К.Х. ШАБАДИКОВ , Н. С. ИКРОМОВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Фергана 2012

Данное пособие составленно по курсу дифференциальных уравнений в объёме программы, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан. Настоящее пособие содержит краткое изложение основных теоретических сведений для самостоятельного изучения теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также практические примеры и задачи. Самостоятельно полученные знания из пособия, помогут в дальнейшем студентам глубже изучать все виды дифференциальных уравнений.

Это учебное пособие было утверждено на заседании научного совета Ферганского государственного университета от 28 декабрь 2012 года за № 4.

Составители: кандидат физ. мат. наук, доцент К.Х. Шабадиков,
преподаватель Н.С. Икромова.

Рецензенты: кандидат физ. мат. наук, доцент Ш.Т. Каримов,
кандидат физ. мат. наук, доцент М. Мамажонов.

Лекция № 1. ПОНЯТИЕ ОБ ОБЫКНОВЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, РАЗРЕШЕННОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

П Л А Н

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
2. Уравнение первого порядка в первой степени.
3. Решение дифференциального уравнения.

1. Определение 1. Обыкновенным дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y* и ее производные $y', y'', ..., y^{(n)}$

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Функцию F будем считать вещественной функцией от своих аргументов.

Порядок старшей производной, входящей в уравнение (1), называется порядком этого уравнения.

Если уравнение (1) может быть приведено к такому виду, в котором левая часть есть целая рациональная функция (полином) относительно всех входящих в него производных, то наивысшая степень старшей производной называется степенью уравнения.

Решением уравнения (1) называется функция $y=y(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

График решения на плоскости (x,y) называется интегральной кривой.

Процесс нахождения решений называется интегрированием дифференциального уравнения. Задача интегрирования дифференциального уравнения состоит в нахождении всех решений этого уравнения и изучении их свойств.

2. Определение 2. Уравнение первого порядка в первой степени будем называть уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной. Его всегда можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (2)$$

Эту форму записи будем называть нормальной формой уравнения, разрешенного относительно производной. Всегда предполагать, что правая часть уравнения (2) однозначна и непрерывна в рассматриваемой области изменения x,y. Если при этом функция $f(x,y)$ не определена в некоторой точке (x_0,y_0), но существует ее конечный предел при $x \to x_0$, $y \to y_0$, то определением функцию $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по непрерывности. Например, для уравнения $y' = \frac{\sin x}{x}$, считаем $y' = 0$ при $x=0$. Аналогично поступаем в случае наличия хотя бы одностороннего предела. Так, для уравнения $y' = y \ln y$ полагаем $y' = 0$ при $y=0$.

Наряду с уравнением (2) всегда рассматриваем так называемое перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)} \qquad (2')$$

используя его в окрестности тех точек, в которых $f(x,y)$ обращается в бесконечность. Множество таких точек (x,y) присоединим к области определения уравнения (2).

Таким образом, под областью определения уравнения (2), будем понимать объединение областей задания функций f и $\frac{1}{f}$. Например, областью определения уравнения $y' = \frac{1}{x}$ будет вся плоскость (x,y). Другие записи уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

Уравнения (2) и (2′) заменить равносильным им одним уравнением

$$dy - f(x,y)dx = 0.$$

К уравнениям вида (2) и (2′) приводится также уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (3)$$

и так называемое уравнение в симметрической форме

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}.$$

3. Определение 3. Решением дифференциального уравнения (2) в некотором интервале (a,b) изменения независимой переменной x называется функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в этом интервале и обращающая уравнение (2) в тожество, справедливое для всех значений x из интервала (a,b). При этом, конечно, предполагается, что точки $[x,y(x)]$ лежат в области задания функции $f(x,y)$.

Пример. Для уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad (4)$$

функция

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

будет решением в интервале (-1, +1).

Решение может быть задано в неявном виде

$$\Phi(x,y) = 0$$

Так, уравнение (4) имеет решение

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (y > 0).$$

Решение может быть задано также в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha < t < \beta).$$

Например, уравнение (4) имеет решение

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 < t < \pi).$$

Решения уравнения (2′) присоединяются к решениям уравнения (2). Например, к решениям $y = \ln|x| + C$ уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}$ следует присоединить решение *x=0* перевернутого уравнения $\dfrac{dx}{dy} = x$.

Решением уравнения (3) называется функция $y = y(x)$ или $x = x(y)$, обращающая это уравнение в тождество.

Все интегральные кривые являются гладкими, т.е. имеют непрерывно изменяющуюся касательную.

Являются ли данные функции *y(x,c)* решением соответствующих дифференциальных уравнений:

1. а) $y = x^2\left(1 + Ce^{\frac{1}{x}}\right)$, $x^2y' + (1-2x)y = x^2$.

б) $y = Ce^x - e^{-x}$, $\quad xy'' + 2y' - xy = 0$.

в) $x^2 + y^4 = Cy^2$, $\quad xydx = (x^2 - y^4)dy$.

2. а) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$, $\quad xyy' - y^2 = x^2y'$.

б) $y = Cx + \dfrac{1}{C}$, $\quad xy' - y + \dfrac{1}{y} = 0$.

Лекция № 2. ПОЛЕ НАПРАВЛЕНИЙ.

П Л А Н

1. **Поле направлений.**
2. **Изоклины.**

1. Определение 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

и обозначим через α угол между касательной к интегральной кривой $y = y(x)$ в точке (x, y) и положительным направлением оси *Ox*, то, принимая во внимание, что $tg\alpha = y'$, а $y' = f(x, y)$, получим $tg\alpha = f(x, y)$, так что направление касательных к интегральным кривым задается самим дифференциальным уравнением.

Проведя в каждой точке (x,y) из области задания функции $f(x,y)$ отрезок (для определенности) единичной длины с центром в этой точке, образующей с положительным направлением оси *Ox* угол, где $tg\alpha = f(x, y)$, получим так называемое поле направлений.

Если в точке (x_0,y_0) правая часть уравнения (1) обращается в бесконечность, то направление поля параллельно оси *Oy*. В этом случае нужно использовать перевернутое дифференциальное уравнение:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \qquad (1')$$

Определение 2. Если же в точке (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ обращается в неопределенность $\frac{0}{0}$, то говорят, что в этой точке поле не определено. Такую точку будем называть особой точкой дифференциального уравнения (1). Если при этом существует интегральная кривая $y = y(x)$ $[x = x(y)]$, обладающая свойством $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ $[x(y) \to x_0 \;\; при \;\; y \to y_0]$, то говорят, что она примыкает к точке (x_0,y_0). В рассматриваемом случае само уравнение (1) не указывает наклона касательной в точке (x_0,y_0) к интегральной кривой, примыкающей к этой точке. Это обстоятельство порождает особенности поведения интегральных кривых в окрестности особой точки (x_0,y_0), обусловленные аналитической структурой правой части уравнения (1).

Изучая поле направлений, определяемое заданным дифференциальным уравнением, получаем некоторое представление об интегральных кривых этого уравнения, а иногда и сами интегральные кривые.

Например, из рассмотрения соответствующих полей направлений ясно, что интегральными кривыми уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad (2)$$

являются полупрямые

$$y = Cx \;\; (x \neq 0), \;\; x = 0 \;\;\; (y \neq 0) \qquad (3)$$

(*C* – любое постоянное число), а интегральными кривыми уравнения

$$y' = -\frac{x}{y} \qquad (4)$$

служат окружности с центром в начале координат.

В точке (0,0) поля, определяемые уравнениями (2) и (4), не заданы. Из (3) ясно, что все интегральные кривые уравнения (2) примыкают к точке (0,0), в то время как ни одна из интегральных кривых уравнения (4) не примыкает к ней.

Если дифференциальное уравнение задано в виде
$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ (5),
то его поле направлений не определено в точке (x_0,y_0), в которой функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ одновременно обращаются к нуль. Эту точку называем особой точкой рассматриваемого уравнения.

2.Определение 3. При изучении поля направлений особый интерес представляют изоклины – линии, во всех точках которых направление поля одно и то же. Так, для уравнений (2) и (4) изоклинами служат полупрямые, выходящие из начала координат. Для первого из них эти изоклины являются также интегральными кривыми. Для второго уравнения ни одна изоклина не являются интегральной кривой. Для уравнения $y'=my$ изоклинами, которого являются прямые $y=b$, только одна изоклина $y=0$ интегральная кривая.

Изоклинами уравнения

$$y'=x^2+y^2 \tag{6}$$

являются окружности $x^2+y^2=R^2$, так что, например, все интегральные кривые этого уравнения в точках пересечения с окружностью $x^2+y^2=1$ наклонены к оси Ox под углом $\frac{\pi}{4}$.

Из вида правой части уравнения (6) ясно, что интегральная кривая, проходящая через начало координат, касается в этой точке оси Ox. Очевидно также, что каждое решение уравнения (6) есть возрастающая функция от x (во всем интервале существования решения).

В простейших случаях удается по виду правой части уравнения (1) найти линии экстремумов и линии точек перегиба (линии, во всех точках которых интегральные кривые имеют соответственно экстремум или перегиб). На этих линиях соответственно $f(x,y)=0,\ f_x^{'}+f_y^{'}\cdot f=0$ (если функция f непрерывно дифференцируема). Изоклины вместе с линиями экстремумов и точек перегиба дают возможность построить схематически графики интегральных кривых данного уравнения. При этом следует проверять непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение, не являются ли изоклины, линии экстремумов и линии точек перегиба интегральными кривыми.

Лекция № 3. ЗАДАЧА КОШИ. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ В ФОРМЕ КОШИ. ОБЩИЙ ИНТЕГРАЛ.

П Л А Н

1. Задача Коши.
2. Общий интеграл.
3. Решение уравнения.

1.Определение 1. Во многих вопросах теоретического и прикладного характера требуется среди всех решений дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

найти решение

$$y = y(x) \Rightarrow y(x_0) = y_0 \qquad (2)$$

удовлетворяющее условию

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0 \qquad (3)$$

где x_0 и y_0 – заданные числа, т.е. ищется такое решение (2), в котором функция $y(x)$ принимает заданное значение y_0, если независимую переменную x заменить заданным значением x_0, так что $y(x_0)=y_0$.

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, проходящая через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$.

Условие (3) называется начальным условием решения (2), а числа x_0 и y_0 – начальными данными этого решения. Обычно числа x_0 и y_0 предполагается конечными.

Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию (3), называется задачей Коши.

Пример. Решением уравнения

$$y' = 2x,$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y=1 \text{ при } x=0$$

будет

$$y = x^2 + 1$$

Это – парабола, проходящая через точку $M(0,1)$.

В случае, когда в точке (x_0,y_0) правая часть уравнения (1) обращается в бесконечность, рассматривают перевернутое уравнение (1) и ищут интегральную кривую, проходящую через эту точку, в виде $x=x(y)$.

Вообще решение задачи Коши для уравнения в любой из форм его записи ищут в том виде, в каком это оказывается наиболее удобно, т.е. в виде $y=y(x)$, $x=x(y)$, $F(x,y)=0$ или в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Задача Коши для уравнения (1) с начальными данными x_0,y_0, имеет решение, если точка (x_0,y_0) лежит в области задания и непрерывности правой части этого уравнения. Единственность решения только при одном этом условии не гарантируется.

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме Пикара, предположить дополнительно, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица относительно y в некоторой окрестности начальной точки (x_0,y_0), в частности, что она имеет в этой окрестности ограниченную частную производную по y.

Например, так обстоит дело, если правая часть уравнения (1) есть полином относительно x и y. При этом начальную точку (x_0,y_0) можно выбирать произвольно.

Единственность решения задачи Коши также заведомо имеет место, если функция $f(x,y)$ есть полином только относительно y, причем коэффициенты этого полинома суть непрерывные функции от x. Но при этом только y_0 можно задавать произвольно, а x_0 должно лежать внутри интервала непрерывности коэффициентов.

Если уравнение имеет вид $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (4), где M и N суть полиномы, то существует единственное решение с начальными данными x_0,y_0, если в точке (x_0,y_0) функции M и N не обращаются одновременно в нуль. В противном случае начальные данные x_0,y_0 называются особыми и не гарантируются ни существование, ни единственность решения задачи Коши.

Точки, в которых $f(x,y)$ непрерывна, а $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность, можно называть особыми точками уравнения (1). В этих точках может быть нарушена единственность решения задачи Коши. Например, для уравнения

$$y' = 2\sqrt{y} \tag{5}$$

такими точками будут все точки оси Ox $(y=0)$.

Решение задачи Коши стараются найти в элементарных функциях или в квадратурах от элементарных функций. В тех случаях, когда это не удается, приходится искать решение в другом виде или прибегать к приближенным методам интегрирования.

2.Определение 2. Функция

$$y = \varphi(x,C) \tag{6}$$

определенная в некоторой области изменения переменных x и C и имеющая непрерывную частную производную по x, называется общим решением уравнения (1) в заданной области D изменения переменных x и y, в каждой точке которой решение задачи Коши существует и единственно, если равенство (6) разрешимо в области D относительно произвольной постоянной C, т.е.

$$C = \psi(x,y) \tag{7}$$

и если функция (6) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольной постоянной C, доставляемых формулой (7), когда точка (x,y) пробегает область D.

Например, для уравнения (11) общим решением в области

$$|x| < +\infty, \quad 0 < y < +\infty$$

будет

$$y = (x+C)^2, \quad x > -C.$$

3.Определение 3. Чтобы найти решение уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0 из области D при помощи формулы общего решения (6), поступают так:

1)подставляют в формулу (2) вместо x и y числа x_0 и y_0:

$$y_0 = \varphi(x_0, C); \qquad (8)$$

2)решают уравнение (8) относительно C, находят $C=C_0$;

3)подставляют найденное значение C в формулу (6):

$$y = \varphi(x, C_0).$$

Это и есть искомое решение. Оно будет единственным. Общее решение

$$y = y(x, x_0, y_0),$$

в котором роль произвольной постоянной играет начальное значение y_0 искомой функции y при фиксированном значении x_0 независимой переменной x, называется общим решением в форме Коши.

Если общее решение уравнения (1) задано в неявном виде

$$\Phi(x,y,C) = 0 \text{ при } \psi(x,y)=C,$$

то оно называется общим интегралом этого уравнения. Так, для уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ (8*) общим интегралом будет соотношение $x^2 + y^2 = R^2$ (8**).

Если функция (6), дающая общее решение уравнения (1), задана в параметрическом виде

$$x = \varphi(t, C), \quad y = \psi(t, C), \qquad (9)$$

то оно называется общим решением уравнения (1) в параметрической форме. Например, для уравнения (8*) общим решением в параметрической форме будет

$$x = C\cos t, \;\; y = C\sin t$$

Если дано однопараметрическое семейство кривых, например в виде (6), то, дифференцируя его по x и исключая из полученного уравнения и уравнения (6) параметр C, получим, дифференциальное уравнение первого порядка, называемое дифференциальным уравнением данного семейства кривых.

Решить задачу Коши для уравнений:

а) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0, \quad y\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0.$

б) $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y, \qquad y\big|_{x=1} = 0.$

Лекция № 4. ЧАСТНОЕ И ОСОБОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ.

П Л А Н

1. Частное решение.
2. Особое решение.
3. Понятие об интеграле дифференциального уравнения.
4. Интегрируемость в квадратурах.
5. Метод последовательных приближений (метод Пикара).

1.Определение 1. Решение, в каждой точке которого сохраняется единственность решения задачи Коши, т.е. через эту точку в достаточно малой окрестности ее проходит только одна интегральная кривая, называется частным решением. Если функция $y=\varphi(x,C)$ (1*) есть общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1)$$

в области *D*, то всякое решение, содержащееся в формуле (1) при конкретном (допустимом) числовом значении произвольной постоянной *C*, является частным решением. При этом не исключаются и значения $C=\pm\infty$ (частное решение не может быть ни линией экстремумов, ни линией точек перегиба интегральных кривых уравнения (1)).

2. Определение 2. Решение, в каждой точке *C* которого нарушается единственность решения задачи Коши, называется особым. Особое решение, очевидно, не содержится в формуле общего решения ни при каком числовом значении произвольной постоянной, включая $C=\pm\infty$. Особое решение вида $y=y(x)$ [$x=x(y)$] может получаться из формулы общего решения лишь при $C=C(x)$ [$C=C(y)$].

Если правая часть уравнения (1) непрерывна и имеет частную производную по *y* (ограниченную или нет), то особыми решениями могут быть только те кривые, во всех точках которых $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращается в бесконечность. Эти кривые называются подозрительными на особое решение (кривая, подозрительная на особое решение, будет особым решением, если:
1) она является интегральной кривой;
2) в каждой ее точке нарушается единственность решения задачи Коши).

Отсюда, в частности, следует, что уравнение (1), в котором $f(x,y)$ есть полином относительно *x* и *y*, не может иметь особых решений. Например, таким будет уравнение: $y'=x^2+y^2$.

Если правая часть уравнения (1) есть частное двух полиномов

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

то (1) тоже не может иметь особых решений. Оно может иметь только особые точки. Это те точки, в которых P и Q одновременно обращаются в нуль. Например, таким уравнением будет

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy} \quad (ad-bc\neq 0).$$

Уравнение вида (3), в котором M и N суть полиномы, тоже не имеет особых решений. Например, это будет иметь место для уравнения

$$x^2(y+1)dx+(x^2-1)(y-1)dy=0$$

Если семейство интегральных кривых вида $y=\varphi(x,C)$ или $\Phi(x,y,C)=0$ имеет огибающую, т.е. такую кривую, которая касается каждой кривой семейства в одной или нескольких точках и вся состоит из этих точек касания, то последняя всегда является решением дифференциального уравнения и притом особым. В самом деле, во-первых, огибающая является интегральной кривой; во-вторых, в каждой точке огибающей, очевидно, нарушается единственность решения задачи Коши.

Огибающей семейства кривых может быть только дискриминантная кривая этого семейства, т.е. кривая, определяемая уравнением семейства и уравнением, полученным дифференцированием его по параметру. Дискриминантная кривая семейства интегральных кривых определяется из системы

$$y=\varphi(x,C),\ \ 0=\frac{\partial\varphi}{\partial C} \ \text{ или } \Phi(x,y,C)=0,\ \ \frac{\partial\Phi}{\partial C}=0$$

Найдя дискриминантную кривую, нужно проверить, будет ли она (или ее часть) огибающей данного семейства (или части его).

Особое решение всегда можно обнаружить в процессе построения общего решения (общего интеграла) данного дифференциального уравнения. Это те интегральные кривые, которые могут быть утеряны при преобразованиях данного уравнения, переводящих это уравнение в его общее решение (общий интеграл).

Дифференциальное уравнение может иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми. Например, такими будут решения, склеенные из отрезков частных и особых решений. Возможна также склейка двух частных решений в точке неединственности решения задачи Коши.

3.Определение 3. Функция $\psi(x,y)$, непрерывно дифференцируемая и не сводящаяся к постоянной, называется интегралом уравнения (1), если она обращается тождественно в постоянную вдоль любого частного решения, так что $d\psi\equiv 0$ в силу уравнения (1):

$$d\psi\,|_{(2)} = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}f(x,y)dx \equiv 0$$

Если ψ_1 и ψ_2 – интегралы уравнения (2), определенные в одной и той же области, то $\psi_2 = \Phi(\psi_1)$.

4.Определение 4. Если общее решение (общий интеграл) представлено в виде квадратур от элементарных функций и функций, входящих в состав дифференциального уравнения, то говорят, что уравнение проинтегрировано в квадратурах.

Выясняя вопрос об интегрируемости данного дифференциального уравнения в квадратурах, нужно испытать все формы записи этого уравнения, принимая за искомую функцию как y, так и x.

Если данное уравнение не интегрируется в квадратурах (или выполнение квадратур затруднительно), то решение задачи Коши обычно находят методом последовательных приближений или при помощи степенных рядов.

5. ***Метод Пикара*****.** Пусть поставлена задача Коши

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Если $f(x,y)$ определена и непрерывна в области

$$|x - x_0| \le a, \quad |y - y_0| \le b, \quad (a > 0,\ b < 0)$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица относительно y, то задача Коши (2) имеет единственное решение, которое будет заведомо определено в интервале

$$|x - x_0| \le h \tag{3}$$

где

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right); \quad |f(x,y)| \le M$$

(теорема Пикара).

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx,$$

соответствующее задаче Коши (2). Применим для его решения метод последовательных приближений.

За исходное (нулевое) приближение возьмем функцию

$$y_0(x) \equiv 0.$$

Последовательные приближения определим рекуррентной формулой

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,|\,x, y_{n-1}(x)\,|\,dx \quad (n = 1,2,...)$$

Эти приближения заведомо сходятся к решению задачи Коши (2) в интервале (3). Однако во многих случаях решение удается продолжить за пределы этого интервала.

Лекция № 5. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ

П Л А Н

1. **Общее решение.**
2. **Особые решения.**
3. **Поле направлений.**
4. **Примеры**.

1. **Определение 1.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad (1)$$

Если $f(x)$ определена и непрерывна в интервале (a,b), то

$$y = \int f(x)dx + C \qquad (2)$$

(где первый член справа есть какая-нибудь фиксированная первообразная функция для функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная) есть общее решение уравнения (1) в области

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty \qquad (3)$$

так что вся эта область заполнена непересекающимися интегральными кривыми уравнения (1), причем каждая из них представляет собой график частного решения этого уравнения.

Из (2) ясно, что все интегральные кривые уравнения (1), входящие в общее решение, получаются из какой-нибудь одной из них сдвигом вдоль оси Oy.

Формула (2) дает возможность найти единственное решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 из полосы (3) (так что x_0 можно брать только из интервала (a,b), а y_0 - любое фиксированное число) выбором соответствующего значения произвольной постоянной C. Чтобы найти это значение, нужно заменить в формуле (2) переменные x и y на начальные значения x_0 и y_0. Решив полученное уравнение, найдем $C=C_0$. Решение с начальными данными x_0 и y_0 имеет вид

$$y = \int f(x)dx + C_0 \qquad (4)$$

Это решение определено и непрерывно дифференцируемо во всем интервале (a,b), т.е. во всем интервале непрерывности правой части уравнения (1).

Если в качестве первообразной $\int f(x)dx$ в формуле (2) взять функцию $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx$, где x_0 – некоторое фиксированное число из интервала (a,b), то общее решение (2) примет вид

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + C \tag{5}$$

Полагая здесь $x = x_0$, $y = y_0$, получим $C = y_0$ так что можем написать:

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)dx + y_0 \tag{6}$$

Это есть решение уравнения (1) с начальными данными x_0, y_0.

Если же в формуле (6) считать y_0 произвольным, то она представляет общее решение уравнения (1) в области (3) в форме Коши.

Все интегральные кривые семейства (6) пересекают прямую $x=x_0$ в точках вида (x_0,y_0), так что произвольная постоянная y_0 в общем решении (6) есть ордината соответствующей точки пересечения. Изменяя непрерывным образом эту ординату, получим все семейство интегральных кривых.

Из формулы (6) ясно, что решение задачи Коши есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция от независимой переменной x и от начальных данных x_0 и y_0 в области

$$a < x < b, \quad a < x_0 < b, \quad |y_0| < +\infty$$

2. Определение 2. Если $f(x)$ разрывна в точке $x=\xi$, лежащей внутри интервала (a,b), причем именно обращается в бесконечность в этой точке и непрерывна во всех других точках интервала (a,b), то формула (2) дает общее решение уравнения (1) в каждой из областей

$$a < x < \xi, \quad |y| < +\infty$$

и

$$\xi < x < b, \quad |y| < +\infty$$

Прямая $x=\xi$ является, очевидно, решением перевернутого уравнения

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}$$

и должна быть присоединена к решениям уравнения (1).

Это решение может оказаться особым, если в каждой точке его нарушается единственность. Если же единственность сохраняется во всех точках этого решения, то оно будет частным.

По отношению к семейству интегральных кривых, образующих общее решение, прямая $x=\xi$ будет или огибающей (когда $x=\xi$ - особое решение), или асимптотой (если $x=\xi$ - частное решение).

3.Определение 3. Из (1) видно, что во всех точках прямой $x = x_0(a < x_0 < b)$, параллельной оси Oy, направление поля одно и то же:

$tg\alpha = f(x_0)$, так что каждая такая прямая является изоклиной. Отсюда снова, и притом не интегрируя уравнение (1), видим, что если *f(x)* непрерывна в (*a,b*), то все интегральные кривые этого уравнения получаются из одной сдвигом вдоль оси *Oy*.

Если *f(x)* сохраняет знак в (*a,b*), то каждое решение представляет собой монотонную функцию, возрастающую, если $f(x)>0$, и убывающую, если $f(x)<0$.

Если *f(x)* обращается в нуль в некоторой точке $x=c$ из (*a,b*) и имеет противоположные знаки при $x<c$ и $x>c$, то каждая интегральная кривая уравнения (1) будет иметь в точке $x=c$ экстремум, так что прямая $x=c$ будет линией максимумов или линией минимумов в интегральных кривых.

Предположим, что *f(x)* дифференцируема в (*a,b*). Если при этом $f'(x)$ сохраняет знак, то каждая интегральная кривая имеет одно и то же направление вогнутости во всех точках интервала (*a,b*). Если же $f'(x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x=d$ из (*a,b*) и имеет противоположные знаки при $x<d$ и $x>d$, то каждая интегральная кривая уравнения (1) будет иметь в точке $x=d$ перегиб, так что прямая $x=d$ будет линией точек перегиба интегральных кривых.

4.Примеры.

1. Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \tag{7}$$

Правая часть непрерывна при всех значениях *x*. Функция

$$y = x^3 + C \tag{8}$$

есть общее решение уравнения (7) в области

$$|x| < +\infty, \ |y| < +\infty \tag{9}$$

Особых решений нет.

Общим решением (в той же области) в форме Коши будет

$$y = \int_{x_0}^{x} 3x^2 dx + y_0 \ \text{ или } \ y = x^3 - x_0^3 + y_0 \tag{10}$$

В частности, если взять $x_0=0$, то получим $y = x^3 + y_0$, что совпадает с (8) с той лишь разницей, что здесь вместо *C* стоит y_0 .

Решение (10), очевидно, является непрерывной функцией от *x*, x_0 и y_0 при всех x,x_0,y_0.

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию

$$y=2 \text{ при } x=1 \tag{11}$$

Так как точка (1,2) лежит внутри области (9), то существует единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (11). Это решение частное. Его можно найти, используя обычную формулу общего решения (8) или общее решение в форме Коши (10). Подставляя в (8) $x=1, y=2$, находим $C=1$, так что искомым решением будет $y = x^3 + 1$.

Полагая в формуле (10) $x_0 = 1,\ y_0 = 2$, получаем

$$y = \int_1^x 3x^2 dx + 2 \text{ или } y = x^3 + 1.$$

Интегральные кривые получаются из кубической параболы $y = x^3$ сдвигом вдоль оси *Oy*. Они не имеют экстремумов, ибо правая часть уравнения (7) обращается в одной точке *x=0* в нуль, но сохраняет один и тот же знак во всех других точках, вследствие чего интегральные кривые возрастают во всей области определения. Так как $f'(x) = 6x$ обращается в нуль в точке *x=0* и меняет знак при переходе через нее, то каждая интегральная кривая имеет в этой точке перегиб, так что ось *Oy* будет линией точек перегиба интегральных кривых.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

Правая часть, определена и непрерывна при всех *x*. общим решение в области (9) будет

$$y = -e^{-x} + C.$$

Особых решений нет.

Интегральные кривые не имеют ни точек экстремума, ни точек перегиба. Каждая интегральная кривая имеет свою горизонтальную асимптоту. Например, для интегральной кривой $y = -e^{-x}$ горизонтальной асимптотой будет ось *Ox*.

3. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{x},$$

считаем, что при *x=0* правая часть равна 1, общим решением в области (9) будет

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C$$

или (в форму Коши)

$$y = \int_0^x \frac{\sin x}{x} dx + y_0 \qquad (12)$$

Особых решений нет.

В элементарных функциях общее решение не выражается. Все решения определены и непрерывны при всех значениях *x*. Прямые $x = k\pi \ (k = \pm 1, \pm 2, ...)$ являются линиями экстремумов интегральных кривых, ось *Oy* – линией точек перегиба. Из формулы (12) видно, что каждая интегральная кривая имеет свою горизонтальную асимптоту, так как

$$\lim_{x\to+\infty} y = \frac{\pi}{2} + y_0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\frac{\pi}{2} + y_0.$$

В частности, горизонтальными асимптотами интегральной кривой, проходящей через начало координат, будут прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$.

Проинтегрировать уравнения:

1. $y' = \cos^2 x$ 2. $y' = \frac{2x}{x^2+1}$ 3. $y' = \sin^3 x$

4. $y' = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ 5. $y' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 6. $y' = \sqrt{1-x^2}$

7. $y' = \frac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$ 8. $y' = x\cos x$ 9. $y' = x^2 e^x$

10. $y' = 2e^x \cos x$

Лекция № 6. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

П Л А Н

1. Общий интеграл.
2. Особые решения.
3. Непосредственное интегрирование уравнение (1).
4. Поле направлений.
5. Примеры.

1.Определение 1. Для уравнения, не содержащего независимой переменной,

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{1}$$

перевернутым уравнением будет

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \tag{1′}$$

Уравнение (1′) не содержит искомой функции *x*, и к нему применимо.

Предположим, что *f(y)* непрерывна в интервале (*c*,*d*) и не обращается в нуль в этом интервале. Тогда правая часть уравнения (1′) будет непрерывной функцией от независимой переменной *y* в интервале (*c*,*d*), вследствие чего

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + C \tag{2}$$

будет общим решением уравнения (1′) в области

$$c < y < d, \quad |x| < +\infty \tag{3}$$

и, следовательно, общим интегралом уравнения (1).

Вся полоса (3) заполнена непересекающимися интегральными кривыми – графиками частных решений уравнения (1). Из (2) ясно, что интегральные кривые уравнения (1), входящие в общий интеграл, получаются из какой-нибудь одной из них сдвигом вдоль оси *Ox*.

Задача Коши с начальными данными x_0, y_0 из полосы (3) имеет единственное решение, причем это решение частное.

Общий интеграл (2) можно переписать в форме Коши

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(y)} dy + x_0,$$

где x_0 – играет роль произвольной постоянной, а y_0 – фиксированное число, заключенное между числами c и d.

2.Определение 2. Предположим, что правая часть уравнения (1) обращается в нуль в некоторой точке $y=\eta$ из интервала (c,d). Тогда $y=\eta$ будет, решением уравнения (1) так как подставляя $y=\eta$ в уравнение (1), получим тождество 0≡0. Это решение может оказаться особым.

Решение $y=\eta$ является либо огибающей, либо асимптотой семейства интегральных кривых, образующих общий интеграл. В первом случае решение $y=\eta$ будет особым, во втором случае – частным.

3. Общий интеграл и особые решения уравнения (1) можно найти и не обращаясь к перевернутому уравнению. Для этого, умножив обе части уравнения (1) на dx, перепишем его в виде:

$$dy = f(y)dx \tag{4}$$

Разделив обе части этого уравнения на $f(y)$, получим

$$\frac{dy}{f(y)} = dx[f(y) = 0\,?] \tag{5}$$

В скобках указываем для памяти то уравнение, которое следует рассмотреть после интегрирования (5), ибо, деля обе части уравнения (4) на $f(y)$, можем потерять те решения этого уравнения, которые обращают делитель $f(y)$ в нуль.

Интегрируя уравнение (5), получаем

$$\int \frac{dy}{f(y)} = x + C.$$

Полученное соотношение представляет собой общий интеграл уравнения (1).

Рассмотрим теперь уравнение $f(y)=0$. Если оно имеет вещественные решения вида $y=\eta$, то последние могут оказаться особыми решениями. Во всяком случае, других особых решений у уравнения (1) быть не может.

Заметим, что дифференциальное уравнение (1) с начальным условием

$y=y_0$ при $x=x_0$

равносильно следующему интегральному уравнению:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(y)dx.$$

Здесь неизвестная функция y входит под знак интеграла.

4. В точках прямой $y = b\ (c < b < d)$ направление поля, определяемого уравнением (1), одно и то же: $tg\alpha = f(b)$, так что каждая такая прямая является изоклиной. Отсюда снова видим, что если *f(y)* непрерывна в интервале (c,d) и не обращается в нуль в том интервале, то все интегральные кривые получаются из любой из них сдвигом вдоль оси Ox.

Если уравнение $f(y)=0$ имеет вещественные решения $y=\eta$, то прямые $y=\eta$, будучи интегральными кривыми, разбивают плоскость (x,y) на полосы, в каждой из которых интегральные кривые имеют и тот же характер поведения в отношении возрастания и убывания, причем интегральная кривая не может переходить из одной полосы в другую, если все решения $y=\eta$ частные.

Если же уравнения $f(y)=0$ не имеет вещественных корней, то интегральная кривая, проходящая через любую точку плоскости, возрастает, если $f(y)>0$, и убывает, если $f(y)<0$.

Рассмотрим уравнение вида $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by)$. Это уравнение приводится к уравнению, не содержащему независимой переменной, при помощи подстановки

$$z = ax + by$$

где z – новая неизвестная функция.

Действительно, так как $z' = a + by'$, то $z' = a + bf(z)$. Это уравнение вида (1).

6.Примеры.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \qquad (6)$$

Правая часть определена и непрерывна при всех значениях y и не обращается в нуль. Так как при этом она положительна, то все интегральные кривые возрастают при всех значениях x, при которых они определены. Перевернутое уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}$$

имеет общее решение

$$x = arctgy + C \qquad (7)$$

в области

$$|y| < +\infty, \quad |x| < +\infty.$$

Следовательно, формула (7) дает общий интеграл уравнения (6). Общим решением уравнения (6) будет

$$y = tg(x + C_1) \quad \left(C_1 = -C, \quad -\frac{\pi}{2} - C_1 < x < \frac{\pi}{2} - C_1 \right)$$

Особых решений нет.

Действительно, умножая обе части уравнения (6) на dx и деля на $1+y^2$, получим

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx \qquad (8)$$

При этом не теряем решений уравнений (6), ибо делитель $1+y^2$ не обращается в нуль ни при каком вещественном значении y. интегрируя уравнение (8), находим

$$arctgy = x + C \qquad (9)$$

Это и есть общий интеграл уравнения (6). Общим интегралом в форме Коши будет

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dy}{1+y^2} = x - x_0 \text{ или } arctgy - arctgy_0 = x - x_0 \qquad (10)$$

Особых решений нет, ибо нет даже кривых, подозрительных на особое решение, так как при переходе от уравнения (6) к уравнению (8) не теряем никаких решений уравнения (6).

Найдем решение с начальным условием $y=0$ при $x=0$. Полагая в (9) $x=0$, $y=0$, имеем $C=0$, так что искомым решением будет

$$arctgy = x \text{ или } y = tgx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right) \qquad (11)$$

К этому же решению придем, воспользовавшись формулой общего интеграла в форме Коши. Действительно, полагая в формуле (10) $x_0=0$, $y_0=0$, получаем снова решение (11). Прямые $x = \pm\frac{\pi}{2}$ являются асимптотами этого решения.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y' = e^y$
2. $y' = 2^{-y}$
3. $y' = y^2(1+y^2)^2$
4. $y' = y + 1$
5. $y' = \cos^2 y$
6. $y' = \sin y$
7. $y' = \cos y$
8. $y' = ky^n$
9. $y' = y^2 + 1$
10. $y' = y^2 + a$

Лекция № 7. УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

П Л А Н

1. Уравнение с разделенными переменными.
2. Уравнение с разделяющимися переменными.
3. Примеры.

1.Определение 1. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0,$$

где коэффициент при dx зависит только от x, а коэффициент при dy – только от y, то говорят, что в нем переменные разделены. Общим интегралом такого уравнения будет

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C \qquad (1)$$

или

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = C \qquad (2)$$

Особых решений нет.

Если $X(x_0)$ и $Y(y_0)$ не равны нулю одновременно, то решение с начальными данными x_0, y_0 можно найти обычным способом по общему интегралу (1) или, еще проще, по общему интегралу (2) положив в нем $C=0$:

$$\int_{x_0}^{x} X(x)dx + \int_{y_0}^{y} Y(y)dy = 0 \qquad (3)$$

Если же $X(x_0)=Y(y_0)=0$, то решение с начальными данными x_0, y_0 может не существовать или это решение может быть не единственным.

2.Определение 2. Дифференциальное уравнение

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \qquad (4)$$

Называется уравнением с разделяющимися переменными. Умножая обе части уравнения (4) на $\dfrac{1}{m_1(x)n(y)}$, получаем уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0 \quad (m_1(x) = 0,\ n(y) = 0\,?) \qquad (5)$$

Общим интегралом этого уравнения, а следовательно, и уравнения (4) будет

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C$$

или

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C,$$

где $m_1(x_0)\neq 0,\ n(y_0)\neq 0$.

Рассмотрим уравнение $m_1(x)=0,\ n(y)=0$, отмеченные в формуле (5) в скобках. Если они имеют вещественные решения вида $x=a, y=b$, то $x=a(y\neq b),\ \ y=b(x\neq a)$ будут решениями уравнения (4). Эти решения, и только они, могут оказаться особыми.

Решение с начальными данными x_0, y_0 при условии, что $m_1(x_0)\neq 0,\ \ n(y_0)\neq 0$, а $m(x_0),\ n_1(y_0)$ не равны одновременно нулю, дается формулой

$$\int_{x_0}^{x}\frac{m(x)}{m_1(x)}dx+\int_{y_0}^{y}\frac{n_1(y)}{n(y)}dy=0.$$

Если $m(x_0)=n_1(y_0)=0$, то не гарантируется ни существование, ни единственность решения.

В случае, когда начальная точка x_0, y_0 лежит на одном из отмеченных выше решений вида $x=a(y\neq b),\ \ y=b(x\neq a)$, причем это решение частное, других решений, проходящих через точку x_0, y_0, нет. Если же это решение особое, то оно касается в точке x_0, y_0 некоторой интегральной кривой, содержащейся в общем интеграле при соответствующем значении *C*.

Наконец, если $x_0=a,\ \ y_0=b$, то поле в начальной точке *(a,b)* не определено. К этой точке примыкают решения $x=a(y\neq b),\ \ y=b(x\neq a)$.

Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (6)$$

есть уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные

$$\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx \quad [f_2(y)=0?].$$

Общим интегралом будет

$$\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$$

Если уравнение $f_2(y)=0$ имеет вещественные решения вида $y=b$, то прямые $y=b$ будет решениями уравнения (6). Эти решения могут оказаться особыми. Других особых решений быть не может.

3.Примеры.

1. Найти общий интеграл уравнения

$$xdx+(y+1)dy=0 \qquad (7)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через точку (0,0).

Согласно (1), общим интегралом уравнения (7) будет

$$\int xdx + \int (y+1)dy = C \text{ или } \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + y = C.$$

Полагая в нем *x=0 y=0*, находим *C=0*. Искомой интегральной кривой будет

$$x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

Эту же интегральную кривую, можем получить и не находя общего интеграла, а пользуясь формулой (3)

$$\int_{x_0}^{x} xdx + \int_{y_0}^{y} (y+1)dy = 0, \quad x^2 + y^2 + 2y = 0.$$

2.Рассмотрим уравнение

$$xdx + ydy = 0. \qquad (8)$$

В точке *x=0,y=0* полу не определено. Общим интегралом уравнения (8) будет

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

К началу координат не примыкает ни одна интегральная кривая.

3.Пусть дано уравнение

$$xdy + ydx = 0. \qquad (9)$$

В начале координат поле не определено.

Разделяя переменные в интегрируя, получаем:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0 \;\; (y=0, x=0\,?), \;\; \ln|y| + \ln|x| = \ln|C|,$$

$$|xy| = |C|, \quad xy = \pm C, \quad xy = C_1 \quad (C_1 = \pm C).$$

Решения $x = 0 (y \neq 0)$, $y = 0\,(x \neq 0)$ - частные. (Убеждаться в том, что они частные, нет необходимости, ибо уравнение (9) заведомо не имеет особых решений, так как коэффициенты при *dx* и *dy* суть полиномы).

К началу координат примыкают только эти решения.

4.Рассмотрим уравнение

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем:

$$\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{y}{1+y^2}dy = 0, \quad (1+x^2)(1+y^2) = C^2$$

К началу координат не примыкает ни одна интегральная кривая.

5.Пусть дано уравнение

$$x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{x^2}{x^3-1}dx+\frac{y-1}{y+1}dy=0 \quad (x^2-1=0,\ \ y+1=0).$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{3}\ln|x^3-1|+y-1\ln|y+1|=C.$$

Далее, из уравнений $x^3-1=0$ и $y+1=0$ находим $x=1$, $y=-1$. Эти решения – частные.

Проинтегрировать уравнение:

1. $(x+2x^3)dx+(y+2y^3)dy=0$
2. $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}+\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=0$
3. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$
4. $2x\sqrt{1-y^2}dx+ydy=0$
5. $y'=\dfrac{y-1}{x+1}$
6. $y'=e^{x-y}$
7. $y'=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$
8. $y'=\dfrac{\sqrt{y}}{x}$
9. $(y^2+xy^2)dx+(x^2-yx^2)dy=0$
10. $(1+y^2)(e^{2x}dx-e^{y}dy)-(1+y)dy=0$

Лекция № 8. ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ И ПРОСТЕЙШЕЕ УРАВНЕНИЕ, ПРИВОДЯЩЕЕСЯ К ОДНОРОДНОМУ.

П Л А Н

1. Однородное уравнение.
2. Простейшее уравнение, приводящееся к однородному.
3. Примеры.

1.Опеделение 1. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1),$$

в котором M и N – однородные функции одной и той же степени, называется однородным уравнением.

Это уравнение всегда может быть приведено к виду

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (2)$$

Отсюда видно, что поле направлений, определяемое однородным уравнением, не задано в начале координат, так что начало координат является особой точкой однородного уравнения.

Изоклинами однородного уравнения являются полупрямые $y = kx \ (x \neq 0)$, выходящие из начала координат и лежащие в области задания уравнения. Поэтому все интегральные кривые, пересекающие такую полупрямую, образуют с ней (в точках пересечения) один и тот же угол δ.

Если k удовлетворяет условию $k=\varphi(k)$, то изоклина $y = kx \ (x \neq 0)$ будет интегральной кривой однородного уравнения (1).

Однородное (и положительно однородное) уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены искомой функции y по формуле

$$y = zx, \qquad (3)$$

где z – новая искомая функция. Выполняя подстановку (3) в уравнении (2), получим

$$xdz + [z - \varphi(z)]dx = 0.$$

Предполагая, что $\varphi(z) \neq z$, и разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{dz}{z - \varphi(z)} + \frac{dx}{x} = 0 \quad [x = 0, \quad z - \varphi(z) = 0].$$

Интегрируя, найдем

$$\int \frac{dz}{z - \varphi(z)} + \ln|x| = C \text{ или } \psi(z) + \ln|x| = C \left[\psi(z) \equiv \int \frac{dz}{z - \varphi(z)}\right],$$

откуда

$$\psi\left(\frac{y}{x}\right)+\ln|x|=C.$$

Это есть общий интеграл однородного уравнения (2).

Особыми решениями однородного уравнения (2) могут быть полуоси оси Oy $[x=0\ \ (y\neq 0)]$ и полупрямые $y=z_i x\ \ (x\neq 0)$, где z_i – корни уравнения $z-\varphi(z)=0$.

Если $\varphi(z)\equiv z$, то однородное уравнение (2) принимает вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \qquad (2')$$

и становится уравнением с разделяющимися переменными. Решениями этого уравнения являются полупрямые

$$\left.\begin{aligned} &y=Cx \quad (x\neq 0)\\ &x=0 \quad\ (y\neq 0)\end{aligned}\right\}$$

примыкающие к началу координат, которое является особой точкой уравнения (2′). Особых решений уравнение (2′) не имеет.

Для интегрирования однородного уравнения, заданного в виде (1), нет необходимости приводить его к виду (2). Выполняя в (1) подстановку (3), придем к уравнению с разделяющимися переменными, интегрируя его и возвращаясь к искомой функции y, найдем общий интеграл. Особыми решениями могут быть только полуоси оси Oy и полупрямые $y=z_i x\ \ (x\neq 0)$, где $z=z_i$ суть особые решения упомянутого выше уравнения с разделяющимися переменными. Иногда целесообразно вместо подстановки (3) использовать подстановку $x=zy$.

2.Определение 2. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right) \qquad (4)$$

Если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a & b\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (5)$$

то это уравнение при помощи подстановки

$$x=\xi+\alpha,$$
$$y=\eta+\beta,$$

где ξ и η - новые переменные, а α и β - некоторые постоянные числа, определяемые из системы

$$\left.\begin{aligned} &a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ &a\alpha+b\beta+c=0\end{aligned}\right\}$$

приводится к однородному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

Если

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0,$$

то (4) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right) \equiv f_1(ax+by).$$

Полагая,

$$z = ax + by,$$

придем к уравнению, не содержащему независимой переменной.

3.Примеры.

1. Найти общее решение и изучить поведение интегральных кривых уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \qquad (6)$$

в окрестности особой точки $x = 0, y = 0$.

В этом уравнении переменные непосредственно разделяются. Интегрируя, находим

$$y = Cx^2 \quad (x \neq 0).$$

Решениями уравнения (6) будут также и полуоси оси *Oy*: $x = 0 \ \ (y \neq 0)$, если принять во внимание перевернутое уравнение.

Расположение интегральных кривых в окрестности особой точки указано. Все окрестность этой особой точки заполнена непересекающимися интегральными кривыми, каждая из которых примыкает к особой точке с определенным направлением касательной, причем это направление, за исключением полуосей оси *Oy*, у всех интегральных кривых одно и то же. Особая точка с таким расположением интегральных кривых называется узлом.

2.Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

решениями будут полупрямые:

$$y = Cx \ \ (x \neq 0), \quad x = 0 \ \ (y \neq 0).$$

Расположение интегральных кривых в окрестности особой точки *x=0,y=0*. Такая особая точка называется дикритическим (особым) узлом. Здесь, как и в случае обычного узла, все интегральные кривые примыкают к особой точке, но каждая из них имеет свое направление.

Проинтегрировать уравнение:

1. $x(x+2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$

2. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

3. $(py - qx)dx - (px + qy)dy = 0$

4. $y' = \dfrac{ax+by}{x} \ (b \neq 0)$

5. $y' = \dfrac{x+3y}{2x}$

6. $y' = \dfrac{x+2y}{-x}$

7. $y' = \dfrac{2x+y}{x}$

8. $y' = \dfrac{x-y}{x-2y}$

9. $y' = \dfrac{y}{x+y}$

10. $xdy - ydx = ydy$

11. $\dfrac{dx}{y+x} = \dfrac{dy}{y-x}$.

12.

а) $1+x^2 \ \ y'+1+y^2 = 0$

б) $x^2+x \ \ y' = 2y+1$

в) $xy+y^2 = \ 2x^2+xy \ \ y'$

г) $xy'+2\sqrt{xy} = y$

д) $x-2y-3 \ \ y'+ \ 2x+y-1 \ = 0$.

е) $x-y+4 \ \ dy+ \ x+y-2 \ \ dx = 0$,

Лекция № 9. ОБОБЩЕННОЕ ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ.

П Л А Н

1. Общее понятие.
2. Примеры.

1.Определение. Дифференциальное уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

называется обобщенным однородным, если удается подобрать такое число k, что левая часть этого уравнения становится однородной функцией некоторой степени m относительно x,y,dx и dy при условии, что x считается величиной первого измерения, y-k-го измерения, dx и dy – соответственно нулевого и (k-1)-го измерений (так что $y' = \dfrac{dy}{dx}$ - величина (k-1)-го измерения).

Например, таким будет уравнение

$$\left(\frac{2}{x^2} - y^2\right)dx + dy = 0 \qquad (2)$$

Действительно при сделанном предположении относительно измерений x,y,dx и dy члены левой части $\dfrac{2}{x^2}dx,\ -y^2dx$ и dy имеют соответственные измерения *-2, 2k* и *k-1*. Приравнивая их, получаем условию, которому удовлетворяет искомое число k

$$-2 = 2k = k - 1$$

Это условие выполняется при k=*-1* (при этом k все члены левой части уравнения (2) будут иметь измерение -2). Следовательно, уравнение (2) является обобщенным однородным.

Обобщенное однородное уравнение (1) приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки

$$y = zx^2,$$

где z – новая неизвестная функция.

2.Примеры.

1. Проинтегрируем указанным методом уравнение (2). Так как k=*-1*, то следует положить $y = \dfrac{z}{x}$, после чего получим уравнение

$$(z^2 + z - 2)dx - xdz = 0$$

Интегрируя его, находим

$$z = \frac{C + 2x^2}{C - x^2}$$

Следовательно,

$$y=\frac{C+2x^3}{(C-x^3)x}.$$
Это есть общее решение уравнения (2).

2.Рассмотрим уравнение

$$\left(y+y\sqrt{x^2y^2-1}\right)dx+2xdy=0 \qquad (3)$$

Прежде всего, подберем число *k* (измерение переменной *y*) так, что оба члена, стоящие под знаком квадратного корня, x^2y^4 и -1 имели одно и то же измерение. Так как первый из них будет иметь измерение *2+4k*, а второй имеет нулевое измерение, то *2+4k=0*, откуда $k=-\frac{1}{2}$. При таком выборе *k* все члены левой части уравнения (3) имеет одно и то же измерение относительно *x,y,dx* и *dy*, равное $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, это уравнение – обобщенное однородное. Считая *x>0* и полагая $y=\frac{z}{\sqrt{x}}$, получаем

$$z\sqrt{z^4-1}dx+2xdz=0$$

Это уравнение имеет общий интеграл

$$\ln x+arctg\sqrt{z^4-1}=C$$

и особые решения $z=\pm 1$. Поэтому уравнение (3) имеет общий интеграл

$$\ln x+arctg\sqrt{x^2y^4-1}=C$$

и особые решения $y=\pm\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Для отрицательных значений *x* нужно в подстановке $y=\frac{z}{\sqrt{x}}$ заменить *x* на *–x* , что приведет к замене *x* на *–x* в найденных выше общем интеграле и особых решениях.

Решить дифференциальные уравнения:

1. $(y^4-3x^2)dy+xydx=0$

2. $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$

3. $(x^2y^2-1)y'+2xy^3=0$

4. $\left(1+\sqrt{\frac{y^2}{x}-1}\right)dx-2ydy=0$

Лекция № 10. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ.

П Л А Н

1. Построение общего решения.
2. Примеры.

1.Определение. Обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1}$$

называется линейным. При этом уравнение

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2}$$

в котором правая часть тождественно равна нулю, называется однородным, а уравнение (1), в котором $q(x) \neq 0$, - неоднородным.

Предполагаем, что $p(x)$ и $q(x)$ определены и непрерывны в интервале (a,b). Тогда через каждую точку (x_0,y_0) полосы

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty \tag{3}$$

проходит одна, и только одна, интегральная кривая уравнения (1). Это интегральная кривая определена во всем интервале (a,b).

Таким образом, при постановке задачи Коши для линейного уравнения число x_0 можно брать любым из интервала (a,b), а за y_0 можно брать любое число.

Всякое решение линейного уравнения есть частное, так что особых решений оно не имеет.

Однородное линейное уравнение всегда имеет нулевое решение $y \equiv 0$.

Общее решение однородного уравнения (2) в полосе (3) имеет вид

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \tag{4}$$

или, в форме Коши,

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx} \tag{5}$$

Все решения однородного линейного уравнения (2) содержатся в формуле общего решения (4) или (5).

Всякое ненулевое решение однородного линейного уравнения целиком расположено или выше, или ниже оси Ox. Если y_1 – ненулевое решение уравнения (2), то $y=Cy_1$ есть общее решение этого уравнения.

Общее решение неоднородного уравнения (1) в полосе (3) состоит из общего решения соответствующего ему однородного уравнения

$$z' + p(x)z = 0 \tag{6}$$

и какого-нибудь одного частного решения y_1 самого неоднородного уравнения (1), так что общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx} \tag{7}$$

Все решения неоднородного линейного уравнения (1) содержится в формуле общего решения (7).

Общее решение неоднородного уравнения (1) можно найти при помощи общего решения соответствующего однородного уравнения (6), варьируя в нем произвольную постоянную, т.е. полагая

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{8}$$

где *C(x)* – некоторая непрерывно дифференцируемая функция от *x* (метод Лагранжа). Для нахождения ее подставляем *y* из (8) в (1). Получаем

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

откуда

$$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C.$$

Подставляя это значение *C(x)* в (8), получаем

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right]. \tag{9}$$

Это есть общее решение уравнения (1) в области (3). Его можно переписать в форме Коши

$$y = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} q(x)e^{\int\limits_{x_0}^{x} p(x)dx}dx\right] \tag{10}$$

Отсюда видно, что всякое решение линейного уравнения является непрерывно дифференцируемой функцией как независимой переменной *x*, так и начальных данных x_0 и y_0.

Общее решение (9) неоднородного уравнения (1) может быть найдено также при помощи так называемого интегрирующего множителя (метод Эйлера). Умножаем обе части уравнения (1) на функцию $\mu = e^{\int p(x)dx}$ - интегрирующий множитель.

Получаем

$$y'e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

или

$$\left[ye^{\int p(x)dx}\right]' = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Следовательно,

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C,$$

откуда и вытекает формула (9).

2.Примеры.

1. Найти общее решение уравнения

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 0.$$

Выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

y=2 при *x=1*

Согласно формуле (4), общим решением будет

$$y = Ce^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = Ce^{\ln(1+x^2)}$$

или (так как $e^{\ln x} = x$)

$$y = C(1+x^2)$$

Решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию, в силу формулы (3) имеет вид

$$y = 2e^{\int_1^x \frac{2x}{1+x^2}dx} = 1+x^2, \quad y = 1+x^2$$

2.Проинтегрировать уравнение

$$y' + \frac{1}{x}y = 3x \quad (x > 0) \tag{11}$$

и найти решение, удовлетворяющее начальному условию

y=1 при *x=1* (12)

Согласно формуле (9),

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C + 3\int xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x}(C + x^2), \quad y = \frac{C}{x} + x^2.$$

При $x<0$ общее решение имеет тот же вид.

Для нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию (12), воспользуемся формулой (10). Получим

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(C + 3\int xe^{\int \frac{1}{x}dx}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + 3\int_1^x x^2 dx\right) = \frac{1}{x}(1 + x^2 - 1) = x^2, \quad y = x^2$$

Проинтегрируем уравнение (11) методом Эйлера. Здесь $\mu = x$, поэтому

$$(yx)' = 3x^2,$$

откуда

$$yx = x^3 + C, \quad y = x^2 + \frac{C}{x}.$$

3.Для уравнения

$$y' + ay = m, \tag{13}$$

где a, m – постоянные числа, отличные от нуля, легко найти одно частное решение, если искать его в виде $y = const$. Очевидно, таким частным решением будет $y_1 = \frac{m}{a}$. Так как соответствующее однородное уравнение $z' + az = 0$ имеет общее решение $z = Ce^{-ax}$, то общим решением уравнения (13) будет

$$y = \frac{m}{a} + Ce^{-ax}.$$

4.Рассмотрим уравнение

$$xdy + (x^2 - y)dx = 0. \quad (14)$$

Это уравнение после деления обеих его частей на xdx приводится к линейному уравнению

$$y' - \frac{y}{x} = -x.$$

Интегрируя его, получаем

$$y = x(C - x).$$

Решениями уравнения (14) будет также полуоси оси Oy: $x = 0 \quad (y \neq 0)$.

5.Уравнение

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0$$

приводится к линейному уравнению с неизвестной функцией x:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2}.$$

Интегрируя его, получаем:

$$x = Cy - \frac{y^2}{2}.$$

Найти решение с начальными данными x_0, y_0:

1. $y' + \frac{3}{x}y = \frac{2}{x^2}; \quad x_0 = 1, \ y_0 = 1$
2. $y' - 2xy = 1; \ x_0 = 0, \ y_0 = 0.$
3. $xy' = x + 2y; \ x_0 = 0, \ y_0 = 0$
4. $xy' = x + \frac{1}{2}y; \ x_0 = 0, \ y_0 = 0$
5. $xy' = x - y; \ x_0 = 0, \ y_0 = 0$
6. $xy' = x + y; \ x_0 = 0, \ y_0 = 0$

Лекция № 11. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ.

П Л А Н

1. Общие понятия.
2. Примеры.

1.Определение. Уравнение Бернулли имеет вид

$$y'+p(x)y=q(x)y^n, \tag{1}$$

где *p(x)* и *q(x)* – функции от *x*, которые предполагаем определенными и непрерывными в интервале (*a,b*), а *n*- вещественное число, отличное от 0 и 1, т.к. при $n=0$ и $n=1$ уравнение (1) обращается в линейное уравнение.

При сделанных предположениях существует единственное решение (интегральная кривая), проходящее через точку (x_0,y_0), где $x_0 \in (a,b)$, а $y_0 \neq 0$ и $y_0 > 0$, если *n* дробное. Это решение будет частным.

Уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению делением обеих частей его на y^n и введением новой искомой функции *z* по формуле

$$y^{1-n}=z.$$

При $n>0$ уравнение Бернулли имеет решение $y=0$. Это решение будет частным, если $n>1$, и особым, если $0<n<1$.

2.Примеры.

1. Проинтегрировать уравнение

$$y'-2xy=3x^3y^2 \tag{2}$$

и найти интегральную кривую, проходящую через точку (0,1).

Разделим обе части уравнения (2) на y^2:

$$y^{-2}y'-2xy^{-1}=2x^3 \tag{3}$$

Положим $y^{-1}=z$, тогда $-y^{-2}y'=z'$. Умножая обе части уравнения (3) на (-1) и выполняя указанную подстановку, получим линейное уравнение

$$z'+2xz=-2x^3.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$z=Ce^{-x^2}+1-x^2.$$

Следовательно, общим решением уравнения (2) будет

$$y=\frac{1}{Ce^{-x^2}+1-x^2}. \tag{4}$$

y=0 - частное решение (*n=2>1*); оно представляет собой асимптоту всех других интегральных кривых (4).

Интегральной кривой, проходящей через заданную точку (0,1) будет

$$y = \frac{1}{1-x^2}$$

2. Рассмотрим уравнение

$$y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = x\sqrt{y}\,. \qquad (5)$$

Делим обе части на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} + \frac{x}{1-x^2}\sqrt{y} = x \qquad (*)$$

Положим $\sqrt{y} = z$. Получим

$$z' + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1-x^2}\, z = \frac{1}{2}x\,.$$

Интегрируя это (линейное) уравнение, находим

$$z = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)\,.$$

Следовательно,

$$\sqrt{y} = C\sqrt[4]{1-x^2} - \frac{1}{3}(1-x^2)$$

есть общий интеграл уравнение (5).

y=0 - особое решение $\left(0 < n = \frac{1}{2} < 1\right)$.

3. Пусть дано уравнение

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{2y}\,.$$

Умножим обе части на *y*:

$$yy' - \frac{1}{x}y^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Положив $y^2 = z$, придем к уравнению $z' - \frac{2}{x}z = 1$, откуда $z = Cx^2 - x$, и, следовательно,

$$y^2 = Cx^2 - x\,.$$

Особых решений нет, обо *y=0* даже не является решением $(n=-1<0)$.

4. Рассмотрим уравнение

$$(xy+x^2y^3)y'=1$$

Перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy}=xy+x^2y^3.$$

Это уравнение Бернулли с неизвестной функцией *x*. Интегрируя его, находим

$$x=\frac{1}{Ce^{-\frac{y^2}{2}}-y^2+2}.$$

Решение $x=0$ является асимптотой всех других интегральных кривых.

Проинтегрировать следующие уравнения и, где указано, найти решение с начальными данными x_0, y_0:

1. $y'+2xy=2x^3y^3$
2. $xy'+y=y^2\ln x;\ \ x_0=1,\ \ y_0=1$
3. $3y^2y'+y^3+x=0$
4. $3y^2y'+y^3+x=0$
5. $y'-9x^2y=(x^5+x^2)y^{\frac{2}{3}};\ \ x_0=0,\ \ y_0=0$
6. $y'-y=xy^2;\ \ \ x_0=0,\ \ y_0=0$
7. $xy'-y=y^2;\ \ x_0,\ \ y_0=0$
8. $xy'+y=xy^2;\ \ x_0=0,\ \ y_0=0$
9. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{x^2\cos y+a\sin 2y}.$

10.

а) $\sqrt{xy}-\sqrt{x}\ \ dx+\ \sqrt{xy}-\sqrt{y}\ \ dy=0$

б) $xy\cdot y'=y^2+2x^2$

в) $y'=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}.$

Лекция № 12. УРАВНЕНИЕ РИККАТИ.

П Л А Н

1. Общие понятия.
2. Примеры.

1.Определение. Уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{1}$$

в котором правая часть есть квадратичная функция от искомой функций y, называется уравнением Риккати.

Предполагаем, что $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ определены и непрерывны в интервале (a,b). Тогда через всякую точку (x_0, y_0) полосы

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty \tag{2}$$

проходит одна, и только одна, интегральная кривая уравнения Риккати. Однако в отличие от линейного уравнения эта интегральная кривая в общем случае определена не во всем интервале (a,b), а лишь в некоторой окрестности начального значения независимой переменной. Например, решением уравнения $y' = y^2$ с начальными данными $x_0 = 0, \; y_0 = 1$ будет $y = \dfrac{1}{1-x}$. Это решение определено только при $x < 1$, хотя правая часть уравнения определена и непрерывна при всех x.

Всякая интегральная кривая уравнения Риккати представляет собой график частного решения этого уравнения, так что особых решений уравнение Риккати не имеет.

Уравнение Риккати интегрируется в квадратурах лишь в исключительных случаях.

Если известно одно частное решение y_1 уравнения Риккати, то подстановка

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \tag{3}$$

где z – новая неизвестная функция, приводит это уравнение к линейному уравнению.

Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2} \tag{4}$$

где A, B и C – постоянные числа, причем $(B+1)^2 \geq 4AC$, имеет частное решение вида

$$y_1 = \frac{a}{x}, \tag{5}$$

где a – некоторое постоянное число, определяемое подстановкой (5) в уравнение (4).

Уравнение (4) является также обобщенным однородным уравнением, в котором $k=-1$ и, следовательно, подстановкой $y=\dfrac{z}{x}$ всегда приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Уравнение Риккати вида

$$y'=a\frac{y^2}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{x}+c \qquad (6)$$

или

$$xy'-\frac{1}{2}y-ay^2=cx \qquad (6')$$

подстановкой

$$y=z\sqrt{x}$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\sqrt{x}z'=az^2+c$$

и, следовательно, всегда интегрируется в элементарных функциях.

Специальные уравнения Риккати

$$\frac{dy}{dx}+Ay^2=Bx^m$$

в случае, когда $m=0$, $m=-2$, интегрируется в элементарных функциях. Оно интегрируется в элементарных функциях также при всех m, для которых

$$\frac{m}{2m+4}=k \ (k\text{ - целое число}) \qquad (7)$$

ибо (если $m\neq 0$, $m\neq -2$) его можно привести к виду (6′).

Действительно, вводя вместо x и y новые переменные t и z по формулам

$$y=\frac{z}{x},\ \ x^{m+2}=t\ \ [z=z(t)]$$

получим уравнение вида

$$tz'+\alpha z+\beta z^2=\gamma t \quad \left(\alpha=k-\frac{1}{2}\right),$$

которое приводится к уравнению вида (6′) при помощи последовательного применения подстановок

$$z=\frac{t}{a+u},\ \ a=\frac{1+\alpha}{\gamma}\ \text{ или }\ z=a+\frac{t}{a},\ \ a=-\frac{\alpha}{\gamma}, \qquad (8)$$

соответственно увеличивающих или уменьшающих число α на единицу.

Уравнение Риккати (1) при помощи подстановки вида

$$y=\alpha(x)z$$

можно привести к такому уравнению Риккати, в котором коэффициент при квадрате функции равен +1 или -1.

Подстановкой вида

$$y = z + \beta(x)$$

можно, не меняя коэффициента при квадрате искомой функции, сделать коэффициент при искомой функции равным нулю.

Комбинируя указанные подстановки, всякое уравнение Риккати можно привести к виду

$$y' = \pm y^2 + R(x).$$

Если при этом окажется, что $R(x) = Bx^m$, то получим специальное уравнение Риккати.

2.Примеры.

1. Найти общее решение равнения

$$y' = -y^2 + 1 + x^2.$$

Очевидно, что $y_1 = x$ есть частное решение. Полагая $y = x + \frac{1}{z}$, получаем $z' - 2xz = 1$, откуда $z = e^{x^2}\left(C + \int e^{-x^2}dx\right)$. Следовательно,

$$y = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2}dx}.$$

2.Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2x^2} \qquad (9)$$

Это уравнение вида (4). Будем искать, частное решение его в виде $y_1 = \frac{a}{x}$. Подставляя y_1 в уравнение (9), получаем

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}, \quad a^2 + 2a + 1 = 0,$$

откуда *a=-1*. Следовательно, $y_1 = -\frac{1}{x}$. Полагая теперь $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$, придем к линейному уравнению $z' - \frac{1}{x}$, $z = -\frac{1}{2}$. Интегрируя его, находим $z = -\frac{x}{2}(C - \ln|x|)$. Поэтому $y = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln|x|)}$.

3. Проинтегрировать специальное уравнение Риккати

$$y' = y^2 + x^{-4}. \qquad (10)$$

Здесь m=-4, условия (7) выполнено, причем k=1. Выполняя подстановки

$$y = \frac{z}{x},\ \ x^{-2} = t \quad [z = z(t)],$$

Получим

$$tz' + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t \ \left(\alpha = \frac{1}{2}\right).$$

Чтобы привести это уравнение к виду ($6^{/}$), нужно применить один раз вторую из подстановок (8), т.е.

$$z = -1 + \frac{t}{u},$$

после чего получим

$$tu' - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}t.$$

Это уравнение вида ($6^{/}$). Пологая

$$u = \upsilon\sqrt{t},$$

находим

$$\sqrt{t}\upsilon' = \frac{1+\upsilon^2}{2},$$

откуда

$$\upsilon = tg\left(\sqrt{t} + C\right)\left(-C - \frac{\pi}{2} < \sqrt{t} < -C + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно,

$$u = \sqrt{t}tg\left(\sqrt{t} + C\right), z = -1 + \sqrt{t}ctg\left(\sqrt{t} + C\right).$$

Поэтому общим решением уравнения (10) будет

$$y = \frac{1}{x^2}ctg\left(\frac{1}{x} + C\right) - \frac{1}{x}.$$

Проинтегрировать следующие специальные уравнения Риккати:

1. $y' = y^2 + x^{-\frac{4}{3}}.$
2. $y' = -y^2 + x^{-\frac{8}{3}}.$
3. $y' = -y^2 + x^{-4}.$
4. $y' = y^2 + x^{-\frac{8}{5}}.$

Лекция № 13. УРАВНЕНИЕ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ.

П Л А Н

1. **Построение общего интеграла.**
2. **Решение задачи Коши.**
3. **Примеры.**

1. Определение. Если в уравнении

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, то оно называется *уравнением в полных дифференциалах.* Это уравнение можно переписать в виде $dU = 0$, так что его общий интеграл имеет вид

$$U(x,y) = C. \qquad (2)$$

Например, уравнение $xdy + ydx = 0$ есть уравнение в полных дифференциалах, т.к. его можно переписать в виде $d(xy) = 0$. Общим интегралом будет $xy = C$.

Предположим, что функции M и N определены и непрерывны в некоторой односвязной области D и имеют в ней непрерывные частные производные соответственно по y и по x. Тогда, *для того чтобы уравнение (1) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно чтобы выполнялось тождество*

$$\frac{dM}{dy} \equiv \frac{dN}{dx}. \qquad (3)$$

Если условие (3) выполнено, то общий интеграл можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = C \qquad (4)$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = C, \qquad (5)$$

где нижние пределы x_0 и y_0 можно выбирать произвольно, но так, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала области D.

В этих формулах интегрирование производится по одной из переменных, в то время как вторая является параметром, причем в одном из интегралов параметр фиксируется (он полагается равным нижнему пределу другого интеграла).

Особых решений уравнение в полных дифференциалах не имеет.

Укажем другой способ нахождения общего интеграла уравнения в полных дифференциалах, который часто оказывается на практике более удобным.

Функция U в (2) должна удовлетворять системе уравнений

$$\frac{dU}{dx} = M(x,y),\ \frac{dU}{dy} = N(x,y) \qquad (6)$$

Интегрируя (частным образом) по x первое из уравнений (6), имеем

$$U(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y), \qquad (7)$$

где $\varphi(y)$ любая функция от y.

Выберем $\varphi(y)$ так, чтобы функция (7) была решением и второго из уравнений (6). Дифференцируя (7) по y и помогая $\frac{dU}{dy} = N,$ получим для нахождения $\varphi(y)$ легко интегрируемое дифференциальное уравнение

$$\varphi'(y) = \omega(y),$$

правая часть которого зависит только от y. Интегрируя это уравнение, видим, что в качестве $\varphi(y)$ можно взять

$$\varphi(y) = \int \omega(y)dy.$$

Поэтому общий интеграл (2) можно записать так:

$$\int M(x,y)dx + \int \omega(y)dy = C.$$

Аналогично, исходя из уравнения $\frac{dU}{dy} = N,$ придем к общему интегралу вида

$$\int N(x,y)dy + \int \omega_1(x)dx = C. \qquad (5')$$

2. *Решение задачи Коши.* Решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 из области D, в случае, когда в точке (x_0, y_0) функции M и N не обращаются одновременно в нуль, получается из общего интеграла (4) или (5) при $C=0$, т.е. по одной из формул

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = 0 \qquad (4'')$$

или

$$\int_{x_0}^{x} M(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x,y)dy = 0 \qquad (5'')$$

Если в точке (x_0, y_0) функции M и N одновременно обращаются в нуль, так что в ней поле не определено, то мы имеем особый случай задачи Коши. Решение может не существовать или не быть единственным.

Решение задачи Коши в случае, когда общий интеграл найден в виде $(4')$ или $(5')$ находится обычным способом (соответствующее значение произвольной постоянной C определяется подстановкой начальных данных в формулу общего интеграла).

3. Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0 \qquad (8).$$

Здесь $\dfrac{dM}{dy} = 12xy,\ \dfrac{dN}{dx} = 12xy,$ так что условие (3) выполнено, и, следовательно, уравнение (8) есть уравнение в полных дифференциалах.

Покажем, что уравнение (8) легко привести к виду *dU=0* непосредственной группировкой членов. С этой целью запишем его так:

$$3x^2dx + 6xy(ydx + xdy) + 4y^3dy = 0. \qquad (9)$$

Здесь $3x^2dx = d(x^3), \qquad 6xy(ydx + xdy) = 6xyd(xy) = d[3(xy)^2],$

$4y^3dy = d(y^4).$ Поэтому уравнение (9) можно записать в виде

$$d(x^3) + d[3(xy)^2] + d(y^4) = 0$$

или

$$d[x^3 + 3(xy)^2 + y^4] = 0. \qquad (10)$$

Следовательно,

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C \qquad (11)$$

есть общий интеграл уравнения (8). Его левая часть, т.е. функция $x^3 + 3x^2y^2 + y^4$, является интегралом уравнения (8).

Найдем общий интеграл уравнения (8) по одной из формул общего интеграла, например по формуле (4). Взяв $x_0 = 0,\ y_0 = 0,$ получим

$$\int_0^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y 4y^3dy = C. \qquad (12)$$

Выполняя квадратуры, снова приходим к общему интегралу (11).

Найдем решение уравнения (8) с начальными данными $x_0=1,\ y_0=0.$ Пользуясь общим интегралом (11), находим C=1, так что искомым решением будет

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = 1 \qquad (13)$$

Искомое решение можно найти сразу по одной из формул (4″) и (5″). Пользуясь, например формулой (4″), имеем

$$\int_1^x (3x^2 + 6xy^2)dx + \int_0^y (6y + 4y^3)dy = 0 \qquad (14)$$

откуда снова получаем искомое решение в виде (13).

2.Пусть дано уравнение

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = 0 \qquad (15)$$

Это уравнение в полных дифференциалах. Но непосредственное интегрирование его (группировка членов) затруднительно. Поэтому воспользуемся сразу формулой общего интеграла. Возьмем формулу (4), положив $x_0=1,\ y_0=2.$

$$\int_1^x \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \int_0^y \left[\frac{1}{(1-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy = C$$

или

$$\ln\frac{x}{y} + \frac{xy}{x-y} = C \qquad (16)$$

Найдем общий интеграл уравнения (15) другим способом. Интегрируя по x коэффициент при dx, получим

$$U(x,y) = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \varphi(y)$$

или

$$U(x,y) = \ln x + \frac{y^2}{x-y} + \varphi(y) \qquad (17)$$

Дифференцируя по y и приравнивая коэффициенты при dy находим

$$\frac{2xy - y^2}{(x-y)^2} + \varphi'(y) = \frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y},$$

откуда

$$\varphi'(y) = 1 - \frac{1}{y},$$

а тогда

$$\varphi(y) = y - \ln y.$$

Подставляя это значение $\varphi(y)$ в (17) и полагая $U=C$, найдем общий интеграл, который снова будет иметь вид (16).

Найти интегралы и общие интегралы следующих уравнений, не пользуясь формулами общего интеграла:

1. $xdx + ydy = 0$

2. $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$

3. $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$

4. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

5. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$

6. $xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$

7. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

8. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0.$

Лекция № 14. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

П Л А Н

1. Общие понятия.
2. Примеры.

1.Определение. Если уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

не является уравнением в полных дифференциалах и существует функция $\mu=\mu(x,y)$ такая, что после умножения на нее обеих частей уравнения (1) получается уравнение

$$\mu(Mdx+Ndy)=0 \qquad (2)$$

в полных дифференциалах, т.е.

$$\mu(Mdx+Ndy)=dU, \qquad (3)$$

то функция μ называется интегрирующим множителем, а функция U соответствующим ему интегралом уравнения (1). В случае, когда уравнение (1) уже есть уравнение в полных дифференциалах, полагают $\mu\equiv 1$.

Если найден интегрирующий множитель μ, то интегрирование данного уравнения сводится к умножению обеих его частей на μ и нахождению общего интеграла полученного уравнения в полных дифференциалах.

Однако может случиться, что при этом теряем некоторые решения данного уравнения (эти решения могут быть особыми) или получаем посторонние решения. Первое может иметь место, когда во всех точках некоторой кривой μ обращается в бесконечность, второе – когда μ обращается в нуль.

Если μ есть непрерывно дифференцируемая функция от x и y, то

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что интегрирующий множитель μ удовлетворяет следующему уравнению с частными производными первого порядка:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (4)$$

Если заранее известно, что $\mu=\mu(\omega)$, где ω - заданная функция от x и y, то уравнение (4) сводится к обыкновенному (и притом линейному) уравнению с неизвестной функцией μ от независимой переменной ω:

$$\frac{d\mu}{d\omega}=\psi(\omega)\mu, \qquad (5)$$

где

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}\equiv\psi(\omega) \qquad (6)$$

т.е. дробь слева является функцией только от ω.

Решая уравнение (5), находим интегрирующий множитель

$$\mu=e^{\int\psi(\omega)d\omega} \quad (C=1) \qquad (7)$$

В частности, уравнение (1) имеет интегрирующий множитель, зависящий только от x $(\omega=x)$ или только от y ($\omega=y$), если выполнены соответственно следующие условия:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\psi(x) \qquad \left(\mu=e^{\int\psi(x)dx}\right) \qquad (8)$$

или

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\psi(y) \qquad \left(\mu=e^{\int\psi(y)dy}\right) \qquad (8')$$

Однородное уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель

$$\mu=\frac{1}{Mx+Ny},$$

если только $Mx+Ny\neq 0$. При этом уравнение $Mx+Ny=0$ определяет все кривые, подозрительные на особое решение.

Знание двух различных интегрирующих множитель уравнения (1) дает возможность написать его общий интеграл вовсе без квадратур. А именно, если μ_1 и μ_2 суть два интегрирующих множителя уравнения (1), причем $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}\neq const$, то $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}=C$ есть общий интеграл этого уравнения.

Отсюда следует, что если уравнение (1) есть уравнение в полнЫх дифференциалах и известен его интегрируюўий множитель $\mu\neq const$, то $\mu=C$ является общим интегралом этого уравнения.

В частности, если уравнение (1) есть однородное и в полных дифференциалах, то $Mx+Ny=C$ является его общим интегралом, если только $Mx+Ny\neq const$.

Интегрирующий множитель уравнения (1) иногда можно найти при помощи разбиения этого уравнения на группы, для каждой из которых легко находится интегрирующий множитель.

Пусть уравнение (1) допускает разбиение на две такие группы

$$\left(M_1(x,y)dx+N_1(x,y)dy\right)+\left(M_2(x,y)dx+N_2(x,y)dy\right)=0 \qquad (1')$$

И пусть μ_1 и μ_2 их интегрирующие множители, так что

$$\mu_1 (M_1 dx + N_1 dy) = dU_1, \ \ \mu_2 (M_2 dx + N_2 dy) = dU_2$$

Попытаемся подобрать функции $\varphi(U_1)$ и $\psi(U_2)$ таким образом, чтобы

$$\mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2). \tag{9}$$

Тогда функция

$$\mu = \mu_1\varphi(U_1) = \mu_2\psi(U_2)$$

будет интегрирующим множителем всего уравнения ($1^{/}$) (почему?), которое после умножения обеих его частей на этот интегрирующий множитель примет вид

$$\varphi(U_1)dU_1 + \psi(U_2)dU_2 = 0,$$

и, следовательно, общим интегралом уравнения (1) будет

$$\int\varphi(U_1)dU_1 + \int\psi(U_2)dU_2 = C. \tag{10}$$

Замечание. Подбор функции φ и ψ иногда облегчается заменой интегралом U_1 и U_2 другими интегралами, определенными в той же области (см. ниже пример 3). Но тогда нельзя записывать общий интеграл по формуле (10).

2. Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$(1 - x^2 y)dx + x^2 (y - x)dy = 0. \tag{11}$$

Проверим, не имеет ли оно интегрирующий множитель, зависящий только от x? Имеем

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2 (y - x)} = -\frac{2}{x} \equiv \psi(x), \tag{12}$$

т.е. условие (8) выполнено. Поэтому

$$\mu = e^{\int\psi(x)dx} = e^{-\int\frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}. \tag{13}$$

Умножая обе части уравнения (11) на $\frac{1}{x^2}$, получим

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0. \tag{14}$$

Для контроля вЫчислений убеждаемся, что это уравнение в полнЫх дифференциалах. Интегрируя его (непосредственной группировкой членов), находим

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C. \tag{15}$$

Прежде чем считать интегрирование данного уравнения законченным, можно посмотреть, не обращается ли μ в ∞ или в 0.

Хотя μ и обращается в бесконечность при *x=0* и *x=0* является решение данного уравнения (11), но это решение частное; оно содержится в общем интеграле (15) при С=∞.

В нуль μ не обращается.

2. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\sqrt{x^2-y}+2x\right)dx-dy=0. \qquad (16)$$

если известно, что для него $\mu=\mu(x^2-y)$.

Полагаем в условии (6) $\omega=(x^2-y)$:

$$\frac{\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}}{N\frac{d\omega}{dx}-M\frac{d\omega}{dy}}=\frac{\frac{-1}{2\sqrt{x^2-y}}}{-2x+\left(\sqrt{x^2-y}+2x\right)}=$$

$$=-\frac{1}{2\left(x^2-y\right)}=-\frac{1}{2\omega}\equiv\psi(\omega). \qquad (17)$$

Поэтому

$$\mu=e^{\int\psi(\omega)d\omega}=e^{-\int\frac{1}{2\omega}d\omega}=\frac{1}{\sqrt{\omega}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}. \qquad (18)$$

Умножая обе части уравнения (16) на $\frac{1}{\sqrt{x^2-y}}$ и интегрируя, находим

$$x+2\sqrt{x^2-y}=C.$$

Здесь μ обращается в бесконечность в точках кривой $y=x^2$. Функция $y=x^2$ является решением уравнения (16) и притом особым .

3. Проинтегрировать уравнение

$$y(1+xy)dx+\left(\frac{1}{2}x^2y+y+1\right)dy=0 \qquad (19)$$

При помощи интегрирующего множителя, найдя последний разбиением уравнения на группы.

Перепишем уравнение (19) в виде следующих двух групп:

$$\left[y(1+xy)dx+\frac{1}{2}x^2ydy\right]+(y+1)dy=0. \qquad (20)$$

Для первой из них

$$\mu_1=\frac{1}{y},\ U_1=x+\frac{1}{2}x^2y.$$

Вторая группа представляет собой, очевидно, полный дифференциал, так что

$$\mu_2=1,\quad U_2=\frac{y^2}{2}+y.$$

Равенство (9) примет вид

$$\frac{1}{y}\varphi\left(x+\frac{1}{2}x^2y\right)=1\psi\left(\frac{y^2}{2}+y\right) \qquad (21)$$

Функцию φ нужно подобрать так, чтобы левая часть этого равенства стала функцией, зависящей только от y. поэтому нужно положить $\varphi(U_1)=const$, например $\varphi(U_1)=1$. Для удобства подбора функции ψ заменим интеграл U_2 интегралам $\overline{U}_2 = y$. Тогда (21) примет вид

$$\frac{1}{y}=\psi(y),$$

так что интегрирующим множителем уравнения (19) будет

$$\mu=\frac{1}{y}$$

Умножая обе части уравнения (19) на $\mu=\frac{1}{y}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(1+xy)dx+\left(\frac{1}{2}x^2+1+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

Интегрируя его, находим:

$$U=x+\frac{x^2}{2}y+\varphi(y);$$

$$\varphi'(y)=1+\frac{1}{y}, \quad \varphi(y)=y+\ln y.$$

Общим интегралом уравнения (19) будет

$$x+\frac{x^2}{2}y+y+\ln y=C.$$

Проинтегрировать следующие уравнения, для которых $\mu=\mu(x)$ или $\mu=\mu(y)$:

1. $\left(\frac{x}{y}+1\right)dx+\left(\frac{x}{y}-1\right)dy=0$ 2. $(x^2+y)dx-xdy=0$

3. $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$ 4. $(xy^2+y)dx-xdy=0$

5. $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0$

Вопросы

1.Что называется обыкновенным дифференциальным уравнением? Что такое порядок дифференциального уравнения? Что такое степень дифференциального уравнения? Всякое ли дифференциальное уравнение имеет степень?
2.Что называется решением (интегральной кривой) дифференциального уравнения? В чем состоит задача интегрирования дифференциального уравнения?
3.Каковы основные формы задания уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? В каких видах могут быть заданы решения?
4.Как возникают в исследованиях дифференциальные уравнения? Как составить дифференциальное уравнение заданного однопараметрического семейства кривых?
5.Как определить наклон интегральной кривой уравнения первого порядка в заданной точке (x_0,y_0) по виду уравнения? Что такое поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением? Что такое изоклины? Может ли интегральная кривая уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной, иметь излом? Могут ли интегральные кривые этого уравнения пересекаться между собой? Могут ли они касаться друг друга?
6.В чем состоит задача Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной? При каком условии она имеет решение? При каких условиях это решение будет заведомо единственным?
7.Что такое общее решение? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Что такое общее решение в форме Коши? Что такое общий интеграл? Что такое общее решение в параметрической форме?
8.Что такое частное решение? Как оно связано с формулой общего решения?
9.Какое решение называется особым? Как оно может быть связано с формулой общего решения? Как найти кривые, подозрительные на особое решение по самому дифференциальному уравнению? В каком случае уравнение заведомо не имеет особых решений? Почему огибающая семейства интегральных кривых будет особым решением? Как можно обнаружить кривые, подозрительные на особое решение, в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения? Может ли дифференциальное уравнение иметь решения, которые не являются ни частными, ни особыми?
10.Как интегрируются неполные дифференциальные уравнения вида $y'=f(x),\ y'=f(y)$?
11.Как интегрируются уравнения с разделенными и разделяющимися переменными?
12.Какое уравнение называется однородным (положительно однородным)? Какова особенность поля направлений, определяемого этим уравнением? Что

представляют собой изоклины однородного уравнения? Как оно интегрируется?

13.Какое уравнение называется обобщенным однородным? Как оно интегрируется?

14.Какое уравнение называется линейным? При каком условии задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение? Какова при этом условии степень произвола выбора начальных данных решений этого уравнения? В каком интервале существуют решения? Может ли график ненулевого решения однородного уравнения пересекать ось Ox или касаться ее? Может ли линейное уравнение иметь особые решения?

15.Какой вид имеет общее решение однородного линейного уравнения (в обычной форме и в форме Коши)? Как найти общее решение однородного линейного уравнения, если известно одно ненулевое частное решение его?

16.Как найти общее решение неоднородного линейного уравнения, если известно одно частное решение его и общее решение соответствующего однородного уравнения?

17.В чем состоят метод Лагранжа и метод Эйлера нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения?

18.Какой вид имеет общее решение неоднородного линейного уравнения (в обычной форме и в форме Коши)?

19.Как интегрируется уравнение Бернулли? При каком условии $y=0$ будет решением, когда это решение является частным и когда особым?

20.Как интегрируется уравнение Дарбу?

21.Какой вид имеет уравнение Риккати? Какова степень произвола выбора начальных данных решений этого уравнения? Гарантируется ли существование решения во всем интервале непрерывности коэффициентов уравнения? Может ли уравнение Риккати иметь особые решения? Как найти общее решение уравнения Риккати, если известно одно частное решение его?

22.При каком условии уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах? Какой вид имеет его общий интеграл?

23.В чем состоит метод интегрирующего множителя? При каком условии существует интегрирующий множитель, зависящий: а) от заданной функции от x и y; б) только от x; в) от y.

Лекция № 15. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ.

П Л А Н

1. Основные понятия и определения.
2. Нахождение особых решений.
3. Уравнения, квадратные относительно y'.
4. Примеры.

1.Определение. Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, имеет следующий общий вид:

$$F(x,y,y')=0 \tag{1}$$

Функция $y=y(x)$, имеющая непрерывную производную и обращающая уравнение (1) в тождество, называется решением этого уравнения. Решение может быть задано в неявном виде $\Phi(x,y)=0$ и в параметрической форме: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$.

График решения называется интегральной кривой. Все интегральные кривые являются гладкими.

Как и уравнение, разрешенное относительно производной, уравнение (1) определяет некоторое поле направлений. На здесь, в каждой точке $(x_0.y_0)$ задается несколько направлений поля, т.е. несколько значений y'. Все они находятся из уравнения

$$F(x_0,y_0,y')=0$$

Интегральная кривая обладает тем свойством, что в каждой ее точке направление касательной совпадает с одним из направлений поля, определяемых уравнением (1) в этой точке.

Задача нахождения интегральной кривой, проходящей через заданную точку (x_0,y_0), называется задачей Коши.

Решение называется частным, если в каждой точке его сохраняется единственность решения *задачи Коши.*

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется особым.

2.*Нахождение особых решений.* Если левая часть уравнения (1) непрерывна и имеет частную производную по y', то кривую, подозрительную на особое решение, можно найти исключением y' из системы

$$\left.\begin{aligned} &F(x,y,y')=0,\\ &\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \end{aligned}\right\}$$

Эта кривая называется дискриминантной кривой уравнения (1). Чтобы она была особым решением, нужно, чтобы она была решением уравнения (1) и чтобы в каждой точке ее нарушалась единственность решении задачи Коши.

Огибающая семейства интегральных кривых всегда является особым решением.

Кривые, подозрительные на особое решение, можно обнаружить также в процессе интегрирования данного дифференциального уравнения.

Построение общего интеграла. Рассмотрим уравнение вида

$$A_0(x,y)y'^n + A_1(x,y)y'^{n-1} + \ldots + \\ + A_{n-1}(x,y)y' + A_n(x,y) = 0 \qquad (2)$$

в котором левая часть есть полином n-й степени относительно y'. Такое уравнение называется уравнением первого порядка n-й степени. Предположим, что разрешая его относительно y', получаем $m(m \le n)$ вещественных решений:

$$y' = f_k(x,y) \ \ (k = 1,2,\ldots,m) \qquad (3)$$

Если для каждого из полученных уравнений (3) удастся найти общий интеграл

$$\psi_k(x,y) = C \quad (k = 1,2,\ldots,m),$$

то совокупность последних называется *общим интегралом уравнения* (1). Этот общий интеграл можно записать и в виде одного соотношения

$$[\psi_1(x,y) - C]\ [\psi_2(x,y) - C]\ldots[\psi_m(x,y) - C] = 0,$$

в котором левая часть есть полином m-й степени относительно произвольной постоянной C.

Особые решения. Если уравнение (3) имеют особые решения, то каждое из этих решений будет особым решением уравнения (1).

3. *Уравнения, квадратные относительно y'.* Это уравнение вида

$$y'^2 + 2P(x,y)y' + Q(x,y) = 0 \qquad (4)$$

Решаем (4) относительно y':

$$y' = -P(x,y) \pm \sqrt{P^2(x,y) - Q(x,y)}.$$

Эти уравнения заданы в области P^2-$Q \ge 0$. Интегрируя их, найдем общий интеграл уравнения (4).

Особым решением может быть только дискриминантная кривая

$$P^2(x,y) - Q(x,y) = 0,$$

получающаяся, исключением y' из системы

$$\left.\begin{aligned} y'^2 + 2P(x,y)y' + Q(x,y) = 0,\\ 2y' + 2P(x,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

4.Примеры.

Проинтегрировать уравнение

$$y'^2 - 4x^2 = 0 \qquad (5)$$

и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку: а) *M(1,1);* б) *O(0,0)*.

Из (5) находим

$$y' = 2x, \quad y' = -2x.$$

Интегрируя, получаем

$$y = x^2 + C, \quad y = -x^2 + C \qquad (6)$$

или

$$(y - x^2 - C)(y + x^2 - C) = 0.$$

Это общий интеграл. Он представляет собой два семейства парабол (6), наложенных друг на друга.

Особых решений нет.

Решим поставленные задачи Коши:

а) подставляя начальные данные $x_0=1$, $y_0=1$ в первое из семейства (6), имеем 1=1+C, откуда C =0. Поэтому $y = x^2$.

Аналогично второе из семейств (6) дает решение $y = -x^2 + 2$. Итак, через точку $M(1,1)$ проходят две интегральные кривые: $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$. Единственность решения задачи Коши при этом не нарушается, ибо в точке $M(1,1)$ уравнение (5) определяет два направления поля: $y'=2$ и $y'=-2$.

б) подставляя начальные данные $x_0=0$, $y_0=0$ в (6), выделим решения $y = x^2$ и $y = -x^2$. Кроме того, решениями будут

$$y = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ -x^2, & x \ge 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} -x^2, & x \le 0, \\ x^2, & x \ge 0 \end{cases}.$$

Единственность решения задачи Коши в точке $O(0,0)$ нарушена, ибо направление поля в этой точке одно: $y'=0$, в то время как через нее проходит не одна интегральная кривая.

Проинтегрировать следующие уравнения и, где указано, выделить интегральные кривые, проходящие через заданную точку $M(x_0,y_0)$:

1. $yy'^2 - (xy+1)y' + x = 0;\ \ M(1,1)$
2. $y'^2 - 4y = 0;\quad M(1,1);\ \ M(1,0)$
3. $y'^2 = 4|y|$ 4. $y'^2 = \dfrac{1}{4|x|}$ 5. $y^2(1 + y'^2) = a^2$
6. $y'^3 - \dfrac{1}{4x} y' = 0$
7. $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0;\ \ M(0,1), M(1,0), M(0,0)$
8. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$
9. $xy' = \sqrt{1 + y^2}$
10. $x^2 y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

Лекция № 16. НЕПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

П Л А Н

1. Уравнение, содержащее только *y′*.
2. Уравнение, не содержащее искомой функции.
3. Уравнение, не содержащее независимой переменной.
4. Примеры.

1. *Уравнение, содержащее только y′*:

$$F(y')=0 \qquad (1)$$

Это уравнение имеет общий интеграл

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0 \qquad (2)$$

Если корни уравнения $F(t)=0$ заполняют сплошь некоторый интервал, то уравнение (1) может иметь решения, не содержащиеся в (2).

2. *Уравнение, не содержащее искомой функции:*

$$F(x,y')=0 \qquad (3)$$

Рассмотрим два случая.

1.Уравнение (3) разрешимо относительно y'. Пусть оно определяет m значений y':

$$y'=f_k(x) \quad (k=1,2,...,m).$$

Отсюда получаем

$$y=\int f_k(x)dx+C \qquad (k=1,2,...,m).$$

2.Уравнение (3) неразрешимо (в элементарных функциях) относительно y', но допускает параметрическое представление:

$$x=\varphi(t), \quad y'=\psi(t). \qquad (4)$$

В этом случае удается найти общее решение в параметрической форме.

Воспользуемся для этого основным соотношением $dy=y'dx$.

Заменим справа y' и dx их значениями из (4):

$$dy=\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Интегрируя, найдем

$$y=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C.$$

Присоединяя сюда $x=\varphi(t)$, получаем общее решение уравнения (3) в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(t)\\ y&=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C\end{aligned}\right\}$$

Если существует такое конечное число a, при котором

$$\lim_{\substack{y'\to+\infty\\(y'\to-\infty)}} F(a,y')=0,$$

то $x=a$ есть решение уравнения (3). Это решение может оказаться особым.

3. *Уравнение, не содержащее независимой переменной:*

$$F(y,y')=0 \qquad (5)$$

Здесь также имеют место два случая.

1. Уравнение (5) разрешимо относительно y':

$$y'=f_k(y) \quad (k=1,2,...,m).$$

Тогда

$$\int\frac{dy}{f_k(y)}=x+C \quad (k=1,2,...,m).$$

2. Уравнение (5) допускает параметрическое представление:

$$y=\varphi(t), \quad y'=\psi(t).$$

Тогда

$$dy=y'dx, \quad \varphi'(t)dt=\psi(t)dx=\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)},$$

поэтому

$$\left.\begin{aligned} x&=\int\frac{\varphi'(t)dt}{\psi(t)}+C \\ y&=\varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

Уравнение (5) может иметь особые решения вида $y=b$, где b определяется из уравнения

$$F(b,0)=0.$$

4.Примеры.

1.Рассмотрим уравнение

$$e^{y'}+y'=1.$$

Это уравнение типа (1). Его общим интегралом будет

$$e^{\frac{y-C}{x}}+\frac{y-C}{x}=1.$$

2.Проинтегрировать уравнение

$$e^{y'}+y'=x. \qquad (6)$$

Это уравнение типа (3). Но оно разрешено относительно x. в таких случаях за параметр обычно принимают y', т.е. полагают $y'=t$, после чего x легко выражается через t, $x=e^t+t$.

В результате получаем параметрическое представление уравнения (6) в виде

$$\left.\begin{aligned} x&=e^t+t, \\ y'&=t \end{aligned}\right\}$$

Теперь имеем:

$$dy = y'\,dx = t(e^t + 1)dt, \quad y = \int t(e^t + 1)dt + C$$

$$y = e^t(t-1) + \frac{t^2}{2} + C,$$

так что

$$\left.\begin{aligned} &x = e^t + t, \\ &y = e^t(t-1) + \frac{t^2}{2} + C \end{aligned}\right\}$$

3.Пусть дано уравнение

$$x = \frac{ky'}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{7}$$

Хотя это уравнение тоже разрешено относительно *x*, тем не менее с целью упрощения вычисления интеграла при нахождении *y* удобное положить не $y'=t$ а $y'=tgt$. Тогда параметрическим представлением уравнения (7) будет

$$\left.\begin{aligned} &x = \pm k \sin t, \\ &y' = tgt. \end{aligned}\right\}$$

Далее находим

$$dy = \pm tgt \cdot k \cos t dt = \pm k \sin t dt, \quad y = \pm k \cos t + C \quad .$$

В результате имеем

$$\left.\begin{aligned} &x = \pm k \sin t, \\ &y = \pm k \cos t + C \end{aligned}\right\}$$

Исключая параметр *t*, получим общий интеграл

$$x^2 + (y - C)^2 = k^2 \tag{8}$$

Посмотрим, не имеет ли уравнение (7) решений вида $x=a$, о которых шла речь в 2. Правая часть уравнения (7) имеет конечные пределы при $y' = \pm\infty$. Они равны $\pm k$. Поэтому прямые $x=\pm k$ будут решениями уравнения (7). Эти решения – особые. Они являются огибающими семейства (8).

Проинтегрировать следующие уравнения:

1. $y'^3 + 1 = 0$
2. $y'^3 - 3y' + 1 = 0$
3. $y' - \sin y' = 0$
4. $y' - |y'| = 0$

Лекция № 17. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И КЛЕРО.

П Л А Н

1. Уравнение Лагранжа.
2. Уравнение Клеро.
3. Примеры.

1.Определение 1. Уравнение вида

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \ \ [\varphi(y') \neq y'],$$

в котором y является линейной функцией от x с коэффициентами, зависящими от y', причем коэффициент при x не равен y', называется *уравнением Лагранжа.* Построение его общего решения в параметрической форме сводится к интегральному некоторого линейного уравнения.

Положим $y'=p$, где p – параметр, тогда

$$y = \varphi(p)x + \psi(p). \qquad (1)$$

Заменим в равенстве $dy=y'dx$ величину dy ее значением из (1), а вместо y' подставим p:

$$\varphi(p)dx + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp = pdx$$

или

$$[\varphi(p) - p]dx + [\varphi'(p)x + \psi'(p)]dp = 0.$$

Это уравнение можно привести к линейному уравнению с искомой функцией x, если разделить обе части его на dp и $\varphi(p)$-p.

Получим

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}[\varphi(p) - p = 0] \qquad (2)$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$x = A(p)C + B(p).$$

Подставляем это значение x в (1):

$$y = A_1(p)C + B_1(p).$$

Таким образом, уравнение Лагранжа имеет следующее общее решение в параметрической форме:

$$\left.\begin{aligned} x &= A(p)C + B(p) \\ y &= A_1(p)C + B_1(p) \end{aligned}\right\}$$

Если уравнение $\varphi(p) - p = 0$ имеет вещественные решения $p = p_i(i = 1,2,...,n)$, то, подставляя их в (1) и принимая во внимание, что $\varphi(p_i) = p_i$ получим

$$y = p_i x + \psi(p_i) \quad (i = 1,2,...,n)$$

Эти прямые линии могут оказаться особыми решениями уравнения Лагранжа.

2.Определение 2. Уравнение вида

$$y = xy' + \psi(y') \quad [\psi(y') \neq ay' + b] \qquad (3)$$

называется *уравнением Клеро.* Оно отличается от уравнения Лагранжа только тем, что в нем коэффициент при x равен y'.

Применяя тот же метод, что и для интегрирования уравнения Лагранжа, полагаем $y'=p$. Тогда (3) примет вид

$$y=xp+\psi(p) \qquad (4)$$

Далее имеем

$$dy = y'dx, \quad pdx + [x + \varphi'(p)]dp = pdx$$

или

$$[x + \psi'(p)]dp = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$dp = 0 \text{ и } x + \psi'(p) = 0.$$

Из $dp=0$ следует, что $p=C$. Подставляя это значение p в (4), получим

$$Y=xC+\psi(C) \qquad (5)$$

Это семейство прямых линий есть общее решение уравнения Клеро. Оно получается из уравнения Клеро заменой y' на C.

Уравнение $x+\psi'(p)=C$ вместе с уравнением (4) образует решение уравнения Клеро в параметрической форме

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(p), \\ y &= -\psi'(p)p + \psi(p) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

которое обычно является особым. Оно будет заведомо особым, если $\psi''(p)$ сохраняет знак, ибо тогда (6) будет огибающей семейства (5).

В самом деле, дискриминантной кривой семейства (5) будет

$$\left.\begin{aligned} y &= xC + \psi(C), \\ 0 &= x + \psi'(C) \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= -\psi'(C), \\ y &= -\psi'(C)C + \psi(C) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Что отличается от (6) только обозначением параметра. Если $\psi''(C)$ не меняет знака, то (7) есть заведомо огибающая семейства (5).

Итак, общее решение уравнения Клеро получаются заменой в последнем y' на C, а особое решение ищется как огибающая семейства прямых, составляющих общее решение.

К уравнению Клеро приходят каждый раз когда ищут кривую по свойству касательной ее, не зависящему от точки касания. При этом с геометрической точки зрения наибольший интерес представляет, очевидно, особое решение.

3. Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$y = 2xy' - y'^2. \tag{8}$$

Это уравнение Лагранжа. Следуя указанному выше методу, имеет:

$$y' = p,\ y = 2xp - p^2,$$

$$dy = y'\,dx,\ 2pdx + (2x - 2p)dp = pdx,$$

$$pdx + (2x - 2p)dp = 0,\quad \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2 \quad (p \neq 0),$$

$$x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p,\quad y = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}.$$

Подставляя $p=0$ в равенстве $y=2xp-p^2$, находим $y=0$. Это есть решение уравнения (8) и притом частное.

2. Проинтегрировать уравнение

$$y = xy' + y'^2. \tag{9}$$

Это уравнение Клеро. Заменяя y' на С, получаем общее решение

$$y = xC + C^2. \tag{10}$$

Ищем огибающую семейства (10).

Имеем

$$\left.\begin{aligned} y &= xC + C^2, \\ 0 &= x + 2C \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} x &= -2C, \\ y &= -C^2. \end{aligned}\right\}$$

исключая параметр С, получаем

$$y = -\frac{x^2}{4}. \tag{11}$$

Очевидно, это есть огибающая семейства (10) и потому – особое решение уравнения (9). Интегрированными кривыми уравнения (9) является парабола (11) и всевозможные касательные к ней. Кроме того, интегральной кривой будет всякая кривая вида *ABC,* склеенная из дуги параболы (11) и касательной к ней.

Проинтегрировать уравнения:

1. $2yy' = x(y'^2 + 4).$
2. $y = x(1 + y') + y^2.$
3. $y = -xy' + y'^2.$
4. $2y(y' + 2) = xy'^2.$
5. $y = xy' - y'^2.$
6. $y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}.$
7. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}.$
8. $y = x + y'^2 - y'.$
9. $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{y'^2}.$

Лекция № 18. УРАВНЕНИЯ, РАЗРЕШИМЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО *y* ИЛИ *x*.

П Л А Н

1. Уравнение, разрешимое относительно *y*.
2. Уравнение, разрешимое относительно *x*.
3. Примеры.

1.Определение 1. Если уравнение может быть приведено к виду

$$y=\varphi(x, y'), \qquad (1)$$

то в некоторых случаях удается найти в квадратурах его общее решение или общее решение в параметрической форме, используя, так же как и в случае уравнения Лагранжа, параметрическое представление уравнения (1) и основное соотношение $dy=y'dx$.

Уравнение (1) допускает *параметрическое представление*

$$y=\varphi(x, p),\ y'=p.$$

Пользуясь равенством $dy=y'dx$, получаем дифференциальное уравнение, связывающее p и x:

$$\varphi_x dx+\varphi_p dp=pdx.$$

Если это уравнение удается проинтегрировать в квадратурах, рассматривая в качестве искомой функции p и x, то, подставляя, найденное общее решение $p=\omega(x, C)$ или $x=\theta(p, C)$ в равенство $y=\varphi(x, p)$, получим соответственно

$$y=\varphi[x, \omega(x, C)]-$$

общее решение уравнения(1) или

$$\left.\begin{aligned} &x=0(p, C) \\ &y=\varphi[0(p, C), p]- \end{aligned}\right\}$$

общее решение (1) в параметрической форме.

2.Определение 2. Уравнение, приводимое к виду

$$x=\varphi(y, y'). \qquad (2)$$

допускает параметрическое представление

$$x=\varphi(y, y'), \quad y'=p.$$

Поэтому равенство $dy=y'dx$ дает

$$dy=p(\varphi_y' dy+\varphi_p' dp).$$

Если это дифференциальное уравнение интегрируется в квадратурах, то уравнение (2) тоже может быть проинтегрировано в квадратурах.

3.Примеры.

1. Рассмотри уравнение

$$y=y'^2-xy'+\frac{x^2}{2}. \qquad (3)$$

Оно допускает параметрическое представление

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}, \quad y' = p \tag{4}$$

Пользуясь равенством $dy = y'\,dx$, получаем

$$(-p + x)dx + (2p - x)dp = pdx,$$

откуда

$$(-2p + x)dx + (2p - x)dp = 0$$

или

$$(2p - x)(-dx + dp) = 0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$-dx + dp = 0 \text{ и } 2p - x = 0. \tag{5}$$

Первое из них дает $p=x+C$. Подставляя это значение p в выражение для y (4), получим

$$y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Это – общее решение уравнения (3).

Из второго уравнения (5) $2p\text{-}x=0$ находим $p = \frac{x}{2}$. Подставляя это значение p также в выражение для y (4), получим $y = \frac{x^2}{4}$. Это есть решение уравнения (3) и притом особое.

2. Пусть дано уравнение

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0 \tag{6}$$

Разрешим его относительно x:

$$x = \frac{y'^2}{4y} + \frac{2y}{y'} \quad (y = 0).$$

Это уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}, \quad y' = p \tag{7}$$

Пользуясь основным соотношением $dy = y'\,dx$, получаем

$$dy = p\left[\left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right)dp + \left(-\frac{p^2}{4y^3} + \frac{2}{p}\right)dy\right],$$

откуда

$$\left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right)dp + \left(-\frac{p^3}{4y^2} + 1\right)dy = 0$$

или

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2py}dp + \frac{-p^3 + 4y^2}{4y^2}dy = 0.$$

Вынося слева за скобку общий множитель, имеем

$$\frac{p^3-4y^2}{2y}\left(\frac{dp}{p}-\frac{dy}{2y}\right)=0.$$

Это уравнение распадается на два:

$$\frac{dp}{p}-\frac{dy}{2y}=0 \text{ и } \frac{p^3-4y^2}{2y}=0. \qquad (8)$$

Первое из них дает $p=C_1\sqrt{y}$ $(y>0)$. Подставляя это значение p в первое из равенств (7), получим

$$x=\frac{C_1^2}{4}+\frac{2}{C_1}\sqrt{y},$$

откуда

$$y=C(x-C)^2 \quad \left(C=\frac{C_1^2}{4}\right) \qquad (9)$$

Второе из уравнений (8) дает $p=(4y^2)^{\frac{1}{3}}$. Подставляя это значение p в первое из равенств (7), получим $y=\frac{4}{27}x^3$. Это есть решение уравнения (6) и притом особое.

y=0 тоже будет особым решением уравнения (6).

Заметим, что оба найденных особых решения являются огибающими семейства интегральных кривых (9).

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y=\frac{xy'}{2}+\frac{y'^2}{x^2}$

2. $6x^2y-6y'^2+(-3x^3+12x^2)y'-6x^4+x^5=0$

3. $y=-\frac{y'^2}{12}+\frac{xy'}{2}+\frac{y'^2}{4}+x+\frac{x^2}{y'^2}$

4. $x=\frac{y}{y'}\ln y-\frac{y'^2}{y^2}.$

Вопросы

1. Какой вид имеет общее уравнение первого порядка? Когда оно называется уравнением n-й степени?
2. В чем состоит отличие поля направлений, определяемого уравнением, не разрешенным относительно производной, от поля направлений, определяемого уравнением, разрешенным относительно производной? Может ли интегральная кривая иметь излом? Могут ли интегральные кривые пересекаться между собой? Могут ли они касаться друг друга?
3. Как ставится задача Коши для уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной?
4. Что такое частное решение?
5. Какое решение называется особым? Как найти интегральные кривые, подозрительные на особое решение, по самому дифференциальному уравнению? Почему огибающая семейства интегральных кривых будет особым решением? Как еще можно обнаружить кривые, подозрительные на особое решение?
6. Как интегрируется уравнения n-й степени?
7. Какой вид имеет уравнение, квадратное относительно производной? В какой области оно задано? Как найти его общий интеграл? Какие кривые могут быть особыми решениями?
8. Какой вид имеет общий интеграл уравнения $F(y')=0$?
9. Как интегрируется уравнение, не содержащее искомой функции?
10. Как интегрируется уравнение, не содержащее независимой переменной?
11. Какой вид имеет уравнение Лагранжа? Как найти его общее решение в параметрической форме? Какие кривые могут быть особыми решениями?
12. Какой вид имеет уравнение Клеро? Чем оно отличается от уравнения Лагранжа? Как написать его общее решение по виду уравнения? Как найти особое решение?
13. Как интегрируются уравнения общего вида, разрешимые относительно искомой функции или независимой переменной?

Лекция № 19. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

П Л А Н

1. Основные понятия и определения.
2. **Интегрируемость в квадратурах.**

1.Основные понятия и определения. Рассмотрим уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Предполагаем, что функция f определена, однозначна и непрерывна в некоторой области изменения своих аргументов.

Если правая часть уравнения (1) является линейной функцией относительно аргументов $y, y',..., y^{(n-1)}$, то это уравнение называется линейным.

Функция $y = y(x)$ называется решением уравнения (1) в интервале (a,b), если она обращает уравнение (1) в тождество, справедливое для всех значений x из этого интервала. При этом предполагается, что функция $y(x)$ имеет в (a,b) непрерывные производные до порядка n включительно и что точка $[x, y(x), y'(x),..., y^{(n-1)}(x)]$ принадлежит области задания функции f для всех x из (a,b). Иногда решение ищут в неявном виде $\Phi(x,y)=0$ или в параметрической форме: $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$. График решения называется интегральной кривой.

Задача нахождения решения $y=y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0, y' = y_0',..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0,$$

где $x_0, y_0, y_0',..., y_0^{(n-1)}$ суть заданные числа (начальные данные), называется задачей Коши.

В случае уравнения второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

задача Коши состоит в нахождении решения $y=y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y = y_0,\ y' = y_0' \text{ при } x = x_0.$$

Геометрически это означает, что ищется интегральная кривая, которая проходит через заданную точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеет в этой точке заданную касательную, образующую с положительным направлением оси *Ox* такой угол α_0, что $tg\alpha_0 = y_0^{'}$.

Что дать механическое истолкование задачи Коши, рассмотрим дифференциальное уравнение движения материальной точки единичной массы по оси *Ox*:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \qquad (2)$$

Здесь t – время; x, $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{d^2x}{dt^2}$ - соответственно положение, скорость и ускорение точки в момент времени t; $f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$- сила действующая на точку. Решение $x=x(t)$ уравнения (2) называется движением, определяемым эти уравнением. Задача Коши для уравнения (2) состоит в том, чтобы найти движение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = x_0,\ \frac{dx}{dt} = \upsilon^0 \text{ при } t = t_0,$$

где числа t_0, x_0 и υ_0 (начальные данные) суть соответственно начальный момент времени, начальное положение и начальная скорость точки.

Если правая часть уравнения (1) непрерывна в окрестности начальной точки $(x_0, y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)})$, то задача Коши с начальными данными $x_0, y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)}$ имеет решение (теорема Пеано).

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме Пикара, предположить дополнительно, что правая часть уравнения (1) удовлетворяет условию Липшица относительно $y, y', ..., y^{(n-1)}$ в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)})$, в частности, что она имеет в этой окрестности ограниченные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$.

Например, это будет иметь место, если правая часть уравнения (1) является полиномом относительно всех своих аргументов или хотя бы относительно $y, y', ..., y^{(n-1)}$ в предположении, что все коэффициенты этого полинома суть непрерывные функции от x. При этом $x_0, y_0, y_0^{'}, ..., y_0^{(n-1)}$ можно записать совершенно произвольно, а x_0 можно выбирать любым только в первом случае, в то время как во втором случае x_0 должно лежать в интервале непрерывности коэффициентов уравнения.

Наряду с задачей Коши для уравнений высших порядков представляют большой интерес так называемые граничные (краевые) задачи, в которых условия, налагаемые на искомое решение, задаются не в одной точке, а на концах некоторого интервала $[a,b]$ и ищется решение, определенное внутри этого интервала. Эти условия называются *граничными (краевыми) условиями.*

Функция

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n) \tag{3}$$

Определенная в некоторой области изменения переменных $x,C_1,C_2,...,C_n$ и имеющая непрерывные частные производные по x до порядка n включительно, называется общим решением уравнения (1) в области D изменения переменных $x,y,y',...,y^{(n-1)}$, в каждой точке которой имеет место суўествование и единственность решения задачи Коши, если:

$$\left.\begin{aligned} &y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n),\\ &y'=\varphi'(x,C_1,C_2,...,C_n),\\ &\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x,C_1,C_2,...,C_n)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$ так что имеем

$$\left.\begin{aligned} &C_1=\psi_1(x,y,y',...,y^{(n-1)}),\\ &C_2=\psi_2(x,y,y',...,y^{(n-1)}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &C_n=\psi_n(x,y,y',...,y^{(n-1)});\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

2) функция (3) является решением уравнения (1) при всех значениях произвольных постоянных, доставляемых формулами (5), когда точка $(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ пробегает область D.

Чтобы найти решение уравнения (1) с начальными данными $x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)}$ из области D при помощи формулы общего решения (3), поступают так:

а) подставляют в систему (4) вместо $x,y,y',...,y^{(n-1)}$ соответственно числа $x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)}$:

$$\left.\begin{aligned}
&y_0=\varphi(x_0,C_1,C_2,...,C_n),\\
&y_0'=\varphi'(x_0,C_1,C_2,...,C_n),\\
&.....................................,\\
&y_0^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x_0,C_1,C_2,...,C_n);
\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

б) решая систему (6) относительно произвольных постоянных $C_1,C_2,...,C_n$ находят: $C_1=C_1^{(0)},\quad C_2=C_2^{(0)},...,C_n=C_n^{(0)}$;

в) подставляя найденные значения произвольных постоянных в формулу общего решения (3), получают искомое решение

$$y=\varphi(x,C_1^{(0)},C_2^{(0)},...,C_n^{(0)}).$$

Это решение будет единственным.

Общее решение

$$y=y(x,x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)}),$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальное значение y_0 искомой функция y и начальные значения $y_0',...,y_0^{(n-1)}$ произвольных этой функции при фиксированном значении x_0 независимой переменной x, называется общим решением в форме Коши.

Если общее решение уравнения (1) задано в неявном виде

$$\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0,$$

то оно называется общим интегралом этого уравнения.

Если функция (3), дающая общее решение уравнения (1), задана в параметрическом виде:

$$\left.\begin{aligned}
&x=\varphi(t,C_1,C_2,...,C_n),\\
&y=\psi(t,C_1,C_2,...,C_n),
\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

то (7) называется общим решением уравнения (1) в параметрической форме.

Если дано n-параметрическое семейство кривых, например, в виде (3), то, дифференцируя его n раз по x и исключая из уравнения семейства и полученных n уравнений произвольные постоянные $C_1,C_2,...,C_n$, получим, дифференциальное уравнение n-го порядка, которое называется дифференциальным уравнением данного семейства кривых.

Решение уравнения (1) называется частным, если в каждой точке его сохраняется единственность решения задачи Коши. Если (3) есть общее решение уравнения (1) в области D, то всякое решение, содержащееся в формуле (3) при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, является частным решением. При этом не исключаются и значения $\pm\infty$.

Если ив каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется особым.

Во многих случаях, интегрируя уравнение (1), получают соотношение вида

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-k)}, C_1, ..., C_k) = 0$$

Такое соотношение называется промежуточным *интегралом k-го порядка* уравнения (1).

Промежуточный интеграл вида

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}, C_1) = 0$$

называется *первым интегралом.*

Знак k независимых первых интегралов, можно понизить порядок уравнения на k единиц.

Знание n независимых первых интегралов дает возможность путем исключения из них всех производных получить общий интеграл.

2.*Интегрируемость в квадратурах.* Уравнение n-го порядка во многих случаях удается проинтегрировать в квадратурах путем предварительно сведения его к уравнению более низкого порядка или при помощи нахождения промежуточных интегралов.

Это понижение порядка оказывается возможным вследствие того, что данное уравнение либо является неполным, либо, будучи полным, содержит переменные $y, y', ..., y^{(n)}$ или $x, y, y', ..., y^{(n)}$ специальным образом.

Такого рода понижение порядка оказывается возможным как для уравнения вида (1), так и для уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, т.е. для уравнений вида

$$F(x, y, y', ...y^{(n)}) = 0.$$

Лекция № 20. УРАВНЕНИЕ, СОДЕРЖАЩЕЕ ТОЛЬКО НЕЗАВИСИМУЮ ПЕРЕМЕННУЮ И ПРОИЗВОДНУЮ ПОРЯДКА *n*.

П Л А Н

1. Уравнение, разрешенное относительно производной порядка *n*.
2. Уравнение, не разрешенное относительно производной порядка *n*.
3. Примеры.

1.*Уравнение, разрешенное относительно производной порядка n.* Рассмотрим сначала простейшее дифференциальное уравнение *n*-го порядка

$$y^{(n)} = f(x) \qquad (1)$$

Предположим, что функция *f(x)* непрерывна в интервале (*a,b*). Тогда существует единственность решение задачи Коши, причем начальные данные $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ можно задавать любыми, а x_0 должно принадлежать интервалу (*a,b*). Это решение будет определено во всем интервале (*a,b*). Вообще , всякое решение уравнения (1) определено во всем интервале (*a,b*) и будет частным решением. Особых решений уравнение (1) не имеет.

Интегрируя последовательно уравнение (1), получим

$$y = \underbrace{\iint....\int}_{n\ \text{раз}} f(x)dxdx...dx + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + .. +$$

$$+ C_{n-1}x + C_n$$

Это есть общее решение уравнения (1) в области

$$a < x < b,\ \ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty, ...,$$

$$|y^{(n-1)}| < +\infty \qquad (2)$$

Общее решение можно также записать в форме Коши

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}....\int_{x_0}^{x}}_{n\ \text{раз}} f(x)dxdx...dx + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} +$$

$$+ \frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + ... + y_0'(x-x_0) + y_0 \qquad (3)$$

Здесь x_0 есть фиксированное число из интервала (*a,b*), а $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, которые здесь могут принимать любые значения.

Так как

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x}}_{n-\text{раз}} f(x)dxdx...dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt$$

то общее решение (3) можно переписать в виде

$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$
$$+\frac{y_0^{(n-2)}}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+...+y_0^{'}(x-x_0)+y_0. \qquad (4)$$
В частности, решением с нулевыми начальными значениями искомой функции и ее производных $(y_0=y_0^{'}=...=y_0^{(n-1)}=0)$ будет
$$Y_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$
Если y_1 какое-нибудь частное решение уравнения (1), то, положив $y=y_1+z_1$ получим для z дифференциальное уравнение $z^{(n)}=0$, откуда $z=C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+...+C_{n-1}x+C_n$. Поэтому
$$y=y_1+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+...+C_{n-1}x+C_n$$
будет общим решением уравнения (1) в области (2). В частности, общим решением уравнения (1) в области (2) будет
$$y=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} f(t)(x-y)^{n-1}dt+$$
$$+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+...+C_{n-1}x+C_n \qquad (5)$$
2. *Уравнение, не разрешенное относительно производной порядка n.* Пусть уравнение задано в виде
$$F(x,y^{(n)})=0 \qquad (6)$$
Если его можно разрешить (в элементарных функциях) относительно $y^{(n)}$, получим одно или несколько уравнений рассмотренного выше вида. Проинтегрировав все эти уравнения, найдем общий интеграл уравнения (6).

Пусть уравнение (6) неразрешимо относительно $y^{(n)}$, но допускает параметрическое представление:
$$x=\varphi(t), \quad y^{(n)}=\psi(t).$$
В этом случае удается найти общее решение в параметрической форме. Так как x уде выражено через параметр t, то задача сводится к тому, чтобы выразить y через t.

Имеем
$$dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx, \quad dy^{(n-1)}=\psi(t)\varphi'(t)dt,$$
откуда
$$y^{(n-1)}=\int\psi(t)\varphi'(t)dt+C_1\equiv\psi_1(t,C_1).$$
Аналогично найдем выражение для $y^{(n-1)}$ и т.д. Наконец, для y получим выражение вида
$$y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n),$$
так что

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t) \\ y &= \psi_n(t, C_1, C_2, ..., C_n) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Уравнения (7) будем называть общим решением уравнения (6) в параметрической форме.

3.Примеры.

1. Найти общее решение уравнения

$$y'' = xe^x \qquad (8)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = 1,\ \ y' = 0 \text{ при } x = 0$$

Интегрируя последовательно уравнение (8)

$$\left.\begin{aligned} y' &= (x-1)e^x + C_1, \\ y &= (x-2)e^x + C_1 x + C_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям.

Подставим начальные данные $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1,\ \ y_0' = 0$ в систему (9)

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -1 + C_1, \\ 1 &= -2 + C_2. \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1=1$, $C_2=3$, так что искомым решением будет

$$y = (x-2)e^x + x + 3. \qquad (10)$$

Если ставить себе целью только решение задачи Коши, то начальным условиям можно удовлетворять постепенно, в процессе последовательного интегрирования данного уравнения. Интегрируем уравнение (8)

$$y' = (x-1)e^x + C_1.$$

Полагая здесь $x = 0,\ \ y' = 0$, находим $C_1=1$, так что

$$y' = (x-1)e^x + 1.$$

Интегрируем еще раз

$$y = (x-2)e^x + x + C_2.$$

Подставляя вместо x и y их начальные значения $x_0 = 0,\ \ y_0 = 1$, найдем $C_2=3$, так что снова получаем искомое решение в виде (10).

Это же решение можно получить, пользуясь формулой общего решения в форме Коши (4). Положим в ней $n=2$, $x_0=0$, $y_0=1$, $y_0' = 0$:

$$y = \int_0^x te^t (x-t)dt + 1.$$

Выполняя интегрирование, опять получим решение (10).

2.Найти общее решение уравнения

$$y''=e^{-x^2}.$$

Так как интеграл от правой части не выражается в элементарных функциях, то вместо последовательного интегрирования лучше воспользоваться формулой (5). Полагая в ней $n=2$, $x_0=0$, получим

$$y=\int_0^x e^{-t^2}(x-t)dt+C_1x+C_2.$$

3.Рассмотрим уравнение

$$y''^2-3y''+2=0. \tag{11}$$

Разрешим его относительно *y”*:

$$y''=1,\ \ y''=2/$$

Интегрируем эти уравнения

$$y=\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2,\quad y=x^2+C_1x+C_2.$$

Совокупность этих общих решений образует общий интеграл уравнения (11). Его можно записать в виде одного соотношения

$$\left(y-\frac{x^2}{2}-C_1x-C_2\right)(y-x^2-C_1x-C_2)=0.$$

4.Проинтегрировать уравнение

$$x-e^{y''}+y''^2=0. \tag{12}$$

Это уравнение неразрешено относительно *y”*. Зато оно разрешимо относительно *x*:

$$x=e^{y''}-y''^2,$$

и потому, приняв *y”* за *t*, получим параметрическое представление уравнения (12) в виде

$$x=e^t-t^2,\quad y''=t.$$

Далее

$$dy'=y''dx,\ \ dy'=t(e^t-2t)dt,$$

откуда

$$y' = \int t(e^t - 2t)dt + C_1 = e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1$$

Поэтому

$$dy = y'dx = \left[e^t(t-1) - \frac{2}{3}t^3 + C_1\right](e^t - 2t)dt$$

или

$$dy = \left[e^{2t}(t-1) - \left(\frac{2}{3}t^3 + 2t^2 - 2t - C_1\right)e^t + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}t^4 - 2C_1 t\right]dt.$$

Интегрируя, находим

$$y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^2 - \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t + 2 - C_1\right)e^t + \frac{4}{15}t^5 - C_1 t^2 + C_2$$

Присоединяя сюда равенство $x = e^t - t^2$, получаем общее решение уравнения (12) в параметрической форме.

Проинтегрировать следующие уравнения:

1. $y''' = -\cos x$
2. $y''' = \dfrac{2}{x^3}$
3. $y'' = \sin x^2$
4. $y'' = \dfrac{1}{(x-1)^3} - \dfrac{1}{(x+1)^3}$
5. $y'' = e^x + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}$
6. $y''' = \dfrac{\sin x}{x}$
7. $x - \sin y'' 2y'' = 0$
8. $x = e^{-y''} + y''$
9. $x = \dfrac{y''}{\sqrt{1 + y''^2}}$
10. $y''^3 - 1 = 0.$

Лекция № 21. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПЕРВЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

П Л А Н

1. Общие понятия.
2. Примеры.

1.Определение. Уравнения вида

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k < n) \qquad (1)$$

при помощи подстановки

$$y^{(k)} = z, \qquad (2)$$

где z – новая неизвестная функция, приводится к уравнению (n - k) –го порядка

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0. \qquad (3)$$

Если уравнение (3) интегрируется в квадратурах так, найдем

$$z = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k}) \text{ или } \Phi(x, z, C_1, ..., C_{n-k}) = 0,$$

то, возвращаясь к переменной y, получим соответственно

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, ..., C_{n-k}) \text{ или } \Phi(x, y^{(k)}, C_1, ..., C_{n-k}) = 0.$$

Интегрирование каждого из них ведет k новых произвольных постоянных. В результате получим семейство интегральных кривых, зависящее от n произвольных постоянных, которое будем называть общим решением (общим интегралом) уравнения (1).

Если уравнение (3) имеет особые решения, то, подставляя их в форму (2) и интегрируя полученные уравнения, найдем особые решения уравнения (1).

В частности, изложенным выше методом понижения порядка всегда может быть проинтегрировано в квадратурах линейное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} = f = 0$$

т.к., полагая $y^{(n-1)} = z$, придем к линейному уравнению первого порядка

$$z' + p_1(x) z = f(x).$$

2.Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$y' = xy'' + y''^2. \qquad (4)$$

Полагая $y' = z$, получим

$$z = xz' + z'^2.$$

Это уравнение Клеро. Оно имеет общее решение

$$z = xC_1 + C_1^2 \tag{5}$$

и особое решение

$$z = -\frac{x^2}{4} \tag{6}$$

Возвращаемся в (5) к переменной y:

$$y' = xC_1 + C_1^2.$$

Интегрируя, получим

$$y = \frac{C_1}{2}x^2 + C_1^2 x + C_2.$$

Это есть обще решение уравнения (4).

Заменим в (6) z на y':

$$y' = -\frac{x^2}{4} \tag{7}$$

откуда

$$y = -\frac{x^3}{12} + C.$$

Каждое из решений, входящих в это семейство, является особым решением уравнения (4).

Возможность существования этих особых решений легко установить непосредственно по виду уравнения (4). Действительно, разрешаем это уравнение относительно старшей производной:

$$y'' = -\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} + y'} \equiv f_1, \quad y'' = -\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{x^2}{4} + y'} \equiv f_2.$$

Здесь $\dfrac{\partial f_1}{\partial y'}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial y'}$ обращаются в бесконечность, если $y' = -\dfrac{x^2}{4}$, т.е. выполняется (7).

2. Пусть дано уравнение

$$y''' = -\frac{1}{2}y''^3. \tag{8}$$

Полагая $y'' = z$, получим

$$z' = -\frac{1}{2}z^3,$$

откуда

$$z^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Заменим *z* на y'':

$$y''^2 = \frac{1}{x + C_1}.$$

Это – уравнение, содержащее только x и y'', но не разрешенное относительно y''. Интегрируем его

$$y = \pm\frac{4}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3.$$

Особых решений нет. Их и не могло быть, ибо правая часть уравнения (8) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения во всей области задания этого уравнения.

3. Найдем решения уравнения

$$y''^2 = 4(y' - 1), \tag{9}$$

удовлетворяющее начальным условиям: а) $y = 0,\ \ y' = 2$ при $x=0$; б) $y=0$, $y'=1$ при $x=0$.

Интегрируем уравнение (9):

$$y' = z,\ \ z'^2 = 4(z - 1),\ z' = \pm 2\sqrt{z - 1},$$

$$\frac{dz}{\pm 2\sqrt{z - 1}} = dx\ \ \left(\sqrt{z - 1} = 0\right),\ \pm\sqrt{z - 1} = z + C_1,$$

$$z = 1 + (x + C_1)^2,\quad y' = 1 + (x + C_1)^2,$$

$$y = x + \frac{1}{3}(x + C_1)^2 + C_2,$$

$$\sqrt{z - 1} = 0,\ \ z = 1,\ \ y' = 1,\ \ y = x + C.$$

Следовательно, уравнение (9), имеет общее решение

$$y = x + \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2 \tag{10}$$

и семейство особых решений

$$y = x + C. \tag{11}$$

Найдем решения поставленных задач Коши:

а) Воспользуемся общим решением (10). Имеем

$$\left.\begin{aligned} y &= x + \frac{1}{3}(x + C_1)^3 + C_2, \\ y' &= 1 + (x + C_1)^2. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Полагая здесь $x=0$, $y=0$, и $y'=2$, получаем

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3}C_1^2 + C_3, \\ 2 &= 1 + C_1^2. \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1 = \pm 1,\ C_2 = \mp\frac{1}{3}$. Подставляя эти значения C_1 и C_2 в (12), найдем два решения:

$$y = x + \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{3} \text{ и } y = x + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{3}.$$

Других решений нет, так как ни одно из особых решений (11) не удовлетворяет рассматриваемым начальным условиям.

б) Подставляя в систему (12) начальные данные $x_0=0, y_0=0,\ y_0' = 1$, получаем

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{3}C_1^3 + C_2, \\ 1 &= 1 + C_1^2. \end{aligned}\right\}$$

откуда $C_1=0,\ C_2=0$. Подставляя эти значения C_1 и C_2 в (10), найдем решение

$$y = x + \frac{1}{3}x^3.$$

Посмотрим, нет ли среди особых решений (11) такого, которое удовлетворяло бы рассматриваемым начальным условиям. Очевидно, таким решением будет

$$y=x.$$

полученные в случаях «а» и «б» результаты вполне согласуются с общей теорией. В самом деле, разрешив уравнение (9) относительно y'', получим два уравнения:

$$y'' = 2\sqrt{y'-1},\ \ y'' = -2\sqrt{y'-1}.$$

В случае «а» для каждого из этих уравнений в окрестности начальной точки (0,0,2) выполняются условия теоремы существования и единственности решения, а в случае «б» эти условия не выполняются ни в какой окрестности начальной точки (0,0,1), ибо произвольные от правых частей по y' обращаются в бесконечность при $y'=1$.

4. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2xy' = 0 \tag{13}$$

и выделить решения, удовлетворяющие начальным условиям:

а) $y=0,\ y'=0$ при $x=0$;

б) $y=0,\ y'=1$ при $x=0$.

Полагая $y'=z$, получим

$$z' + 2xz = 0,$$

откуда

$$z = C_1 e^{-x^2}.$$

Заменяя z на y':

$$y' = C_1 e^{-x^2}.$$

Следовательно,

$$y = C_1 \int e^{-x^2} dx + C_2 \qquad (14)$$

будет общим решением уравнения (13).

Так как интегралы от e^{-x^2} не выражается через элементарные функции, то для нахождения решений, удовлетворяющих поставленным начальным условиям, перепишем общее решение (14) (заменяя $\int e^{-x^2} dx$ на $\int_0^x e^{-x^2} dx$ и выражая C_1 и C_2 через начальные значения y и y' при $x=0$) в форме Коши

$$y = y_0' \int_0^x e^{-x^2} dx + y_0.$$

Подставляя сюда начальные данные, получим, что искомыми решениями будут соответственно:

а) $y=0$,

б) $y = \int_0^x e^{-x^2} dx$.

Проинтегрировать следующие уравнения:

1. $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$

2. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

3. $xy'' - x' = 0$

4. $y'(1+y'^2) = ay''$

5. $x \ln x \cdot y'' - y' = 0$

Лекция № 22. УРАВНЕНИЕ, НЕ СОДЕРЖАЩЕЕ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

П Л А Н

1. Общие понятия.
2. Примеры.

1.Определение. Уравнение вида

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

допускает понижение порядка на единицу, если ввести вместо *y* новую искомую функцию *z* по формуле:

$$y' = z \tag{2}$$

и принять *y* за новую независимую переменную, *z=z(y)*. При этом $y'', y''', ..., y^{(n)}$ преобразуются так:

$$\left.\begin{aligned} &y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot z, \\ &y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot z = \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]\cdot z, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}z}{dy^{n-1}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Подставляя (2) и (3) в (1), получим уравнение *(n-1)* – го порядка с неизвестной функцией *z* от независимой переменной *y*.

Принимая *y* за независимую переменную, мы могли потерять решение вида *y=const.* Непосредственной подстановкой *y=b* в уравнение (1) можно выяснить, имеет ли оно решения такого вида.

2.Примеры.

1. Рассмотрим уравнение вида

$$y'' = f(y). \tag{4}$$

Пологая *y'=z* и принимая *y* за новую независимую переменную, получим $y'' = \frac{dz}{dy}\cdot z$. Поэтому уравнение (4) примет вид

$$\frac{dz}{dy}\cdot z = f(y) \quad \textit{или} \;\; zdz = f(y)dy. \tag{5}$$

Интегрируем это уравнение

$$z^2 = 2\int f(y)dy + C_1. \tag{6}$$

Заменим *z* на *y*':

$$y'^2 = 2\int f(y)dy + C_1. \tag{7}$$

Дальнейшее интегрирование дает

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm x + C_2\,. \tag{8}$$

Пусть дано уравнение

$$y'' = \frac{3}{2}y^2. \tag{9}$$

Это уравнение вида (4). Пользуясь формулой (8), сразу получаем его общий интеграл

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^3 + C_1}} = \pm + C_2\,. \tag{10}$$

2.Проинтегрировать уравнение.

$$2yy'' = y'^2 + y^2. \tag{11}$$

Полагая $y' = z$ и принимая y за новую независимую переменную, получим $y'' = \dfrac{dz}{dy}z$. Уравнение (11) примет вид

$$2y\frac{dz}{dy}z = z^2 + y^2 \tag{12}$$

Полагаем $z^2 = u$:

$$y\frac{du}{dy} = u + y^2 \text{ или } \frac{du}{dy} = \frac{1}{y}u + y \quad (y = 0) \tag{13}$$

Интегрируем это выражение

$$u = C_1 y + y^2 \tag{14}$$

Следовательно,

$$x^2 = C_1 y + y^2, \quad y'^2 = C_1 y + y^2 \tag{15}$$

откуда

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y + y^2}} = \pm dx.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln\left| y + \frac{C_1}{2} + \sqrt{C_1 y + y^2} \right| = \pm x + C_2.$$

Функция y=0 будет решением. Это решение частное.

Проинтегрировать следующие уравнения:

1. $yy'' = y'^3$ 2. $yy''^2 = 1$

3.$1 + y'^2 = 2yy''$ 4.$2yy'' + y'^2 + y'^1 = 0$.

Лекция № 23. УРАВНЕНИЕ, ОДНОРОДНОЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ИСКОМОЙ ФУНКЦИИ И ЕЁ ПРОИЗВОДНЫХ. ОБОБЩЕННЫЕ ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

П Л А Н

1. Общие понятия.
2. Примеры.

1.*Общие понятия.* Уравнение

$$F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

однородное относительно $y, y',..., y^{(n)}$, допускает понижение порядка на единицу, если положить

$$y' = yz, \qquad (2)$$

где z - новая неизвестная функция, $z = z(x)$.

Действительно, найдем выражения для $y'', y''',..., y^{(n)}$. Дифференцируем последовательно (2) и заменяем каждый раз y' на yz:

$$\left.\begin{aligned} &y'' = y'z = y(z^2 + z'), \\ &y''' = y(z^2 + 3zz' + z''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n)} = y_{\omega}(z, z',...., z^{(n-1)}). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

подставим (2) и (3) в (1):

$$F[z, y, yz, y(z^2 + z'),...., y_{\omega}(z, z',..., z^{(n-1)})] = 0$$

Это уравнение вследствие предположенной однородности функции F можно записать так:

$$y^m F[z,1, z, z^2 + z',...., \omega(z, z',..., z^{(n-1)})] = 0.$$

Деля на y^m (при этом, как это видно из дальнейшего, потери решения $y=0$ не происходит), получаем

$$F[x,1, z, z^2 + z',...., \omega(z, z',..., z^{(n-1)})] = 0.$$

Это уравнение $(n-1)$ – го порядка. Если найдем его общее решение

$$z = \varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-1}),$$

то, заменив z на $\dfrac{y'}{y}$, получим

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-1}).$$

Интегрируем еще раз

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2,..., C_{n-1}) dx} -$$

общее решение уравнения (1).

2.Примеры.

1.Рассмотрим уравнение

$$xyy'' - xy'^2 - yy' = 0 \qquad (4)$$

Полагая $y'' = y(z^2 + z')$, имеем $y'' = y(z^2 + z')$. Подставляя выражения для y' и y'' в уравнение (4) и скоращая на y^2, получим

$$x(z^2 + z') - xz^2 - z = 0$$

или

$$xz' - z = 0.$$

Интегрируем последнее выражение

$$z = C_1 x.$$

Заменим z на $\dfrac{y'}{y}$:

$$\frac{y'}{y} = C_1 x.$$

Интегрируя еще раз, получаем

$$y = C_2 e^{\frac{C_1}{2}x^2} \qquad \text{или} \qquad y = Be^{Ax^2} \quad \left(A = \frac{C_1}{2},\ B = C_2\right)$$

2.Уравнение

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

называется обобщенным однородным, если существует такое число k, при котором левая часть этого уравнения становится однородной функцией некоторой степени m относительно всех аргументов в предположении, что $x, y, y', ..., y^{(n)}$ считаются величинами соответственно 1-го, k-го, $(k-1)$-го,…., $(k-n)$-го измерений. Если в уравнении (1) положить

$$x = e^t, \quad y = ze^{kt}$$

где t и z соответственно новая независимая переменная и новая неизвестная функция, то оно приведется к уравнению, не содержащему независимой переменной t. В самом деле, так как

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}e^{-t},$$

то производные $y', y'', ..., y^{(n)}$ преобразуются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt}e^{kt} + kze^{kt}\right)e^{-t} = \left(\frac{dz}{dt} + kz\right)e^{(k-1)t},\\
&y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + (2k-1)\frac{dz}{dt} + k(k-1)z\right)e^{(k-2)t},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&y^{(n)} = \omega\left(z, \frac{dz}{dt}, \dots, \frac{d^nz}{dt^n}\right)e^{(k-n)t}.
\end{aligned}\right\}$$

Выполняя теперь в уравнении (1) подстановку (2) и заменяя $y', y'', \dots, y^{(n)}$ их выражениями через $z, z', \dots, z^{(n)}$, согласно формулам (3), получим уравнение, которое после сокращения на e^{mt} обратится в уравнение, не содержащее *t*. Это уравнение допускает понижение порядка на единицу. Если *k=0*, то подстановка (2) принимает вид

$$x = e^t, \quad y = z,$$

т.е. дело сводится только к замене независимой переменной

$$x = e^t.$$

При этом

$$y'_x = y'_t \cdot e^{-t}, \quad y''_{x^2} = (y''_{t^2} - y'_t)e^{-2t}, \dots$$

3. Рассмотрим уравнение

$$x^4y'' + (xy' - y)^3 = 0$$

Покажем, что это уравнение обобщенное однородное, т.е найдем число *k*. Приравнивая измерения всех членов, считая *x,y,y′,y″* величинами соответственно 1-го, *k*-го, (*k-1*)-го и (*k-2*)-го измерений, имеем

$$4 + k - 2 = 3k,$$

откуда *k=1*. Теперь делаем подстановку

$$x = e^t, \quad y = ze^t$$

Так как

$$\left.\begin{aligned}
&y' = \frac{dy}{dt}e^{-t} = \frac{dz}{dt} + z,\\
&y'' = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right)e^{-t}
\end{aligned}\right\}$$

то уравнение (4) примет вид

$$e^{4t}\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\right)e^{-t} + \left[e^t\left(\frac{dz}{dt} + z\right) - ze^t\right]^3 = 0$$

или (сокращая на e^{3t})

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{dz}{dt}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^3=0$$

Положим здесь $\frac{dz}{dt}=u$ и причем *z* за независимую переменную. Тогда $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{du}{dt}=\frac{du}{dt}\cdot\frac{dz}{dt}=\frac{du}{dz}u$. Поэтому уравнение (5) перепишется так:

$$\frac{du}{dz}u+u+u^3=0$$

или (сокращая на *u*)

$$\frac{du}{dz}+1+u^2=0$$

Интегрируем

$$u=tg(C_1-z).$$

Заменим *u* на $\frac{dz}{dt}$:

$$\frac{dz}{dt}=tg(C_1-z) \text{ или } \frac{dz}{-tg(z-C_1)}=dt.$$

Интегрируем еще раз, находим

$$\ln|\sin(z-C_1)|+t=\ln|C_2|$$

Возвращаясь к переменным *x* и *y*, по формулам $t=\ln x, z=\frac{y}{x}$ получим общий интеграл уравнения в виде

$$\ln\left|\sin\left(\frac{y}{x}-C_1\right)\right|+\ln x=\ln|C_2|$$

или

$$y=x\left(A+\arcsin\frac{B}{x}\right) \quad (A=C_1,\ B=\pm C_2)$$

Принтегрировать уравнения:

1. $xyy''+yy'-x^2y'^3=0$

2. $x^4y''-x^3y'^2+2x^2yy'^2-(3xy^2+2x^3)y'+2x^2y+y^3=0$

3. $x^2y''-3xy'+4y+x^2=0.$

Лекция № 24. УРАВНЕНИЕ, ЛЕВАЯ ЧАСТЬ КОТОРОГО ЕСТЬ ТОЧНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ.

П Л А Н

1. Основные понятия.
2. Примеры.

1.Определение. Если в уравнении

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

левая часть является точной производной от некоторой функции $\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, т.е.

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

то

$$\Phi(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) = C_1 \qquad (2)$$

будет первым интегралом уравнения (1). Может случиться, что уравнение (2) в свою очередь является уравнением в точных производных. Тогда найдем второй интеграл уравнения (1).

Если уравнение (1) не является уравнением и точных производных, то нужно попытаться подобрать такую функцию $\mu = \mu(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ интегрирующий множитель уравнения (1), - чтобы после умножения на нее уравнение (1) стало уравнением в точных производных.

2.Примеры. 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = 0 \qquad (3)$$

Так как в левой части у каждой из дробей в числителе стоит производная от знаменателя, то имеем

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2yy'}{1+y^2} = [\ln|y'| - \ln(1+y^2)]',$$

т.е. уравнение (3) является уравнением в точных производных. Оно имеет первый интеграл

$$\ln|y'| - \ln(1+y^2) = \ln|C_1|$$

или

$$y' = A(1+y^2) \quad (A = \pm C_1) \qquad (4)$$

Интегрируя уравнение (4), находим

$$arctgy = Ax + B.$$

Это – общий интеграл уравнения (3).

2.Проинтегрировать уравнение

$$yy'' = y'^2 .$$

Это уравнение не является уравнением в точных производных, но, умножив обе части его на функцию $\mu = \dfrac{1}{yy'}$, получим уравнение в точных производных

$$\frac{y''}{y'} = \frac{y'}{y} .$$

Его первым интегралом будет

$$y' = C_1 y,$$

откуда

$$y = C_2 e^{C_1 x} .$$

3.Пусть дано уравнение

$$y'' = f(y) .$$

Умножим обе части его на $\mu = 2y'$:

$$2y'y'' = 2f(y)y'$$

или

$$(y'^2)'_x = \left(2\int f(y)dy\right)'_x,$$

откуда

$$y'^2 = 2\int f(y)dy + C_1 .$$

Интегрируея это уравнение, получаем

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = \pm x + C_2 .$$

4.Линейное уравнение второго порядка.

$$y'' = p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Будет уравнением в точных производных тогда, и только тогда, когда $q(x) = p'(x)$, т.е. если оно имеет вид

$$y'' + p(x)y' + p'(x)y = f(x).$$

В этом случае можно найти (в квадратурах) его общее решение

$$\left.\begin{aligned} (y')' + [p(x)y]' &= \left[\int f(x)dx\right]' \\ y' + p(x)y &= \int f(x)dx + C_1. \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left\{C_2 + \int \left[\int f(x)dx + C_1\right] e^{\int p(x)dx} dx\right\}$$

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

1. $y'' = 2yy'$ 2. $y'' = y'^2 y$ 3. $yy'' = y'$

4. $yy''' - y'y'' = 0$ 5. $y'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$ 6. $(1+y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0$

7. $y'' - \dfrac{1}{x}y' + \dfrac{1}{x^2}y = 1$ 8. $y'' + \cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = 0$.

Вопросы

1. Какой общий вид имеет уравнение n-го порядка, разрешенное относительно $y^{(n)}$? Когда это уравнение называется линейным? Что называется рением (интегральной кривой) уравнения? В каких формах оно может быть задано?
2. Как ставится задача Коши для уравнения n-го порядка, разрешенного относительно $y^{(n)}$? Какой геометрический и механический смысл имеет эта задача для уравнения второго порядка? Означает ли в этом случае единственность решения задачи Коши, что через заданную точку (x_0,y_0) проходит только одна интегральная кривая?
3. При каком условии задача Коши имеет решение? Когда это решение будет заведомо единственным?
4. Что такое краевая задача? Чем она отличается от задачи Коши?
5. Что такое общее решение? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Что называется общим решением в форме Коши? Что такое общий интеграл? Что такое общее решение в параметрической форме?
6. Какое решение называется частным? Когда решение называется особым? В каком случае уравнение заведомо не имеет особых решений?
7. Что такое промежуточный интеграл k-го поряка? Какой промежуточный интеграл называется первым интегралом?
8. Какой вид имеет общее решение уравнения $y^{(n)} = f(x)$?
9. Как найти общее решение уравнения $F(x, y^{(n)}) = 0$ в параметрической форме в случае, когда это уравнение допускает параметрическое представление в элементарных функциях?
10. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, не содержащего искомой функции, и уравнения, не содержащего искомой функции и последовательных первых производных?
11. Как понижается порядок уравнения, не содержащего независимой переменной?
12. Какой подстановкой понижается порядок уравнения, однородного относительно искомой функции и ее производных?

ЛЕКЦИЯ № 25. ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ.

П Л А Н

1. Однородное уравнение.
2. Неоднородное уравнение.
3. Особые точки линейного уравнения.
4. Построение однородного линейного уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений.

1.Опеделение 1. Линейным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + \\ + p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Если при всех рассматриваемых значениях x функция $f(x)$ равна нулю, то это уравнение называется однородным. В противном случае оно называется неоднородным.

Предполагаем, что коэффициенты $p_1(x), p_2(x),..., p_n(x)$ и свободный член $f(x)$ определены и непрерывны в интервале (a,b). Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $y=y(x)$, определенное во всем интервале (a,b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0,\ \ y' = y_0',...., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0,$$

причем начальные данные $y_0, y_0',...., y_0^{(n-1)}$ можно записать совершенно произвольно, а x_0 нужно брать из интервала (a,b).

Всякое решение линейного уравнения является частным решением, так что особых решений оно не имеет.

Интегрирование неоднородного уравнения (1) приводится (2) к интегрированию однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + \\ + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

Однородное линейное уравнение всегда имеет нулевое решение $y\equiv 0$. Оно удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y = 0, \quad y' = 0,..., y^{(n-1)} = 0 \text{ при } x=x_0,$$

причем других решений, удовлетворяющих этим начальным условиям нет.

Для построения общего решения однородного уравнения достаточно знать n линейно-независимых в интервале (a,b) (и тем самым ненулевых) частных решений $y_1,y_2,...,y_n$, т.е. таких решений для которых тождество

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \quad (a < x < b),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – постоянные числа, может выполняться только в очевидном случае $\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0, ..., \alpha_n = 0$. Такая система решений называется фундаментальной системой решений. Чтобы система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & .... & y_n \\ y_1' & y_2' & .... & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & .... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке из инетрвала (a,b).

При сделанных выше предложениях относительно непрерывности коэффициентов однородное линейное уравнение (2) имеет бесчисленное множество фундаментальных систем решений.

Фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ однородного уравнения (2) называется нормированной в точке $x=x_0$, если эти решения удовлетворяют соответственно следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 : y_1 = 1,\ y_1' = 0,\ y_1'' = 0, ..., y_1^{(n-1)} = 0; \\ y_2 : y_2 = 0,\ y_2' = 1,\ y_2'' = 0, ..., y_2^{(n-1)} = 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n : y_n = 0,\ y_n' = 0,\ y_n'' = 0, ..., y_n^{(n-1)} = 1 \end{array}\right\} \text{при } x = x_0$$

Если найдена фундаментальная система решений $y_1, y_2, ..., y_n$ однородного уравнения (2), то формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n \qquad (3)$$

где $C_1, C_2, ..., C_n$ – произвольные постоянные, дает общее решение этого уравнения в области

$$a < x < b,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty, ..., |y^{(n-1)}| < +\infty \qquad (4)$$

Все решения однородного уравнения (2) содержатся в формуле (3). Эта формула дает возможность найти решение уравнения (2) с любыми начальными данными $y_0, y_0'', ..., y_0^{(n-1)}$, когда x_0 принадлежит интервалу (a,b), за счет выбора соответствующих значений произвольных постоянных. При этом, решать систему n уравнений с n неизвестными $C_1, C_2, ..., C_n$, которая в случае является линейной и имеет вид

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0), \\ y_0' = C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) \end{array}\right\}$$

эта система имеет единственное решение. Подставляя его в (3), получим искомое решение уравнения (2).

При фундаментальной системе решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, нормированной в точке $x=x_0$ формула

$$y = y_0 y_1 + y_0' y_2 + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n$$

будет общим решением в форме Коши в области (4), если считать начальные данные $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ произвльными числами.

Построить фундаментальную систему решений в элементарных функциях или в квадратурах от элементарных функций удается всегда для уравнений с постоянными коэффициентами и для уравнений, приводящихся к ним. Следовательно, для этих уравнений легко находится общее решение. Для уравнений с переменными коэффициентами (за редким исключением) приходится ограничиваться нахождением фундаментальной системы решений, состоящей из функций более сложной природы.

Иногда задача интегрирования однородных и неоднородных линейных уравнений облегчается путем предварительного понижения порядка уравнения.

2.Определение 2. Для построения общего решения неоднородного уравнения (1) достаточно найти одно частное решение его и прибавить к нему общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z^{(n)} + p_1(x) z^{(n-1)} + p_2(x) z^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) z' + \\ + p_n(x) z = 0 \qquad (5)$$

так, что если y_1 есть частное решение уравнения (1), а

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n -$$

это общее решение уравнения (5), то

$$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n \qquad (6)$$

будет общим решением уравнения (1) в области (4).

Все решения неоднородного уравнения (1) содержатся в формуле (6).

Если правая часть неоднородного уравнения (1) состоит из нескольких слагаемых и для неоднородных уравнений с той же левой частью и правой частью, равной каждому из этих слагаемых в отдельности, можем найти частное решение, то сумма последних будет частным решением всего уравнения (1). Это свойство неоднородного линейного уравнения несколько облегчает задачу нахождения частного решения его.

На деле, однако, непосредственное нахождение частного решения неоднородного уравнения, кроме случая уравнения с постоянными коэффициентами и то со специальными свободными членами, представляет большие затруднения.

Поэтому для нахождения общего решения неоднородного уравнения обычно применяют метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), который всегда дает возможность найти общее решение уравнения (1) в квадратурах, если известна фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (5).

Этот метод состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в виде

$$y = C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2 + \ldots + C_n(x)z_n \qquad (7)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ - некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x, подлежащее определению. Эти функции определяют из следующей системы:

$$\left.\begin{array}{l} C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 + \ldots + C_n'(x)z_n = 0, \\ C_1'(x)z_1' + C_2'(x)z_2' + \ldots + C_n'(x)z_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1'(x)z_1^{(n-1)} + C_2'(x)z_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)z_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)z_1^{(n-1)} + C_2'(x)z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)z_n^{(n-1)} = f(x). \end{array}\right\}$$

Решая ее, находят производные от искомых функций

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x), \ldots., C_n'(x) = \varphi_n(x),$$

откуда

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + C_1, \ \int \varphi_2(x)dx + C_2, \ldots, C_n = \\ = \int \varphi_n(x)dx + C_n .$$

Подставляя эти значения $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ в формулу (7), получают

$$y = z_1 \int \varphi_1(x)dx + z_2 \int \varphi_2(x)dx + \ldots + z_n \int \varphi_n(x)dx + \\ + C_1z_1 + C_2z_2 + \ldots + C_nz_n .$$

Это есть общее решение уравнения (1) в области (4).

3.*Особые точки линейного уравнения.* Выше мы предлагали, что коэффициенты уравнения (1) и свободный член $f(x)$ непрерывны во всей области определения, а именно в интервале (a,b). Если эти функции определены в интервале (a,b), за исключением отдельных точек, в которых они разрывы, то последние называются особыми точками уравнения (1). В частности, если линейное уравнение задано в виде

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots. + p_n(x)y' + p_n(x)y = f(x),$$

где $p_0(x), p_1(x),\ldots, p_n(x)$, $f(x)$ непрерывны в (a,b), то особыми точками этого уравнения будут только те точки, в которых коэффициент при старшей производной $p_0(x)$ обращается в нуль.

Все изложено в 1° и 2° остается в силе и для интервалов, не содержащих особых точек. В каждом из этих интервалов существует, вообще говоря, своя фундаментальная система решений однородного уравнения, позволяющая построить общее решение этого уравнения в области D вида (4), где интервал (a,b) нужно заменить рассматриваемым интервалом.

4.*Построение однородного линейного уравнения, имеющего заданную фундаментальную систему решений.* Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – заданные функции от x, линейно-независимые в интервале (a,b) и имеющие непрерывные производные до порядка n включительно. Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' & y' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \ldots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Уравнение (8) является однородным линейным уравнением n-го порядка, а функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений этого уравнения. Если при этом вронскиан $W(x)$ функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ отличен от нуля в интервале (a,b), то разрешая уравнение (8) относительно $y^{(n)}$, получим однородное линейное уравнение с коэффициентами, непрерывными в интервале (a,b). Если же $W(x)$ обращается в нуль в некоторой точке $x=x_0$ из интервала (a,b), то в этой точке хоти один из коэффициентов упомянутого уравнения будет разрывным.

Лекция № 26. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

П Л А Н

1. Однородное уравнение.
2. **Неоднородное уравнение.**
3. Примеры.

1.Определение 1. Рассмотрим сначала однородное (линейное) уравнение

$$y^{(n)} = a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

предполагая, что его коэффициенты $a_1, a_2, ..., a_n$ суть постоянные вещественные числа. Это уравнение имеет фундаментальную систему решений $y_1, y_2, ..., y_n$ определенную при всех x и состоящую из степенных, показательных и тригонометрических функций. Соответствующее ей общее решение

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$$

определено в области

$$|x| < +\infty,\ |y| < +\infty,\ |y'| < +\infty, ..., |y^{(n-1)}| < +\infty,$$

т.е. во всем пространстве $(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$.

Излагаемый ниже метод построения указанной выше фундаментальной системы решений (метод Эйлера) состоит в том, что частное решение уравнения (1) ищется в виде

$$y = e^{\lambda x}, \qquad (2)$$

где λ - некоторое постоянное число (вещественное или комплексное), подлежащее определению.

Подставляем функцию (2) в уравнение (1):

$$(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda x} = 0,$$

откуда следует, что λ должно удовлетворять уравнению

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \qquad (3)$$

Это уравнение называется *характеристическим уравнением*, а его *корни – характеристическими числами* уравнения (1).

Структура фундаментальной системы решений (а следовательно, и соответствующего ей общего решения) зависит от вида корней характеристического уравнения (3). Различают три случая.

1.Все корни характеристического уравнения различны и вещественные. Обозначим их через $\lambda_1 \lambda_2, ... \lambda_n$. Тогда фундаментальной системой решений будет

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x},$$

а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2.Все корни характеристического уравнения различны, но среди них имеются комплексные. Пусть $\lambda_1 = a + ib$ – комплексный корень характеристического уравнения. Тогда $\lambda_2 = a - ib$ тоже будет корнем этого уравнения. Эти двум корням соответствуют два линейно-независимых частных решения:

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx.$$

Если корни λ_1 и λ_2 чисто мнимые: $\lambda_1 = ib$, $\lambda_2 = -ib$, то соответствующими линейно-независимыми частными решениями будут

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx.$$

Написав линейно-независимые частные решения, соответствующие другим сопряженным парам комплексных корней и всем вещественным корням, получим фундаментальную систему решений. Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянным коэффициентами даст общее решение уравнения (1). При этом корням $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ в формуле общего решения соответствует выражение вида

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx),$$

а чисто мнимым корням $\lambda_{1,2} = \pm ib$ отвечает сумма

$$C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

3.Среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Пусть λ_1 есть вещественный k- кратный корень. Тогда ему соответствует k линейно-независимых частных решений вида

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda_1 x},$$

а в формуле общего решения – выражение вида

$$e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{k-1}).$$

Если $\lambda_1 = a + ib$ есть комплексный корень характеристического уравнения кратности k, то ему и сопряженному с ним корню $\lambda_2 = a - ib$ той же кратности соответствуют $2k$ линейно-независимых частных решения вида:

$$\left.\begin{array}{l} e^{ax}\cos bx, \;\; xe^{ax}\cos bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\cos bx \\ e^{ax}\sin bx, \;\; xe^{ax}\sin bx, \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin bx \end{array}\right\}$$

В формуле общего решения этим корням соответствует выражение вида

$$e^{ax}\,(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})\cos bx +$$
$$+ (C_{k+1} + C_{k+2} x + \ldots + C_{2k} x^{k-1})\sin bx.$$

Паре чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm ib$ кратности k отвечает сумма

$$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})\cos bx +$$
$$+ (C_{k+1} + C_{k+2} x + \ldots + C_{2k} x^{k-1})\sin bx.$$

Написав линейно-независимые частные решения указанного выше вида, соответствующие всем простым и кратным вещественным корням, а также сопряженным парам простых и кратных комплексных корней, получим фундаментальную систему решений.

Линейная комбинация этих решений с произвольными постоянными коэффициентами даст общее решение уравнения (1).

2.Определение 2. Неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \qquad (4)$$

при помощи метода вариации произвольных постоянных, всегда может быть проинтегрировано в квадратурах от элементарных функций, т.к. соответствующее ему однородное уравнение

$$z^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+a_2z^{(n-2)}+...+a_{n-1}z'+a_nz=0 \qquad (5)$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций.

В некоторых случаях для неоднородного уравнения (4) удается найти частное решение методом неопределенных коэффициентов, исходя из заранее известного вида последнего. Тогда для получения общего решения неоднородного уравнения (4) остается прибавить к найденному частному решению общее решение соответствующего однородного уравнения (5).

Укажем эти случаи и соответствующие им виды частных решений:

1. Пусть $f(x)=P(x)$, где $P(x)$ – полином от x, который может, в частности, быть заданным постоянным числом, отличным от нуля. Тогда, если число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение неоднородного уравнения (4) можно найти в виде

$$y_1=Q(x),$$

где $Q(x)$ – полином той же степени, что и $P(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

Если же 0 есть корень характеристического уравнения кратности k, то

$$y_1=x^kQ(x).$$

2. Пусть $f(x)=P(x)e^{ax}$. Если число a не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_1=Q(x)e^{ax}.$$

Если a есть корень характеристического уравнения кратности k, то

$$y_1=x^kQ(x)e^{ax}.$$

3. Пусть $f(x)=e^{ax}[P_1(x)\cos bx+P_2(x)\sin bx]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ - полином от x. (Эти полиномы, в частности, могут быть постоянными числами, и один из них может быть тождественным нулем). Пусть m есть наивысшая из степеней полиномов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Тогда если число $a+ib$ не является корнем характеристического уравнения, то

$$y_1=e^{ax}[Q_1(x)\cos bx+Q_2(x)\sin bx],$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – полиномы степени m с неопределенными коэффициентами.

Если $a+ib$ есть корень характеристического уравнения кратности k, то

$$y_1 = x^k e^{ax}[Q_1(x)\cos bx + Q_2(x)\sin bx].$$

4. $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_m(x)$, где $f_1(x), f_2(x),..., f_m(x)$ - функции вида, рассмотренного в 1-3. Если $y_1, y_2,..., y_m$ суть частные решения, соответствующие функциям $f_1(x), f_2(x),..., f_m(x)$, то

$$Y_1 = y_1 + y_2 + ... + y_m$$

является частным решением всего уравнения (4).

3.Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0 \qquad (1)$$

Здесь характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$$

имеет различные вещественные корни: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, поэтому совокупность функций

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x},\quad y_3 = e^{3x}$$

будет фундаментальной системой решений, а

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

является общим решением уравнения (1).

2.Для дифференциального уравнения

$$y''' + 3y'' + 9y' - 13y = 0 \qquad (2)$$

характеристическим уравнением будет

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 13 = 0.$$

Оно имеет один вещественный корень $\lambda_1 = 1$ и два комплексных сопряженных корня $\lambda_2 = -2 + i3,\ \lambda_3 = -2 - i3$. Поэтому функции

$$y_1 = e^x,\quad y_2 = e^{-2x}\cos 3x,\ y_3 = e^{-2x}\sin x$$

образуют фундаментальную систему решений, а

$$y = C_1 e^x + e^{-2x}(C_2\cos 3x + C_3\sin 3x)$$

будет общим решением уравнения (2).

3.Пусть дано уравнение

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = 0$$

имеет один вещественный корень $\lambda_2=2$ и два чисто мнимых корня $\lambda_2 = i2,\ \lambda_3 = -i2$. Поэтому

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x$$

и

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

4.Для уравнения

$$y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$$

имеем

$$\lambda^2 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

Здесь один корент простой и один двукратный. Поэтому

$$y_1 = e^x, \;\; y_2 = e^{2x}, \;\; y_3 = xe^{2x}$$

и

$$y = C_1 e^x + e^{2x}(C_2 + C_3 x).$$

5.Пусть дано уравнение

$$y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0$$

имеет корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1 + i, \;\; \lambda_3 = \lambda_4 = -1 - i$, так что имеем случай двукратный комплексных сопряженных корней. Поэтому

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = e^{-x}\cos x, \;\; y_2 = xe^{-x}\cos x, \\ y_3 = e^{-x}\sin x, \quad y_4 = xe^{-x}\sin x \end{array}\right\}$$

и

$$y = e^{-x}[(C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x].$$

6.Для уравнения

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

имеем

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 = i, \;\; \lambda_3 = \lambda_4 = -i$$

Поэтому

$$y_1 = \cos x, \;\; y_2 = x\cos x, \; y_3 = \sin x, \;\; y_4 = x\sin x$$

и

$$y = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

Проинтегрировать следующие неоднородные линейные уравнения, найдя предварительно их частные решения методом неопределенных коэффициентов:

1. $y'' - y = x^2 - x + 1$
2. $y'' - 4y' = -12x^2 + 6x - 4$
3. $y'' + 5y' + 6y = 3$
4. $y'' + y' = 3$
5. $y'' + y = 4e^x$
6. $y'' - y = 4e^x$
7. $y'' - 2y' + y = 4e^x$
8. $y'' - 2y' - 3y = -4e^x + 3$
9. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$
10. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$.

Лекция № 27. УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К УРАВНЕНИЯМ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ.

П Л А Н

1. Замена независимой переменной.
2. Уравнение Эйлера.
3.Замена искомой функции.
4.Самосопряженное однородное линейное уравнение второго порядка.
5.Примеры.

1. *Замена независимой переменной.* Линейное дифференциальное уравнение сохраняет свой вид при любой замене независимой переменной, причем однородное уравнение остается однородным. Этим свойством можно воспользоваться для того, чтобы попытаться привести данное однородное линейное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами. Оказывается, что если уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи замены независимой переменной, то только по формуле вида

$$t = c\int \sqrt[n]{p_n(x)}dx \qquad (2)$$

Заметим, что подстановка (2), даже если и не приводит к уравнению с постоянными коэффициентами, иногда все же полезна, т.к. приводит уравнение (1) к такому виду, в котором коэффициент при искомой функции является постоянной величиной.

2.Определение 1. Для однородного линейного *уравнения Эйлера*

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = 0 \qquad (3)$$

по формуле (2) при *x>0* получаем подстановку

$$x = e^t \qquad (4)$$

которая действительно приводит уравнение (3) к уравнению с постоянными коэффициентами.

Уравнение

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_n y = 0$$

приводится к уравнению с постоянными коэффициентами при помощи подстановки

$$ax + b = e^t.$$

Неоднородное линейное уравнение Эйлера

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

подстановкой (4) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами. При этом если $f(x) = P(\ln x) x^{\alpha}$, где P – полином, то частное решение полученного уравнения можно найти методом неопределенных коэффициентов, вследствие чего соответствующее уравнение Эйлера всегда интегрируется в элементарных функциях.

3.*Замена искомой функции*. Для приведения однородного линейного уравнения к уравнению с постоянными коэффициентами можно также воспользоваться однородным линейным преобразованием искомой функции, т.е. подстановкой вида

$$y = \alpha(x) z \qquad (5)$$

где z – новая неизвестная функция, ибо всякое преобразование вида (5) не нарушают ни линейности, ни однородности линейного дифференциального уравнения(1).

Коэффициент $\alpha(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы в полученном уравнения коэффициент при производной (n-1)-го порядка был равен нулю. Если при этом все остальные коэффициенты окажутся

Коэффициент $\alpha(x)$ всегда можно выбрать так, чтобы в полученном урвнении коэффициент при производной (n-1)-го порядка был равен нулю. Если при этом все остальные коэффициенты окажутся постоянными, то получим уравнение с постоянными коэффициентами.

Заметим, что указанное преобразование можно делать и в неоднородном уравнении.

Рассмотрим случай уравнения второго порядка

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0 \qquad (6)$$

Подстановка

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z \qquad (7)$$

приводит уравнение (6) к виду

$$z'' + I(x) z = 0, \qquad (8)$$

где

$$I(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{4} + q(x) \qquad (9)$$

Если окажется, что $I(x)=const$, то уравнение (8) будет уравнением с постоянными коэффициентами.

При интегрировании уравнения (6) иногда оказывается полезной комбинации подстановок (2) и (7), первая из которых приводит это уравнение к уравнению с постоянным коэффициентом при искомой функции, а вторая уничтожает член, содержащий первую производнуб от искомой функции. В результате может получиться уравнение с постоянными коэффициентами.

4.Определение 2. *Самосопряженное однородное линейное уравнение второго порядка.* Однородное линейное уравнение второго порядка всегда можно привести к виду, не содержащему первой производной, при помощи замены независимой переменной

$$x=\varphi(t),$$

которая не нарушает ни линейности, ни однородности данного уравнения.

Действительно, рассмотрим сначала самосопряженное уравнение

$$p(x)y''+p'(x)y'+q(x)y=0 \text{ или } [p(x)y']'+q(x)y=0 \qquad (10)$$

Предполагая, что *p(x)>0* в рассматриваемом интервале изменения *x*, сделаем замену независимой переменной

$$t=\int\frac{dx}{p(x)} \ [x=x(t)]:$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{p(x)} \quad [x=x(t)],$$

поэтому

$$p(x)y'_x=p(x) \quad y'_t\frac{1}{p(x)}=y'_t,$$

$$[p(x)y'_x]'_x=y''_{t^2}\cdot\frac{1}{p(x)},$$

вследствие чего уравнение (10) примет вид

$$y''_{t^2}\cdot\frac{1}{p(x)}+q(x)y=0 \text{ или } y''_{t^2}+Q(t)y=0, \qquad (11)$$

где

$$Qt)=p[x(t)]\,q[x(t)].$$

Пусть теперь дано однородное линейное уравнение второго порядка общего вида

$$p_0(x)y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0. \qquad (12)$$

Умножая обе его части на функцию

$$\mu(x)=\frac{1}{p_0(x)}e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx},$$

Получим самосопряженное уравнение вида (10), где

$$p(x)=e^{\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}.$$

Поэтому подстановка

$$t=\int e^{-\int\frac{p_1(x)}{p_0(x)}dx}dx \qquad (13)$$

приводит уравнение (12) к виду, не содержащему первой производной.

5.Примеры.

1. Рассмотрим уравнение

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0 \qquad (14)$$

Это уравнение Эйлера. Полагая $x = e^t$ и выражая производные от y по x через производные по новой независимой переменной t, найдем:

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{1}{x'_t} = y'_t e^{-t}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{d}{dt} e^{-t}$$

$$y''_{x^2} = (y''_{t^2} e^{-t} - y'_t e^{-t}) e^{-t} = (y''_{t^2} - y'_t) e^{-2t}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (14), получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Его общим решением будет

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}.$$

Поэтому

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3$$

есть общее решение уравнения (13).

2.Пусть дано уравнение

$$y'' - 2xy' + x^2 y = 0 \qquad (15)$$

При помощи подстановки вида (7) приведем его к уравнению, не содержащему члена с первой производной:

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} z. \qquad (16)$$

Вычисляя *I(x)* по формуле (9), находим, что *I(x)=1*. поэтому подстановка (16) приводит уравнение (15) к виду

$$z'' + z = 0.$$

Следовательно,

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

будет общим решением уравнения (15).

3.Пусть дано уравнение

$$xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0 \quad (x > 0) \qquad (17)$$

Приведем его к самосопряженному виду.ю умножая обе части на

$$\mu(x)=\frac{1}{x}e^{\int\frac{1}{2x}dx}=\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Получим

$$\left(\sqrt{x}y'\right)'-\frac{1}{\sqrt{x}}y=0.$$

Приведем это уравнение к виду, не содержащему первой производной, при помощи замены независимой переменной. В силу (13)

$$t=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x},$$

поэтому, согласно (11), придем к уравнению

$$y''_{t^2}-y=0.$$

Так как его общее решение имеет вид

$$y=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

то общим решением данного уравнения (17) будет

$$y=C_1e^{2\sqrt{x}}+C_2e^{-2\sqrt{x}}.$$

Проинтегрировать следующие линейные уравнения Эйлера:

1. $x^2y''-3xy'+3y=0$
2. $x^2y''+xy'-y=0$
3. $x^2y''+xy'-\frac{1}{4}y=0$
4. $x^2y''-3xy'+4y=0$
5. $x^2y''+xy'+4y=0$
6. $x^2y''+5xy'+13y=0$
7. $x^2y''+y=0$
8. $x^2y''-y'=0$
9. $x^2y'''-2y'=0$
10. $x^2y'''+y''=0$

Лекция № 28. ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ.

П Л А Н

1.Понижение порядка при помощи известных частных решений.
2.Нахождение частного решения.
3.Понижение порядка, не содержащего искомой функции.
4.Понижение порядка относительно искомой функции и ее производных.
5.Линейное уравнение второго порядка в точных производных.
6.Примеры.

1. *Понижение порядка однородного линейного уравнения при помощи известных частных решений.* Если для уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

известно ненулевое частное решение y_1, то подстановка

$$y = y_1 \int z dx,$$

где z – новая неизвестная функция, приводит его к уравнению (n-1)-го порядка, которое тоже будет линейным и однородным.

Отсюда, в частности, следует, что для построения общего решения однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

достаточно знать только одно ненулевое частное решение его. При этом второе частное решение y_2 можной найти по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2} dx \qquad (3)$$

Если известно k линейно-независимых частных решений однородного уравнение (1), то его порядок можно понизить на k единиц.

Если известно два частных решения y_1 и y_2 неоднородного линейного уравнения, то их разность $y_2 - y_1$ будет частным решением соответствующего однородного уравнения, вследствие чего порядок последнего можно понизить на единицу.

2.*Нахождение частного решения однородного уравнения в форме функции заданного вида.* Ограничимся случам уравнения второго порядка. Если это уравнение имеет вид

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \qquad (4)$$

где $p_0(x), p_1(x)$ и $p_2(x)$ - полиномы, то иногда его частное решение можно найти в виде полинома некоторой степени n:

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad (5)$$

причем коэффициент при x^n всегда можем считать равным 1, а остальные коэффициенты считаем неопределенными.

Пожставляя (5) в уравнение (4) и приравнивая к нулю коэффициент при старшей степени x, найдем уравнение для определения n. Затем пишем полином найденной степени с неопределенными коэффициентами и ищем последние подстановкой этого полинома в данное уравнение.

Иногда удается найти частное решение уравнения (4) в виде некоторой дробно-рациональной функции или функции другого заданного вида.

3.*Понижение порядка линейного уравнения, не содержащего искомой функции, и линейного уравнения, не содержащего искомой функции и последовательных первых производных.* Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-k}(x)y^{(k)} = f(x) \quad (1 \le k < n)$$

допускает понидение порядка на k единиц при помощи посдстановки

$$y^{(k)} = z,$$

где z – новая неизвестная функция от x.

В частности, уравнение

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} = f(x)$$

приводится, к линейному уравнению первого порядка.

4.*Понижение порядка однородного линейного уравнения как уравнения, однородного относительно искомой функции и ее производных.* Подстановка

$$y' = yz \qquad (6)$$

приводит уравнение (1) к уравнению (n-*1*)-го порядка, но это уравнение уже не будет линейным.

В частности, однородное линейное уравнение второго порядка (2) подстановкой (6) приводится к уравнению Риккати:

$$z' = -z^2 = p(x)z - q(x)$$

Если z_1 есть частное решение этого уравнения, то

$$y_1 = e^{\int z_1 dx} \qquad (7)$$

будет частным решением уравнения (2).

5.Определение. Уравнение

$$y'' + p(x)y' + p'(x)y = f(x)$$

является уравнением в точных производных. Оно имеет первый интеграл вида

$$y' + p(x)y = \int f(x)dx + C_1$$

и, следовательно, интегрируется в квадратурах.

6.Примеры.

1. Найти общее решение уравнения

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, \qquad (8)$$

Если известно, что оно имеет частное решение $y_1 = x$.

Найдем y_2 по формуле (3):

$$y_2 = x\int \frac{e^{\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)}}}{x^2}dx = -\ln x.$$

Поэтому общим решением уравнения (8) будет

$$y = C_1 x + C_2 \ln x.$$

2. Для уравнения

$$(x^3 - 3x^2 + 1)y'' - (x^2 - 6x + 1)y' + (3x^2 - 6x)y = 0 \qquad (9)$$

найти частное решение в виде полинома.

Подставляем полином (5) в уравнение (9):

$$(x^3 - 3x^2 + 1)[n(n-1)^{x^{n-2}} + ...] - (x^3 - 6x + 1)\times$$
$$\times(nx^{n-1} + ...) + (3x^2 - 6x)(x^n + ...) = 0$$

Приравнивая к нулю коэффициент при x^{n+2}, имеем $-n + 3 = 0$, откуда $n = 3$. Следовательно, если частное решение в виде полинома существует, то последний может быть, только полином третьей степени. Полагая

$$y = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

и подставляя этот полином в уравнение (9), получаем

$$(x^3-3x^2+1)(6x+2a_1)-(a^3-6x+1)(3x^2+2a_1x+a_2)+$$
$$+(3x^2-6x)(x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)=0\,.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x^4, x^3, x^2, x и свободный член:

$$\left.\begin{aligned}
&x^4: 6-2a_1+3a_1-6=0;\\
&x^3: -18+2a_1-a_2+18+3a_2-6a_1=0;\\
&x^2: -6a_1+12a_1-3+3a_2-6a_2=0;\\
&x: 6+6a_2-2a_1-6a_3=0;\\
&x^0: 2a_1-a_2=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Так как система (10) совместна, причем $a_1=a_2=0$, $a_3=1$, то искомое решение существует и имеет вид

$$y_1=x^3+1.$$

3.Найти частное решение уравнения

$$y''+xy'-(2x^2+1)y=0 \qquad (11)$$

приведя его предварительно к уравнению Риккати.

Выполняя подстановку (6), получаем

$$z'=-z^2-xz+2x^2+1.$$

Нетрудно догадаться, что это уравнение имеет частное решение $z_1=x$. Следовательно, в силу формулы (7), уравнение (1) имеет частное решение $y_1=e^{\frac{x^2}{2}}$.

Найти общее решения следующих уравнений, пользуясь указанными частными решениями:

1. $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0;\quad y_1=\dfrac{\sin x}{x}$
2. $(\sin x-\cos x)y''-2\sin x\cdot y'+(\cos x+\sin x)y=0;\ \ y_1=e^x$.
3. $(\cos x+\sin x)y''-2\cos x\cdot y'+(\cos x-\sin x)y=0;\quad y_1=\cos x$
4. $(1-x^2)y''-xy'+\dfrac{1}{4}y=0;\quad y_1=\sqrt{1+x}$.

Лекция № 29. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.

П Л А Н

1.Нахождение решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде степенных рядов.
2.Нахождение решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде обобщенных степенных рядов.
3.Примеры.

1. *Нахождение решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде степенных рядов.* Пусть дано уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0 \qquad (1)$$

и поставлены начальные уравнения:

$$y = y_0, \quad y' = y_0' \text{ при } x = x_0. \qquad (2)$$

Если коэффициенты уравнения (1) *p(x)* и *q(x)* разложимы в степенные ряды по степеням разности $x - x_0$:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k, \qquad (3)$$

сходящиеся в области $|x - x_0| < p$, то, согласно теореме Коши (о существовании голоморфного решения), уравнение (1) имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям (2), разложимое в ряд по степеням разности $x - x_0$:

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \sum_{k=2}^{\infty} c_k (x - x_0)^k, \qquad (4)$$

который сходится по крайней мере в той же области $|x - x_0| < p$, что и ряды (3).

При этом в начальных условиях (2) числа y_0 и y_0' можно брать любыми.

Коэффициенты c_k ряда (4) определяются единственным образом, если заданы числа y_0 и y_0'. Их можно определить, например, подстановкой ряда (4) в уравнение (1) и приравниванием нулю коэффициентов при различных степенях $x - x_0$ в левой части полученного равенства (метод неопределенных коэффициентов).

На деле чаще всего *p(x)* и *q(x)* являются либо полиномами, либо отношениями полиномов. В первом случае ряд (4) сходится при всех значениях *x*. Во втором случае радиус сходимости ряда (4) не меньше расстояния от точки $x - x_0$ до ближайщей из точек, в которых знаменатели коэффициентов уравнения (1), рассматриваемые как функции комплексной переменной x, обращаются в нуль.

Для построения общего решения уравнения (1) достаточно найти два линейно-независимых частных решения y_1 и y_2 . Обычно строят фундаментальную систему решений y_1 и y_2 , нормированную в точке $x-x_0$, так что:

$$\left.\begin{aligned} y_1=1,\ y_1'=0 \quad при \quad x=x_0 \\ y_2=1,\ y_2'=0 \quad при \quad x=x_0 \end{aligned}\right\}$$

Если ряд (4), представляющий решение уравнения (1), удается просуммировать, т.е. выразить его сумму через элементарные функции, то второе частное решение можно найти по формуле (3).

Изложенный выше способ интегрирования однородных линейных уравнений второго порядка переносится без существенных изменений на однородное линейное уравнение любого порядка

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0.$$

При этом решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y=y_0, y'=y_0',\ldots, y^{(n-1)}=y_0^{(n-1)} \text{ при } x-x_0$$

(в виде ряда по степеням разности $x-x_0$), записывается так:

$$y=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{y_0''}{2!}(x-x_0)+\ldots$$

$$\ldots+\frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+\sum_{k=n}^{\infty}c_k(x-x_0)^k \quad (|\,x-x_0\,|<p).$$

Решение неоднородного линейного уравнения любого порядка, все коэффициенты и правая часть которого разлагается в ряды по степеням $x-x_0$, также можно искать в виде ряда по степеням $x-x_0$.

2.*Нахождение решений однородного линейного уравнения второго порядка в виде обобщенных степенных рядов.* Ряд вида

$$(x-x_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k \quad (c_0\neq 0) \qquad (5)$$

где ρ - заданное число, а степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k$ сходится в некоторой области $(x-x_0)<R$, называется обобщенным степенным рядом. Если ρ есть целое неотрицательное число, то обобщенный степенной ряд (5) обращается в обычный степенной ряд.

Пусть $x-x_0$ есть особая точка уравнения (1), т.е. особая точка хотя бы одного из коэффициентов *p(x)* и *q(x)*, так что *p(x)* и *q(x)* непосредственно (одновременно) ни в какой окрестности точки $x=x_0$ степенными рядами вида (3). Тогда теорема Коши неприменима. Но во многих случаях удается найти решение уравнения (1) в виде обобщенного степенного ряда по степеням разности $x - x_0$, который, как отмечено выше, может обратиться в обычный степенной ряд. А именно имеет место следующая теорема.

Теорема. Если коэффициенты уравнения (1) представимы в окрестности особой точки $x = x_0$ в виде:

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k}{x - x_0}, \quad q(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^2}, \qquad (6)$$

где $p_0^2 + q_0^2 + q_1^2 \neq 0$ и ряды в числителях сходятся в некоторой области $|x - x_0| < R$, то уравнение (1) имеет хотя бы одно решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y = (x - x_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad (c_0 \neq 0) \qquad (7)$$

причем входящий в это решение степенной ряд сходится по крайней мере в той же области $|x - x_0| < R$, что и ряды в (6).

Разыскивая решение уравнения (1) в окрестности особой точки в виде обобщенного степенного ряда (7), можем получить на деле решение в виде обычного степенного ряда по степеням разности $x - x_0$. Это будет в том случае, когда, как уже отмечалось выше, число ρ окажется целым неотрицательным числом.

Для определения показателя ρ и коэффициентов c_k нужно подставить ряд (7) в уравнение (1), сократить на $(x - x_0)^{\rho}$ и приравнять нулю коэффициенты при различных степенях $x - x_0$ (метод неопределенных коэффициентов). При этом число ρ находится из так называемого определеяющего уравнения в особой точке $x = x_0$:

$$\rho(p - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0 \qquad (8)$$

Коэффициенты p_0 и q_0 этого уравнения можно найти по формулам:

$$p_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0) p(x), \quad q_0 = \lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x) \qquad (9)$$

В случае, когда корни ρ_1 и ρ_2 определяющего уравнения (8) различны, уравнение (1) всегда имеет решение вида (7), где ρ есть то из корней ρ_1 и ρ_2, который имеет большую вещественную часть. Если ρ_1 есть этот корень, то решение имеет вид

$$y_1 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(1)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(1)} \neq 0).$$

Если разность корней ρ_1 - ρ_2 определяющего уравнения не является целым положительным числом, то существует решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее и второму корню ρ_2:

$$y_2 = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(2)} (x - x_0)^k \quad (c_0^{(2)} \neq 0) \qquad (10)$$

Если же ρ_1 - ρ_2 есть целое положительное число, то второе частное решение или снова имеет вид (10), или же представляет собой сумму обобщенного степенного ряда и произведения некоторого обобщенного степенного ряда на $\ln(x-x_0)$:

$$y_2=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(2)}(x-x_0)^k+\gamma_{-1}y_1\ln(x-x_0)\quad(\gamma_{-1}\neq 0)$$

Наконец, если корни определяющего уравнения равны между собой ($\rho_1=\rho_2$), то существует только одно частное решение в виде обобщенного степенного ряда. Второе же решение обязательно содержит $\ln(x-x_0)$. Его следует искать в виде:

$$y_2=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-x_0)^k+\gamma_{-1}y_1\ln(x-x_0)\tag{11}$$

где $(\gamma_{-1}\neq 0)$.

3.Примеры.

1. Для уравнения

$$(1-x^2)y''-xy'-y=0\tag{12}$$

найти фундаментальную систему решений y_1, y_2, нормированную в точке $x=0$, в виде рядов по степеням x и построить общее решение.

Прежде всего убедимся, что решения y_1 и y_2 существуют. Если переписать уравнение (12) в виде (1), то получим

$$y''-\frac{x}{1-x^2}y'-\frac{1}{1-x^2}y=0/$$

Коэффициенты э того уравнения разлагаются в ряды по степеням x, сходящиеся в области $|x|<1$. Поэтому y_1 и y_2 существуют, причем ряды, представляющие их, сходятся, по крайней мере, при $|x|<1$.

Найдем y_1:

(-1)	$y_1=1+\sum_{k=2}^{\infty}c_kx^k$
$(-x)$	$y_1'=\sum_{k=2}^{\infty}kc_kx^{k-1}$
$(1-x^2)$	$y_1'=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}$

$$-1-\sum_{k=2}^{\infty}c_kx^k-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}-\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k=0,$$

$$x^0:\ -1+2\cdot 1\cdot c_2=0,\quad c_2=\frac{1}{2!};$$

$$x:\ \ 3\cdot 2\cdot c_3=0,\quad c_3=0;$$

$$x^k:\ -c_k-kc_k+(k+2)(k+1)c_{k+2}-k(k-1)c_k=0,$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}=(1+k^2)c_k,$$

$$c_{k+2}=\frac{1+k^2}{(k+1)(k+2)}c_k \qquad (k\geq 2),$$

$$c_5=c_7=\ldots=c_{2m+1}=\ldots 0,$$

$$c_4=\frac{1+2^2}{3\cdot 4}c_2=\frac{1+2^2}{4!}, \quad c_6=\frac{(1+2^2)(1+4^2)}{6!},\ldots,$$

$$c_{2m}=\frac{(1+2^2)(1+4^2)\ldots[1+(2m-2)^2]}{(2m)!}.$$

Таким образом,

$$y_1=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1+2^2}{4!}x^4+\frac{(1+2)^2(1+4)^2}{6!}+$$

$$=\frac{(1+2)^2(1+4)^2\ldots[1+(2m-2)^2]}{(2m)!}x^{2m}+\ldots \quad (|x|<1)$$

Частное решение y_2 ищем в виде:

$$y_2=x+\sum_{k=2}^{\infty}c_k x^k\ . \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), так же, как и выще, найдем все коэффициенты c_k. В результате получим

$$y_2=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{2(1+3)^2}{5!}x^5+\ldots.+$$

$$+\frac{2(1+3^2)\ldots.[1+(2m-1)^2]}{(2m+1)!}x^{2m+1}+\ldots \quad (|x|<1)$$

Общим решением уравнения (12) будет

$$y=C_1y_1+C_2y_2.$$

2.Доказать, что уравнение Гаусса

$$x(x-1)\ y''+[-\gamma+(1+\alpha+\beta)x]y'+\alpha\beta\gamma=0$$

в случае, когда γ не равно ни целому числу, ни ную, имеет частное решение в виде степенного ряда по степеням x, и найти это решение.

Составляем определяющее уравнение в особой точке $x=0$. Пользуясь формулами (9), находим:

$$p_0=\lim_{x\to 0}\frac{-\gamma+(1+\alpha+\beta)x}{x-1}=\gamma,\ \ q_0=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\beta x}{x-1}=0/$$

Поэтому определяющим уравнением в точке $x=0$ будет

$$\rho(\rho-1)+\gamma\rho=0.$$

Оно имеет корни $\rho_1=0,\rho_2=1-\gamma$. Корню $\rho_1=0$ соответствует частное решение в виде ряда по степеням x со свободным членом, отличным от нуля:

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k \quad (c_0\neq 0). \tag{14}$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найдем, полагая $c_0=1$, все коэффициенты c_k. Подставляя их в ряд (14), получим частное решение уравнения Гаусса в виде

$$y_1 = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1\frac{\alpha,\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + ... +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)...[\alpha+(k-1)]\beta(\beta+1)...[\beta+(k-1)]}{k!\gamma(\gamma+1)...[\gamma+(k-1)]}x^2 + ...$$

Ряд справа называется гипергеометрическим рядом. Он сходится при $|x|<1$.

3.Доказать, что уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

где $n>0$, имеет частное решение вида

$$y = x^n\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \quad (c_0 \neq 0) \qquad (15)$$

причем ряд справа сходится при всех значениях x.

Определяющим уравнением в особой точке $x=0$ будет

$$\rho(\rho-1)+\rho-n^2=0 \text{ или } \rho^2-n^2=0.$$

Оно имеет корни $\rho_1 = n,\ \rho_2 = -n$. Корню $\rho_1 = n$ отвечает решение вида (15).

Доказать, что уравнение Бесселя *(n=0)*

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (16)$$

имеет решение в виде степенного ряда по степеням x и найти это решение.

Определяющее уравнение в особой точке $x=0$

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \text{ или } \rho^2=0$$

имеет кратный корень $\rho_1=\rho_2=0$. Поэтому (16) имеет только одно решение в виде обобщенного степенного ряда, причем последний обращается в обычный степенной ряд

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k\,(c_0 \neq 0).$$

Пользуясь методом неопределенных коэффициентов и пологая $c_0 = 1,$ найдем, что все коэффициенты при нечетных степенях x равны нулю, а коэффициенты при четных степенях x выражается формулой

$$c_{2k} = (-1)^k\frac{1}{(kl)^2\cdot 2^{2k}},$$

так что уравнение (16) имеет решение вида

$$y_1 = j_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(kl)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Функция $j_0(x)$называется *функцией Бесселя первого рода нулевого порядка.*

Второе частное решение должно содержать ln x, и его следует, согласно формуле (11), искать в виде

$$y_2 = \gamma_{-1} j_0(x)\ln x + c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots ,$$

причём c_0 можно считать равным нулю, ибо этого всегда можно добиться, взяв вместо y_2 соответствующую линейную комбинацию y_2 и $j_0(x)$ (почему?).

Ищем y_2 в виде

$$y_2 = \gamma_{-1} j_0(x)\ln x + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Используя метод неопределеннЫх коэффициентов, пологая при этом $\gamma_{-1} = 1,$ найдем

$$y_2 = K_0(x) = j_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) +$$

$$+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^4\cdot 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \dots$$

Функция $K_0(x)$ называется *функцией Бесселя второго рода нулевого порядка.*

Общее решение уравнения (16) можно записать в виде

$$y = C_1 j_0(x) + C_2 K_0(x).$$

Найти фундаментальную систему решений в виде рядов по степеням *x*, нормированную в точке *x=0*, и построить общее решение:

1. $y'' - xy = 0.$ 2. $y'' + x^2 y = 0.$ 3. $y'' + \dfrac{1}{1-x} y = 0.$

4. $y'' + xy' - (x^2+1)y = 0.$

Вопросы.

1. Какой общий вид имеет линейное уравнение n-го порядка?

При каком условий задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение? Какова при этом условии степень произвола выбора начальных данных решений линейного уравнения? В каком интервале существуют решения? Может ли график нулевого решения однородного линейного кравнения второго порядка касаться оси Ox? Может ли он пересекать ось Ox? Почему линейное уравнения не имеет особых решений?

2. Какие решения однородного линейного уравнения называется линейно-независимыми? Что такое фундаментальная система решений? Может ли нулевое решение входить в состав фундаментальной системы решений? Какое условие являеться необходимым и достаточным для того, чтобы данная система решений была фундаментальной? Сколько фундаментальных систем решений имеет заданное однородное линейное

уравнение? Какая фундаментальная система решений называется нормированной в заданной точке?

3. Как построить общее решение однородного линейного уравнения, если известна фундаментальная система решений? В какой области определено общей решение? Как решить задачу Коши при помощи формулы общего решения? Как записать общее решение в форме Коши, если известна фундаментальная система решений, нормированная в заданной точке?

4. Как найти общее неоднородное линейного уравнения, если известно одно частное решение его общее решение соотвествующего однородного уравнения?

5. В чём состоит метод Лагранжа нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения?

6. Как поступить однородное линейное уравнения, имеющее заданную фундаментальную систему решений?

7. В чем состоит метод Эйлера интегрирования однородных линейных уравнений с постоянными коэффциентами? Как зависит структура фундаментальной системы решений от вида корней характеристического уравнения? В какой области определено общее решение?

8. В каких случаях и в каком виде может быть найдено частное решение неоднородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов?

9. Какая замена независимой переменной может привести однородное линейное уравнение n-го порядка общего вида к уравнению с постоянными коэффициентами?

10. Как интегрируется линейное уравнение Эйлера?

11. Как интегрируется уравнение Чебышева? В каком случае одно из частных решений этого уравнения будет полиномом?

12. Какой заменой икомой функции можно избавиться в однородном линейном уравнении второго порядка от члена, содержащего первую производную от искомой функции?

13. Если для однородного линейного уравнения второго порядка известно одно нулевое частное решение y_1, то как найти второе частное решение y_2 (т.е. решение, линейно-независимое с y_1)

14. Как найти ненулевое частное решение однородного линейного уравнения второго порядка в виде полинома, если такое решение существует?

15. Как понижается порядок линейного уравнения, не содержащего искомой функции, и линейного уравнения, не содержащего искомой функции и послдовательных первых производных? В каком случае такое уравнение всегда интегрируется в квадратурах?

16. Какой подстановкой можно привести однородное линейное уравнение второго порядка к уравнению Риккати?

Лекция № 30. СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

П Л А Н

1. Нормальные системы.
2.Системы дифференциальных уравнений в симметрической форме.
3.Механическое истолкование нормальной системы. Устойчивость решения (движения).
4.Канонические системы дифференциальных уравнений высших порядков.

1.Определение 1. *Нормальная система* обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий общий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $y_1, y_2, ...y_n$ – неизвестные функции от независимой переменной x, подлежащие определению, а $f_1, f_2, ...f_n$ – известные функции от $x, y_1, y_2, ..., y_n$, заданные и непрерывные в некоторой области. Число n называется *порядком* системы (1).

Если правые части системы (1) является линейным и функциями от y_1, $y_2, ..., y_n$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + ... + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ &\frac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_2 + p_{22}(x)y_2 + ... + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + ... + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{aligned}\right\}$$

то такая система называется линейной.

Совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x),\ \ y_2 = y_2(x), ..., y_n(x). \qquad (2)$$

определенных и непрерывно дифференцируемых в интервале (a,b), называется решением системы (1) в интервале (a,b), если функции (2) обращают уравнения системы (1) в тождества, справедливые при всех значениях x из (a,b). Кривая в $(n\text{-}1)$-мерном пространстве $(x, y_1, y_2,..., y_n)$, соответствующая решению (2), называется интегрльной кривой.

Задача нахождения решения

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x),..., y_n = y_n(x),$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)},..., y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0,$$

где $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)},..., y_n^{(0)}$ суть заданные числа (начальные данные), называется задачей Коши.

Для существования решения задачи Коши достаточно, чтобы правые части системы (1) были непрерывны в окрестности начальной точки $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)},..., y_n^{(0)})$ (теорема Пеано).

Чтобы гарантировать не только существование, но и единственность решения задачи Коши, достаточно, согласно теореме Пикара, предположить дополнительно, чтобы правые части системы (1) удовлетворяли условию Липшица относительно $y_1, y_2,..., y_n$ в некоторой окрестности начальной точки $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)},..., y_n^{(0)})$, в частности, чтобЫ они имели в этой окрестности ограниченные частные производные по $y_1, y_2,..., y_n$.

Например, это будет иметь место, если правые части системы (1) являются полиномами относительно всех своих аргументов или хотя бы относительно $y_1, y_2,..., y_n$ в предположении, что все коэффициенты этих полиномов суть непрерывные функции от x. При этом $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)},..., y_n^{(0)}$ можно задавать совершенно произвольно, а x_0 можно выбирать любым только в первом случае, в то время как во втором случае x_0 должно лежать в интервале непрерывности коэффициентов системы.

Совокупность n функций

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2,..., C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2,..., C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2,..., C_n). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

определенных в некоторой области изменения переменных $x, C_1, C_2, ..., C_n$ и имеющих частные производные по x, называется общим решением системы (1) в области D изменения переменных $x, y_1, y_2, ..., y_n$, в каждой точке которой имеет место существование и единственность решения задачи Коши, если:

1) система уравнений (3) разрешима в области D относительно произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, так что имеем

$$\left.\begin{aligned} &C_1 = \psi_1(x, y_1 y_2, \ldots, y_n), \\ &C_2 = \psi_2(x, y_1, y_2 \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &C_n = \psi_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

2) совокупность функций (3) является решением системы (1) при всех значениях произвольных постоянных, доставляемых формулами (4), когда точка $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пробегает область D.

Чтобы найти решение системы (1) с начальными данными $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$ из области D при помощи формулы общего решения (3), поступают так:

1) подставляют в систему (3) вместо $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ соответственно числа $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \ldots, y_n^{(0)}$:

$$\left.\begin{aligned} &y_1^{(0)} = \varphi_1(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &y_2^{(0)} = \varphi_2(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &y_n^{(0)} = \varphi_n(x_0, C_1, C_2, \ldots, C_n); \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

2) решают систему (5) относительно $C_1, C_2, \ldots, C_n$, находят $C_1 = C_1^{(0)}, C_2 = C_2^{(0)}, \ldots., C_n = C_n^{(0)}$;

3)подставляя найденные значения произвольных постоянных в формулу (3), получают искомое решение

$$\left.\begin{aligned} &y_1 = \varphi_1(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \\ &y_2 = \varphi_2(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &y_n = \varphi_n(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}), \end{aligned}\right\}$$

оно будет единственным.

Общее решение вида

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y_1(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}), \\ y_2 = y_2(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}), \\ ...., \\ y_n = y_n(x, x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}), \end{array}\right\}$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальные значения $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ искомых функций $y_1, y_2, ..., ..., y_n$ при фиксированном значении x_0 независимой переменной x, называется общим решением в форме Коши.

Решение (2), в каждой точке которого имеет место существование и единственность решения задачи Коши, называется частным решением. Так, решение, получающееся из общего решения в области D при конкретных (допустимых) числовых значениях произвольных постоянных (включая +±∞), будет частным решением.

Если в каждой точке решения нарушается единственность решения задачи Коши, то оно называется особым.

Функция $\psi(x, y_1, y_2, .., y_n)$ (которую предполагать непрерывно дифференцируемой и не сводящейся к постоянной) *называется интегралом системы* (1), если она обращается тождественно в постоянную вдоль любого частного решения. Отсюда следует, что $d\psi \equiv 0$ в силу системы (1), т.е.

$$d\psi\,|_{(1)} = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y_1} f_1 dx + ... + \frac{\partial\psi}{\partial y_n} f_n dx \equiv 0$$

Нормальная система n уравнений не может иметь более чем n независимых интегралов. Так что, если $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$ суть независимые интегралы системы (1), то всякий другой интеграл ψ этой же системы будет функцией от $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$.

Равенство $\psi(x, y_1, y_2, ..., y_n) = C$ называется первым интегралом системы (1).

Совокупность n независимых * первых интегралов системы (1) называется общим интегралом этой системы.

При интегрировании данной системы стараются найти общее решение или общий интеграл.

Если, интегрируя нормальную систему n-го порядка, получаем семейство интегральных кривых, зависящее от n произвольных постоянных, в виде, не разрешенном ни относительно произвольных постоянных, ни относительно искомых функций, то это семейство также называть общим интегралом этой системы.

В общем случае мы располагаем очень ограниченными возможностями интегрирования в квадратурах.

Для линейных систем эти возможности несколько шире. Но фактически всегда удается найти в квадратурах общее решение или общий интеграл только в случае, когда коэффициенты линейной системы являются постоянными. Решения линейной системы с переменными коэффициентами во многих случаях удается найти при помощи степенных рядов. Для интегрирования линейных систем применяется также матричный метод.

2.Определение 2. Система вида

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_m)} \qquad (6)$$

называется *системой дифференциальных уравнений в симметрической форме.* Если в точке $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)$ хоть один из знаменателей $X_1,X_2,...,X_n$ отличен от нуля, то в окрестности этой точки систему (6) можно заменить нормальной системой *n-1* уравнений. Пусть, например $X_n(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})\neq 0$. Тогда система (6) равносильна следующей нормальной системе:

$$\frac{dx_1}{dx_n}=\frac{X_1}{X_n},\ \frac{dx_2}{dx_n}=\frac{X_2}{X_n},....,\frac{dx_{n-1}}{dx_n}=\frac{X_{n-1}}{X_n} \qquad (7)$$

Каждый интеграл (первый интеграл) системы (7) называть интегралом (первым интегралом) системы (6). Система (6) имеет не более чем *n-1* независимых интегралов (первых интегралов). Совокупность *n-1* независимых первых интегралов системы (6) будем называть общим интегралом этой системы.

Всякую нормальную систему (1) можно записать в виде системы в симметрической форме

$$\frac{dy_1}{f_1}=\frac{dy_2}{f_2}=...=\frac{dy_n}{f_n}=\frac{dx}{I}.$$

3.Определение 3. Рассмотрим нормальную систему вида

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=X_1(t,x_1,x_2,...,x_n),\\
&\frac{dx_2}{dt}=X_2(t,x_1,x_2,...,x_n),\\
&....................................,\\
&\frac{dx_n}{dt}=X_n(t,x_1,x_2,...,x_n),
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

где t – время, а $x_1,x_2,...,x_n$ – координаты точки n-мерного пространства (фазового пространства) $(x_1,x_2,...,x_n)$. В случае $n=2$ это пространства есть плоскость (x_1,x_2) (фазовая плоскость).

Всякое решение

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t) \tag{9}$$

системы (8) называется *движением*, определяемым этой системой, а путь, описываемый движущейся точкой в фазовом пространстве (на фазовой плоскости) – траекторией этого движения.

Система (8) задает некоторое поле скоростей, а именно – поле скоростей движений, определяемых этой системой. Задача интегрирования системы состоит в том, чтобы по этому полю восстановить сами движения.

Задача Коши для системы (8) состоит в нахождении решения (движения) (9), удовлетворяющего начальным условиям:

$$x_1 = x_1^{(0)},\ x_2 = x_2^{(0)}, \ldots\ldots, x_n = x_n^{(0)} \text{ при } t = t_0 \tag{10}$$

где $t_0, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ - заданные числа (начальные данные), т.е. ищется такое движение (9), при котором движущаяся точка находится в заданной точке ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$) фазового пространства в заданный момент времени t_0.

В случае, когда в начальной точке ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$) правые части системы (8) обращаются в нуль, при всех рассматриваемых значениях времени *t*, система (8) определяет движение вида

$$x_1 \equiv x_1^{(0)},\ x_2 \equiv x_2^{(0)}, \ldots, x_n \equiv x_n^{(0)} \tag{11}$$

Такое движение называется состоянием покоя. Траектория движения (11) представляет собой точку ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$), которая называется *точкой покоя или точкой равновесия системы* (8).

Если система (8) является автономной (стационарной), т.е. ее правые части не зависят явно от *t* :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dx_n}{dt} &= X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

то траектория движений, определяемых этой системой, являются интегральные кривые соответствующей системы в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

и точки покоя самой системы (12).

В частности, траекториями движений, определяемых системой

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=cx+dy,\\ \frac{dy}{dt}&=ax+by\end{aligned}\right\}\ (ad-bc\neq 0),$$

будут интегральные кривые уравнения

$$\frac{dx}{cx+dy}=\frac{dy}{ax+by} \text{ или } \frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}$$

и начало координат *x=0, y=0.*

При выполнении условий теоремы Пикара решение (движение) (9), определяемое системой (8) и начальными условиями (10), является непрерывной функцией начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$. При этом интервал изменения времени предполагается конечным.

В тех случаях, когда непрерывная зависимость решения (движения) от начальных данных имеет место равномерно относительно времени *t* на всем полубесконечном интервале изменения $t(t \geq t_0)$, говорят, что решение (движение) (9) обладает свойством устойчивости при $t \to +\infty$.

Предположим, что правые части системы (8) обращаются в точке $x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0$ в нуль при всех рассматриваемых значениях времени $t(t \geq t_0)$. Тогда система (8) определяет нулевое решение

$$x_1 \equiv 0, x_2 \equiv 0, ..., x_n \equiv 0 \qquad (13)$$

Это решение удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$x_1 = 0, x_2 = 0, ..., x_n = 0 \text{ при } t = t_0.$$

Решение (13) называется невозмущенным решением, а соответствующее ему движение – невозмущенным движением.

Всякое решение (9), удовлетворяющее начальным условиям (10), где хоть одно из начальных данных $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ отлично от нуля, называется *возмущенным решением*, соответствующее ему движение – возмущенным движением, а числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$ - возмущениями.

Нулевое решение (13) называется *устойчивым в смысле Ляпунова* при $t \to +\infty$, когда все возмущенные решения (9), соответствующие достаточно малым возмущениям $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}$, будут при всех значениях $t \geq t_0$ находится в сколь угодно малой окрестности невозмущенного решения, т.е. если по любому положительному числу $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое положительно число $\delta > 0$, что из равенств

$$|x_1^{(0)}| < \delta, |x_2^{(0)}| < \delta, ..., |x_n^{(0)}| < \delta$$

следует неравенства

$$|x_1(t)| < \varepsilon, |x_2(t)| < \varepsilon, ..., |x_n(t)| < \varepsilon \text{ при всех } t \geq t_0.$$

Если хотя бы для одного $\varepsilon>0$ не существует соответствующего $\delta>0$, то решение (13) называется неустойчивым.

Решение (13) называется *асиптотическим устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того,

$$x_1(t)\to 0, x_2(t)\to 0,..., x_n(t)\to 0 \text{ при } t\to+\infty.$$

Судить о наличии (или отсутствии) устойчивости нулевого решения (13) проще всего в тех случаях, когда известно общее решение в форме Коши.

Проще всего рассматривать вопрос об устойчивости нулевого решения в случае однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.

4.*Канонические системы дифференциальных уравнений высших порядков.* Система дифференциальных уравнений высших порядков, разрешенная относительно старших производных, называется канонической. Она имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y_1^{(m_1)} &= f_1(x, y_1 y_1',...., y_1^{(m_1-1)},..., y_n, y_n',..., y_n^{(m_n-1)}),\\ y_1^{(m_2)} &= f_2(x, y_1 y_1',...., y_1^{(m_1-1)},..., y_n, y_n',..., y_n^{(m_n-1)}),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ y_n^{(m_n)} &= f_n(x, y_1 y_1',...., y_1^{(m_1-1)},..., y_n, y_n',..., y_n^{(m_n-1)}).\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Число $m_1+m_2+...+m_n$ называется порядком системы (14).

Совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x),..., y_n = y_n(x), \qquad (15)$$

имеющих непрерывные производные соответствующих порядков называется решением системы (14) в интервале (a,b), если эти функции обращают уравнения системы (14) в тождества, справедливые для всех значений x из (a,b).

Каноническая система (14), так же как и одно уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)}),$$

приводится к соответствующей ей нормальной системе уравнений, если принять все производные, стоящие справа, за новые неизвестные функции.

Задача Коши для канонической системы (14) состоит в нахождении решения (15), в котором искомые функции $y_1,y_2,...,y_n$ вместе со своими производными до порядков соответственно m_1-1, m_2-$1,...,m_n$-1 принимают наперед заданные числовые знаения при заданном значении x.

Общее решение канонической системы (14) содержит $m_1+m_2+...+m_n$ произвольных постоянных.

Лекция № 31. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

П Л А Н

1.Последовательное интегрирование.
2.Метод исключения.
3.Интегрируемые комбинации.
4.Интегрирование систем, правые части которых удовлетворяют условиям Коши-Римана (Даламбера-Эйлера).
5.Примеры.

1.*Последовательное интегрирование.* Если система дифференциальных уравнений состоит из n уравнений первого порядка, каждое из которых содержит только одну неизвестную функцию, т.е. имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_n), \end{aligned}\right\}$$

то ее интегрирование сводится к интегрированию каждого из уравнений в отдельности.

В случае, когда система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \\ &\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned}\right\}$$

ее интегрирование выполняется последовательно: нужно проинтегрировать первое уравнение, подставить найденное общее решение во второе уравнение, проинтегрировать его и т.д.

в частности, таким путем всегда может быть проинтегрирована в квадратурах линейная система вида

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dy_1}{dx} = p_{11}(x)y_1 + f_1(x),\\
&\frac{dy_2}{dx} = p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + f_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{dy_n}{dx} = p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x).
\end{aligned}\right\}$$

2.*Метод исключения.* Многие нормальные системы удается проинтегрировать путем предварительного приведения данной системы n-го порядка к одному уравнению n-го порядка с одной неизвестной функцией или к нескольким таким уравнениям, причем сумма их порядков равна n. Это приведение системы к одному уравнению n-го порядка (если оно возможно) достигается последовательным дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных функций, кроме одной (метод исключения). Проинтегрировав полученное уравнение, находят общее решение данной системы уже без новых квадратур.

Каноническая система дифференциальных уравнений порядка $m_1+m_2+\ldots+m_n$ также во многих случаях может быть проинтегрирована методом исключения, ибо она, приводится к одному уравнению $m_1+m_2+\ldots+m_n$.

3.*Интегрируемые комбинации.* Задача интегрирования данной системы дифференциальных уравнений значительно облегчается, если удается найти один или несколько независимых первых интегралов системы, ибо тогда удается понизить порядок системы.

Первые интегралы во многих случаях находятся путем построения интегрируемых комбинаций, т.е. легко интегрируемых дифференциальных уравнений, полученных из данной системы путем несложных преобразований. Для нахождения интегрируемых комбинаций иногда бывает полезно предварительно переписать данную систему в симметрической форме.

Если для системы, состоящей из n уранвнеий, найдено n независимых первых интегралов, то тем саммы найден обший интеграл этой системы и ее интегрирование окончено.

4.*Интегрирование систем, правые части которых удовлетворяют условиям Коши-Римана (Даламбера-Эйлера).* Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = u(x, y),\\
&\frac{dy}{dt} = \upsilon(x, y).
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Предположим, что функции u и υ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.$$

Тогда функция

$$f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y) \quad (z=x+iy)$$

будет регулярной функцией от комплексной переменной *z*. Например, если $u=x^2-y^2,\ \upsilon+i\upsilon=z^2\equiv f(z)$.

Умножая второе уравнение системы (1) на i и складывая почленно в первым, получим

$$\frac{dz}{dt}=f(z). \tag{2}$$

Это уравнение будем называть комплексным дифференциальным уравнением, соответствующим системе (1).

Интегрируя уравнение (2) и отделяя в общем решении вещественные и мнимые части, найдем общее решение системы (1).

Для системы (1), правые части которой удовлетворяют условиям Коши-Римана, можно найти решение

$$x=x(t),\ \ y=y(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x=x_0, y=y_0 \text{ при } t=t_0,$$

не пользуясь формулами общего решения этой системы.

Для этого достаточно заменить систему (1) равносильным ей уравнением (2), найти решение

$$z=z(t)$$

этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию

$$z=z_0 \quad (z_0=x_0+iy_0) \text{ при } t=t_0,$$

и отделить в нем вещественную и мнимую части.

5.Примеры.

1. Для системы

$$y'=1-\frac{1}{z},\quad z'=\frac{1}{y-x} \tag{3}$$

Найти общее решение и выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y=-1,\ \ z=1 \text{ при } x=0. \tag{4}$$

Найдем общее решение системы (3) методом исключения. Дифференцируем второе уравнение

$$z''=-\frac{1}{(y-x)^2}(y'-1).$$

Желая исключить из полученного уравнения *y* и *y″*, заменим в нем $\dfrac{1}{y-x}$ и *y′-1* их значениями из данной системы. Получим

$$z'' = z'^2 \cdot \frac{1}{z} \tag{5}$$

Интегрируем уравнение (5):

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z}, \quad z' = C_1 z$$

откуда

$$z = C_2 e^{C_1 x}.$$

Для нахождения y воспользуемся вторым из уравнений (3) и найденным значением z :

$$y - x = \frac{1}{z'}, \quad y - x = \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x},$$

откуда

$$y = x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}.$$

Общим решением системы (3) будет

$$\left.\begin{aligned} y &= x + \frac{1}{C_1 C_2} e^{-C_1 x}, \\ z &= C_2 e^{C_1 x} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Решим теперь поставленную задачу Коши. Подставляем в систему (6) вместо *x, y* и *z* их начальные значения 0, -1 и 1:

$$-1 = \frac{1}{C_1 C_2}, \quad 1 = C_2,$$

откуда $C_1 = -1$, $C_2 = 1$, так что искомым решением будет

$$y = x - e^{x}, \quad z = e^{-x}.$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (4).

2.Пусть дана система

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x. \tag{7}$$

Найдем ее общий интеграл методом интегрируемых комбинаций и понижения порядка системы.

Умножая почленно уравнения системы (7) соответственно на x и y и складывая полученные уравнения, получим интегрируемую комбинацию

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0,$$

откуда

$$x^2 + y^2 = C_1^2. \tag{8}$$

Пользуясь найденным первым интегралом (8), понизим порядок данной системы (7). Решаем (8) относительно y (ограничиваемся положительными значениями y):

$$y=\sqrt{C_1^2-x^2}\ .$$

Подставим это значение y в первое из уравнений системы (7). Получим уравнение первого порядка с одной неизвестной функцией x:

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{C_1^2-x^2} \qquad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), находим

$$\arcsin\frac{x}{C_1}=t+C_2.$$

Заменяем C_1 его значением из (8) и переносим t в левую часть

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-t=C_2. \qquad (10)$$

Это есть первый интеграл данной системы. При этом, очевидно, первые интегралы (8) и (10) независимы, так что их совокупность образует общий интеграл системы (7).

3.Найти общий интеграл системы

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}. \qquad (11)$$

Построим две интегрируемые комбинации, пользуясь свойством ряда равных отношений. Складывая в системе (11) числители и знаменатели дробей, можем написать

$$\frac{dx}{z-y}=\frac{dy}{x-z}=\frac{dz}{y-x}=\frac{dx+dy+dz}{0},$$

откуда

$$dx+dy+dz=0 \text{ или } d(x+y+z)=0;$$

следовательно,

$$x+y+z=C_1 \qquad (12)$$

Теперь умнодим в системе (11) числители и знаменатели дробей соответственно на $2x$, $2y$, $2z$ и сложим числители и знаменатели полученных дробей. Тогда

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)}=\frac{2ydy}{2y(x-z)}=\frac{2zdz}{2z(y-x)}=\frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0},$$

откуда

$$x^2+y^2+z^2=C_2^2. \qquad (13)$$

Первые интегралы (12), (13) образуют общий интеграл системы (11).

4.Рассмотрим систему

$$\frac{dy}{dx}=\frac{z}{(z-y)^2},\quad \frac{dz}{dx}=\frac{y}{(z-y)^2} \tag{14}$$

Для нахождения интегрируемых комбинаций целесообразно переписать систему (14) в симметрической форме

$$\frac{dy}{\dfrac{z}{(z-y)^2}}=\frac{dz}{\dfrac{y}{(z-y)^2}}=\frac{dx}{1}.$$

Умножим все знаменатели на $(z-y)^2$:

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y}=\frac{dx}{(z-y)^2}. \tag{15}$$

Одной из интегрируемых комбинаций, очевидно, будет

$$\frac{dy}{z}=\frac{dz}{y},$$

откуда

$$y^2-z^2=C_1^2.$$

Для получения второй интегрируемой комбинации вычтем в системе (15) из числителя и знаменателя первой дроби соответственно числитель и знаменатель второй дроби

$$\frac{d(y-z)}{z-y}=\frac{dx}{(z-y)^2}.$$

Отсюда находим второй первый интеграл

$$2x+(y-z)^2=C_2.$$

Интегрирование системы (14) закончено.

Проинтегрировать следующие системы дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=2xy^2,\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{z-x}{x}\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=e^{-x-y}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{2z}{2x-z^2}\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{1+x^2}y,\\ \dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{x}z=y+x\end{cases}$

4. $\begin{cases}xy'=y+\sqrt{y^2-x^2},\\ z'=\dfrac{y+z}{z^2-x}\end{cases}$

Вопросы

1. Какой общий вид имеет нормальная система дифференциальных уравнений? Что называется ее порядком? Когда эта система называется линейной? Что называется решением (интегральной кривой) нормальной системы n-го порядка?
2. Как ставится задача Коши для нормальной системы? В каком случае она имеет решение? Когда это решение будет заведомо единственным?
3. Что такое общее решение нормальной системы n-го порядка? Как решается задача Коши при помощи формулы общего решения? Что называется общим решением в форме Коши?
4. Какое решение называется частным? Когда решение называется особым? В каком случае нормальная система заведомо не имеет особых решений?
5. Что называется интегралом нормальной системы? Сколько независимых интегралов может иметь нормальная система n-го порядка?
6. Что такое первый интеграл нормальной системы? Какие первые интегралы называются независимыми? Что такое общий интеграл нормальной системы n-го порядка?
7. Что такое система дифференциальных уравнений в симметрической форме? Что называется ее интегралом, первым интегралом, общим интегралом?
8. В чем состоит механическое истолкование нормальной системы и ее решения? В чем состоит механическое истолкование задачи Коши? Что такое точка равновесия? Чем отличается поле скоростей, задаваемое автономной системой, от поля скоростей, задаваемого нормальной системой общего вида? Как найти траектории движений, определяемых автономной системой?
9. Когда нулевое решение называется устойчивым (неустойчивым, асимптотически устойчивым, условно устойчивым) в смысле Ляпунова?
10. Какой вид имеет каноническая система дифференциальных уравнений высших порядков? Как ставится задача Коши для канонической системы? Сколько произвольных постоянных содержит общее решение этой системы?
11. В каком случае систему дифференциальных уравнений можно проинтегрировать путем последовательного интегрирования уравнений, входящих в ее состав? В чем состоит метод исключения? Что такое метод интегрируемых комбинаций? Как привести одно уравнение высшего порядка или каноническую систему дифференциальных уравнений высших порядков к нормальной системе уравнений?

Лекция № 32. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ.

П Л А Н

1.Однородные системы.
2.Неоднородные системы.
3.Особые точки линейной системы.

1.*Однородные системы.* Линейные системы можно интегрировать общими методами. Но для них существует и специальная теория интегрирования, основанная на некоторых замечательных свойствах этих систем и их решений.

Определение. Линейная система имеет вид

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(x)y_1+f_k(x) \qquad (k=1,2,...,n). \qquad (1)$$

Если при всех рассматриваемых значениях x все $f_k(x)$ равны нулю, то эта система называется однородной. В противном случае она называется неоднородной.

Предполагаем, что функции $p_{kl}(x)$ и $f_k(x)$ $(k,l=1,2,...,n)$ определены и непрерывны в интервале (a,b). Тогда система (1) имеет единственное решение $y_1=y_1(x),\ y_2=y_2(x),...,y_n=y_n(x)$, определенное во всем интервале (a,b) и удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_1=y_1^{(0)},\ y_2=y_2^{(0)},...,y_n=y_n^{(0)} \text{ при } x=x_0,$$

причем начальные данные $y_1^{(0)},y_2^{(0)},...,y_n^{(0)}$ можно задавать совершенно произвольно, а x_0 нужно брать из интервала (a,b).

Всякое решение линейной системы является частным решением, так что особых решений она не имеет.

Интегрирование неоднородной линейной системы (1) приводится (2) к интегрированию однородной системы:

$$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(x)y_1 \qquad (k=1,2,...,n) \qquad (2)$$

Однородная линейная система всегда нулевое решение $y_1\equiv 0,\ y_2\equiv 0,....,y_n\equiv 0$. Оно удовлетворяет нулевым начальным условиям:

$$y_1=0, y_2=0,....,y_n=0 \text{ при } x=x_0.$$

Других решений, удовлетворяющих нулевым начальным условиям нет.

Для построения общего решения однородной линейной системы (2) достаточно знать n линейно-независимых в интервале (a,b) (и тем самым ненулевых) частных решений:

$$\left.\begin{array}{l} y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n} \quad (1-e \ решение), \\ y_{21}, y_{22}, \ldots, y_{2n} \quad (2-e \ решение), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{nn} \quad (n-e \ решение), \end{array}\right\} \tag{3}$$

т.е. таких решений, для которых тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n, \quad a < x < b),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – постоянные числа, могут выполняться только при $\alpha_{i1} = 0, \alpha_{2i} = 0, \ldots, \alpha_{in} = 0$. Такая система решений называется фундаментальной. Чтобы система решений была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1n} \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1}, & y_{n2}, & \ldots, & y_{nn} \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала (a,b).

При сделанном предположении относительно непрерывности функций $p_{kl}(x)$ $(k,l = 1,2,\ldots,n)$ существует бесчисленное множество фундаментальных систем. Фундаментальная система (3) называется нормированной в точке $x = x_0$, если решения, составляющие ее, удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$\left.\begin{array}{l} y_{1k} : y_{11} = 1, \ y_{12} = 0, \ldots, y_{1n} = 0, \\ y_{2k} : y_{21} = 0, y_{22} = 1, \ldots, \ y_{2n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_{nk:} \ \ y_{n1} = 0, \ \ y_{n2} = 0, \ \ldots, y_{nn} = 1 \end{array}\right\} \text{при } x = x_0.$$

Если известная фундаментальная система решений (3), то их линейная комбинация

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i y_{ik} \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{4}$$

где C_1 – произвольные постоянные, представляет собой общее решение однородной линейной системы (2) в области

$$a < x < b,\ | y_1 | \le +\infty, | y_2 | \le +\infty, ..., | y_n | \le +\infty \tag{5}$$

Все решения однородной системы (2) содержатся в формуле (4).

2.*Неоднородные системы.* Чтобы найти общее решение неоднородной системы (1), достаточно знать общее решение соответствующей однородной системы

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki}(x) z_i \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{6}$$

и одно частное решение неоднородной системы (1)

$$y_1 = y_1^{(1)},\ y_2 = y_2^{(1)}, ..., y_n = y_n^{(1)}.$$

Сумма этих решений

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{7}$$

дает общее решение системы (1) в области (5).

Все решения неоднородной системы (1) содержатся в формуле (7).

Методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) можно построить общее решение неоднородной системы, исходя только из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы (6). Этот метод состоит в том, что решение (1) ищется в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) z_{ik} \qquad (k = 1,2,...,n) \tag{8}$$

где $C_i(x)$ – некоторые непрерывно дифференцируемые функции от x.

Эти функции определяют из системы

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) z_{ik} = f_k(x) \qquad (k = 1,2,...,n).$$

Решая ее, находят:

$$C_i'(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1,2,...,n),$$

откуда

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)dx + C_i \qquad (i = 1,2,...,n)$$

Подставляя эти значения $C_i(x)$ в формулу (8), получают

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \int \varphi_i(x)dx + \sum_{i=1}^{n} C_i z_{ik} \quad (k = 1,2,...,n).$$

Это есть общее решение системы (1) в области (5).

3.*Особые точки линейной системы.* Если же коэффициенты и правые части системы (1) определены в интервале (a,b), за исключением отдельных точек, в которых они разрывны, то последние называются особыми точками системы (1).

Пусть дана совокупность n линейно-независимых в интервале (a,b) систем функций

$$y_{i1}, y_{i2}, ..., y_{in} \quad (i = 1,2,...,n) \tag{9}$$

Рассмотрим однородную линейную систему:

$$\begin{vmatrix} y_k' & y_{1k}' & y_{2k}' & \cdots & y_{nk}' \\ y_1 & y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{n1} \\ y_2 & y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n & y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (k = 1,2,...,n).$$

Очевидно, что для нее заданная система функций (9) будет фундаментальной системой решений.

Лекция № 33. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

П Л А Н

1.Метод Эйлера.
2.Метод Даламбера.
3.Приведение однородной линейной системы к системе с постоянными коэффициентом при помощи замены независисмой переменной.
4.Примеры.

1.*Метод Эйлера.* Линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l + f_k(x) \qquad (k = 1,2,...,n),$$

у которой все коэффициенты a_{kl} вещественные постоянные, всегда интегрируется в квадратурах, ибо соответствующая однородная линейная система

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l \quad (k = 1,2,...,n) \tag{1}$$

имеет фундаментальную систему решений, состоящую из элементарных функций. Основным методом построения последней является метод Эйлера.

Согласно этому методу, решение системы (1) ищут в следующем виде:

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x},\ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, ..., y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \tag{2}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ и λ суть некоторые постоянные числа, подлежащие определению, причем хоть одно из чисел $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ должно быть отлично от нуля.

Подставляя (2) в (1) и сокращая на $e^{\lambda x}$, получают систему

$$\left.\begin{array}{l}(a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ a_{22}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + ... + a_{22}\gamma_n = 0, \\ ...., \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Чтобы эта однородная линейная система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю, т.е. чтобы λ было корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Уравнение (4) называется характеристическим уравнением, а его корни – характеристическими числами системы (1).

Каждому из корней характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение вида (2). Различают три случая:

I. Все корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ уравнения (4) различны и вещественны. В этом случае, полагая в системе (3) $\lambda = \lambda_i (i = 1,2,..., n)$, получают систему

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_i)\gamma_1 \quad + a_{12}\gamma_2 + ... \quad + a_{1n}\gamma_n = 0, \\ \quad a_{22}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_i)\gamma_2 + ... \quad + a_{22}\gamma_n = 0, \\ \quad ...., \\ \quad a_{n1}\gamma_1 \quad + a_{n2}\gamma_2 + ... + (a_{nn} - \lambda_i)\gamma_n = 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Решая эту систему, найдем ненулевое решение $\gamma_1 = \gamma_{i1}, \gamma_2 = \gamma_{i2}, ..., \gamma_n = \gamma_{in}$. Подстановка этих значений $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ и $\lambda = \lambda_i$ в формулу (2) даст решение однородной системы (1), соответствующее корню λ_i:

$$y_{i1} = \gamma_{i1} e^{\lambda} i^x, y_{i2} = \gamma_{i2} e^{\lambda} i^x, ..., y_{in} = \gamma_{in} e^{\lambda} i^x .$$

Построив решения, соответствующие всем корням $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ получим фундаментальную систему решений

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{11} e^{\lambda_1 x}, \gamma_{12} e^{\lambda_1 x}, ..., \gamma_{1n} e^{\lambda_1 x}, \\ \gamma_{21} e^{\lambda_2 x}, \gamma_{22} e^{\lambda 2x}, ..., \gamma_{2n} e^{\lambda_2 x}, \\ ...., \\ \gamma_{n1} e^{\lambda} n^x, \gamma_{n2} e^{\lambda} n^x, ..., \gamma_{nn} e^{\lambda} n^x. \end{array}\right\}$$

Общим решением системы (10) будет

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} C_i \gamma_{ik} e^{\lambda} i^x \quad (k = 1,2,..., n)$$

II. Корни характеристического уравнения (4) различны, но среди них имеются комплексные. Укажем вид частных решений, соответствующих комплексным корням.

Если $a+ib$ – корень характеристического уравнения (4), то a-ib тоже будет корнем. Построив решение вида (2), соответствующее корню $a+ib$, и отделив в нем вещественные и мнимые части, получим два вещественных линейно-независимых частных решения однородной системы (1). Решения, соответствующие корню a-ib, будут линейно-зависимы с решениями, соответствующими корнь $a+ib$.

Построив частные решения, соответствующие всем парам комплексных сопряженных корней и всем вещественным корням (если они имеются), и взяв линейную комбинацию всех построенных линейно-независимых частных решений с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение однородной системы (1).

III. Срели корней характеристического уравнения имеются кратные. Корню λ_1 кратности *k* соответствует решение вида

$$y_1 = P_1(x)e^{\lambda_1 x}, y_2 = P_2(x)e^{\lambda_1 x}, ..., y_n = P_n(x)e^{\lambda_1 x}, \qquad (6)$$

где $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ - полиномы от *x* степени не выше $k - 1$ (они могут выраждаться и в постоянные числа), причем среди коэффициентов всех этих полиномов *k* коэффициентов являются произвольными, а остальные выражаются через них.

Полагая поочередно один из произвольных коэффициентов равным единице, а остальные равными нулю, построим *k* линейно-зависимых частных решений. Если λ_1 вещественно, то эти частные решения тоже вещественны.

Если λ_1 – комплексный корень, $\lambda_1 = a + ib$ и $a - ib$ тоже будет корнем характеристического уравнения и притом той же кратности *k*. Найдя указанным выше методом *k* линейно-независимых комплексных частных решений, соответствующих корню $a+ib$, и отделив в них вещественные и мнимые части, получим *2k* линейно-независимых вещественных частных решений. Решения, соответствующие корню a-ib, будут линейно-независимыми с решениями, соответствующими корню $a+ib$.

Если наряду с кратным корнем λ_1 имеются другие (кратные или просты) корни, то, построив *n* линейно-независимых вещественных частных решений, соответствующих всем корням, и взяв их линейную комбинацию с произвольными постоянными коэффициентами, получим общее решение однородной системы (1).

Из вида фундаментальной системы решений легко усмотреть следующее достаточные признаки устойчивости и неустойчивости нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами.

а) если все характеристические числа системы

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} x_l \qquad (k = 1, 2, ..., n) \qquad (7)$$

отрицательным или имеют отрицательную вещественную часть, то нулевое решение

$$x_1 \equiv 0,\ x_2 \equiv 0, ..., x_n \equiv 0$$

этой системы асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при $t \to +\infty$;

б) если хоть одно их характеристических чисел системы (7) положительно или имеет положительную вещественную часть, то нулевое решение этой системы неустойчиво в смысле Ляпунова при $t \to +\infty$;

в) если система двух уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cx + dy, \\ \frac{dy}{dt} &= ax + by \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

имеет чисто мнимые характеристические числа, то нулевое решение *x≡0, y≡0*, определяемое ею, устойчиво, но не асимптотически;

г) если одно их характеристических чисел системы (8) равно нулю, а другое отрицательно, то нулевое решение *x≡0, y≡0* устойчиво, но не асимптотически;

д) *если система (8) имеет двукратное нулевое характиристическое число, то решение вопроса об устойчивости нулевого решения x≡0, y≡0 зависит от аналитической структуры семейства решении, соответствующих нулевовому характеристическому числу.*

Это семейство имеет, согласно (6), вид

$$x = P_1(t), \quad y = P_2(t),$$

где $P_1(t)$ и $P_2(t)$ либо постоянные, либо линейные функции от t. В первом случае решение x≡0, y≡0 будет устойчивым, но не асимптомическим. Во втором случае оно будет неустойчивым, причем имеет место условная устойчивость.

2. *Метод Даламбера.* Линейные системы (как уже сказано в начале этого параграфа) можно интегрировать и общими методами, в том числе методом интегрируемых комбинаций. При этом для построения интегрируемых комбинаций в случае системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами существует общий метод, предложенный Даламбером.

Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= a_{11}y + a_{12}z + f_1(x), \\ \frac{dz}{dx} &= a_{21}y + a_{22}z + f_2(x). \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Умножим второе уравнение на некоторое число *k* и сложим почленно с первым уравнением. Получим

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21})y + (a_{12} + ka_{22})z + f_1(x) + kf_2(x). \qquad (10)$$

Преобразуем правую часть и выберем число *k* так, чтобы она стала линейной функцией от *y*+*kz*. С этой целью перепишем уравнение (10) в виде

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21})\left(y + \frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}}z\right) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Положив

$$\frac{a_{12} + ka_{22}}{a_{11} + ka_{21}} = k, \qquad (11)$$

получим

$$\frac{d(y+kz)}{dx} = (a_{11} + ka_{21})(y+kz) + f_1(x) + kf_2(x).$$

Интегрируя это линейное (относительно $y+kz$) уравнение, получим

$$y + kz = e^{(a_{11}+ka_{21})x}\left[C + \int [f_1(x) + kf_2(x)]e^{-(a_{11}+a_{21}a)x}dx\right]. \qquad (12)$$

Если уравнение (11) имеет различные вещественные корни k_1 и k_2 , то из (12) получим два первых интеграла системы (9) и интегрирование этой системы будет окончательно.

Метод Даламбера распространяеться и на линейнве системы с постоянными коэффициентами, содержащие производные выше первого порядка.

3. *Если коэффициенты системы (2) таковы, что*

$$p_{kl}(x) = a_{kl}\varphi(x) \quad (k,\ l = 1,\ 2,\ ...,\ n),$$

то подстановка

$$t = \int \varphi(x)dx$$

Приводит ее к системе с постоянными коэффициентами.

Однородные линейные системы, правые части которых удовлетворяют условию Коши – Римана. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(t)x - q(t)y \equiv u(t,x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= q(t)x + p(t)y \equiv v(t,x,y), \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

правые части которой, рассматриваемые как функции от x и y, удовлетворяют условиям Коши – Римана;

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\upsilon}{dy}, \quad \frac{du}{dy} = -\frac{d\upsilon}{dx}.$$

Общее решение системы (13) можно найти, следуя методу, выше указонному. При этом система (13) приведется к одному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t)z \quad (\lambda(t) = p(t) + iq(t)). \qquad (14)$$

Интегрируя его, получим

$$z = Ce^{\int \lambda(t)dy} \quad (C = C_1 + iC_2).$$

Отделяя вещественные и мнимые части, найдем общее решение системы (13).

Для построения фундаментальной системы решений системы (13), нормированной в точке $t=t_0$, достачно найти решения $z_1=z_1(t)$ и $z_2=z_2(t)$ уравнения (14), удовлетворяющие соотвественно начальным условиям

$z_1=1$ при $t=t_0$ и $z_2=i$ при $t=t_0$

и отделить в них вещественные и мнимые части.

Изложенный метод распространяется на систему вида

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^n x}{dt^n} &= p(t)x - q(t)y,\\ \frac{d^n y}{dt^n} &= q(t)x + p(t)y.\end{aligned}\right\}$$

4. Примеры.

1. Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -y - 2z,\\ \frac{dz}{dx} &= 3y + 4z.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Найдем общее решение ее по методу Эйлера.

Ищем частное решение системы (15) в виде

$$y = \gamma_1 e^{\lambda x},\ \ z = \gamma_2 e^{\lambda x}. \tag{16}$$

Состовляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,\quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

Оно имеет корни: λ_1=1, λ_2=2. Построим частное решение вида (16), соответсвующее корню λ_1=1. Согласно формуле (5), числа γ_1 и γ_2 нужно искать из системы

$$\left.\begin{aligned}-2\gamma_1 - 2\gamma_2 &= 0\\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 &= 0,\end{aligned}\right\}$$

котороя сводится к одному уравнению

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 0,$$

так что одно из чисел γ_1, γ_2 можно выбирать произвольно. Положив γ_1=1, получим γ_2=-1. Поэтому характиристическому числу λ_1=1соответствует частное решение

$$y_1 = e^x,\quad z_1 = -e^x.$$

Аналогично находим частное решение, соответствующее характеристическому числу λ_2=2:

$$y_2 = 2e^{2x},\ \ z_2 = -3e^{2x}.$$

Общим решением системы (15) будет

$$\left.\begin{aligned}y &= C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}\\ z &= -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным уловиям

$$y = -1,\ z = 2\ \ при\ \ x = 0. \tag{18}$$

Полагая в (17) $x=0$, $y=-1$, $z=2$, имеем: $-1=C_1+2C_2$, $2=-C_1-3C_2$, откуда $C_1=1$, $C_2=-1$. Поэтому искомым решением будет

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{x} - 2e^{2x} \\ z &= -e^{x} + 3e^{2x}. \end{aligned}\right\}$$

Других решений, удовлетворяющих начальным условиям (18), нет.

2. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2y - z, \\ \frac{dz}{dx} &= y + 2z. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Найдем ее общее решение.

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \, или \; \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

имеет корни: $\lambda_1=2+I$, $\lambda_2=2-i$. Построим комплексное решение вида

$$y = \gamma_1 e^{(2+i)x}, \; z = \gamma_2 e^{(2+i)x},$$

соответствующее характеристическому числу $\lambda_1=2+i$. Число γ_1 и γ_2 определяем из уравнения

$$-i\gamma_1 - \gamma_2 = 0.$$

Полагая $\gamma_1=1$, находим $\gamma_2=-i$, так что

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x), \\ z &= -ie^{(2+i)x} = e^{2x}(\sin x - i \cos x). \end{aligned}\right\}$$

Отсюда (отделяя вещественное и мнимое части) получаем два вещественных линейно – независисмых частных решения:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= e^{2x} \cos x, \; z_1 = e^{2x} \sin x, \\ y_2 &= e^{2x} \sin x, \; z_2 = -e^{2x} \cos x. \end{aligned}\right\}$$

Общим решением системы (19) будет

$$\left.\begin{aligned} y &= e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z &= e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x). \end{aligned}\right\}$$

3. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + 2y + 5z, \\ \frac{dy}{dt} &= 6x - y - 6z, \\ \frac{dz}{dt} &= -8x + 3y + 9z. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 & 5 \\ 6 & -1-\lambda-6 & \\ -8 & 3 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \, или \; \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0,$$

имеет корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

Найдем сначала частное решение вида

$$x = \gamma_1 e^{2t}, \; y = \gamma_2 e^{2t}, \; z = \gamma_3 e^{2t},$$

соответствующее простому характиристическому числу $\lambda_1=2$. Числа γ_1, γ_2, γ_3 можно найти из системы

$$\left.\begin{aligned} -6\gamma_1 + 2\gamma_2 + 5\gamma_3 = 0, \\ 6\gamma_1 - 3\gamma_2 - 6\gamma_3 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Но проще взять в качестве их алгебраические дополнения элементов первой строки определителя

$$\begin{vmatrix} -6 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & -6 \\ -8 & 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Получим $\gamma_1=-3$, $\gamma_2=6$, $\gamma_3=-6$ или (сократив на -3) $\gamma_1=1$, $\gamma_2=-2$, $\gamma_3=2$, так что искомым решением будет

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = -2e^{2t}, \quad z_1 = 2e^{2t}.$$

Теперь построим два линейно – независимых частных решения, соответствующих краткому характеристическому числу $\lambda_2=\lambda_3=1$. Согласно формуле (6), ему отвечает решение вида

$$x = (A_1 t + A_2) e^t, \; y = (B_1 t + B_2) e^t, \quad z = (C_1 t + C_2) e^t. \qquad (21)$$

Коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, C_2$ определяются подстановкой (21) в систему (20). Выполняя эту подстановку и сокращая на e^t, имеем

$$\left.\begin{aligned} A_1 t + A_1 + A_2 &= (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2, \\ B_1 t + B_1 + B_2 &= (6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2, \\ C_1 t + C_1 + C_2 &= (-8A_1 + 3B_1 = 9C_1)t - 8A_2 + 3B_2 + 9C_2. \end{aligned}\right\}$$

Приравнивая коэффициенты при t и свободные члены, получим систему

$$\left.\begin{aligned} -5A_1 + 2B_1 + 5C_1 &= 0, \\ 6A_1 - 2B_1 - 6C_1 &= 0, \\ -8A_1 + 3B_1 + 8C_1 &= 0, \\ -5A_2 + 2B_2 + 5C_2 &= A_1, \\ 6A_2 - 2B_2 - 6C_2 &= B_1, \\ -8A_2 + 3B_2 + 8C_2 &= C_1, \end{aligned}\right\}$$

откуда $A_1=C_1$, $B_1=0$, $A_2=C_1+C_2$, $B_2=3C_1$, причем C_1 и C_2 произвольны. Решение (21) принимает вид.

$$x=(C_1t+C_1+C_2)e^t,\; y=3C_1e^t,\; z=(C_1t+C_2)e^t.$$

В качестве линейно – независимых частных решений, соответствующих характеристическому числу $\lambda_2=\lambda_3=1$, можно взять

$$\left.\begin{aligned} &x_2=(t+1)e^t,\; y_2=3e^t,\; z_2=te^t,\\ &x_3=e^t, \qquad\quad y_3=0, \quad z_3=e^t. \end{aligned}\right\}$$

Общим решением системы (20) будет

$$\left.\begin{aligned} &x=C_1e^{2t}+(C_2t+C_2+C_3)e^t,\\ &y=-2C_1e^{2t}+3C_2e^t,\\ &z=2C_1e^{2t}+(C_2t+C_3)e^t. \end{aligned}\right\}$$

4. Найти общее решение системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=y-2z+3,\\ &\frac{dz}{dx}=y-z+1. \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Эта система неоднородная. Проинтегрируем сначала соответсвующую однородную систему

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx}=y-2z,\\ &\frac{dz}{dx}=y-z. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Характеристичекое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\textit{или}\quad \lambda^2+1=0$$

имеет чисто мнимые корни: $\lambda_1=i$, $\lambda_2=-i$. Корню $\lambda_1=I$ соответствует комплексное решение

$$y=2e^{ix},\; z=(1-i)e^{ix},$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned} &y_1=2\cos x,\; z_1=\cos x+\sin x,\\ &y_2=2\sin x,\; z_2=\sin x-\cos x, \end{aligned}\right\}$$

так что общим решением однородной системы (23) будет

$$\left.\begin{aligned} &y=2C_1\cos x+2C_2\sin x,\\ &z=(C_1-C_2)\cos x+(C_1+C_2)\sin x. \end{aligned}\right\}$$

Переходя к нахождению общего решения данной неоднородной системы (22) заметим, что в нашем примере нет необходимости пользоваться методом Лагранжа, ибо можно легко построить частное решение этой системы. Разыскивая последнее в виде *y=b, z=c, y=, z=2* является искомым частным решенеием. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 + 2C_1\cos x + 2C_2\sin x, \\ z &= 2 + (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x \end{aligned}\right\}$$

будет общим решением системы (22).

Проинтегрировать следующие системы последовательным интегрированием или методом исключения:

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -2y, \\ \dfrac{dz}{dx} = z. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = -y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}y \\ \dfrac{dz}{dx} = y + z. \end{cases}$

Найти общее решение методом Эйлера и, где указано, выделить решение, удовлетворяющее постоянным начальным условиям:

1. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + 4z. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} y' = 2y + z, \\ z' = -6y - 3z. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} y' = y - 2z, \\ z' = 6y - 5z. \end{cases}$

Проинтегрировать методом Даламбера:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - 9y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 8y. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 5y + 4z + e^x, \\ \dfrac{dz}{dx} = 4y + 5z + 1. \end{cases}$

Вопросы

1. Какой общий вид имеет линейная система? Когда она называется однородной? неоднородной?
2. При каком условии задача Коши для линейной системы имеет единственное решение? Какова при этом условии степень произвола выбора начальных данных решений линейной системы? В каком интервале существуют решения? Почему линейная система не имеет особых решений?
3. Какие решенияоднородной линейной системы называется линейно независимыми? Что такое фундаментальная система решений? Может ли нулевое решение входить в состав фундаментальной системы решений? Какое условие являеться необходимым и достаточным для того, чтобы данная система решений была фундаментальной? Сколько фундаментальных систем решений имеет заданная однородная линейная система? Какая фундаментальная система называется нормированной в заданной точке $x=x_0$?
4. Как построить общее решение однородной линейной системы, если известна фундаментальная система решений? В какой области определено общее решение? Как решить задачу Коши при помощи формулы общего решения?
5. Как найти общее решение неоднородной линейной системы, если известно одно частное решение ее и общее решение соответствующей однородной системы?
6. В чем состоит метод Лагранжа нахождения общего решения неоднородной линейной системы?
7. Как построить однородную линейную систему, имеющую заданную фундаментальную систему решений?
8. В чем состоит метод Эйлера интегрирования однородных линейных систем с постоянным коэффициентом? Как зависит структура фундаментальной системы решений от вида корней характеристического уравнения? Как влияют на структуру фундаентальной системы решений элементарных делители матрицы коэффициентов системы?
9. Как судить об устойчивости (неустойчивости) нулевого решения однородной линейной системы с постоянными коэффициентами по характеристическим числам этой системы?
10. В чем состоит метод Даламбера интегрирования линейных систем с постоянными коэффициентами?

Лекция № 34. УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА.

П Л А Н

1.Понятие об уравнении с частными производными и его решении.
2.Понятие о линейном уравнении с частными производными первого порядка.
3.Задача Коши.

1.Определение 1. Равенство, содержащее неизвестную функцию от нескольких независимых переменных, независимые переменные и частные производные неизвестной функциеи по независимым переменным, называется *уравнением с частными производными.* Порядок старшей частной произвоной, входящей в состав уравнения, называется *порядок* уравнения. Уравнение с частными производными, так же как и обыкновенное уравнеие, может быть неполным, но оно обязательно должно содержать хотя бы одну из частных производных неизвествной функции.

Приведем несколько примеров уравнений с частными производными:

1. $\frac{dz}{dx} = f(x, y, z).$ 2. $x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dx} = 0.$

3. $x\frac{dz}{dx} - z\frac{dz}{dx} = 0.$ 4. $x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dx} = 2z.$

5. $x_1\frac{du}{dx_1} + x_2\frac{du}{dx_2} + ... + x_n\frac{du}{dx_n} = mu.$

6. $\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}.$ 7. $\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}.$ 8. $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$

Первые пять уравнений являются уравнениями с частными производными первого порядка. Последние три уравнения суть уравнения с частными производными второго порядка.

Функция, имеющая соответствующие частные производные (которые мы будем предпологать непрерывными) и обращающая уравнение с частными производными в тождество, называется *решением* этого уравнения. Процесс нахождения решений называется *интегрированием.* Обычно, интегрируя уравнения с частными производными, находят семейство решений, зависящее от произвольных функций, а не только от произвольных постоянных, как это имеет место в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если уравнение содержит неизвестную функцию z, зависящую только от двух независимых переменных x и y, то его решению $z=z(x, y)$

соответствует некоторая поверхность в пространстве (x,y,z). Эта поверхность называется интегральной поверхностью данного уравнения.

Например, для уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (1)$$

функция

$$z = x^2 + y^2$$

будет решением, заданным при всех значениях x и y. Геометрически этому решению соответствует параболоид вращения с осью вращения Oz. Решением уравнения (1) будет так же

$$z = F(x^2 + y^2) \qquad (2)$$

где F – любая непрерывно дифференцируемая функция, так что уравнение (1) имеет семейство решений, зависящее от произвольной функции. Геометрически семейству решений (2) соответствует семейство поверхностей вращения с осью вращения Oz.

2.Определение 2. Линейное уравнение с частными производными первого порядка имеет следующий общий вид:

$$X_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + X_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$
$$+ X_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P(x_1, x_2, ..., x_n, u), \qquad (3)$$

где u – неизвестная функция от независимых переменных $x_1, x_2, ..., x$, а $X_1, X_2, ..., X_n$ и R – заданные функции своих аргументов.

Если искомая функция u не входит ни в один из коэффициентов $X_1, X_2, ..., X_n$ уравнения (3), а его правая часть тождественно равна нулю, то уравнение (3) называется однородным. В противном случае оно называется неоднородным.

3.Задача Коши. Одной из важнейших задач, которые ставились в предыдущих разделах для обыкновенных дифференциальных уравнений, была задача Коши – задача нахождения решения, удовлетворяющего заданным начальным условиям. Эта задача ставится и для уравнений с частными производными.

Для уравнения (3) задача Коши ставится так. Среди всех решений этого уравнения найти такое решение

$$u = f(x_1, x_2, ..., x_n),$$

которое удовлетворяет начальному условию

$$u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \text{ при } x_n = x_n^{(0)},$$

где $\varphi(x_1, x_2, ..., x_{n=1})$ - заданная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов.

В случае уравнения

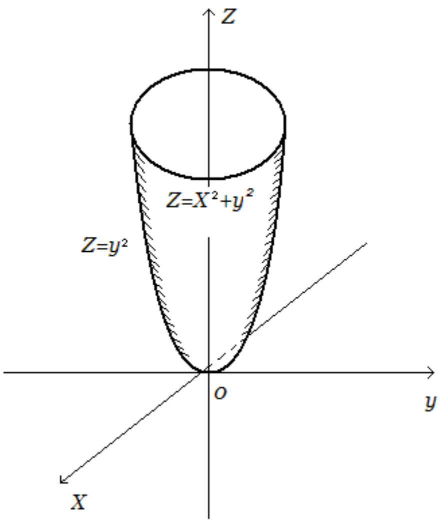
$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z)$$

задача Коши состоит в нахождении решения

$$z = f(x, y), \tag{4}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$z = \varphi(y) \text{ при } x = x_0.$$



Геометрически здесь речь идет о нахождении интегральной поверхности (4), проходящей через заданную кривую $z = \varphi(y), x = x_0$ лежащую в плоскости $x = x_0$.

Например, для уравнения (1) решением, удовлетворяющим начальному условию $z = y^2$ при $x=0$, будет функция $z = x^2 + y^2$. Геометрически этому решению соответствует параболоид вращения, проходящий через параболу $z = y^2$, лежащую в плоскости (y,z) .

Лекция № 35. ОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

П Л А Н

1.Построение общего решения.
2.Решение задачи Коши.
3.Примеры.

1._Построение общего решения._ Рассмотрим однородное линейное уравнение

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+$$

$$+X_n(x_1,x_2,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0. \qquad (1)$$

Предполагаем, что его коэффициенты $X_1,X_2,...,X_n$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ и, кроме того, не обращаются в этой точке одновременно в нуль. Будем считать, что

$$X_n(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})\neq 0.$$

Заметим, что однородное уравнение (1) всегда имеет решение $u=c$, где c – любое постоянное число. Такие решения назовем очевидными.

При сделанных предположениях однородное уравнение (1) имеет семейство решений, содержащее произвольную функцию. Это семейство решений может быть найдено следующим образом.

Определение. Построим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,x_2,...,x_n)}=\frac{dx_2}{X_2(x_1,x_2,...,x_n)}=...=$$

$$\frac{dx_n}{X_n(x_1,x_2,...,x_n)} \qquad (2)$$

Она называется системой обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме, соответствующей однородному линейному уравнению с частными производными (1).

Система (2) имеет n-1 независимых интегралов:

$$\psi_1(x_1,x_2,...,x_n),\psi_2(x_1,x_2,...,x_n),....,$$

$$\psi_{n-1}(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (3)$$

определенных в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$. Каждый из них является решением уравнения (1). Любая непрерывно дифференцируемая функция от них

$$\psi = F(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n-1})$$

будет интегралом системы (2) и, следовательно, решением уравнения (1).

Таким образом, уравнение (1) имеет семейство решений

$$u = F(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_{n=1}).$$

Это семейство решений, зависящее от произвольной функции *F*, называется общим решением уравнения (1).

В случае уравнения с двумя независимыми переменными

$$P(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (4)$$

система (2) вырождается в одно уравнение

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}.$$

Если

$$\psi(x, y)$$

есть интеграл этого уравнения, то общим решением уравнения (4) будет

$$z = F[\psi(x, y)],$$

где F – произвольная непрерывно дифференциаруемая функция.

2. *Решение задачи Коши.* Пусть требуется найти решение

$$u = f(x_1, x_2, .., x_n),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \text{ при } x_0 = x_n^{(0)}.$$

Положим в интегралах (3) системы (2) $x_0 = x_n^{(0)}$ и обозначим полученные функции через $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} \psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),\ x_1^{(0)} = \overline{\psi}_1, \\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),\ x_1^{(0)} = \overline{\psi}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}),\ x_1^{(0)} = \overline{\psi}_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Разрешим систему (5) относительно $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \ \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}), \\ x_2 = \ \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_{n-1}). \end{array}\right\}$$

Подставим в правую часть равенства $u=\varphi(x_1, x_2,..., x_{n-1})$ вместо $x_1, x_2,..., x_{n-1}$ функции $\omega_1, \omega_2,..., \omega_{n-1}$ заменив в них $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2,..., \overline{\psi}_{n-1}$ на $\psi_1, \psi_2,..., \psi_{n-1}$. Получим функцию

$$u=\varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2,..., \psi_{n-1}),\ \omega_2(\psi_1, \psi_2,..., \psi_{n=1}),...,$$
$$\omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2,..., \psi_{n-1})]. \qquad (6)$$

Эта функция и дает искомое решение.

В случае уравнения (4) с двумя независимыми переменными задача Коши состоит в нахождении решения

$$z = f(x, y),$$

удовлетворяющего начальному условию

$$z=\varphi(t) \text{ при } x=x_0.$$

Система (5) сводится к одному уравнению

$$\psi(x_0, y)=\overline{\psi},$$

откуда находим

$$y=\omega(\overline{\psi}).$$

Искомым решением будет

$$z=\varphi\{\omega[\psi(x, y)]\}.$$

3.Примеры.

1. Найти общее решение уравнения

$$x=\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{2}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=0 \qquad (7)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$$u=y+z^2 \text{ при } x=1. \qquad (8)$$

Составляем систему

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{\frac{z}{2}} \qquad (9)$$

Интегрируя ее, находим

$$\frac{y}{x}=C_1, \quad \frac{z^2}{x}=C_2,$$

так что система (9) имеет независимые интегралы:

$$\psi_1=\frac{y}{x},\quad \psi_2=\frac{z^2}{x}. \tag{10}$$

Следовательно, общим решением уравнения (7) будет

$$u=F\left(\frac{y}{x},\ \frac{z^2}{x}\right). \tag{11}$$

Найдем решение, удовлетворяющее поставленному начальному условию (8). Полагая в интегралах (10) $x=1$, имеем

$$y=\overline{\psi}_1,\quad z^2=\overline{\psi}_2,$$

откуда

$$y=\overline{\psi}_1,\ \ z=\pm\sqrt{\overline{\psi}_2}\ .$$

Следовательно, искомым решением, согласно формуле (6), будет

$$u=\psi_1+\psi_2$$

или

$$u=\frac{y+z^2}{x}.$$

Это решение содержится в общем решении (11) при $F(\psi_1,\psi_2)\equiv\psi_1+\psi_2$.

2.Найти общее решение уравнения

$$y=\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0\quad (y>0) \tag{12}$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$z=2y$ при $x=0$

Интегрируя уравнение

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x},$$

находим

$$x^2-y^2=C,\quad \varphi=x^2-y^2.$$

Поэтому общим решением уравнения (12) будет

$$z=F(x^2-y^2).$$

Решаем предложенную задачу Коши

$$-y^2=\overline{\psi},\quad y=\sqrt{-\overline{\psi}}\ .$$

Искомым решением будет

$$z=2\sqrt{-\psi}\ \text{ или }\ z=2\sqrt{y^2-x^2}\ .$$

Проинтегрировать следующие уравнения и, где указано, найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

1. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+yz\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\quad u=x^y$ при $z=1$

2. $\dfrac{\partial u}{\partial x}-(y+2z)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(3y+4z)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

3. $(z-y)^2\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial y}+y\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\quad u=2y(y-z)$ при *x=0*

4. $(mz-ny)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(nx-lz)\dfrac{\partial u}{\partial y}+(ly-mx)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

5. $(1+x^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\quad z=y^2$ при *x=0*

6. $y\dfrac{\partial u}{\partial x}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0;\quad u=\ln z-\dfrac{1}{y}$ при *x=1*

7. $(x^3+3xy^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}+2y^3\dfrac{\partial u}{\partial y}+2y^2z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

8. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+\left(z-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$

9. $x(y^2-z^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}-y(x^2+z^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}+z(x^2+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

Лекция № 36. НЕОДНОРОДНОЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ

П Л А Н

1.Построение общего решения.
2.Решение задачи Коши.
3.Примеры.

1.*Построение общего решения.* Интегрирование неоднородного линейного уравнения

$$X_1(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+$$

$$+X_n(x_1,x_2,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,...,x_n,u) \qquad (1)$$

где $X_1,X_2,...,X_n$ и R непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки $\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)}\right)$, причем

$$X_n\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)},u^{(0)}\right)\neq 0$$

Приводится к интегрированию следующей соответствующей ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2},...,\frac{dx_n}{X_n}=\frac{du}{R}.$$

Если

$$\psi_1(x_1,x_2,...,x_n,u),...,\psi_2(x_1,x_2,...,x_n,u) \qquad (2)$$

суть независимые интегралы этой системы, то равенство

$$\Phi(\psi_1,\psi_2,...,\psi_n)=0,$$

где Φ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция, называется общим решением уравнения (1) в неявной форме. Разрешив его относительно u, получим общее решение в явной форме.

2.*Решение задачи Коши.* Пусть требуется найти решение

$$u=f(x_1,x_2,...,x_n),$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u=\varphi(x_1,x_2,...,x_{n-1}) \text{ при } x_n=x_n^{(0)}.$$

Положим в интегралах (2) $x_n=x_n^{(0)}$ и обозначим полученные функции через $\overline{\psi}_1,\overline{\psi}_2,...,\overline{\psi}_n$:

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) = \overline{\psi}_1,\\ \psi_2(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_1^{(0)}, u) = \overline{\psi}_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \psi_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_1^{(0)}, u) = \overline{\psi}_{n.}\end{array}\right\} \qquad (3)$$

Разрешим систему (3) относительно $x_1, x_2, ..., x_{n-1}, u$:

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n),\\ x_2 = \omega_2(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n),\\ u = \omega(\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n)\end{array}\right\}$$

Подставим в равенство $u = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ вместо *u*, и $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ функции $\omega, \omega_1, \omega_2, ..., \omega_{n-1}$, заменив в них $\overline{\psi}_1, \overline{\psi}_2, ..., \overline{\psi}_n$ на $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n$. Получим

$$\omega(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n) = \varphi[\omega_1(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n),$$
$$\omega_2(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n), ..., \omega_{n-1}(\psi_1, \psi_2, .., \psi_n)].$$

Эта формула дает искомое решение задачи Коши в неявной форме.

3.Примеры.

1. Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + (y + x^2) = z \qquad (4)$$

и выделить решение, удовлетворяющее начальному условию

$$z = y - 4 \text{ при } x=2. \qquad (5)$$

Составляем соответствующую уравнению (4) систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y + x^2} = \frac{dz}{z}.$$

Ищем ее независимые интегралы. Интегрируя уравнение

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y+x^2},$$

получаем

$$y=x(C_1+x),\ \ \frac{y-x^2}{x}=C_1,\quad \psi_1=\frac{y-x^2}{x}.$$

Уравнение: $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z}$. Дает $\frac{z}{x}=C_2,\quad \psi_2=\frac{z}{x}$.

Общим решением уравнения (4) будет

$$\Phi\left(\frac{y-x^2}{x},\quad \frac{z}{x}\right)=0$$

или (разрешая относительно z)

$$z=xf\left(\frac{y-x^2}{x}\right). \tag{6}$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию (5). Полагая в интегралах ψ_1 и ψ_2 $x=2$, имеем

$$\frac{y-4}{2}=\overline{\psi}_1,\quad \frac{z}{2}=\overline{\psi}_2,$$

откуда

$$y=2\overline{\psi}_1+4,\quad z=2\psi_2.$$

Подставляем эти значения y и z в формулу $z=y-4$, заменяя $\overline{\psi}_1$ и $\overline{\psi}_2$ на ψ_1 и ψ_2:

$$2\psi_2=2\psi_1+4-4,\ \psi_2=\psi_1,\quad \frac{z}{x}=\frac{y-x^2}{x},$$

так что искомым решением будет

$$z=y-x^2.$$

Это решение содержится в общем решении (6) при $f(t)\equiv t$.

2.Найти общее решение уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-z\frac{\partial z}{\partial y}=0\quad (x>0). \tag{7}$$

Это уравнение является неоднородным, ибо, хотя правая часть тождественно равна нулю, искомая функция z входит в один из коэффициентов уравнения.

Следуя общему правилу, составляем систему

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-z}=\frac{dz}{0}.$$

Интегрируем ее:

$$dz=0,\ \ z=C_1;\ \ \frac{dx}{x}=\frac{dy}{-C_1},\quad \ln x=-\frac{y}{C_1}+C_2,\quad \ln x+\frac{y}{z}=C_2,$$

так что $\psi_1=z,\quad \psi_2=\ln x+\dfrac{y}{z}.$

Поэтому общим решением уравнения (7) будет

$$\Phi\left(z,\ \ln x+\frac{y}{z}\right)=0.$$

Проинтегрировать следующие уравнения и, где указано, найти решение, удовлетворяющее поставленным начальным условиям:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+(2y-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}=y+2z$

2. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\quad z=x^2\ \ при\ \ y=1$

3. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}=z,\ \ z=z(x,y);\ \ z=y\ \ при\ \ x=1.$

4. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}=z.$

5. $\sqrt{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{2}$

6. $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}+z\dfrac{\partial u}{\partial z}=u;\quad u=\dfrac{1}{2}(y+z)\ при\ \ x=2$

7. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\quad z=-y\quad при\ \ x=1$

8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z;\quad z=y\quad при\ \ x=1$

9. $(z-y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x-y-0.$

Лекция № 37. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

П Л А Н

1.Система двух нелинейных уравнений первого порядка.
2.Уравнения Пфаффа.
3.Метод Лагранжа – Шарпи.
4.Примеры.

1.Определение 1. *Система двух нелинейных уравнений первого порядка имеет вид:*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=A(x,y,z),\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=B(x,y,z),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

правые части которой непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки (x_0,y_0,z_0). Эта система называется *совместной,* если существует функция $z=z(x,y)$, обращающая оба уравнения системы (1) в тождества в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0).

Для того, чтобы система (1) имела семейство решений, зависящее хотя бы от одной произвольной постоянной, необходимо и достаточно, чтобы условие

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial z}A \qquad (2)$$

выполнялось тождественно относительно *x,y,z* в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0). Условие (2) называется условием полной интегрируемости системы (1).

Если условие (2) выполнено, то решение системы (1) ищется по следующей схеме.

Фиксируя в первом из уравнений (1) переменную *y* и интегрируя полученное уравнение, найдем

$$z=\varphi[x,C(y)], \qquad (3)$$

где *C(y)* – произвольная непрерывно дифференцируемая функция от *y*. Выбираем *C(y)* так, чтобы функция (3) удовлетворяла и второму из уравнений (1). Выполнение условия полной интегрируемости системы (1) гарантирует возможность такого выбора *C(y)*. В результате получим

$$z=z(x,y,C), \qquad (4)$$

где *C* – произвольная постоянная.

2.Определение 2. *Уравнения Пфаффа имеет вид:*

$$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0 \qquad (5)$$

Предположим, что функции P,Q,R непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности заданной точки (x_0,y_0,z_0) и хоть одна из них отлична от нуля в этой точке. Пусть

$$R(x_0,y_0,z_0)\neq 0.$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} dz&=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy,\\ dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy,\end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-\frac{P}{R}dx-\frac{Q}{R}dy$$

и так как dx и dy независимы, то искомая функция z должна удовлетворить системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{P}{R},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{Q}{R}.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Записывая для системы (6) условие полной интегрируемости (2), придем к уравнению, которое можно преобразовать к виду

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0 \qquad (7)$$

или

$$\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0.$$

Если условие (7) выполняется тождественно в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то оно называется условием полной интегрируемости уравнения Пфаффа (5). При выполнении этого условия интегрирование уравнения Пфаффа (5) приводится к интегрированию системы (6), в результате чего получается семейство решений вида (4), содержащее одну произвольную постоянную.

3. *Метод Лагранжа – Шарпи.* Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{8}$$

где $z = z(x, y)$ - искомая функция, $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, а F – заданная функция от своих аргументов.

Семейство решений уравнения (8), заданное в виде

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \text{ или } z = \varphi(x, y, z, a, b),$$

где a и b – произвольные постоянные, называется полным интегралом уравнения (8). Исключая, a и b из системы

$$\left.\begin{aligned} &V(x, y, z, a, b) = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} p = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} q = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} &z = \varphi(x, y, z, a, b),\\ &p = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\\ &q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned}\right\}$$

получим уравнение, эквивалентное уравнению (8).

Полный интеграл уравнения (8) может быть найден следующим методом Лагранжа-Шарпи.

Составляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{Pp+Qq}-\frac{dp}{=(X+Zp)}=\frac{dq}{-(Y+Zq)},$$

где

$$P=F'_p,\ Q=F'_q,\quad X=F'_x,\ Y=F'_y, Z=F'_z.$$

Ищем ее первый интеграл

$$\Phi(x,y,z,p,q)=a.$$

Составляем систему

$$\left.\begin{aligned}F(x,y,z,p,q)=0,\\ \Phi(x,y,z,p,q)=0\end{aligned}\right\}$$

и, разрешая ее относительно p и q переходим к системе

$$\left.\begin{aligned}p=A(x,y,z,a),\\ q=B(x,y,z,a).\end{aligned}\right\}$$

интегрируя, которую и получим полный интеграл уравнения (8).

4.Примеры.

1. Пусть дана система

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{x}{x^2+y^2}+y\right)z,\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)z.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Проверяем условие (2):

$$\frac{\partial A}{\partial y}+\frac{\partial A}{\partial z}B=\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)}+1\right)z+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+y\right)\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)z,$$

$$\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial z}A=\left(-\frac{2xy}{(x^2+y^2)}+1\right)z+\left(\frac{x}{x^2+y^2}+y\right)\left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)z.$$

Следовательно, условие (2) выполнено тождественно на всей плоскости (x,y), кроме начала координат, так что система (9) вполне интегрируема.

Следуя указанной схеме, найдем решение системы (9), содержащее одну произвольную постоянную.

Первое из уравнений (9) при фиксированном y дает

$$Z = C(y)e^{yx}\sqrt{x^2+y^2}\,. \qquad (10)$$

Выберем $C(y)$. подставляем (10) во второе из уравнений (9):

$$C'(y)e^{yx}\sqrt{x^2+y^2} + C(y)xe^{yx}\sqrt{x^2+y^2} +$$
$$+C(y)e^{yx}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}+x\right)C(y)e^{yx}\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

откуда $C'(y)=0$, так что $C(y)=C=const$. Следовательно, искомым решение будет

$$z = Ce^{xy}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

2.Рассмотрим уравнение Пфаффа.

$$\frac{2(x+y)}{z}dx + \frac{2(x+y)}{z}dy - \left(\frac{x+y}{z}^2\right)dz = 0\,. \qquad (11)$$

Проверяем условие полной интегрируемости (7):

$$\frac{2(x+y)}{z}\left(-\frac{2(x+y)}{z^2}+\frac{2(x+y)}{z^2}\right)+$$
$$+\frac{2(x+y)}{z}\left(-\frac{2(x+y)}{z^2}+\frac{2(x+y)}{z^2}\right)-$$
$$-\left(\frac{x+y}{z}\right)^2\left(\frac{2}{z}-\frac{2}{z}\right)\equiv 0.$$

Следовательно, уравнение (11) вполне интегрируемо. Интегрируя соответствующую ему систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{2z}{x+y}, \\ \frac{dz}{dy} &= \frac{2z}{x+y}, \end{aligned}\right\}$$

получим

$$z = C(y)(x+y)^{2.},$$
$$C'(y)(x+y)^2 + C(y)2(x+y) = 2C(y)(x+y);$$

$$C'(y)=0,\ \ C(y)=C,$$

так что

$$z=C(x+y)^2.$$

Это и есть искомое решение уравнения (11).

3. Найти полный интеграл уравнения

$$z^2(1+p^2+q^2)=R^2\,(R=const) \tag{12}$$

метод Лангранжа – Шарпи.

Состовляем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующую этому уравнению:

$$\frac{dx}{2z^2p}=\frac{dy}{2z^2q}=\frac{dz}{2z^2(p^2+q^2)}=$$

$$=\frac{dp}{-2z(1+p^2+q^2)p}=\frac{dq}{-2z(1+p^2+q^2)q}.$$

В качестве интегрирующего нас первого интеграла этой системы можно взять

$$\frac{p}{q}=a.$$

Решаем систему

$$\left.\begin{aligned} z^2(1+p^2+q^2)=R^2,\\ \frac{p}{q}=a \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

относительно p и q:

$$\left.\begin{aligned} p=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\frac{\sqrt{R^2-z^2}}{z},\\ q=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\frac{\sqrt{R^2-z^2}}{z}. \end{aligned}\right\}$$

Интегрируя систему (13), найдем

$$\sqrt{R^2-z^2}+\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}x+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}y+b=0.$$

Это и есть полный интеграл уравнения (12).

Проинтегрировать следующие системы уравнений, доказав предворательно, что они вполне интегрируемы:

1. $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = yz, \\ \dfrac{dz}{dy} = xz. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = yz\cos(xy), \\ \dfrac{dz}{dy} = xz\cos(x, y). \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = z^2, \\ \dfrac{dz}{dy} = 2yz^2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dy} = e^{x+y} + z \end{cases}$

Проинтегрировать следующие уравнения Пфаффа, доказав предварительно, что они вполне интегрируемы:

1. $yzdx - xzdy + x^2dz = 0$
2. $yzdx + (e^{xy} + xz)dy - dz = 0.$
3. $(x^2 + 2z - x^3)dx + x^3dy - xdz = 0.$

Найти полный интеграл каждого из следующих уравнений методом Лангранжа – Шарпи:

1. $z = px + qy + p^2.$
2. $z = px + qy + pq.$
3. $p = 2zq^3.$

Вопросы.

1. Что такое дифференциальное кравнение с частными производными? Что называется его решением? Какой геометрический смысл имеет решение уравнения с двумя независимыми переменными?
2. Какое уравнение называеться линейным уравнением с частными производными первого порядка? В каком случае оно называется однородным? неоднородным?
3. Как ставится задача Коши для уравнения с частными производными первого порядка? Какой геометрический смысл она меет в случае двух независимых переменных?
4. Как построить общее решение однородного линейного уравнения с частными производными первого порядка? Как решается задача Коши для этого уравнения?

5. Как построить общее решение неоднородного линейного уравнения с частными производными первого порядка? Как решается задача Коши для этого уравнения?
6. При каком условии нормальная система двух уравнений с частными производными вполне интегрируема? Как интегрируется эта система при выполнении условия полной интегрируемости?
7. Какой вид имеет уравнение Пфаффа? При каком условии оно вполне интегрируемо? Как интегрируется это уравнение?
8. Что называется полным интегралом нелинейного уравнения с частными производными первого порядка? В чем состоит метод Лангранжа – Шарпи нахождения полного интеграла этого уравнения?

Т е с т ы

1) Дифференциальными уравнениями, называют такие уравнения, содержащие неизвестную функцию одного или нескольких переменных и её…
А) множества; **В)** пределы; **С)** производные;

2) Если производные входящие в уравнение берутся только по одному переменному, то дифференциальное уравнение называется…
А) уравнения в частных производных; **В)** обыкновенным; **С)** сложным;

3) Уравнение, неразрешённое относительно производной, называется дифференциальное уравнение вида:
А) $F(x,y,y')=0$; **В)** $F(x,y)=0$; **С)** $F(x)+F(y)=0$;

4) Уравнение, разрешённое относительно производной, называется дифференциальное уравнение вида:
А) $y'+y+x^2=0$; **В)** $y'+f(x,y)+A+xy=0$; **С)** $y'=f(x,y)$;

5) Наивысший порядок производных, участвовавших в дифференциальном уравнении называется…
А) степенью; **В)** порядком; **С)** корнем;

6) Задача о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющих начальному условию, называется задачей..
А) Коши; **В)** Лагранжа; **С)** Ньютона;

7) Решение, в каждой точке которого задача Коши единственна, называется…
А) простым решением; **В)** особым решением; **С)** частным решением;

8) Решение для которого нарушается единственность, называется….
А) особым решением; **В)** частным решением; **С)** общим решением;

9) Если $y'=f(x)$, тогда решение дифференциального уравнения имеет вид
А) $y=\int\frac{1}{f(x)}dx+C$; **В)** $y=\int f(x)dx+C$; **С)** $y=\int f(x)dx-\int f(y)dy$;

10) Если $y'=f(y)$, тогда решение дифференциального уравнения имеет вид
А) $y(x)=\int f(y)dy+C$; **В)** $x(y)=\int f(y)dy+C$; **С)** $x(y)=\int\frac{1}{f(y)}dy+C$;

11) Если $y'=f(x)\cdot\varphi(y)$, где $\varphi(y)\neq 0$, тогда решение имеет вид
А) $\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int f(x)dx+C$; **В)** $\int\frac{dy}{f(x)}=\int\frac{dx}{\varphi(y)}+C$; **С)** $\int\frac{dy}{\varphi(y)}=\int\frac{dx}{f(x)}+C$;

12) Если дифференциальное уравнение $y'=f(\frac{y}{x})$ является однородным, тогда сделаем замену вида…

A) $\frac{x}{y}=z(x)$; **B)** $\frac{y}{x}=z(x)$; **C)** $y-x=z(x)$;

13) Функция $M(\varsigma;\eta)$ называется однородной функцией m-ого порядка, если для любого $K\in N$ имеет место равенство

A) $M(K\varsigma;K\eta)=K^{m}M(\varsigma;\eta)$; **B)** $M(K\varsigma;K\eta)=K^{-m}M(\varsigma;\eta)$; **C)** $M(K\varsigma;K\eta)=K^{\frac{m}{2}}M(\varsigma;\eta)$;

14) Какого порядка является однородная функция $M(\varsigma;\eta)=\varsigma^{2}+2\varsigma\eta$**?**

A) 1; **B)** 2; **C)** 3;

15) Кто впервые определил однородность функции?

A) Коши; **B)** Лагранж; **C)** Эйлер;

16) Уравнение вида $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется однородным, если функции…

A) $M(x,y)$, $N(x,y)$ однородные функции одинакового m –го порядка;

B) $M(x,y)$, $N(x,y)$ неоднородные функции одинакового m –го порядка;

C) $M(x,y)$, $N(x,y)$ сопряжённые функции одинакового m –го порядка;

17) Уравнение вида $y'=f(ax+by)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными, с помощью замены:

A) $z=ax$; **B)** $z=ax+by$; **C)** $z=ax-by$;

18) Если уравнения вида $y'=f(\frac{ax+by+c}{dx+ky+n})$, где $c=n=0$, $ak-bd\neq 0$б то её можно привести к однородному уравнению…

A) $y'=f(\frac{a\frac{x}{y}+c}{d\frac{x}{y}+n})$; **B)** $y'=f(\frac{a\frac{x}{y}+b}{d\frac{x}{y}+k})$; **C)** $y'=f(\frac{a+b\frac{y}{x}}{d+k\frac{y}{x}})$;

19) Если уравнения вида $y'=f(\frac{ax+by+c}{dx+ky+n})$, где $c=n=0$, $ak-bd=0$, то её можно привести к однородному уравнению…

A) $y'=f(const)$; **B)** $y'=\frac{x}{f(const)}$; **C)** $y'=\frac{y}{f(const)}$;

20) Уравнение вида $y'+a(x)y=b(x)$ называется...

A) нелинейным; **B)** билинейным; **C)** линейным;

21) Уравнение вида $y'+a(x)y=b(x)$ можно решать методом…
A) спуска; **B)** вариации постоянной; **C)** Фурье;

22) Уравнение вида $y'+a(x)y=b(x)y^n$, ($n\neq 0$ и 1) называется уравнением…
A) Бернулли; **B)** Клеро; **C)** Риккати;

23) Уравнение вида $y'+a(x)y=b(x)y^n$, ($n\neq 0$ и 1) можно упростить заменой вида…
A) $z=y^{n-1}$; **B)** $z=y^{n+1}$; **C)** $z=y^{1-n}$;

24) Уравнение Бернулли можно свести после замены к …
A) нелинейному уравнению; **B)** линейному уравнению;
C) билинейному уравнению;

25) Дифференциальное уравнение вида $y'+a(x)y=b(x)y^2=c(x)$ называется уравнением…
A) Риккати; **B)** Клеро; **C)** Бернулли;

26) Если известно одно частное решение $y_1(x)$ для уравнения Риккати, то его можно свести к уравнению Бернулли с помощью замены…
A) $y=\dfrac{y_1(x)}{z(x)}$; **B)** $y=y_1(x)+Z(x)$; **C)** $y=y_1(x)\cdot Z(x)$;

27) Если неизвестно частное решение для уравнения Риккати, то его можно подобрать исходя из вида…
A) порядка уравнения; **B)** показателя степени функции;
C) свободного члена уравнения;

28) Для того чтобы уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ было в полных дифференциалах необходимо и достаточно…
A) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$; **B)** $\dfrac{\partial M}{\partial x}=\dfrac{\partial N}{\partial y}$; **C)** $\dfrac{\partial M}{\partial x}=\dfrac{-\partial N}{\partial y}$

29) Интегрируемым множителем для уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, называется такая отличная от нуля функция $m(x,y)$, что после умножения на данное уравнение, оно становится уравнением…
А) Лагранжа; **B)** в полных дифференциалах; **C)** гармоническим;

30) Интегрирующий множитель можно найти из формулы $\dfrac{dm}{m(x)}=-\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{N}dx$,
если он зависит только от…
A) y; **B)** x,y; **C)** x;

31) Интегрирующий множитель можно найти из формулы $\dfrac{dm}{m(y)} = \dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}}{M} dy$, если он зависит только от…

A) y; **B)** x; **C)** x, y;

32) Если в уравнении $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ являются однородными одинакового порядка, тогда интегрирующий множитель для данного уравнения имеет вид…

A) $m(x,y) = x \cdot M(x,y) + y \cdot N(x,y)$; **B)** $m(x,y) = \dfrac{1}{x \cdot M(x,y) + y \cdot N(x,y)}$;

C) $m(x,y) = \dfrac{1}{x \cdot M(x,y) - y \cdot N(x,y)}$;

33) Если дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$, где $F(x, y, y')$ непрерывна вместе с производными, на некотором открытым множестве E пространства xy и y' переменных, то оно называется …

A) разрешённом относительно производной; **B)** общим уравнением;

C) неразрешённом относительно производной;

34) Кривая соответствующая решению дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, называется…

A) интегральной кривой; **B)** предельной кривой;

C) параметрической кривой;

35) Дифференциальное уравнение вида $y = xy' + \varphi(y')$ называют уравнением…

A) Лагранжа; **B)** Клеро; **C)** Риккати;

36) Дифференциальное уравнение вида $y = x\varphi(y') + \varphi(y')$ называют уравнением…

A) Клеро; **B)** Риккати; **C)** Лагранжа;

37) Обыкновенное дифференциальное уравнение вида $F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$, называют уравнением…

A) второго порядка; **B)** высшего порядка; **C)** третьего порядка;

38) Если в дифференциальное уравнение высшего порядка не входят $y, y', y'', ..., y^{(k-1)}$, k<n , то понизить порядок уравнения можно, сделав замену...

A) $y^{(k)} = z$; **B)** $y^{(k-1)} = z$; **C)** $y = z^k$;

39) Если в дифференіальное уравнение высшего порядка не входит независимая переменная x, то понизить порядок уравнения можно, сделав замену...

A) $y^{(n)} = \rho(y)$; **B)** $y = \rho^{(n)}(y)$; **C)** $y^{(n)} = p(y) \cdot p^{(n-1)}(y)$;

40) Если дифференциальное уравнение высшего порядка однородно относительно y и его производных, то понизить порядок уравнения можно, сделав замену…

A) $y' = y - z$; **B)** $y' = y \cdot z$; **C)** $y' = y + z$;

41) Если дифференциальное уравнение высшего порядка является однородным относительно x и y в обобщённом смысле, то понизить порядок уравнения можно, сделав замену…

A) $x = e^t$, $y = ze^{mt}$; **B)** $y = e^t$, $x = ze^{mt}$; **C)** $x = ze^t$, $y = e^{mt}$;

42) Дифференциальное уравнение вида $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$, называют…

A) нелинейным уравнением с постоянными коэффициентами;
B) билинейным уравнением с постоянными коэффициентами;
C) линейным уравнением с постоянными коэффициентами;

43) Уравнение вида $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0$ называют…

A) сопряжённым уравнением; **B)** характеристическим уравнением;
C) гармоническим уравнением;

44) Если корни уравнения $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ различны и действительные числа, то общее решение для линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид…

A) $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \ldots + c_n e^{k_n x}$; **B)** $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^n) e^{kx}$; **C)** $y = c^n e^{kx}$;

45) Если корни уравнения $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ имеют кратность m, то общее решение для линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеют вид…

A) $y = (c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_m x^m) e^{kx}$; **B)** $y = (c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_m x^m) e^{kx}$;
C) $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_m x^{m-1}) e^{kx}$;

46) Если корни уравнения $a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ являются комплексными сопряжёнными $k = \alpha + \beta i$, то общее решение для линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид…

A) $y = (c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x) e^{\beta x}$; **B)** $y = (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) e^{\alpha x}$;
C) $y = (c_1 \cos x + c_2 \sin x) e^{(\alpha + \beta) x}$;

47) Дифференциальное уравнение вида $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$ называется…

A) линейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами;
B) нелинейным однородным уравнением с постоянными коэффициентами;
C) линейным неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами;

48) Дифференциальное уравнение вида $x^n y^{(n)} + a_n x^{n-1} y^{(n-1)} + ...a_{n-1}xy' + a_n y = f(x)$, называют уравнением…

A) Эйлера; **B)** Энштейна; **C)** Ньютона;

49) Уравнение вида $k(k-1)...(k-n+1) + a_1 k(k-1)...(k-n+2) + ... + a_{n-1}k + a_n = 0$ называют…

A) сопряжённым уравнением Эйлера;
B) характеристическим уравнением Эйлера;
C) степенным уравнением Эйлера;

50) Уравнение вида $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \upsilon^2)y = 0$, где υ-комплексное число, называют уравнением…

A) Эйлера; **B)** Клеро; **C)** Бесселя;

51) Условия вида $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$, $x_0 \le x \le x_1$, причём $\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0$, $\gamma y'(x_0) + \delta y(x_0) = 0$ называют…

A) Краевой задачей; **B)** Относительной задачей; **C)** Абсолютной задачей;

52) Функция $G(x,s) = \begin{cases} y_1(x) \cdot a(s), & x_0 \le x \le s \\ y_2(x) \cdot b(s), & s \le x \le x_1 \end{cases}$, где $\begin{cases} y_2(s)b(s) = a(s)y_1(s) \\ y'_2(s)b(s) = a(s)y'_1(s) + \dfrac{1}{a_0 s} \end{cases}$

называют функцией…

A) Коши; **B)** Грина; **C)** Лагранжа;

53) Система уравнений вида $\dfrac{dx_1}{x_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \dfrac{dx_2}{x_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \dfrac{dx_n}{x_n(x_1, x_2, ..., x_n)}$

называют

A) симметричной формой; **B)** особой формой; **C)** прямой формой;

54) Дифференциальное уравнение $x_1 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x_2} + ... + x_n \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = 0$ называют…

A) нелинейным однородным в частных производных;
B) линейным однородным уравнением в частных производных;
C) нелинейным неоднородным уравнением в частных производных;

55) Уравнение вида $x_1 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x_1} + x_2 \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x_2} + ... + x_n \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = b$ называют…

A) полилинейным уравнением; **B)** квадралинейным уравнением;
C) квазилинейным уравнением;

56) Первые интегралы симметричной формы называют…

A) характеристиками; **B)** полиномами; **C)** траекторией;

57) Найти решение уравнения вида $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

A) $z = \varphi(x^2 - y^2)$; **B)** $z = \varphi(x^2 + y^2)$; **C)** $z = \varphi(x^2 \cdot y^2)$;

58) Решить задачу Коши для уравнения $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, при $Z(x,1) = 2x$

A) $z = xy$; **B)** $z = 3xy$; **C)** $z = 2xy$;

59) Решить симметричную форму системы уравнений $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z}$.

A) $x^2 - y^2 = c_1; x + y = c_2 z$; **B)** $x^2 + y^2 = c_1; x - y = c_2 z$; **C)** $x^2 \cdot y^2 = c_1; x \cdot y = c_2 z$;

60) Является ли данное уравнение $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$, уравнением в полных дифференциалах?

A) нет; **B)** да; **C)** ответа нет;

Ключи к тестам

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***16***	***17***	***18***	***19***	***20***
C	*B*	*A*	*C*	*B*	*A*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*C*
21	***22***	***23***	***24***	***25***	***26***	***27***	***28***	***29***	***30***	***31***	***32***	***33***	***34***	***35***	***36***	***37***	***38***	***39***	***40***
B	*A*	*C*	*B*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*B*	*A*	*C*	*B*
41	***42***	***43***	***44***	***45***	***46***	***47***	***48***	***49***	***50***	***51***	***52***	***53***	***54***	***55***	***56***	***57***	***58***	***59***	***60***
A	*C*	*B*	*A*	*C*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	*A*	*B*

Основные формулы и термины

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$	Нормальная форма уравнения, разрешенного относительно производной.
$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}$	Перевернутая форма уравнения, разрешенного относительно производной.
$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ при $y(x_0)=y_0$.	Задача Коши.
$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y)$	Уравнение с разделяющимися переменными.
$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ или $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$	Однородное дифференциальное уравнение, в котором M и N – однородные функции одной и той же степени.
$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0$	Это уравнение при помощи подстановки $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, где ξ и η - новые переменные, а α и β - некоторые постоянные числа, определяемые из системы $\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a\alpha + b\beta + c &= 0 \end{aligned}\right\}$ приводится к однородному уравнению $\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right)$.
$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right)$, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$	Это уравнение принимает вид $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax+by)+c_1}{ax+by+c}\right) \equiv f_1(ax+by)$ полагая, что $z = ax + by$.
$y' + p(x)y = q(x)$	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение.
$y' + p(x)y = q(x)y^n$	Уравнение Бернулли, где *p(x)* и *q(x)* – функции от *x*, которые предполагаем определенными и непрерывными в интервале (*a*,*b*), а *n*- вещественное

	число, отличное от 0 и 1.
$y^{1-n}=z$	С помощью такой замены, где z новая искомая функция, уравнение Бернулли приводится к линейному уравнению.
$\dfrac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$	Уравнение Риккати, где *P(x)*,*Q(x)* и *R(x)* определены и непрерывны в интервале (*a*,*b*).
$y=y_1+\dfrac{1}{z}$	С помощью этой подстановки,где y_1 известное одно частное решение уравнения Риккати и z – новая неизвестная функция, можно привести к линейному уравнению.
$y'=Ay^2+\dfrac{B}{x}y+\dfrac{C}{x^2}$, где *A*,*B* и *C* – постоянные числа, причем $(B+1)^2\geq 4AC$.	Для такого вида уравнения Риккати можно пользоваться частным решением $y_1=\dfrac{a}{x}$.
$y'=a\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y}{x}+c$ или $xy'-\dfrac{1}{2}y-ay^2=cx$	Для такого вида уравнения Риккати можно использовать подстановку вида $y=z\sqrt{x}$.
$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$	Уравнение в полных дифференциалах, если левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $U(x,y)$, это уравнение можно переписать в виде $dU=0$, так что его общий интеграл имеет вид $U(x,y)=C$.
$\mu(Mdx+Ndy)=0$	Функция $\mu=\mu(x,y)$ называют интегрирующим множителем, что после умноженияобеих частей уравнения $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ получается уравнение в полных дифференциалах.
$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}\equiv\psi(x)$ $\left(\mu=e^{\int\psi(x)dx}\right)$	Уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель, зависящий только от *x*.

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M}\equiv\psi(y) \qquad \left(\mu=e^{\int\psi(y)dy}\right)$	Уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель, зависящий только от *y*.
$\mu=e^{\int\psi(\omega)d\omega} \quad (C=1)$, где $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial y}}\equiv\psi(\omega)$	Интегрирующий множитель $\mu=\mu(\omega)$, где ω - заданная функция от *x* и *y*.
$F(x,y,y')=0$	Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной.
$y'^2+2P(x,y)y'+Q(x,y)=0$	Уравнения, квадратные относительно y' и его можно решить относительно y': $y'=-P(x,y)\pm\sqrt{P^2(x,y)-Q(x,y)}$, где $P^2-Q\geq 0$
F(y′)=0	Уравнение, содержащее только y', где общий интеграл выглядит : $F\left(\dfrac{y-C}{x}\right)=0$
F(x,y′)=0	Уравнение, не содержащее искомой функции, где решение выглядит : $y'=f_k(x) \quad (k=1,2,...,m)$ или $y=\int f_k(x)dx+C \quad (k=1,2,...,m)$.
F(y,y′)=0	Уравнение, не содержащее независимой переменной, где решение выглядит $y'=f_k(y) \quad (k=1,2,...,m)$ или $\int\dfrac{dy}{f_k(y)}=x+C \quad (k=1,2,...,m)$.
$y=\varphi(y')x+\psi(y') \ [\varphi(y')\neq y']$	Уравнение Лагранжа . Положим $y'=p$, *p*–параметр,тогда $y=\varphi(p)x+\psi(p)$. Заменим в равенстве $dy=y'dx$, тогда $\varphi(p)dx+[\varphi'(p)x+\psi'(p)]dp=pdx$

$y = xy' + \psi(y') \quad [\psi(y') \neq ay' + b]$	Уравнение Клеро. Полагаем $y'=p$, тогда $y=xp+\psi(p)$. Далее имеем $dy = y'dx, \;\; pdx + [x + \varphi'(p)]dp = pd$ или $[x+\psi'(p)]dp = 0$. Это уравнение распадается на два: $dp = 0$ и $x + \psi'(p) = 0$.
$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$	Уравнение n-го порядка, разрешенное относительно старшей производной.
$y^{(n)} = f(x)$	Уравнение, разрешенное относительно производной порядка n. Интегрируя последовательно это уравнение, получим: $y = \underbrace{\iint ....\int}_{n \;\; раз} f(x) dx dx ... dx + C_1 x^{n-1} + C$ $+ C_{n-1} x + C_n$.
$F(x, y^{(n)}) = 0$	Уравнение, не разрешенное относительно производной порядка n
$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k < n)$	Уравнения такого вида, при помощи подстановки $y^{(k)} = z$, где z – новая неизвестная функция, приводится к уравнению (n - k) –го порядка $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0.$
$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$	Уравнение такого вида допускает понижение порядка на единицу, если ввести вместо y новую искомую функцию $z=z(y)$ по формуле: $y' = z$.
$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$	Уравнение такого вида допускает понижение порядка на единицу, если положить $y' = yz$, где z - новая неизвестная функция, $z = z(x)$.
$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x) y' +$ $+ p_n(x) y = f(x)$	Неоднородное линейное уравнение n-го порядка.
$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0$	Однородное линейное уравнение с постоянными коэффициенты.
$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + ... + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$	Характеристическое уравнение
$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_n e^{\lambda_n x}.$	Общее решение, где все корни

	$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения различны и вещественные.
$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$	Общее решение, где корни характеристического уравнения различны и комплексные $\lambda_{1,2} = a \pm ib$.
$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{k-1})$.	Общее решение, где среди корней характеристического уравнения имеются действительные кратные корни.
$y = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1})\cos bx +$ $+ (C_{k+1} + C_{k+2} x + \ldots + C_{2k} x^{k-1})\sin bx$.	Общее решение, где корни характеристического уравнения комплексные $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ кратности k
$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0$	С помощью замены $t = c\int \sqrt[n]{p_n(x)}dx$ можно привести данное уравнение к уравнению с постоянными коэффициентами.
$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0$	Уравнение Эйлера, где при замене $x = e^t$ приходим к уравнению с постоянными коэффициентами.
$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(ax+b) y' +$ $+ a_n y = 0$	Обобщенное уравнение, где при помощи подстановки $ax + b = e^t$. приходим к уравнению с постоянными коэффициентами.
$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$	Уравнение второго порядка, где при помощи замены $y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z$ можно упростить уравнение.
$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$	Для нахождения решения данного уравнения, достаточно знать только его одно ненулевое y_1 частное решение. При этом второе частное решение y_2 можной найти по формуле $y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int -p(x)dx}}{y_1^2} dx$.
$y'' + p(x) y' + q(x) = 0$, где коэффициенты уравнения $p(x)$ и $q(x)$ разложимы в степенные ряды.	Для нахождения решения однородного линейного уравнения второго порядка можно искать с помощью степенного ряда : $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \quad (c_0 \neq 0)$.
$\frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$	Система дифференциальных

	уравнений в симметрической форме.
$\frac{dy_k}{dx}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}y_l+f_k(x) \qquad (k=1,2,\dots,n)$	Линейная система уравнений, где все коэффициенты a_{kl} вещественные постоянные.
$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$	Характеристическое уравнение для линейной системы.
$X_1(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+X_2(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_2}+$ $+X_n(x_1,x_2,\dots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=R(x_1,x_2,\dots,x_n,u)$	Неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных.
$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}=A(x,y,z),\\ \frac{\partial z}{\partial y}=B(x,y,z),\end{aligned}\right\}$	Система двух нелинейных уравнений первого порядка.
$P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=0$	Уравнение Пфаффа.
$P\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)+Q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)+R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$ или $\begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}=0.$	Если это условие выполняется тождественно в некоторой окрестности точки (x_0,y_0,z_0), то оно называется условием полной интегрируемости уравнения Пфаффа

Литература

1. Н.М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.,1967.
2. Н.М. Матвеев. Дифференциальные уравнения. Минск,1968.
3. В.В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений. М.,1958.
4. Л.Э.Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.,1965.
5. Н.М.Матвеев. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.,1970.
6. А.Ф. Филиппов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. Наука. 1973.

С О Д Е Р Ж А Н И Е