ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

Магистратура басқышы

Қол жазба ҳуқықында

Халықназарова Айсулыў

«1-түр JBW*–үшликлердиң характеризацияси»

5А460101 Математикалық анализ қәнигелиги бойынша

Магистр

академиялық дәрежесин алыў ушын жазылған

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Магистрлик диссертация математикалық анализ кафедрасында көрип шығылды ҳәм қорғаўға усынылды.

Кафедра баслығы доц. Тлеумуратов С.Ж.

________« » _________2012 жыл

Илимий басшы:_____________

доц. Тлеумуратов С.Ж.

НӨКИС 2012

Мазмуны

Кирисиў

Теманың актуаллығы: Йордан операторлар алгебрасында интенсив раўажланып атырған тараўлардың бири JBW*–үшликлер теориясы болып есапланады. Бул теорияны хәр тәреплеме үйрениўге [1-15,19,20,23,24] бир қанша илимий мийнетлер бағышланған. JB*–үшликлер базы бир нормаланған Йордан үшликлер системасы болып, бунда Банах кеңисликлеринде шегараланған симметриялық областларға байланыслы [16,18,19], ал С*-алгебраға болса [17,31] илимий жумысларында кеңнен үйренилген.

JB*–үшликлер бул Йордан С*–алгебралардың улыўмаласқан түри болады. Мысалы ушын комплекс Гильберт кеңислигинде барлық шегараланған операторлар кеңислиги үшлик Йордан көбеймесине қарата туйық болады

$$\{ab^*c\} = \frac{1}{2}\left(ab^*c + cb^*a\right)$$

JB*–үшлик Банах кеңислигиниң түйинлеси болса, онда JBW*–үшлик деп аталады. JBW*–үшликлер [12] жумыстағы авторлардың мийнетлерин улыўмаластырады.

Бул магистрлик жумыста 1–түр JBW*–үшликлердиң изометриялы изоморф болған кеңисликлерди үйренемиз.

Мақсети хәм ўазыйпалары: JBW*-үшликлер теориясын үйренип, 1-түр JBW*–үшликлерди Картан факторлардың сәйкес түрлери менен абеллик фон Нейман алгебрасы тензор көбеймесиниң жайылмасына келтириўден ибарат.

Изертлеў объекти: Оператор алгебралары, 1-түр JBW*–алгебра, JBW*-үшлик, Картан фактор түрлери.

Изертлеўди алып барыў усыллары. Магистрлик жумыста тийкарынан функционаллық анализ усылларынан қолланылады.

Изертлеўдиң теориялық хәм әмелий әхмийети: Диссертацияда келтирилген нәтийжелер хәм усыллар операторлар алгебрасы хәм JBW*-үшликлер теориясын изертлеўде өз қолланылыўларына ийе болады.

Изертлеў нәтийжелериниң апробациясы: Хәр хәптениң сәршемби күни болып өтетуғын кафедра семинарына үзликсиз қатнастып, өзиниң темасына байланыслы докладлар қылды.

2012 жылы 11-12 май күнлери өткизилген «Современные проблемы комплексного и функционального анализа» атамасындағы республикалық конференцияға белсене қатнасты.

Жумыстың көлеми хәм дүзилиси: Магистрлик диссертация жумысы кирисиў, еки бап, алты параграф, жуўмақлаў хәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен ибарат.

Биринши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда тийкарынан операторлар алгебралары ҳәм JB*– үшликлер теориясы қаралған.

Биринши параграфта функционаллық анализдиң элементлери болған Гильберт кеңислиги, Лебег интералы, Банах кеңислиги, өлшеўли функциялар ҳаққында тийкарғы мағлыўматлар келтирилген.

Екинши параграфта операторлар алгебраларына тийисли мағлыўматлар қарастырылып, олардың қәсийетлери ҳәм мысаллар қарастырылған.

Анықлама 1.2.4. C^*–алгебра, бул $\|a^*a\| = \|a\|^2$ шәртин қанаатландыратуғын * - банах алгебрасы.

Теорема 1.2.1. Егер $a - C^*$ - алгебраның өз-өзине түйинлес элементи болса, онда $r(a) = \|a\|$.

Теорема 1.2.10. Мейли M фон Нейман алгебрасы ҳәм $a \in M$ болсын. Сонда a төмендегише жайылады.

$$a = u|a|,$$

бул жерде $|a| = ((a^*a)^{\frac{1}{2}})$ ҳәм $u \in M$ дара изометриясы сондай $u^*u = s(|a|)$ ҳәм $uu^* = s(|a^*|)$ шәртлерин қанаатландырады. Бундай жайылма бирден-бир болады. Бул жайылма поляр жайылма делинеди.

Үшинши параграфта JB*– үшликлер анықламалары, мысаллар ҳәм тийкарғы қәсийетлери келтирилген.

Мейли U – комплекс банах кеңислиги болсын. B(U) арқалы U да анықланған барлық сызықлы шегараланған операторлар көплигин белгилеймиз.

Егер

$$U^*U \to B(U) \ \ (x,y) \to D(x,y)$$

үзликсиз ярым сызықлы форма ушын D(x,y)z ≡{x,y,z} операторы қәлеген x,y,z,u$\in$U ушын төмендеги шәртлерди қанаатландырса:

1) {xyz}={zyx},

2) {xy{uvz}}-{uv{xyz}}={{xyu}vz}-{u{vxy}z},

3) D(z,z) –[0,+∞) спекторға ийе эрмит операторы,

4) $\|D(z.z)\| = \|z\|^2$

Онда U кеңислик JB* –үшлик деп аталады. JB*- үшликте төмендеги теңлик орынлы болады:

$$\|\{zzz\}\| = \|z\|^3$$

JB* –үшликке мысаллар келтирейик:

а) $M_{n\times m}$ - барлық туўры мүйешли матрицалар көплиги,

{xyz}=(xy*z+zy*x) үшлик көбеймеге;

в) қәлеген С*-алгебра

{авс}=(ав*с+св*а)/2   үшлик көбеймеге ;

с) қәлеген JB* -алгебра;

{uvw}=(u∘v*)∘w+(w∘v*)∘u-(u∘w) ∘v* үшлик көбеймеге қарата JB* –үшлик болады.

Ҳәр бир e трипотент ушын $P_k(e)$, (к=0,1,2) Пирс проекторлары төмендегише анықланады:

$$P_2(e)=Q(e)^2$$

$$P_1(e)=2(D(e,e)-Q(e)^2$$

$$P_0(e)=I-2D(e,e)+Q(e)^2$$

Ҳәр бир $P_j(e)$, j=(0,1,2) проектор идемпотент болады. Егер $k\neq j$, $k,j \in (0,1,2)$ болса, онда $P_k(e)P_j(e)=0$ екенлиги дәлийленген. $U_k(e)=P_k(e)U$ арқалы $k\in(0,1,2)$ Пирс проекторларының образын белгилеймиз. Онда Пирс жайылмасы төмендеги көриниске ийе

$$U=U_2(e)*U_1(e)*U_0(e)$$

ҳәм

$$U_k(e)=\{x:x\in U,\ D(e,e)x=1/2*kx\},\quad (k = 0,1,2)$$

Пирс проекторларының образы ушын төмендеги қәсийетлер орынлы:

$$\{U_i(e)U_j(e)U_k(e)\} \subset U_{i-j+k}(e)$$

$$\{U_2(e)U_0(e)U\} = \{U_0(e)U_2(e)U\} = 0$$

бунда $U_{i-j+k}(e)=\{0\}$, егер $i-j+k \notin \{0,1,2\}$.

Екинши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда 1-түр JBW*–үшликлер Картан фактор түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасын үйренемиз.

Биринши параграфта 1-түр JBW*–алгебралар ҳәм оның қәсийетлери үйренилген.

Бирлик элементке ийе болған А ҳақыйқый Йордан алгебрасының нормасы толық болса, онда JB—алгебра делинеди, егер $\forall a,b,c \in A$

(I) $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$

(II) $\|a^2\| = \|a\|^2$

(III) $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|$

орынлы болса, бунда «$\circ$» – Йордан көбеймеси. Егер А-Банах кеңислигиниң түйинлеси болса, онда А–JBW–алгебра делинеди.

А алгебра I-түр деп аталады, егер $\exists e \in A$ орайы 1 ге тең өз ишине алатуғын *е*-абеллик идемподент, яғный операторлар көплигинде *е*А*е*-коммутатив болады.

Теорема 2.1.3. Мейли А, I_n-түр JW-алгебра, бунда n≥3 ҳәм Λ-n, кординаллар көплиги болсын. Сонда орайлық идемпотентлер $P_1, P_2, P_3, P_4 \in A,$ сондай $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, локал компакт Хаусдорф кеңислиги $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ҳәм сәйкес $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ оң Радон өлшеўлери ушын $1 \leq i \leq 3$, $P_i A$ изоморф $L_\infty^w(\Omega_i, \mu_i, (E_i)_{sa})$, бул жерде $E_1 = L_R(l_2(\Lambda, R))$, $E_2 = L_C(l_2(\Lambda, C))$, $E_3 = L_H(l_2(\Lambda, H))$ ҳәм күшсиз L_∞– кеңислиги қозғалмас точкалардың көбеймесинен ибарат.

Картан факторлардың туўрымүйешлик, симплектикалық, эрмитлик ҳәм экспоненциал түрлери екинши параграфта қарастырылған.

Мейли *n* ҳәм *m* өлшеўли H ҳәм K комплекс Гильберт кеңисликлери берилген болып, $j \in H$ түйинлеси ушын $z^t = jz^* j$ ҳәр қандай $z \in B(H)$.

Сонда $R_{mn} = B(H,K)$–кеңислиги

$$\{xyz\}=\frac{1}{2}\left(xy^{*}z+zy^{*}x\right) \tag{2.2.1}$$

көбеймеге ҳәм операторлар нормасына қарата Картан фактор *туўрымүйешлик түри* делинеди. R_{mn} ҳәмме ўақыт $B(H\oplus^{2}K)$ жайластырыў мүмкин. $S_n=\left\{z\in B(H):z^{t}=-z\right\}$, (2.2.1) көбеймеге ҳәм операторлар нормасына қарата Картан фактор *симплектикалық түри*, ал $H_n=\left\{z\in B(H):z^{t}=z\right\}$, (2.2.1) көбеймеге ҳәм операторлар нормасына қарата Картан фактор *эрмитлик түри* делинеди.

R_{mn},S_n ҳәм H_n түрлердиң изоморфлығы n ҳәм m байланыслы, бирақ j-ға байланысы жоқ.

Мейли JW^{*}– үшлик Sp_n– n өлшеўли комплекс спин факторға изоморф болады. Онда Sp_n– Картан фактордың *спин түри* делинеди.

Теорема 2.2.3. (Классификациялық теорема).
Мейли U– 1 түр JBW*–үшлик болсын. Онда $\left(A_i\right)_{i\in I}$ абеллик фон Нейман алгебралары семействосы бар болып ҳәм $\left(C_i\right)_{i\in I}$– Картан факторлары семействосы ушын U – кеңислиги $\oplus_{i\in I}^{\infty}A_i\,\overline{\otimes}\,C_i$ изометриялы изоморф болады.

Ал үшинши параграфта 1–түр JBW*–үшликлерди Картан фактор сәйкес түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасы келтирилген.

Туўрымүйешликлер түри

Бул жерде JBW*–үшликлердиң e–толық трипотентке сәйкес туўрымүйешликлер түрин үйренемиз, яғный $U_1(e)$- тиң $A\overline{\otimes}B(H)$ изоморф екенлигин көрсетемиз, бунда A–абеллик фон Нейман алгебра ҳәм H комплекс Гильберт кеңислиги.

Теорема 2.3.9. Мейли U– JBW* үшлик e – толық трипотентине сәйкес туўрымүйешли түри болсын. Онда U изометриялы изоморф $\oplus_{l\in L}^{\infty}A_l\,\overline{\otimes}\,R_{nm_l}$, $\forall n,m_l\left(l\in L\right)$ кординаллар ҳәм A_l–абеллик фон Нейман алгебралар.

Симплектикалық түри

Бунда U– JBW* үшлик e–толық трипотентине сәйкес симплектикалық түрин қарастырамыз, яғный $U_1(e)$ изоморф $A\overline{\otimes}S_{2n}$ екенлигин көремиз, бунда A–абеллик фон Нейман алгебрасы ҳәм n–кординал.

Теорема 2.3.10. Мейли U–JBW* үшлик e–толық трипотентине сәйкес симплектикалық түри болсын. Сонда U изометриялы изоморф $A_1 \overline{\otimes} S_{2n} \oplus^{\infty} A_2 \overline{\otimes} S_{2n}$ болады, бунда A_1, A_2 абеллик фон Нейман алгебралары ҳәм n–кординал.

Эрмитлик түри ҳәм экспоненциал түри

Теорема 2.3.11. Мейли U–JBW* үшлик e–максимал трипотентине сәйкес эрмитлик түри болсын. Сонда e – унитар ҳәм U – изометриялы изоморф $A \overline{\otimes} H_n$ болады, бунда A–абеллик фон Нейман алгебрасы ҳәм кординал $n \geq 2$.

Теорема 2.3.12. Мейли U–JBW* үшлик e–максимал трипотентине сәйкес экспоненциал түри болсын. Сонда e – унитар ҳәм U – изометриялы изоморф $A \overline{\otimes} H_3(O)$ болады, бунда A–абеллик фон Нейман алгебра.

1-БАП. ОПЕРАТОРЛАР АЛГЕБРАСЫ ҲӘМ JB*–ҮШЛИКЛЕР

Биринши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда тийкарынан операторлар алгебралары ҳәм JB*– үшликлер қаралған.

Биринши параграфта функционаллық анализдиң элементлери болған Гильберт кеңислиги, Лебег интералы, Банах кеңислиги, өлшеўли функциялар ҳаққында тийкарғы мағлыўматлар келтирилген.

Екинши параграфта операторлар алгебраларына тийисли мағлыўматлар қарастырылып, олардың қәсийетлери ҳәм мысаллар қарастырылған.

Үшинши параграфта JB*– үшликлер анықламалары, мысаллар ҳәм тийкарғы қәсийетлери келтирилген.

§ 1.1. Функционаллық анализдиң элементлери

Сызықлы кеңислик L нормаланған делинеди, егер оның ҳәр бир f элементине $\|f\|$ ҳақыйқый саны сәйкес қойылып ҳәм бул сәйкеслик төмендеги шәртлерди қанаатландырса:

1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

2) $\|cf\| = |c|\|f\|$, $c \in C$;

3) $\| f_1 + f_2 \| \le \| f_1 \| + \| f_2 \|, \ \forall f_1, f_2 \in L$ (үшмүйешлик теңсизлиги).

Ҳәр қандай нормаланған кеңислик $\rho(f_1, f_2) = \| f_1 - f_2 \|, \ \forall f_1, f_2 \in L$ метрикаға қарата метрикалық кеңислик болады [32].

Енди нормаланған кеңисликте жыйнақлылық түсиниклерин келтиремиз. Егер $\| f_m - f \| \to 0, \ m \to \infty$ болса, онда $\{ f_m \}, \ f_m \in L$ элементлер избе-излиги $f \in L$ элементке жыйнақлы делинеди,. $\{ f_m \}$ элементлер избе-излиги фундаменталь делинеди, егер $\| f_m - f_n \| \to 0, \ m,n \to \infty$.

Егер $f_m \to f$ болса, онда $\| f_m \| \to \| f \|$ болады. Ҳақыйқатында үшмүйешлик теңсизлигинен $\| f_m \| \le \| f_m - f \| + \| f \|$ ҳәм $\| f \| \le \| f_m - f \| + \| f_m \|$ болып, буннан $\big| \| f_m \| - \| f \| \big| \le \| f_m - f \| \to 0, m \to \infty$ келип шығады.

Сызықлы нормаланған кеңислик толық деп аталады, егер оның элементлериниң қәлеген фундаменталь избе-изликлери жыйнақлы болса. Толық сызықлы нормаланған кеңислиги банах кеңислик деп аталады. Банах кеңислиги сепарабель делинеди, егер барлық жерде тығыз санақлы көплик бар болса. Функционаллық кеңисликлерде бир неше мысаллар келтиремиз.

Мысал 1.1. $C[a,b]$ - кеңислиги

$$\|u\| = \max_{a \le x \le b} |u(x)|$$

нормаға қарата нормаланған кеңислик болады. Усы норма арқалы жыйнақлылық тең өлшеўли жыйнақлы делинеди.

Тең өлшеўли жыйнақлылық фундаменталь делинеди, егер $|u_k(x) - u_m(x)| \to 0$. Матемтикалық анализ курсынан белгили $u_m(x)$ избе-излиги $u(x)$ үзликсиз функцияға жыйналады ҳәм $C[a,b]$ толық, демек банах кеңислиги болады.

Мысал 1.2. $C^k[a,b]$ – кеңислиги

$$\|u\| = \max_{a \le x \le b} |u(x)| + \sum_{i=1}^{k} \max_{a \le x \le b} \left| u^i(x) \right|$$

нормаланған кеңислик болады. 1.1-мысалға уқсас $C^k[a,b]$–банах кеңислиги болады.

Мысал 1.2. $C[a,b]$ - кеңисликте интеграллық норма киритемиз

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

нормаланған кеңислик болады, бунда $p \geq 1$, интеграл Риман мәнисинде. Бирақ банах кеңислик болмайды. Мейли $[a,b] = [-1,1]$ ҳәр қандай $k > 1$ ушын

$$u_k(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ kx, & 0 \leq x \leq 1/k \\ 1, & 1/k \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$u_k(x) \in C[-1;1]$, $\{u_k(x)\}$ избе-излигин фундаментал екенин көрсетемиз. $\forall k, m > 0$, $k > m$ болсын, сонда $\|u_k - u_m\| \to 0,\ k, m \to \infty$ фундаменталь болады. Бирақ бул избе-излик

$$u(x) = \theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

функцияға жыйнақлы болады, ал бул функция үзликсиз емес, яғный $C[-1,1]$ кеңислигине тийисли емес.

Лебег интегралы.

Ҳәзирги заман математикада тийкарынан дифференциаллық теңлемелерде Риман интеграллары жеткиликли емес. ХХ-әсирдиң басларында Лебег интеграллық теориясы дүзиледи.

Мейли Q - базы бир интервал болсын. Q да дерлик барлық жеринде анықланған функциялар деп, (Q - ҳәр бир точкасында шекли мәнислерди қабыл ететуғын) функцияның мәнислери өлшеўи нольге тең көпликте анықланбаған. $\Lambda_1 = \Lambda_1(Q)$ -арқалы жыйнақлы монотон кемейиўши емес функциялар избе-излигиниң шегин белгилеймиз.

Мейли $f(x)$ функция Λ_1 берилген, ал $f_k(x),\ k=1,2,\ldots$ дерлик барлық жерде $f(x)$ ке жыйнақлы, интеграллар избе-излиги менен шегараланған, $\overline{Q}$ да кемейиўши емес монотон үзликсиз функциялар избе-изликлери берилген болсын.

$$\left\{\int_Q f_k(x)dx,\ \kappa=1,2,\ldots\right\}$$

көплигиниң $f(x)\in\Lambda_1(Q)$ функцияның Лебег интегралы деп аталады:

$$(L)\int_Q f(x)dx=\sup_k\int_Q f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_Q f_k(x)dx$$

Бул жерде Лебег интегралы Λ_1 да анықланған функциялар ушын келтирдик. Q - интервалында берилген ҳақыйқый мәнисли $f(x)$ функцияның Лебег интегралы

$$f(x)=f'(x)-f''(x)$$

көрниске ийе болады, бунда $f'(x), f''(x)$ функциялар $\Lambda_1(Q)$да анықланған.

Солай етип, Q да берилген $f(x)$ функцияның Лебег интегралы

$$(L)\int_Q f(x)dx=(L)\int_Q f'(x)dx-(L)\int_Q f''(x)dx$$

Лебег интегралы Λ_1 да анықланған функциялардың айырмаларына байланыслы емес. $\Lambda(Q)$–арқалы Q интервалда Лебег мәнисинде интегралланыўшы барлық функциялар көплигин белгилеймиз.

Гильберт кеңислиги.

Н - сызықлы кеңисликте скаляр көбейме киритилген делинеди, егер қәлеген $h_1, h_2\in H$ элементлер жуплығына комплекс сан сәйкес қойылған болып ҳәм ол төмендеги шәртлер орынлы болса:

1) $(h,h)\geq 0$, $(h,h)=0 \Leftrightarrow h=0$;

2) $(h_1,h_2)=\overline{(h_2,h_1)}$;

3) $(ch_1,h_2)=c(h_1,h_2)$;

4) $(h_1+h_2,h)=(h_1,h)+(h_2,h)$

онда бул жуплық скаляр көбейме деп аталады. Коши–Буняковский теңсизлиги

$$|(h_1,h_2)|^2 \leq (h_1,h_1)(h_2,h_2) \tag{1.1.1}$$

H–кеңисликте скаляр көбейме норма арқалы $\|h\|=\sqrt{(h,h)}$ түрде аңлатылады. Сонда (1.1.1) теңсизлиги $|(h_1,h_2)|^2 \leq \|h_1\|\cdot\|h_2\|$ көрниске ийе болады. Скаляр көбейме жәрдеминде анықланған норма толық сызықлы кеңислик болса, онда Гильберт кеңислик деп аталады [32]. h_1 ҳәм h_2 векторлар арасындағы мүйеш φ болса

$$Cos\varphi=\frac{(h_1,h_2)}{\|h_1\|\cdot\|h_2\|} \tag{1.1.2}$$

формула жәрдеминде анықланады. Егер $(h_1,h_2)=0$ болса, онда (1.1.2) формулада $\varphi=\frac{\pi}{2}$, демек h_1 ҳәм h_2 векторлары ортогонал делинеди.

§ 1.2. Операторлар алгебрасы

Мейли H - гильберт кеңислиги болсын. Сонда $B(H)$ - арқалы H - кеңислигиндеги барлық шегаралған операторлар көплигин белгилеймиз.

Қәлеген A алгебрасының a,b элементлери ушын $a\to a^*$ түйинлес-сызықлы сәўлелениўинде $a^{**}=a$ ҳәм $(ab)^*=b^*a^*$ теңликлери орынлы болса, онда бул сәўлелениў A алгебрасының инволюциясы деп аталады.

$(A,*)$ жуплығы инволюцияланған алгебра ямаса * - алгебра деп аталады. Егер $S - A$ ның үлеси көплиги болып, $S^* = \{a^* | a \in S\}$ бунда $S = S^*$ болса, онда S, A да өз-өзине түйинлес болады.

A алгебрадағы B өз-өзине түйинлес үлес алгебра *- үлес алгебра деп аталады.

Анықлама 1.2.1. A ҳәм B *- алгебралар ҳәм $\varphi\colon A\varphi B$ гомоморфизм, бунда φ түйинлес элементин сақлайды, яғный $a \in A$ ушын $\varphi(a^*) = (\varphi(a))^*$ болса, онда φ^*-гомоморфизм деп аталады.

Мейли X - векторлық кеңислик ҳәм сызықлы $p : X \to X$ сәўлелендириўи $p^2 = p$ орынлы болса, онда p идемпотент деп аталады.

Анықлама 1.2.2. Егер $X = X \oplus Z$ бунда X ҳәм $Z - X$ теги векторлық үлес кеңислик болса, онда X та жалғыз p идемпотент бар болады, бунда $p(x) = y$ ҳәм $\ker(p) = z,$ бундай р оператор проектор деп аталады. (Ω,μ)- өлшемли кеңислик пенен бирге $L^\infty(\Omega, \mu) - \Omega$ дағы шегараланған комплекс өзгериўшили функциялар көплиги, $B_\infty(\Omega) - \Omega$ дағы шегараланған комплекс өзгериўшили функциялар көплиги $B(X) - X$ ты өз-өзине өткизетуғын барлық шегараланған сызықлы сәўлелендириўлер көплиги.

Анықлама 1.2.3. Егер $A - x$ алгебра субмультипликатив норма менен толық бөлистирилген ҳәм $\|a^*\| = a,\ a \in A$ шәртин қанаатландырса, онда A^* - банах алгебрасы деп аталады. Буннан тысқары егер A бирлик элементке ийе болып ҳәм $\|1\| = 1$ болса, онда A "1", бирлик элементке ийе *- банах алгебра деп аталады.

Анықлама 1.2.4 [33]. C^*–алгебра, бул $\|a^* a\| = \|a\|^2$ шәртин қанаатлан-дыратуғын * - банах алгебрасы.

C^*- алгебраның туйық үлес *- алгебрасы және де C^* - алгебра болады. Соның ушын бизлер оларды C^*- үлес алгебралар деп айтамыз. Егер C^*-алгебра "1" бирлик элементке ийе болса, онда автомат түрде $\|1\| = 1$ ҳәм $\|1\| = \|1^*1\| = \|1\|^2$ орынлы болады. Жоқарыдағыдан, егер p нольлик емес проектор болса, онда $\|p\| = 1$ болады.

Егер $u - A$ ның унитар бирлик элементи болса, онда $\|u\| = 1$ ҳәм $\|u\|^2 = \|uu^*\| = \|1\| = 1$ болады. Егер $\lambda \in \delta(u)$ болса, онда $\lambda^{-1} = \sigma(u^{-1}) = \sigma(u^*)$. Солай етип $\|\lambda\| \le 1$ ҳәм $\|\lambda^{-1}\| \le 1$ яғный $\|\lambda\| = 1$ буннан $\sigma(u) \le T$ орынлы болады.

Мысаллар.

1) $\lambda \to \overline{\lambda}$ комплекс түйинлеси менен берилген $\not\subset$ скаляр майдан инволюциясы менен бирлик элементке ийе $C*$- алгебра болады.

2) Егер Ω - локаль компактлы хаусдорф кеңислиги болса, онда $C_0(\Omega)$ сы $f \to \overline{f}$ инволюция менен $C*$ - алгебра болады.

3) (a) $l^\infty(S)$, бунда S - қәлеген көплик;

(b) $L^\infty(\Omega,\mu)$, бунда (Ω,μ) – кеңислик өлшеми менен ;

(c) $C_b(\Omega)$, бунда Ω-топологиялық кеңислик ;

(d) $B_\infty(\Omega)$, бунда Ω - өзгериўши кеңислик;

Жоқарыдағыдан, барлық санап өтилген алгебралар $f \to \overline{f}$ инволюциялы $C*$ - алгебра болады.

4) Егер H - гильберт кеңислиги болса, онда $B(H)$, C^* - алгебра болады.

5) Егер $(A_\lambda)_{\lambda\in\lambda}$ - қәлеген $C*$ - алгебралардың семейýствосы болса, онда $\oplus_\lambda A_\lambda$ туўры қосындысы ноқатлы инволюциялы $C*$ - алгебра болады ҳәм $\oplus_\lambda^{C_0} A_\lambda$ шекли қосындысы оның туйық өз-өзине түйинлес идеалы болады.

6) Егер Ω - бос емес көплик ҳәм $A - C*$ - алгебра болса, онда $l^\infty(\Omega, A)$ анықланған инволюциялы $C*$ - алгебра болады. Егер Ω - локаль компактлы хаусдорф кеңислиги болса, онда $f:\Omega \to A$ үзликсиз функциясын шексизликте нольге айланады деп айтамыз, егер қәлеген $\varepsilon > 0$ саны ушын $\{w\in\Omega\}\| \ f(w)\|\geq \varepsilon\}$ көплиги компактлы болады. Барлық бундай функциялар көплигин $C_0(\Omega, A)$ арқалы белгилеймиз. Бул көплик $l^\infty(\Omega, A)$ l∞(Ω,A) да $C*$ - алгебра болады.

Теорема 1.2.1 [29]. Егер $a - C*$ - алгебраның өз-өзине түйинлес элементи болса, онда $r(a)=\|a\|$.

Дәлиллеў. Солай етип $\|a^2\| = \|a\|^2$ ҳәм индукция арқалы $\|a^{2n}\| = \|a\|^{2n}$ болады. Соның ушын $r(a) = \lim\|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim\|a^{2n}\|^{\frac{1}{2n}} = \|a\|$. Теорема дәлилленди.

Нәтийже 1.2.2. *-алгебраның $C*$ - алгебраға айланыўында көби менен бир норма бар болады.

Дәлиллеў. Егер A, *–алгебрада $\|\bullet\|_1$ ҳәм $\|\bullet\|_2$ нормалар оны $C*$- алгебраға айландырса, онда $\|a\|_j^2 = \|a*a\|_j = r(a*a) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma(a*a)} |\lambda| \quad j=1,2,$ буннан $\|a\|_1 = \|a\|_2$. Нәтийже дәлилленди.

Лемма 1.2.3. Мейли A – банах алгебрасы болсын, сондай инволюция тәминленген, бунда $a \in A$ ушын $\|a^2\| \le \|a*a\|$. Онда A, $C*$ - алгебра болады.

Дәлиллеў. $\|a\|^2 \le \|a*a\| \le \|a*\| \, \|a\|$ бул теңсизликтен барлық a ушын $\|a\| \le \|a*\|$ болады. Буннан $\|a\| = \|a*\|$ ҳәм соның ушын $\|a\|^2 \le \|a*a\|$. Лемма дәлилленди.

Ҳәр бир A, $C*$ - алгебраға биз қандайда бир $M(A)$ A ны идеал сыпатында өз ишине алатуғын $C*$ - алгебрасын сәйкес қоймыз. Бул алгебра теорияның айрым бөлимлерине керек болады, $A - C*$- алгебра ҳәм қәлеген $a,b \in A$ ушын $L(ab) = L(a)b, R(ab) = aR(b)$ ҳәм $R(a)b = aL(b)$ орынлы болса, онда шегараланған A ға сызықлы сәўлелендириўши (L,R) жуплығы екилик централизатор деп аталады.

Мысал. Егер $c \in A$ ҳәм $L_c(a) = ca$ ҳәм $R_c(a) = ac$, бул жерде L_c ҳәм R_C F ға сызықлы сәўлелендириўлер болса, онда $(L_c, R_c) - A$ алгебраның екилик централизаторы болады. Барлық $c \in A$ ушын тәкирарлаў аңсат $\|c\| = \sup\limits_{\|b\|\le 1} \|cb\| = \sup\limits_{\|b\|\le 1} \|bc\|$ ҳәм соның ушын $\|L_c\| = \|R_c\| = \|c\|$ теңлиги орынлы болады.

Лемма 1.2.4. Егер (L,R) жуплығы $A*$ - алгебраның екилик централизаторы болса, онда $\|L\| = \|R\|$.

Дәлиллеў. Егер $\|a\,L(b)\| = \|R(a)b\| \le \|R\|\|a\|\|b\| \|$ болса, онда

$$\|L(b)\| = \sup_{\|a\|\le 1} \|aL(b)\| \le \|R\|\|b\|$$

буннан

$$\|L\| \le \|R\|$$

Егер $\|R(a)b\| = \|aL(b)\| \le \|L\|\|a\|\|b\|$ болса, онда $\|R(a)\| = \sup\limits_{\|b\|\le 1} \|R(a)b\| \le \|L\|\|a\|$ ҳәм соның ушын $\|R\| \le \|L\|$.

Солай етип $\|L\| \le \|R\|$ теңлиги орынлы екен. *Лемма дәлилленди*.

Енди $B(H)$ –кеңислигинде проекторлардың базы бир қәсийетлерин қарастырамыз [2]:

$n(a)$ – проектор $\ker\ a=\{\varphi\in H : a\varphi=0\}$ ядросына.

$l(a)$ – проектор $\overline{Ran}\ a=a(\overline{H})$ туйық образына;

$r(a)=1-n(a).$

Жоқарыда анықланған проекторлар ушын төмендеги теңликлер орынлы,

1) $r(a)=l(a^*);$

2) $l(a)$ (сәйкес $r(a)$) орынлы болатуғын $e\in B(H)$ проекторлардың ең кишиси бар болады (сәйкес $ae=a$). $l(a)-a$ операторының шеп тасыўшысы, ал $r(a)$– оң тасыўшысы деп аталады. Егер $a=a^*$ болса, онда $l(a)=r(a)$ ҳәм $s(a)=l(a)$ проекторы a проектордың тасыўшысы деп аталады. Бундай проекторлар ушын $r(a)=s(a^*a)$ ҳәм $l(a)=r(a^*)=s(aa^*)$ орынлы болады. Егер $N\subset H$ үлес кеңислиги бар болып ҳәм барлық $\varphi\in N,\varphi\in N^{\perp}$ ҳәм $\vartheta\varphi=0$ ушын $||\vartheta\varphi||=||\varphi||$ орынлы болса, онда $\vartheta\in\vartheta\in B(H)$ операторы дара изометрия деп аталады. ϑ ушын N үлес кеңислиги басланғыш кеңислик, ал $\vartheta(N)$-ақырғы үлес кеңислиги деп аталады. ϑ - дара изометриясы ушын $r(\vartheta)=\vartheta\vartheta^*$ $l(\vartheta)=\vartheta^*\vartheta$ тенликлер орынлы $\vartheta^*\vartheta$ проекторы (сәйкес $\vartheta\vartheta^*$ проекторы) ϑ дара изометриясының басланғыш проекторы (сәйкес ақырғы) проекторы деп аталады [30].

Тастыйықлаў 1.2.5. Егер $\vartheta\in B(H)$ ҳәм $\vartheta^*\vartheta$-проектор болса, онда $\vartheta\vartheta^*$-проектор ҳәм $\vartheta^*\vartheta(H)$ үлес кеңисликтиң ϑ-басланғыш дара изометрия болады.

Дәлиллеў. Егер $\vartheta\in B(H)$ ҳәм $\vartheta\vartheta^*$ -проектор болса, онда $(\vartheta^*\vartheta)^2=\vartheta^*\vartheta$ теңлигинен,

$$||\vartheta-\vartheta\vartheta^*\vartheta||^2=||(\vartheta^*-\vartheta^*\vartheta\vartheta^*)\,(\vartheta-\vartheta\vartheta^*\vartheta)||=0$$

келип шығады.

Буннан $\vartheta=\vartheta\vartheta^*\vartheta$ ҳәм $(\vartheta\vartheta^*)^2=\vartheta\vartheta^*$, яғный $\vartheta\vartheta^*$ - проектор.

Егер $\varphi\in(\vartheta^*\vartheta)(H)$ болса, онда $\varphi=(\vartheta^*\vartheta)\varphi$ ҳәм

$$\|\varphi\|^2=(\varphi,\varphi)=(\vartheta^*\vartheta\varphi,\varphi)=\|\vartheta\varphi\|^2$$

Егер $\varphi\in((\vartheta^*\vartheta)(H))^{\perp}$ болса, онда $\vartheta^*\vartheta\varphi=0$ ҳәм $\vartheta\varphi=\vartheta\vartheta^*\vartheta\varphi=0$. Солай етип ϑ-басланғыш $\vartheta^*\vartheta(H)$ үлес кеңисликтиң дара изометрия болады. Тастыйықлаў дәлилленди.

Теорема 1.2.6. Ҳәр бир $a\in B(H)$ ушын жалғыз оң $b\in B(H)$) операторы ҳәм жалғыз $\vartheta\in B(H)$ дара изометриясы бар болса, онда $a=\vartheta b$ ҳәм $\vartheta^*\vartheta=s(b)$ теңликлери орынлы болады

Дәлиллеў. Мейли $b=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ болсын, онда $B(H)$ тағы ϑ_0 операторын төмендегише анықлаймыз.

$$\vartheta_0(b\varphi)=a\varphi,\ \varphi\in H$$

Буннан барлық $\varphi\in H$ ушын,

$$\|\vartheta_0(b\varphi)\|^2=\|a\varphi\|^2=(a^*a\varphi,\varphi)=(b^2\varphi,\varphi)=\|b\varphi\|^2$$

орынлы болса, онда берилген $\overline{b(H)}=s(b)(H)$ үлес кеңислигинде ϑ_0 операторы изометриялық операторға шекем даўам етеди.

$$\vartheta\varphi=\begin{cases}\vartheta_0\varphi, & \varphi\in s(b)(H);\\ 0, & \varphi\in(s(b)(H))^{\perp}\end{cases}$$

деп $\vartheta\in B(H)$ дара изометриясын анықлаймыз. Онда $a=\vartheta b$ ҳәм $\vartheta^*\vartheta=r(a)=s(b)$

Мейли $a=\vartheta_1 b_1,\ b_1\vartheta_1\in B(H),\ b_1\geq 0, \vartheta_1^*\vartheta_1=s(b_1)$ болсын, онда $a^*a=b_1\vartheta_1^*\vartheta_1 b_1=b_1 s(b_1)b_1=b_1^2$. Буннан $b_1=(a^*a)^{\frac{1}{2}}=b$. Егер $b\varphi\in s(b)(H)$ болса, онда

$$\vartheta(b\varphi)=a\varphi=\vartheta_1(b_1\varphi)=\vartheta_1(b\varphi)$$

ҳәм $\varphi\in(s(b)(H))^{\perp}$ ушын

$$\vartheta(\varphi)=0=\vartheta_1(\varphi)$$

Сонлықтан $\vartheta=\vartheta_1$. Теорема дәлилленди.

Бунда $b=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$ операторы a операторының модули деп аталады ҳәм $|a|$ көринисинде белгиленеди. Бул жерде

$$a=\vartheta|a|;$$

теңлик $-a$ операторының поляр жайылмасы деп аталады, бунда $\vartheta^*\vartheta=s(|a|)$. Бул жерде соны айтыўымыз керек $|a|=\vartheta^*a$ ҳәм ϑ ның қурылыўында шеп тасыўшы $l(a)$ менен $\vartheta\vartheta^*$ сәйкес келеди.

Мейли $a\in B(H)$ болсын ҳәм $R_0(a)-a$ ҳәм l ден пайда болған B(H) тың *-үлес алгебрасы. Ҳәлсиз топологияда $R_0(a)$ ның туйықланыўын $R(a)$ арқалы аңлатамыз. $R(a)-a$ ҳәм l ди өз ишине алатуғын ең киши ҳәлсиз туйықланған *-үлес алгебра болады. Солай етип, $R(a)$ $B(H)$ кеңислигиндеги нормадан пайда болған туйық топологияда, дара жағдайда қәлеген өз-өзине түйинлес $b\in R(a)$ ушын $\Phi(C(\sigma(b)))\subset R(a)$ болады.

Лемма 1.2.7. Мейли $a=\vartheta|a|-a$ операторының поляр жайылмасы болсын, онда $\vartheta|a|\in R(a)$ болады.

Дәлиллеў. Мейли $|a|=(a^*a)^{\frac{1}{2}}$, $a^*a\in R(a)$, $\Phi(C(\sigma(a^*a)))\subset R(a)$ болсын, онда $|a|\in R(a)$. $f_n(t)=t(t+n^{-1})^{-1}$ болса, онда

$$a_n=|a|\left(|a|+n^{-1}l\right)^{-1}=f_n(|a|)\in R(a)$$

so-топологияда $a_n\to l$ да wo-топологияда $a(|a|+n^{-1}l)^{-1}\to\vartheta a_n\to\vartheta$ буннан $a\left(|a|+n^{-1}l\right)^{-1}\in R(a)$ болса, онда $\vartheta\in R(a)$. Лемма дәлилленди.

Салдар 1.2.8. Ҳәр бир $a\in B(H)$ ушын $\vartheta^*\vartheta=r(a)$, $\vartheta\vartheta^*=l(a)$ орынлы болатуғын $\vartheta\in R(a)$ дара изометриясы бар болады.

Дәлиллеў. Мейли $a=\vartheta|a|-a$ ның поляр жайылмасы болсын, онда жоқарыдағы лемма бойынша $\vartheta\in R(a)$ болады, бунда $\vartheta^*\vartheta=s(|a|)=r(a)$, $\vartheta\vartheta^*=l(a)$. Салдар дәлилленди.

Мейли p,q - $B(H)$ тағы қәлеген проектор болсын. $R(p,q)$ арқалы $B(H)$ тағы ең киши ҳәлсиз туйықланған p,q ҳәм l ди өз ишине алатуғын *-үлес алгебрасын белгилеймиз.

Тастыйықлаў 1.2.9. Қәлеген $p,q \in B(H)$ проекторы ушын $\vartheta^* \vartheta = p \vee q - q$, $\vartheta\vartheta^* = p - p \wedge q$ орынлы болатуғын $\vartheta \in R(p,q)$ дара изометриясы бар болады.

Дәлиллеў. Мейли $p,q \in B(H)$ болсын. Сонда

$$r(p(l-q)) = l - q - (l-q) \wedge (l-p), l(p(l-q)) = r((l-q)p) = p - p \wedge q$$

теңликлерин жаза аламыз, солай етип

$$l = p \vee q + (p \vee q)^{\perp} = p \vee q + (l-p) \wedge (l-q)$$

болса, онда

$$p \vee q - q = l - q - (l-q) \wedge (l-p) = r(p(l-q)). R(p(l-q)) \subset R(p,q)$$

екенлиги анық, ал, онда $\vartheta^* \vartheta = p \vee q - q,\ \vartheta\vartheta^* = p - p \wedge q$ лар ушын $\vartheta \in R(p,q)$ бар болады. Бул жоқарыдағы салдардан келип шығады. Тастыйықлаў дәлилленди.

Енди фон Нейман алгебрасында поляр жайылманы қарастырамыз [29].

Теорема 1.2.10. Мейли M фон Нейман алгебрасы ҳәм $a \in M$ болсын. Сонда a төмендегише жайылады.

$$a = u|a|,$$

бул жерде $|a| = ((a^* a)^{\frac{1}{2}})$ ҳәм $u \in M$ дара изометриясы сондай $u^* u = s(|a|)$ ҳәм $uu^* = s(|a^*|)$ шәртлерин қанаатландырады. Бундай жайылма бирден-бир болады. Бул жайылма поляр жайылма делинеди.

Дәлиллеў. Мейли $b(n) = \left(a^* a + \frac{1}{n}1\right)^{\frac{1}{2}}$ (n - оң пүтин сан) ҳәм

$$a(n) = a\left(a*a + \frac{1}{n}1\right)^{-\frac{1}{2}};$$

болсын, онда

$$a(n)*\cdot a(n) = \left(a*a + \frac{1}{n}1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot a*a\left(a*a + \frac{1}{n}1\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{a*a}{a*a + \frac{1}{n}1};$$

Буннан $\|a(n)\| \le 1$ ҳәм $a(n)\left(a*a + \frac{1}{n}1\right)^{\frac{1}{2}} = a$ буннан $h(n) \to (a*a)^{\frac{1}{2}}$ болғанлықтан, қәлеген ε>0 ушын сондай n_0 саны (точкасы) табылып

$$\left\|h(n) - (a*a)^{\frac{1}{2}}\right\| < \varepsilon(n \ge n_0).$$

фон Нейман алгебрасының s бирлик сферасының ҳәлсиз компактлы болғанлықтан $\{a(n)\}$ да жыйналатуғын b точкасы бар болады. Бул жерде

$$\left\{a(n)(a*a)^{\frac{1}{2}}\right\} \subset a + \varepsilon s \quad (n \ge n_0),\ b(a*a) \in a + \varepsilon s.$$

Бунда ε қәлеген болғанлықтан, $a = b(a*a)^{\frac{1}{2}}$.

Мейли p (сәйкес q) $(a*a)^{\frac{1}{2}}$ (сәйкес $(aa*)^{\frac{1}{2}}$) болсын. Сонда $a = qa$ ҳәм

$$\{(1-q)a\}\{(l-q)a\}* = (l-q)aa*\ (l-q)\ aa* = 0.$$

Ал, буннан

$$a = qa = qb(a*a)^{\frac{1}{2}}.\ a*a = (a*a)^{\frac{1}{2}}\, pb*qbp(a*a)^{\frac{1}{2}}$$

ҳәм сонлықтан $(a*a)^{\frac{1}{2}}(p - pb*qbp)(a*a)^{\frac{1}{2}} = 0.$ Бул жерде $\|b\| \le 1$ болғанлықтан, бизлер $p = pb*qbp$ ийе боламыз. Егер $u = qbp$ анықласақ, сонда u дара изометриясы p бирлик проекторына ийе боламыз. Буннан тысқары, $aa* = u(a*a)u*$ ҳәм сонлықтан шекли проекторы upu*=q болады. Мейли a арқалы басқа полярлық жайылмаға ийе болсын деп уйғарамыз, яғный $a = u|a| = u'|a|$ сонда $u'*a = |a| = u'*u|a|$. Буннан $\left(p - u'^{*}u\right)|a| = 0.$ Мейли $\Re = \{x \,|\, (p - u'*u)x = 0, x \in M\}$ болсын. Онда R σ-туйық оң идеал болып есапланады ҳәм базы бир l проекциясы ушын $R = lM$. Сонда $s(|a|) = p \le l$ ҳәм $p - u'*u$. Ал, бул бир тәрептен $pu'*up = u'*u$. Буннан $p = u'*u$ ҳәм сонлықтан $u' = u.$ Теорема дәлилленди.

§ 1.3. JB*–үшликлер

Бул параграфта JB* –үшликтиң тийкарғы түсиниклерин келтиремиз.

Мейли A ҳақыйқый ямаса комплекс сызықлы кеңислик болсын. $JB^{*}-$алгебра деп, қәлеген $x\in A$ ушын $\left\|U_x\left(x^{*}\right)\right\|=\|x\|^{3}$ қатнасын қанаатландырыўшы инволюция киритилген түйинлес сызықлы A алгебраға айтамыз. Бул жерде, қәлеген Йордан алгебра A да қәлеген $x\in A$ ушын, A да U_x төмендеги көринисте операторды анықлайды:

$$U_x\left(y\right):=2x\circ\left(x\circ y\right)-x^{2}\circ y \qquad \forall y\in A.$$

$JB-$алгебра деп төмендеги қатнасларды қанаатландырыўшы норма бойынша толық ҳақыйқый A Йордан алгебрасына айтамыз [28]: $\forall a,b\in A$

(1) $\left\|a^{2}\right\|=\|a\|^{2}$

(2) $\|a\|\le\|a+b\|.$

Егер H комплекс Гильберт кеңислик болса, онда H та анықланған шегараланған Эрмит операторлардың ҳақыйқый Банах кеңислиги $\mathrm{H}\left(\mathrm{H}\right)$

$$x\circ y:=\frac{1}{2}\left(xy+yx\right)$$

Йордан көбеймесине қарата $JB-$алгебра болады.

$\mathrm{H}\left(\mathrm{H}\right)$ тың бирден бир (сәйкес, күшсиз) туйық унитал ҳақыйқый үлес алгебрасы $JC-$алгебра (сәйкес, $JW-$алгебра) деп аталады. $C^{*}-$алгебраның (сәйкес, фон Нейманн алгебраның) Йордан$*-$үлес алгебрасы $JC^{*}-$алгебра (сәйкес, $JW^{*}-$алгебра) деп аталады.

$JB*$-үшлик $\Im$-комплекс Банах кеңислиги болады. Бул кеңисликте үшлик көбейме $\{.,.,.\}:\Im\times\Im\times\Im\to\Im$ үзликсиз, ҳәм ол сырттағы өзгериўшилерде бисызықлы, симметриялық, ал ортадағы өзгериўшилерде түйинлес сызықлы болып төмендеги қәсийетилерди канаатлантырады [6]:

1. (Йордан бирдейлиги) Барлық $x, y, z\in\Im$ ушын

$$L(a,b)\{x,y,z\}=\{L(a,b)x,y,z\}-\{x,L(a,b)y,z\}+\{x,y,L(a,b)z\},$$

бул жерде $L(a,b)x:=\{a,b,x\}$;

2. Барлық $a\in\Im$ ушын $L(a,a):\Im\to\Im$ сәўлелендириўи терис емес спектрли эрмит операторы болады;

Барлық $a\in\Im$ ушын $\|\{a,a,a\}\|=\|a\|^3$.

Ҳәр қандай C^*-алгебра $\{a,\, b,\, c\}=\frac{1}{2}\left(ab^*c+cb^*a\right)$ көбеймеге қарата JB^*-үшлик болады. Соның менен бирге, қәлеген JB^*-алгебра $\{a,\, b,\, c\}=\left(a\circ b^*\right)\circ c+\left(c\circ b^*\right)\circ a-\left(a\circ c\right)\circ b^*$ көбеймеге қәрата JB^*-үшлик болады. Керисинше, u унитар (бул жерде, қәлеген z ушын $\{u,\, u,\, z\}=z$) элементли қәлеген JB^*-үшлик, $a\circ b=\{a,\, u,\, b\}$ көбейме ҳәм $a^*=\{u,\, a,\, u\}$ инвалюцияға карата u бирлик элементли JB^*-алгебра болады.

Ҳақыйқый JB^*-үшлик комплекс JB^*-үшликтиң норма бойынша туйық үлес үшлиги болады. Қәлеген J ҳақыйқый JB^*-үшлик арқалы оның комплексификациясы болған, $\hat{J}=J\oplus iJ$ комплекс JB^*-үшликти курыў мүмкин.

U ҳақыйқый ямаса комплекс JB^*-үшлик үшлик дифференциаллаў деп қәлеген $a,b,c\in U$ ушын төмендеги қәсийетилерди қанаатландырыўшы δ сәўлелендириўге айтамыз:

$$\delta\{a,\, b,\, c\}=\{\delta a,\, b,\, c\}+\{a,\, \delta b,\, c\}+\{a,\, b,\, \delta c\}.$$

U ҳақыйқый ямаса комплекс $JB^{*}-$үшликте қәлеген $a,b\in U$ ушын $\delta(a, b):=L(a, b)-L(b, a)$ Йордан теңлиги деп аталады ҳәм ол үшлик дифференциаллаў болады. U да үшлик ишки дифференциаллаў деп, $\delta(a, b)$ дифференциаллаўлардың

$$\delta=\sum_{j=1}^{n}\delta\left(a_j, b_j\right)$$

шекли қосындысы түринде жазыў мүмкин болған δ сәўлелендириўге айтамыз. Қосындының ең үлкен саны дифференциаллаўдың тәртиби деп аталады.

Ескертиў. Мейли E ҳақыйқый $JB^{*}-$үшлик ҳәм δ үшлик дифференциаллаў болсын. Онда δ ны E ниң комплексификациясында $\tilde{\delta}(x+iy)=\delta(x)+i\delta(y)$ көринисте анықланған $\tilde{\delta}$ дифференциаллаўға даўам еттириў мүмкин.

Комплекс спин фактор деп, үшлик көбейме скаляр көбейме жәрдеминде

$$\{x, y, z\}=(x\mid y)z+(z\mid y)x-\left(x\mid z^{*}\right)y^{*},$$

норма

$$\|x\|^{2}:=(x\mid x)+\left((x\mid x)^{2}+\left|\left(x\mid x^{*}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

көринисте киритилген $JB^{*}-$үшликтке айтамыз.

[13] бойынша қәлеген E ҳақыйқый спин факторды l_1 қосынды көринисинде томендегише жаза аламыз:

$$E=X_1\oplus^{l_1}X_2,$$

бул жерде $X_1,\ X_2$ өз-ара ортогонал $X_2 = X_1^{\perp}$ болған, X гильберт кеңислигиниң туйық үлес кеңисликлери ҳәм E де үшлик көбейме

$$\{x,\, y,\, z\} = (x \mid y) z + (z \mid y) x - (x \mid \overline{z}) \overline{y},$$

бул жерде $(\cdot \mid \cdot)$ – X тағы скаляр көбейме ҳәм $x \to \overline{x}$ сәўлелендириў қәлеген $(x_1,\, x_2) \in E$ ушын $\overline{x} = (x_1,\, -x_2)$ көринисте анықланады.

Ҳақыйқый $E = X_1 \oplus^{l_1} X_2$ спин фактор шексиз өлшемли болғанда дифференциаллаў ишки емес екенлигин көрсетемиз. Мейли X_1 шексиз өлшемли болсын.

Дәслеп E сеперабель деп алайық. Мейли X_1 де $\{e_n : n \in N\}$ ортонормал базис болсын. $\overline{e}_n = e_n$ болғанлықтан, $\{e_n,\, e_n,\, e_n\} = e_n$ ҳәм $\left\| \delta\left(e_{2k-1},\, e_{2k}\right) \right\| \le 2$, сонлықтан,

$$\delta_0 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta\left(e_{2k-1},\, e_{2k}\right)$$

оператор E де дифференциаллаў болады. δ_0 оператордың ишки дифференциаллаў емес екенлигин көрсетемиз. Айтайық, δ_0 ишки дифференциаллаў болсын, онда

$$\delta_0 = \sum_{j=1}^{P} \delta\left(a_j,\, b_j\right)$$

базыбир $a_j,\, b_j \in E$, $a_j = a_{j,1} + a_{j,2}$ ҳәм $b_j = b_{j,1} + b_{j,2}$, бунда $a_{j,i},\, b_{j,i} \in X_i$, $(j = 1, \ldots, P,\ i = 1, 2)$. Сонлықтан,

$$\delta_0 = \sum_{j=1}^{P} \delta\left(a_j,\, b_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{P} \Big(\delta\big(a_{j,1}, b_{j,1}\big) + \delta\big(a_{j,1}, b_{j,2}\big) + \delta\big(a_{j,2}, b_{j,1}\big) + \delta\big(a_{j,2}, b_{j,2}\big) \Big).$$

Есаплаўлар сонны көрсетеди қәлеген $x_1 \in X_1$ ушын

$$\delta\big(a_{j,2}, b_{j,2}\big)(x_1) = \delta\big(a_{j,1}, b_{j,2}\big)(x_1) = \delta\big(a_{j,2}, b_{j,1}\big)(x_1) = 0.$$

ҳәм $\delta_0\left(X_2\right) = 0$. Соның ушын қәлеген $x_1 \in X_1$ ушын

$$\delta_0\left(x_1\right) = \sum_{j=1}^{P} \delta\big(a_{j,1}, b_{j,1}\big)(x_1).$$

Мейли $\left\{a_{j,1}, b_{j,1} : j = 1, \ldots.., P\right\}$ элементлердиң сызықлы қабығын K арқалы белгилейик ҳәм $x_1 \in K^{\perp} \cap X_1$ болсын [22].

$$0 = \sum_{j=1}^{P} \delta\big(a_{j,1}, b_{j,1}\big)(x_1) = \delta_0\left(x_1\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \delta\left(e_{2k-1}, e_{2k}\right)(x_1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \Big(\left\{e_{2k-1}, e_{2k}, x_1\right\} - \left\{e_{2k}, e_{2k-1}, x_1\right\} \Big) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \Big(\left(e_{2k-1} \mid e_{2k}\right) x_1 + \left(x_1 \mid e_{2k}\right) e_{2k-1} - \left(e_{2k-1} \mid x_1\right) e_{2k} \Big) -$$

$$- \left(e_{2k} \mid e_{2k-1}\right) x_1 - \left(x_1 \mid e_{2k-1}\right) e_{2k} + \left(e_{2k} \mid x_1\right) e_{2k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} \Big(\left(x_1 \mid e_{2k}\right) e_{2k-1} - \left(e_{2k-1} \mid x_1\right) e_{2k} \Big).$$

Қәлеген $\{e_n\}$ базис болғанлықтан, $k \in N$ ушын $(x_1 | e_{2k}) = (e_{2k-1} | x_1) = 0$ ҳәм $x_1 = 0$. Сонлықтан, $K^{\perp} \cap X_1 = 0$, буннан $X_1 = K$ шекли өлшеўли, бул X_1 шексиз екенлигине қарама-қарсы. Яғный бизиң болжаўымыз дурыс емес, демек δ_0 ишки дифференциаллаў емес.

Мейли U – комплекс банах кеңислиги болсын. B(U) арқалы U да анықланған барлық сызықлы шегараланған операторлар көплигин белгилеймиз.

Егер

$$U*U \to B(U) \quad (x,y) \to D(x,y)$$

үзликсиз ярым сызықлы форма ушын

D(x,y)z ≡{x,y,z} операторы қәлеген x,y,z,u € U ушын төмендеги шәртлерди қанаатландырса:

1) {xyz}={zyx},

2) {xy{uvz}}-{uv{xyz}}={{xyu}vz}-{u{vxy}z},

3) D(z,z) –[0,+∞) спекторға ийе эрмит операторы,

4) $\|D(z.z)\| = \|z\|^2$

Онда U кеңислик JB*–үшлик деп аталады [6,11,13,14]. JB*- үшликте төмендеги теңлик орынлы болады:

$$\|\{zzz\}\| = \|z\|^3$$

JB* –үшликке мысаллар келтирейик:

а) $M_{n\times m}$ - барлық туўры мүйешли матрицалар көплиги,

{xyz}=(xy*z+zy*x) үшлик көбеймеге;

в) қәлеген C*-алгебра

{aвc}=(aв*c+cв*a)/2 үшлик көбеймеге ;

с) қәлеген JB* -алгебра;

{uvw}=(u∘v*)∘w+(w∘v*)∘u-(u∘w)∘v* үшлик көбеймеге

қарата JB* –үшлик болады.

Мейли U-JB*-үшликте e- ноллик емес трипотент яғный $\{eee\}=\pm e$ болсын. Онда 5) ҳәм 3) бойынша сәйкес түрде $\|e\|=1$ ҳәм $e=\{eee\}$, яғный e оң трипотент болады.

Егер қәлеген $z\in U$ элемент ушын $\{xyz\}=0$ теңлик орынлы болса, онда $x,y \in U$ элементлер ортогонал деп аталады.

Мейли Q қәлеген $x,y\in U$ элементлер ушын $Q(x)y=\{xyz\}$ теңлик орынлы болатуғын, квадрат оператор болсын. Солай етип

$$Q(x,y)=\frac{1}{2}\ (Q(x+z)-Q(x)-Q(y))$$

көринисте анықланады, демек қәлеген $x,y,z\in U$ ушын $Q(x,z)y=\{xyz\}$

Ҳәр бир e трипотент ушын $P_k(e)$, (к=0,1,2) Пирс проекторлары төмендегише анықланады:

$$P_2(e)=Q(e)^2$$

$$P_1(e)=2(D(e,e)-Q(e)^2$$

$$P_0(e)=I-2D(e,e)+Q(e)^2$$

Соның менен бирге

$$P_0\,(e)+P_1(e)+P_2(e)=I$$

ҳәм

$$D(e,e)=P_2(e)+1/2*P_1(e)$$

теңликлер орынлы болады. [9]-жумыста $P_k(e)$, $k \in (0,1,2)$ ҳәм $P_0(e)+ P_2(e)$ қысқартырыўшы проектор екенлиги көрсетилген (қараң[6-7]).

Ҳәр бир $P_j(e)$, j=(0,1,2) проектор идемпотент болады. Егер $k\neq j$, $k,j \in (0,1,2)$ болса, онда $P_k(e)P_j(e)=0$ екенлиги дәлийленген. $U_k(e)=P_k(e)U$ арқалы $k\in(0,1,2)$ Пирс проекторларының образын белгилеймиз. Онда Пирс жайылмасы төмендеги көриниске ийе

$$U=U_2(e)*U_1(e)*U_0(e)$$

ҳәм

$$U_k(e)=\{x:x\in U,\ D(e,e)x=1/2*kx\}\ ,\quad (k = 0,1,2)$$

Пирс проекторларының образы ушын төмендеги қәсийетлер орынлы:

$$\{U_i(e)U_j(e)U_k(e)\}\subset U_{i-j+k}(e)$$

$$\{U_2(e)U_0(e)U\}=\{U_0(e)U_2(e)U\}=0$$

бунда $U_{i-j+k}(e)=\{0\}$, егер $i\text{-}j+k\notin\{0,1,2\}$ болса.

Биринши бап бойынша жуўмақ

Биринши бапта тийкарынан операторлар алгебралары ҳәм JB*– үшликлер теориясынан дәслепки түсиниклер келтирилген. Биринши параграфта функционаллық анализдиң элементлери қарастырылған. Ал екинши параграфта операторлар алгебралары қаралған. Үшинши параграфта JB*–үшликтиң анықламалары, мысаллар ҳәм тийкарғы қәсийетлери үйренилген.

2-БАП. 1-түр JBW*–үшликлер

Екинши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда 1-түр JBW*–үшликлер Картан фактор түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасын үйренемиз.

Биринши параграфта 1-түр JBW*–алгебралар ҳәм оның қәсийетлери үйренилген.

Картан факторлардың туўрымүйешлик, симплектикалық, эрмитлик ҳәм экспоненциал түрлери екинши параграфта қарастырылған. Ал үшинши параграфта 1–түр JBW*–үшликлерди Картан фактор сәйкес түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасы келтирилген.

§ 2.1. 1-түр JBW*–алгебралар

Бул параграфта 1-түр JBW*–алгебралар ҳәм оның қәсийетлерин қарастырамыз [26].

Бирлик элементке ийе болған А ҳақыйқый Йордан алгебрасының нормасы толық болса, онда JB—алгебра делинеди, егер $\forall a,b,c \in A$

(I) $\|a \cdot b\| \le \|a\| \cdot \|b\|$

(II) $\|a^2\| = \|a\|^2$

(III) $\|a^2\| \le \|a^2 + b^2\|$

орынлы болса, бунда «$\circ$» – Йордан көбеймеси. Егер А-Банах кеңислигиниң түйинлеси болса, онда А–JBW–алгебра делинеди. Бул жағдайда [7, Theorem 3.9] муўапық

$$A = A_{ex} \oplus A_{sp}$$

бунда A_{ex}–экпоненциал Йордан алгебра ҳәм A_{sp} JW–алгебраға Йордан алгебрасы изоморф болады (яғный Комплекс Гильберт кеңислигинде өз-ара түйинлес операторлардың Йордан алгебрасының күшсиз туйықланыўы).

[25. теорема 3.9] да A_{ex} – алгебра толық баян етилген ҳәм бул жумыста JW–алгебраны үйрениў менен шегараланамыз. Бундай А алгебра I-түр деп аталады, егер $\exists e \in A$ орайы 1 ге тең өз ишине алатуғын *e*-абеллик идемподент, яғный операторлар көплигинде *e*A*e*-коммутатив болады.

I-түр алгебра А I_n-түр делинеди, бунда n–базы-бир санлар координаталары. Егер сондай $\{e_\alpha, \alpha \in \Delta\}$ ортогонал семейcтволардан ибарат n-Абель проекторы А да $\sum_\alpha l_\alpha = 1$ ҳәм ҳәр қандай $\alpha \neq \beta,\ S_{\alpha\beta}$ симметрик бар болып, $l_\beta = S_{\alpha\beta} l_\alpha S_{\alpha\beta}$. (Бунда $S_{\alpha\beta}$–А алгебраның симметриялық элементи S^2=1).

[17] жумыста 15 ҳәм 16 теоремалар бойынша ҳәр қандай 1-түр JW-алгебра A бирден бир көринисте сәйкес кординал санлар $n(\alpha)$ диң $I_{n(\alpha)}$-түр JW-алгебраларының туўры қосындыларына жайылады. Солай етип, I-түр JW-алгебраларды изертлеўде I_n-түр JW-алгебраларды қарастырыў жеткиликли.

n=1 болғанда [1] ди 2.3-тастыйқлаўға муўапық I_n-түр JW-алгебра A компакт Хаусдорф гиперстоун X-кеңисликтеги ҳақыйқый өзгериўшили үзликсиз функциялардың C(X,R)-Йордан алгебрасы I_2-түр JW-алгебралары [24]-жумыста изертленген ҳәм n≥3 I_n-түр JW-алгебраларды қарастырыўда тоқтаймыз. Бундай алгебраларды изертлеўде күшсиз туйық ассоциотив алгебралардан ибарат A-алгебраны қарастырамыз. Бул жерде тензор көбеймеге жайылады ҳәм тензор жайылмасы ушын биринши жайылманы келтиремиз. Ендигиден баслап ҳәмме ўақыт ҳақыйқый санлар көплиги R, комплес санлар көплиги C, ал квартернион санлар көплиги H арқалы белгилеймиз.

Егер V, W ҳақыйқый векторлық кеңисликлер болса, онда $V \otimes_R W$ арқалы V ҳәм W кеңисликлердиң R санлар тензор көбеймесин белгилеймиз. Егер V, W ҳақыйқый Гильберт кеңисликлери болса, онда $V \otimes_R W$ сәйкес ишки көбеймелерден дүзилген норма

$$\langle v_1 \otimes w_1,\, v_2 \otimes w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \langle w_1, w_2 \rangle$$

$\forall v_1, v_2 \in V$ ҳәм $w_1, w_2 \in W$. Егер H комплекс ямаса квартенион Гильберт кеңислигиниң ишки көбеймеси $(h,k) \to \langle h,k \rangle$ болса, онда H кеңислигин ҳақыйқый Гильберт кеңислиги H_r–деп қараймыз, бунда $(h,k) \to \mathrm{Re}\langle h,k \rangle$ ишки көбеймеге сәйкес болады. Егер M комплекс Гильберт кеңислиги H тың күшсиз туйық ҳақыйқый *-алгебрасының операторлары болса, онда H_r дағы операторлар алгебрасын, $L_R(H_r)$-ниң M күшсиз туйық ҳақыйқый *-үлес алгебрасы деп есаплаймыз.

Лемма 2.1.1. Мейли комплекс Гильберт кеңислигинде A-күшсиз туйық ҳақыйқый *-алгебра болсын.

a) $A = B \oplus C$, бунда B орайы инвалюция ҳәр бир элемент бойынша қозғалмастан қалдырады ҳәм бунда C-орайы $i^2 = -1,\, i^* = -i$ шәртин қанаатландыратуғын элементлерден ибарат.

b) Егер ҳәр қандай B дағы идемпотент орайласқан ҳәм B ның орайы өз-ара түйинлес элементлерден ибарат болса, онда $B = D \oplus E$. бул жерде D да инволютив бирдейликлер ҳәм E орайы квартенионлар колца үстинде анықланған.

Тастыйқлаў 2.1.2. Мейли N күшсиз туйық ҳақыйқый *-алгебра комплекс Гильберт кеңислигинде сондай N_{Sa}-абеллик болсын. Сонда N_{Sa} да ортогонал идемпотентлер p, q, r бар болып, p+q+r=1 ҳәм X, Y, Z Хаусдорф гиперстоун кеңисликлер болып, бунда pN *–изоморф C(X,R), qN *–изоморф C(Y,C) ҳәм rN *–изоморф C(Z,H) болады.

Дәлиллеў. Лемма 2.1.1. a) бөлимине муўапық орайласқан $q \in N$ проекторы бар болып, сондай qN *–изоморф W^*–алгебрадағы ҳәм сондай *(1-q)N* орайы *(1-q)*N_{Sa} өзинде тутады. N_{Sa} –абель болғанлықтан qN *–изоморф C(Y,C) ҳәр қандай компакт Хаусдороф гипорстоун Y кеңислиги. Егер (1-q)N орайы *(1-q)*N_{Sa} тең екенлигин көрсетсек ҳәм ҳәр қандай *(1-q)N* идемпотент *(1-q)N* орайласқан лемма b) бөлими келип шығады. Элементар есаплаўлар лемма 3.1[9] дағы соны көрсетеди.

(1-q)N_{Sa} операторлар көбеймесиниң коммутатив екенлиги, ҳәр қандай өз-ара түйинлес идемпотентлер (1-q)N ассиметрия түйинлес элементар коммутатив болады. Бирақ 2.3–тастыйықлаў [22] ҳәм 1.3.1–тастыйықлаў [19] аналоги *(1-q)*N_{Sa} идемпотентлерден ибарат. Ҳәр қандай *(1-q)*N_{Sa} элемент орайласқан. Енди (1-q)N ге тийисли ҳәр қандай *e* өз-ара түйинлес усы орайда екенлигин көрсетиў қалды. e–$e+e^*$–коммутативлигин, e^*-коммутативлигин ҳәм

$$\| e(e-e^*) \|^2 = \| e(e-e^*)e(e-e^*) \| = \| (e-ee^*)(e^*-ee^*) \| = \| ee^* - ee^* - ee^* + ee^* \| = 0 .$$

Солай етип, $e=ee^*$ ҳәм $e=ee^*$ ийе боламыз. Буннан $e=e^*$ екенлиги келип шығады. Мейли E Банах кеңислиги, үлес алды E_* – кеңислигине ийе болып, ал Ω локал компакт Хаусдороф кеңислиги ҳәм μ оң Радон өлшеми Ω ди болсын. $M_\infty^w(\Omega,\mu,E)$-арқалы $f:\Omega \to E$ функциялардың ҳақыйқый векторлық кеңислигин белгилеймиз.

(i) ҳәр қандай $p \in E_*,\ z \to p(f(z)),\ \mu$-өлшемли ҳақыйқый функция ҳәм

(ii) $z \to \| f(z) \|$–шегараланған

$N_\infty^w(\Omega,\mu,E)$-арқалы үлес $M_\infty^w(\Omega,\mu,E)$ кеңислигин аңлатамыз, бул сондай f функциялардан ибарат ҳәр қандай $p \in E_*,\ p \cdot f$ дерлик μ ге тең. Басқа жеринде 0 ге тең. $L_\infty^w(\Omega,\mu,E)$ кеңислиги $M_\infty^w(\Omega,\mu,E)$ ды $N_\infty^w(\Omega,\mu,E)$ қатнасынан анықланады.

Ендигиден баслап теоремада $L_H(l_2(\Lambda,H))$ арқалы H-сызықлы сәўлелендириўи шеп H-модул ($l_2(\Lambda, H)$) да. Қолайлық ушын теоремада дәлиллеў R=F_1, C=F_2 ҳәм H=F_3 ушын жеткиликли.

Теорема 2.1.3. Мейли A, I_n-түр JW-алгебра, бунда n≥3 ҳәм Λ-n, кординаллар көплиги болсын. Сонда орайлық идемпотентлер $P_1, P_2, P_3, P_4 \in A,$ сондай $P_1 + P_2 + P_3 = 1$, локал компакт Хаусдорф кеңислиги $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ҳәм сәйкес μ_1, μ_2, μ_3 оң Радон өлшеўлери ушын $1 \le i \le 3$, $P_i A$ изоморф $L_\infty^w(\Omega_i, \mu_i, (E_i)_{sa})$, бул жерде $E_1 = L_R(l_2(\Lambda, R))$, $E_2 = L_C(l_2(\Lambda, C))$, $E_3 = L_H(l_2(\Lambda, H))$ ҳәм күшсиз $L_\infty -$ кеңислиги қозғалмас точкалардың көбеймесинен ибарат.

Дәлиллеў. 1 ҳәм 2 тастыйықлаўлардан орайласқан идемпотентлер A да бар болып $P_1 = p \otimes 1$, $P_2 = q \otimes 1$, $P_3 = r \otimes 1$, сондай $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ ҳәм $P_i A$ изоморф $N_i \overline{\otimes}_R L_R(l_2(\Lambda, R))_{sa}$ ҳәр қандай $1 \le i \le 3$, бунда N_i – *-изоморф $L_\infty(\Omega_i, \mu_i, F_i)$ базы бир локал компакт Хаусдорф кеңисликлери $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ҳәм оң өлшеўли Радон өлшеми μ_1, μ_2, μ_3. $L_\infty(\Omega_i, \mu_i, F_i)$ алгебрасын орнына ҳақыйқый Гильберт кеңислиги $L_2(\Omega, \mu_i, (F_i)_r)$ алып ҳәм 2–тастыйықлаўдың ҳақыйқый аналогин $N_i \overline{\otimes}_R E_1$, $L_\infty(\Omega_i, \mu_i, F_i) \overline{\otimes}_R E_1$ теңлестиремиз. Соңғы кеңислик, онда

$$L_2(\Omega, \mu_i, (F_i)_r) \overline{\otimes}_R l_2(\Lambda, R)$$

болып ҳәм төмендегилерден биреўи болады:

$$(F_i)_r \otimes_R [L_2(\Omega_i, \mu_i, R) \overline{\otimes}_R l_2(\Lambda, R)] \quad \text{ҳәм}$$
$$(F_i)_r \otimes_R L_2(\Omega_i, \mu_i, l_2(\Lambda, R)).$$

Буннан $L_\infty(\Omega_i, \mu_i, F_i) \overline{\otimes}_R E_1$ изоморф $F_i \otimes_R [L_\infty(\Omega_i, \mu_i, R) \overline{\otimes}_R E_1]$ екенлиги келип шығады.

Мейли $\{e_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ өз-ара ортогонал базислер $l_2(\Lambda, R)$ да, U_α изометриялық сызықлы сәўлелендириў $x \to x \otimes e_\alpha$, $L_2(\Omega_i, \mu_i, R) \to H_i = L_2(\Omega_i, \mu_i, l_2(\Lambda, R))$ ҳәм ҳәр қандай сызықлы T сәўлелендириўи H_i да $T_{\alpha\beta} = U_\alpha^* T U_\beta$. 4-тастыйықлаўдың ҳақыйқый аналоги $L_\infty(\Omega_i, \mu_i, F_i) \overline{\otimes}_R E_1$ сонда тек сонда ҳәр қандай $T_{\alpha\beta}$ сәўлелендириўи $L_\infty(\Omega_i, \mu_i, R)$. Егер

$[h],[g]$арқалы L_2– кеңисликтеги функциялар h ҳәм g эквивалент классларға сәйкес болса, онда $U_\alpha^*[h]=[g]$, бул жерде

$$g(w)=\langle h(w),e_\alpha\rangle$$

ҳәр қандай $w\in\Omega_i$. Усы нәтийжелерди қолланып есапласақ $\sup_\beta \sum_\alpha \|T_{\alpha\beta}\|^2<\infty$ ийе боламыз. Себеби ҳәр қандай элемент $T\in L_\infty(\Omega_i,\mu_i,F_i)\overline{\otimes}_R E_1$, яғный сәўлелендириўи $w\to T_w$,

$$T_w e_\beta=\sum \tilde{T}_{\alpha\beta}(w)e_\alpha$$

анықланады, бунда $\tilde{T}_{\alpha\beta}\in M_\infty(\Omega_i,\mu_i,R)$ элементи $T_{\alpha\beta}$ сәйкес келиўши $\|T_{\alpha\beta}\|=\|\tilde{T}_{\alpha\beta}\|$.

Ҳақыйқый аналоги [25.теорема 1] бойынша E_{1*} элементлери $T\to\sum_i\langle Tx_i,y_i\rangle$ сәўлелендиреди, бунда $\{x_i:i\in N\}$ ҳәм $\{y_i:i\in N\}$ жыйнақлы элементлер $l_2(\Lambda,R)$ – кеңисликте.

$L_\infty(\Omega_i,\mu_i,F_i)\overline{\otimes}_R E_1\to L_\infty^w(\Omega_i,\mu_i,E_1)$ сызықлы биекция. Бул биекция операторлар нормасын көбеймеси ҳәм инволюция норманың супремумы ҳәм қозғалмас точканың көбеймеси ҳәм инволюциясы алып өтеди.

§ 2.2. Картан фактор түрлери

Йордан *- үшлик U – абеллик делинеди, егерде

$$\{uv^*\{xy*z\}\}=\{\{uv^*x\}y*z\}\quad \forall x,y,z,u,v\in U$$

Трипотент $e \in U$ абеллик делинеди, егер $U_1(e)$–абеллик болса, онда минимал делинеди, егер $U_1(e) = Ce$, толық делинеди, егер $U_0(e) = 0$ ҳәм унитар делинеди, егер $U = U_1(e)$.

(e_1, e_2, e_3, e_4)–төртлик трипотентлер U да төртмүйешлик делинеди, егер e_i коллинеар e_{i+1}, $e_i \perp e_{i+2}$ ҳәм $2\{e_i e_{i+1}^* e_{i+2}\} = e_{i+3}$, $i = 1,2,3$.

Лемма 2.2.1. Мейли e, f, g трипотентлер U да e коллинеар f коллинеар g ҳәм $e \perp g$ болсын. Онда $(e, f, g, 2\{ef^* g\})$–төртмүйешлик болады.

Лемма 2.2.2. Мейли e, f ҳәм g трипотентлер ушын e коллинеар f коллинеар g ҳәм $g \in U_{\frac{1}{2}}(e)$. Онда e коллинеар g.

Енди Картан факторларды келтирип өтемиз [12-14].

Мейли n ҳәм m өлшеўли H ҳәм K комплекс Гильберт кеңисликлери берилген болып, $j \in H$ түйинлеси ушын $z^t = jz^* j$ ҳәр қандай $z \in B(H)$.

Сонда $R_{mn} = B(H, K)$–кеңислиги

$$\{xyz\} = \frac{1}{2}\left(xy^* z + zy^* x\right) \tag{2.2.1}$$

көбеймеге ҳәм операторлар нормасына қарата Картан фактор *туўрымүйешлик түри* делинеди. R_{mn} ҳәмме ўақыт $B(H \oplus^2 K)$ жайластырыў мүмкин. $S_n = \left\{z \in B(H) : z^t = -z\right\}$, (2.2.1) көбеймеге ҳәм операторлар нормасына қарата Картан фактор *симплектикалық түри*, ал $H_n = \left\{z \in B(H) : z^t = z\right\}$, (2.2.1) көбеймеге ҳәм операторлар нормасына қарата Картан фактор *эрмитлик түри* делинеди.

R_{mn}, S_n ҳәм H_n түрлердиң изоморфлығы n ҳәм m байланыслы, бирақ j-ға байланысы жоқ.

Мейли JW^*– үшлик Sp_n– n өлшеўли комплекс спин факторға изоморф болады. Онда Sp_n– Картан фактордың *спин түри* делинеди.

$M_{1,2}(O)$– кеңислиги

$$\{xy^*z\} = \frac{1}{2}\left(x\left(y^*z\right) + z(y^*x)\right),$$

бунда $\left(x_1, x_2\right)^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$, көбеймеге қарата 1×2 матрицалар үстинде O–комплекс Кэли алгебрасы.

$H_3(O)$–кеңислиги 3×3–эрмит матрицалар O үстинде $a\circ b = \frac{1}{2}\left(ab + ba\right)$ көбеймеге қарата анықланған.

$H_3(O)$– “$\circ$” көбеймеге қарата JB^*- алгебра болады.

Картан факторлары 1-түр JBW* – үшлик фактор болады. Мейли A абеллик фон Нейман алгебрасы болсын. Егер С – Картан фактор түрлериниң биреўи болса, онда $A\bar{\otimes} C$ тензор көбейме 1-түр JBW* – үшлик болады.

Теорема 2.2.3. (Классификациялық теорема).

Мейли U– 1 түр JBW*–үшлик болсын. Онда $\left(A_i\right)_{i\in I}$ абеллик фон Нейман алгебралары семейдствосы бар болып ҳәм $\left(C_i\right)_{i\in I}$– Картан факторлары семейдствосы ушын U – кеңислиги $\oplus_{i\in I}^{\infty} A_i \bar{\otimes} C_i$ изометриялы изоморф болады.

Салдар 2.2.4. 1-түр JBW*–үшлик факторы Картан факторлары болады.

Классификациялық теореманы дәлиллеў ушын бир неше анныќламалар ҳәм тастыйықлаўлар келтиремиз.

Егер U– 1 түр JBW*–үшлик болса, онда $e\in U$ толық трипотент бар болып, $U_1(e)$ 1 түр JBW*–алгебра болады.

1 түр JBW*–алгебрасы l^{∞}–сумма бойынша $I = A\bar{\otimes} B$ күшсиз *–туйық идеалларға жайылады, бунда A абеллик фон Нейман алгебра, B– 1 түр фактор JBW*–алгебра.

Ал JBW*–үшлик болса, онда B– Картан факторлары төмендегилердиң биреўине изоморф болады:

R_{nn}	(онда I туўрымүйешлик түри делинеди),
S_{2n}	(I симплектикалық түри) $n > 2$,
H_n	(I эрмитлик түри) $n \geq 2$,
Sp_n	(спин түри)

$H_3(O)$ (I экспоненциаллық түри)

Егер n проекторлардың ортогонал семействосы орайы 1 ге есели ҳәм қосындысы 1 ге тең болса, онда JBW*–алгебра I_n –түр делинеди.

Егер I_2– түр ҳәм ҳәр қандай күшсиз *-туйық идеал өзинде кординалы n ге тең болған максимал ортогонал $(S_i)_{i\in I}$ симметриялардың семействосы болса, онда JBW*–алгебра $I_{2,n}$–түр делинеди.

e–толық трипотентке сәйкес 1 түр JBW*–үшлик U, $I_{2,n}$–түр болып, туўрымүйешлик, симпликтикалық, эрмитлик ямаса эксроненциал түрлер болады, ***e*** трипотентине сәйкес болса, онда $U_1(e)$ – сәйкес түрлери ушын JBW*–алгебра болады.

Симплектикалық решетка деп $\{u_{ij} : i, j \in I, i \neq j\}$ минимал дара изометриялар семействасына айтылады, яғный төмендеги шәртти қанатландыратуғын

$u_{ij} = -u_{ji}$; $u_{ij}\,\mathrm{T}u_{ij}$, егер $\{i,j\}\cap\{k,l\} = \varnothing$, $u_{ij} \perp u_{kl}$ егер $\{i,j\}\cap\{k,l\} = 0$;

$2\{u_{ij}u_{il}u_{kl}\} = u_{kj}$ ҳәр қыйлы i,j,k,l ушын ҳәр қандай u_{ij} - минимал болып, олар арқалы

$$u_{ij}u_{kl}^{*}u_{ij} = \delta_{(i,j),(k,l)}u_{ij}$$

аңлатыў мүмкин

Мейли $\{u_{ij}\}$– симпликтикалық решетка Y-те w^*- қосынды болсын. Ал $\Psi : Y \to A(H,J)$ – үшлик изоморфизм $\Psi(u_{ij}) = U_{ij}$ – көринисинде анықланған, бунда $\{U_{ij}\} = \phi_j \otimes \phi_i - \phi_i \otimes \phi_j$, ортонормал базис ушын $\{\phi_\lambda\}$

Лемма 2.2.5. Ҳәр қандай индекслер ушын i,j,k,l,m

$$u_{ik}u_{kl}^{*}u_{il} = u_{ij}u_{jm}^{*}u_{im}$$

ҳәм $1 \le i \le n,$ $e_{ii} = u_{ij}u_{jm}^{*}u_{im}$ – көринисте анықланады, нольден өзгеше ортогонал дара изометриялар.

Дәлиллеў. Бизлер $u_{ij} = -u_{ji}$ қатнасты кайтадан қолланамыз. Мейли i, j, k, l, m-хәр қыйлы болсын. Сонда $u_{ij}\overset{*}{u}_{kl} = 0$ ҳәм сонлықтан

$$\begin{aligned} u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il} &= 2\{u_{ij}u_{ij}u_{ik}\}\overset{*}{u}_{kl}u_{il} \\ &= (u_{ij}\overset{*}{u}_{ij}u_{ik} + u_{ik}\overset{*}{u}_{ij}u_{ij})\overset{*}{u}_{kl}u_{il} \\ &= u_{ij}\overset{*}{u}_{ij}u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il} + 0 \\ &= u_{ij}(u_{kl}\overset{*}{u}_{ik}u_{ij}) + u_{ij}\overset{*}{u}_{ik}u_{kl} \\ &= 2u_{ij}\{u_{ij}u_{ik}u_{kl}\}^{*}u_{il} \\ &= u_{ij}(-u_{lj})^{*}u_{il} = u_{ij}\overset{*}{u}_{jl}u_{il}. \end{aligned}$$

Усыған уқсас, егер m, l, i, k хәр қыйлы болып, u_{il} – дың орнына $2\{u_{im}u_{im}u_{il}\}$ алмастырсақ , $u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il} = u_{ik}\overset{*}{u}_{km}u_{im}$ теңликке ийе боламыз. Сонда

$$u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il} = \ldots\ldots\ldots = u_{ik}\overset{*}{u}_{km}u_{im}$$

Жоқарыда келтирилген теңликлерден соңғы теңлик келип шығады.

Бизлер енди $e_{ii} \neq 0$ орынлы екенлигин көрсетемиз.

Мейли ҳәр қандай i-ушын $e_{ii} = 0$ болсын. Ҳәр кыйлы i, k, l индекслерде $u_{ik}\text{Т}u_{kl}$ ҳәм $u_{kl}Tu_{il}$ сондай

$$\begin{aligned} u_{kl} &= u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}u_{kl} + u_{kl}\overset{*}{u}_{ik}u_{ik} \\ &= u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}(u_{il}\overset{*}{u}_{il}u_{kl} + u_{kl}\overset{*}{u}_{il}u_{il}) + (u_{il}\overset{*}{u}_{il}u_{kl} + u_{kl}\overset{*}{u}_{il}u_{il})\overset{*}{u}_{ik}u_{ik} \\ &= (u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}u_{il}\overset{*}{u}_{il}u_{kl} + u_{ik}\overset{*}{e}_{ii}u_{il}) + (u_{il}\overset{*}{e}_{ii}u_{ik} + u_{kl}\overset{*}{u}_{il}u_{il})\overset{*}{u}_{ik}u_{ik} \\ &= (u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}u_{il}\overset{*}{u}_{il}u_{kl} + 0) + (0 + u_{kl}\overset{*}{u}_{il}u_{il})\overset{*}{u}_{ik}u_{ik} \\ &= L_{ik}L_{il}u_{kl} + u_{kl}R_{il}R_{ik} \end{aligned}$$

Бул жерде $L_{ik} = u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}$ ҳәм $R_{ik} = \overset{*}{u}_{ik}u_{ik}$ оң ҳәм шеп проектларды аныклайды.

Симпликтикалық решетканың анықламасынан, егер ҳәр қыйлы $p,k,l,m(n\geq 5)$ болса, онда $u_{pm}=2\{u_{pk}u_{kl}u_{ml}\}$ соңғы теңликтен u_{il} ҳәм u_{ik} проекторлардың комутативлигинен төмендегише қатнас орынлы

$$u_{pm}=2\{u_{pk}u_{kl}u_{ml}\}=0$$

Буннан қарама қарсылыққа ийе боламыз. Сонда $e_{ii}\neq 0$ ҳәм дара изометриясы

$$\begin{aligned}
&e_{ii}\overset{*}{e}_{ii}e_{ii}=u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il}\overset{*}{u}_{il}u_{kl}\overset{*}{u}_{ik}(u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il})\\
&=-u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il}\overset{*}{u}_{il}(u_{kl}\overset{*}{u}_{ik}u_{il})\overset{*}{u}_{kl}u_{ik}\\
&=u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}(u_{il}\overset{*}{u}_{il}u_{il})\overset{*}{u}_{ik}u_{kl}\overset{*}{u}_{kl}u_{ik}\\
&=u_{ik}(\overset{*}{u}_{kl}u_{il}\overset{*}{u}_{ik})u_{kl}\overset{*}{u}_{kl}u_{ik}\\
&=-u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}u_{il}(\overset{*}{u}_{kl}u_{kl}\overset{*}{u}_{kl})u_{ik}\\
&=-u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}(u_{il}\overset{*}{u}_{kl}u_{ik})=u_{ik}\overset{*}{u}_{ik}e_{ii}=u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}(u_{ik}\overset{*}{u}_{km}u_{im})\\
&=u_{ik}\overset{*}{u}_{km}u_{im}=e_{ii}
\end{aligned}$$

Нәтийжеде ортогонал екенлигин корсетемиз

$\overset{*}{e}_{ii}e_{jj}=(u_{il}\overset{*}{u}_{lk}u_{ki})^{*}u_{jp}\overset{*}{u}_{pm}u_{mj}=\overset{*}{u}_{ki}u_{lk}\overset{*}{u}_{il}u_{jp}\overset{*}{u}_{pm}u_{mj}=0$ ҳәм $\overset{*}{e}_{ii}e_{jj}=0$ Лемма дәлийленди.

Лемма 2.2.6. Төмендеги қатнаслар орынлы:

1. $e_{ii}\overset{*}{u}_{ij}e_{ii}=e_{ii}\overset{*}{u}_{jj}e_{ii}=0$ ҳәр қандай $i\neq j$
2. $\{e_{ii}\}\cup\{u_{ij}\}$ сызықлы ғәрессиз көплик болады.
3. $u_{ij}\perp e_{kk}$ ҳәр қандай $k\notin\{i,j\}$, онда $u_{ij}\in A_0(e_{kk})$
4. $\{e_{ii}e_{ii}u_{ij}\}=u_{ij}/2=\{e_{jj}e_{jj}u_{ij}\}$ онда $u_{ij}\in A_1(e_{ii})\cap A_1(e_{jj})$

Дәлиллеў.

$$\begin{aligned}
&e_{ii}\overset{*}{u}_{ij}e_{ii}=u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il}\overset{*}{u}_{ij}u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il}=-u_{il}\overset{*}{u}_{kl}u_{ik}\overset{*}{u}_{ij}u_{ik}\overset{*}{u}_{kl}u_{il}\\
&=-u_{il}\overset{*}{u}_{kl}\{u_{ik}u_{ij}u_{ik}\}\overset{*}{u}_{kl}u_{il}=0
\end{aligned}$$

Себеби $\{u_{ik}u_{ij}u_{ik}\} \in A_{2-1+2}(u_{ik}) = 0$ Сонда

$$e_{ii}e^*_{jj}e_{ii} = u_{ik}u^*_{kl}(u_{il}u^*_{jp})u_{pm}u^*_{jm}u_{ik}u^*_{kl}u_{il} = 0$$

1) ҳәм 2) қатнаслардың дәлиллениўи 1) ден келип шығады. 3) – қатнасты дәлиллеймиз, бириншиден $e^*_{kk}u_{ij} = (u_{kl}u^*_{lm}u_{mk})^* u_{ij} = u^*_{mk}u_{lm}u^*_{kl}u_{ij}$ нолге тең болады, егер $\{i,j\} \cap \{l,k\} = \emptyset$ ҳәм $u_{ij}e^*_{kk} = 0.$ Солай етип $2\{u_{ij}u_{ij}e_{kk}\} = u_{ij}u^*_{ij}e_{kk} + e_{kk}u^*_{ij}u_{ij} = 0,$ ал бул $u_{ij} \in A_0(e_{kk})$ эквивалент. Соңғы 4) қатнас көрсетемиз.

$$\begin{aligned}
&2\{e_{ii}e_{ii}u_{ij}\} = e_{ii}e^*_{ii}u_{ij} + u_{ij}e^*_{ii}u_{ii} \\
&= u_{ip}u^*_{pm}u_{im}u^*_{il}u_{kl}u^*_{ik}u_{ij} = u_{ij}u^*_{ik}u_{lk}u^*_{il}u_{im}u^*_{mp}u_{ip} \\
&= 2u_{ip}\{u_{pm}u_{im}u_{il}\}^* u_{kl}u^*_{ik}u_{ij} + 2u_{ij}u^*_{ik}u_{lk}\{u_{il}u_{im}u_{mp}\}^* u_{ip} \\
&(\sin ce\, u^*_{pm}u_{kl} = u_{kl}u^*_{pm} = 0) \\
&= u_{ip}u^*_{pl}u_{kl}u^*_{ik}u_{ij} - u_{ij}u^*_{ik}u_{lk}u^*_{pl}u_{ip} \\
&= 2u_{ip}\{u_{pl}u_{kl}u_{ik}\}^* u_{ij} - 2u_{ij}\{u_{ik}u_{lk}u_{pl}\}^* u_{ip} \\
&= u_{ip}(-u_{pi})^* u_{ij} + u_{ij}u^*_{ip}u_{ip} \\
&= 2\{u_{ip}u_{ip}u_{ij}\} = u_{ij}
\end{aligned}$$

$v = \sum e_{kk}$ болғанлықтан 1)де $e_{ij}v^*e_{lk} = \delta_{jl}e_{ik}$ ҳәм $ve^*_{ij}v = e_{ji}$ теңликлердиң орынлы екенин көрсетиўимиз керек. Егер $j \neq l$ болса, онда $e_{ij}v^*e_{lk} = e_{ii}e^*_{ii}u_{ij}e^*_{jj}(e_{ii}v^*e_{ll})$, $e^*_{ll}u_{lk}e^*_{kk}e_{kk} = 0.$ Енди $j = l$ жағдайын қарастырамыз.

$$e_{ij}v^*e_{jk} = e_{ii}e^*_{ii}u_{ij}e^*_{jj}e_{jj}(\sum_q e_{qq})^* e_{jj}e^*_{jj}u_{jk}e^*_{kk}e_{kk} = e_{ii}e^*_{ii}u_{ij}e^*_{jj}u_{jk}e^*_{kk}e_{kk}$$

Бул төмендегише бес жағдайға келеди

- $e_{ii}v^*e_{ii} = e_{ii};$ бул теңлик орынлы, себеби

$e_{ii}v^{*}e_{ii} = e_{ii}e_{ii}^{*}e_{ii} = e_{ii}$

- $e_{ii}v^{*}e_{ik} = e_{ik}$, $k \neq i$ себеби $e_{ii}v^{*}e_{ik} = e_{ii}v^{*}e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ik}e_{kk}^{*}e_{kk} = e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ik}e_{kk}^{*}e_{kk} = e_{ik}$

- $e_{ij}v^{*}e_{jj} = e_{ij}$, $i \neq j$; себеби $e_{ij}v^{*}e_{jj} = e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}e_{jj}^{*}e_{jj}v^{*}e_{jj} = e_{ij}$

- $e_{ij}v^{*}e_{ij} = e_{ii}$, $i \neq j$; себеби

$$\begin{aligned}
e_{ij}v^{*}e_{ji} &= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}e_{jj}^{*}e_{jj}v^{*}e_{jj}e_{jj}^{*}u_{ji}e_{ii}^{*}e_{ii} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}e_{jj}^{*}u_{ji}e_{ii}^{*}e_{ii} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}u_{jk}^{*}u_{kl}u_{jl}^{*}u_{ji}e_{ii}^{*}e_{ii} \\
&= 2e_{ii}e_{ii}^{*}\{u_{ij}u_{jk}u_{kl}\}u_{jl}^{*}u_{ji}e_{ii}^{*}e_{ii}
\end{aligned}$$

$$(by Lemma 4.2(c), e_{ii}^{*}u_{kl} = 0)$$

$$\begin{aligned}
&= -e_{ii}e_{ii}^{*}u_{il}u_{jl}^{*}u_{ji}e_{ii}^{*}e_{ii} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}e_{ii}e_{ii}^{*}e_{ii} = e_{ii}
\end{aligned}$$

- $e_{ij}v^{*}e_{jk} = e_{ik}$, һәр қандай i, j, k; себеби

$$\begin{aligned}
e_{ij}v^{*}e_{jk} &= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}\left(e_{jj}^{*}e_{jj}e_{jj}^{*}e_{jj}e_{jj}^{*}\right)u_{jk}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}e_{jj}^{*}u_{jk}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}\left(u_{jm}u_{mp}^{*}u_{jp}\right)^{*}u_{jk}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}u_{jp}^{*}u_{mp}u_{jm}^{*}u_{jk}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= 2e_{ii}e_{ii}^{*}\{u_{ij}u_{jp}u_{mp}\}u_{jm}^{*}u_{jk}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{im}u_{jm}^{*}u_{jk}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= 2e_{ii}e_{ii}^{*}\{u_{im}u_{jm}u_{jk}\}e_{kk}^{*}e_{kk} \\
&= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ik}e_{kk}^{*}e_{kk} = e_{ik}
\end{aligned}$$

Нәтийжеде

$$
\begin{aligned}
e_{ij} &= e_{ii}e_{ii}^{*}u_{ij}e_{jj}^{*}e_{jj} \\
&= u_{ik}e_{kl}^{*}u_{il}u_{il}^{*}u_{kl}\left(u_{ik}^{*}u_{ij}u_{jm}^{*}\right)u_{pm}u_{jp}^{*}u_{jp}u_{pm}^{*}u_{jm} \\
&= 2u_{ik}u_{kl}^{*}u_{il}u_{il}^{*}u_{kl}\left\{u_{ik}u_{ij}u_{jm}\right\}^{*}u_{pm}u_{jp}^{*}u_{jp}u_{pm}^{*}u_{jm} \\
&= -u_{ik}u_{kl}^{*}u_{il}u_{il}^{*}u_{kl}\left\{u_{mk}^{*}u_{pm}u_{jp}^{*}\right\}u_{jp}u_{pm}^{*}u_{jm} \\
&= u_{ik}u_{kl}^{*}u_{il}\,(u_{il}^{*}u_{kl}u_{jk}^{*})u_{jp}u_{pm}^{*}u_{jm} \\
&= -u_{ik}u_{kl}^{*}u_{il}u_{ij}^{*}u_{jp}u_{pm}^{*}u_{jm} \\
&= -e_{ii}u_{ii}^{*}e_{jj}
\end{aligned}
$$

ҳәм сонлықтан $ve_{ij}^{*}v = -ve_{jj}^{*}u_{ij}e_{ii}^{*}v = e_{ji}$. Буннан 1) қатнас орынлы екенлиги келип шығады.

Бирлик матрица $\{e_{ij}\}$ системасы байланыслы емес, $sp_c\{e_{ij}\}$ ны $sp_c\{E_{ij}\}$ $*-$изоморфизмди $\tilde{\Psi}-$арқалы анықланады. Буннан 2) қатнас келип шығады. Лемма дәлилленди

Мейли $\{u_{ij} : i \in \Lambda,\ j \in \Sigma\}-$туўры мүйешли решетка Y-те w^{*}-қосынды болсын. Ҳәр қандай u_{ij}- минимал дара изометрия $u_{jk} \perp u_{il}$ егер $i \neq j$ ҳәм $k \neq l$; $u_{jk}\mathrm{T}u_{il}$ егер $j = l, k \neq l$ ямаса $j \neq i\ k = l$;

$\{u_{jk}u_{jl}u_{il}\} = u_{ik}/2$ егер $j \neq i$ $k = l$; ҳәм басқа үшлик көбеймелер нольге тең болады.

Бул параграфта Y кеңислиги $B(H,K)$-кеңислигине изоморф бунда $|\Lambda| = \dim K$ ҳәм $|\Sigma| = \dim H$ [8] бойынша $u_{ij} \to E_{ij}$ сәўлелендириў Y-ты $B(H,K)$ изоморфизм орнатады, бунда $E_{ij=\phi_i \otimes \Psi_j}$ ортонормал базислер $\{\Psi_j : j \in \Sigma\}$ H та ҳәм $\{\phi_j : j \in \Lambda,\}$ K да .

$B(H,K)$-та $\{E_{ij}\}$ туўры мүйешли решетка шәртлерди қанатландырады , яғный

$E_{ij}E_{ik}^{*} = (\Psi_k \setminus \Psi_j)\phi_i \otimes \phi_i = 0, (j \neq k)$ ҳәм $\forall i$ ушын $E_{ik}^{*}E_{jk} = 0,$ $(j \neq i)$ ҳәм $\forall k$ ушын

Лемма 2.2.7. Мейли Y-жоқарыда келтирилгендей ҳәр қандай қозғалмас $i \in \Lambda\ k,l \in \Sigma,$ мәнислеринде $u_{il}u_{ik}^{*} = 0$ ҳәм $k \neq l$ ямаса $i,j \in \Lambda,\ k \in \Sigma,$ $u_{ik}^{*}u_{jk} = 0$ ҳәм $i \neq j$ болсын. Сонда а) $\forall j \in \Lambda, \ p,q \in \Sigma, \quad p \neq q, \quad u_{jp}u_{jq}^{*} = 0$ ҳәм

$$\forall\, p,q \in \Lambda,\ r \in \Sigma, \quad p \neq q, \quad u_{pr}^{*}u_{qr} = 0$$

в) Y кеңислиги A - да үлес үшлик изоморф ҳәм $B(H,K)$ толық изометрия болады.

Дәлиллеў. Бизлер $u_{il}u_{ik}^{*} = 0$ жағдайын дәлиллеймиз. Ал қалған жағдайларда симметрия бойынша келип шығады.

Дәслеп $''i-$қатар$''$ менен шуғылланамыз, бунда i,k,l қозғалыс мәнислер. Егер $p \notin \{k,l\}$ болса, онда

$$\begin{aligned}
u_{ip}u_{ik}^{*} &= 2\{u_{il}u_{il}u_{ip}\}u_{ik}^{*} \\
&= \left(u_{il}u_{il}^{*}u_{ip} + u_{ip}u_{il}^{*}u_{il}\right)u_{ik}^{*} \\
&= u_{il}(u_{il}^{*}u_{ip}u_{ik}^{*}) \\
&= -u_{il}u_{ik}^{*}u_{ip}u_{il}^{*}(\sin ce\{u_{ik}u_{ip}u_{il}\} = 0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Солай етип, егер $q \notin \{p,k\}$ болса онда

$$\begin{aligned}
u_{ip}u_{iq}^{*} &= 2u_{ip}\{u_{ik}u_{ik}u_{iq}\}^{*} \\
&= u_{ip}\left(u_{ik}u_{ik}^{*}u_{iq} + u_{ip}u_{ik}^{*}u_{ik}\right)^{*} \\
&= (u_{ip}u_{iq}^{*}u_{ik})u_{ik}^{*} \\
&= -u_{ik}u_{iq}^{*}u_{ip}u_{ik}^{*} = 0
\end{aligned}$$

Бул а) қатнастың орынлы екенин көрсетеди, егер i-мәнисине ийе болса . Енди $''j-$қатар$''$ менен баслаймыз.

Егер $p \neq q$ ҳәм $j \neq i$ болса, онда

$$
\begin{aligned}
u_{jp}u^{*}_{jq} &= 2\{u_{ip}u_{iq}u_{jq}\}u^{*}_{jq} \\
&= \left(u_{ip}u^{*}_{iq}u_{jq} + u_{jq}u^{*}_{iq}u_{ip}\right)u^{*}_{jq} \\
&= u_{jq}u^{*}_{iq}u_{ip}u^{*}_{jq} \\
&= 2u_{jq}u^{*}_{iq}u_{ip}\{u_{ip}u_{iq}u_{jq}\}^{*} \\
&= u_{jq}u^{*}_{iq}u_{ip}\left(u^{*}_{iq}u_{ip}u^{*}_{jq} + u^{*}_{ip}u_{ip}u^{*}_{iq}\right) = 0
\end{aligned}
$$

Бунда а) қатнасы дәлилленди. $\forall p,q,r$ ушын $p \neq q, s \neq r$ болсын. Онда

$$
\begin{aligned}
& u^{*}_{pr}u_{qr} = 2u^{*}_{pr}\{u_{qs}u_{ps}u_{pr}\} = u^{*}_{pr}\left(u_{pr}u^{*}_{ps}u_{qs} + u_{qs}u^{*}_{ps}u_{pr}\right) = \\
& u^{*}_{pr}\left(u_{pr}u^{*}_{ps}\right)u_{qs} + \left(u^{*}_{pr}u_{qs}\right)u^{*}_{ps}u_{qr} = 0
\end{aligned}
$$

u_{qs} ҳәм u_{pr} ортогонал, $s \neq r$ ҳәм Y ти $B(H,K)$ сәўлелендиретуғын үшлик изоморфизм толық изометрия болады.

Лемма 2.2.8. Мейли Y - жоқарыда келтирилгенимиздей ҳәр қандай қозғалмас i,k,l мәнислери $u_{il}u^{*}_{ik} = 0$ ҳәм $k \neq l$ ямаса $u_{ik}u^{*}_{jk} = 0$ ҳәм $i \neq j$, Онда

а) $\forall i,k,l \;\; k \neq l$, $u^{*}_{il}u_{ik} = 0$ ҳәм $\forall\, i,j,k \;\; i \neq j \quad u_{ik}u^{*}_{jk} = 0$

б) Y - үшлик изоморфизм ҳәм $B(H,K)$ толық изометрия болады.

Салдар 2.2.9. Y - кеңислиги ранги бир болған 1- түр Картан факторына изоморф ҳәм $\{u_{\lambda}\}$ белгилеў ранги бир болған туўры мүйешли решетка.

а) Егер $u_i u^{*}_j = 0$ $\quad \forall i \neq j$ болса , онда Y , $B(H,C)$ толық изометрия.

б) Егер $u^{*}_i u_j = 0$ $\quad \forall i \neq j$ болса , онда Y , $B(C,K)$ толық изометрия.

§ 2.3. 1-түр JBW*–үшликлер

$$II_1 - түр$$

Анықламаға муўапық, егер ***e*** – абеллик толық трипотент болса, онда ***e*** трипотентине сәйкес I_1 түр JBW*–үшлик болады. Енди U ды $I_{1,n}$ түр идеаллардың туўры қосындысы көринисинде жайыў мүмкинлигин көрсетемиз.

Анықлама 2.3.1. Егер e_i–толық ҳәм $\bigcap\limits_{i\in I} U_{\frac{1}{2}}(e_i)=0$ болса, онда $(e_i)_{i\in I}$– трипотентлердиң коллинеар семействосы толық делинеди.

Анықлама 2.3.2. Егер JBW*–үшлик толық коллинеар семейство n абеллик трипотентлерден ибарат болса, онда $I_{1,n}$ түр делинеди,

Лемма 2.3.1. Егер U_1 ҳәм U_2 сәйкес түрде $I_{1,m}$ түр ҳәм $I_{1,n}$ түр JBW*–үшликлерге изоморф болса, онда $m=n$ болады, бунда *min(m,n)*$<\infty$.

Дәлиллеў. Мейли $m\le n$ болсын. Онда U_1–үшлиги $A\otimes R_{1m}$ изоморф болады, ҳәр қандай *- гомоморфизм A ны комплекс санларға киритилген гомоморфизмге $U_1\to R_{1,m}$, бунда $R_{1,m}$ – шекли өлшеўли.

Ал $U_2\to R_{1,m}$ гомоморфизми ушын толық коллинеар семействосы n трипотентлерден ибарат болып, $n\le m$ болады.

Лемма 2.3.2. Мейли e ҳәм g трипотентлер $e,g\in U$, $U_1(g)\subset U_{\frac{1}{2}}(e)$ болсын. Сонда $f=2\{gg*e\}$ ноллик емес e - проекторы ушын f коллинеар g болады.

Дәлиллеў. Мейли $G=g\square g^*$ болсын. e ҳәм f биргеликли $P_1^g(e)\in U_1(e)\cap U_1(g)$. Бирақ $U_1(g)\subset U_{\frac{1}{2}}(e)$, буннан $P_1^g(e)=0$ ҳәм $f=2Ge\in U_{\frac{1}{2}}(g)$. JB*–үшликлердиң қәсийетлерине муўапық $f\in U_1(e)$ үшлиги Йордан бирдейлигине [11]

$$f=2G\left\{ee^*e\right\}=4\left\{(Ge)e^*e\right\}-2\left\{e(Ge)^*e\right\}=2f-\left\{ef^*e\right\},\quad f=\left\{ef^*e\right\}.$$

Буннан тысқары $f=2Gf=2G\left\{ef^*e\right\}=2\left\{ff^*e\right\}-\left\{ef^*e\right\}$

JB*–үшликтиң анықламасының 2-шәртине муўапық $f=\left\{ff^*e\right\}$ болады. Сонда

$$f=2G\left\{ee^*f\right\}=\left\{fe^*f\right\}-\left\{ef^*f\right\}+\left\{ee^*f\right\}=\left\{fe^*f\right\}.$$

f, e-проектор ҳәм $f \perp (e-f)$, $f=0$ екенлигинен $e \perp g$ буннан қарама-қарсылыққа ийе боламыз, демек $f \neq 0$. Солай, етип $U_1(g) \subset U_{\frac{1}{2}}(e)$ келип шығады $\{ge^*g\}=0$, JB*–үшликлердиң қәсийетлерине бойынша

$$g-\{ff^*g\}=2\{G\{ge^*e\}+\{\{ge^*g\}g^*e\}-\{ge^*Ge\}\}=$$

$$=2\{e(Ge)^*g\}=\{ef^*g\}=\{ff^*g\}$$

буннан $g \in U_{\frac{1}{2}}(f)$. Қайтадан JB*– үшликлердиң қәсийетлеринен қолласақ $f \in U_1(e)$, $U_1(f) \cap U_1(g)=0$ келип шығады. $Q(g)$, $U_1(g)$ өз-өзине биекция ҳәм $Q(g)(U_0(f) \subset U_1(f))$ сондай $U_0(f) \cap U_1(g)=0$. Сонлықтан $U_1(g) \subset U_{\frac{1}{2}}(f)$, $f \in U_{\frac{1}{2}}(g) \cap U_1(e)$, сондай

$Q(f)(U_0(g)) \subset U_1(e) \cap U_1(g)=0$, яғный $U_0(g) \cap U_1(f)=0$.

$U_1(f) \cap U_1(g)=0$, $U_1(f) \subset U_1(g)$ келип шығады ҳәм $U_1(g) \subset U_{\frac{1}{2}}(e)$, сондай $U_1(f) \subset U_{\frac{1}{2}}(g)$. Лемма дәлилленди.

Трипотентлердиң бир текли семейтвосы

Анықлама 2.3.3. JBW*– үшликтиң бир текли семейтвосы ҳәр қандай $i \in I$ ушын абеллик трипотентлер $(e_i)_{i\in I}$ толық ортогонал семейтвосы болып, $U_{ii} \oplus U_{i0}$–кеңислиги толық m–абеллик трипотентдиң коллинеар семейтвосынан ибарат ҳәм e_i–өзинде тутады [22].

Дара жағдайда $U_{ii} \oplus U_{i0}$ да $I_{1,m}$ – түр болады. Егер $V \neq 0$ күшсиз *–туйық идеал U да ҳәм $p: U \to V$ проектор болса, онда $(p(e_i))_{i\in I}$ m-бир текли семейство V да болады. $x \in U$ күшсиз*–туйық идеалдан ибарат болса, онда $U(x)$ арқалы белгилеймиз.

Лемма 2.3.3 Мейли $(e_i)_{i\in I}$–абеллик трипотентлердиң толық ортогонал семейтвосы JBW*–үшликте $U(e_i)=U, \forall i \in I$. Онда $\forall i, j \in I$ автоморфизм бар болып U да e_i ҳәм e_j орын алмасады ҳәм e_k $(k \neq i, j)$ қозғалмай қалдырады.

Теорема 2.3.4. Мейли U –JBW*–үшлик, $(e_i)_{i\in I}$ –абеллик трипотентлер-диң U да толық ортогонал семейіствосы, $U(e_i)=U,\ \forall i\in I.$ Онда U_m –күшсиз *–туйық идеаллар семейіствосы бар болып, U изоморф $\oplus_{m\in M}^{\infty} U_m$ болады ҳәм $\left(p_m(e_i)_{i\in I}\right)$, U_m –де m-бир текли семейіствосы ҳәр қандай $m\in M$.

$I_{2,n}$ –түр

Теорема 2.3.5. Мейли $U - I_{2,n}$ түр JBW*–үшликлер e –толық трипотент. Онда төмендегилер орынлы:

1) Егер $n\neq 3,5,7$ болса, онда e –унитар ҳәм U изоморф $A\overline{\otimes} Sp_{n+1}$, A-абеллик фон Нейман алгебра.
2) Егер $n=3$ болса, онда U , e - ге сәйкес туўрымүйешликлер түри.
3) Егер $n=5$ болса, онда U изоморф $A_1\overline{\otimes} S_4 \oplus^{\infty} A_2\overline{\otimes} S_5$ абеллик фон Нейман алгебралары A_1 ҳәм A_2.

Буннан басқа, егер U , m-бир текли семейіство (e_1,e_2) ибарат болса, онда $e_1+e_2=e$ онда $m=1$ ямаса $m=3$.

Туўрымүйешликлер түри

Бул жерде JBW*–үшликлердиң e –толық трипотентке сәйкес туўрымүйешликлер түрин үйренемиз, яғный $U_1(e)$- тиң $A\overline{\otimes} B(H)$ изоморф екенлигин көрсетемиз, бунда A–абеллик фон Нейман алгебра ҳәм H комплекс Гильберт кеңислиги [28].

Туўрымүйешликлер решеткасын төмендегише анықлаймыз.

Анықлама 2.3.4. Трипотентлер жуплығы семейіствосы $\Re=\left((e_{is})_{i\in I},(e_{rj})_{j\in J}\right)$, бунда $r\in I, s\in J$ ҳәм $card\,\mathrm{I}\neq 1\neq card\,J$, система делинеди, егер

1) $e_{is}\perp e_{rj}$, $\forall i\neq r,\ j\neq s$,

2) e_{is} колинеар e_{ks} ҳәм e_{rj} колинеар e_{rl}, $\forall i\neq k,\ j\neq l$,

3) $U_{\frac{1}{2}}(e_{is})\cap U_{\frac{1}{2}}(e_{rs})\cap U_{\frac{1}{2}}(e_{rj})=0$, $\forall i\neq r,\ j\neq s$.

Мейли $e_{ij}=2\left\{e_{is}e_{rs}^{*}e_{rj}\right\}$, $\forall i\neq r, j\neq s$ болсын.

Лемма 2.3.6. Егер $U-$ ушын анықлама 1 деги система орынлы болса, онда инволютив автоморфизмлер $R_i\left(i\in I\right)$ ҳәм $C_j\,(j\in J)$ бар болып, олар ушын төмендегилер орынлы:

1) $R_i\left(e_{rs}\right)=e_{is},\ R_i\left(e_{ks}\right)=e_{ks},\ \forall i\neq k\neq r$,

$C_j\left(e_{rs}\right)=e_{rj},\ C_j\left(e_{rl}\right)=e_{rl},\ \forall j\neq l\neq s,\ R_r=C_s=id$.

2) $R_i\left(e_{rj}\right)=C_j\left(e_{is}\right)=e_{ij},\ \forall i\neq r,\ j\neq s$.

3) $R_iC_j=C_jR_i$.

Лемма 2.3.7. Егер U – (4.1) системасы орынлы болса, онда $\left(e_{ij}\right)$ – туўрымүйешли решетка болады.

Лемма 2.3.8. $P_{\frac{1}{2}}^{ij}P_{\frac{1}{2}}^{kl}=P_1^{il}+P_1^{kj}$**,** бунда $i\neq k,\ j\neq l$ ҳәм P_q^{mn} – Пирс q–проектор l_{mn}, $\forall m\in I, n\in J, q=1,\dfrac{1}{2}$.

Теорема 2.3.9. Мейли U – JBW* үшлик e – толық трипотентине сәйкес туўрымүйешли түри болсын. Онда U изометриялы изоморф $\oplus_{l\in L}^{\infty}A_l\overline{\otimes}R_{nm_l},\ \forall n,m_l\left(l\in L\right)$ кординаллар ҳәм A_l –абеллик фон Нейман алгебралар.

Симплектикалық түри

Бунда U – JBW* үшлик e –толық трипотентине сәйкес симплектикалық түрин қарастырамыз, яғный $U_1(e)$ изоморф $A\overline{\otimes}S_{2n}$ екенлигин көремиз, бунда A –абеллик фон Нейман алгебрасы ҳәм n –кординал.

Теорема 2.3.10. Мейли U –JBW* үшлик e –толық трипотентине сәйкес симплектикалық түри болсын. Сонда U изометриялы изоморф $A_1\overline{\otimes}S_{2n}\oplus^{\infty}A_2\overline{\otimes}S_{2n}$ болады, бунда A_1, A_2 абеллик фон Нейман алгебралары ҳәм n –кординал.

Эрмитлик түри ҳәм экспоненциал түри

Теорема 2.3.11. Мейли U –JBW* үшлик e –максимал трипотентине сәйкес эрмитлик түри болсын. Сонда e – унитар ҳәм U – изометриялы изоморф $A\overline{\otimes}H_n$ болады, бунда A –абеллик фон Нейман алгебрасы ҳәм кординал $n\geq 2$.

Дәлиллеў. $U_1(e)$–өзинде $(e_i)_{i\in I}$ ортогонал n- трипотентлердиң семейтвосын тутады, бул жерде $\sum_{i\in I} e_i = e$ сондай $U_1(e_i + e_j)$ изоморф $A\overline{\otimes} H_2$, $\forall i, j \in I, i \neq j$. Пирс кеңисликлери U_{kl} болса, онда $U(i,j) = \oplus U_{kl}$. Онда $U(i,j)$–күшсиз*–туйық үлес үшлик U, $e_i + e_j$ сәйкес $I_{2,2}$–түри болады, себеби $A\overline{\otimes} H_2$ изоморф $A\overline{\otimes} Sp_3$. Буннан $U_{i0} = 0 = U_{j0}$, демек $U_{\frac{1}{2}}(e) = 0$ ҳәм теорема дәлилленди.

Теорема 2.3.12. Мейли U–JBW* үшлик e–максимал трипотентине сәйкес экспоненциал түри болсын. Сонда e – унитар ҳәм U – изометриялы изоморф $A\overline{\otimes} H_3(O)$ болады, бунда A–абеллик фон Нейман алгебра.

Дәлиллеў. $U_1(e)$–өзинде (e_1, e_2, e_3) трипотентлердиң ортогонал семейтвосын тутады, бунда $e_1 + e_2 + e_3 = e$ сондай $U_1(e_i + e_j)$, $(i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j)$, $I_{2,n}$– түр JBW*–алгебрасына изоморф болады.

Екинши бап бойынша жуўмақ

Екинши бапта 1-түр JBW*–үшликлер Картан фактор түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасын үйренилген. Биринши параграфта 1-түр JBW*–алгебралар ҳәм оның қәсийетлери қарастырылған. Картан факторлардың туўрымүйешлик, симплектикалық, эрмитлик ҳәм экспоненциал түрлери екинши параграфта қаралған. Ал үшинши параграфта 1–түр JBW*–үшликлерди Картан фактор сәйкес түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасы келтирилген.

Жуўмақлаў

Магистрлик диссертация жумысында келтирилген JBW*–үшликлер теориясы ҳәм оның банах кеңисликлеринде шегараланған симметриялық область пенен байланысы соңғы ўақытлары операторлар алгебрасында актуал мәселелердиң бири болып есапланады. Сол себебли 1-түр JBW*–үшликлер ҳәм оның айырым қәсийетлерин үйрениў, Картан фактор түрлери менен фон Нейман алгебраларының тензор көбеймесине изометриялы изомор орнатыў мәселелери усы жумыста келтирип өтемиз.

Биринши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда тийкарынан операторлар алгебралары ҳәм JB*– үшликлер қаралған.

Биринши параграфта функционаллық анализдиң элементлери болған Гильберт кеңислиги, Лебег интералы, Банах кеңислиги, өлшеўли функциялар ҳаққында тийкарғы мағлыўматлар келтирилген.

Екинши параграфта операторлар алгебраларына тийисли мағлыўматлар қарастырылып, олардың қәсийетлери ҳәм мысаллар қарастырылған.

Үшинши параграфта JB*– үшликлер анықламалары, мысаллар ҳәм тийкарғы қәсийетлери келтирилген.

Екинши бап үш параграфтан ибарат болып, бунда 1-түр JBW*–үшликлер Картан фактор түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасын үйренемиз.

Биринши параграфта 1-түр JBW*–алгебралар ҳәм оның қәсийетлери үйренилген.

Картан факторлардың туўрымүйешлик, симплектикалық, эрмитлик ҳәм экспоненциал түрлери екинши параграфта қарастырылған. Ал үшинши параграфта 1–түр JBW*–үшликлерди Картан фактор сәйкес түрлери менен абеллик фон Нейман алгебралары тензор көбеймесиниң жайылмасы келтирилген.

Пайдаланған әдебиятлар дизими

1. Alfsen, E.M., Hanche-Olsen, H., Shultz, F.W: State spaces of C^* -algebras. Acta Math. 144, 267-305 (1980)
2. Barton, T., Timoney, R.M.: On biduals, preduals and ideals of JB^* -triples. Math. Scand. (to appear)
3. Braun, R.B., Kaup, W., Upmeier, H.: A holomorphic characterization of Jordan C^* -algebras. Math. Z. 161, 277-290 (1978)
4. Edwards, C.M.: On Jordan W^*-algebras. Bull. Sci. Math. 104, 393-403 (1980)
5. Friedman, Y., Russo, B.: Solution of the contractive projection problem. J. Funct. Anal. 60. 56-79 (1985)
6. Friedman, Y., Russo, B.: Structure of the predual of a JBW^* -triple. J. Reine Angew. Math. 356, 67-89 (1985)
7. Friedman, Y., Russo, B.: The Gelfand-Naimark theorem for BW^* -triple. Dace Math. J. 53, 139-148 (1986)
8. Hanche-Olsen, H.: On the structure and tensor products of JC -algebras. Can. J. Math. 35, 1059-1074 (1983)
9. Hanche-Olsen, H., Stormer, E.: Jordan operator algebras. London: Pitman 1984
10. Harris, L.A.: A generalization of C^* -algebras. London. Math. Soc. 42, 331-361 (1981)
11. Horn, G.: Klassifikation der JBW^* -Triple vom Tyr I. Dissertation. Tubingen 1984
12. Horn, G.: characterization of predual and ideal structure of a JBW^* -triple. Math. Scand. (to appear)
13. Horn, G.: Coordinatization theorem for JBW^* -triple. Quart. J. Math. Oxford (to appear)
14. Horn, G., Neher, E.: Classification of continuous JBW^* -triple. Trans. Am. Math. Soc. (in press)
15. Kaup. W.: Uber die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigflatigkeiten unendlicher Dimension I. Math. Ann. 257, 463-486 (1981)
16. Kaup. W.: Riemann mapping theorem for bounded symmetric domains in complex Banach spaces. Math. Z. 183, 503-529 (1983)
17. Kaup. W.: Contractive projections on Jordan C^* -algebras. and generalizations. Math. Scand.54, 95-100 (1984)
18. Kaup. W., Upmeier H.: Jordan algebras and symmetric Siegel domains in Banach spaces. Math. Z. 157, 179-200 (1977)
19. Loos, O.: Bounded symmetric domains and Jordan pair. Mathematical lectures. University of California, Irvine 1977

20. Loos, O., McCrimmon, K.: Speciality of Jordan triple systems. Commun. Algebra 5 (10), 1057-1082 (1977)
21. McCrimmon, K.: Compatible Peirce decompositions. Pas. J. Math. 103, 57-102 (1982)
22. McCrimmon, K., Meyberg, K.,: Coordinatization of Jordan tiple systems. Commun. Algebre 9 (14), 1495-1524 (1981)
23. McCrimmon, K.: Lectures and triple systems. lecture Notes. University of Virginia. Charlottesville 1972
24. Neher,E.: Grids in Jordan triple systems. Lect. Notes Math. 1280. Berlin Heidelberg New York: Springer 1987
25. Shaltz, F.W.: On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. J. Funct. Anal. 31, 360-376 (1979)
26. Stacey, P.J.: The structure of type JBW–algebras. Math. Proc. Camb. Phil/ Soc. 90, 477-482 (1981)
27. Stacey, P.J.: Type I_2 JBW–algebras. Quart. J. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 90. 477-482 (1981)
28. Stormer, E.: Jordan algebras of type I. Acta Math. 115, 165-184 (1966)
29. Takesaki, M.: Theory of operator algebras. Berlin Heidelberg New York: Springer 1979
30. Topping, D.M.: Jordan algebras of self-adjoint operators. Mem. Am. Math. Soc. 53 (1965)
31. Upmeier, H.: Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras. Amsterdam: North Holland 1985
32. Аюпов Ш.А., Ибрагимов М.М., Кудайбергенов К.К., Функционал анализдан мисол ва масалалар. –Нукус: Билим, 2009.–304 б.
33. Аюпов Ш.А., Абдуллаев Р.З., Кудайбергенов К.К., Функционал Анализнинг танланган боплари–Тошкент.:2011.–100 б.
34. Халықназарова А. JBW^*-тройка тип 1. Магистрлардың илимий мийнетлер топламы Нөкис-2012. 13-15 б.