ГЛАВА 2.
УТОЧНЁННАЯ ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЛОЁВ И ОБОЛОЧЕК С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

В последние годы в механике деформируемого твёрдого тела сформировалась новая область-механика связанных полей в материалах и элементах конструкций предметом которой, в частности, является исследование взаимодействия механических и тепловых полей в деформируемых телах, что имеет практическое значение и представляет принципиальный научный интерес [39, 78, 140], позволяя охватить более широкий спектр явлений, происходящих в деформируемых телах, а также более точно описать поведение конструкций при механических и тепловых воздействиях, выявить ряд полезных для практики новых эффектов.

Совершенствованию новой техники присуща тенденция к значительному увеличению определяющих параметров, к которым прежде всего относится температура. Влияние температурных напряжений оказывается существенным во многих прикладных задачах по расчету колебаний стержней, пластин и оболочек при зависимости напряженно-деформированного состояния рассматриваемой системы от температуры. Поэтому естественно, что исследования в области термомеханики приобретают всевозрастающее значение. В частности, исследования нестационарных колебаний кругового цилиндра с учетом температуры при воздействии на него различных динамических нагрузок имеет большое прикладное значение в строительстве, сейсмологии и других областях науки и техники.

Изучению термонапряженного состояния тонко и толстостенных тел, ограниченных и неограниченных размеров, посвящено большое количество отечественных и зарубежных исследований. Не ставя перед собой дат обзор, охватывающий хотя бы некоторой части этих исследований, ограничимся лишь тем, что отметим некоторые основополагаюшие из них и имеющие непосредственное отношение к рассматриваемым в монографии вопросам. Сюда можно отнести работы [39, 78, 140, 154, 156, 174, 199, 200].

Несмотря на большое количество исследований и основополагающих работ остается значительный круг недостаточно исследованных вопросов, сохраняющих свою актуальность [119]: создание точных и эффективных приближенных анали-тических и численных методов изучения теплопроводности и напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов с учетом многообразия граничных условий и сложности внешнего воздействия. К этому кругу примыкают и вопросы, рассматриваемые в данной главе, где приводятся результаты исследования динамического взаимодействия связанных полей, в частности, температурного и механического полей с цилиндрическими слоями, стержнями и оболочками.

§ 2.1. Уточнённые уравнения продольно-радиальных колебаний цилиндрического термовязкоупругого слоя

Настоящий раздел посвящён исследованию нестационар-ных продольно-радиальных колебаний кругового цилиндри-ческого вязкоупругого слоя с учетом температуры в рамках несвязной теории термовязкоупругости, где предполагается, что температура не зависит от скорости распространения тепла по оболочке. Цилиндрический слой рассматривается как трехмер-ное тело и уравнения движения его материала с учетом изменения температуры записываются через перемещения. Не применяя также упрошающие гипотезы и предпосылки, принимаемые в классических и уточненных теориях цилиндрических оболочек, выводятся общие, а из них приближенные и уточненные уравнения продольно-радиальных колебаний при динамических внешних воздействиях на оболочку. Получены выражения через искомые функции напряжений, перемещений и температуры.

При продольно-радиальных колебаниях движения круго-вого цилиндрического термовязкоупругого слоя описываются уравнениями (1.17) – (1.19), граничные условия имеют вид (1.12) и одно из условий (1.14) – (1.16). Начальные условия нулевые. Рассматриваемая задача является осесимметричной и поэтому потенциалы продольных – Φ, поперечных – ψ_2 волн, а также температура T, не зависят от угла θ. Поэтому, оператор Лапласа Δ в названных уравнениях движения должен применятся в виде

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{2.1}$$

Потенциалы Φ, Ψ_2 и температуру T, представим в виде[83]

$$[\Phi, T] = \int_0^{\infty} \left.\begin{matrix} \sin kz \\ -\cos kz \end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} (\varphi, T_0) e^{pt} dp,$$

$$\Psi_2 = \int_0^{\infty} \left.\begin{matrix} \cos kz \\ \sin kz \end{matrix}\right\} dk \int_{(\ell)} \Psi_{20} e^{pt} dp \tag{2.2}$$

и подставляя в уравнения движения (1.17) – (1.19), будем иметь

$$T_0 = (\alpha_0 N_0)^{-1} \left[L_{10}(\Delta_0 \varphi) - \rho\, p^2 \varphi \right], \tag{2.3}$$

$$L_{10}\left(\Delta_0^2 \varphi\right) - \left[L_{10}\left(\frac{1}{c_0^2} p + \frac{1}{c^2} p^2 \right) + \rho\, p^2 \right] \Delta_0 \varphi +$$

$$+ \rho \left(\frac{1}{c_0^2} p^3 + \frac{1}{c^2} p^4 \right) \varphi = 0, \tag{2.4}$$

$$M_0\left(\Delta_0 \Psi_{20}\right) = \rho\, p^2 \Psi_{20}, \tag{2.5}$$

где L_{10}, M_0 и N_0 - преобразованные во Фурье и Лапласу операторы L_1, M и N (см. п.1.2);

$$\Delta_0 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - k^2.$$

Уравнение (2.5) приведем к виду

$$\frac{d^2 \Psi_{20}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Psi_{20}}{dr} - \beta^2 \Psi_{20} = 0, \tag{2.6}$$

где

$$\beta^2 = k^2 + \rho\, p^2 M_0^{-1}; \quad M_0 = \mu\left[1 - f_{20}(p)\right];$$

$$f_{20}(p) = \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-pt} dt.$$

Общее решение уравнения (2.6) равно

$$\Psi_{20}(r) = B_{21} I_0(\beta r) + B_{22} K_0(\beta r)\,. \tag{2.7}$$

А теперь решим уравнение (2.4), приводя его к виду

$$\Delta_0^2 \varphi - p\left\{\left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c^2}\,p\right) + \rho\, L_{10}^{-1} p\right\}\Delta_0 \varphi +$$

$$+ \rho\, p^2 L_{10}^{-1}\left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c^2}\,p\right) p\varphi = 0 \tag{2.8}$$

и введем обозначения

$$\frac{1}{c_0^2} = a_0^2, \quad \frac{1}{c^2} = a_1^2, \quad \alpha_1^{-2} + \alpha_2^{2} = p\left[a_0^2 + \left(a_1^2 + \rho\, L_{10}^{-1}\right)p\right],$$

$$\alpha_1^{-2} \cdot \alpha_2^{-2} = \rho\, L_{10}^{-1}\left(a_0^2\, p + a_1^2\, p^2\right).$$

С учетом этих обозначений уравнение (2.8) примет вид

$$\left[\Delta_0^2 - \left(\alpha_1^{-2} + \alpha_2^{-2}\right)\Delta_0 + \alpha_1^{-2}\alpha_2^{-2}\right]\varphi = 0\,,$$

которое можно переписать как

$$\left(\Delta_0 - \overline{\alpha}_1^{\,2}\right)\left(\Delta_0 - \overline{\alpha}_2^{\,2}\right)\varphi = 0$$

или

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha_1^2\right)\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \alpha_2^2\right)\varphi = 0\,, \tag{2.9}$$

где

$$\alpha_i^2 = k^2 + \overline{\alpha}_i^{\,2}, \ \ (i = 1{,}2)\,.$$

Решение этого уравнения будем искать с помощью теоремы T. Boggio [78]. На основании этой теоремы общее решение уравнения (2.9) равно сумме общих решений уравнений

$$\frac{d^2\varphi_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_i}{dr} - \alpha_i^2 = 0, \qquad i = 1{,}2, \tag{2.10}$$

т.е. $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

Общими решениями уравнений Бесселя (2.10) являются

$$\varphi_1(r) = A_1 I_0(\alpha_1 r) + A_2 K_0(\alpha_1 r),$$

$$\varphi_2(r) = A_3 I_0(\alpha_2 r) + A_4 K_0(\alpha_2 r). \tag{2.11}$$

Подставляя решение (2.11) в выражение для T_0 – (2.1.3), получим

$$T_0 = \omega_1\left[A_1 I_0(\alpha_1 r) + A_2 K_0(\alpha_1 r)\right] + \omega_2\left[A_3 I_0(\alpha_2 r) + A_4 K_0(\alpha_2 r)\right], \quad (2.12)$$

где

$$\omega_i = L_{10}(\alpha_0 N_0)^{-1}\left(\alpha_i^2 - \alpha^2\right), \qquad (i = 1,2), \qquad \alpha^2 = k^2 + \rho p^2 L_{10}^{-1}.$$

Заметим, что при выводе выражения для преобразованной температуры T_0 было использовано равенство

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \alpha_1^2\left[A_1 I_0(\alpha_1 r) + A_2 K_0(\alpha_1 r)\right] + \\ + \alpha_2^2\left[A_3 I_0(\alpha_2 r) + A_4 K_0(\alpha_2 r)\right].$$

Определим коэффициенты интегрирования $A_i\left(i = 1,\overline{4}\right)$, B_{21}, B_{22} через главные части перемещений и температуры T. Для этого представив перемещения U_r и U_z в виде (1.60) и, подставляя вместо φ и Ψ_{20} их выражения (2.11) и (2.7) в преобразованные выражения перемещений $U_r^{(0)}$ и $U_z^{(0)}$, будем иметь

$$U_r^{(0)} = \alpha_1\left[A_1 I_1(\alpha_1 r) - A_2 K_1(\alpha_1 r)\right] + \alpha_2\left[A_3 I_1(\alpha_2 r) - A_4 K_1(\alpha_2 r)\right] - \\ - k\beta\left[I_1(\beta r)B_{21} - K_1(\beta r)B_{22}\right],$$

$$U_z^{(0)} = k\left[A_1 I_0(\alpha_1 r) + A_2 K_0(\alpha_1 r) + A_3 I_0(\alpha_2 r) + A_4 K_0(\alpha_2 r)\right] - \\ - \beta^2\left[I_0(\beta r)B_{21} + K_0(\beta r)B_{22}\right]. \quad (2.13)$$

Разложив в ряды по степеням радиальной координаты r модифицированные функции Бесселя в выражениях (2.12), (2.13), получим

$$T_0 = \omega_1 \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_1 - A_2\left[\ln\frac{\alpha_1 r}{2} - \psi(n+1)\right]\right\}\alpha_1^{2n}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} + \\ + \omega_2 \sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_3 - A_4\left[\ln\frac{\alpha_2 r}{2} - \psi(n+1)\right]\right\}\alpha_2^{2n}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}. \quad (2.14)$$

$$U_r^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_1^{2n+2}\left[A_1 - A_2\left(\ln\frac{\alpha_1 r}{2} - \frac{1}{2}\psi(n+1) - \frac{1}{2}\psi(n+2)\right)\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_2^{2n+2}\left[A_3 - A_4\left(\ln\frac{\alpha_2 r}{2} - \frac{1}{2}\psi(n+1) - \frac{1}{2}(n+2)\right)\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} -$$

$$-k\sum_{n=0}^{\infty} \beta^{2n+2}\left[B_{21} - B_{22}\left(\ln\frac{\beta r}{2} - \frac{1}{2}\psi(n+1) - \frac{1}{2}\psi(n+2)\right)\right]\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} +$$

$$+\frac{kB_{22} - A_2 - A_4}{r};$$

$$U_z^{(0)} = k\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_1 - A_2\left[\ln\frac{\alpha_1 r}{2} - \psi(n+1)\right]\right\}\alpha_1^{2n}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} +$$

$$+k\sum_{n=0}^{\infty}\left\{A_3 - A_4\left[\ln\frac{\alpha_2 r}{2} - \psi(n+1)\right]\right\}\alpha_2^{2n}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} - \quad (2.15)$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\left\{B_{21} - B_{22}\left[\ln\frac{\beta r}{2} - \psi(n+1)\right]\right\}\beta^{2n+2}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}.$$

Рассмотрим главные части преобразованных перемещений (2.15) и температуры (2.14) при $r = \xi$, которые равны первым слагаемым в рядах (2.14) – (2.15). При этом радиус промежуточной поверхности оболочки – ξ определяется по формуле [119]

$$\xi = \frac{r_1}{2}\left(\chi - \frac{r_1}{r_2}\right), \quad (2.16)$$

где постоянное χ удовлетворяет неравенству

$$2 + \frac{r_1}{r_2} \le \chi \le 2\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{r_2}.$$

Положим $r = \xi$ в формулах (2.14) и (2.15) и рассмотрим главные части преобразованных перемещений $U_r^{(0)}(\xi)$, $U_z^{(0)}(\xi)$ и температуры T_0, которые равны первым слагаемым ряда

$$U_{r,0}^{(0)} = \alpha_1^2 A_{10} + \alpha_2^2 A_{30} - k\beta^2 B_{20}; \quad U_{r,1}^{(0)} = \frac{1}{\xi}(A_2 + A_4 - kB_{22});$$

$$U_{z,0}^{(0)} = k\left(A_{10} + A_{30}\right) - \beta^2 B_{20}; \qquad U_{z,1}^{(0)} = \frac{1}{\xi}\left(k(A_2 + A_4) - \beta^2 B_{22}\right), \quad (2.17)$$

$$\left[A_{i0}, B_{20}\right] = \left[A_i, B_{21}\right] - \left[A_{i+1}, B_{22}\right]\left[\ln\frac{(\alpha_1, \alpha_2, \beta)\xi}{2} - \psi(1) - \frac{1}{2}\right]; \quad i = 1, 3;$$

Решив систему уравнений (2.17) относительно $A_{10}, A_{30}, B_{20}, A_2, A_4, B_{22},$ будем иметь

$$A_{10} = \frac{\omega_2\left[U_{r,o}^{(0)} - kU_{z,o}^{(0)}\right] - \left(\alpha_2^2 - k^2\right)T_{0,0}}{\omega_2\left(\alpha_1^2 - k^2\right) - \omega_1\left(\alpha_2^2 - k^2\right)},$$

$$A_{30} = \frac{\left(\alpha_1^2 - k^2\right)T_{0,0} - \omega_1\left[U_{r,o}^{(0)} - kU_{z,o}^{(0)}\right]}{\omega_2\left(\alpha_1^2 - k^2\right) - \omega_1\left(\alpha_2^2 - k^2\right)},$$

$$A_2 = \xi\frac{\omega_2\left[\beta^2 U_{r,1}^{(0)} - kU_{z,1}^{(0)}\right] - \left(\beta^2 - k^2\right)T_{0,1}}{\left(\beta^2 - k^2\right)\left(\omega_2 - \omega_1\right)}, \qquad (2.18)$$

$$A_4 = \xi\frac{\left(\beta^2 - k^2\right)T_{0,1} - \omega_1\left[\beta^2 U_{r,1}^{(0)} - kU_{z,1}^{(0)}\right]}{\left(\beta^2 - k^2\right)\left(\omega_2 - \omega_1\right)}, \quad B_{22} = \xi\frac{kU_{r,1}^{(0)} - U_{z,1}^{(0)}}{\beta^2 - k^2},$$

$$B_{20} = \frac{\left(\omega_1\alpha_2^2 - \omega_2\alpha_1^2\right)U_{z,o}^{(0)} + k\left(\omega_2 - \omega_1\right)U_{r,o}^{(0)} + k\left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right)T_{0,0}}{\beta^2\left[\omega_2\left(\alpha_1^2 - k^2\right) - \omega_1\left(\alpha_2^2 - k^2\right)\right]}.$$

Преобразованные граничные условия (1.6) и (1.8) примут вид

$$\left(\frac{\beta^2 - k^2}{\alpha^2 - k^2} - 2\right)\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - k^2\varphi\right] + 2\frac{d^2}{dr^2}\left(\varphi - k\Psi_{20}\right) = M_0^{-1}\left[f_r^{(i0)}\right],$$

$$\frac{d}{dr}\left[k2\varphi - \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)\Psi_{20}\right] - \left(\frac{1}{r} + \frac{d}{dr}\right)\frac{d^2\Psi_{20}}{dr^2} = M_0^{-1}\left(f_{rz}^{(i0)}\right), \quad (2.19)$$

$$\left(\alpha_0 N_0\right)^{-1}\left[L_{10}\left(\Delta_0\varphi\right) - \rho\, p^2\varphi\right] = G_0^{(i0)}(k, p), \qquad (i = 1,2).$$

Подставляя в уравнения (2.19) решения (2.7) и (2.11) после некоторых преобразований получим

$$\left[L_{10}M_0^{-1}\left(\alpha_1^2 - k^2\right) + 2k^2\right]\left[A_1 I_0\left(\alpha_1 r_i\right) + A_2 K_0\left(\alpha_1 r_i\right)\right] +$$

$$\left[L_{10}M_0^{-1}\left(\alpha_2^2 - k^2\right) + 2k^2\right]\left[A_3 I_0\left(\alpha_2 r_i\right) + A_4 K_0\left(\alpha_2 r_i\right)\right] -$$

$$-\frac{2\alpha_1}{r_i}\left[A_1 I_1\left(\alpha_1 r_i\right) - K_1\left(\alpha_1 r_i\right)A_2\right] - \frac{2\alpha_2}{r_i}\left[A_3 I_1\left(\alpha_2 r_i\right) - A_4 K_1\left(\alpha_2 r_i\right)\right] -$$

$$-2k\beta^2\left\{\left[I_0(\beta r_i)-\frac{1}{\beta r}I_1(\beta r_i)\right]B_{21}+\left[K_0(\beta r_i)+\frac{1}{\beta r}K_1(\beta r_i)\right]B_{22}\right\}=$$

$$=M_0^{-1}\left[f_r^{(i0)}\right],\quad (i=1,2),\qquad (2.20)$$

$$2k\alpha_1\left[A_1I_1(\alpha_1r_i)-A_2K_1(\alpha_1r_i)\right]+2k\alpha_2\left[A_3I_1(\alpha_2r_i)-A_4K_1(\alpha_2r_i)\right]-$$

$$-\beta(\beta^2+k^2)\left[B_{21}I_1(\beta r_i)-B_{22}K_1(\beta r_i)\right]=M_0^{-1}\left[f_{rz}^{(i0)}\right],\quad (i=1,2),$$

$$\omega_1\left[A_1I_0(\alpha_1r_i)+A_2K_0(\alpha_1r_i)\right]+\omega_2\left[A_3I_0(\alpha_2r_i)+A_4K_0(\alpha_2r_i)\right]=G_0^{(i0)}(k,p),\ (i=1,2).$$

Разложение в степенные ряды по степеням внутренней r_1 и внешней r_2 радиусов уравнений (2.20) и последующая подстановка в полученные разложения значений постоянных по формулам (2.18), дает

$$\frac{1}{\alpha^2-k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left\{L_{10}M_0^{-1}\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+k^2\alpha^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\times\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2k^2\beta^{2n}\Big\}U_{r,0}^{(0)}-$$

$$-\Big\{L_{10}M_0^{-1}\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+k^2\alpha^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+$$

$$+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2\alpha^2\beta^{2n}\Big\}kU_{z,0}^{(0)}+\frac{1}{\left(\alpha_0N_0\right)^{-1}}\times$$

$$\times\Big\{M_0^{-1}\left(\alpha_1^2-k^2\right)\left(\alpha_2^2-k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}-2k^2L_{10}^{-1}\left[k^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}-\beta^{2n}\right]\Big\}T_{0,0}\Big\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}-$$

$$-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\eta_{3,n}(r_i)}{\beta^2-k^2}\left\{\left\{L_{10}M_0^{-1}\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha^2k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2k^2\beta^{2n}\right]\right\}\beta^2U_{r,1}^{(0)}-\Big\{L_{10}M_0^{-1}\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\right.$$

$$\left.-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha^2k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-$$

$$\left.-2\beta^{2n+2}\Big\}kU_{z,1}^{(0)}\right\}+\eta_{3,n}(r_i)\cdot\frac{1}{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}}\times\Big\{L_{10}M_0^{-1}\left(\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-k^2\overline{Q}_n^{(0)}\right)+2k^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big\}T_{0,1}\Bigg]\times$$

$$\times\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}-\frac{1}{\alpha^2-k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\beta^{2n}\right]U_{r,0}^{(0)}-\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\right.\right.$$

$$-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha^2\beta^{2n}\Big]kU_{z,0}^{(0)}+\frac{1}{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}}\Big[\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-$$

$$-k^2\beta^{2n}\Big]T_{0,0}\Big\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{n!(n+1)!}+\xi\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{\beta^2-k^2}\Big\{\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\beta^{2n}\Big]\times\right.$$

$$\times\beta^2U_{r,1}^{(0)}-\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-2\beta^{2n+2}\Big]kU_{z,1}^{(0)}\Big\}+$$

$$\left.+\frac{Q_{n+1}^{(0)}T_{0,1}}{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}}\right\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{n!(n+1)!}+\frac{2\xi}{r_i^2}U_{r,1}^{(0)}=M_0^{-1}\Big[f_r^{(i0)}\Big],\quad(i=1,2)\qquad(2.21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha^2-k^2}\Big\{2\Big[\alpha^2Q_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big]-\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\Big\}kU_{r,0}^{(0)}-\right.$$

$$-\frac{1}{\alpha^2-k^2}\Big\{2k^2\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big]+\alpha^2\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\Big\}U_{z,0}^{(0)}+$$

$$\left.+\frac{1}{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}\left(\alpha^2-k^2\right)}\Big\{-2k\Big[k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big]+k\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\Big\}T_{0,0}\right\}\times$$

$$\times\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{\beta^2-k^2}\Big\{2\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big]-\right.$$

$$-\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\Big\}k\beta^2U_{r,1}^{(0)}-\frac{1}{\beta^2-k^2}\Big\{2k^2\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big]-$$

$$\left.-\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n+2}\Big\}U_{z,1}^{(0)}+\frac{2k\,\overline{Q}_{n+1}^{(0)}}{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}}T_{0,1}\right\}\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}-$$

$$-\frac{\xi}{r_i}\Big[U_{z,1}^{(0)}+kU_{r,1}^{(0)}\Big]=M_0^{-1}\Big[f_{rz}^{(i)}\Big],\qquad(i=1,2),\qquad(2.22)$$

$$\frac{1}{\alpha^2-k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\left(\alpha_1^2-\alpha^2\right)\left(\alpha_2^2-\alpha^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}\left(kU_{z,0}^{(0)}-U_{r,0}^{(0)}\right)-$$

$$-\Big[k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha^2k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\Big]T_{0,0}\Big\}\times$$

$$\times\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{3,n}(r_i)\left\{\frac{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}}{\beta^2-k^2}\left(\alpha_1^2-\alpha^2\right)\left(\alpha_2^2-\alpha^2\right)\times\right.$$

$$\times\overline{Q}_n^{(0)}\left[kU_{z,1}^{(0)}-\beta^2U_{r,1}^{(0)}\right]+\left(Q_{n+1}^{(0)}-\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}\right)T_{0,1}\Big\}=G_0^{(i0)}(k,p),\qquad (i=1,2). \tag{2.23}$$

где

$$\overline{Q}_n^{(0)}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_2^{2(n-i-1)}\alpha_1^{2i},\ \ \overline{Q}_0^{(0)}\equiv 0,\quad \overline{Q}_1^{(0)}\equiv 1,\quad \alpha_1^2\alpha_2^2\cdot\overline{Q}_{-1}^{(0)}=-1.$$

Положим

$$\lambda_1^n(\eta)=\int_0^{\infty}\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(\ell)}\left(\alpha^{2n}\eta\right)e^{pt}dp,$$

$$\lambda_2^n(\eta)=\int_0^{\infty}\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(\ell)}\left(\beta^{2n}\eta\right)e^{pt}dp,$$

$$\lambda_3^n(\eta)=\int_0^{\infty}\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(\ell)}\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^n\cdot\eta\right]e^{pt}dp,$$

$$\lambda_4^n(\eta)=\int_0^{\infty}\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(\ell)}\left[\left(\alpha_1\alpha_2\right)^n\cdot\eta\right]e^{pt}dp. \tag{2.24}$$

Обратим уравнения (2.21) – (2.23) по Фурье и Лапласу. Для этого умножим их справа и слева на α^2-k^2 и учтем, что

$$\left(\alpha^2-k^2\right)\left(\beta^2-k^2\right)^{-1}=L_{10}^{-1}M_0.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned}
&\chi_{11}U_{r,0}+\chi_{12}U_{z,0}+\chi_{13}T_0+\chi_{14}U_{r,1}+\chi_{15}U_{z,1}+\chi_{16}T_1=F_r^{(i)},\\
&\chi_{21}U_{r,0}+\chi_{22}U_{z,0}+\chi_{23}T_0+\chi_{24}U_{r,1}+\chi_{25}U_{z,1}+\chi_{26}T_1=F_{rz}^{(i)},\\
&\chi_{31}U_{r,0}+\chi_{32}U_{z,0}+\chi_{33}T_0+\chi_{34}U_{r,1}+\chi_{35}U_{z,1}+\chi_{36}T_1=F_0^{(i)},(i=1,2).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

При этом операторы $\chi_{lj}(l=1,\overline{3};\quad j=1,\overline{6}),\ \lambda_q(q=1,\overline{4})$ и $\overline{Q}_n(n=1,2,3...)$, а также функции $F_r^{(k)},F_{rz}^{(k)},F_0^{(k)}$, имеют вид

$$\chi_{11}(r_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{L_1M^{-1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\left(\lambda_4^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1\right)\overline{Q}_n-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-\right.$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-\frac{1}{n+1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right]+$$

$$+\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\Bigg\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{12}(r_i)=\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{L_1M^{-1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\left(\lambda_4^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1\right)\overline{Q}_n+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-2\lambda_1\lambda_2^n-\frac{1}{n+1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right]\Bigg\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{13}(r_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\alpha_0N\Bigg[M^{-1}\left(\lambda_4^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_3+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)\overline{Q}_n+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}L_1^{-1}\times$$

$$\times\left(-\lambda_2^n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n\right)-\frac{1}{n+1}\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_n-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\right]\Bigg]\Bigg\}\times$$

$$\times\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}, \tag{2.26}$$

$$\chi_{14}(r_i)=-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\eta_{3,n}(r_i)L_1^{-1}M\Bigg[L_1M^{-1}\Bigg\{\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\left(\lambda_4^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1\right)\overline{Q}_n-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\Bigg\}-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right\}+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\Bigg]\cdot\lambda_2-$$

$$-\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{n+1}L_1^{-1}M\lambda_2\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\lambda_2^n\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)\Bigg\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}+\frac{2\xi}{r_i^2}\rho L_1^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\chi_{15}(r_i)=-\xi\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\eta_{3,n}(r_i)L_1^{-1}M\Bigg[L_1M^{-1}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\left(\lambda_4^2-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\times\right.$$

$$\times\overline{Q}_n-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\Bigg)-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right)-2\lambda_2^{n+1}\Bigg]- \tag{2.27}$$

$$-\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{n+1}L_1^{-1}M\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_{n+1}-2\lambda_2^{n+1}\right)\Bigg\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2}+\frac{2\xi}{r^2}\rho L_1^{-1}\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial z},$$

$$\chi_{16}(r_i)=-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\eta_{3,n}(r_i)\alpha_0\rho NL_1^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Bigg[L_1M^{-1}\Bigg[\overline{Q}_{n+1}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n\Bigg]-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n\Bigg]-$$

$$-\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{n+1}\alpha_0^{-1}\rho N_0^{-1}L_1^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{Q}_{n+1}\Bigg\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{21}(r_i)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z}\Bigg[2\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\Bigg]\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

$$\chi_{22}(r_i)=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\lambda_1\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\Bigg]\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

$$\chi_{23}(r_i)=-\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_0NL_1^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Bigg[2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\Bigg]\times$$

$$\times\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!},$$

$$\chi_{24}(r_i)=\xi\sum_{n=0}^{\infty}\eta_{1,n}(r_i)\Bigg[2\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\Bigg]\times$$

$$\times L_1^{-1}M\cdot\lambda_2\frac{\partial}{\partial z}\cdot\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}+\frac{\xi}{r_i}\rho L_1^{-1}\frac{\partial^3}{\partial z\partial t^2},$$

$$\chi_{25}(r_i)=\xi\sum_{n=0}^{\infty}L_1^{-1}M\Bigg[-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^{n+1}\Bigg]\times$$

$$\times\eta_{1,n}(r_i)\frac{(r_i/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}-\frac{\xi}{r_i}\rho L_1^{-1}\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\chi_{26}(r_i) = 2\xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r_i) \alpha_0 \rho N L_1^{-2} \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial z} \overline{Q}_{n+1} \frac{(r_i)^{2n+1}}{n!(n+1)!}, \tag{2.28}$$

$$\chi_{31}(r_i) = -\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_0^{-1} L_1 N^{-1} \left(\lambda_4^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1^2\right) \overline{Q}_n \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{32}(r_i) = -\sum_{n=0}^{\infty} L_1 (\alpha_0 N)^{-1} \left(\lambda_4^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1^2\right) \frac{\partial}{\partial z} \overline{Q}_n \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{33}(r_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} \overline{Q}_{n+1} + \left(\lambda_4^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \lambda_1 \right) \overline{Q}_n - \lambda_1 \cdot \lambda_4^2 \overline{Q}_{n-1} \right] \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{34}(r_i) = \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{3,n}(r_i) M (\alpha_0 N)^{-1} \left(\lambda_4^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1^2\right) \lambda_2 \overline{Q}_n \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{35}(r_i) = \xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{3,n}(r_i) M (\alpha_0 N)^{-1} \left(\lambda_4^2 - \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_1^2\right) \frac{\partial}{\partial z} \overline{Q}_n \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\chi_{36}(r_i) = -\xi \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{3,n}(r_i) \rho L_1^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\overline{Q}_{n+1} - \lambda_1 \overline{Q}_n \right) \frac{(r_i/2)^{2n}}{(n!)^2},$$

$$\lambda_1^n = \left[\rho L_1^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^n, \qquad \lambda_2^n = \left[\rho M_1^{-1} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]^n,$$

$$\lambda_3^n = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[a_0^2 + \left(a_1^2 + \rho L_1^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] - 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n, \tag{2.29}$$

$$\lambda_4^{2n} = \left\{ \rho L_1^{-1} \left(a_0^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + a_1^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2} \left[a_0^2 + \left(a_1^2 + \rho L_1^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right\}^n,$$

$$\overline{Q}_n^{(0)} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_2^{2(n-i-1)} \alpha_1^{2i};$$

n	$\overline{Q}_n^{(0)}$	$\overline{Q}_n$
0	0	0
1	1	1

2	$\alpha_2^2+\alpha_1^2$	λ_3
3	$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2-\alpha_1^2\alpha_2^2$	$\lambda_3^2-\lambda_4^2$
4	$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)-\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2-2\alpha_1^2\alpha_2^2\right]$	$\lambda_3\left(\lambda_3^2-2\lambda_4^2\right)$
5	$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^4-3\alpha_1^2\alpha_2^2\times$ $\times\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2+\alpha_1^4\alpha_2^4$	$\lambda_3^4-3\lambda_4^2\cdot\lambda_3^2+\lambda_4^4$
6	$\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\left\{\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^4-9\alpha_1^4\alpha_2^4\right.$ $\left.-4\alpha_1^4\alpha_2^4\left[\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)^2-3\alpha_1^2\alpha_2^2\right]\right\}$	$\lambda_3\left[\lambda_3^4-9\lambda_4^4-4\lambda_4^2\left(\lambda_3^2-3\lambda_4^2\right)\right],$

$$F_r^{(i)}=\rho L_1^{-1}M^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_r^{(i)}\right),\qquad F_{rz}^{(i)}=\rho L_1^{-1}M^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}f_{rz}^{(i)}\right),$$
$$F_0^{(i)}=\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}G_0^{(i)}\right),\quad \lambda_4^2\cdot\overline{Q}_{-1}=-1. \qquad (2.30)$$

В последних формулах индекс i принимает значения 1 и 2 (соответствующие значениям на внутренней и внешней поверхности слоя).

2.2. Предельные случаи и частные виды уравнений колебания

Система (2.25) является общими уравнениями кругового цилиндрического вязкоупругого слоя с учетом температуры. В соответствии с видами операторов χ_{lj} и λ_k она имеет бесконечно высокий порядок по производным. Поэтому, для применения их в прикладных задачах, необходимо ограничить количество членов (слагаемых) в уравнениях. Ниже будут рассмотрены некоторые предельные случаи и частные виды этих уравнений, приближенные уравнения, а также разрешающие уравнения применительно к прикладным задачам.

<u>2.2.1. Предельные случаи:</u>

а) Термовязкоупругий стержень. При $r_1 = 0$ цилиндрический слой переходит в стержень радиуса r_2. Промежуточная поверхность слоя, определяемая радиусом ξ по формулам (2.16), переходит в осевую линию стержня. В этом случае следует полагать, что $F_r^{(1)}(z,t) = 0$ и $F_{rz}^{(1)}(z,t) = 0$, тогда из (2.25) получим систему трех уравнений относительно главных частей $U_{r,o}$ и $U_{z,0}$ смещений U_r и U_z оси стержня и главной части T_0 температуры T стержня

$$\begin{aligned}
&\chi_{11}U_{r,0} + \chi_{12}U_{z,0} + \chi_{13}T_0 = F_r^{(2)}, \\
&\chi_{21}U_{r,0} + \chi_{22}U_{z,0} + \chi_{23}T_0 = F_{rz}^{(2)}, \\
&\chi_{31}U_{r,0} + \chi_{32}U_{z,0} + \chi_{33}T_0 = F_0^{(2)},
\end{aligned} \tag{2.31}$$

где операторы χ_{lj}, $F_j^{(2)}$ определяются по формулам (2.26)-(2.30).

б) Термовязкоупругая тонкостенная оболочка. Полагая $r_2 = r_1(1+\varepsilon)$, ($\varepsilon > 0$-малый параметр), из системы (2.25) получаем уравнения продольно-радиальных колебаний тонко-стенной круговой цилиндрической оболочки с учётом температуры. В этом случае $\ln(r_i/\xi) = 0$, поэтому $\eta_{1,n}(r_i)$ и $\eta_{3,n}(r_i)$ принимают вид

$$\eta_{1,n} = \frac{n}{2(n+1)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}; \qquad \eta_{3,n} = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \tag{2.32}$$

которые сильно упрощают систему уравнений (2.25). Ниже эти уравнения будут приведены при нулевом и первом приближениях.

г) Термоупругий цилиндрический слой. Если материал слоя упругий, то ядра вязкоупругих операторов $f_1(t)$ и $f_2(t)$ равны нулю, а операторы $M = \mu,\ L = \lambda + 2\mu$. В этом случае операторы (2.29) примут вид

$$\lambda_1^n = \left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n, \qquad \lambda_2^n = \left[\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]^n,$$

$$\lambda_3^n = \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left[a_0^2 + \left(a_1^2 + \frac{1}{a^2} \right)\frac{\partial}{\partial t} \right] - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\}^n, \qquad (2.33)$$

$$\lambda_4^{2n} = \left\{ \frac{1}{a^2}\left(a_0^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + a_1^2 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right) - \frac{\partial^3}{\partial t \partial z^2}\left[a_0^2 + \left(a_1^2 + \frac{1}{a^2} \right)\frac{\partial}{\partial t} \right] + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right\}^n,$$

где $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ - скорость распространения продольных волн в материале слоя; $b = \sqrt{\mu/\rho}$ -скорость распространения поперечных волн; $\lambda,\ \mu$ -коэффициенты Лямэ.

Уравнения колебания цилиндрического слоя имеют вид (2.25), а операторы $\chi_{l\,j}$ сильно упрощаются благодаря соотношениям (2.31), которые должны быть использованы вместо аналогичных соотношений в формулах (2.26)-(2.30).

2.2.2. Приближенные уравнения колебания

В системе уравнений (2.25), отбрасывая более высокие порядки производных, а также предполагая, что выполнены условия при которых возможны усечение рядов (2.1.26)-(2.1.29), аналогичные условиям, обоснованным в работе [83], а также считая выполненными условия, относительно области применимости «усеченных» таким образом уравнений, можно получить различные их приближения. Проанализируем некоторые приближенные уравнения, получающиеся усечением уравнений (2.25) (при $n = 0,\ n = 1$ и т.д.), которые имеют определённый интерес при решении прикладных задач рассматриваемых в последующей главе.

Предположим $n = 0$, тогда получим следующие урав-нения, являющиеся нулевым приближением общих уравнений (2.25)

$$\left(L_1 M^{-1} - 1\right)\left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U_{r,0} - \left(L_1 M^{-1} + 2\right)\left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z} -$$

$$- \xi\left[\left(\ln\frac{r_i}{\xi} + \frac{1}{2} - \ln\frac{r_i}{\xi} L_1^{-1} M \right)\cdot\left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)\lambda_2 - \frac{2\xi}{r_i^2}\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] U_{r,1} +$$

$$+\xi\left[\left(\ln\frac{r_i}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\ln\frac{r_i}{\xi}L_1^{-1}M\left(\lambda_1-\lambda_2\right)+\frac{2\xi}{r_i^2}\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-\alpha_0\xi\rho L_1^{-1}N\left\{\left(\ln\frac{r_i}{\xi}+\frac{1}{2}\right)M^{-1}-\ln\frac{r_i}{\xi}L_1^{-1}\right\}\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}= \qquad (2.34)$$

$$=\rho L_1^{-1}M^{-1}\left(\frac{\partial^2 f_r^{(i)}}{\partial t^2}\right),\quad (i=1{,}2),$$

$$-\frac{r_i}{2}\rho\left[2L_1^{-1}-M^{-1}\right]\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+\frac{r_i}{2}\left(2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)\lambda_1 U_{z,0}-$$

$$-\frac{r_i}{2}\alpha_0 NL_1^{-1}\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial T_0}{\partial z}+\xi\frac{r_i}{2}\ln\frac{r_i}{\xi}\alpha_0\rho L_1^{-2}N\left(\frac{\partial^3 T_1}{\partial t^2\partial z}\right)-$$

$$-\xi\left\{\frac{r_i}{2}\ln\frac{r_i}{\xi}L_1^{-1}M\left(2\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\lambda_2^2-\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{\rho}{r_i}L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\}U_{z,1}+$$

$$+\frac{\xi\rho}{r_i}L_1^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{r,1}}{\partial t^2\partial z}\right)=\rho L_1^{-1}M^{-1}\left(\frac{\partial^2 f_{rz}^{(i)}}{\partial t^2}\right),\quad (i=1{,}2),$$

$$\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}\right)-\xi\left(\ln\frac{r_i}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}\right)=\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2 G_0^{(i)}}{\partial t^2}\right),\quad (i=1{,}2).$$

В последних уравнениях при $\nu = const$ перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$z=z^*\cdot\xi,\quad bt=t^*\cdot\xi,\quad r_1=r_1^*\cdot\xi;\quad r_2=r_2^*\cdot\xi;\quad r=r^*\cdot\xi, \qquad (2.35)$$

$$U_{r,1}=U_{r,1}^*\cdot\xi,\quad U_{z,0}=U_{z,0}^*\cdot\xi,\quad U_{z,1}=U_{z,1}^*,\quad U_{r,0}=U_{r,0}^*,\quad \alpha_0 T_0=T_0^*,$$

(где $b=\sqrt{\mu/\rho}$ - скорость распространения поперечных волн в материале слоя, α_0 – коэффициент теплового расширения тела) и опустим «звездочки» для удобства записи, в результате получим

$$\frac{4\nu-1}{1-2\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial t^2}\right]-\frac{2(1-3\nu)}{1-2\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z\partial t^2}\right]+\left\{\left(\frac{2}{r_i}+\ln r_i+\frac{1}{2}\right)\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1-2\nu}{2\nu}\left(\ln r_i\tilde{M}^{-2}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)-\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right)\right)\right\}U_{r,1}+\left\{\left[\frac{2}{r_i^2}+\frac{1}{2}+\ln r_i\right]\times\right.$$

$$\left.\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+\ln r_i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1-4\nu}{2\nu}\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right)\right\}\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-\left\{\left(\ln r_i+\frac{1}{2}\right)\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}-\right.$$

$$\left.-\ln r_i\frac{1+\nu}{3\nu}\right\}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}\right]=\frac{1}{b^2\rho}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^2 f_r^{(i)}}{\partial t^2}\right],\qquad (i=1,2)$$

$$\frac{r_i(1-3\nu)}{1-2\nu}\cdot\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{r,0}}{\partial t^2\partial z}\right]+\frac{r_i}{2}\left\{\frac{4-6\nu}{1-2\nu}\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right)-\frac{8\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^4}{\partial z^4}-\right.$$

$$\left.-\tilde{M}^{-2}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)\right\}U_{z,0}-\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial^3 T_0}{\partial t^2\partial z}-\frac{1}{r_i}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{r,1}}{\partial z\partial t^2}\right]+$$

$$+\left\{\frac{4\nu^2\ln r_i}{(1-2\nu)^2}\left[-\frac{5\nu-1}{\nu}\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}\right)+4\frac{\partial^4}{\partial z^4}-\frac{(1-2\nu)^2}{4\nu^2}\tilde{M}^{-2}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_i}\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\}U_{z,1}+r_i\ln r_i\frac{1+\nu}{6\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 T_1}{\partial z\partial t^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{b^2\rho}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^2 f_{rz}^{(i)}}{\partial t^2}\right],\ (i=1,2) \qquad (2.36)$$

$$\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}\right]-\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}\right]\left(\ln r_i+\frac{1}{r}\right)=\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 G_0^{(i)}}{\partial t^2}\right],\qquad (i=1,2)$$

$\tilde{M}(\zeta)=\zeta(t)-\int_0^t\zeta(\tau)K(t-\tau),$ $K(t)$ – интегрируемое ядро вязкоупругого оператора.

Полагая $\ln(r_i/\xi)=0$, из последней системы уравнений получаем уравнения для тонкостенной цилиндрической оболочки, имеющие вид

$$\frac{4\nu-1}{1-2\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial t^2}\right]-\frac{2(1-3\nu)}{1-2\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z\partial t^2}\right]+\left\{\left(\frac{2}{r_i}+\frac{1}{2}\right)\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+\right.$$

$$\left.-\frac{1-2\nu}{2\nu}\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right)\right\}U_{r,1}+\left[\frac{2}{r_i^2}+\frac{1}{2}\right]\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{z,1}}{\partial t^2\partial z}\right)-$$

$$-\frac{(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}\right]=\frac{1}{b^2\rho}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^2 f_r^{(i)}}{\partial t^2}\right],\qquad (i=1,2)$$

$$\frac{r_i(1-3\nu)}{1-2\nu}\cdot\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{r,0}}{\partial t^2\partial z}\right]+\frac{r_i}{2}\left\{\frac{4-6\nu}{1-2\nu}\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right)-\frac{8\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^4}{\partial z^4}-\right.$$

$$\left.-\tilde{M}^{-2}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)\right\}U_{z,0}-\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial^3 T_0}{\partial t^2\partial z}-\frac{1}{r_i}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{r,1}}{\partial z\partial t^2}\right]-$$

$$-\frac{1}{r_i}\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^2 U_{z,1}}{\partial t^2}\right)=\frac{1}{b^2\rho}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^2 f_{rz}^{(i)}}{\partial t^2}\right],\ (i=1,2)\qquad (2.37)$$

$$\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}\right]-\frac{1}{r}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}\right]=\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 G_0^{(i)}}{\partial t^2}\right],\qquad (i=1,2)$$

Из системы уравнений (2.2.5) можно также получить уравнений колебания термовязкоупруго цилиндра, полагая что $r_1=0,\ T_1=0,\ U_{z,1}=0,\ U_{r,1}=0$:

$$\frac{4\nu-1}{1-2\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 U_{r,0}}{\partial t^2}\right]-\frac{2(1-3\nu)}{1-2\nu}\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{z,0}}{\partial z\partial t^2}\right]==\frac{1}{b^2\rho}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^2 f_r^{(i)}}{\partial t^2}\right],$$

$$\frac{r_2(1-3\nu)}{1-2\nu}\cdot\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^3 U_{r,0}}{\partial t^2\partial z}\right]+\frac{r_2}{2}\left\{\frac{4-6\nu}{1-2\nu}\cdot\tilde{M}^{-1}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right)-\frac{8\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{\partial^4}{\partial z^4}-\right.$$

$$\left.-\tilde{M}^{-2}\left(\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right)\right\}U_{z,0}-\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial^3 T_0}{\partial t^2\partial z}=\frac{1}{b^2\rho}\tilde{M}^{-2}\left[\frac{\partial^2 f_{rz}^{(i)}}{\partial t^2}\right],\quad (2.38)$$

$$\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 T_0}{\partial t^2}\right]=\tilde{M}^{-1}\left[\frac{\partial^2 G_0^{(i)}}{\partial t^2}\right].$$

Полагая *n=1* в системе уравнений (2.25) и принебрегая членами с производными выше 4-порядка, получим

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(L_1M^{-1}-1\right)\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{r_i^2}{4}\left[L_1M^{-1}\left[\lambda_1\lambda_3-\left(\lambda_4{}^2-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]-2\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\right.\right.\\
&\left.\left.+2\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_3-\lambda_4{}^2+\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\right\}U_{r,0}-\left\{\left(L_1M^{-1}+2\right)\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\right.\\
&+\frac{r_i^2}{4}\left[L_1M^{-1}\left[\lambda_1\lambda_3-\left(\lambda_4{}^2-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]-2\lambda_1\lambda_2-\frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_3-\lambda_4{}^2-\lambda_1\lambda_2\right)-\right.\\
&\left.\left.-2\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\frac{r_i^2}{4}\alpha_0N\left[M^{-1}\left(\lambda_4{}^2+\lambda_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)-2L_1^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\times\right.\\
&\left.\times\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\lambda_4{}^2+\lambda_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]T_0+\left\{\frac{2\xi}{r_i^2}\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial z}\right)+\right.\\
&+\xi\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(\ln\frac{r_i}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\ln\frac{r_i}{\xi}L_1^{-1}M\left(\lambda_1-2\lambda_2\right)\right]+\xi\frac{r_i^2}{2}\times\\
&\left.\times\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\cdot L_1^{-1}M\lambda_2\frac{\partial}{\partial z}\right\}U_{z,1}+\xi\left\{\frac{2}{r_i^2}-\left[\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{2}\right)-\ln\frac{r_i}{\xi}\cdot L_1^{-1}M\right]\lambda_2\right\}\times\\
&\times\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2U_{r,1}}{\partial t^2}\right)-\xi\frac{r_i^2}{4}\left[\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\cdot L_1^{-1}M\left(L_1M^{-1}\left[\lambda_1\lambda_3-\left(\lambda_4{}^2-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]-\right.\right.\\
&\left.\left.-2(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{3}{4}\right)L_1^{-1}M\lambda_2\left(\lambda_1\lambda_3-\lambda_4{}^2+\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]U_{r,1}-\\
&-\alpha_0\xi\rho L_1^{-1}N\left\{M^{-1}\left(\ln\frac{r_i}{\xi}+\frac{1}{2}\right)-\ln\frac{r_i}{\xi}L_1^{-1}\right\}\frac{\partial^2T_1}{\partial t^2}+\\
&+\xi\frac{r_i^2}{4}\alpha_0N\rho L_1^{-2}\left\{\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{3}{4}\right)\lambda_3-\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\times\right.\\
&\left.\times\left[L_1M^{-1}\left(\lambda_3+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}\frac{\partial^2T_1}{\partial t^2}=\rho L_1^{-1}M^{-1}\left(\frac{\partial^2f_r^{(i)}}{\partial t^2}\right),\quad (i=1,2)
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

$$\left[-\frac{r_i}{2}\rho\left[2L_1^{-1}-M^{-1}\right]\cdot\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\frac{r_i^3}{16}\left(2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_4^2)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2\right)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+\frac{r_i}{2}\left(2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)\lambda_1 U_{z,0}-\frac{r_i}{2}\alpha_0 N L_1^{-1}\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\ T_0}{\partial z}+$$

$$+\frac{\xi\rho}{r_i}L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z}+\xi\frac{r_i}{2}\ln\frac{r_i}{\xi}\alpha_0\rho L_1^{-2}N\left(\frac{\partial^3 T_1}{\partial t^2\partial z}\right)-$$

$$-\xi\left\{\frac{r_i}{2}\ln\frac{r_i}{\xi}L_1^{-1}M\left(2\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\lambda_2^2-\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{\rho}{r_i}L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\}U_{z,1}=$$

$$=\rho L_1^{-1}M^{-1}\left(\frac{\partial^2 f_{rz}^{(i)}}{\partial t^2}\right),\quad (i=1,2),\qquad (2.40)$$

$$\left\{\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)+\frac{r_i^2}{4}\rho L_1^{-1}\left[a_0^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}+a_{01}^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right]\right\}T_0-$$

$$-\xi\,\rho\,L_1^{-1}\left\{\left(\ln\frac{r_i}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-\left(\ln\frac{r_i}{\xi}-\frac{1}{2}\right)\left[a_0^2\frac{\partial^3}{\partial t^3}+a_{01}^2\frac{\partial^4}{\partial t^4}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial z^2}\right]\right\}T_1=\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2 G_0^{(i)}}{\partial t^2}\right),\quad (i=1,2).\qquad (2.41)$$

Эти уравнения могут быть применены при решении прикладных задач. Из последних двух уравнений (при $i=1$ и $i=2$) систем (2.38) - (2.40) можно найти функции T_0 и T_1 и подставив их в первые четыре уравнения нетрудно получить систему четырех уравнений относительно главных частей продольного и радиального перемещений промежуточной поверхности слоя.

2.3. Перемещения, температура и напряжения в сечениях слоя при его продольно-радиальных колебаниях

Сначала выведем формулы для перемещений и температуры через введенные по формулам (2.17) главные части перемещений и температуры промежуточной поверхности слоя. Подстановка выражения (2.18) в (2.14), (2.15) дает

$$U_r^{(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \Big\{ \Big[\alpha^2 Q_{n+1}^{(0)} + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \overline{Q}_n \Big] \Big(U_{r,0}^{(0)} - k U_{z,0}^{(0)} \Big) -$$
$$- k\beta^{2n} \Big(k U_{r,0}^{(0)} - \alpha^2 U_{z,0}^{(0)} \Big) - L_{10}^{-1} (\alpha_0 N_0) \Big[k^2 \overline{Q}_{n+1}^{(0)} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \overline{Q}_n^{(0)} -$$
$$- k^2 \beta^{2n} \Big] T_{0,0} \Big\} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} - \frac{\xi}{\beta^2 - k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{1,n}(r) \Big\{ \Big[\alpha^2 Q_{n+1}^{(0)} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 Q_n^{(0)} \Big] \times$$
$$\times \Big(\beta^2 U_{r,1}^{(0)} - k U_{z,1}^{(0)} \Big) + L_{10}^{-1} (\alpha_0 N_0) \times$$
$$\times \Big(\beta^2 - k^2 \Big) \overline{Q}_{n+1}^{(0)} T_1 - k \beta^{2n+2} \Big(k U_{r,1}^{(0)} - U_{z,1}^{(0)} \Big) \Big\} \frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} - \frac{\xi}{r} U_{r,1}^{(0)}, \quad (2.42)$$

$$U_z^{(0)} = \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ k \Big[\alpha^2 \overline{Q}_n^{(0)} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \overline{Q}_{n-1}^{(0)} \Big] \Big(U_{r,0}^{(0)} - k U_{z,0}^{(0)} \Big) +$$
$$+ \beta^{2n} \Big(\alpha^2 U_{z,0}^{(0)} - k U_{r,0}^{(0)} \Big) - L_{10}^{-1} (\alpha_0 N_0) \Big[k^2 \overline{Q}_n^{(0)} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \overline{Q}_{n-1}^{(0)} + \beta^{2n} \Big] \times$$
$$\times k T_0 \Big\} \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} - \frac{\xi}{\beta^2 - k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{3,n}(r) \Big\{ k \Big[\alpha^2 \overline{Q}_n^{(0)} - \alpha_1^2 \alpha_2^2 \overline{Q}_{n-1}^{(0)} \Big] \times$$
$$\times \Big(\beta^2 U_{r,1}^{(0)} - k U_{z,1}^{(0)} \Big) - \beta^{2n+2} \Big(k U_{r,1}^{(0)} - U_{z,1}^{(0)} \Big) - L_{10}^{-1} (\alpha_0 N_0) \overline{Q}_n^{(0)} \times$$
$$\times \Big(\beta^2 - k^2 \Big) k T_1 \Big\} \frac{(r/2)^{2n}}{(n!)!}, \quad (2.43)$$

$$T_0 = \frac{1}{\alpha^2 - k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ L_{10} (\alpha_0 N_0)^{-1} \Big(\alpha_2^2 - \alpha^2 \Big) \Big(\alpha_1^2 - \alpha^2 \Big) \overline{Q}_n^{(0)} \Big(k U_{z,0}^{(0)} - U_{r,0}^{(0)} \Big) -$$
$$- \Big[k^2 \overline{Q}_{n+1}^{(0)} - \Big(\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha^2 k^2 \Big) \overline{Q}_n^{(0)} + \alpha^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \overline{Q}_{n-1}^{(0)} \Big] T_0 \Big\} \frac{\left(r/2 \right)^{2n}}{(n!)^2} -$$
$$- \frac{\xi}{\beta^2 - k^2} \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{3,n}(r_i) \Big\{ L_{10} (\alpha_0 N_0)^{-1} \Big(\alpha_2^2 - \alpha^2 \Big) \Big(\alpha_1^2 - \alpha^2 \Big) \overline{Q}_n^{(0)} \times$$
$$\times \Big(k U_{z,1}^{(0)} - \beta^2 U_{r,1}^{(0)} \Big) + \Big(\beta^2 - k^2 \Big) \Big[\overline{Q}_{n+1}^{(0)} - \alpha^2 \overline{Q}_n^{(0)} \Big] T_1 \Big\} \frac{\left(r/2 \right)^{2n}}{(n!)^2}, \quad (2.44)$$

Обратим выражения для перемещений и температуры. Для этого сначала умножим обе части равенств на $\alpha^2 - k^2$ и учтем, что

$$\left(\alpha^2 - k^2\right)\left(\beta^2 - k^2\right)^{-1} = L_{10}^{-1} M_0,$$

тогда

$$U_r = \Lambda^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\lambda_1 \overline{Q}_{n+1} - \lambda_4^2 \overline{Q}_n\right]\left(U_{r,0} + \frac{\partial}{\partial z}U_{z,0}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\lambda_2^n \times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial z}U_{r,0} - \lambda_1 U_{z,0}\right) + L_1^{-1}(\alpha_0 N)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1} + \lambda_4^2 Q_n - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\right]T_0\Bigg\}\times$$

$$\times\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!} - \eta_{1,n}(r)\xi L_1^{-1} M \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\lambda_1 \overline{Q}_{n+1} - \lambda_4^2 \overline{Q}_n\right]\times\right.$$

$$\times\left(\lambda_2 U_{r,1} + \frac{\partial}{\partial z}U_{z,1}\right) + L_1^{-1}(\alpha_0 N)\left(\lambda_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{Q}_{n+1}T_1 + \frac{\partial}{\partial z}\lambda_2^{n+1}\times$$

$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial z}U_{r,1} - U_{z,1}\right)\right\}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!((n+1)} - \frac{\xi}{r}\left(\lambda_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U_{r,1}\right], \tag{2.45}$$

$$U_z = \Lambda^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_1 \overline{Q}_n - \lambda_4^2 \overline{Q}_{n-1}\right]\left(U_{r,0} + \frac{\partial}{\partial z}U_{z,0}\right) + \lambda_2^n\left(\lambda_1 U_{z,0} -\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial z}U_{r,0}\right) + L_1^{-1}(\alpha_0 N)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n - \lambda_4^2 \overline{Q}_{n-1} + \lambda_2^n\right]\frac{\partial}{\partial z}T_0\Bigg\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2} -$$

$$-\eta_{3,n}(r)\xi L_1^{-1} M \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_1 \overline{Q}_n - \lambda_4^2 \overline{Q}_{n-1}\right]\left(\lambda_2 U_{r,1} + \frac{\partial}{\partial z}U_{z,1}\right) -\right.$$

$$\left.\left. - \lambda_2^{n+1}\left(\frac{\partial}{\partial z}U_{r,1} - U_{z,1}\right) - L_1^{-1}(\alpha_0 N)\overline{Q}_n\left(\lambda_2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}T_1\right\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}\right], \tag{2.46}$$

$$T = \Lambda^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left\{L_1(\alpha_0 N)^{-1}\left(-\lambda_4^2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1^2\right)\overline{Q}_n\left(\frac{\partial}{\partial z}U_{z,0} + U_{r,0}\right) + \right.\right.$$

$$+\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1}+\left(\lambda_4^2-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{Q}_n-\lambda_1\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]T_0\right\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}-$$

$$-\eta_{3,n}(r)\xi L_1 M\sum_{n=0}^{\infty}\left\{L_1(\alpha_0 N)^{-1}\left(\lambda_1^2+\lambda_1\lambda_3-\lambda_4^2\right)\overline{Q}_n\left(\frac{\partial}{\partial z}U_{z,1}+\lambda_2 U_{r,1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\overline{Q}_{n+1}-\lambda_1\overline{Q}_n\right]T_1\right\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}, \qquad (2.47)$$

$$\Lambda=\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \lambda_4^{-1}\cdot\overline{Q}_{-1}=-1.$$

Эти формулы определяют перемещения и температуру в точках слоя. В нулевом приближении эти формулы примут вид

$$U_r=\frac{r}{4}U_{r,0}-\xi\left[\frac{1}{r}+\frac{r}{4}\ln\left(\frac{r}{\xi}\right)L_1^{-1}M\lambda_2\right]U_{r,1}-\frac{r}{4}\xi\ln\left(\frac{r}{\xi}\right)\times$$

$$\times\left(L_1^{-1}M-1\right)\frac{\partial}{\partial z}U_{z,1}-\frac{r}{4}\xi\ln\frac{r}{\xi}L_1^{-1}(\alpha_0 N)T_1, \qquad (2.48)$$

$$U_z=U_{z,0}-\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\xi U_{z,1}+\Lambda^{-1}2L_1^{-1}(\alpha_0 N)\frac{\partial T_0}{\partial z},$$

$$T=T_0-\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\xi T_1.$$

Аналогично определяются и компоненты напряжения. Для вывода формул для компонент тензора напряжений представим их в виде

$$\left[\sigma_{rr},\sigma_{zz},\sigma_{\theta\theta}\right]=\int_0^{\infty}\left.\begin{matrix}\sin kz\\-\cos kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(l)}\left[\sigma_{rr}^{(0)},\sigma_{zz}^{(0)},\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right]e^{pt}dp, \qquad (2.49)$$

$$\sigma_{rz}=\int_0^{\infty}\left.\begin{matrix}\cos kz\\\sin kz\end{matrix}\right\}dk\int_{(l)}\sigma_{rz}^{(0)}e^{pt}dp.$$

Подстановка значения общих решений (2.7) и (2.11) в (1.58) дает

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{rr}^{(0)}\right]=\left[L_{10}M_0^{-1}\left(\alpha_1^2-k^2\right)+2k^2\right]\left[A_1I_0(\alpha_1 r)+A_2K_0(\alpha_1 r)\right]+$$
$$+\left[L_{10}M_0^{-1}\left(\alpha_2^2-k^2\right)+2k^2\right]\left[A_3I_0(\alpha_2 r)+A_4K_0(\alpha_2 r)\right]-$$
$$-\frac{2\alpha_1}{r}\left[A_1I_1(\alpha_1 r)-K_1(\alpha_1 r)A_2\right]-\frac{2\alpha_2}{r}\left[A_3I_1(\alpha_2 r)-A_4K_1(\alpha_2 r)\right]-$$
$$-2k\beta^2\left\{\left[I_0(\beta r)-\frac{1}{\beta r}I_1(\beta r)\right]B_{21}+\left[K_0(\beta r)+\frac{1}{\beta r}K_1(\beta r)\right]B_{22}\right\},\tag{2.50}$$

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{rz}^{(0)}\right]=2k\alpha_1\left[A_1I_1(\alpha_1 r)-A_2K_1(\alpha_1 r)\right]+2k\alpha_2\left[A_3I_1(\alpha_2 r)-\right.$$
$$\left.-A_4K_1(\alpha_2 r)\right]-\beta(\beta^2+k^2)\left[B_{21}I_1(\beta r)-B_{22}K_1(\beta r)\right],\tag{2.51}$$

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right]=\left[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left(\alpha_1^2-k^2-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{2}{r^2}\right]\left[A_1I_0(\alpha_1 r)+\right.$$
$$\left.+A_2K_0(\alpha_1 r)\right]+\left[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left(\alpha_2^2-k^2-\frac{1}{r^2}\right)-\frac{2}{r^2}\right]\times$$
$$\times\left[A_3I_0(\alpha_2 r)+A_4K_0(\alpha_2 r)\right]+\frac{2\alpha_1}{r}\left[A_1I_1(\alpha_1 r)-K_1(\alpha_1 r)A_2\right]+$$
$$+\frac{2\alpha_2}{r}\left[A_3I_1(\alpha_2 r)-A_4K_1(\alpha_2 r)\right]-\frac{k\beta}{r}\left[B_{21}I_1(\beta r)-B_{22}K_1(\beta r)\right]+$$
$$+\frac{k}{r^2}\left\{B_{21}I_0(\beta r)+B_{22}K_0(\beta r)\right\},\tag{2.52}$$

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{zz}^{(0)}\right]=\left[\alpha_1^2\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)-L_{10}M_0^{-1}\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]\times$$
$$\times\left[A_1I_0(\alpha_1 r)+A_2K_0(\alpha_1 r)\right]+\left[\alpha_2^2\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)-L_{10}M_0^{-1}\times\right.$$
$$\left.\times\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\right]\left[A_3I_0(\alpha_2 r)+A_4K_0(\alpha_2 r)\right]+2k\left(\beta^2-\frac{1}{r^2}\right)\times$$
$$\times\left[B_{21}I_0(\beta r)+B_{22}K_0(\beta r)\right].\tag{2.53}$$

В последних выражениях (2.50)-(2.53) разложим модифицированные функции Бесселя в ряды по степеням радиальной координаты и подставим значения выражений (2.18), в результате получим

$$
\begin{aligned}
&M_0^{-1}\left[\sigma_{zz}^{(0)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha^2-k^2}\left\{\left[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-L_{10}M_0^{-1}\times\right.\right.\right.\\
&\times\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+2k^2\left(\beta^2-\frac{1}{r^2}\right)\beta^{2n-2}\Bigg]U_{r,0}^{(0)}+\\
&+\Bigg[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}\right]+L_{10}M_0^{-1}\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\times\\
&\times\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2\left(\beta^2-\frac{1}{r^2}\right)\beta^{2n-2}\alpha^2\Bigg]kU_{z,0}^{(0)}-\Bigg[L_{10}M_0^{-1}\times\\
&\times\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\right.\\
&\left.-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-2k^2\left(\beta^2-\frac{1}{r^2}\right)\beta^{2n-2}\Bigg]L_{10}^{-1}\alpha_0N_0T_{0,0}\Bigg\}+\frac{\xi\eta_{3,n}(r)}{\beta^2-k^2}\times\\
&\times\Bigg\{\Bigg[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\times\\
&\times\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2k^2\left(\beta^2-\frac{1}{r^2}\right)\beta^{2n-2}\Bigg]\beta^2U_{r,1}^{(0)}+\\
&+\Bigg[L_{10}M_0^{-1}\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\right.\\
&\left.-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]+2\left(\beta^2-\frac{1}{r^2}\right)\beta^{2n}\Bigg]kU_{z,1}^{(0)}+\Bigg[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\overline{Q}_{n+1}^{(0)}+L_{10}M_0^{-1}\times\\
&\qquad\times\overline{Q}_n^{(0)}\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\Bigg]\left(\beta^2-k^2\right)L_{10}^{-1}\alpha_0N_0T_{1,0}\Bigg\}\Bigg\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2},\qquad(2.54)
\end{aligned}
$$

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha^2-k^2}\left\{\left[\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\left[\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\times\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)+\frac{2}{r^2}\right]\cdot\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]+\frac{1}{n+1}\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\right.$$

$$\left.\left.-k^2\beta^{2n}/2\right]+\frac{k^2}{r^2}\beta^{2n-2}\right]U_{r,0}^{(0)}+\left[-\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]+\right.$$

$$+\left[\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)+\frac{2}{r^2}\right]\cdot\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-\frac{1}{n+1}\times$$

$$\left.\times\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\frac{1}{2}\beta^{2n}\alpha^2\right]-\frac{1}{r^2}\beta^{2n-2}\alpha^2\right]kU_{z,0}^{(0)}+\left[\left[\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)+\frac{2}{r^2}\right]\cdot\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\left[k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\right.$$

$$\left.\left.-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\frac{1}{n+1}\left[k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\beta^{2n}/2\right]-\frac{k^2}{r^2}\beta^{2n-2}\right]\times$$

$$L_{10}^{-1}\alpha_0N_0T_{0,0}+\frac{\xi}{\beta^2-k^2}\left\{\left[\eta_{3,n}(r)\left[\quad\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\beta^2\left[-\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}+\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]+\right.\right.\right.$$

$$+\left[\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)+\frac{2}{r^2}\right]\beta^2\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\times$$

$$\left.\times\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\frac{k^2}{2}\beta^{2n+2}\right]-\eta_{3,n}(r)\frac{k^2\beta^{2n}}{r^2}\right]\cdot U_{r,1}^{(0)}+\left[\left(\quad\left(L_{10}M_0^{-1}-\right.\right.\right.$$

$$\left.-2\right)\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-\left[\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)+\frac{2}{r^2}\right]\right)\times$$

$$\left.\times\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]\right)\eta_{3,n}(r)+\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\beta^{2n+2}/2\right]+$$

$$\left.+\frac{\beta}{r^2}\eta_{3,n}(r)\right]kU_{z,1}^{(0)}+\left(\beta^2-k^2\right)L_{10}^{-1}\alpha_0N_0\left[\left(\quad\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\,\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]+\left[\left(\left(k^2+\frac{1}{r^2}\right)\left(L_{10}M_0^{-1}-2\right)+\frac{2}{r^2}\right]\overline{Q}_n^{(0)}\right)\eta_{3,n}(r)+$$

$$+\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\overline{Q}_{n+1}^{(0)}\Bigg]T_{1,0}\Bigg\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}-\frac{\xi}{r^2}\left(2\beta^2-k^2\right)U_{r,1}^{(0)}+\frac{1}{r^2}kU_{z,1}^{(0)}. \quad (2.55)$$

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{rr}^{(0)}\right]=\frac{1}{\alpha^2-k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big\{L_{10}M_0^{-1}\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+k^2\alpha^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+$$

$$+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\Big]+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2k^2\beta^{2n}\Big\}U_{r,0}^{(0)}-$$

$$-\Big\{L_{10}M_0^{-1}\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+k^2\alpha^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\Big]+$$

$$+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2\alpha^2\beta^{2n}\Big\}kU_{z,0}^{(0)}+\frac{1}{\left(\alpha_0N_0\right)^{-1}}\times$$

$$\times\Big\{M_0^{-1}\left(\alpha_1^2-k^2\right)\left(\alpha_2^2-k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}-2k^2L_{10}^{-1}\left[k^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}-\beta^{2n}\right]\Big\}T_{0,0}\Big\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}-$$

$$-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\frac{\eta_{3,n}(r)}{\beta^2-k^2}\Big\{\Big\{L_{10}M_0^{-1}\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha^2k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\Big]+$$

$$+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-2k^2\beta^{2n}\Big]\Big\}\beta^2U_{r,1}^{(0)}-\Big\{L_{10}M_0^{-1}\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-$$

$$-\left(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha^2k^2\right)\overline{Q}_n^{(0)}+k^2\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\Big]+2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_{n-1}^{(0)}\right]-$$

$$-2\beta^{2n+2}\Big\}kU_{z,1}^{(0)}\Big\}+\eta_{3,n}(r)\cdot\frac{1}{L_{10}(\alpha_0N_0)^{-1}}\times\Big\{L_{10}M_0^{-1}\left(\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-k^2\overline{Q}_n^{(0)}\right)+2k^2\overline{Q}_n^{(0)}\Big\}T_{0,1}\Bigg]\times$$

$$\times\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}-\frac{1}{\alpha^2-k^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\beta^{2n}\Big]U_{r,0}^{(0)}-[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-$$

$$-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-\alpha^2\beta^{2n}\Big]kU_{z,0}^{(0)}+\frac{1}{L_{10}\left(\alpha_0N_0\right)^{-1}}\left[\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\right.$$

$$\left.-k^2\beta^{2n}\right]T_{0,0}\Big\}\frac{(r_i/2)^{2n}}{n!(n+1)!}+\xi\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{\beta^2-k^2}\Big\{\Big[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-k^2\beta^{2n}\Big]\times\right.$$

$$\left.\times\beta^2U_{r,1}^{(0)}-\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}-2\beta^{2n+2}\right]kU_{z,1}^{(0)}\Big\}+\frac{Q_{n+1}^{(0)}T_{0,1}}{L_{10}\left(\alpha_0N_0\right)^{-1}}\right\}\times$$

$$\times\frac{(r/2)^{2n}}{n!(n+1)!}+\frac{2\xi}{r^2}U_{r,1}^{(0)}, \tag{2.56}$$

$$M_0^{-1}\left[\sigma_{rz}^{(0)}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha^2-k^2}\left\{2\left[\alpha^2Q_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\left(\beta^2+k^2\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\beta^{2n}\right\}kU_{r,0}^{(0)}-\frac{1}{\alpha^2-k^2}\left\{2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]+\alpha^2\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\right\}U_{z,0}^{(0)}+$$
$$+\frac{1}{L_{10}\left(\alpha_0N_0\right)^{-1}\left(\alpha^2-k^2\right)}\left\{-2k\left[k^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]+k\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\right\}T_{0,0}\right\}\times$$
$$\times\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}-\xi\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\eta_{1,n}(r)}{\beta^2-k^2}\left\{2\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\right.\right.$$
$$\left.-\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n}\right\}k\beta^2U_{r,1}^{(0)}-\frac{1}{\beta^2-k^2}\left\{2k^2\left[\alpha^2\overline{Q}_{n+1}^{(0)}-\alpha_1^2\alpha_2^2\overline{Q}_n^{(0)}\right]-\right.$$
$$\left.\left.-\left(\beta^2+k^2\right)\beta^{2n+2}\right\}U_{z,1}^{(0)}+\frac{2k\,\overline{Q}_{n+1}^{(0)}}{L_{10}\left(\alpha_0N_0\right)^{-1}}T_{0,1}\right\}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}- \tag{2.57}$$
$$-\frac{\xi}{r}\left[U_{z,1}^{(0)}+kU_{r,1}^{(0)}\right],$$

Обратив выражения (2.54)-(2.57), получаем следующие формулы для оригиналов напряжений

$$M^{-1}\left[\sigma_{zz}\right]=\Lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right]-L_1M^{-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2^{n-1}\right]U_{r,0}+$$
$$+\left[\left(L_1M^{-1}-2\right)\left[-\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_n\right]+L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-\right.$$
$$\left.-2\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2^{n-1}\lambda_1\right]\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}-\left[L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]+\right.$$

$$+\left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2^{-1}\Bigg]L_1^{-1}\alpha_0 N\,T_0+$$

$$+\xi\eta_{3,n}(r)\cdot M\,L^{-1}\Bigg\{\Bigg[\ \left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]-L_1M^{-1}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2\left[\lambda_1\overline{Q}_n\ -\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2^{\,n}\Bigg]U_{r,1}+$$

$$+\Bigg[\ \left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]-L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_n\ -\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-$$

$$-2\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2^{\,n}\Bigg]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}+\left[L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{Q}_n-\left(L_1M^{-1}-2\right)\overline{Q}_{n+1}\right]\times$$

$$\times\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L_1^{-1}\alpha_0 N\cdot T_1\Bigg\}\Bigg\}\frac{\left(r/2\right)^{2n}}{\left(n!\right)^2},\qquad \Lambda=\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right);\quad (2.58)$$

$$M^{-1}\left[\sigma_{\theta\theta}\right]=\Lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[\ \left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]-\Bigg[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-2)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Bigg]\left[\lambda_1\overline{Q}_n\ -\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]+\frac{1}{n+1}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot\lambda_2^n/2\right)-$$

$$-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^{\,n-1}\Bigg]U_{r,0}+\Bigg[\ \left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]-\Bigg[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-$$

$$-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Bigg]\left[\lambda_1\overline{Q}_n\ -\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]+\frac{1}{n+1}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n+\frac{\lambda_1}{2}\cdot\lambda_2^n/2\right)-$$

$$-\frac{1}{r^2}\lambda_1\cdot\lambda_2^{\,n-1}\Bigg]\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\Bigg[\Bigg[(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right)-\Bigg[\frac{2}{r^2}+$$

$$+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Bigg]\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n+\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right)+\left(\lambda_4^2Q_n+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot\left(\overline{Q}_{n+1}-\lambda_2^n\right)\right)\times$$

$$\times\frac{1}{n+1}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^{\,n-1}\Bigg]\cdot L_1^{-1}\alpha_0 N\,T_0+\xi\,M\,L^{-1}\Bigg\{\Bigg[\eta_{3,n}(r)\Bigg[\ \left(L_1M^{-1}-2\right)\lambda_2\times$$

$$\times\left[-\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]+\left[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\lambda_2\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]\Bigg]-$$

$$-\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^{n+1}/2\right]+\eta_{3,n}(r)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^{\ n}\Bigg]U_{r,1}-$$

$$-\Bigg[\eta_{3,n}(r)\Bigg[\ \left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]-\left[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]+\frac{\lambda_2^n}{r^2}\Bigg]+\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n-\lambda_2^{n+1}/2\right]\Bigg]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}+$$

$$+\Bigg[\eta_{3,n}(r)\Bigg[\left(L_1M^{-1}-2\right)\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\ \right]+\left[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\overline{Q}_n\Bigg]+$$

$$+\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\overline{Q}_{n+1}\Bigg]\cdot\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L_1^{-1}\alpha_0N\cdot T_1\Bigg\}\Bigg\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}-\frac{\xi}{r^2}\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U_{r,1}-$$

$$-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}. \qquad (2.59)$$

$$M^{-1}\left[\sigma_{rr}\right]=\Lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\left(\lambda_4^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1\right)\overline{Q}_n-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]\times$$

$$\times L_1M^{-1}-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-\frac{1}{n+1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right]+$$

$$+\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\Bigg]U_{r,0}+\Bigg[L_1M^{-1}\Bigg[\left(\lambda_4^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1\right)\times$$

$$\times\overline{Q}_n+\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\Bigg]-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right]-2\lambda_1\lambda_2^n-$$

$$-\frac{1}{n+1}\left[\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_1\lambda_2^n-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right]\Bigg]\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\alpha_0N\Bigg[\left(\lambda_4^2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_3+\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right)\times$$

$$\times M^{-1}\overline{Q}_n+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}L_1^{-1}\left(-\lambda_2^n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n\right)-\frac{1}{n+1}\times$$

$$\times\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_n-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\right]\Bigg]T_0+\xi L_1^{-1}M\Bigg\{\eta_{3,n}(r)\Bigg[\Bigg\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}-$$

$$-\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\left(\lambda_4^2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_1\right)\overline{Q}_n\Bigg\}+2L_1M^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left\{\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right\}-$$

$$-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^n\Bigg]\cdot\lambda_2+\frac{\eta_{1,n}(r\ )}{n+1}\lambda_2\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}+\lambda_2^n\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)\Bigg\}U_{r,1}+$$

$$-\xi\cdot L_1^{-1}M\Bigg[\eta_{3,n}(r)\Bigg[-2\lambda_2^{n+1}+L_1M^{-1}\Bigg(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\left(\lambda_4^2-\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\overline{Q}_n-$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\Bigg)-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_1\overline{Q}_n-\lambda_4^2\overline{Q}_{n-1}\right)\Bigg]-\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_{n+1}-2\lambda_2^{n+1}\right)\times$$

$$\times\frac{\eta_{1,n}(r)}{n+1}\Bigg]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-\xi\Bigg\{\Bigg[L_1M^{-1}\left[\overline{Q}_{n+1}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n\right]-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_n\Bigg]\eta_{3,n}(r)\times$$

$$\times\alpha_0\rho NL_1^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\eta_{1,n}(r_i)}{n+1}\alpha_0^{-1}\rho N_0^{-1}L_1^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{Q}_{n+1}\Bigg\}T_1\Bigg\}\frac{(r/2)^{2n}}{(n!)^2}+\qquad(2.60)$$

$$+\frac{2\xi}{r^2}\left(U_{r,1}+\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}\right);$$

$$M^{-1}\left[\sigma_{rz}\right]=\Lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\Bigg[2\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\Bigg]\frac{\partial U_{r,0}}{\partial z}+$$

$$+\left[2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\lambda_1\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\right]U_{z,0}-\alpha_0NL_1^{-1}\frac{\partial T_0}{\partial z}\times$$

$$\times\left[2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}\overline{Q}_{n+1}+\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\right]+\xi\eta_{1,n}(r)\times$$

$$\times\left[2\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^n\right]L_1^{-1}M\cdot\lambda_2\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z}+$$

$$+\xi L_1^{-1}M\eta_{1,n}(r_i)\left[-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_1\overline{Q}_{n+1}-\lambda_4^2\overline{Q}_n\right)-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2^{n+1}\right]U_{z,1}+$$

$$+2\xi\eta_{1,n}(r)\alpha_0\rho NL_1^{-2}\frac{\partial^3T_1}{\partial t^2\partial z}\overline{Q}_{n+1}\left.\vphantom{\frac{\partial^3}{\partial t^2}}\right\}\frac{(r/2)^{2n+1}}{n!(n+1)!}+\frac{\xi}{r}\left[\frac{\partial U_{r,1}}{\partial z}-U_{z,1}\right];$$

(2.61)

В нулевом приближении компоненты тензора напряжения запишутся в виде

$$M^{-1}[\sigma_{zz}]=\Lambda^{-1}\left\{\left[\left(L_1M^{-1}-2\right)\lambda_1-L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(\lambda_2{}^2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2{}^{-1}\right]U_{r,0}-\left[\left(L_1M^{-1}-2\right)\lambda_1+L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\right.$$

$$\left.-2\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2{}^{-1}\lambda_1\right]\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}-\left[(L_1M^{-1}-2)\lambda_1+L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\lambda_2{}^{-1}\right]L_1^{-1}\alpha_0N\ T_0+\xi\left(\ln\frac{r}{\xi}+1/2\right)\cdot M\ L^{-1}\left\{\left[-\left(\frac{1}{r^2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2(L_1M^{-1}-2)+\lambda_1\lambda_2\left(L_1M^{-1}-2\right)+2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\right]U_{r,1}+$$

$$+\left[\left(L_1M^{-1}-2\right)\lambda_1-L_1M^{-1}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-2\left(\lambda_2-\frac{1}{r^2}\right)\right]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}+$$

$$\left.\left.+\left(L_1M^{-1}-2\right)\cdot\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)L_1^{-1}\alpha_0N\cdot T_1\right\}\right\};\qquad(2.62)$$

$$M^{-1}[\sigma_{\theta\theta}]=\Lambda^{-1}\left\{\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\lambda_1+\lambda_1\times\right.\right.$$

$$\left.\times\left(L_1M^{-1}-2\right)-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2{}^{-1}\right]U_{r,0}+\left[\left(L_1M^{-1}-2\right)\lambda_1-\left[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-\right.\right.$$

$$-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Bigg]\Bigg]+\lambda_1/2-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^{-1}\lambda_1\Bigg]\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}+\Bigg[(L_1M^{-1}-2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{2}{r^2}+$$

$$+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2^{-1}\Bigg]\cdot L_1^{-1}\alpha_0 N\,T_0+\xi\,M\,L^{-1}\Bigg\{\Bigg[\Bigg[\left(\ln\frac{r}{\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-(L_1M^{-1}-2)\lambda_2\lambda_1+\left[\frac{2}{r^2}+(L_1M^{-1}-2)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right]\lambda_2\lambda_1-\ln\frac{r}{\xi}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\lambda_2\;\;/\,2\right]\right]\Bigg]U_{r,1}-\left[\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[(L_1M^{-1}-2)\left(\lambda_1-\frac{1}{r^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{r^2}+\lambda_2\frac{1}{r^2}\right]+\ln\frac{r}{\xi}(\lambda_1-\lambda_2/2)\right]\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}+\left[\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)(L_1M^{-1}-2)\lambda_1+\ln\frac{r}{\xi}\right]\times$$

$$\times\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\lambda_2\right)L_1^{-1}\alpha_0 N\,T_1\Bigg\}\Bigg\}-\frac{\xi}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+2\lambda_2\right)U_{r,1}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}.$$

(2.63)

$$M^{-1}[\sigma_{rr}]=\Lambda^{-1}\Bigg\{(L_1M^{-1}-1)\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)U_{r,0}-(L_1M^{-1}+2)\times$$

$$\times\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial U_{z,0}}{\partial z}-\xi\left[\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}-\ln\frac{r}{\xi}L_1^{-1}M\right)\cdot\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\lambda_2-\right.$$

$$\left.-\frac{2\xi}{r^2}\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right]U_{r,1}+\xi\left[\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-\right.$$

$$\left.-\ln\frac{r}{\xi}L_1^{-1}M(\lambda_1-2\lambda_2)+\frac{2\xi}{r^2}\rho L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right]\times\frac{\partial U_{z,1}}{\partial z}-$$

$$-\alpha_0\xi\rho L_1^{-1}N\left\{\left(\ln\frac{r}{\xi}+\frac{1}{2}\right)M^{-1}-\ln\frac{r}{\xi}L_1^{-1}\right\}\frac{\partial^2 T_1}{\partial t^2}\Bigg\};$$

(2.64)

$$M^{-1}[\sigma_{rr}]=\Lambda^{-1}\Bigg\{-\frac{r}{2}\rho\left[2L_1^{-1}-M^{-1}\right]\left(\lambda_1+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}U_{r,0}+\frac{r}{2}\times$$

$$\times\left(2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\left(\lambda_2-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\right)\lambda_1 U_{z,0}-\frac{r}{2}\alpha_0 N L_1^{-1}\left(\lambda_2+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial T_0}{\partial z}+$$

$$+\xi\frac{r}{2}\ln\frac{r}{\xi}\alpha_0\rho L_1^{-2}N\left(\frac{\partial^3 T_1}{\partial t^2\partial z}\right)-\xi\left\{L_1^{-1}M\left(2\lambda_1\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\lambda_2^2-\lambda_2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{r}{2}\ln\frac{r}{\xi}+\frac{\rho}{r}L_1^{-1}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right\}U_{z,1}+\frac{\xi\rho}{r}L_1^{-1}\left(\frac{\partial^3 U_{r,1}}{\partial t^2\partial z}\right)\Bigg\};\qquad(2.65)$$

В заключении заметим, что в исследованиях по изучению влияния температуры на напряженно-деформированное состоя-ние вязкоупругого слоя при его нестационарных колебаниях ограничимся только продольно-радиальными колебаниями. Что же касается поперечных колебаний слоя, то постановка такой задачи дана в п.1.2. и ее решение также можно получить изложенным методом.