

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM  
VAZIRLIGI  
FARG'ONA DAVLAT UNVERSITETI**

Qo'lyozma huquqida  
UDK:519.21

**Pirmatov Ziyobek Ravshanovich**

**«TASODIFIY MAYDONLAR TAQSIMOTLARINING YAQINLASHISHI  
UCHUN YETARLI SHARTLAR»**

5A 460104 - Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika mutaxassisligi  
bo'yicha magistr akademik darajasini olish uchun

**MAGISTRLIK  
DISSERTATSIYASI**

Ilmiy rahbar:

fizika-matematika  
fanlari nomzodi,  
dosent Akbarov M.

Farg'ona – 2012

# MUNDARIJA

Kirish.....	3
I bob. Banax fazosida tasodifiy elementlarning yaqinlashishi.	
1-§. Metrik fazolarda o'lchovlarni sust yaqinlashishi.....	9
2 §. Banax fazosida tasodifiy elementlarning sust yaqinlashishi.....	18
3 §. Banax fazosi normasida tasodifiy elemetlarning ehtimol bo'yicha yaqilashi.....	21
II bob. $L_p(\Pi)$ fazoda tasodifiy maydonlar taqsimotlarining yaqinlashishi.	
1 §. $L_p(\Pi)$ fazoda ehtimollik o'lchovlari.....	29
2 §. $L_p(\Pi)$ fazoda tasodifiy maydonlar taqsimotlarining sust yaqinlashishi.....	46
3 §. $L_p(\Pi)$ , $p \geq 1$ , fazo normasida tasodifiy maydonlar taqsimotlarining ehtimol bo'yicha yaqinlashishi.....	51
4 §. $L_p(\Pi)$ fazo normasida tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi.....	53
III Xulosa.....	58
IV Foydalanilgan adabiyotlar.....	59

## Kirish

O'zbekiston Respublikasi mustaqilligining 20 yilligi arafasida prezidentimiz Islom Karimov tomonidan " O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida " kitobi chop etildi. Bu kitobning asosiy maqsadi – sovet davlati hali o'zining hukmronlik kuchini yo'qotmagan, uning repressiv siyosati davom etayotgan, " paxta ishi " degan tuhmat bilan qancha-qancha odamlar nohaq qamalgan, tazyiq va ta'qiblarga uchragan, xalq o'rtasida tushkunlik, ertangi kunga ishonchsizlik kayfiyati qo'rquv va vahima keng tarqalgan bir paytda O'zbekiston Respublikasi rahbari sifatida ish boshlagan Islom Karimovning mustaqillikka erishish masalasini kun tartibiga qat'iy qilib qo'yganini aniq tarixiy hujjatlar orqali ko'rsatish, bu yo'lda qanday ulkan ishlar amalga oshirilgani haqida o'quvchilarga ma'lumot yetkazishdan iborat.

Kitobga kiritilgan har bir chiqishni mutolaa qilish jarayonida biz yangi tariximizning o'zimiz bilmagan, anglamagan yana ko'plab qirralarini yangitdan kashf etamiz, istiqlol mohiyatini, "tarixiy burilish pallasida xalq dardi, millat tayg'usi buyuk shaxslarni yaratishi " ni yanada chuqurroq anglaymiz. Ozodlik, mustaqillik, bugungi tinch-osuda hayot o'z-o'zidan kelmagani, ularning barchasi qanday tinimsiz kurashlar, qiyinchilik va yo'qotishlar, uyqusiz tunlar, munozara va muhokamalar, izlanish va yaratishlar, ba'zan o'ta iztirobli, ba'zida quvonchli intilishlar mahsuli ekanini qalbimizdan, yuragimizdan o'tkazamiz<sup>1</sup>.

Istiqlolning dastlabki yillaridanoq Prezidentimizning bevosita tashabbusi hamda rahnamoligida ta'lim tizimiga qaratilgan yuksak e'tibor va e'zoz samarasi o'laroq, bugungi kunda "Ta'lim to'g'risida"gi qonun, kadrlar tayyorlash milliy dasturi doirasida hayotga tatbiq etilgan yangilanishlar xalqaro jamoatchilik tomonidan munosib baholanmoqda. Zero, ta'lim sohasini takomillashtirishga oid islohotlar tufayli yurtimizda yuzlab o'quv binolari qad rostladi, mavjudlari mukammal ta'mirlanib, eng so'nggi zamonaviy uskunalari bilan jihozlandi.

---

<sup>1</sup> I.A.Karimov."O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida ", Toshkent, "O'zbekiston", 2011yil

Buning natijasida hech kimdan kam bo'lmagan avlod – istiqlol farzandlari o'z iqtidorlarini namoyon etib, respublika va xalqaro miqyosdagi fan olimpiadalarida, turli anjuman va simpoziumlarda Vatan sha'nini munosib sharaflamoqdalar.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti Islom Karimovning O'zbekistonda Ta'lim sohasini isloh qilish , yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash bo'yicha amalga oshirilayotgan dasturning asosiy maqsad va vazifalari, mazmun – mohiyati qisqacha bayon etilgan nutqi xalqaro konferensiya ishida muhim ahamiyat kasb etdi.

Bundan 15 yil oldin (1997 yilda) qabul qilingan, Kadrlar tayyorlash milliy dasturi deb nom olgan Ta'lim sohasini isloh qilish dasturi mamlakatda yangi jamiyat qurishning bosqichma-bosqich va tadrijiy rivojlanish prinsipiga asoslangan iqtisodiy va siyosiy islohotlarning O'zbekiston tanlagan “o'zbek modeli”ning ajralmas tarkibiy qismi ekani alohida ta'kidlandi.

Jahondagi demokratik, taraqqiy topgan mamlakatlar tajribasini umumlashtirgan va ayni paytda boshqalarning modellari takrorlanmagan hamda ulardan sahifa ko'chirilmagan ushbu dastur o'tmishda majburan singdirilgan kommunistik mafkuraning qolip va andozalaridan butunlay voz kechish, odamlarning birinchi navbatda, yetishib kelayotgan avlodning ongida demokratik qadriyatlarni mustahkamlashga qaratilgan bo'lib, hayotda o'z fikriga, o'z yo'liga va qat'iy grajdanlik pozitsiyasiga ega bo'lgan, har tomonlama yetuk va mustaqil fikrlaydigan shaxsni shakllantirishni maqsad qilib qo'ygan.

Bugun yuksak ma'naviy va axloqiy fazilatlariga ega, bilimli, samarali mehnat qilishga qodir fuqorolar jamiyatning eng muhim boyligi va asosiy kapitali, uni harakatga keltiruvchi kuchiga aylanib bormoqda. Aynan shu bois XXI asr – intellektual bilimlar asrida inson kapitaliga investitsiyalar yo'naltirishni ustivor vazifa sifatida tanlangan mamlakatlarga yuksak taraqqiyotga erishishi mumkin. Faqat tom ma'nodagi bilimli jamiyatgina zamonaviy tahdid va muammolarni yengib o'tishga qodir bo'ladi.

Har qanday davlat mamlakatning intellektual va ma'naviy salohiyatini manfaatdor bo'lmog'i kerak. Globallashuv davrida bilimlilik mamlakatning

iqtisodiy rivojlantirish va uning milliy boyligini ko'paytirishning muhim tarkibiy qismiga aylanmoqda, aholining yuksak ma'naviy darajasi esa odamlarda madaniyatni, erkin va demokratik huquqiy davlatda yashash hamda mehnat qilish qobiliyatini shakllantirish, o'z huquq va erkinliklarini anglash, ulardan shaxs, davlat hamda jamiyat manfaatlari yo'lida foydalanish imkonini beradi.

Jamiyatda bilimli, ma'lumotli va yuksak intellektga ega odamlarning mavqeyini oshirish; ta'lim va kasb – hunar dasturlarning jahondagi ta'lim ilmi-fan, texnika va texnologiyalar, iqtisodiyot hamda madaniyat sohasidagi zamonaviy yutuqlarga muvofiqligi; ta'limni yoshlarning kelajagidagi amaliy mehnat faoliyati bilan uzviyligini ta'minlash; ta'lim olayotgan o'quvchi – yoshlar ongida umuminsoniy qadriyatlar, yuksak ma'naviyat, madaniyat va ijodiy fikrlash ustivorligini shakllantirish; ta'limning milliy tarix, xalq an'analarini va urf – odatlari bilan mushtarakligi, boshqa xalqlar tarixi va ma'daniyatini hurmat qilish ta'lim tizimini isloh etishning asosiy prinsiplari bo'lishi lozim.

Ta'lim sohasida, ham ushbu sohada mehnat qilayotganlar, ham zamonaviy kadrlar talab qilinadigan tarmoqlar vakillari o'rtasida xalqaro hamkorlikni muntazam rivojlantirish zarur.

Biz ta'lim tizimida o'quvchilarning nafaqat keng bilim va professional ko'nikmalarni egallashi, ayni paytda chet mamlakatlardagi tengdoshlari bilan faol muloqot qilish, bugungi dunyoda ro'y berayotgan barcha voqea-hodisalar, yangilik va o'zgarishlardan atroflicha xabardor bo'lish, jahondagi ulkan intellektual boylikni egallashning eng muhim sharti hisoblangan xorijiy tillarni ham chuqur o'rganishlari uchun katta ahamiyat bermoqdamiz.

O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A.Karimov Oliy Majlisning XIV sessiyasida so'zlagan nutqida kadrlar tayyorlashning ahamiyatiga izoh berib shunday degan edi:

«Biz oldimizga qanday vazifa qo'ymaylik, qanday muammoni yechish zaruriyati tug'ilmasin, gap oxir-oqibat, baribir kadrlarga borib qadalaveradi. Mubolag'asiz aytish mumkinki, bizning kelajagimiz, mamlakatimiz kalajagi,

o'rnimizga kim kelishiga yoki boshqacharoq qilib aytganda, qanday kadrlar tayyorlashimizga bog'liq.

Mamlakatimiz kelajagi uchun Oliy Majlisning IX sessiyasida qabul qilingan «Kadrlar tayyorlash bo'yicha milliy dasturi» ning amalga oshirishi juda ham muhim ahamiyatga ega.

Yuqori malakali pedagog kadrlar tayyorlash va qayta tayyorlashga alohida e'tibor berish lozim. Kadrlar tayyorlashning sifati, erkin fikrlovchi shaxs-fuqoroni kamol toptirishiga ertaga sinf xonalar va auditoriyalarda kimlar dars va saboq berishiga bog'liq».

Darhaqiqat, barkamol inson shaxsning shakllanishi bevosita uzluksiz ta'lim jarayonida amalga oshadi. Shunday ekan, har jabhada muvaffaqiyatga erishish, jumladan yuqori malakali kadrlar tayyorlashda milliy dasturni o'rni va ahamiyati beqiyosdir.

Kadrlar tayyorlash milliy dasturida oliy ta'limning asosiy maqsadi bozor iqtisodiyoti sharoitida mustaqil ishlashga qodir, raqobatbardosh, yuqori malakali mutaxassislar tayyorlashdan iborat. Bu maqsadga erishish uchun, shuningdek Respublikamiz Prezidenti aytgani kabi «mamlakatimizning boy ilmiy – texnikaviy salohiyatidan keng foydalangan holda, yuksak texnologiya va fan yutuqlariga asoslangan ishlab chiqarish sohalari - avtomobilsozlik, samolyotsozlik, mikrobiologiya, elektrotexnika va elektronika sanoatlarini telekommunikatsiya va zamonaviy axborot texnologiya vositalarini tez sur'atlarda rivojlantirish» uchun saboq olayotgan har bir shaxs o'zi o'rgangan ta'lim mazmunini chuqur anglashi, qayerda va qanday tatbiq qilishni bilishi, hayotda esa o'zi amaliyotga tatbiq qila olishi kerak.<sup>2</sup>

Tasodifiy prosesslarning sust yaqinlashishlari nazariyasini qurish munosabati bilan metrik fazolarda ehtimollik o'lchovlarining (taqsimotlarning) sust yaqinlashishlarini o'rganish. XX asrning 30-40 yillarida boshlangan va atoqli olimlar A. N. Kolmogorov, Dj. Dub, M. Donsker, Yu. V. Proxorov, A. B. Skoroxod nomlari bilan bog'liqdir. 1935 - yilda A. N. Kolmogorov

---

<sup>2</sup> I.A. Karimov. Biz o'z kelajagimizni o'z qo'limiz bilan quramiz. Toshkent. "O'zbekiston". 1999- y. 381 b.

banax fazolarida gauss taqsimoti va xarakteristik funksional ta'riflarini berdi. Banax fazosida tasodifiy elementlarning ehtimollik taqsimotlari fransuz olimlari E. Mure va R. Forte tomonidan 1950 yildan o'rganila boshlangan. Aynan metrik fazolarda ehtimollik o'lcholarini sust yaqinlashishi masalalarini Yu. B. Proxorovning 1956 - yilda chop etilgan fundamental ishida o'rganilgan. Xususan, banax fazolarida tasodifiy elementlar ehtimollik taqsimotlari, ularning turli yaqinlashishlari, tasodifiy elementlardan tuzilgan qatorlarning yaqinlashish masalalari [ 2,4,5 ]<sup>3</sup> ishlarda atroflicha bayon qilingan. Hozirgi vaqtda konkret funksioal fazolarda tasodifiy proesslar va maydonlar taqsimotlarining turli ma'noda yaqinlashishlarini o'rganish dolzarb masalalardan biri bo'lib qoldi. [ 0,1 ] kesmada uzluksiz funksiyalar fazosi  $C[0,1]$  da va ikkinchi jins **uzlushga** ega bo'lmagan funksiyalar fazosi  $D[0,1]$  da tasodifiy proesslar hosil qilgan ehtimollik o'lchovlari yoki taqsimotlarning sust yaqinlashishi masalalari yetarlicha o'rganilgan va olingan natijalar [ 2,4 ] ishlarda bayon qilingan.

$L_p[a,b]$  fazoda ( [ a,b ] da aniqlangan  $x(t)$  o'lchovli haqiqiy funksiyalar uchun  $\int_a^b |x(t)|^p dt < \infty$  shart bajariladigan funksiyalar fazosi ) tasodifiy proesslar hosil qilgan ehtimollik o'lchovlari kiritilishi, bu o'lchovlarni tasodifiy proesslarning chekli o'lchovli taqsimotlari bilan bog'liqligi masalasi, shuningdek separabel banax fazosida o'lchovlarning sust yaqinlashish shartlari [ 3 ]<sup>4</sup> ishda o'rganilgan.  $L_p[0,1]$  fazoda tasodifiy proesslar hosil qilgan o'lchovlari ( taqsimotlarini ) sust yaqinlashishi, o'lchovlarni shu fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishi va  $L_p[0,1]$

<sup>3</sup>Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М. Наука. 1977

Булдыгин В.В. Сходимость случайных элементов в топологически пространствах. Киев, "Наукова Думка" 1980 г.

Вахания Н.Н, Тариеладзе В.И, Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М. Наука. 1985 г.

<sup>4</sup> Гихман И.И, Скороход А.В, Теория случайных процессов. т-1, М. Наука. 1971 г.

fazo normasida tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi shartlari [ 6 ]<sup>5</sup> ishda berilgan.

Ushbu magistrlik dissertatsiyasi tasodifiy proseslar uchun [ 6 ] ishda olingan sust yaqinlashish shartlarini  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ ,  $\Pi = [0,1]^m$ , fazodan qimmat qabul qiluvchi tasodifiy maydonlar uchun umumlashtirishga bag'ishlangan. U kirish qismi, ikki bob, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Ikkinchi kirish qismida mavzuning dolzarbligi hozirga qadar olingan ilmiy natijalar haqida ma'lumotlar keltiriladi.

Dissertatsiyaning kirish qismida mavzuga oid tarixiy ma'lumotlar, ya'ni shu mavzuni taraqqiyotida asosiy rol o'ynagan matematik olimlar, mavzuning dolzarbligi, shuningdek mavzu bo'yicha hozirga qadar olib borilgan tadqiqotlar haqida ma'lumotlar keltirilgan.

I bobda II bobning 2-4 paragraflarida keltirilgan teoremlar va natijalarni isbotlashda ishlatiladigan metrik fazoda, xususan separabel banax fazosida ehtimollik o'lchovlari va tasodifiy elementlarni sust yaqinlashishiga oid tushunchalar, teoremlar berilgan.

II bob magistrlik dissertatsiyasining asosiy qismidan iborat bo'lib, unda  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$  fazoda tasodifiy maydonlar hosil qilgan ehtimollik o'lchovlari ( taqsimotlari ), ularni shu fazo normasida sust yaqinlashishi hamda tasodifiy maydonlardan tuzilgan qatorlarni ehtimol bo'yicha yaqinlashishiga oid olingan ilmiy natijalar bayon qilingan. Shuningdek, ishda xulosa qismi va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

## **I bob. Banax fazosida tasodifiy elementlarni yaqinlashishi**

Bu bobda metrik fazoda, xususan separable Banax fazosida ehtimollik o'lchovlari va tasodifiy elementlarni sust yaqinlashishiga, shu fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishiga oid teoremlarni keltiramiz.

---

<sup>5</sup> Дзигава М.С. Достаточные условия сходимости распределений в пространствах Соболева. Дипломная работа КГУ, 1980 г.

## 1 §. Metrik fazolarda o'lchovlarni sust yaqinlashishi.

Aytaylik  $(X, \rho)$  metrik fazo,  $G$  - uning borel qism to'plamlarining  $\sigma$  - algebrasi,  $B_X - X$  da aniqlangan barcha chegaralangan uzluksiz funksiyalar fazosi bo'lsin.  $B_X$  fazoda norma

$$\|f\|_X = \sup_x |f(x)|$$

iborat bo'ladi.

**1- ta'rif.** Agar  $B_X$  dan olingan har qanday  $f$  funksiya uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) \mu_n(dx) = \int_X f(x) \mu(dx)$$

munosabat bajarilsa, u holda  $G$  da aniqlangan  $\mu_n$  o'lchovlar ketma-ketligi  $\mu$  o'lchovga sust yaqinlashadi deyiladi.

**2- ta'rif.** Aytaylik  $M = \{\mu\}$   $G$  da aniqlangan o'lchovlar to'plami bo'lsin. Agar  $M$  dan olingan o'lchovlarning har qanday  $\mu_n$  ketma-ketligidan sust yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib olish mumkin bo'lsa, u holda  $M$  to'plam sust kompakt deyiladi.

**1- teorema** [3]<sup>6</sup> Aytaylik  $X$  to'la separabel metrik fazo bo'lsin.  $G$  da aniqlangan o'lchovlar to'plami  $M$  sust kompakt bo'lishligi uchun quyidagi:

- a)  $\sup \{ \mu(X) : \mu \in M \} < \infty$  ;
- b) har qanday  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $K$  kompakt mavjud bo'lib,

$$\sup \{ \mu(X \setminus K) : \mu \in M \} < \varepsilon$$

---

<sup>6</sup> Гихман И.И., Скороход А.В., Теория случайных процессов. Т-1, М. Наука. 1971 г.

shartlarni bajarishi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Zarurligi.  $M$  to'plamning kompaktligidan har qanday  $f$  chegaralangan uzluksiz funksiya uchun

$$\left\{ \int_x f(x) \mu(dx); \mu \in M \right\}$$

sonli to'plamning kompaktligi, bundan esa uning chegaralanganligi kelib chiqadi.  $f=1$  deb olib. a) shartni zarurligini olamiz. b) shartni zarurligini isbotlaymiz.  $K_\delta$  orqali  $\rho(x, K) < \delta$  tengsizlik o'rinli bo'lgan  $x$  lar to'plamini belgilaymiz, bu yerda

$$\rho(x, K) = \inf_{y \in K} \rho(x, y)$$

har qanday  $\varepsilon > 0$  va  $\delta > 0$  lar uchun shunday  $K$  kompaktni topish mumkin bo'lib, uning uchun barcha  $\mu \in M$  o'lchovlarda

$$\mu(X \setminus K_\delta) \leq \varepsilon$$

bo'lishligini ko'rsatamiz.

Aksinchasiga faraz qilamiz, ya'ni berilgan  $\varepsilon > 0$  va  $\delta > 0$  lar uchun shunday kompakt mavjud bo'lmasin. Ixtiyoriy  $\mu_1 \in M$  kompaktni olamiz va

aytaylik  $K^{(1)}$  - shunday kompakt bo'lsinki uning uchun  $\mu_1(X \setminus K^{(1)}) < \varepsilon$

bo'lsin. Farazimizga ko'ra  $\sup_{\mu} \mu(X \setminus K_\delta^{(1)}) > \varepsilon$  bo'lganligi uchun shunday

$\mu_2 \in M$  o'lchov topilib,  $\mu_2(X \setminus K_\delta^{(1)}) > \varepsilon$  o'rinli bo'ladi. Demak,

$K^{(2)} \subset X \setminus K_\delta^{(1)}$  kompakt topilib, uning uchun  $\mu_2(K^{(2)}) > \varepsilon$  bo'ladi.

Qilingan farazimizga ko'ra

$$\sup_{\mu} \mu \left( X \setminus K_{\delta}^{(1)} \setminus K_{\delta}^{(2)} \right) = \sup_{\mu} \mu \left( X \setminus \left[ K^{(1)} \cup K^{(2)} \right]_{\delta} \right) > \varepsilon$$

Shuning uchun shunday  $\mu_3 \in M$  o'lchov topilib,

$\mu_3 \left( X \setminus K_{\delta}^{(1)} \setminus K_{\delta}^{(2)} \right) > \varepsilon$  va shunday  $K^{(3)} \subset K_{\delta}^{(1)} \setminus K_{\delta}^{(2)}$  kompakt topilib

$\mu_3 \left( K^{(3)} \right) > \varepsilon$  bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib,  $\mu_n$  o'lchovlar ketma-

ketligini va  $K^n$  kompaktlarni ko'ramizki, ular uchun

$$\mu_n \left( K^{(n)} \right) > \varepsilon, \quad \left( K^{(n)} \right) \subset X \setminus K_{\delta}^{(1)} \setminus \dots \setminus K_{\delta}^{(n-1)}$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $x \in K_{\frac{\delta}{2}}^{(i)}$  bo'lganda  $\chi_i(x) = 1 - \frac{2}{\delta} \rho \left( x, K^{(i)} \right)$ ,  $x \notin K_{\frac{\delta}{2}}^{(i)}$

bo'lganda  $\chi_i(x) = 0$  bo'lsin. Ikkita har bir  $K^{(n)}$  va  $K^{(m)}$  kompaktlar

orasidagi masofa  $\delta$  dan katta ( $\rho \left( K^{(n)}, K^{(m)} \right) > \varepsilon$ ) bo'lsa, u holda

$\chi_n(x) \chi_m(x) = 0$  bo'ladi. Shuning uchun  $g_p(x) = \sum_{i=p}^{\infty} \chi_i(x)$  qator har

bir  $x \in X$  da yaqinlashadi, va  $g_p(x)$  funksiya uzluksiz va bir bilan chegaralangan bo'ladi.

$\mu_n$  o'lchovlar ketma-ketligidan sust yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkinligidan, umumiylikni chegaralamasdan,  $\mu_n$  ning o'zi biror  $\mu$  o'lchovga sust yaqinlashadi deb hisoblash mumkin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_p(x) \mu_n(dx) = \int_X g_p(x) \mu(dx)$$

tenglik o'rinli bo'ldi.  $n > p$  larda

$$\int_X g_p(x) \mu_n(dx) \geq \int_X \chi_n(x) \mu_n(dx) \geq \varepsilon$$

munosabat o'rinli bo'lganligidan, u holda barcha  $p$  lar uchun

$$\int_X g_p(x) \mu(dx) \geq \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Bu oxirgi munosabat mumkin bo'lmaydi, chunki  $p \rightarrow \infty$  da barcha  $X$  lar uchun  $g_p(x) \rightarrow 0$  va  $0 \leq g_p(x) \leq 1$ , bo'lib, Lebel teoremasiga ko'ra

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_X g_p(x) \mu(dx)$$

bo'ladi

Barcha  $\mu \in M$  o'lchovlar uchun har qanday  $\varepsilon > 0$  va  $\delta > 0$  lar uchun  $\mu(X \setminus K_\delta) \leq \varepsilon$  munosabat o'rinli bo'ladi. Shunday  $K$  kompaktni mavjud bo'lishligi isbotlandi. Tayinlangan  $\varepsilon > 0$  sonni olib, shunday  $K^{(r)}$  kompaktni ko'ramizki, uning uchun

$$\sup_{\mu} \mu \left( X \setminus K_{\frac{1}{2^r}}^{(r)} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2^r}$$

bo'ladi. U holda  $K = \bigcap_{r=1}^{\infty} K_{\frac{1}{2^r}}^{(r)}$  to'plam kompakt bo'ladi va

$$\mu(X \setminus K) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \mu \left( X \setminus K_{\frac{1}{2^r}}^{(r)} \right) \leq \sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon \cdot 2^{-r} = \varepsilon$$

shunday qilib, b) shartning zarurligi isbotlandi.

**Yetariligi.** Aytaylik teorema shartlari bajarilgan bo'lsin. b) shartdan

barcha  $\mu \in M$  lar va  $\mu(X \setminus K^n) \leq \varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n \downarrow 0$  lar uchun

$$K^n \subset K^{n+1}, \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K^n\right) = 1$$

munosabatlar o'rinli bo'lgan  $K^n$  kompaktlar ketma-ketligini qurish mumkiligini kelib chiqadi  $B_x$  dan olingan, barcha  $m$  lar uchun faqat  $K^m$  da qaralayotgan  $\{f_n\}$  funksiyalarning sanoqli to'plami  $F$   $B_{k^m}$  fazoda hamma joyda zich bo'ladi. Bunday sanoqli to'plamni mavjudligi  $B_{k^m}$  fazoning separabelligidan va  $B_{k^m}$  fazodan olingan har qanday funksiyani  $B_x$  dan olingan funksiyaga qadar davom ettirish mumkinligidan kelib chiqadi.  $\mu_n, n \geq 1$ ,  $M$  to'plamdan olingan ixtiyoriy o'lchovlar ketma-ketligi bo'lsin. Shunday  $n_k$  qism ketma-ketlikni tanlaymizki, barcha  $f \in F$  funksiyalar uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f(x) \mu_{n_k}(dx) = L(f)$$

limit mavjud bo'lsin. U holda bu limitni barcha  $\varphi \in B_x$  lar uchun mavjud bo'lishligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham,  $\varphi$  funksiya  $\|\varphi\|_x \leq 1$ , va  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  lar qanday bo'lmasin shunday  $f \in F$  funksiyani ko'rsatishimiz mumkinki,

$$\sup\{|f(x) - \varphi(x)|; x \in K^m\} \leq \delta, \quad \mu(X \setminus K^m) \leq \varepsilon, \quad \|f\| \leq 1$$

munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun

$$\left| \int_X f(x) \mu_{n_k}(dx) - \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) \right| \leq \delta \sup_{\mu} \mu(X) + 2\varepsilon$$

bo'ladi va demak,

$$\left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) \right| \leq 4\varepsilon + 2\delta \sup_{\mu} \mu(X)$$

bo'ladi.  $\varepsilon > 0$  va  $\delta > 0$  larning ixtiyoriyligidan ushbu

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx)$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, barcha  $\varphi \in B_x$  funksiyalar uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx)$$

limit mavjud bo'ladi.

Bu limitni  $L(\varphi)$  orqali belgilaymiz. Ravshanki  $L(\varphi)$  funksional [8]<sup>7</sup> ishning V bob, 2§ dagi 1-teoremaning

$$1) \text{ barcha } \varphi \text{ lar uchun } L(\varphi) \geq 0 \text{ ;}$$

$$2) L(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1L(\varphi_1) + c_2L(\varphi_2)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Shuningdek, agar  $x \in K^m$  da  $\varphi = 0$  bo'lsa, u holda

---

<sup>7</sup> Булдин В.В. Сходимость случайных элементов в банаховых пространствах. Сб. "Предельные теоремы для случайных процессов» ИМ. АН УССР 1977 г.

$$|L(\varphi)| = \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) \right| \leq \|\varphi\|_X \varepsilon_m$$

bo'ladi. Demak,

$$L(\varphi) = \int_X \varphi(x) \mu(dx)$$

tenglik o'rinli bo'lgan  $\mu$  o'lchov mavjud bo'ladi. Teoremaning yetarliligi isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan quydagi natija kelib chiqadi.

**Natija.** Agar  $X$  to'la separabel metrik fazo va  $\mu_n, n \geq 1$ , shunday o'lchovlar ketma-ketligi bo'lib, barcha  $\varphi \in B_X$  lar uchun

$$L(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) \mu_n(dx)$$

bo'lsa u holda shunday  $\mu$  o'lchov mavjud bo'lib,

$$L(\varphi) = \int_X \varphi(x) \mu(dx)$$

bo'ladi, ya'ni  $\mu_n, n \geq 1$ , o'lchovlari ketma-ketligi albatta sust yaqinlashuvchi bo'ladi.

**Isbot.** Dastlab  $\{\mu_n\}$  to'plamni sust kompakt bo'lishligini ko'rsatamiz. Bu to'plam uchun 1-teoremaning a) shart bajariladi. Faraz qilaylik, b) shart bajarilmasin. U holda 1-teoremaning b) shartini zarurligini isbotidagi kabi, biror  $\varepsilon > 0$  uchun  $\mu_{n_k}$  o'lchovlari ketma-ketligi va  $K^{(k)}$  kompaktlar ketma-ketligini ko'rishimiz mumkin bo'lib, ular bir-biri bilan  $\delta$  dan kichik bo'lmagan masofada bo'lib,  $\mu_{n_k} \left( K^{(k)} \right) \geq \varepsilon$  bo'ladi.

Aytaylik  $\chi_i$  funksiya 1-teorema isbotidagi kabi aniqlangan bo'lsin.

Har bir  $p$  tub son uchun

$$\Psi_p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi_{p^m}(x)$$

deb belgilaylik.  $\Psi_p(x)$  funksiya  $0 \leq \Psi_p(x) \leq 1$  va  $\Psi_p(x)\Psi_{p'}(x) = 0$

$p \neq p'$  bo'lganda;  $\Psi_p \in B_x$  shartlarni qanoatlantiradi va

$$L(\Psi_p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \Psi_p(x) \mu_{n_k}(dx)$$

limit mavjud bo'ladi.  $k = p^m$  bo'lganda.

$$\int_X \Psi_p(x) \mu_{n_k}(dx) \geq \int_X \chi_i(x) \mu_{n_k}(dx)$$

bo'lishligini ta'kidlaymiz. Shuning uchun

$$L(\Psi_p) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X \Psi_p(x) \mu_{n_k}(dx) \geq \varepsilon$$

bo'ladi. Demak, har qanday  $N$  uchun

$$L(1) \geq L\left(\sum_{j=1}^N \Psi_{p_j}\right) \geq N\varepsilon$$

bo'ladi (bu erda  $p_1, \dots, p_N$  xar xil tub sonlar), chunki  $\varphi \leq f$  bo'lganda  $L(\varphi) \leq L(f)$  bo'ladi. Bu esa  $L(1)$  ni chekliligi zarurdir.

Demak, teoremaning b) sharti bajariladi. Aytaylik,  $\mu_{n_k}$  sust yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik va  $\mu$  uning liminti bo'lsin, u holda

$$L(\varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_x \varphi(x) \mu_{n_k}(dx) = \int_x \varphi(x) \mu(dx)$$

bo'ladi. Natija isbotlandi.

## **2 §. Banax fazosida tasodifiy elementlarning sust yaqinlashishi.**

Aytaylik  $(X; \|\cdot\|)$  separabel banax fazosi,  $X^* - X$  fazoga qo'shma fazo,  $B$  - esa  $X$  fazo qism to'plamlarining  $\sigma$ -algebrasi,  $(\Omega, F, P)$  asosiy ehtimollik fazosi bo'lsin. Qimatlari  $X$  fazoga tegishli, ya'ni  $X$  - qimmatli tasodifiy miqdor yoki tasodifiy element deb  $(F, B)$  - o'lchovli  $\xi: \Omega \rightarrow X$  akslantirishga aytiladi.  $\xi$  tasodifiy element  $(X, B)$  fazoda

$$\mu_\xi(A) = P\{\xi \in A\}, A \in B$$

o'lchovni hosil qiladi. Bu  $\mu_\xi$  o'lchov  $\xi$  tasodifiy elementning taqsimoti deyiladi.  $X$  fazoda tasodifiy elementlar ketma-ketligini qaraganimizda, ularni yaqinlashishlari masalasi paydo bo'ladi.

$X$  fazoda tasodifiy elementlarning turli ma'noda yaqinlashishlari bo'lib, ulardan muhumlari taqsimotlarning sust yaqinlashishi,  $X$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishi va  $X$  fazoda tasodifiy elementlardan tuzilgan qatorlarni shu fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishlardan iboratdir. Mazkur magistrlik dissertatsiyasida  $X$  fazo sifatida  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazoda qaraladi va bu fazoda tasodifiy maydonlar taqsimotlarining sust yaqinlashishi va tasodifiy maydonlardan tuzilgan qatorlarning  $X$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashish shartlari o'rganiladi

$\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar to'plamini qaraymiz

**3 - ta'rif.** A gar  $X$  fazoda chiziqli uzluksiz  $f$  funksional uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f(x) \mu_n(dx) = \int_X f(x) \mu(dx)$$

bo'lsa, u holda  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligi  $\mu$  taqsimotga sust yaqinlashadi deyimiz.

**4-ta'rif** Agar  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar hosil qilgan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligi  $\mu_\xi$  taqsimotga sust yaqinlashsa, u holda  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma - ketligi  $\xi$  tasodifiy elementga sust yaqinlashadi deyiladi.

**5 - tarif** Agar har qanday  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  ehtimollik o'lchovlari ketma-ketligidan sust yaqinlashuvchi  $\{\mu_{n_k}\}$  qisman ketma-ketlikni ajratib olish mumkin bo'lsa,  $\{\mu\}$  o'lchovlar to'plami sust kompakt deyiladi.

Endi sust kompaktlik sharti ishlatiladigan o'lchovlarni sust yaqinlashishiga oid teoremlarni keltiraylik.

**2- teorema** (Proxorov [ 3 ])  $X$  separabel Banax fazosida  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  ehtimollik o'lchovlari shu vaqtda va faqat shu vaqtda sust kompakt bo'ladi, qachonki  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $K_\varepsilon \subset X$  kompakt mavjud bo'lib, barcha  $n \geq 1$  lar uchun

$$\mu_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

bo'lsa.

Shuni takidlash lozimki, separabel Banah fazosida tasodifiy elementlarni sust yaqinlashishi bilan bog'liq masalalar ko'p olimlar tomonidan o'rganilgan

[2,3,4, 8]<sup>8</sup>. Biz uchun quydagi natija muhimdir. Ya'ni chiziqli normalashgan fazolarda o'lcholarini sust yaqinlashish shartlarini qaraymiz.

Aytaylik  $X$  separabel Banax fazosi,  $L - X$  fazodagi chiziqli funksiyonallarni shunday to'plamiki,  $L$  dan olingan barcha  $l$  funksiyonallarni o'lchovi bo'lgan minimal  $\sigma$ -algebrasi  $G$  bilan ustma-ust tushadi [ 3 ]  $\chi_n(l)$  va  $\chi(l)$  lar orqali  $\mu_n$  va  $\mu$  o'lchovlarining xarakteristik funksiyalarini belgilaymiz:

$$\chi_n(l) = \int_{\tilde{X}} e^{il(x)} \mu_n(dx), \quad \chi(l) = \int_{\tilde{X}} e^{il(x)} \mu(dx)$$

**3 - teorema**  $X$  separable banax fazosida  $\mu_n, n \geq 1$ , ehtimollik o'lchovlarini  $\mu$  o'lchoviga sust yaqinlashishi uchun quydagi

- 1)  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  ketma – ketlik sust kompakt;
- 2) barcha  $l \in L$  funksionallar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n(l) = \chi(l)$$

shartlarni bajarilishi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Teorema shartlarini zarurligi ravshandir.

Shartlarni yetarliligini isbotlash uchun  $\mu_n$  ketma-ketlikning har qanday limit nuqtasi  $\mu$  bilan ustma –ust tushadi. Aytaylik  $\bar{\mu}$  shunday nuqta bo'lsin. U holda barcha  $l \in L$  lar uchun

---

<sup>8</sup> Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М. Наука. 1977 г. Гихман И.И., Скороход А.В, Теория случайных процессов. т-1, М. Наука. 1971 г. Булдыгин В.В. Сходимость случайных элементов в топологически пространствах. Киев, “Наукова Думка” 1980 г. М.С. Достаточные условия сходимости распределений в пространствах Собелева. Дипломная работа КГУ, 1980 г.  
Ширяев А.Н. Вероятность М.Наука 1980 г.  
Булдыгин В.В. Сходимость случайных элементов в банаховых пространствах. Сб. “Предельные теоремы для случайных процессов» ИМ. АН УССР 1977 г.

$$\chi(l) = \bar{\chi}(l) = \int e^{il(x)} \bar{\mu}(dx)$$

bo'ladi. Xarakteristik funksionallarni ustma-ust tushishi kelib chiqadi, ya'ni  $\mu = \bar{\mu}$  bo'ladi. Teorema isbotlandi.

**1- izoh** 3 -teoremaning 2) sharti  $n \rightarrow \infty$  da  $\mu_n(A) \rightarrow \mu(A)$  sust yaqinlashish shartiga ekvivalent bo'ladi, bu erda  $A$  ixtiyoriy silindirik to'plam bo'lib u  $\mu$  o'lchovning uzliksizlik to'plamidan iborat bo'ladi.

**2- izoh** Tasodifiy proseslar (maydonlar) uchun limit **teoremlarni** isbotlashda Proxorov teoremasi quydagicha qo'llaniladi. Aytalik  $\xi_n(t), n \geq 1$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligining chekli o'lchovli taqsimotlari  $\xi_0(t)$  tasodifiy maydon taqsimotiga yaqinlashsin. Agar  $\xi_n(t)$  tasodifiy maydonlarga mos keluvchi  $\mu_n, n \geq 1$  o'lchovlar sust kompakt to'plam hosil qilsa, u holda  $\mu_n, n \geq 1$  o'lchovlar ketma-ketligi  $\xi(t)$  ga mos kelgan  $\mu_0$  taqsimotga sust yaqinlashadi.

Haqiqatdan ham, aks holda biror  $\bar{\mu} \neq \mu_0$  ga o'lchovli sust yaqinlashuvchi  $\mu_{n_k}$  qisman ketma-ketlikka ega bo'lishimiz mumkin bo'ladi.

Aytaylik  $\bar{\xi}(t)$  tasodifiy prosesga  $\bar{\mu}$  o'lchov mos kelsin  $\bar{\xi}(t)$  tasodifiy prosesning chekli o'lchovli taqsimoti  $\xi_{n_k}(t)$  lar chekli o'lchovlari taqsimotlarning sust limiti sifatida  $\xi_0(t)$  prosesning chekli o'lcholi taqsimoti bilan faqat  $\bar{\mu} = \mu_0$  bo'lganda ustma-ust tushadi (proseslarga mos keluvchi o'lchovlar, ularning chekli o'lchovli taqsimotlari orqali bir qimmatli aniqlanganligi uchun)

### 3 §. Banax fazosi normasida tasodifiy elementlarning ehtimol bo'yicha yaqilashishi

**6 – ta’rif** Agar har qanday  $\varepsilon > 0$  uchun  $n \rightarrow \infty$  da

$$P\{\|\xi_n - \xi\| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma-ketligi biror  $\xi$  tasodifiy elementga  $X$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi deyiladi. Bu ko'rinishdagi yaqinlashishni  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  deb belgilanadi. Shuningdek, agar har qanday  $\varepsilon > 0$  uchun  $n, m \rightarrow \infty$  da

$$P\{\|\xi_n - \xi_m\| > \varepsilon\} \rightarrow 0$$

shart bajarilsa,  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma-ketligi  $X$  fazo normasida ehtimol bo'yicha fundamental deyiladi. Chekli o'lchovli holga o'xshash, agar  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha fundamental bo'lsa, u holda shunda  $\xi$  tasodifiy element topilib,  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  ketma-ketlik  $\xi$  ga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

Agar  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma-ketligi  $X$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashsa, u holda biror  $\xi \in X$  tasodifiy elementga sust yaqinlashadi, bundan esa  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar taqsimotlari sust kompakt bo'ladi [8].

Bundan tashqari ravshanki, har bir  $x^* \in X^*$  element uchun  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Bu shartlar yetarli shartlardan iborat bo'ladi.

X fazoda total bo'lgan chiziqli fuksionallar to'plami tushunchasini eslatib o'tamiz.

**7- ta'rif** Agar barcha  $x^* \in T$  lar uchun  $x^*(x) = 0$  dan  $x=0$  kelib chiqsa,  $T \subset X^*$  to'plam total deyiladi. Quydagi teorema o'rinli bo'ladi.

**4- teorema** [8]<sup>9</sup> Aytaylik  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  X fazodagi tasodifiy elementlar ketma-ketligi bo'lsin.  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  ketma-ketlik X fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishi uchun, quyidagi

1)  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar sust kompakt;

2) har bir  $x^* \in T$  (bu yerda T X dagi biror total to'plam) element uchun  $\{x^*(\xi_n), n \geq 1\}$  ketma-ketlik ehtimol bo'yicha yaqinlashadi;

shartlarni bajarilishi yetarli va har qanday  $x^* \in X^*$  uchun 1) va

2) shartlarni bajarilishi zarurdir.

**Isbot**. Teorema isboti bir nechta etaplardan iborat bo'ladi. Dastlab banax fazosida konuslarning bir sinfini kiritamiz. Aytaylik  $S_1^*$  markazi  $X^*$  fazodagi nolda bo'lgan birlik sfera bo'lsin. Har qanday  $x^* \in S_1^*$  va  $r \in (0, 1)$  uchun

$$A_r(x^*) = \{x \in X : |x^*(x)| > r \|x\|\}$$

ni aniqlaymiz. Ravshanki, agar  $x \in A_r(x^*)$  bo'lsa, u holda har qanday  $\lambda > 0$  uchun  $\lambda x \in A_r(x^*)$  bo'ladi.

Demak,  $A_r(x^*)$  to'plam X fazoda konus bo'ladi.

---

<sup>9</sup> Булдин В.В. Сходимость случайных элементов в банаховых пространствах. Сб. "Предельные теоремы для случайных процессов» ИМ. АН УССР 1977 г.

$f(x) = |x^*(x)| - \|x\|$  funksional  $X$  fazoda uzluksiz bo'lganligidan  $A_r(x^*)$  ochiq to'plam bo'ladi. Shunday qilib,  $A_r(x^*)$  konus  $X$  fazoda ochiq konus bo'ladi.

**1- lemma .** Aytaylik  $\tilde{X} = X - \{0\}$ ,  $T \subset S_1^*$  va  $\{r_n, n \geq 1\}$  - shunday ketma-ketligi  $\inf r_n = 0$  bo'lsin. U holda

$$\tilde{X} = \bigcup_{x^* \in T} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{r_n}(x^*)$$

bo'lishligi uchun  $T$  to'plamni  $X$  fazoda total bo'lishligi zarur va yetarlidir.

**Isbot.**  $\Pi(x^*) = \{x : |x^*(x)| > 0\}$  deb olamiz va

$$\tilde{X} = \bigcup_{x^* \in T} \Pi(x^*) \quad (1)$$

Tenglikni, shu vaqtda va faqat vaqtda, qachonki  $T$  to'plam  $X$  da total bo'lganda o'rinli bo'lishligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham agar  $T$  to'plam  $X$  da total bo'lsa, u holda total to'plam ta'rifidan har qanday  $x \in \tilde{X}$  element uchun shunday  $x^* \in T$  element mavjud bo'lib,  $|x^*(x)| > 0$

bo'lishligi kelib chiqadi. Bundan esa  $x \in \Pi(x^*)$  bo'lib (1) bajariladi.

Aksincha, (1) bajarilsin, lekin  $T$  to'plam total bo'lmasin. U holda shunday

$x \in \tilde{X}$  element topilib barcha  $x^* \in T$  lar uchun  $x^*(x) = 0$  bo'ladi. Biroq

(1) shartga ko'ra har qanday  $x \in \tilde{X}$  element uchun shunday  $x^* \in T$

funksional mavjud bo'lib,  $|x^*(x)| > 0$  bo'ladi. Olingan qarama-qarshilik  $T$

to'plamni totolligini isbotlaydi. Endi har bir  $x^* \in X^*$  uchun

$$\Pi(x^*) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{r_n}(x^*) \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lishligini ko'rsatamiz. Ravshaki,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{r_n}(x^*) \in \Pi(x^*)$$

munosabat o'rinli. Aytaylik,  $x \in \Pi(x^*)$  bo'lsin, u holda

shunday  $\xi > 0$  topilib  $|x^*(x)| > \frac{\xi}{\|x\|} \cdot \|x\|$  bo'ladi  $\inf_n r_n = 0$  bo'lganligidan

biror  $m$  uchun  $\frac{\xi}{\|x\|} > r_m > 0$  bo'ladi.

Demak,  $|x^*(x)| > r_m \|x\|$ , ya'ni  $x \in A_r(x^*) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{r_n}(x^*)$  bo'ladi

(2) tenglik isbotlandi. (1) va (2) tengliklarni birlashtirib izlanayotgan tasdiqni olamiz. Lemma isbotlandi.

**2-lemma.** Aytaylik  $K$  to'plam,  $X$  fazo topologiyasida kompakt

to'plam,  $S_\varepsilon = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$ ,  $T \subset S_1^*$  to'plam  $X$  fazoda total

to'plam bo'lsin. U holda hamma vaqt shunday  $r \in (0,1)$  son va

$x_{i_1}^*, \dots, x_{i_n}^* \in T$  (bu yerda  $r, n, x_{i_1}^*, \dots, x_{i_n}^*$  lar  $K$  va  $\varepsilon$  larga bog'liq

bo'lishi mumkin) funkcionallarning chekli to'plami topilib,

$$K - S_\varepsilon \subset \bigcup_{m=1}^n A_r(x_m^*)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

**Isbot .** 1-lemmaga asosan

$$K - S_\varepsilon = \bigcup_{x^* \in T} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{r_n}(x^*) \quad (3)$$

bo'ladi.  $K - S_\varepsilon$  to'plam kompakt va  $A_{r_n}(x^*)$  ochiq to'plam bo'lganligidan, (3) koplamadan chekli sondagi koplamalarni ajratib olamiz, ya'ni

$$K - S_\varepsilon \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{r_n}(x_{im}^*)$$

Agar  $\beta \geq \alpha$  bo'lsa, u holda  $A_\alpha(x^*) \subseteq A_\beta(x^*)$  bo'lishligini ta'kidlasak va  $r = \min r_m$  deb olsak lemma isbotlanadi.

**3- lemma .** Aytaylik  $T$  to'plam  $X$  da total to'plam,  $K$  esa  $X$  fazoda kompakt bo'lsin. U holda har qanday  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $N$  natural son,

$$\{x_i^*, i = 1, 2, 3, \dots, N\} \subset T$$

funksionallar to'plami va  $r > 0$  son topilib,  $X$  fazodagi har qanday  $\xi$  tasodifiy element uchun

$$P\{\|\xi\| > \varepsilon\} \leq \sum_{i=1}^N P\{|x_i(\xi)| > r\varepsilon\} + P\{\varepsilon \in K\}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

**Isbot.** Umumiylikka putur yetmaslik uchun biz  $0 \in T$  deb faraz qilamiz.

$$\tilde{T} = \left\{ \tilde{x}^* : \tilde{x}^* = \frac{\bar{y}^*}{\|y^*\|}, y^* \in T \right\}$$

deb olamiz. Ravshanki,  $T$  to'plam  $X$  fazoda total bo'ladi va  $\bar{T} \subset S_1^*$

2- lemmaga asosan shunday  $N$ ,  $\{x_i^*, i=1,2,3,\dots,N\} \subset \tilde{T}$ ,  $\beta$  lar uchun topilib

$$P\{\|\xi\| \geq \varepsilon, \xi \in K\} \leq P\left\{\xi \in \bigcup_{i=1}^N A_\beta(\tilde{x}_i^*), \|\xi\| > \varepsilon\right\} \leq \sum_{i=1}^N P\left\{\xi \in A_\beta(\tilde{x}_i^*), \|\xi\| > \varepsilon\right\}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Ammo

$$P\left\{\xi \in A_r(\tilde{x}_i), \|x\| \geq \varepsilon\right\} \leq P\left\{|x_i^*(x)| > \beta \|x_i^*\| \varepsilon\right\}$$

endi, shuning uchun

$$P\{\|\xi\| \geq \varepsilon, \xi \in K\} \leq \sum_{i=1}^N P\left\{|x_i^*(x)| > r\varepsilon\right\}$$

bo'ladi, bu erda  $r = \min_{1 \leq i \leq N} \beta \|x_i^*\|$

Bundan esa,

$$P\{\|\xi\| > \varepsilon\} \leq P\{\|\xi\| \geq \varepsilon, \xi \in K\} + P\{\xi \notin K\} \leq \sum_{i=1}^N P\left\{|x_i^*(\xi)| > r\varepsilon\right\} + P\{\xi \notin K\}$$

3- lemma sibatlandi.

Endi teoremani isbotiga o'tamiz. Buning uchun  $X$  fazoda  $Z_{nm} = \xi_n - \xi_m, n, m \geq 1$ , tasodifiy elementlar to'plamini qaraymiz.

$\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar taqsimotlari sust kompakt bo'lganligidan  $Z_{nm}$  ketma-ketlikning ham taqsimotlari sust kompakt bo'ladi. Shuning uchun har qanday  $\delta > 0$  son uchun shunday  $K_\delta$  kompakt to'plam topilib,

$$\sup_{m, n \geq 1} P\{\xi_n - \xi_m \in K\} < \delta$$

bo'ladi.

Bu yerdan va 3-lemmadan har qanday  $\varepsilon > 0, \delta > 0$  sonlar uchun shunday  $N, \{x_i^*, i = 1, 2, 3, \dots, N\} \subset T, r > 0$  lar topilib, barcha  $n, m \geq 1$  lar uchun

$$P\{\|\xi_n - \xi_m\| > \varepsilon\} \leq \sum_{i=1}^N P\left\{\left|x_i^*(\xi_n - \xi_m)\right| > \varepsilon\right\} + \delta$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Teorema shartiga asosan har qanday  $\varepsilon > 0$  va har qanday  $\delta > 0$  sonlar uchun

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} P\{\|\xi_n - \xi_m\| > \varepsilon\} < \delta$$

bo'ladi.  $\varepsilon$  va  $\delta$  larning ixtiyoriyligidan  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy elementlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. 4- teoremaning yetarliligi isbotlandi. Teoremaning zarurligi yuqorida aytib o'tgan mulohazaga asosan, aniqdir. 4- teorema isbotlandi.

Isbotlangan teoremadan quydagi natija kelib chiqadi;

**Natija.** X fazoda  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi X fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishi uchun quydagi

1)  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  ketma-ketlik taqsimotlari sust kompakt;

2) Barcha  $x^* \in T$  ( $T - X$  dagi qandaydir total to'plam) lar uchun

$$x^*(\xi_n) \xrightarrow{P} x^*(\xi)$$

shartlarni bajarilishi zarur va yetarlidir.

## II bob. $L_p(\Pi)$ fazoda tasodifiy maydonlar taqsimotlarining yaqinlashishi

Bu bobda  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazoda  $\xi_n(t)$ ,  $t \in \Pi$ ,  $n \geq 1$ , tasodifiy maydonlar taqsimotlarining sust yaqinlashishi va shu tasodifiy maydonlardan tuzilgan qatorlarning  $L_p(\Pi)$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishi uchun yetarli shartlar bayon qilinadi. Olingan natijalar  $\Pi = [0,1] \subset R^1$  bo'lganda tasodifiy prosesslar uchun [6]<sup>10</sup> ishda keltirilgan natijalarni tasodifiy maydonlar uchun umumlashtiradi.

### 1 §. $L_p(\Pi)$ fazoda ehtimollik o'lchovlari

1.  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazo.

Aytaylik,  $\Pi = [0,1]^m \subset R^m$  bo'lsin.  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , orqali  $\Pi$  to'plamda berilgan va

$$\int_{\Pi} |\varphi(t)|^p dt < \infty$$

shartni qanoatlantiruvchi haqiqiy o'lchovli funksiyalar fazosini belgilaymiz. Ma'lumki [9]<sup>11</sup>,  $L_p(\Pi)$  fazo

$$\|\varphi\|_p = \left( \int_{\Pi} |\varphi(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

norma bilan separabel Banax fazosi bo'ladi.

---

<sup>10</sup> Дзигава М.С. Достаточные условия сходимости распределений в пространствах Соболева. Дипломная работа КГУ, 1980 г.

<sup>11</sup> Люстерник А.А, Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М. Наука. 1965 г.

**Ta'rif:** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  uchun  $\exists \delta > 0$  bo'lib  $\|h\| < \delta$  bo'lganda

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_p < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $\varphi \in L_p(\Pi)$  funksiyani to'la uzluksiz deyiladi..

**5-teorema** [10].  $L_p(\Pi)$ ,  $1 < p < \infty$ , fazoga tegishli har qanday  $\varphi$  funksiya uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\varphi(\cdot + h) - \varphi(\cdot)\|_p = 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi, ya'ni  $\Pi$  to'plamdagi har qanday  $\varphi \in L_p(\Pi)$  funksiya to'la, ma'noda uzluksiz bo'ladi.

**Isbot.** Muhokamani sodda bo'lishligi uchun  $\varphi$  funksiyani  $\Pi$  dan tashqarida nolga teng deb olamiz, Lebeg integralini absolyut uzluksizligidan berilgan  $\varepsilon$  bo'yicha shunday  $\delta_1(\varepsilon)$  ni ko'rsatishimiz mumkinki  $m\Pi < \delta_1(\varepsilon)$  bo'lganda

$$\int_{\Pi} |\varphi|^p dv < \infty$$

bo'ladi. Integrallanuvchi funksiyaning ta'rifiga ko'ra shunday  $F_\delta$  yopiq to'plamni tanlashimiz mumkinki,  $\varphi$  funksiya  $F_\delta$  da uzluksiz va  $mF_\delta > m_1 \Pi - \frac{\delta_1}{2}$ ,  $F_\delta \subset \Pi$  bo'ladi. Veyershtrass teoremasiga asosan  $\varphi$  funksiya  $F_\delta$  yopiq to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi, bu degani agar  $P$  va  $P+Q$  (bu yerda  $P, Q \in \Pi$ ) nuqtalarning ikkalasi  $F_\delta$  ga tegishli bo'lsa, u holda  $|Q| < \delta_2(\varepsilon)$  deb olib, biz

$$|\varphi(P+Q) - \varphi(P)|^p < \frac{\varepsilon^p}{m\Pi}$$

ga ega bo'lamiz ( bu erda  $m\Pi - \Pi$  to'planning o'lchovi ).

Aytaylik ,  $F_\delta^Q - F_\delta$  to'plamni  $-\Pi$  ga siljitishdan hosil bo'lgan to'plam bo'lsin.  $F_\delta$ ,  $F_\delta^Q$  va  $\Pi$  to'plamlarni bir  $K$  shar ichiga kiritamiz va quyidagi

$$F_\delta^1 = (K - \Pi) + F_\delta, \quad F_\delta^{Q(1)} = (K - \Pi) + F_\delta^Q$$

to'plamlarni tuzamiz . Bu to'plamlarning har birini o'lchovi  $K$  to'planning o'lchoviga keraklicha yaqin bo'ladi. Quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} m[(K - \Pi) + F_\delta] &= m[K - (\Pi - F_\delta)] > mK - \frac{\delta_1(\varepsilon)}{2} \\ m[(K - \Pi) + F_\delta^Q] &= m[K - (\Pi - F_\delta^Q)] > mK - \frac{\delta_1(\varepsilon)}{2} \end{aligned} \right\}$$

$F_\delta^* = F_\delta^1 \cdot F_\delta^{Q(1)}$  kesishmani tuzamiz. Ravshanki ,

$$mF_\delta^* > mF_\delta^1 + mF_\delta^{Q(1)} - mK > mK - \delta_1(\varepsilon)$$

shuning uchun

$$m(K - F_\delta^*) < \delta_1(\varepsilon)$$

bo'ladi. Quyidagiga ega bo'lamiz :

$$\begin{aligned} \left[ \int_K |\varphi(P+Q) - \varphi(P)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} &\leq \left[ \int_{F_\delta^*} |\varphi(P+Q) - \varphi(P)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} + \\ &+ \left[ \int_{K-F_\delta^*} |\varphi(P+Q)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_{K-F_\delta^*} |\varphi(P)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Tengsizlikning o'ng tomonidagi integrallardan birinchisidan integral ostidagi funksiya  $\frac{\varepsilon^p}{m\Pi}$  dan kichik, chunki unda  $P$  va  $P+Q$  nuqtalarning ikkalasi  $F_\delta$  ga tegishli bo'ladi. Ikkinchi va uchinchi integrallar,  $\int_{\Pi} |\varphi|^p dv$  integralni absolyut uzluksizligiga asosan kichik bo'ladi. Bundan teorema isboti kelib chiqadi.

**Riss teoremasi** [10]<sup>12</sup>.  $L_p(\Pi)$  fazodan olingan funksiyalar to'plami  $M$  kompakt bo'lishligi uchun quydagi:

$$1) \text{ barcha } \varphi \in M \text{ funksiyalar uchun } \|\varphi\| < A; \quad (4)$$

2)  $M$  to'plam butun tekis darajada uzluksiz, ya'ni har qanday  $\varepsilon > 0$  shunday  $\delta(\varepsilon) > 0$  topilib barcha  $\varphi \in M$  lar uchun faqat  $|Q| < \delta(\varepsilon)$  bo'lganda

$$J(Q) = \int_{\Pi} |\varphi(P+Q) - \varphi(P)|^p dv < \varepsilon \quad (5)$$

Teoremani isbotlash uchun quydagi lemma zarur bo'ladi.

**Lemma.**  $M \subset L_p(\Pi)$  to'plam kompakt (norma ma'nosida) bo'lishligi uchun har qanday  $\varepsilon > 0$  uchun  $M$  da chekli  $\varepsilon$ -to'rini mavjud bo'lishi (ya'ni chekli sondagi  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N(\varepsilon)}$  funksiyalar to'ri topilib har qanday  $\varphi \in M$  uchun to'rning funksiyalar orasida shunday  $\varphi_S$  funksiya topilib  $\|\varphi - \varphi_S\| < \varepsilon$  tengsizlik o'rinli bo'ladi, zarur va yetarlidir.

Zarurligini isboti. Aytaylik shunday  $\varepsilon_0 > 0$  mavjud bo'lib, uning uchun chekli  $\varepsilon$ -to'rni ko'rish mumkin bo'lmasin. Bu yerda  $\varphi_1 \in M$  element qanday bo'lmasin shunday  $\varphi_2 \in M$  element topilib,  $\|\varphi_1 - \varphi_2\| > \varepsilon_0$  bo'ladi.  $\varphi_1$  va  $\varphi_2$  elementlar  $\varepsilon_0$ -to'r bo'lmaydi, shuning uchun shunday  $\varphi_3 \in M$  element topilib,

<sup>12</sup> Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике». Из-во ЛГУ, 1950 г

$$\|\varphi_1 - \varphi_3\| > \varepsilon_0 \quad \text{va} \quad \|\varphi_2 - \varphi_3\| > \varepsilon_0$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Muhakamani shunday davom ettirib,  $i \neq k$  uchun  $\|\varphi_i - \varphi_k\| > \varepsilon_0$  o'rinli bo'lgan  $\{\varphi_k\} \subset M$  cheksiz ketma-ketlikni hosil qilamiz. Aniqki, bu ketma-ketlikdan kuchli yaqinlashuvchi (norma bo'yicha yaqinlashuvchi) qisman ketma-ketlikni ajratib bo'lmaydi, bu esa yuqoridagi farazimizga zarurdir. Shartlarning zarurligi isbotlandi.

Yetarliligi. Aytaylik  $M$  shunday to'plam bo'lsinki, unda har qanday  $\varepsilon > 0$  uchun chekli  $\varepsilon$ -to'rnini kurish mumkin bo'lsin ( $M$  ning ixtiyoriy qismi uchun yanada mumkin bo'ladi.). Aytaylik  $M_1 \subset M$  ixtiyoriy cheksiz to'plam bo'lsin.

Unda  $\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{N_1}^{(1)}$  dan  $\frac{1}{2}$ -to'rnini ko'ramiz. Har qanday

$\varphi \in M_1$  uchun shunday  $\varphi_k^{(1)}$  funksiya topilib  $\|\varphi - \varphi_k^{(1)}\| < \frac{1}{2}$  o'rinli bo'ladi.

Aytaylik  $M_1^{(s)} - M_1$  to'plamga tegishli va  $\varphi_S^{(1)}$  dan  $\frac{1}{2^2}$  kichik masofaga

ega funksiyalar to'plami bo'lsin.  $M_1$  cheksiz to'plam bo'lganligidan  $M_1^{(s)}$  to'plamlardan kamida bittasi cheksiz bo'ladi. Bu to'plamni  $M_2$  orqali

belgilab, unda  $\frac{1}{2^2}$ -to'rnini kuramiz. Bu jarayonni takrorlab, ikkinchi

qadamda  $M_k \subset M_{k-1} \subset \dots \subset M_2 \subset M_1$  to'plamlarni va ularda  $\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \dots, \varphi_{N_k}^{(k)}$

lardan iborat  $\frac{1}{2^k}$  to'rnini hosil qilamiz. Aytaylik  $\varphi', \varphi'' \in M_k$  bo'lsin, u

holda

$$\|\varphi' - \varphi''\| \leq \|\varphi' - \varphi_k\| + \|\varphi'' - \varphi_k\| \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

ya'ni oralaridagi masofaga  $\frac{1}{2^{k-1}}$  dan kichik bo'lgan ixtiyoriy ikkita

$\varphi', \varphi'' \in M_k$  funksiyalarni olamiz.

Yetarlicha katta  $k$  lar uchun  $\|\varphi_{k+m} - \varphi_k\| < \frac{1}{2^{k-1}} \varepsilon$  bo'lganligidan  $\varphi_k \in M_k$  bo'lgan  $\{\varphi_k\}$  funksiyalar ketma-ketligi kuchli yaqinlashadi. (ixtiyoriy  $m$  da  $\varphi_{k+m} \in M_{k+m} \subset M_k$ )

Shunday qilib,  $M_1 \subset M$  dan biz kuchli yaqinlashuvchi ketma-ketlikni ajratdik, shuning uchun  $M$  to'plam kompakt bo'ladi.

Lemma isbotlandi.

Teorema isboti. (4 va (5) shartlarni qanoatlantiruvchi  $M = \{\varphi\}$  to'plamni qaraymiz. Qulaylik uchun, shunday  $\Pi_1 \subset \Pi$  sohani kiritamizki, markazi  $\Pi$  da  $h < \delta$  radiusli ixtiyoriy shar to'laligicha  $\Pi_1$  ichida yotsin. Aytaylik  $\Pi$  dan tashqarida  $\varphi = 0$  bo'lsin. Barcha  $\varphi \in M$  funksiyalar o'rta funksiyalar to'plamini  $\omega(Q, h)$  yadrolar to'plami ([10]) ni ko'ramiz.

$$\varphi_k(P) = \frac{1}{h^n} \int_{\Pi_1} \varphi(P) \omega(P - P_1, h) dv_1$$

[10]<sup>13</sup> ishning 2-§, 4- punktidagi baho bo'yicha  $\|\varphi_h - \varphi\| < CJ_\varphi(h)$ , bu yerda  $C$  funksiyalar to'plamini tanlashga va yadroning  $h$  parametriga bog'liq bo'lmaydi.  $J_\varphi(h)$  esa  $J_\varphi(h) = \sup_{|Q| \leq h} J_\varphi(Q)$  ga teng bo'ladi.

(5) shart bo'yicha berilgan  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta(\varepsilon) > 0$  son topilib  $h \leq \delta(\varepsilon)$  bo'lganda barcha  $\varphi \in M$  funksiyalar uchun

$$\|\varphi_h - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda  $\{\varphi_k\}$  uchun  $\frac{\varepsilon}{2}$ -to'r  $\{\varphi\}$  lar uchun ham  $\varepsilon$ -to'r bo'ladi. Agar biz o'rta funksiyalar to'plamini kompakt bo'lishini

<sup>13</sup> Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике». Из-во ЛГУ, 1950 г

ko'rsatsak, u holda lemmaga asosan o'rta funksiyalar uchun chekli  $\frac{\varepsilon}{2}$ - to'rini mavjud bo'lishligi kelib chiqadi

Demak  $M$  to'plamda  $\forall \varepsilon$  uchun chekli  $\varepsilon$  to'rni ko'rish mumkin bo'ladi. Yuqorida keltirilgan lemmaga asosan  $M$  to'plam kompakt bo'ladi.  $\{\varphi_k\}$  to'plamni kompakt bo'lishligi uchun berilgan  $h$  da  $\{\varphi_k\}$  ni tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lishligini ko'rsatamiz. U holda Arsiel teoremasiga ko'ra  $\{\varphi_k\}$  to'plam tekis yaqinlashish ma'nosida kompakt bo'ladi, bundan esa  $L_p(\Pi)$  ma'nosida ham kompakt bo'ladi. Ammo  $|Q|$  yetarlicha kichik bo'lganda, yadroni uzluksizligidan

$$|\omega_h(P_1 - P - Q) - \omega_h(P_1 - P)| < \eta$$

bo'ladi, bu yerdan esa

$$\begin{aligned} |\varphi_h(P + Q) - \varphi_h(P)| &= \left| \frac{1}{\chi h^n} \int_{\Pi} \varphi(P_1) \omega_h[P_1 - P - Q] - \omega_h(P_1 - P) dv_1 \right| \leq \\ &\leq \frac{\eta}{\chi h^n} \left\{ \int_{\Pi} |\varphi(P)|^p dv_1 \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\chi h^n} \|\varphi\| \leq A \cdot \frac{\eta}{\chi h^n} \end{aligned}$$

bo'ladi va  $|Q|$  etarlicha kichik bo'lganda va tayinlangan  $h$  ga

$$|\varphi_h(P + Q) - \varphi_h(P)| < \varepsilon$$

bo'ladi, ya'ni  $\{\varphi_k\}$  to'lam tekis darajasida uzluksiz bo'ladi.

$\{\varphi_k\}$  to'plamni tekis chegaralanganligi quydagi bahosidan kelib chiqadi;

$$|\varphi_h(P)| \leq \left\{ \frac{1}{\chi h^n} \left[ \int_{\Pi} |\omega(P_1 - P)|^p dv_1 \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_{\Pi} |\varphi(P_1)|^p dv_1 \right]^{\frac{1}{p}} \right\} < \frac{c}{\chi} A$$

Shunday qilib  $\{\varphi_k\}$  to'plam kompakt bo'ladi va lemmaga asosan unda chekli  $\frac{\varepsilon}{2}$ - to'r ko'rishimiz mumkin bo'ladi. Bu  $\frac{\varepsilon}{2}$ - to'r  $M$  to'plam uchun chekli  $\varepsilon$  - to'rdan iborat bo'ladi. Shuning uchun lemmaga asosan  $M$  to'plam kuchli kompakt bo'ladi.

Teoremaning yeterlilik isbotlandi.

Zarurligi. Aytaylik  $M$  kuchli kompakt bo'lsin, u holda u sust kompakt ham bo'ladi va sust kompaktlik haqidagi teorema asosan ([10], 34 bet)<sup>14</sup> barcha  $\varphi \in M$  lar uchun  $\|\varphi\| < A$  bo'ladi, ya'ni teoremaning (4) shartini zarurligi isbotlandi.

Lemmaga asosan  $\{\varphi_k\}$  ( $k=1, \dots, N$ ) iborat  $\frac{\varepsilon}{3}$  - to'r mavjud bo'ladi. Har bir  $\varphi_k$  funksiya to'la uzluksiz bo'ladi, ular chekli sonda bo'lganligidan berilgan  $\varepsilon > 0$  bo'yicha shunday  $\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) > 0$  ni ko'rsatishimiz mumkinki, faqat  $|Q| < \delta$  bo'lgandagina

$$\left[ \int_{\Pi} |\varphi_k(P+Q) - \varphi_k(P)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}, \quad (k=1, \dots, N)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

$M$  to'plamdan ixtiyoriy  $\varphi$  funksiyani va  $\frac{\varepsilon}{3}$  - to'rdan unga yaqin bo'lgan  $\varphi_k$  funksiyani olamiz. Minkoviski tengsizligini qo'llab,  $|Q| < \delta$  bo'lganda quyidagi:

$$\begin{aligned} & \left[ \int_{\Pi} |\varphi_k(P+Q) - \varphi_k(P)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} = \\ & = \left[ \int_{\Pi} |\varphi(P+Q) - \varphi_k(P+Q) + \varphi_k(P+Q) - \varphi_k(P) + \varphi_k(P) - \varphi(P)|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} \leq \end{aligned}$$

<sup>14</sup> Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике». Из-во ЛГУ, 1950 г

$$\leq \left[ \int_{\Pi} |\varphi(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) - \varphi_k(\mathbf{P} + \mathbf{Q})|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_{\Pi} |\varphi_k(\mathbf{P} + \mathbf{Q}) - \varphi_k(\mathbf{P})|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[ \int_{\Pi} |\varphi_k(\mathbf{P}) - \varphi(\mathbf{P})|^p dv \right]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon ]$$

munosabatni olamiz, ya'ni berilgan  $\varepsilon > 0$  bo'yicha barcha  $\varphi \in M$  lar uchun shunday  $\delta$  ni ko'rsatishimiz mumkinki faqat  $|\bar{Q}| < \delta$  bo'lganda  $J_{\varphi}(Q) < \varepsilon$  bo'ladi, ya'ni (5) shartni zarurligi isbatlanadi.

$L_p(\Pi)$  fazoda kompaktlarni tasvirlash ( xarakterizasiyalash ) kelgusida  $L_p(\Pi)$  fazoda tasodifiy miqdorlarni ( elementlarni ) sust yaqinlashishi va  $L_p(\Pi)$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishni ta'minlovchi shartlarni o'rganishda zarur bo'ladi.

### **$L_p$ fazoda chiziqli funksionallar.**

Agar har bir  $\varphi \in L_p$  uchun  $l(\varphi)$  son mos qo'yilgan bo'lsa, u holda  $l(\varphi)$   $\varphi$  funksiyaning funksionali deyiladi. Funksionallarni qo'shish va songa ko'paytirish mumkin :

$$l(a\varphi) = al(\varphi)$$

$$(l_1 + l_2)\varphi = l_1(\varphi) + l_2(\varphi)$$

**Ta'rif** Agar  $l(\varphi)$  funksional uchun

1) distributivligi:

$$l(af_1 + bf_2) = al(f_1) + bl(f_2)$$

2) uzluksizlik:

$$\text{agar } \varphi_k \rightarrow \varphi \Rightarrow l(\varphi_k) \rightarrow l(\varphi)$$

shartlarini bajarilsa,  $l(\varphi)$  ni  $L_p$  fazoda chiziqli funksional deyiladi.

Agar shunday  $M > 0$  doimiy son mavjud bo'lib, har qanday  $\varphi \in L_p$  uchun

$$|l(\varphi)| \leq M \|\varphi\|$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa,  $l(\varphi)$  funksionalni chegaralangan deyiladi. Bu yerda

$$\|\varphi\| = \left[ \int |\varphi|^p d\nu \right]^{\frac{1}{p}}$$

$\varphi$  funksiyaning  $L_p$  dagi normasidir.

**Teorema** [10]  $L_p$  da fazoda chiziqli funksionalning umumiy ko'rinishi

$$l(\varphi) = \int_{\Pi} \Psi \varphi d\nu$$

tenglikdan iborat bo'ladi

$L_p(\Pi)$  fazoda o'lchovlar

Aytaylik biror  $(\Omega, F, P)$  ehtimollik fazosi tayinlangan bo'lsin.  $\Pi$  to'plamda aniqlangan  $\xi(t, \omega)$  tasodifiy prosess (maydon) ga  $L_p(\Pi)$  fazosida o'lchov mos kelishlik shartlarini o'rganamiz.  $\xi(t, \omega) : \Omega \rightarrow L_p(\Pi)$  o'lchovli akislantirishni qaraymiz. Faraz qilaylik  $\xi(t, \omega)$  tasodifiy maydon  $p$  tartibli o'rta ma'noda uzluksiz bo'lsin.

Ma'lumki [3]<sup>15</sup>, bu holda  $\xi(t, \omega)$  tasodifiy maydonga ekvivalent bo'lgan o'lchovli tasodifiy maydon mavjud bo'ladi. Fubini teoremasiga ko'ra

---

<sup>15</sup> Гихман И.И., Скороход А.В., Теория случайных процессов. 392 б.т-1, М. Наука. 1971 г.

$\xi(t, \omega)$   $t$  ning funksiyasi sifatida 1 ehtimol bilan o'lchovli bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_{\Pi} |\xi(t)|^p dt$$

integral 1 ehtimollik bilan aniqlangan bo'ladi.

Faraz qilaylik

$$P \left\{ \int_{\Pi} |\xi(t, \omega)|^p dt < \infty \right\} = 1 \quad (6)$$

bo'lsin. Bu shartda  $L_p(\Pi)$  fazoda  $\xi(t, \omega)$  tasodifiy maydon hosil qilgan  $\mu$  o'lchovni qurish mumkin bo'ladi .

Aytaylik  $\xi(t, \omega)$  tasodifiy maydonning deyarli barcha tanlanma funksiyalari  $L_p(\Pi)$  fazoga tegishli bo'lsin.  $\xi(t, \omega)$  maydonning tanlanma funksiyalari  $L_p(\Pi)$  ga kirmaydigan  $\omega \in \Pi$  lar uchun  $\xi(t, \omega)$  ni qiymatlarini qaytadan aniqlab, barcha tanlanma funksiyalari  $L_p(\Pi)$  ga tegishli bo'lgan o'lchovli tasodifiy maydonga o'tamiz.  $\xi(t, \omega)$  ,  $t \in \Pi$  tasodifiy maydon hosil qilgan  $\mu$  o'lchovni  $L_p(\Pi)$  fazodagi har bir  $B$  borel to'plami uchun

$$\mu(B) = P\{\xi(t, \omega) \in B\} \quad (7)$$

ko'rinishda aniqlaymiz. Bu  $\mu$  ehtimollik o'lchovi.  $\xi(t, \omega)$ ,  $t \in \Pi$ , tasodifiy maydonning taqsimoti deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, (7) munosabatni  $\mu$  o'lchov ta'rifi sifatida qabul qilishlik uchun  $\{\omega: \xi(\cdot) \in B\} \in F$  shartni  $B \in G$  (bu erda  $G$   $L_p(\Pi)$  fazosidagi borel to'plamlarining  $\sigma$ -algebrasi) bo'lganda bajarilishini ko'rsatishimiz kerak bo'ladi. Buning uchun  $L_p(\Pi)$  fazoda aniqlangan

$$l(x) = \int_{\Pi} l(t)x(t)dt$$

ko'rinishdagi funksionallarning  $Z$  sinfini qaraymiz ( bu yerda  $l(t)$  chegaralangan o'lchovli funksiyadir ).  $Z$  sinfdan olingan funksionallar  $p \geq 1$  bo'lganda  $L_p(\Pi)$  fazoda aniqlangan bo'ladi va  $p$  qanday bo'lmasin  $Z$  sinf chiziqli uzluksiz funksionallar fazosida zich bo'ladi .  $G_0$  orqali  $G$   $\sigma$ -algebradan olingan va ular uchun  $\{\omega: \xi(\cdot) \in B\} \in F$  bo'lgan  $B$  lar to'plamini belgilaymiz .

Ravshanki,  $G_0$  ham  $\sigma$ -algebradan iborat bo'ladi. Har qanday  $l \in Z$  uchun  $l(\xi(\cdot, \omega))$  tasodifiy miqdor  $F$  ga nisbatan o'lchovli bo'ladi. Shuning uchun  $G_0$   $\sigma$ -algebra,  $L_p(\Pi)$  dagi barcha uzluksiz chiziqli funksionallar o'lchovli bo'lgan minimal  $\sigma$ -algebra bilan ustma-ust tushadi, o'z navbatida bu  $\sigma$ -algebra  $G$   $\sigma$ -algebra bilan ham ustma-ust tushadi. Shunday qilib (2) munosabat biror  $\mu$  o'lchovni aniqlaydi.  $L_p(\Pi)$  dagi har qanday  $l$  funksional uchun  $l(\xi(\cdot, \omega))$  tasodifiy miqdor  $F$   $\sigma$ -algebraga nisbatan o'lchovli bo'lganligidan,  $\mu$  o'lchovni ushbu

$$\varphi(l) = \int e^{il(x)} \mu(dx) = Me^{il(\xi(\cdot, \omega))} \quad (8)$$

xarakteristik funksional yordamida berishimiz mumkin. Bu xarakteristik funksional  $\mu$  o'lchovli bir qimarli aniqlaydi. Hozirgina ko'rilgan  $\mu$  o'lchovni  $\xi(t, \omega)$  tasodifiy prosess (maydon) ning chekli o'lchovli taqsimoti bilan qanday bog'langan savol tug'iladi. Boshqa so'z bilan aytganda  $\xi(t, \omega)$  ni xususiy taqsimoti bo'yicha  $\mu$  o'lchovni ko'rish va  $\mu$  o'lchov bo'yicha  $\xi(t, \omega)$  ning taqsimotini ko'rish mumkinmi? degan savol tug'iladi. O'lchovli stoxastik uzluksiz prosesslar (maydonlar) uchun bu savolga javob aniqdir.  $\Pi = [a, b]$  bo'lganda shu masalani qarab chiqaylik.

[3] ishda ma'lumki, stixastik uzluksiz o'lchovli proses uchun unga ekvivalent bo'lgan o'lchovli proses hamma vaqt mavjud bo'ladi.

Aytaylik

$$\xi_N(t, \omega) = g_N(\xi(t, \omega)); \quad g_N(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq N \\ N \operatorname{sign} x, & |x| > N \end{cases}$$

bo'lsin. U holda  $N \rightarrow \infty$  da barcha  $\omega$  lar uchun

$$\int_a^b |\xi_N(t, \omega)| dt \rightarrow \int_a^b |\xi(t, \omega)| dt$$

Munosabat o'rinli bo'ladi.  $\xi_N(t, \omega)$  tasodifiy proses ham stoxastik uzluksiz bo'ladi.

$$\int_a^b |\xi_N(t, \omega)| dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_N(t, \omega) \Delta t_k \quad (9)$$

bu yerda  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ,  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ ,  $\lambda = \max_k \Delta t_k$ ,

bo'lishligini ko'rsataylik (limit ehtimol bo'yicha yaqinlashish ma'nosida tushuniladi).

Ushbu

$$M \left| \int_a^b \xi_N(t, \omega) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \xi_N(t, \omega) \Delta t_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M |\xi_N(t, \omega) - \xi_N(t_k, \omega)| \Delta t_k \leq$$

$$\leq \varepsilon (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} 2N \int_{t_k}^{t_{k+1}} P \{ |\xi_N(t, \omega) - \xi_N(t_k, \omega)| > \varepsilon \} dt \leq$$

$$\leq \varepsilon (b-a) + 2N (b-a) \sup [P \{ |\xi_N(t, \omega) - \xi_N(s, \omega)| > \varepsilon \}; |t-s| \leq \lambda]$$

( $\varepsilon > 0$  qanday bo'lsin) munosabatga ega bo'lamiz.  $\lambda \rightarrow 0$  da limitga o'tib,  $\xi_N(t)$  ni stoxastin uzluksizligini va  $\varepsilon > 0$  ni ixtiyoriligini hisobga olsak (9) tenglikni o'rinliligiga ishonch hosil qilamiz. Shunga o'xshash

$$\int_a^b |\xi(t, \omega)|^p dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |\xi_N(t_k, \omega)|^p \Delta t_k \quad (10)$$

o'rinli bo'ladi, bundan esa (1) shartni bajarilishini  $\xi(t, \omega)$  prosesning chekli o'lchovli taqsimotlari yordamida tekshirilishi mumkin bo'ladi. Agar (6) bajarilsa, u holda  $[a, b]$  dagi har qanday  $l(t)$  funksiya uchun o'rinli bo'lgan

$$\int_a^b l(t) \xi(t, \omega) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} l(t_k) \xi_N(t_k, \omega) \Delta t_k \quad (11)$$

tenglikni qo'llab, barcha uzluksiz  $l(t)$  lar uchun

$$\chi(l) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \rightarrow 0} M \exp \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} l(t_k) \xi_N(t_k, \omega) \Delta t_k \right\} \quad (12)$$

tenglikni aniqlashimiz mumkin.

$\chi(l)$  ning uzluksizligiga asosan (12) tenglik barcha

$$\chi(l) = \int_a^b l(t) x(t) dt$$

funksionallar to'plami  $Z$  ning yopig'ida  $\chi(t)$  ning qimatlarini aniqlaydi ( bu yerda  $l(t)$  funksiya uzluksizdir).  $Z$  to'plam  $L_p$  da uzluksiz bo'lgan barcha funksionallar fazosida hamma erda zich bo'lganligidan  $\chi(t)$  (12) munosabat bilan to'la aniqlanadi. Aksincha faraz qilaylik  $[a, b]$  da stoxastik uzluksiz bo'lgan  $\xi(t, \omega)$  o'lchovli proses uchun (6) shart bajarilsin va  $L_p$  da  $\mu$  o'lchov berilgan ( yoki  $\chi(t)$  xarakteristik funksional aniqlangan ) bo'lsin . Aytaylik  $l(t)$  biror uzluksiz funksiya,  $N > 0$  va  $n$  – natural son bo'lsin

$$t_{nk} = a + \frac{k}{n}(b-a) ,$$

$$J_{n,N}(l) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} l(t_{nk}) g_N \left( \frac{1}{t_{nk+1} - t_{nk}} \cdot \int_{t_{nk}} \xi(t, \omega) dt \right)$$

deb olaylik. Deyarli barcha  $\omega$  lar uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_{n,N}(l) = \int_a^b l(t) \xi_N(t, \omega) dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun  $L_p$  fazoda qaralayotgan  $\xi_N(t, \omega)$  prosesning  $\chi_N(l)$  xarakteristik funksional uchun har qanday  $l(t)$  uzluksiz funksiya bo'lganda

$$\chi_N(l) = M \exp \left\{ i \int_a^b l(t) \xi_N(t, \omega) dt \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int e^{i J_{n,N}(l, x)} \mu(dx)$$

(bu yerda  $l, J_{n,N}(l, x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} l(t_{n,k}) g_N \left( \frac{n}{b-a} \int_{t_{nk}}^{t_{nk+1}} x(t) dt \right)$ ) uzluksiz.

Demak,  $L_p$  da  $G$ - o'lchovli funksional munosabat o'rinli bo'ldi.  $\chi_N(l)$  funksionalni uzluksizlik bo'yicha  $Z$  ga davom ettirish mumkin.

Endi  $h \rightarrow 0$  ga ehtimol bo'yicha

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \xi_N(t, \omega) dt \rightarrow \xi_N(t, \omega) \quad (13)$$

bo'lishligini ko'rsataylik.

Haqiqattan ham,

$$\begin{aligned} M \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \xi_N(s, \omega) dt \rightarrow \xi_N(t, \omega) \right| &\leq \\ &\leq \varepsilon + 2N \sup \left[ P \left\{ \left| \xi_N(s, \omega) - \xi_N(t, \omega) \right| > \varepsilon \right\} : t < s < t+h \right] \end{aligned}$$

munosabat o'rinli.  $\varepsilon > 0$ ,  $h > 0$  larni tanlash hisobiga oxirgi ifodani keraklicha kichik qilib olishimiz mumkin.

$l_{t_k, h}(x)$  orqali  $L_p$  da

$$l_{t_k, h}(x) = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_k+h} x(t) dt$$

tenglik bilan aniqlanuvchi funksionalni belgilaylik. U holda (13)

munosabatdan, barcha haqiqiy  $u_k$  va  $[a, b]$  dan olingan  $t_1 < \dots < t_n$

nuqtalar uchun

$$M \exp \{ i u_k \xi_N(t_k, \omega) \} = \lim_{h \rightarrow 0} \chi_N \left( \sum_{k=1}^n u_k l_{t_k, h}(\xi_N(\cdot)) \right) \quad (14)$$

tenglik kelib chiqadi. (14) munosabat  $\xi_N(t, \omega)$  prosesning chekli o'lchovi taqsimotlarini aniqlaydi.  $N \rightarrow \infty$  da limitga o'tish  $\xi(t, \omega)$  prosesning chekli o'lchovi taqsimotlarini topishga imkon beradi.

Aytaylik  $\xi_n(t)$ ,  $t \in \Pi$ ,  $n \geq 1$ ,  $(\Omega, F, P)$  ehtimollik fazosida berilgan va o'lchovli tasodifiy maydonlar ketma-ketligi bo'lsin va

$$P \left\{ \int_{\Pi} |\xi_n(t)|^p dt < \infty \right\} = 1$$

Shart bajarilsin. U holda  $L_p(\Pi)$  fazoda  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 1$  tasodifiy maydonlarga mos keluvchi  $\mu_n$ ,  $n \geq 1$ , o'lchovlarni ko'rishimiz mumkin. Bu degani  $L_p(\Pi)$  fazodagi har qanday  $B$  barel to'plami uchun  $\mu_n$  o'lchovni

$$\mu_n(B) = P\{\xi_n(t) \in B\}$$

ko'rinishda aniqlaymiz.

$\mu_n$ ,  $n \geq 1$ , o'lchovlar  $\xi_n(t)$ ,  $n \geq 1$  tasodifiy maydonlarning taqsimotlari deyiladi.

## 2 §. $L_p(\Pi)$ fazoda tasodifiy maydonlar taqsimotlarining sust yaqinlashishi.

**6- teorema.** Aytaylik  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlarning chekli o'lchovli taqsimotlari  $\xi(t)$  tasodifiy maydonning chekli o'lchovli taqsimotiga yaqinlashsin.

$L_p(\Pi)$  qiimmatli  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligini biror  $L_p(\Pi)$  qiimmatli  $\xi(t)$  tasodifiy maydonga sust yaqinlashishi uchun

$\forall \varepsilon > 0, \|t_1 - t_2\|_{Rn} \leq h$  bo'lgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n P \left\{ \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\| > \varepsilon \right\} = 0$$

bo'lishligi zarur va yetarlidir.

**Isbot.** Zarurligi. Agar teoremaning tasdiqi bajarilsa, u holda 3 - teorema va 2- izohga asosan  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar hosil  $\{\mu_n(t), n \geq 1\}$  qilgan o'lchovlar ketma-ketligi sust kompakt bo'ladi. Shuning uchun har qanday  $\eta > 0$  uchun  $L_p(\Pi)$  fazoda shunday  $K_\eta$  kompakt to'plam mavjud bo'lib, uning uchun

$$\sup_n \mu_n(K_\eta) \geq 1 - \eta$$

bo'ladi.

Aytaylik  $N$  biror doimiy son,  $\omega_h, h > 0$  da aniqlangan funksiya bo'lib,  $h \downarrow 0$  da  $\omega_h \downarrow 0$  bo'lsin.

$L_p(\Pi)$  fazodan olingan

$$\sup_n \|\varphi\|_p \leq N \quad \text{va} \quad \forall h > 0, \quad \|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h$$

lar uchun

$$\|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| \leq \omega_h$$

shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plamini  $K(N, \omega_h)$  orqali belgilaymiz. Ravshanki,  $K(N, \omega_h)$  to'plam  $L_p(\Pi)$  fazoda kompakt bo'ladi.

Shuning uchun

$$\begin{aligned} \sup_n P \left\{ \sup_{\|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h} \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\| > \omega_h \right\} &\leq \\ &\leq P \left\{ \xi_n(t) \notin K(N, \omega_h) \right\} \leq \eta \end{aligned}$$

bo'ladi. Agar  $h$  yetarlicha kichik bo'lsa, u holda  $\forall \varepsilon > 0$  uchun  $\omega_h \leq \varepsilon$  va

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n P \left\{ \sup_{\|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h} \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\| > \varepsilon \right\} = 0$$

bo'ladi.

Yetarliligi. 3 - teorema va 2-izohga asosan  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlarga mos kelgan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligini sust kompakt bo'lishini ko'rsatish kifoyadir, ya'ni ixtiyoriy  $\eta > 0$  uchun  $L_p(\Pi)$  fazoda shunday  $K(N, \omega_h)$  kompakt mavjud bo'lib,

$$\sup_n P \left\{ \xi_n(t) \notin K(N, \omega_h) \right\} \leq \eta$$

bo'lishini ko'rsatamiz.

$\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlarning chekli o'lchovli taqsimotlari  $\xi(t)$  tasodifiy maydonning chekli o'lchovli taqsimotiga yaqinlashganligidan barcha  $t \in \Pi$  lar uchun shunday  $N$  mavjuud bo'lib, har qanday  $n \geq 1$  larda uchun

$$P \left\{ \left| \xi_n(t) > N \right| \right\} \leq \frac{\eta}{2}$$

bo'ladi.

Shuning uchun

$$P \left\{ \left\| \xi_n \right\| > N \right\} \leq P \left\{ \left| \xi_n(t) \right| > N \right\} \leq \frac{\eta}{2}$$

$r \rightarrow \infty$  da  $\varepsilon_r \rightarrow 0$   $\varepsilon_r > 0$  ketma-ketlikni olamiz. Har qanday  $\varepsilon_r$  uchun shunday  $h_r$  ni topamizki,  $h_r < h_{r-1}$  va

$$\sup_n P \left\{ \sup_{\|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h_r} \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\| > \varepsilon_r \right\} \leq \frac{h}{2^{r+1}}$$

Aytaylik,  $\omega_h$  funksiya manfimas, o'smovchi funksiya bo'lib, buning uchun  $h \in [h_{r-1}, h_r]$  bo'lganda  $\omega_h = \varepsilon_r$  bo'lsin, Ravshanki,  $h \downarrow 0$  da  $\omega_h \downarrow 0$  bo'ladi.

Bundan tashqari

$$P \left\{ \xi_n(t) \in K(N, \omega_h) \right\} \leq P \left\{ \left\| \xi_n(t) \right\| > N \right\} + \\ + \sum_{r=1}^{\infty} P \left\{ \sup_{\|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h_r} \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\| > \varepsilon_r \right\} \leq \frac{\eta}{2} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^{r+1}} = \eta$$

Teorema isbotlandi. Teoremadan  $\Pi = [0,1]$  bo'lganda [6]<sup>16</sup> ishdagi teorema kelib chiqadi.

Tadbiqlar uchun quydagi teorema qulaydir .

**7-teorema.** Aytaylik  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlarning chekli o'lchovli taqsimotlari  $\xi(t)$  tasodifiy maydonning chekli o'lchovli taqsimotiga yaqinlashsin va  $\|t_1 - t_2\| < h$  bo'lgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n M \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\|^p = 0 \quad (15)$$

bo'lsin. U holda  $L_p(\Pi)$  fazoda  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $\xi(t)$  tasodifiy maydonga sust yaqinlashadi.

**Isbot.** Teoremani isbotlash uchun  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi hosil qilgan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligini sust kompakt bo'lishligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan ham, har qanday  $\varepsilon > 0$  va  $\|t_1 - t_2\|_{Rm} \leq h$  bo'lgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun (15) ga asosan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n P \left\{ \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\| > \varepsilon \right\} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \sup_n \frac{M \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\|^p}{\varepsilon^p} = 0$$

bo'ladi. Shuning uchun 6-teoremaning isbotiga asosan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligi sust kompakt bo'ladi. 3-teoremaga asosan  $L_p(\Pi)$

<sup>16</sup>Дзигава М.С. Достаточные условия сходимости распределений в пространствах Соболева. Дипломная работа КГУ, 1980 г.

fazoda  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $\xi(t)$  tasodifiy maydonga sust yaqinlashadi.

Teorema isbotlandi.

**Natija.** Aytaylik  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  Gauss tasodifiy maydonlar ketma-ketligi bo'lib, barcha  $n$  lar uchun  $\{M\xi_n(t) = 0\}$  bo'lsin

$L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazoda  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  Gauss tasodifiy maydonlari uchun 7-teoremani quydagicha bayon qilishimiz mumkin ( $p=2k$ ,  $k$ -butun son).

Aytaylik

1)  $\xi_n(t)$  tasodifiy maydonlarning chekli o'lchovli taqsimotlari  $\xi(t)$  tasodifiy maydonning chekli o'lchovli taqsimotiga yaqinlashsin;

2)  $\|t_1 - t_2\|_{Rm} \leq h$  o'lchovli bo'lgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n M \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\|_{L_2}^2 = 0$$

bo'lsin.

U holda  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  Gauss tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $\xi(t)$  tasodifiy maydonga sust yaqinlashadi.

**Isbot.**  $\|t_1 - t_2\| \leq h$  uchun

$$\sup_n M \|\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)\|_p^{2k} \leq C_{2k} \sup_n \int_{\Pi} M |\xi_n(t_1) - \xi_n(t_2)|^2 dt$$

ni qaraymiz, bu erda

$$C_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$$

shuningdek

$$\sup_n \int_{\Pi} M \left| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right|^2 dt = \sup_n M \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\|_{L_2}^2$$

va

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n M \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\|_{L_2}^2 = 0$$

bo'lganligidan,  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar hosil qilgan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligi  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazoda sust kompakt bo'ladi va 6-teorema asosan  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  Gauss tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $\xi(t)$  tasodifiy maydonga sust yaqinlashadi.

Teorema isbotlandi.

Isbotlangan teorema va natija  $\Pi = [0, 1]$  bo'lganda tasodifiy proseslar uchun [6] ishda olingan.

### 3 §. $L_p(\Pi)$ , $p \geq 1$ , fazo normasida tasodifiy maydonlar taqsimotlarining ehtimol bo'yicha yaqinlashishi.

$L_p^*(\Pi)$  qo'shma fazoni ushbu

$$T = \{f_t(\xi(t)) = \xi(t), \xi(t) \in L_p(\Pi), t \in \Pi\}$$

qism to'plamni qaraymiz. Ravshanki,  $T$  to'plam  $L_p(\Pi)$  fazoda total bo'ladi.

**8-teorema.** Aytaylik  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$   $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazoda tasodifiy maydonlar ketma-ketligi bo'lsin.

Agar

1) barcha  $t \in \Pi$  uchun  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi ehtimoli bo'yicha yaqinlashsa va

2)  $\|t_1 - t_2\|_{R^m} < h$  bo'lgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n M \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\|^p = 0$$

bo'lsa, u holda  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $L_p(\Pi)$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi

**Isbot.** 7-teoremaga asosan  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi hosil qilgan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligi sust kompakt bo'ladi

4- teoremaga ko'ra  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $L_p(\Pi)$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

Teorema isbotlandi.

**Izoh.** Agar  $p$ -juft son bo'lib, tasodifiy maydonlar Gauss maydonlaridan iborat bo'lsa, u holda 8-teoremaning ikkinchi shartini ushbu  $\|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h$  bo'lgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_n M \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\|^2 = 0$$

shart bilan almashtirishi mumkin.

7 – teorema.  $\Pi = [0,1]$  bo'lganda tasodifiy prosesslar uchun [6]<sup>17</sup> ishda olingan.

---

<sup>17</sup> Дзигава М.С. Достаточные условия сходимости распределений в пространствах Соболева. Дипломная работа КГУ, 1980 г.

#### 4 §. $L_p(\Pi)$ fazo normasida tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi

$L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , fazoda  $\{\xi_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.  $L_p(\Pi)$  fazo normasida  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)$  tasodifiy qatorning ehtimoli bo'yicha yaqinlashish masalasini o'rganamiz.

$\Pi = [0, 1]$  bo'lganda  $L_p(\Pi)$  fazoda bog'liq emas, tasodifiy proseslar uchun  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)$  qatorning turli ko'rinishdagi yaqinlashish shartlari [6,8] ishlarida atroflicha o'rganilgan.

Aytaylik  $S_n(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t)$ ,  $\mu_n$  esa  $S_n(t)$  tasodifiy maydonning taqsimoti bo'lsin.

**9- teorema.** Aytaylik

1) barcha  $t \in \Pi$  lar uchun  $\{S_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi ehtimoli bo'yicha yaqinlashsin;

2)  $\|t_1 - t_2\|_{R^m} \leq h$  bolgan barcha  $t_1, t_2 \in \Pi$  lar uchun

$$\limsup_{h \rightarrow 0} M_n \left\| \xi_n(t_1) - \xi_n(t_2) \right\|^p = 0$$

bo'lsin. U holda  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t)$  qator  $L_p(\Pi)$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

**Isbot .** Teoremaning isboti 8-teorema isbotiga o'xshash bo'ladi. Ya'ni teoremaning 1) va 2) shartlariga asosan 7-teoremaga ko'ra  $\{S_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar hosil qilgan  $\{\mu_n, n \geq 1\}$  taqsimotlar ketma-ketligi sust

kompakt bo'ladi. 4-teoremaga asosan  $\{S_n(t), n \geq 1\}$  tasodifiy maydonlar ketma-ketligi  $L_p(\Pi)$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

Teorema isbotlandi.

9 - teoremadan  $\Pi = [0,1]$  bo'lganda quydagi natijalar kelib chiqadi.

**1- natija.** Aytaylik  $\xi_k(t) = \xi_k \varphi_k(t)$ ,  $k \geq 1$  bo'lib, bu erda  $\xi_k$  tasodifiy miqdorlar bo'lib  $\forall k$  uchun

$$\mu \xi_k = 0 \text{ va } \varphi_k(t) \in L_p[0,1],$$

$$\forall t, t+h \in [0,1], r(t) \in L_p[0,1]$$

uchun

$$\|\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)\| \leq C_k |r(t+h) - r(t)|$$

bo'lsin. Shunigdek  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qator uchun quydagi

1)  $\forall t \in [0,1]$  uchun  $\{\xi_k(t), k \geq 1\}$  tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi ehtimol bo'yicha yaqinlashsin;

$$2) \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_p=1}^{\infty} C_{k_1} \dots C_{k_p} M \left| \xi_{k_1} \dots \xi_{k_p} \right| < \infty$$

shartlar bajarilsin. U holda  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qator  $L_p[0,1]$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

**Isbot.** Haqiqatdan ham ushbu

$$\sup_n M \|S_n(t+h) - S_n(t)\|^p = \sup_n M \int_0^1 \left| \sum_{k_1=1}^n \xi_{k_1} [\varphi_{k_1}(t+h) - \varphi_{k_1}(t)] \right|^p dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_n \sum_{k_1=1}^n \dots \sum_{k_p=1}^n M \left| \xi_{k_1} \dots \xi_{k_p} \int_0^1 \varphi_{k_1}(t+h) - \varphi_{k_1}(t) \dots \varphi_{k_p}(t+h) - \varphi_{k_p}(t) dt \right| \leq \\
&\leq \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_p=1}^{\infty} C_{k_1} \dots C_{k_p} M \left| \xi_{k_1} \dots \xi_{k_p} \int_0^1 |r(t+h) - r(t)|^p dt \right|
\end{aligned}$$

munosabatni qaraymiz.  $L_p[0,1]$  fazodan olingan har qanday  $r(t)$  funksiya uchun

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|r(t+h) - r(t)\| = 0$$

bo'lganligidan, u holda

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \sup_n M \|S_n(t+h) - S_n(t)\|^p = 0$$

bo'lib,  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  tasodifiy qator 9-teoremaga asosan  $L_p[0,1]$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

**2 - natja.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qatorni qaraymiz, bu yerda har qanday  $k$  uchun  $\mu \xi_k = 0$  va  $\{\varphi_k(t), k \geq 1\}$  -  $L_2[0,1]$  fazodan olingan fuksiyalarning ortonormal sistemasi. Aytaylik  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qator uchun quydagi

$$1) \sum_{k=1}^{\infty} M \xi_k^2 < \infty;$$

$$2) \text{ har qanday } K \text{ lar uchun } \|\varphi_k(t)\|_{L_2} \leq N$$

U holda  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qator  $L_2[0,1]$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

Isbot. Ushbu

$$\sup_n M \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 \leq M \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} M \xi_k^2 \|\varphi_k(t)\|^2 \leq \infty$$

tengsizlikning o'rinliligidan 9-teoremani 1) sharti bajariladi

Bundan esa ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $n_0$  topilib

$$M \left\| \sum_{k=n_0}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 < \frac{\varepsilon}{8}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun shunday  $n_0$  ni qaymizki,

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 1} M \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t+h) - \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 &\leq 2M \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k \varphi_k(t+h) - \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 + \\ &+ 2 \sup_{n \geq n_0} M \left\| \sum_{k=n_0}^n \xi_k \varphi_k(t+h) - \sum_{k=n_0}^n \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 \leq \\ &\leq 2M \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k \varphi_k(t+h) - \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 + 4 \sup_{n \geq n_0} M \left\| \sum_{k=n_0}^n \xi_k \varphi_k(t+h) \right\|^2 + \\ &+ 4 \sup_{n \geq n_0} M \left\| \sum_{k=n_0}^n \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 \leq 4M \left\| \sum_{k=n_0}^n \xi_k \varphi_k(t+h) \right\|^2 + \\ &+ 4M \left\| \sum_{k=n_0}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 + \sup_{n_0 \geq n \geq 1} M \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t+h) - \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + M \left\| \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k \varphi_k(t+h) - \sum_{k=1}^{n_0} \xi_k \varphi_k(t) \right\|^2 \end{aligned}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun

$$\lim_{n \rightarrow 0} \sup_{n \geq 1} M \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k [\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)] \right\|^2 = 0$$

munosabat o'rinli bo'ladi

9-teoremaga asosan

$$\left\{ S_n(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k(t), n \geq 1 \right\}$$

tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi  $L_2[0,1]$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

**3-natija**  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qatorni qaraymiz, bu yerda  $\xi_k$  - Gauss tasodifiy miqdorlari bo'lib har qanday  $k$  uchun  $M \xi_k = 0$ ,  $\varphi_k(t) \in L_{2k}[0,1]$  bo'lsin va  $\{\varphi_k(t), k \geq 1\}$  funksiyalar esa,  $L_2[0,1]$  fazoda fuksiyalarning ortogonal sistemasidan iborat bo'lsin.

Aytaylik  $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qator uchun quyidagi

1)  $\sum_{k=1}^{\infty} M \xi_k^2 < \infty$ ;

2) barcha  $k \geq 1$  lar uchun  $\|\varphi_k\|_{L_2} < N$  shartlar bajarilsin. U holda

$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$  qator  $L_2[0,1]$  fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashadi.

### III. Xulosa

Magistrlik dissertatsiyasida separabel banax fazosida sifatida  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , funksional fazo qaralib, unda shu fazodan qiymat qabul qiluvchi tasodifiy maydonlar hosil qilgan ehtimollik o'lchovlari (taqsimotlari) ning sust yaqinlashishi ehtimol bo'yicha yaqinlashish va tasodifiy maydonlardan tuzilgan qatorlarning shu fazo normasida ehtimol bo'yicha yaqinlashishi uchun yetarli shartlari o'rganilgan.

Dissertatsiyada olingan natijalarni ifodalovchi teoremlar va ulardan kelib chiqadigan natijalarni isbotlashda funksional analiz tushunchalari va usullaridan, shuningdek cheksiz o'lchovli fazolarda ehtimollar nazariyasining, xususan, tasodifiy proseslar nazariyasining tushuncha va usullaridan foydalanildi.

Birinchi bobda asosan, dissertatsiyaning asosiy qismidan iborat ikkinchi bobning 2-4 - paragraflarida keltirilgan teoremlar va natijalarni isbotlashda ishlatiladigan yordamchi tushunchalar va teoremlar keltirilgan.

Ikkinchi bobda  $L_p(\Pi)$ ,  $p \geq 1$ , funksional fazodan qiymat qabul qiluvchi tasodifiy maydonlar hosil qilgan ehtimollik o'lchovlari (taqsimotlari), ularning shu fazo normasida sust yaqinlashishi, hamda tasodifiy maydonlardan tuzilgan qatorlarning ehtimol bo'yicha yaqinlashishiga oid ilmiy natijalar bayon qilingan.

Dissertatsiyada olingan natijalar yangi bo'lib, nazariy ahamiyatga egadir. Ulardan konkret funksional fazolarda ehtimollik o'lchovlarini (taqsimotlarini) o'rganishda, hamda tasodifiy maydonlar uchun limit teoremlarni o'rganishda foydalanish mumkin.

#### IV. Foydalanilgan adabiyotlar

1. I.A.Karimov."O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida ", Toshkent, "O'zbekiston", 2011- yil
2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М. Наука. 1977 г
3. Гихман И.И, Скороход А.В, Теория случайных процессов. т-1, М. Наука. 1971 г.
4. Булдыгин В.В. Сходимость случайных элементов в топологически пространствах. Киев, "Наукова Думка" 1980 г.
5. Вахания Н.Н, Тариеладзе В.И, Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М. Наука. 1985 г.
6. Дзигава М.С. Достаточные условия сходимости распределений в пространствах Соболева. Дипломная работа КГУ, 1980 г.
7. Ширяев А.Н. Вероятность М.Наука 1980 г.
8. Булдигин В.В. Сходимость случайных элементов в банаховых пространствах. Сб. "Предельные теоремы для случайных процессов» ИМ. АН УССР 1977 г.
9. Люстерник А.А, Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М. Наука. 1965 г.
10. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике». Из-во ЛГУ, 1950 г
11. Akbarov M., Pirmatov Z.  $L_p(\Pi)$  fazoda tasodifiy maydonlar taqsimotlarining sust yaqinlashishi. "Ilm zaqovatimiz - senga, Ona Vatan" Respublika yosh olim va iqtidorli talabalarning ilmiy-amaliy konferensiya materiallari. Farg'ona. 2011- y,16-17 - betlar.
12. Akbarov M., Pirmatov Z.  $L_p(\Pi)$  fazoda tasodifiy qatorlarning yaqinlashishi. "Matematika fani va uni o'qitishning dolzarb muammolari" Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari. Andijon, 2011-yil, 8-9 - noyabr, 55-56 - betlar.

13. Lyusternik A.A. , Sobelev V.I. “Элементы функционального анализа”  
[www.loin.ru/bookswww.Google.ru](http://www.loin.ru/bookswww.Google.ru)

Magistrlik dissertatsiyasi umumiy matematika kafedrası yig'ilishida muhokamadan o'tgan va avtoreferat chiqarishga ruxsat etilgan.

Bayonnoma № \_\_\_\_\_ 2012- yil

Ilmiy rahbar :

M. Akbarov

Taqrizchi :

M. Mamajonov