

**ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASI XALIQ BILIMLENDIRIW
MINISTRILIGI**

**ÁJINIYAZ ATINDAĞI NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALIQ
INSTITUTI**

Informatika oqıw metodikası kafedrası

Alaminov M.X., Qıdırniyazov A. Sh.

Matematikaliq modellestiriw

OQIW-METODIKALIQ QOLLANBA

Nókis-2016

Dúziwshiler: Alaminov M.X., Qıdırnıyazov A. Sh.

Usi metodikalıq qollanba matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw máselelerine arnalğan bólip, onda matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw tiykarları berilgen hám korrekt emes máselelerdi modellestiriw misalları izertlengen.

JUWAPLI REDAKTOR:

A. Abdullaev Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq inistitutınıń Informatika oqitiw kafedrası docenti, ekonomika ilimleri kandidati.

PIKIR BILDIRIWSHILER:

M.Qasimov -Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq inistitutınıń matematika oqitiw kafedrası docenti, texnika ilimleri kandidati.

K.Dawletiyarov - QRXBQQTHQAI docenti, fizika- matematika ilimleriniń kandidati.

**Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutınıń
Ilimiy – metodikalıq keńesiniń 201_ – jıl _____ kúngi májilisi
qararı menen baspaǵa usınıs yetilgen (№ sanlı bayanlama).**

KIRISIW

Házirgi waqitta ilim-texnikaniń rawajlaniwi tiykarında payda bolip atırǵan ekonomikalıq, sociallıq hám siyasiy tarawlarda rawajlanıwdı kompyuter texnologiyalarsız qabil etip bolmaydı. Usı texnologiyalar járdeminde qanday da bir máseleni sheshiwde modellestiriw usili hám quralları, ásirese matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw usılları keń qollanılmaqta. Usı qollanba matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw máselelerine arnalǵan bólip, ol kirisiw, eki bap, juwmaqlaw hám paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Qollanbaniń I-babında matematikalıq modellestiriw tiykarları kórip shıǵılǵan. Matematikalıq modellestiriw real obyekt, yaǵniy proseslerdi úyreniwdiń eń nátiyjeli hám universal izertlew usıllarınıń biri sipatında payda boldı. Sol sebepli házirgi kúnde ilim hám texnika, xalq-xojalıǵı hám basqada tarawlarda ushirasatuǵın kóplegen ámeliy máseleler matematikalıq modellestiriw quralları menen tabisli sheshilmekte.

Qollanbaniń II-babında korrekt emes maselelerdi modellestiriw misalları izertlengen. Korrekt emes máseleler teoriyasında kóbinese máseleler abstrakt Gilbert keńisliginde izertlenip, birden-birlik hám ornıqlılıq teoremları dálillenedi. Máseleniń sheshimi bolsa, apriori bar dep esaplanadı. Másele sheshiminiń barlıǵı máseleniń fizikalıq mazmun ınan kelip shıǵadı. Bunda logarifmikalıq dóńeslik hám Karleman túrdegi bahalardan paydalanıladı. Akademik A.N.Tixonovtıń regulyarizaciya metodı menen juwıq sheshim tabıladı. Regulyarizaciya metodı menen juwıq sheshim tabıladı. Tiyisli misallar beriledi.

I-BAP. MATEMATIKALIQ HÁM KOMPYUTERLIQ MODELLESTIRIW TIYKARLARI

1-§.Modellestiriw túsinikleri hám modellerdiń túrleri.

Qiyalıy modeller haqıyqıy dunyanı teoriyalıq túsiniw hám sáwlelendiriw formasi bolıp, onı fizikalıq biliw ushın úlken orın iyeleydi. Sonıń ushın teoriyalıq biliw hám uslubiy jaqtan modellerdi rawajlandırıw máselesi, olardı biliwde qollaw hám basqa modeller, qiyalıy hám real tájiriybeler, gipoteza, teoriyalar menen baylanısı úlken áhmiyetke iye.

Modeller–ilimiy gipoteza bolıp, pándi rawajlandırıw forması sıpatında kórilip, keyingilerinde jetiliske teoriya modelleri kórinisinde úyreniledi.

Qiyalıy hám materiallıq modellerdi tómendegishe táriyplew múmkin:

Modellestiriw – bul qandayda bir obyekt (original) basqası menen (model) almastırıw hám originaldıń qásiyetlerin modeldiń qásiyetlerin kiritiw jolı menen úyreiwden ibarat. Almastırıwdan tiykarǵı maqset original qásiyetlerdi úyrenip anıqlawdı tezlestiriw, ápiwayılastırıw, bahanı kemeyttiriw imkanın beredi. Ulıwma obekt-original sıpatında qálegen tabiiy yamasa jasalma, real(haqıyqıy) yamasa qiyalıy sistema bolıwı múmkin.

Modellestiriw usılı házirgi kúnde kóplegen alımlar tárepinen islep shıǵılmaqta. Mısal retinde mexanika, fizika, ximiya, biologiya, medicina, ekonomika hám basqa tarawlardı kóriw múmkin. Modellestiriw koncepciyasınan maqset tiykarınan modellerdi teoriya jaratıw processine kiritiwden ibarat, sebebi ideal modeller teoriyani baslanǵısh basqishi bolıwı múmkin yamasa teoriyanı interpretaciyalaw modelide bolıwı múmkin.

Gipotezalar teoriyanıń ideallastırılǵan obektlerden basqa bolıp, teoriyanı interpretaciyalaw modeli yamasa dáslepki qádemdegi model kórinisinde súwretlew múmkin. Gipotezalar túrlendirilip atırǵan modellerdi dáslepki qádemleri sıpatında kórilwi múmkin.

Dáslepki modeldi islep shıǵıwda izertlewshi intuiciyasi úlken rol` oynaydı. Baslanǵısh waqıtlarda úlken kólemdegi modeller aldınǵa jılısıwı múmkin. Biraq usınıw prosesinde olardıń sanı kemeyedi.

Model menen islew forması sıpatında qiyalıy tájiriybe kóríledi. Ayırım jaǵdaylarda qiyalıy tájiriybelerdi ideallastırılǵan delinedi, sebebi olar real tájiriybeler menen baylanıslı. Málim kóriniste qiyalıy tájiriybe real tájiriybeni qandayda bir táreplerin (qásiyetlerin) qiyalıy obrazlı rekonstrukciya qiliwdan ibarat. Sebebi, «pikirlew oyda tájiriybe ótkeriw ónimi». Qiyalıy tájiriybe shárciz ráwishte haqıyqıy tájiriybege qaraǵanda qolaylı. Pikirler bizde hárdayım bar hám haqıyqatqa qarata oyda tájiriybelerdi jıynaw (toplaw) ańsat.

Tájiriybe obekt originalın málim táreplerin (qásiyetlerin) modelde sáwlelendiriw adekvatlik kriteriyası bolıp kelmekte. Tájiriybe sınaq rolinde bolıp, model járdeminde alınǵan kórinislerdi alıp qalıw yamasa shıǵarıp taslaw tuwrısında sheshim qabıl qıladı.

Úyrenilip atırǵan hádiyse, process yamasa obyektı matematikalıq anıqlamalar (múnasibetler) hám formulalar járdeminde kóriw processı matematikalıq model delinedi. Usınılıp atırǵan obektı modellestiriw obektı rawajlandırıwdan baslanadı, yaǵnıy sáykes matematikalıq modeldi dúziwden ibarat. Bunıń ushın onıń áhmiyetli tárepleri (qásiyetleri) ajıratıp alınadı (tańlanadı) hám matematikalıq múnasibetler járdeminde jazıladı.

Matematikalıq model payda etilgennen soń, yaǵnıy máselege matematikalıq forma berilgennen soń onı úyreniw ushın matematikalıq usıllardan paydalanıwımız múmkin.

Modellestiriw tiykarınan modelde paydalanıwǵa kesent beriwshi originaldıń belgileri bar bolmaǵan jaǵdaylarda, yamasa modeldiń qásiyetlerin úyreniw hám belgilew imkanın beriwshi parametrlar bar bolǵanda maqsetke muwapıq.

Modellestiriw teoriiyası óz-ara bir-birine baylanıslı bolǵan nızamlar, táriypler, modellerdi jaratıw hám paydalanıw usılları, quralları toplamınan ibarat. Bul nızamlar, táriypler, usıllar, qurallar hám modeller modellestiriw teoriiyasınıń predmetin payda etedi.

Modellestiriw teoryasınıń tiykarǵı máselesi izertlewshilerdi modellerdi jaratıw texnologiyasına úyretiwden ibarat. Bunday texnologiya originallardı úyrenilip atırǵan qásiyetlerin jeterli anıqlıq hám tolıq ráwishte paydalanıw imkoniyatın beredi.

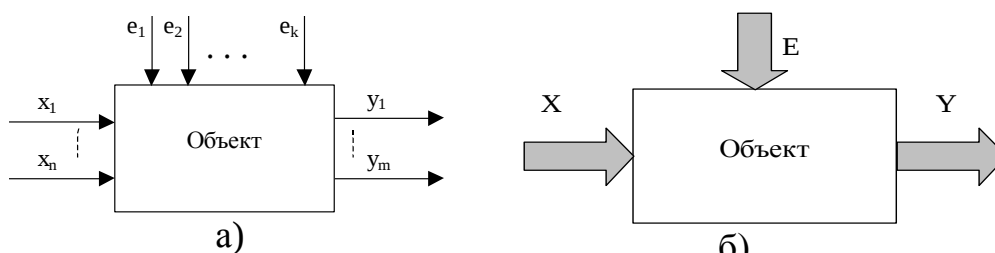
Obyekt – original sıpatında tiykarınan esaplaw sistemaları kórilgen bolıp, modellestiriwdiń predmet tarawın payda etedi. Esaplaw sisteması túsiniǵı bul jerde keń mániske iye bolıp, bir processorlı maǵlıwmatlardı qayta islew sistemasınan túrli programmalıq támiynatlı bólistirilgen esaplaw sistemalarına shekem hám túrli wazıypalarǵa mólsherlengen sistemalar kiredi. Esaplaw sistemaları – bul jasalma, injenerlik sistemaları bolıp, onıń hámme parametri belgili. Demek, bul parametrlardi paydalanıw, anıqlaw imkanı bar. Sonıń ushın esaplaw sistemaların modellestiriwdiń principial imkanı bar.

2-§.Matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw problemalari

Modellestiriw mashqalasını qóyishda hám sheshiwda izertlewshi túrli máselelarga dus keledi.

Tiykarǵı máselelardan biri bul – modellestiriw obyektı dep nege ayıladı, onıń ulıwma qásiyetleri nimadan ibarat hám qanday xossalarga iye boladı? Sonıń ushın modellestiriw mashqalasını modellashtirilayotgan obyektı úyreniwden boshlash múmkin.

Modelashtirilayotgan obyektı kóp qutubli shaklda súwretlew qólaydır, 1-súwret, a, bunda $x_1, \dots, x_p$ obyektı kózatıladigan kirish kanallari; $e_1, \dots, e_k$ obyektı kózatılmaydigan kirish kanallari; $u_1, \dots, u_t$ obyektı kózatıladigan shıǵıw kanallari



1-súwret. Modellashtirilayotgan obyektı súwretlew.

Kóp ólchamli obyektı vektor shaklda jazıw qólay. (1-súwret, b). Bunda

$$X=(x_1, \dots x_n);$$

$$Y=(y_1, \dots y_m);$$

$$E=(e_1, \dots e_k);$$

Obyektti hámme kirish kanallari sırtqı muhitni obyektga bolğan tásirini ifodalaydi hám muhitni holatini hám waqıtini belgili bir funkciyalari esaplanadı. Holbuki, sırtqı muhit modeli bar bolmağanligi sebepli, obyektti kirish kanallarini tabiiyki waqıtning tosınarlı funkcionlar sıpatında qórish múmkin, yáni

$$X=X(t), E=E(t),$$

Bul waqıtning tosınarlı funkciyalardıń statistik qásiyetleri ulıwma olganda belgisiz. Ammo, obyektti kirish hám shıǵıwlarını kózatish múmkin. Yáni $X(t)$ hám $Y(t)$ funkcyalarını uzuluksiz yamasa uzlukli (diskret) shakldagi ksheshiwlari belgili. Obyektti kózatilmaydigan kirish kanali $e(t)$ strukturası belgili dep olinadi, yaǵnıy bul tosınarlı funkciyani xarakteri belgili. Kópgina jaǵdaylarda $E(t)$ ni normal tosınarlı process dep olinadi, biraq onı bevosita kózatish múmkin emas.

Obyekt kirish kanallari X hám e ni shıǵıw kanali Y menen biror bir belgisiz operator F_0 menen boǵlab turadi.

$$Y=F_0(X, E).$$

Biraq bul operator F identifikaciya qilinmaydi, balki model operatori $Y=F(X)$. identifikaciya qilinadi.

Kózatilmaydigan faktor esa tosınarlı halakit sıpatında kórilib, operator F ni anıqlawǵa halakit beredi.

Ulıwma olganda, identifikaciya qilinayotgan obyekt kóp kutubli kóriniste tasvirlanıb (ifodalanıb), ayırım bir kirish kanallari kózatilmaydi.

2. Obyekt haqida xabarlar. Identifikaciya procedurasini boshlashdan aldın obyekt haqqındaǵı hámme xabarlar 2ta turga bólinedi: aprior A hám aposterior V . Demek tómendegi ekilik obyekt haqqındaǵı hámme axborotni xarakterlaydi (ifodalaydi)

$$\langle A, B \rangle \tag{1}$$

Aprior xabat obyektti kirish hám shıǵıw kanallarini kózatishdan oldin belgili bolıwı zárúr hám tómendegi savolga juwap beriwi lazım: identifikaciya

qilinayotgan obyektning strukturasi nimadan ibarat? Obyektning strukturasi to'rtta alomat manisleri bilan xarakterlaymiz:

Demak, obyekt to'rtta alomat bilan kodlanadi, shuni aytib o'tish kerakki, obyektning strukturasi har doim yuqoridan to'rtta alomat bilan cheklanib qolmaydi.

Obyektning turining belgilarini aniqroq tavsiflaymiz ham ularni manosi bilan kiritib beramiz.

1. Dinamiklik belgisi. α obyekt dinamik ($\alpha=1$) delinedi, agar uning harakati faqat joriy vaqtdagi kiritish bilan bogliq bo'lmay, kiritishning oldingi vaqit daqiqalariga ham bogliq bo'lsa, bu degani, obyekt xotiraga iye, ya'ni uning harakati kiritishning oldingi holatlariga ham bogliq. Bolmasa obyekt statik delinedi ($\alpha=0$).

2. Stoxastiklik belgisi. β obyekt stoxastik delinedi ($\beta=1$), Eger uning harakati faqatgina kiritish bilan bogliq bo'lsa yoki kiritish bilan bogliq bo'lmaydigan faktorlar (tasirler) manbaiga iye bo'lsa. Bolmasa obyekt deterministik ($\beta=0$) delinedi.

Shuni aytib o'tish kerak, tabiatda stoxastik bo'lmagan obyektlar mavjud emas, sababi har qanday o'lshov jarayonida albatta ulkan yoki kichik miqdorda xatoliklar mavjud bo'lganligi yul qo'yiladi. Shuning uchun ko'pincha obyektlarni «kichik» ham «katta» stoxastikligi deyilgan bo'lsin. Bunda «kichik» stoxastik o'zini o'ziga iye bo'lgan obyektlarni deterministik deb atash mumkin.

3. Siziqli emeslik belgisi. γ obyekt siziqli delinedi ($\gamma=1$), agar uning ikki turli kiritish tasirleri har bir aloqada tasirler yigindisiga ekvivalent bo'lmasa. Eger obyektga halatlar mavjud bo'lmasa, siziqli obyekt quyidagi shart bilan aniqlanadi.

$$F_0(X_1 + X_2) \neq F_0(X_1) + F_0(X_2).$$

Bu shart bajarilmasa, ya'ni bu ifoda tenglik ko'rinishida bo'lsa, obyekt siziqli $\gamma=0$ delinedi.

4. Diskretlik belgisi. δ . obyekt diskret delinedi ($\delta=1$) , agar uning kiritish ham harakat kanallarining holati diskret vaqit daqiqalarida $t=1, 2, \dots, p$ bo'lsa

yamasa ulchanilsa. Eger kirisiw hám shıǵıw uzuluksiz ózgarsa yamasa ulchanilsa, unda obyekt uzliksiz delinedi ($\delta=0$).

Kórinib turǵanınday, A modelini kórinisini anıqraq dárejede oydinlashtıradi. Obyektti tolı anıqlıǵı ushın esa onıń dinamikası ($\alpha=1$ bolǵanda), stoxastiklikni itimallıq qásiyetleri ($\gamma=1$ bolǵanda) hám nosızıqlık ($\beta=1$ bolǵanda) tórinini ayıp ótiw zárúr.

Tabiiyki, modeldi turi haqqındaǵı tasavvurlar (A menen anıqlanadıǵan) aposterior axborotni analizlewden sóng ózgeriwi múmkin, yaǵnıy obyektti kirish hám shıǵıw kanallari harakatini kózatishdan sóng.

Eger aprior xabar A sıfat xarakteriga iye bolsa, aposterior xabar – muǵdarlıdır, yaǵnıy obyektti kirish hám shıǵıw kanallarini kózatish natıjaları yamasa protokoli. bul protokol tómendegi kóriniske iye:

$$B=<X, Y> ,$$

Bul jerde X – obyektti kirishini ham ólshewlari natıjasi;

U – usı kózatish davrida onıń shıǵıwlarını ólshew natıjaları.

Uzuluksiz obyektler ushın ($A=\alpha\beta\gamma 0$) intervalda $0 \leq t \leq T$ tómendegi uzuluksiz maǵlıwmatlardı payda kilamiz: $X=X(t)$, $Y=Y(t)$

Soday qılıp, tómendegini alamız:

$$B_0=(<X(t), Y(t)> (0 \leq t \leq T).$$

Bul degani, obyektti harakati ($n+m$) ta túrli egri sıızıqlar járdeminde esapqa alıǵan: $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, $y_1(t)$, ..., $y_m(t)$

Sonı ayıp ótiw kerek, X i $X(t)$ lar bul jaǵdaylarda ayniy emaslar, sebebi X Berilgen intervaldagi hámme baylanıs $X(t)$ ni ifodalaydi, $X(t)$ bul baylanıstı tek t daıqasidagi konkret mánisini ifodalaydi. Xuddi usı singari Y i $Y(t)$ larni ayniy emasligini ayıp ótiw zárúr.

Diskret jaǵdaylarda ($A=\alpha\beta\gamma 1$) tómendegiga iye bulamiz $X=(X_1, \dots, X_N)$ hám $Y=(Y_1, \dots, Y_N)$ protokol (bayonnoma) tómendegi kóriniste jazıladı.

$$B_1=(<X_i, Y_i> (i=1, \dots, N)),$$

Bul tómendegi sanlarni N ta ustun hám $p+t$ ta qatordan ibarat kesteni ifodalaydi

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdot & \cdot & x_{n1} & y_{11} & y_{21} & \cdot & \cdot & y_{m1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdot & \cdot & x_{n2} & y_{12} & y_{22} & \cdot & \cdot & y_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1N} & x_{2N} & \cdot & \cdot & x_{nN} & y_{1N} & y_{2N} & \cdot & \cdot & y_{mN} \end{pmatrix},$$

Kórinib turibdiki bul ikkala yozuv shakllari órinlidir. Máselen, protokol B1 protokol B0 den diskret waqıt daqiqalarini $t=0, \delta, 2\delta, \dots, (N-1)\delta$ bul jerde b -diskretlilik intervali ($\delta=T/N$) belgilew menen payda qilish múmkin.

Sonday qılıp, juftlik obyektı identifikaciyalash maqsadları ushın tolı hám jeterli xarakterlaydı. Sonıń ushın bul juftlik identifikaciyalash ğoyaları, usılları hám yondoshjumıslarda paydalanıldı.

3-§. Baslanğısh shartlı ápiwayı differencial teńlemelerdi sanlı sheshiw usılları

Eyler usılı. $[a, b]$ kesiminde $y' = f(x, y)$ differencial teńlemenıń $y(a) = x_0$ baslanğısh shártin qanaatlandırıwshı sheshimin tabıw talap etilsin.

Eyler usılınıń maǵanası $[a, b]$ kesimin n aralıqqa ajıratamız, yaǵnıy $x_i = a + i \cdot h = x_{i-1} + h, (x_0 = a)$

noqatların payda etemiz, bul jerde $h = (b-a)/n$

Funkciyanıń bul noqatlardaǵı mánislerin usı formula

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

menen esaplanadı.

Misal. $y' = \frac{1}{2}xy$ teńlemenıń $[0, 1]$ kesimde $u(0) = 1$ baslanğısh shártin qanaatlandırıwshı sheshiminiń juwıq mánisler kestegin dúziń.

Sheshiw. $n=10, h=0,1$ bolsın. Usı formuladan

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}hx_{i-1}y_{i-1}, y_i \text{ nıń mánisleri tabıladı, } i=1, 10.$$

I	x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)$
				h

0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537
10	1,0	1,2479		

Анық шешім: $y' = \frac{1}{2}xy$, $\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}xdx$, $\ln y = \frac{1}{4}x^2 + C$, $y = e^{\frac{1}{4}x^2} C$, $u(0)=1$,

$S=1$, $y = e^{\frac{x^2}{4}}$, $y(1) = e^{\frac{1}{4}} = 1,2840$.

Differencial теңлемени Эйлер usылында шешiw ushын Paskal tilinde dúzilgen dástúrinіń kórinisi:

```

program eyler; uses crt;
var a,b,y:real; n:integer;
    function f(x,y:real):real;
    begin
        f:=y-2*x*x+4*x-1 {f(x,y)funkciasınıńkórinisi}
    end;
procedure eyler_1(a,b,y:real;n:integer);
var h,x:real; i:integer;
begin
    h:=(b-a)/n;
    x:=a;
    writeln('x=',x:6:2,' y=',y:8:4);

```

Runge-Kutta usılı. U_{S1}

[illegible]

$$y_1(x_0)=y_{10}, y_2(x_0)=y_{20}, \dots, y_n(x_0)=y_{n0} \quad (2)$$

Eger $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ hám $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$ belgilewler kiricek, (1) hám (2) ni

$$Y' = F(x, Y) \quad (3)$$

$$Y(x_0) = Y_0 \quad (4)$$

Bul jerde

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}.$$

(3) teńlemeler sistemasınıń (4) baslanǵısh shártin qanaatlandırırwshı sheshimin Runge-Kutta usılı járdeminde topamız. Bunıń ushın $x_i = a + ih$, $Y_i = F(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ belgilewlerin kiritip, tómendegi esaplawlar izbe-izligi orınlaymız:

$$x_i = a + ih;$$

$$k_1 = F(x_i, Y_i) * h;$$

$$k_2 = F(x_i + h/2, Y_i + k_1/2) * h;$$

$$k_3 = F(x_i + h/2, Y_i + k_2/2) * h;$$

$$k_4 = F(x_i + h, Y_i + k_3) * h;$$

$$Y_{i+1} = Y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6 \quad (5)$$

Bul jerde $h = (b - a) / n$.

Bul esaplawlar izbe-izligi $i = 1$ den $n - 1$ ge shekem tákirarlanıp esaplanadı, hám (5) teńlikte differential teńlemenin $u = u(x)$ juwıq sheshimleri payda boladı.

Misal. Tómendegi

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) + 4x - 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) - 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

differential teńlemeler sistemasın

$$\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

baslanǵısh shártin qanaatlandırırwshı sheshimin Runge-Kutta usılıdan paydalanıp tabıń ($a = 0$, $b = 1$, $n = 10$ dep alıń).

Ssheshiw. Berilgen Koshi masalası usı

$$\begin{cases} y_1(x) = x^2 - x - 1 \\ y_2(x) = -x^2 - x + 1 \end{cases}$$

anıq sheshimge iye. Máselenin anıq hám Runge-Kutta usılına dúzilgen programma járdeminde tabılǵan juwıq sheshimleri tómendegi kestege keltirilgen.

x	$y_1(x)$		$y_2(x)$	
	anıq sheshim	juwıq sheshim	anıq sheshim	juwıq sheshim
0,0	- 1.000000000	- 1.000000000	1.000000000 0	1.000000000
0,1	- 1.090000000	- 1.090000000	0.890000000 0	0.889999166
0,2	- 1.160000000	- 1.160000084	0.760000000 0	0.759998408
0,3	- 1.210000000	- 1.210000253	0.610000000 0	0.609997710
0,4	- 1.240000000	- 1.240000511	0.440000000 0	0.439997058
0,5	- 1.250000000	- 1.250000862	0.250000000 0	0.249996438
0,6	- 1.240000000	- 1.240001315	0.040000000 0	0.039995840
0,7	- 1.210000000	- 1.210001877	- 0.190000000	-0.190004750
0,8	- 1.160000000	- 1.160002561	- 0.440000000	-0.440005343
0,9	- 1.090000000	- 1.090003380	- 0.710000000	-0.710005952
1,0	- 1.000000000	- 1.000004350	- 1.000000000	-1.000006587

Differencial teńlemeler sisteması ushın Koshi máselesin Runge-Kutta usılında sheshiw ushın Paskal tilinde dúzilgen dástúrinıń kórinisi:

```

program rungi; uses crt;
const nurav=2;
type vector2=array[1..nurav] of real;
var
y0,y: vector2;
n,i,j:integer;
a,b,x0,x1,h:real;
procedure pv(x: real; y: vector2; var dy: vector2);
begin
dy[1]:=2*exp(-x)-y[1];
end;
procedure rungikytta(x: real; y0: vector2; var dy: vector2);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vector2;
```

```

begin
pv(x,y0,fc);
for i:=1 to nurav do begin fk1[i]:=h*fc[i];
v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
x:=x+0.5*h;
pv(x,v3,fc);
for i:=1 to nurav do begin fk2[i]:=h*fc[i];
v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
pv(x,v3,fc);
for i:=1 to nurav do begin fk3[i]:=h*fc[i];
v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
x:=x+0.5*h;
pv(x,v3,fc);
for i:=1 to nurav do begin fk4[i]:=h*fc[i];
dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i]) end;
end;
begin clrscr;
write('a='); read(a);
write('b='); read(b);
write('n='); read(n);
h:=(b-a)/n;
x0:=a;
for i:=1 to nurav do
begin
write('y0[' ,i:1,']='); read(y0[i]);
end;
writeln; writeln;
write('x=',x0:5:2);
for i:=1 to nurav do write(' y[' ,i:1,']=',y0[i]:10:6);
writeln;

```

```

x1:=a;
for j:=1 to n do begin
  rungikytta(x1,y0,y);
  x1:=a+j*h;
  write('x=',x1:5:2);
  for i:=1 to nurav do write(' y[' ,i:1,']= ',y[i]:10:6);
  x0:=x1; y0:=y;
  writeln;
end;end.

```

4-§. Shegaralıq shártli ápiwayı differencial teńlemelerdi sheshiw ushın shekli ayırmalar usılları

Ápiwayı progonka usılı. $x \in [a; b]$ aralıqta

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + q(x)y(x) = r(x) \quad (1)$$

differencial teńlemenin

$$\begin{cases} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 \frac{dy(a)}{dx} = \alpha_2 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 \frac{dy(b)}{dx} = \beta_2 \end{cases} \quad (2)$$

shegaralıq shártlerin qanaatlantırıwshı seshimin tabıw talap qilinsin. Bul jerde $q(x)$, $r(x)$ - $[a; b]$ aralıqta berilgen uzliksiz funkciyalar bolıp, α_i, β_i ($i = 0, 1$) - lar $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 = 0$ hám $\beta_0^2 + \beta_1^2 = 0$ shártlerin qanaatlandırsın.

Teorema. Eger $q(x)$, $r(x)$ funkciyalar $[a; b]$ aralıqta eki márte úzliksiz differenciallanıwshı hám $q(x) \leq 0$ bolsa, (1), (2) shegaralıq másele jalǵız $y(x)$ sheshimge iye boladı.

$[a; b]$ aralıqtı $x_i = a + i \cdot h$ ($0 \leq i \leq m, h = (b-a)/m$) noqatlar menen tórga ajıratıp, $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$ belgilewlerin kiritemiz. Ishki

x_i ($1 \leq i \leq m-1$) noqatlar ushın shekli ayırmalardan paydalanıp, $O(h^2)$ anıqlıqta

(1) teńlemenı

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + q_i y_i = r_i \quad (3)$$

(2) shegaralıq shártın bolsa

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \frac{\alpha_1}{2h}(-y_2 + 4y_1 - 3y_0) = \alpha_2 \\ \beta_0 y_m + \frac{\beta_1}{2h}(3y_m - 4y_{m-1} + y_{m-2}) = \beta_2 \end{cases} \quad (4)$$

kóriniste jazıp alamız.

(3) da $y_2 = r_1 h^2 - q_1 h^2 y_1 + 2y_1 - y_0$ ekenligin esapqa alıp, onı (4) ke qoyamız hám

$$\alpha_0 y_0 + \frac{\alpha_1}{2h}(-r_1 h^2 + q_1 h^2 y_1 - 2y_1 + y_0 + 4y_1 - 3y_0) = \alpha_2$$

teńlikti payda etip, onı $y_0 = E_1 y_1 + D_1$

kóriniste jazıp alamız. Bul jerde $E_1 = \frac{2\alpha_1 + \alpha_1 q_1 h^2}{2\alpha_1 - 2\alpha_0 h}$, $D_1 = -\frac{2\alpha_2 h + \alpha_1 r_1 h^2}{2\alpha_1 - 2\alpha_0 h}$.

Dál usıǵan uqsas (3) da $y_{m-2} = r_{m-1} h^2 - q_{m-1} h^2 y_{m-1} + 2y_{m-1} - y_m$ ekenligin esapqa alıp, onı (4) ke qoyamız hám

$$\beta_0 y_m + \frac{\beta_1}{2h}(3y_m - 4y_{m-1} + r_{m-1} h^2 - q_{m-1} h^2 y_{m-1} + 2y_{m-1} - y_m) = \beta_2$$

teńlikti payda etip, onı

$$y_m = Q y_{m-1} + S \quad (5)$$

kóriniste jazıp alamız.

Bul jerde

$$Q = \frac{2\beta_1 + \beta_1 q_{m-1} h^2}{2\beta_1 + 2\beta_0 h},$$

$$S = \frac{h(2\beta_2 - \beta_1 r_{m-1} h)}{2\beta_1 + 2\beta_0 h}.$$

(3) hám (4) birgelikte $y_0, y_1, \dots, y_m$ – ózgeriwshilerni óz ishine alǵan $(m+1)$ sızıqlı algebralıq teńlemeler sistemasın payda etadi.

Eger sistemanı

$$Ay = b$$

matrica kórinisinde anıqlasaq, A úsh diagonalındaǵı elementler nolden basqa matrica (úsh diagonallı matrica) boladı. Bul sistemanı Gauss, Kramer, keri matrica usılları menen sheshiw jaqsı nátiyje bermeydi. Usı sebepli bul sistemanı sheshiw ushın progonka usılınan paydalanamız.

Ulıwma

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = r_i, \quad (1 \leq i \leq m-1) \quad (6)$$

kórinistegi úshdiagonallı teńlemeler sisteması berilgen bolsın. Bul jerde A_i, B_i, C_i lar i ge baylanıslı turaqlılar.

(6) nıń sheshimin

$$y_i = E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1}, \quad (0 \leq i \leq m-1) \quad (7)$$

kóriniste dáliylleybiz. Bul jerde E_1, D_1 - lar belgili, E_i, D_i ($i = 2, 3, \dots, m-1$) - lar bolsa hazirshe belgisiz koefficientlar.

(7) da i ni $i-1$ ga almasırap, $y_{i-1} = E_i y_i + D_i$ ga iye bolamız hám y_i ornına onıń (7) dagı túrleniwın ákelip qoyamız. Natiyjede

$$y_{i-1} = E_i y_i + D_i = E_i (E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1}) + D_i = E_i E_{i+1} y_{i+1} + E_i D_{i+1} + D_i, \quad (1 \leq i \leq m-1) \quad (8)$$

teńlikti payda etemiz. (7), (8) larnı (6) ga alıp barıp qoyıp,

$$A_i E_i E_{i+1} y_{i+1} + A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i E_{i+1} y_{i+1} - C_i D_{i+1} + B_i y_{i+1} - r_i = 0, \quad (1 \leq i \leq m-1)$$

teńlikke iye bolamız. Bul teńlikte y_{i+1} aldındaǵı koefficientlardı hámde saltań aǵzalırdı nolge teńlestirip,

$$A_i E_i E_{i+1} - C_i E_{i+1} + B_i = 0$$

$$A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i D_{i+1} - r_i = 0$$

teńliklerdi payda etemiz. Bul jerden E_i, D_i lardı esaplaw ushın

$$\begin{cases} E_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i E_i}, \\ D_{i+1} = \frac{A_i D_i - r_i}{C_i - A_i E_i}, \end{cases} \quad 1 \leq i \leq m-1 \quad (9)$$

Formulalarğa iye bolamız. (9) tuwrı progonka formulası dep ataladı hám ol E_1, D_1 lardı bilgen jaǵdayda $E_k, D_k, (k=2,3, \dots, m)$ lardı esaplaw imkanın beredi.

E_m, D_m lardıń mánislerin anıqlap, olardı (5) ke qoysaq, Natiyjede

$$y_m = Q(E_m y_m + D_m) + S \text{ yamasa } y_m = \frac{QD_m + S}{1 - QE_m} \text{ ga iye bolamız. } y_m \text{ ni bilgan}$$

jaǵdayda, (7) formula járdeminde $y_k, (k=m-1, m-2, \dots, 0)$ lardıń mánislerini esaplaymız. bul amal kerı progonka dep ataladı.

Teorema (progonka usıldıń turgunligi haqida). Eger $A_i > 0, B_i > 0, C_i \geq A_i + B_i, 1 \leq i \leq m-1; 0 \leq E_1 < 1, 0 \leq Q < 1$ shártler orınlansa progonka usılı turgın boladı.

Misal.

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + (2-x) \cdot y(x) = -\frac{x^4}{3} + \frac{2x^3}{3} - x^2 + 3x + 2$$

differencial teńlemenin

$$\begin{cases} 0,5y(0) + 0,5\frac{dy(0)}{dx} = 1 \\ -3y(1) + 2\frac{dy(1)}{dx} = -3 \end{cases}$$

shegaralıq shártin qanaatlandırıwshı seshimin berilgen programma járdeminde anıqlań.

Tekserip kóriw múmkin, berilgen shegaralıq másele anıq $y(x) = \frac{x^3}{3} + x + 1$

sheshimge iye. Tómendegi kestede mäselenin x tı ayırım túyin noqatlarına sáykes keliwshi juwıq hám anıq sheshimleri mánisleri keltirilgen.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Juwiq sheshim	0,986	0,089	0,193	1,302	1,417	1,540	1,673	1,819	1,978	2,153	2,345
Anıq sheshim	0,000	1,100	1,203	1,309	1,421	1,542	1,672	1,814	1,971	2,143	22,333

Paskal` tilinde progonka usılına dúzilgen programma teksti:

program progonka;

const a1=0; b1=1; m=10; h=(b1-a1)/m;

alfa0=0.5; alfa1=0.5; alfa2=1.0;

betta0=-3.0; betta1=2.0; betta2=-3.0;

type vektor=array[0..m] of real;

var

x,y,a,b,c,r,d,e:vektor;

i:integer;

q,s,g1,g2:real;

function fq(t:real):real;

begin

fq:=2-t { q(x) funkciyasınıńberiliwi }

end;

function fr(t:real):real;

begin

*fr:=-sqr(sqr(t))/3+2*t*sqr(t)/3-sqr(t)+3*t+2 { r(x) funkciyasınıńberiliwi }*

end;

begin

for i:=0 tom do begin

*x[i]:=a1+i*h; a[i]:=1.0; b[i]:=1.0;*

*c[i]:=2-fq(x[i])*sqr(h); r[i]:=fr(x[i])*sqr(h)*

end;

g1:=2(alfa1-alfa0*h); e[1]:=alfa1*(2+fq(x[1])*sqr(h))/g1;*

```

d[1]:=-h*(2*alfa2+alfa1*fr(x[1])*h)/g1;
for i:=1 to m-1 do begin
  e[i+1]:=b[i]/(c[i]-a[i]*e[i]); d[i+1]:=(a[i]*d[i]-r[i])/(c[i]-a[i]*e[i]);
end;
g2:=2*(betta1+betta0*h); q:=betta1*(2+fq(x[m-1])*sqr(h))/g2;
s:=(2*h*betta2-betta1*fr(x[m-1])*sqr(h))/g2;
y[m]:=(q*d[m]+s)/(1-q*e[m]);
for i:=m-1 downto 0 do y[i]:=e[i+1]*y[i+1]+d[i+1];
for i:=0 to m do writeln('y[' ,i:1,']=' ,y[i]:6:4);
end.

```

Differencial progonka usılı. Differencial progonka usılı algoritmin tómendegi berilgen mısalda kórip shıǵamız. Usı

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = F(x) \quad (10)$$

differencial teńlemenin

$$\begin{cases} a_{11}y'(0) + a_{12}y(0) = b_1 \\ a_{21}y'(1) + a_{22}y(1) = b_2 \end{cases} \quad (11)$$

shegaralıq shártlerin qanaatlandıırıwshı seshimin tabıw talap qilinsin. Bul jerde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ – turaqlılar; $A(x), B(x), F(x)$ – $[0,1]$ aralıqta Berilgen uzliksiz funkciyalar. $y(x)$ – belgisiz funkciya.

Differencial progonka usılına kóre (10), (11) shegaralıq másele seshimin

$$\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x) \quad (12)$$

kóriniste tasvirlaymız. bul erdagi $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ lar xozircha belgisiz funkciyalar. (12) ni (10) ga alıp barıp qóyamız hám $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ larga qarata tómendegi

$$\begin{cases} \alpha'(x) = \alpha(x)A(x) - \beta(x) \\ \beta'(x) = \alpha(x)B(x) \\ \gamma'(x) = -\alpha(x)F(x) \end{cases} \quad (13)$$

birinshi tártipli differencial teńlemeler sistemasın payda etemiz.

$$a_{11}y'(0) + a_{12}y(0) = b_1 \text{ hám } \alpha(0)y'(0) + \beta(0)y(0) = \gamma(0)$$

tengliklardan

$$\alpha(0) = a_{11}, \quad \beta(0) = a_{12}, \quad \gamma(0) = b_1 \quad (14)$$

ni payda etemiz. (13), (14) Koshi máselesin $[0,1]$ aralıqta sheship, $\alpha(1)$, $\beta(1)$, $\gamma(1)$ larni aniqlaymiz. Ádette bul usıl tuwrı progonka usılı dep ham ataladı.

$$a_{21}y'(1) + a_{22}y(1) = b_2 \text{ hám } \alpha(1)y'(1) + \beta(1)y(1) = \gamma(1)$$

tengliklardan

$$y(1) = \frac{b_2\alpha(1) - a_{21}\gamma(1)}{a_{22}\alpha(1) - a_{21}\beta(1)}, \quad y'(1) = \frac{b_2\beta(1) - a_{22}\gamma(1)}{a_{21}\beta(1) - a_{22}\alpha(1)} \quad (15)$$

ga iye bolamız.

(10), (15) Koshi máselesin $[0,1]$ aralıqta sheship, $y(x)$ funkciyasınıń sanlı mánislerini payda etemiz. bul usıl kerı progonka usılı delinedi.

Mısalı: Tómenдеgi

$$y''(x) + (x+1)y'(x) + (x+3)y(x) = x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 5x + 4 \quad (16)$$

differencial teńlemenin

$$\begin{cases} y'(0) + y(0) = 0 \\ y'(1) - y(1) = 2 \end{cases} \quad (17)$$

shártlerin qanaatlandırıwshı seshimin differencial progonka usılına dúzilgen programma járdeminde tabıń.

Tekserip kóriw múmkin, berilgen shegaralıq másele dál

$$y(x) = x^3 + x^2 - x + 1$$

sheshimge iye. Tómenдеgi kestede shegaralıq máselenin anıq hám differencial progonka usılıdan paydalanıp tabılğan juwıq sheshimleri keltirilgen. Kestedan kórinib turıbdiki, differencial progonka usılı joqarı anıqlıqqa iye bolıwı menen birge, ol shegaralıq shártlerin anıq esapqa aladı.

x	Dál sheshim	Juwıq sheshim

0.0	1.000000	1.000121
0.1	0.911000	0.911107
0.2	0.848000	0.848091
0.3	0.817000	0.817073
0.4	0.824000	0.824054
0.5	0.875000	0.875035
0.6	0.976000	0.976015
0.7	1.133000	1.132997
0.8	1.352000	1.351980
0.9	1.639000	1.638965
1.0	2.000000	2.000000

Shegaralıq máselelerdi differencial progonka usılıda sheshiwge Paskal' tilinde dúzilgen programma teksti:

```

program difprogon; uses crt;
const a11=1; a12=1; a21=1; a22=-1; b1=0; b2=2;
      ndx=11; dx=0.1;
type vek=array[1..ndx] of real;
type vek1=array[1..2] of real;
type vek2=array[1..3] of real;
var
y0,y,yt: vek1; alf0,alf: vek2; px: vek; zlx,h:real;
i,nx:integer;
function fa(z: real): real;
begin
fa:=z+1; { A(x) – funkciyasınıń kórinisi }
end;
function fb(z: real): real;
begin
fb:=z+3; { B(x) – funkciyasınıń kórinisi }

```

```

end;
function ff(z: real): real;
begin
ff:=z*z*z*z+7*z*z*z+7*z*z+5*z+4;{ F ( x )-funkciyasının kórinisi}
end;
procedure pv(x: real; y: vek2; var dy: vek2);
begin
dy[1]:=fa(x)*y[1]-y[2];
dy[2]:=y[1]*fb(x);
dy[3]:=y[1]*ff(x)
end;

procedure rungikytta1(x: real; y0: vek2; var dy: vek2);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek2;
begin
pv(x,y0,fc);
for i:=1 to 3 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
x:=x+0.5*h;
pv(x,v3,fc);
for i:=1 to 3 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
pv(x,v3,fc);
for i:=1 to 3 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
x:=x+0.5*h;
pv(x,v3,fc);
for i:=1 to 3 do begin fk4[i]:=h*fc[i];
dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i]) end;
end;

```

```

procedure pv1(x: real; y: vek1; var dy: vek1);
begin
    dy[1]:=y[2];
    dy[2]:=-y[2]*fa(x)-y[1]*fb(x)+ff(x);
end;

procedure rungikytta2(x: real; y0: vek1; var dy: vek1);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek1;
begin
    pv1(x,y0,fc);
    for i:=1 to 2 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i]
    end;
    x:=x+0.5*h; pv1(x,v3,fc);
    for i:=1 to 2 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i]

    end;
    pv1(x,v3,fc);
    for i:=1 to 2 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+fk3[i]
    end;
    x:=x+0.5*h; pv1(x,v3,fc);
    for i:=1 to 2 do begin fk4[i]:=h*fc[i];
    dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i])
    end;
    end;

begin clrscr;
    for i:=1 to ndx do px[i]:=(i-1)*dx;
    alf0[1]:=a11; alf0[2]:=a12; alf0[3]:=b1;
    for nx:=2 to ndx do begin zlx:=px[nx-1]; h:=dx;
    rungikytta1(zlx,alf0,alf);

```

```

for i:=1 to 3 do alf0[i]:=alf[i];
end;
y0[1]:=(b2*alf[1]-a21*alf[3])/(a22*alf[1]-a21*alf[2]);
y0[2]:=(b2*alf[2]-a22*alf[3])/(a21*alf[2]-a22*alf[1]);
writeln('x=',px[ndx]:4:2,' yy===',y0[1]:7:4);
for nx:=ndx downto 2 do begin zlx:=px[nx]; h:=-dx;
  rungikytta2(zlx,y0,y);
  writeln('x=',(zlx+h):4:2,' yy=',y[1]:7:4);
for i:=1 to 2 do y0[i]:=y[i];
  end; end.

```

II-BAP. KORREKT EMES MÁSELELERDI MODELLESTIRIW MISALLARI

1-§. Birinshi tártipli differencial operator teńleme ushın qoyılǵan Koshi máselesi

Meyli, $u(t)$ funkciya t skalyar argumenttiń funkciyası bolıp, ol mánislerin N - Gilbert keńisliginde qabıllasın, $f(t)$ hám t skalyar argumenttiń funkciyası bolıp, ol F - gilbert keńisliginde mánislerin qabıllasın. A-opertor

$$A : H \rightarrow F$$

Anıqlama 5. $\frac{du}{dt} = Au + f$ kórinisindegi opertor tip koefficientli teńleme birinshi tártipli differencial-operator teńleme dep ataladı.

Usı Koshi máselesin qarap ótemiz

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f & (4) \\ u(0) = u_0 & (5) \end{cases}$$

Bul jerde biz A-opertordı simmetriyalı hám oń operator dep esaplaymız, yaǵnıy qálegen $u, v \in D(A)$ ushın $(Au, v) = (u, Av)$; $(Au, u) \geq 0$

Anıqlama 6. Eger $u(t) : [0, T] \rightarrow H$ funkciya tómendegi shártlerdi qanaatlandırsa, yaǵnıy

A) $0 \leq t \leq T$ da $u \in C[0, T]$, $u \in D(A)$, $f \in D(A)$;

B) $0 \leq t \leq T$ da u anıqlanǵan;

C) $\forall t \in [0, T]$ da $u(t)$ funkciya (4)-(5) teńlemenini qanaatlandırsa, onda ol (4)-(5)

Koshi máselesiniń sheshimi dep ataladı.

(4)-(5) Koshi máselesi, ulıwma alǵanda, korrekt emes qoyılǵan.

Aldın bir tekli teńlemenini kórip shıǵamız, yaǵnıy

$$\frac{du}{dt} = Au$$

teńlemenini kórip shıǵamız ($f = 0$).

Teorema 1. $u(t)$ funkciya (4)-(5) máseleniń sheshimi bolıp, $f = 0$ bolsın.

Onda tómendegi interpoliacion tiptegi teńsizlik orınlı

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}} \quad (6)$$

Dáliyleniwi.

Meyli,

$$\varphi = (u, u)$$

bolsın.

Onda

$$\varphi' = ((u, u))' = 2(u', u);$$

$$\begin{aligned} \varphi'' &= 2(u', u') + 2(u, u'') = 2(u', u') + 2(u, Au') \\ &= 2(u', u') + 2(Au, u') = 2(u', u') + 2(u', u') = 4(u', u'). \end{aligned}$$

Endi

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

dep alsaq, onda

$$\psi' = \frac{\varphi'}{\varphi}$$

$$\psi'' = \frac{\varphi'' \varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2} = \frac{4(u', u')(u, u) - 4(u', u)^2}{(u, u)^2} \geq 0$$

Koshi-Bunyakovskiý teńsizligi boyınsha jaza alamız.

Bunnan

$$\psi(t) \leq (\psi(0)) \frac{T-t}{T} + (\psi(T)) \frac{t}{T}$$

yagniy

$$\ln \varphi(t) \leq (\ln \varphi(0)) \frac{T-t}{T} + (\ln \varphi(T)) \frac{t}{T}$$

Bul teńsizlikti potenciallyap

$$\varphi(t) \leq (\varphi(0))^{\frac{T-t}{T}} (\varphi(T))^{\frac{t}{T}}$$

yagniy

$$\|u\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}}$$

teńsizligine iye bolamız.

Usını dáliyллеw talap etilgen edi.

Meyli,

$$M = \{u \mid \|u(T)\| \leq m\}$$

bolsin.

Teorema 2. (4)-(5) Koshi máselesi sheshimi M kóplikte birden-bir hám baslanǵısh berilgenlerge úzliksiz bylanıslı.

Dáliylleniwi. u_1 hám u_2 (4)-(5) Koshi máselesiniń eki sheshimi bolsın. Onda (6) teńsizligi boyınsha

$$u = u_1 - u_2$$

funkciyası ushın

$$\|u\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}} = 0$$

$$(u(0)) = u_1(0) - u_2(0) = 0$$

bunnan

$$u_1 - u_2 = 0$$

yagniy

$$u_1 = u_2$$

ekenı kelip shıǵadı.

Endi

$$\|u_1 - u_2\| \leq \varepsilon$$

bolsın. Onda (6) teńsizligi boyınsha

$$\|u\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}} \leq \varepsilon^{\frac{T-t}{T}} m^{\frac{t}{T}}$$

ekenligin tabamız.

Bul teńsizlik $m < \infty$ bolǵanlıǵı ushın berilgen másele sheshiminiń ornıqlılıǵın, yaǵnıy baslanǵısh berilgenlerge úzliksiz baylanıslılıǵın kórsetedi.

Teorema dáliyllendi.

Endi bir tekli bolmaǵan jaǵday ushın Koshi máselesin kórip shıǵamız.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f & (7) \\ u(0) = 0 & (8) \end{cases}$$

Bul jerde

$$f \neq 0$$

Uliwma aytqanda

$$u(0) = 0$$

dep alsaq boladı, sebebi eger

$$u(0) = g$$

funkciyası ushın

$$\frac{dv}{dt} = Av = f$$

hám

$$v(0) = u(0) - g = g - g = 0$$

boladı.

Tómendegi teorema orınlı.

Teorema 3. $u(t)$ funkciyası (7)-(8) máselesiniń sheshimi hám

$$s > 0$$

bolsa, onda

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \frac{|(u(T), Au(T))|}{s} + \frac{e^{sT^2}}{s} \int_0^T \|f\|^2 dt$$

Bul teorema másele sheshiminiń Karleman túrindegi bahası dep ataladı.

Dáliylleniwi.

Meyli,

$$\varphi(t) = (T - t)^2$$

bolsın.

Onda

$$\varphi' = -2(T - t) < 0, \varphi''(t) = 2 > 1$$

Jańa ózgeriwshi kiritilip tómendegini alamız, yaǵnıy

$$u = e^{-s\varphi} v$$

bolsın, bul jerde

$$s > 0$$

Onda

$$u' = e^{-s\varphi} (v' - s\varphi'v)$$

bolǵanlıǵı ushın

$$\begin{aligned}
\int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt &= \int_0^T e^{2s\varphi} \|u' - Au\|^2 dt = \int_0^T e^{2s\varphi} \|e^{-s\varphi}(v' - s\varphi'v) - Ae^{-s\varphi}v\|^2 dt = \\
\int_0^T \|v' - s\varphi' - Av\|^2 dt &= \int_0^T \|v\|^2 dt - 2 \int_0^T s\varphi(v', Av) dt + \int_0^T \|s\varphi'v\|^2 dt - 2 \int_0^T (v', Av) dt \geq \\
- 2 \int_0^T s\varphi'(v', v) dt - 2 \int_0^T (v', Av) dt &= \int_0^T s\varphi'' \|v\|^2 dt - s\varphi' \|v\|^2 \Big|_0^T - (v, Av) \Big|_0^T = \\
- s \int_0^T \varphi'' \|v\|^2 dt - s\varphi'(T)v(T)^2 - (v(T), Av(T)) &\geq s \int_0^T \varphi'' \|v\|^2 dt - (v(T), Av(T))
\end{aligned}$$

Bul jerden

$$s \int_0^T \varphi'' \|v\|^2 dt \leq |(v(T), Av(T))| + \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt$$

Biraq,

$$v = e^{s\varphi} u$$

Bolgani ushin

$$\begin{aligned}
s \int_0^T e^{2s\varphi} \|u\|^2 dt &\leq e^{2s\varphi(T)} |(u(T), Au(T))| + \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt \\
s \int_0^T \|u\|^2 dt &\leq |(u(T), Au(T))| + e^{sT^2} \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt
\end{aligned}$$

yagniy

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \frac{|(u(T), Au(T))|}{s} + \frac{e^{sT^2}}{s} \int_0^T \|f\|^2 dt$$

Usını dáliyillew talap etilgen edi.

Teorema 4. $u(t)$ funkciya (7)-(8) máseleniń sheshimi hám $f = 0$

bolsa, onda bul máseleniń sheshimi birden-bir.

Dáliyleniwi. u_1 hám u_2 (7)-(8) máselesiniń eki sheshimi bolsın.

Onda

$$u = u_1 - u_2$$

Usı másele sheshimi boladı

$$\begin{cases} u' - Au = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Teorema 3 boyınsha

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \frac{|(u(T), Au(T))|}{s}$$

Sońǵı teńsizlikte

$$s \rightarrow \infty$$

dep alsaq, onda

$$\int_0^T \|u\|^2 dt = 0$$

yaǵnıy

$$u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Demek, másele sheshimi birden-bir eken.

Teorema dálillendi.

2-§. Ózgeriwshi-operatorlı birinshi tártipli differencial teńleme

Meyli,

$$\frac{du}{dt} = A(t)u \quad (9)$$

teńleme berilgen bolsın, bunda $u(t)$ funkciya t skalyar argumenttiń funkciyası bolıp, ol mánislerin H -Gilbert keńisliginde qabıllasın, $f(t)$ hám t skalyar argumenttiń funkciyası bolıp, ol F – Gilbert keńisliginde mánislerin qabıllasın. A -operator

$$A(t) : H \rightarrow F$$

Teorema 5. Eger $A(t)$ operatorlar semayası $[0, T]$ de úzliksiz differenciallawshı bolıp,

$$\forall t \in [0, T] \text{ hám } y \in X$$

ushın

$$[A'(t)y, y] \geq 2a(ay, y) + 2b(y, y)$$

teńsizligi orınlasa, onda

$$\|u\| \leq \|u(T)\|^{\omega(t)} \|u(0)\|^{1-\omega(t)} c(t)$$

bul jerde

$$\omega(t) = \frac{1 - e^{-at}}{1 - e^{-aT}};$$

$$c(t) = \exp\left(\frac{b(1 - e^{-at})T - (1 - e^{-aT})t}{1 - e^{-aT}}\right)$$

Dálilleniwi. Aldın tómendegi lemmanı dálilleyimiz.

Lemma 1. Eger $\alpha(t) \in C^2[0, T]$ ushın

$$\alpha''(t) + a\alpha'(t) + b \geq 0,$$

(bul jerde $a = \text{const}$, $b = \text{const}$) bolsa, onda

$$\alpha(t) \leq (1 - \omega(t))\alpha(0) + \omega(t)\alpha(T) + c(t)$$

teńsizligi orınlı boladı.

Lemmanı dálilleyimiz.

$\beta(t)$ arqalı

$$\beta''(t) + a\beta'(t) + b = 0 \quad (10)$$

teńlemenin

$$\beta(0) = \alpha(0), \quad \beta(T) = \alpha(T)$$

shártlerini qanaatlandıratuǵın sheshimi bolsın. Onda $\forall t \in [0, T]$ ushın

$$\alpha(t) \leq \beta(t)$$

boladı.

(10) teńlemenin sheshimi

$$\beta(t) = C_1 + C_2 e^{-at} - \frac{b}{a} t$$

bolıp tabıladı.

$$\beta(0) = \alpha(0), \quad \beta(T) = \alpha(T)$$

shártlerden

$$C_1 = \frac{\alpha(t) - \alpha(0)e^{-aT} + \frac{b}{a}t}{1 - e^{-aT}}; \quad C_2 = \frac{\alpha(0) - \alpha(T) - \frac{b}{a}T}{1 - e^{-aT}};$$

Demek,

$$\beta(t) = \omega(t)\alpha(t) + (1 - \omega(t))\alpha(0) + c(t),$$

yagniy

$$\alpha(t) \leq \omega(t)\alpha(t) + (1 - \omega(t))\alpha(0) + c(t)$$

Endi teoremanı dälilleyimiz.

Meyli,

$$\varphi = (u, u)$$

bolsın.

Onda

$$\begin{aligned}\varphi' &= ((u, u))' = (u', u) = 2(Au, u) = 2((A^* + A)u, u), \\ \varphi'' &= 2(u', u) + 2(u, u'') = 2(u', u') + 2(u, Au') = \\ &= 2((A^* + A)u, (A^* + A)u) + 2(A'u, u).\end{aligned}$$

Endi

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

dep alsaq,

onda

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{\varphi'}{\varphi}; \\ \psi'' &= \frac{\varphi''\varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2} = \\ &= \frac{((A + A^*)u, (A + A^*)u)(u, u) - ((A + A^*)u, u)^2}{\varphi^2} \geq \\ &\geq \frac{(A'u, u)}{(u, u)} \geq -a\psi'(t) - b\end{aligned}$$

yagniy

$$\psi''(t) + a\psi'(t) + b \geq 0$$

Bul jerden lemma boyinsha

$$\|u\| \leq \|u(T)\|^{\omega(t)} \|u(0)\|^{1-\omega(t)} c(t)$$

ekenligin tabamiz.

3-§. Regularizatsiya metodi menen juwıq sheshimdi tabıw

Regularizatsiya metodi akademik A. N. Tixonov tárepinen kiritilgen.

Meyli, Adamar boyınsha qandayda bir korrekt emes qoyılğan matematikalıq fizika maselesi berilgen bolsın.

Anıqlama 7. Eger A) qálegen $\alpha > 0$ de maseleler semyası korrekt qoyılğan.

B) ger maǵlıwmat sonday etip berilip, korrekt emes masele sheshimi bar bolsa, onda $\alpha > 0$ da maseleler semyası sheshimler izbe-izligi berilgen masele sheshimine jaqınlassa, onda maseleler semyası berilgen maselege qarata regularizatsiyalawshı semya dep ataladı.

Kóbinese, α sıpatında natural sanlarda alınıuı múmkin.

$$Ax = f, \quad x \in X, \quad f \in F,$$

bul jerde X, F – banax kenislikleri, A – uziliksiz operator bolsın.

B_n -sızıqlı operatorlar semyasın kórip shıǵamız.

$$B_n \div F \rightarrow X$$

Anıqlama 3. Eger A) qalegen $n \geq 0$ de, B_n – úziliksiz, B) qalegen $x \in X$ ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n Ax = x$$

bolsa, onda $\{B_n\}$ operatorlar semyası.

$$Ax = f$$

teńlemesi ushın regularizatsiyalawshı semya dep ataladı.

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (11)$$

teńleme berilip bolıp, onda $-A$ - simmetriyalı xám noqatlı spektrge iye bolsın, yagnıy A -operatordıń ortonormallastırılğan

$$\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

menshikli funkciyalar sisteması xám menshikli mánisleri

$$\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

bar boladı. (bul jerde λ_k ósiw tártibinde jaylasqan bolsın.)

Bul shártlerde

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k \varphi_k, u_k = (u, \varphi_k), k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty \quad (12)$$

(12) teńlemeden

$$\frac{du_k}{dt} = \lambda_k u_k(t), k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$$

Baslanǵısh shártten

$$u(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_k(0) \varphi_k, u_k(0) = (u(0), \varphi_k)$$

Demek

$$u_k(t) = u_k(0) e^{\lambda_k t}$$

Eger $|\lambda_k| \leq C$ bolsa, onda teńleme ushın Koshi maselesi korrekt boladı.

$$\|u(t)\| \leq e^{\lambda t} \|u(0)\|$$

Eger $\{\lambda_k\}$ izbe-izligi joqarıdan shegaralanbaǵan bolsa, onda Koshi maselesi korrekt emes boladı, yaǵnıy qalegen

$$\varepsilon > 0, t > 0, \mu > 0$$

ushın

$$\|u(0)\| \leq \varepsilon$$

bolıp, $\|u(t)\| \geq \mu$ boladı.

Eger $B_n(t)$ arqalı tómendegi formula menen aniqlanǵan

$$B_n(t)u_0 = \sum_{-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k$$

Operatorlar izbe-izligin alsaq, ol (11) tenlemege qoyılǵan Koshi máselesi ushın regularizatciyalawshı operatorlar semyası bolıp, tabıladı.

Dálilleniwi

$$A) B_n(t)u_0 = \sum_{-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k - \text{uzliksiz operatorlar}$$

$$B) \|u - B_n(t)u_0\| = \left\| \sum_{-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k - \sum_{-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k \right\| = \left\| \sum_{-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k \right\| \rightarrow 0$$

Misal.

Meyli $D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi\}$ oblastta

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{n} \sin nx \end{cases}$$

aralas máselesi berilgen bolsın.

Bul teńlemenin sheshimi

$$u(x,t) = \frac{1}{n} \sin nx e^{n^2 t}$$

ekenligin tabamiz.

Tekseriw.

$$u(x,t) = \frac{1}{n} \sin nx e^{n^2 t} = n \sin nx e^{n^2 t}; \quad u_{xx} = -n \sin nx e^{n^2 t}; \quad u_t + u_{xx} = 0$$

Bizge belgili, $\forall \varepsilon > 0, C \geq 0$ sanları ushın sonday n tabılıp, onda barlıq $t \geq 0$ ushın tómendegi tensizlikler orınlı

$$\|u(x,0)\| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\|u(x,t)\| = \frac{1}{n} e^{n^2 t} > C$$

yagnıy bul másele korrekt emes qoyılğan eken. Sonın ushın bul másele Tixonov boyınsha korrektlikke izertlenedi.

Bul jerde A operator tómendegishe anıqlanadı.

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

A operatorı simmetriyalı ekenligin dálilleymiz.

$$\begin{aligned} (Au, v) &= -\int_0^\pi u_{xx} v dx = -v du_x = -u_x v|_0^\pi + \int_0^\pi u_x v_x dx = \int_0^\pi u_x v_x dx = \\ &= u v_x|_0^\pi - \int_0^\pi u v_{xx} dx = -\int_0^\pi u v_{xx} dx = (u, Av) \end{aligned}$$

yagniy

$$A = A^*$$

Meyli

$$\varphi(t) = \int_0^{\pi} u^2 dx$$

bolsin.

Onda

$$\varphi'(t) = 2 \int_0^{\pi} u u dx, \quad \varphi''(t) = 2 \int_0^{\pi} u''^2 dx + 2 \int_0^{\pi} u u'' dx$$

Biraq

$$2 \int_0^{\pi} u u'' dx = 2 \int_0^{\pi} u'^2 dx$$

Demek,

$$\varphi'(t) = 4 \int_0^{\pi} u'^2 dx$$

Endi

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

bolsin.

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \frac{\varphi'}{\varphi}; \quad \psi''(t) = \frac{\varphi'' \cdot \varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2} = \\ &= \frac{4 \int_0^{\pi} u'^2 dx \cdot \int_0^{\pi} u^2 dx - 4 \left(\int_0^{\pi} u' u dx \right)^2}{\left(\int_0^{\pi} u^2 dx \right)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

Bul jerden

$$\psi(t) \leq \psi(0) \frac{T-t}{T} + \psi(T) \frac{t}{T}$$

yagniy

$$\int_0^{\pi} u^2 dx \leq \left(\int_0^{\pi} u^2(x, 0) dx \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_0^{\pi} u^2(x, T) dx \right)^{\frac{t}{T}}.$$

Demek, tómendegi teorema orınlı.

Teorema 7. Meyli,

$$\int_0^{\pi} u^2(x, 0) dx \leq \varepsilon, \quad \int_0^{\pi} u^2(x, T) dx \leq m$$

bolsin.

Onda

$$\int_0^{\pi} u^2 dx \leq \varepsilon^{\frac{T-t}{T}} m^{\frac{t}{T}}$$

Bul teoremadan berilgen másele sheshiminiń birden-birligi ham ornıqlılıǵı kelip shıǵadı.

4-§. Ekinshi tártipli differencial operator teńlemeler ushin Koshi máselesi

Meyli, $u(t)$ funkciya t skalyar argumentiń funkciyasi bolip, ol máselerin H-Gilbert keńisliginde qabillasın, $f(t)$ hám t skalyar argumenttiń funkciyasi bolip, ol F-Gilbert keńisliginde mánislerin qabillasın. A-operator

$$A: H \rightarrow F.$$

Anıqlama 6. $\frac{d^2 u}{dt^2} = Au + f$ kórinisdegi operator tip koefficientli teńleme ekinshi tártipli differencial- operator teńleme dep ataladı.

Usi Koshi máselesin qaraymız

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = Au \\ u'(0) = u_1, u(0) = u_0 \end{cases} \quad (13)$$

$$(14)$$

Bul jerde biz A-operator simmetiyali hám oń operator dep esaplaymız, yaǵniy qálegen $u, v \in D(A)$ ushin $(Au, v) = (u, Av)$; $(Au, u) \geq 0$.

Anıqlama 7. Eger $u(t): [0, T] \rightarrow H$ funkciyasi tómendegi shártlerdi qanaatlandırsa, yaǵniy

A) $0 \leq t \leq T$ da $u \in C^2[0, T]$, $u_1, u \in D(A)$, $f \in D(A)$

B) $0 \leq t \leq T$ da u_1 aniqlanǵan;

C) $\forall t \in [0, T]$ da $u(t)$ funkciya (13)-(14) teńlemenı qanaatlandırsa, onda ol (13)-(14) Koshi máselesiniń sheshimi dep ataladı.

(13)-(14) Koshi máselesi, uliwma alǵanda, korrekt emes qoyılǵan.

Teorema 2. $U(t)$ funkciya (13)-(14) máseleniń sheshimi bolsa, onda tómendegi interpolýacion tiptegi teńsizlik orinli

$$\begin{aligned} \|u(t)^2\| &\leq \exp(2t(T-t)) \left(\|u(0)\|^2 + |a| \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\|u(T)\|^2 + |a| \right)^{\frac{t}{T}} - |a| \\ a &= \frac{1}{2} ((Au(0), u(0)) - (u'(0), u'(0))) \end{aligned} \quad (15)$$

Dálilleniwi. Meyli,

$$\varphi = (u, u)$$

bolsin.

Onda

$$\begin{aligned} \varphi' &= ((u, u))' = 2(u, u); \\ \varphi'' &= 2(u', u)' = 2(u', u) + 2(u, Au) \end{aligned}$$

Sonin ushin

$$\varphi''(t) = 4(u', u') + 4a$$

Endi

$$\psi(t) = \ln(\varphi(t) + |a|)$$

dep alsaq

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{\varphi'}{\varphi}; \\ \varphi'' &= \frac{\varphi''(\varphi + |a|) - (\varphi')^2}{(\varphi + |a|)^2} \geq -4 \end{aligned}$$

-Koshi-Bunyakovskiy teńsizligi boyınsha.

Bul jerden

$$\psi(t) \leq \psi(0) \frac{T-t}{T} + \psi(T) \frac{t}{T} + 2t(T-t),$$

yagniy

$$\ln \varphi(t) \leq \ln(\varphi(0) + |a|) \frac{T-t}{T} + \ln(\varphi(T) + |a|) \frac{t}{T} + \ln(\exp(2t(T-t)))$$

Bul teńsizlikti potenciýallap

$$\|u(t)^2\| \leq \exp(2t(T-t)) \left(\|u(0)\|^2 + |a| \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\|u(T)\|^2 + |a| \right)^{\frac{t}{T}} - |a|$$

teńsizligine iye bolamiz.

5-§ . Ekinshi tártipli barliq koefficientleri operator bolğan teńleme ushin qoyılğan Koshi máselesi

Usi Koshi máselesin qaraymiz

$$\begin{cases} B \frac{d^2 u}{dt^2} = Au & (16) \\ u(0) = u_1, u'(0) = u_0 & (17) \end{cases}$$

Teorema 8.

Eger $\forall u \in D(A)$ usin $A = A^*$, $(Au, u) \geq \lambda(u, u)$, $B = B^*$, $\exists B^{-1}$ bolsa, onda (16)-(17) másele sheshimi ushin tómendegi teńsizlik orinli

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \exp(2t(T-t)) \left(\|u(0)\|^2 + \|a\| \right)^{1-\frac{t}{T}} \left(\|u(t)\|^2 + |a| \right)^{\frac{t}{T}} - |a| \\ a &= \frac{1}{2} \left((Au(0), B^{-1}Au(0)) - (Au'(0), u'(0)) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Dálilleniwi.

Meyli,

$$\varphi = (Au, u)$$

bolsin.

Onda

$$\begin{aligned} \varphi' &= ((u, u))' = 2(Au', u); \\ \varphi'' &= 2(Au', u') + (u, Au'') = 2(Au', u') + 2(Au, B^{-1}Au) \end{aligned}$$

Biraq

$$\frac{d}{dt}(Au'', u') + 2(Au', u'') = (B^{-1}Au, Au) + (Au', B^{-1}Au) = \frac{d}{dt}(Au, B^{-1}Au).$$

Sonin ushin

$$\varphi''(t) = 4(u', u') + 4a.$$

Bul jerde

$$a = \frac{1}{2} \left((Au(0)B^{-1}A(0)) - (Au'(0), u'(0)) \right).$$

Endi

$$\psi(t) = \ln(\varphi(t) + |a|)$$

Dep alsaq, onda

$$\psi' = \frac{\varphi'}{\varphi};$$

$$\psi'' = \frac{\psi''(\varphi + |a|) - (\varphi')^2}{(\varphi + |a|)^2} \geq -4$$

Koshi-Bunyakovskiy teńsizligi boyınsha.

Bul jerden

$$\psi(t) \leq \psi(0) \cdot \frac{T-t}{T} + \psi(T) \cdot \frac{t}{T} + 2t(T-t),$$

yagniy

$$\ln \varphi(t) \leq (\ln \varphi(0) + |a|) \cdot \frac{T-t}{T} + (\ln \varphi(T) + |a|) \cdot \frac{t}{T} + \ln(\exp(2t(T-t)))$$

Bul teńsizlikti potencyallap

$$\|u\|^2 \leq \exp(2t(T-t)) \left(\|u(0)\|^2 + |a| \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\|u(T)\|^2 + |a| \right)^{\frac{t}{T}} - a,$$

teńsizligine iye bolamiz.

Misal.

Meyli, $Q = \{(-1 < x < 1) \times (0, T)\}$ oblasta aralas teńlemege qoyılǵan tómendegi shegaralıq másele berilgen bolsın.

$$\begin{cases} \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = f(x), u_1(0, x) = g(x), -1 \leq x \leq 1 \\ u(t, -0) = u(t, 1) = 0, 0 \leq t \leq T \\ u(t, -0) = u(t, +0), u_x(t, -0) = u_x(t, +0). \end{cases}$$

Bul jerde $H = L_2(-1, 1)$, al A operator bolsa tómendegishe aniqlanadı:

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0$$

B operator retinde $\operatorname{sign}(x)$ funkciyasına kóbeytiwdi qaraymız. Teorema boyınsha bul máseleńiń sheshimi birden-bir hám orniqlili.

Juwmaqlaw

Usi qollanba matematikaliq hám kompyuterli modellestiriw máselelerine arnalğan bólip, ol kirisiw, eki bab, juwmaqlaw hám paydalanılğan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Qollabbaniń I-babında matematikaliq hám kompyuterli modellestiriw tiykarlari kórip shıǵılğan. Matematikaliq hám kompyuterli modellestiriw real obyekt, yaǵniy proseslerdi úyreniwdiń eń nátiyjeli hám universal izertlew usullariniń biri sipatında payda boldi hám házirgi kúnde ilim hám texnika, xalq-xojalığı hám basqada tarawlarda ushirasatuǵın kóplegen ámeliy máseleler matematikaliq hám kompyuterli modellestiriw tiykarında tabisli sheshilmekte.

Qollanbaniń II-babında korrekt emes maselelerdi modellestiriw misallari kórip shıǵılğan. Korrekt emes máseleler teoriyasına akademikler A.N.Tixonov hám M.M.Lavrent'evler tiykar salğan. Korrekt emes máseleler teoriyasında kóbinese máseleler abstrakt Gilbert keńisliginde izertlenip, birden-birlik hám ornıqlılıq teoremlari dálillenedi. Máseleniń sheshimi bolsa, apriori bar dep esaplanadı. Másele sheshiminiń barlıǵı máseleniń fizikalıq mazmun ınan kelip shıǵadı. Bunda logarifmikaliq dóneslik hám Karleman túrdegi bahalardan paydalanıladı. Akademik A.N.Tixonovtıń regulyarizaciya metodı menen juwıq sheshim tabılğan. Tiyisli misallar kórip shıǵılğan.

Adebiyatlar

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.:Наука, 1980, 285 с.
2. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991, 331 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 285 с.
4. Фаязов К.С. Хисоблаш математикаси, математик физика ва анализнинг некоррект масалаларини ечиш усуллари. Тошкент, 2001, 130 б.
5. Аламинов М.Х. О единственности и устойчивости решения задачи Коши для вырождающегося дифференциального неравенства четного порядка. Узбекский математический журнал, 2000 г., № 2, с.3-13.
6. Аламинов М.Х. Задача Коши для операторно-дифференциального уравнения высокого порядка. Вестник ККО АН РУз., 2002 г., N1- 2, с.54-57.
7. Fayazov K.S., Alaminov M.X. III- posed Cauchy Problem for higher order Differential Equations with Operator type coefficient// Second World Conference on Intelligent System for Industrial Automation, Proceedings. Uzbekistan. Tashkent. 2002, June, 4-5, s.100-104.
8. А.Д. Цвиркун, В.К. Акинфиев, В.А. Филиппов. Имитационное моделирование в задачах структуры сложных систем [Текст]: оптимизационно-имитационный подход/; Отв. Ред.В.Н.Бурков – М.: Наука, 1985,-173с.(Ин-т проблем управления)
9. Методы Математического моделирования и вычислительной диагностики [Текст]: сб. трудов/Под ред. А.Н.Тихонова, А.А.Самарского. – М.:МГУ, 1990.-290 с.
10. Максимей, И.В.Имитационное моделирование на ЭВМ [Текст]: монография/И.В.Максимей.-М: Радио и связь, 1988.-232с.
11. Моисеев Н.Н.Математика ставит эксперимент.М.Наука, 1979-224 б.
12. Проблемы вычислительной математики(под редакцией

А.Н.Тиханова), Издательство МГУ, 1980.

13. Советов Б.Я. Яковлев С.А. Моделирование систем. Практикум М. Высшая школа.

14.Ивахненко А.Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. М. Радио и связь. 1997-312 б.

15.Камилов М.М. Эргашев А.К.Математик моделлаштириш. ТАТУ, Тошкент 2007-176 б.

MAZMUNI

Kirisiw.....	3
I-Bap. Matematikalıq hám kompyuterliq modellestiriw tiykarlari.....	4
1-§.Modellestiriw túsinikleri hám modellerdiń túrleri.....	4
2-§.Matematikalıq hám kompyuterli modellestiriw problemalari.....	6
3-§.Baslangısh shartlı ápiwayı differencial teńlemelerdi sanlı sheshiw usılları.....	10
4-§. Shegaralıq shártlı ápiwayı differencial teńlemelerdi sheshiw ushın shekli ayırmalar usılları.....	16
II-Bap. Korrekt emes máselelerdi modellestiriw misallari.....	27
1-§. Birinshi tártipli differencial operator teńleme ushın qoyılğan Koshi máselesi.....	27
2-§. Ózgeriwshi-operatorlı birinshi tártipli differencial teńleme.....	32
3-§. Regulyarizaciya metodı menen juwıq sheshimdi tabıw.....	34
4-§. Ekinshi tártipli differencial operator teńlemeler ushın Koshi máselesi.....	39
5-§. Ekinshi tártipli barlıq koefficientleri operator bolğan teńleme ushın qoyılğan Koshi máselesi.....	41
Juwmaqlaw.....	43
Ádebiyatlar.....	44

Dúziwshiler:

Alaminov Muratbay - Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı Informatika oqıtıw metodikası kafedrası docenti, fizika-matematika ilimleriniń kandidati

Qıdırniyazov Ájiniyaz Sherniyazovich- Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı Informatika oqıtıw metodikası kafedrası assistenti.

Matematikaliq modellestiriw

Woqıw metodikalıq qollanba Ájiniyaz atındaǵı Nókis mámleketlik pedagogikalıq institutı ilimiy-metodikalıq keńesiniń __-_____ 2016-jılǵı №__ protokoli menen baspadan shıǵarıwǵa usınıs yetilgen.

Bas redaktor	K. M. Koshanov
Tex.redaktor	X. K. Shamuratova
Korrektor	Z. B. Baltabaeva
Operator	N. Reymov

Ájiniyaz atındaǵı NMPI redakciya-baspa bólimi

Ájiniyaz atındaǵı NMPI baspaxanasında basılǵan. 2016-j.

Buyırtpa №_____. Nusqası 100 dana. Formatı 60x84. Kólemi 3,0 b.t.

230105, Nókis qalası, A. Dosnazarov kóshesi-104. Reestr №11-3084.