamma'_{k+1} (\gamma_{k+1} - \gamma_k) - \sigma_k \gamma'_k (\gamma_{k+1} - \gamma_k) \right] + \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \gamma'_k R_k h = \frac{2}{h^2} \sigma_n \gamma'_{n+1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n) - \sigma_0 \gamma'_0 (\gamma_1 - \gamma_0) + \sum_{k=1}^n \gamma'_k R_k h = \\
&= \sum_{k=1}^n \gamma'_k R_k h \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \gamma_k'^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n R_k^2 h^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\rho_{\min}}} \sqrt{I} \sqrt{\sum_{k=1}^n R_k^2 h^2} \leq 2\sqrt{I} \frac{M\sqrt{lh}}{2\sqrt{\rho_{\min}}}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$I(0) = 0$ болғанлығы себепли, $I(t) \leq \frac{M^2 l t^2}{4\rho_{\min}} h$ болады. Буннан басқада

$\gamma_0(t) = \gamma_{n+1}(t) = 0$ болғанлығы себепли, Коши - Буняковский теңсізлігінен пайдаланып аламыз:

$$\gamma_k^2 \leq kh^2 \sum_{m=1}^k \left(\frac{\gamma_m - \gamma_{m-1}}{h} \right)^2; \quad \gamma_k^2 \leq (n+1-k)h^2 \sum_{m=k+1}^{n+1} \left(\frac{\gamma_m - \gamma_{m-1}}{h} \right)^2$$

Бул жерде

$$\gamma_k^2 \leq \frac{k(n+1-k)}{n+1} h^2 \sum_{m=1}^{n+1} \left(\frac{\gamma_m - \gamma_{m-1}}{h} \right)^2 \leq h \frac{x_k(l-x_k)}{l} \frac{I(t)}{\sigma_{\min}} \tag{2.60}$$

(2.59) хәм (2.60) ден төмендеги бахалаўды аламыз:

$$|\gamma_k(t)| \leq \frac{Mt \sqrt{x_n(l-x_k)}}{2\sqrt{\rho_{\min} \cdot \sigma_{\min}}} h$$

Бул жерде M турақлысы $M_\gamma, \dots, M_{u_{xxx}}$ турақлылар арқалы аңлатылады.

4-§. Санлы мысаллар

Мәселе 3. $u_t = u_{xx} + x$ теңлемениң $u(x, 0) = 0$, $u(0, t) = 0$, $u(2\pi, t) = 0$ шәртлердеги шешимин туўрылар усылын пайдаланып табың.

Шешилиўи. $h = \frac{\pi}{2}$ деп аламыз. $0, 2\pi$ кесиндисин h адым менен $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$, $x_3 = \frac{3\pi}{2}$, $x_4 = 2\pi$ бөлеклерге бөлемиз. Онда $f_0(t) = 0$, $f_1(t) = \frac{\pi}{2}$, $f_2(t) = \pi$, $f_3(t) = \frac{3\pi}{2}$, $f_4(t) = 2\pi$ болады. Туўрылар усылының бойына схемасы бойынша формуласын хәм де $u_0(t) = u_4(t) = 0$ шәртлерден пайдаланып аламыз.

$$\begin{cases} \frac{5}{6}u_1' + \frac{1}{12}u_2' - \frac{4}{\pi^2}u_2 - 2u_1 = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{5}{6}u_2' + \frac{1}{12}[u_3' + u_1'] - \frac{4}{\pi^2}u_3 - 2u_2 + u_1 = \pi, \\ \frac{5}{6}u_3' + \frac{1}{12}u_2' - \frac{4}{\pi^2}u_3 - 2u_3 + u_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Басланғыш шәртлер болса $u_1(0) = u_2(0) = u_3(0) = 0$ түрде болады. Биртеккли емес системаның дара шешимин $u_i = A_i = \text{const}$ көринисте излеймиз. Буларды жоқарыдағы теңлемелер системасына қойып, A_i коэффициентлерин

анықлаймыз: $A_1 = \frac{5\pi^3}{16}$, $A_2 = \frac{\pi^3}{2}$, $A_3 = \frac{7\pi^3}{16}$.

Улыўма шешим $u_k(t) = \sum_{s=1}^3 c_s \sin \frac{\pi s x_k}{l} \cdot e^{-\alpha_s^2 t}$ көринисте болады, бул жерде

$$\alpha_1^2 = \frac{48(2 - \sqrt{2})}{\pi^2(10 + \sqrt{2})}, \alpha_2^2 = \frac{48}{5\pi^2}, \alpha_3^2 = \frac{48(2 + \sqrt{2})}{\pi^2(10 - \sqrt{2})}$$

Онда теңлемелер системасының улыўма шешими

$$\begin{cases} u_1 t = \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 e^{-\alpha_1^2 t} + c_2 e^{-\alpha_2^2 t} + \frac{\sqrt{2}}{2} c_3 e^{-\alpha_3^2 t} + \frac{5\pi^3}{16}, \\ u_2 t = c_1 e^{-\alpha_1^2 t} - c_3 e^{-\alpha_3^2 t} + \frac{\pi^3}{2}, \\ u_3 t = \frac{\sqrt{2}}{2} c_1 e^{-\alpha_1^2 t} - c_2 e^{-\alpha_2^2 t} + \frac{\sqrt{2}}{2} c_3 e^{-\alpha_3^2 t} + \frac{7\pi^3}{16} \end{cases}$$

көринисте болады. c_1, c_2, c_3 турақлыларын шегаралық шәртлеринен пайдаланып анықласак, шешим

$$\begin{cases} u_1 t = \frac{4+3\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} \pi^3 e^{-\alpha_1^2 t} - \frac{1}{16} \pi^3 e^{-\alpha_2^2 t} + \frac{3\sqrt{2}-4}{16\sqrt{2}} \pi^3 e^{-\alpha_3^2 t} + \frac{5\pi^3}{16}, \\ u_2 t = \frac{4+3\sqrt{2}}{16} \pi^3 e^{-\alpha_1^2 t} - \frac{3\sqrt{2}-4}{16} \pi^3 e^{-\alpha_3^2 t} + \frac{\pi^3}{2}, \\ u_3 t = \frac{4+3\sqrt{2}}{16\sqrt{2}} \pi^3 e^{-\alpha_1^2 t} + \frac{1}{16} \pi^3 e^{-\alpha_2^2 t} + \frac{3\sqrt{2}-4}{16\sqrt{2}} \pi^3 e^{-\alpha_3^2 t} + \frac{7\pi^3}{16} \end{cases}$$

болады.

Жуўмақлаў

Ҳәзирги ўақытта дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди шешиўге көп дыққат аўдарылып атыр. Себеби жоқарыда атап өткенимиздей илим хәм техниканың бир қанша мәселелери бул түрдеги мәселелери шешиўге келтириледи.

Бул дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелер теңлемениң коэффициентлерине, салтаң ағзасына яки шегаралық шертлерге байланыслы түрде, мәселе қаралып атырған областқа байланыслы түрде хәм т.б. хәмме ўақыт туўырдан туўыры дәл усыллар менен шешилмейди. Оларды қандайда бир санлы яки жуўық-аналитикалық усыллар менен шешиўге туўыры келеди. Жуўық аналитикалық усыллардың бир қанша түрлери исленип шығылған, мәселен, Галёркин усылы, Ритц усылы, киши квадратлар усылы хәм т.б. Жуўық аналитикалық усыллардың ишинде, ең қолай усыллардан бири туўырылар усылы есапланады. Жоқарыда айтылып өтилгениндей, дара туўындылы дифференциаллық теңлемениң жуўық шешими параллел туўырыларда изленеди хәм де дара туўындылы дифференциаллық теңлемени шешиўдиң орнына әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасы шешиледи.

Жоқарыда көрсетилген жағдайлар есапқа алынып, бул магистрлик жумысында екінши тәртипли дара туўындылы дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелерди шешиў туўырылар усылы көрилип шығылып, оладың алгоритмлерин жетилистириў бойынша илимий-изертлеў жумысларының нәтийжелери баянланды. Олар төмендегилерден ибарат.

1. Туўырылар усылы жәрдеминде дара туўындылы дифференциаллық теңleme өзгериўшилери саны кемейтирилип, сәйкес түрде бир аргумент бойынша алынған түйин ноқатлардың санына қарата сызықлы әдеттеги дифференциаллық теңлемелер системасына келтирип шешилип көрсетилди.

2. Гиперболалық хәм параболалық түрдеги теңлемелер ушын қойылған мәселелер ушын туўрылар усылының кесесине хәм бойына схемасы көрип шығылды.

3. Дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелердің туўрылар усылы менен алынған шешиминің анық шешимге жыйнақлылығы көрсетилди.

4. Дифференциаллық теңлемелер ушын қойылған шегаралық мәселелердің туўрылар усылы менен алынған шешиминің қәтелигин бахалап көрсетилди.

Усылар менен бирге айырым ўақытларда туўрылар усылын пайдаланыўдың қолайсыз тәреплери де бар. Егер теңleme коэффициентлери x тың функциясы болса онда туўрылар усылының кесесине схемасын пайдалансақ, ал теңleme коэффициентлери t тиң функциясы болса, бул жағдайда усылдың бойына схемасын пайдалансақ, алынған дифференциаллық теңлемелер системасын шешиў жоқарыда айтғанымыздай қыйын болады. Себеби бул жағдайда бузылатуғын яки сингуляр коэффициентли дифференциаллық теңлемелер системасы алынады.

Пайдаланылган әдебиятлар

1. Березин И.С. Жидков Н.П. Методы вычислений. –М.: Издательство, 1959, Т.2. -620 с.
2. Бадалов Ф.Б., Шодмонов Г. Математик моделлар ва муҳандислик масалаларини сонли ечиш усуллари. Т.: Фан, 2000. 274 б.
3. Блохин А.М., Ибрагимова А.С., Красников Н.Ю. Об одном варианте метода прямых для уравнения Пуассона. Вычислительные технологии. Том 12. №2. 2007
4. Будақ Б.М., Горбунов А.Д. Метод прямых для решения одной нелинейной краевой задачи в области с криволинейной границей // ДАН, Т.118, №5, 1958, С. 858-862.
5. Демидович Б.П., Марон И.А. Шувалова Э.З. Численные методы анализа. –М.: 1963. –400с.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Том II. –М.: Наука, 1977. –400с.
7. Конторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных // ДАН СССР. 1934 г.
8. Конторович Л. В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. –Л-М.: 1949. -696с.
9. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. –М.: Наука, 1971.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука.1989, 432 с
11. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972, 736 с.
12. Фаддеева Н.В. Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам // Труды математического института имени В.А. Стеклова. 1949 г. Том. XXVIII.

13. Шамин Р.В. Регуляризация метода прямых в условиях машинной точности с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Вычислительные технологии. Т.13. 2008. №5, С.113-124.

