SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MEXANIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

MAGISTRLIK DISSERTATSIYASI

“NYUTON KO’PYOQLIGI.”

BAJARDI: Azizbkova Nodira

ILMIY RAXBAR : Xasanov G’ofir

SAMARQAND -2013

MUNDARIJA

KIRISH

Tebranuvchan integrallar tushunchasi garmonik analizning muhim tushunchalaridan biri hisoblanadi. Shuni ta'kidlash mumkinki, Fur'e almashtirishlari tebranuvchan integrallarga ajoyib misol bo'ladi. Bundan tashqari, umumulashgan funksiyalarning Fur'e almashtirishlari xususan, silliq sirtlardagi "del'ta" funksiyaning Fur'e almashtirishlari tebranuvchan integrallar sinfining kengaytirilgan manbaidir [17].

Matematik fizika va analitik sonlar nazariyasidagi ko'pgina masalalar quyidagi

$$J(t) = \int_{R^n} a(x) e^{itf(x)} dx$$

ko'rinishdagi integrallarning asimptotikasini o'rganish masalasiga keltiriladi [6,7]. Odatda bunday integrallarning asimptotikasini o'rganish faza funksiyaga va t parametrga bo'g'liqdir. Ammo, shuni ta'kidlash kerakki, tebranuvchan integral odatda elemantar funksiyalar orqali kvatraturalarda hisoblanmaydi. Bu kabi integrallarni hisoblash usullari bilan taqriban topishdagi qiyinchiliklar, parametrning cheksizga intilishi bilan bog'liq [3,6]. Ma'lumki kvadratura va kubatura formulalaridagi xatoliklar integral ostidagi funksiyaning hosilalari bilan baholanadi [7]. Tebranuvchan integrallarda esa integrallanuvchi funksiya tez tebrangani bois uning hosilalari cheksiz katta qiymatlarni qabul qiladi. Shunga qaramasdan tebranuvchan integral $|\lambda| \to +\infty$ da yetarlicha kichik bo'lishi mumkin. Bunday integrallarning cheksizdagi xarakteri ba'zi hollarda aniq topilishi mumkin.

Tebranuvchan integrallarning asimptotikalarini o'rganish masalasi faza funksiyaning muvofiqlashgan koordinatalar sistemasida qurilgan Nyuton ko'pyoqlikning diskret xarakteristikalari bilan bog'liq [1,4].

Muvofiqlashgan koordinatalar sistemalari tushunchasi Arnold V.I. tomonidan kiritilgan bo'lib, ossillyatorli integrallarning asimptotik holatini o'rganishda muhim rol o'ynaydi [1,2]. Ikki o'lchovli holda A.N.Varchenko muvofiqlashgan koordinatalar sistemalarining yetarli shartini keltirib, karrali komponentalarga ega bo'lmagan analitik funksiyalar uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemasining mavjudligini isbotladi [4]. A.N. Varchenko teoremasi natijasining isboti maxsusliklarni yechish haqidagi Xironaki teoremasiga asoslanadi [12]. Biz ba'zi tenglamalar ildizlarining Pyuzio qatoriga asoslangan muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini olishning yangi elementar usulini keltiramiz. Bizning usullarga ixtiyoriy analitik funksiya hamda chekli tipdagi silliq funksiyalar uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemalari mavjudligini isbotlash uchun ham qo'llaniladi. Maxsusliklarni yechish usulini chetlab o'tib biz koordinatalar sistemalarining muvofiqlashishining yetrali shartini keltiramiz. Shuningdek, silliq fazali funksiyalar qatnashgan ossilyatorli integrallarning ossilyasiya ko'rsatkichini aniqlash uchun chekli algoritm mavjudligini isbotlaymiz [11,13].

Endi magistrlik dissertatsiyasining to'liq izohiga o'tamiz.

Magistlik dissertatsiyasi Kirish, Adabiyotlar ro'yxati va ikkita bobdan iborat.

Dissertasiyaning birinchi bobi 4 ta paragrafdan iborat bo'lib, birinchi paragrafda asosiy tushunchalar, zarur ta'rif va belgilashlar keltirilgan.

Bizga nol nuqtaning biror atrofida aniqlangan va $f(0,0)=0,\quad \nabla f(0,0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi silliq haqiqiy o'zgaruvchili f funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning koordinata boshida Makloren qatoriga yoyilmasini qaraymiz:

$$f(x_1,x_2) \sim \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k .$$

Ushbu

$$M(f) := \left\{ (j,k) \in N^2 : C_{jk} = \frac{1}{j!k!}, \partial_{x_1}^{j} \partial_{x_2}^{k} f(0,0) \neq 0 \right\}$$

to’plamga f funksiya Makloren qatorining tashuvchisi deyiladi.

Biz

$$M(f) \neq \varnothing$$

deb faraz qilamiz, bu f funksiyaning koordinata boshini chekli tipdaligini bildiradi. Bu tushuncha funksiyalarning chekli aniqlanganligi tushunchasi va funksiyalarning chekli chiziqli tipdagi tushunchasidan farq qiladi. Agar f haqiqiy analitik funksiya bo’lsa, tabiiyki, Teylor qatori f funksiyaga nol nuqta atrofida yaqinlashadi va cheklilik tipini oddiygina qilib $f \not\equiv 0$ ko’rinishda belgilaymiz.

Tarif 1.1: f funksiyaning (x_1, x_2) koordinatalar sistemasi boshidagi Nyuton ko’pyoqligi quyidagi to’plamning qavariq qobig’i bilan aniqlanadi: $(j,k) + \mathbb{R}^2_+, R^2$ da, bu yerda $(j,k) \in M(f)$.

Bundan keyin Nyuton ko’pyoqliligini $N(f)$ bilan belgilaymiz.

Varchenko ma’nosidagi Nyuton diagrammasi deb Nyuton ko’pyoqligining barcha kompakt yoqlari birlashmasiga aytiladi [4,5], bu yerda yoq deganda ko’pburchakning qirrasi yoki ko’pburchak uchi tushuniladi.

Keyinchalik, (x_1, x_2) tekislikdan farqlash uchun biz Nyuton ko’pyoqligini o’z ichiga olgan tekislik uchun (t_1, t_1) koordinatalardan foydalanamiz.

Tarif 1.2: Nyuton ko’pyoqligi bilan koordinata boshi orasidagi $d = d(f)$ masofa deb, $t_1 = t_2$ bissektrissaning Nyuton ko’pyoqligi bilan kesishishidan hosil bo’lgan (d, d) ko’rinishdagi to’plamning eng kichik d koordinatasiga aytiladi.

Tarif 1.3: f Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'i deb, (d,d) nuqtani o'z ichiga olgan eng kichik o'lchovli yoqqa aytiladi va $\pi(f)$ orqali belgilandi.

f funksiyaning bosh qismi deb, quyidagi qatorga aytamiz:

$$f_p(x_1,x_2):=\sum_{(j,k)\in\pi(f)} c_{jk}x_1^j x_2^k .$$

Agar $\pi(f)$ kompakt to'plam bo'lsa, u holda f_p kvazibirjinsli ko'phad bo'ladi, aks holda f_p ni formal darajali qator sifatida qaraymiz.

Nyuton ko'pyoqligi va Nyuton ko'pyoqligigacha bo'lgan masofa lokal silliq koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq. Lokal analitik (mos ravishda silliq) koordinatalar sistemasi deganda biz nol nuqtani saqlovchi analitik (mos ravishda silliq) almashtirishlarni nazarda tutamiz. Agar biz f silliq funksiyalar bilan ish ko'rsak, u holda lokal silliq koordinatalar sistemalarini qaraymiz va agar f analitik funksiya bo'lsa, u holda odatda biz lokal analitik koordinatalar sistemalarini qaraymiz. Analitik (mos ravishda silliq) f funksiyaning balandligi

$$h(f):=\sup\{d_x\}$$

munosabat bilan aniqlanadi, bu yerda supremum barcha lokal analitik (mos ravishda silliq) koordinatalar sistemalari bo'yicha olinadi, bunda d_x – (x_1,x_2) –koordinata sistemasidagi Nyuton ko'pyoqligi bilan koordinatalar boshi orasidagi masofa [4].

Tarif 1.4: Agar $h(f)=d_x$ bo'lsa, u holda (x_1,x_2) koordinatalar sistemasi f ga muvofiqlashgan deyiladi.

Agar f haqiqiy analitik funksiya bo'lib, koordinatalar boshida karrali komponentalarga ega bo'lmagan holda, ya'ni $f = f_1 f_2$ $f_k(0,0)=0$ $(k=1,2)$ bo'lmagan holda A.N.Varchenko f ga muvofiqlashgan koordinatalar sistemasi mavjudligini isbotladi. Asosiy teoremaning isboti maxsusliklarni yechish haqidagi Xironaki teoremasiga asoslanadi. ([4, 17]ga qarang).

Biz Pyuzio qatorining ildizlariga asoslangan A.N.Varchenko teoremasining elementar konstruktiv isbotini keltiramiz. Bundan tashqari, bizning isbotimiz ixtiyoriy analitik funksiyalar va chekli tipdagi silliq funksiyalar uchun A.N.Varchenko teoremasining analogini isbotlashda ham qo’llaniladi [8].

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida faza funksiyaning bosh qismi bo’lgan kvazibirjinsli ko’phad haqida malumotlar keltirilgan [9,14].

Faraz qilaylik, $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2), \quad \kappa_1, \kappa_1 > 0$ shartni qanoatlantiruvchi oldindan berilgan vazn bo’lsin. Bir parametrli cho’zish kengaytma esa

$$\delta_r(x_1, x_2) := (r^{\kappa_1} x_1, r^{\kappa_2} x_2), \quad r > 0$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Agar ixtiyoriy $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ uchun $f(\delta_r x) = r^{\alpha} f(x)$ tenglik o’rinli bo’lsa, $\mathbb{R}^2$ dagi aniqlangan f funksiya *a* darajali kvazibirjinsli (*k*–birjinsli) deyiladi. α ko’rsatkich f funksiyaning *k* – darajasi deyiladi. Masalan, $x_1^j x_2^k$ monomning *k* – darajasi $\kappa_1 j + \kappa_2 k$ bo’ladi [4,15].

Ushbu $\sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k$ qator ixtiyoriy silliq f funksiya uchun uning koordinata boshidagi Teylor qatorini qaraymiz. *a* ni shunday tanlaymizki, natijada $L_\kappa := \left\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = a\right\}$ to’g’ri chiziq f funksiyaning $N(f)$ ko’pyoqligiga tayanch to’g’ri chiziq bo’lsin. U holda,

$$f_\kappa(x_1, x_2) := \sum_{(j,k) \in L_\kappa} c_{jk} x_1^j x_2^k$$

nolmas polinom a darajali *k* – birjinsli polinom hisoblanadi. U f funksiyaning κ – bosh qismi deyiladi.

Uchinchi va to'rtinchi paragraflarda muvofiqlashgan koordinatalar sistamasining yetarli shartlari va ba'zi almashtirishlar yordamida Nyuton ko'pyoqligi diagrammasining almashtirilishi keltirilgan.

Dissertasiyaning ikkinchi bobi to'rtta paragrafdan tashkil topgan va u Faza funksiya uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemasining mavjudligiga bag'ishlangan bo'lib, unda quyidagi ikkita teorema isbotlangan [4,5,8,15].

Quyidagi teorema analitik funksiyalar uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemalarining mavjudligi haqida.

2.2.Teorema: Bizga $f(0,0)=0, \quad \nabla f(0,0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $\mathbb{R}^2$ koordinata boshida aniqlangan nol bo'lmagan haqiqiy f analitik funksiya berilgan bo'lsin. $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ larni shunday tanlaymizki, f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligining $\pi(f)$ bosh yog'i $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqda yotadi. Umumiylikka ziyon yetkazmasdan, $\kappa_2 \geq \kappa_1$ deb faraz qilishimiz mumkin. U holda x_1 ga bog'liq koordinata boshi yaqinida haqiqiy analitik va $\psi(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $\psi(x_1)$ funksiya mavjudki, $y_1 := x_1, \quad y_2 := x_2 - \psi(x_1)$ munosabat bilan aniqlangan (y_1, y_2) koordinatalar sestemasi nol nuqta atrofida f funksiyaga muvofiqlashgan bo'ladi.

Haqiqatda ψ funksiya x_2 o'zgaruvchiga nisbatan $f(x_1, x_2)=0$ tenglama ildizlaridan biri bilan yoki ildizlarining Pyuzio qatori bosh haqiqiy qismi bilan ustma–ust tushadi. Teorema 2.2., A.N.Varchenko tomonidan $\{f(x_1, x_2)=0\}$ analitik to'plam qarrali kompanentlarga ega bo'lmagan holda isbotlangan. Bundan tashqari, uning isboti maxsusliklarni yechish haqidagi Xironaki teoremasiga asoslanadi. Bu teoremaning funksiya ildizlari Pyuzio qatori yoyilmasiga asoslangan Shturm, D.H.Fong va I.M.Steyin tomonidan berilgan.

Quyidagi teorema silliq funksiyalar uchun yuqoridagi teoremaning umumlashmasidir.

2.5. Teorema: Bizga R^2 koordinata boshida chekli tipdagi haqiqiy qiymatli f silliq funksiya berilgan bo'lib, $f(0,0)=0,$ $\nabla f(0,0)=0$ shartlarni qanoatlantirsin. $k_1,k_2\geq 0$ larni shunday tanlaymizki, f funksiya Nyuton ko'pyoqligining $\pi(f)$ bosh yog'i $k_1t_1+k_2t_2=1$ to'g'ri chiziqda yotadi. Umumiylikga ziyon yetkazmaslik uchun, biz $k_2\geq k_1$ deb faraz qilamiz. U holda koordinata boshi yaqinida x_1 ga bog'liq $\psi(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $\psi(x_1)$ silliq funksiya va f uchun nolda $y_1:=x_1,$ $y_2:=x_2-\psi(x_1)$ bo'yicha aniqlangan muvofiqlashgan (y_1,y_2) koordinatalar sistemasi mavjud.

I. BOB. NYUTON KO'PYOQLIGI.

Muvofiqlashgan koordinatalar sistemalari tushunchasi V.I.Arnold tomonidan kiritilgan bo'lib, ossillyatorli integrallarning asimptotik harakterini o'rganishda muhim rol o'ynaydi. Muvofiqlashgan koordinatalar sistemasining mavjudligi haqidagi A.N. Varchenko teoremasining isboti maxsusliklarni yechish haqidagi Xironaki teoremasiga asoslanadi. Analitik funksiyalar ildizlarining Pyuzio qatoriga asoslangan muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini olishning yangi elementar usuli ma'lum. Ixtiyoriy analitik funksiya hamda chekli tipdagi silliq funksiyalar uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemalari mavjudligiga bag'ishlangan.

§ 1.1. Natijalar muhokamasi, zarur ta'riflar va belgilashlar.

Ushbu

$$I(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda f(x)} a(x)dx \tag{1.1}$$

integralga $f(x)$ fazali, $a(x)$ amplitudali ossilyatorli integral deyiladi. Osongina ko'rsatish mumkinki (1.1) ko'rinishdagi ossilyatorli integrallarda $x=\varphi(y)$ analitik (silliq) almashtirish natijasida tebranuvchan integrallarning asimptotik holati o'zgarmaydi.

Bu holat Van der Karputning klassik bahosini isbotlashda ham o'z aksini topgan. Van der Karput teoremasi bir karrali ossilyatorli integralning asimptotik holati f faza funksiyasining birinchi tartibli xosilasi ildizining karraligi bilan aniqlanishini tasdiqlaydi [15].

Ko'p o'zgaruvchili holda ossilyatorli integrallarning asimptotikasini aniqlash haqidagi masala ancha murakkab hisoblanib, hozirgacha umumiy holda bunday masalalar ochiq qolmoqda. V.I.Arnold ossilyatorli integrallarning asimptotikasi tegishli koordinatalar sistemasida faza funksiyaning kritik nuqtasida qurilgan Nyuton ko'pyoqligining diskret xarakteristikalari orqali aniqlanishi haqidagi farazni ilgari surdi. Ba'zi funksiyalarning muxsus sinflari uchun Arnoldning farazi o'z tasdig'ini topdi, bunda silliq funksiyalar sinfi olindi ([2] ga qarang). Ba'zi analitik funksiyalar sinfi uchun A.N.Varchenko muvofiqlashgan koordinatalar sistemasining mavjudligini isbotladi. [4] Bundan tashqari u bunday koordinatalar sistemasi mavjud bo'lmagan uch o'zgaruvchili funksiyalarga misol tuzdi. Keyinchalik G.Shuls chekli chiziqli tipdagi qavariq funksiyalar uchun shunga o'xshash koordinatalar sistemasi mavjudligini isbotladi.

Faraz qilaylik, $f-$ R^2 koordinata boshining biror atrofida aniqlangan va $f(0,0)=0,\quad \nabla f(0,0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi silliq haqiqiy o'zgaruvchili funksiya bo'lsin. Bu funksiyaning koordinata boshida Makloren qatoriga yoyilmasini qaraymiz:

$$f(x_1,x_2) \sim \sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} x_1^j x_2^k .$$

Umuman olganda bunday qator yaqinlashmaydi. Shuning uchun bu qatorni f funksiya uchun formal darajali qatori deyishimiz mumkin [6,10].

Ushbu

$$M(f):=\left\{(j,k)\in N^2 : C_{jk}=\frac{1}{j!k!},\partial_{x_1}^j\partial_{x_2}^k f(0,0)\neq 0\right\}$$

to'plamga f funksiya Makloren qatorining tashuvchisi deyiladi. Biz

$$M(f)\neq 0$$

deb faraz qilamiz, bu f funksiyaning koordinata boshini chekli tipdaligini bildiradi. Bu tushuncha funksiyalarning chekli aniqlanganligi tushunchasi va funksiyalarning chekli chiziqli tipdagi tushunchasidan farq qiladi. Agar f haqiqiy analitik funksiya bo'lsa, tabiiyki, Teylor qatori f funksiyaga nol nuqta atrofida yaqinlashadi va cheklilik tipini oddiygina qilib $f \not\equiv 0$ ko'rinishda belgilaymiz.

Tarif 1.1: f funksiyaning (x_1, x_2) koordinatalar sistemasi boshidagi Nyuton ko'pyoqligi quyidagi to'plamning qavariq qobig'i bilan aniqlanadi: $(j,k)+\mathbb{R}^2_+, R^2$ da, bu yerda $(j,k)\in M(f)$.

Bundan keyin Nyuton ko'pyoqliligini $N(f)$ bilan belgilaymiz.

Varchenko ma'nosidagi Nyuton diagrammasi deb Nyuton ko'pyoqligining barcha kompakt yoqlari birlashmasiga aytiladi [4], bu yerda yoq deganda ko'pburchakning qirrasi yoki ko'pburchak uchi tushuniladi.

Keyinchalik, (x_1, x_2) tekislikdan farqlash uchun biz Nyuton ko'pyoqligini o'z ichiga olgan tekislik uchun (t_1, t_2) koordinatalardan foydalanamiz.

Tarif 1.2: Nyuton ko'pyoqligi bilan koordinata boshi orasidagi $d = d(f)$ masofa deb, $t_1 = t_2$ bissektrissaning Nyuton ko'pyoqligi bilan kesishishidan hosil bo'lgan (d,d) ko'rinishdagi to'plamning eng kichik d koordinatasiga aytiladi.

Tarif 1.3: f Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'i deb, (d,d) nuqtani o'z ichiga olgan eng kichik o'lchovli yoqqa aytiladi va $\pi(f)$ orqali belgilandi.

f funksiyaning bosh qismi deb, quyidagi qatorga aytamiz:

$$f_p(x_1, x_2) := \sum_{(j,k)\in\pi(f)} c_{jk} x_1^j x_2^k .$$

Agar $\pi(f)$ kompakt to'plam bo'lsa, u holda f_p kvazibirjinsli ko'phad bo'ladi, aks holda f_p ni formal darajali qator sifatida qaraymiz.

Nyuton ko'pyoqligi va Nyuton ko'pyoqligigacha bo'lgan masofa lokal silliq koordinatalar sistemasining tanlanishiga bog'liq. Lokal analitik (mos ravishda silliq) koordinatalar sistemasi deganda biz nol nuqtani saqlovchi analitik (mos ravishda silliq) almashtirishlarni nazarda tutamiz. Agar biz f silliq funksiyalar bilan ish ko'rsak, u holda lokal silliq koordinatalar sistemalarini qaraymiz va agar f analitik funksiya bo'lsa, u holda odatda biz lokal analitik koordinatalar sistemalarini qaraymiz. Analitik (mos ravishda silliq) f funksiyaning balandligi

$$h(f) := \sup\{d_x\}$$

munosabat bilan aniqlanadi, bu yerda supremum barcha lokal analitik (mos ravishda silliq) koordinatalar sistemalari bo'yicha olinadi, bunda $d_x - (x_1, x_2) -$ koordinata sistemasidagi Nyuton ko'pyoqligi bilan koordinatalar boshi orasidagi masofa.

Tarif 1.4: Agar $h(f) = d_x$ bo'lsa, u holda (x_1, x_2) koordinatalar sistemasi f ga muvofiqlashgan deyiladi.

Agar f haqiqiy analitik funksiya bo'lib, koordinatalar boshida karrali komponentalarga ega bo'lmagan holda, ya'ni $f = f_1 f_2$ $f_k(0,0) = 0$ $(k = 1,2)$ bo'lmagan holda A.N.Varchenko f ga muvofiqlashgan koordinatalar sistemasi mavjudligini isbotladi. Asosiy teoremaning isboti maxsusliklarni yechish haqidagi Xironaki teoremasiga asoslanadi. ([4, 17]ga qarang).

Biz Pyuzio qatorining ildizlariga asoslangan A.N.Varchenko teoremasining elementar konstruktiv isbotini keltiramiz. Bundan tashqari, bizning isbotimiz ixtiyoriy analitik funksiyalar va chekli tipdagi silliq funksiyalar uchun A.N.Varchenko teoremasining analogini isbotlashda ham qo'llaniladi.

§1.2. Nyuton ko'pyoqligining tayanch chiziqqa mos keluvchi f ning bosh qismi – kvazibirjinsli ko'phad.

Faraz qilaylik, $\kappa=(\kappa_1,\kappa_2),\quad \kappa_1,\kappa_1>0$ shartni qanoatlantiruvchi oldindan berilgan vazn bo'lsin. Bir parametrli cho'zish kengaytma esa

$$\delta_r(x_1,x_2):=(r^{\kappa_1}x_1,r^{\kappa_2}x_2)\,,\ r>0$$

munosabat bilan aniqlanadi.

Agar ixtiyoriy $r>0$, $x\in\mathbb{R}^2$ uchun

$$f(\delta_r x)=r^{\alpha}f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $\mathbb{R}^2$ dagi aniqlangan f funksiya *a* darajali kvazibirjinsli (*k*–birjinsli) deyiladi. α ko'rsatkich f funksiyaning *k* – darajasi deyiladi. Masalan, $x_1^j x_2^k$ monomning *k* – darajasi $\kappa_1 j+\kappa_2 k$ bo'ladi.

Ushbu $\sum_{j,k=0}^{\infty}c_{jk}x_1^j x_2^k$ qator ixtiyoriy silliq f funksiya uchun uning koordinata boshidagi Teylor qatorini qaraymiz. a ni shunday tanlaymizki, natijada $L_\kappa:=\left\{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2:\kappa_1t_1+\kappa_2t_2=a\right\}$ to'g'ri chiziq f funksiyaning $N(f)$ ko'pyoqligiga tayanch to'g'ri chiziq bo'lsin. U holda, $f_\kappa(x_1,x_2):=\sum_{(j,k)\in L_\kappa}c_{jk}x_1^j x_2^k$ nolmas polinom a darajali *k* – birjinsli polinom hisoblanadi. U f funksiyaning κ – bosh qismi deyiladi.

Tarifga ko'ra

$$f(x_1,x_2)=f_\kappa(x_1,x_2)+\text{ yuqori tartibli } k\text{- darajali hadlar.}\qquad (1.2.)$$

Aniqrog'i, $f-f_k$ qoldiqning Teylor tashuvchisi ixtiyoriy (j,k) nuqtasi L_n to'g'ri chiziqqa parallel, lekin undan balandda bo'lgan $\kappa_1t_1+\kappa_2k_2=d,\quad d>a$ to'g'ri chiziqda yotadi. Bundan esa ushbu munosabat o'rinli bo'ladi. Ya'ni

$$N_d(f_\kappa) \subset N_d(f)$$

Quyidagi lemma o'rinli:

1.5.Lemma: f koordinata boshi atrofida silliq funksiya bo'lsin va $c \geq 0$ bo'lsin. Faraz qilaylik, $\kappa_1 \leq \kappa_2$ va $m \geq 1$ N shunday tanlanganki, $\kappa_1 m > c$ bo'lsin. U holda f funksiya s dan quyidagi ma'noda kichik bo'lmagan k – darajali hadlardan iborat bo'ladi: ixtiyoriy $(j,k) \in M(f)$ uchun $(\kappa_1 j + \kappa_2 r \geq c)$ o'rinli bo'ladi, faqat va faqat shunday polinom va ajk, $j + r = m$ shartni qanoatlantiruvchi silliq funksiyalar mavjud bo'lib,

$$f(x_1, x_2) = F(x_1, x_2) + \sum_{j+k=m} x_1^j x_2^k a_{jk}(x_1, x_2) \qquad (1.3)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, bu yerda

$$M(F) \subset \{ j, k \in N : \kappa_1 j + \kappa_2 k \geq c \}.$$

Shuni ta'kidlaymizki, $j + k = m$ da $\kappa_1 j + \kappa_2 k \geq c$ bo'ladi.

Isbot: Faraz qilaylik, ixtiyoriy $(j,k) \in M(f)$ nuqta uchun $\kappa_1 j + \kappa_2 k \geq c$ bo'lsin. Agar F uchun f funksiyaning koordinata boshidagi $m-1$ darajali Teylor polinomini tanlasak, u holda (1.3) tenglik Teylor formulasidan kelib chiqadi.

Teskarisi, (1.3) tenglikdan ochiq oydin kelib chiqadi, ya'ni ixtiyoriy $(j,k) \in M(f)$ uchun $\kappa_1 j + \kappa_2 k \geq c$ tengsizlik kelib chiqadi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Ba'zida bu ta'riflarni $\kappa_1 = 0$ yoki $\kappa_2 = 0$ hollar uchun qo'llash ancha qulay. Bu hollarda f funksiyaning $\sum_{(j,k)\in L_\kappa} c_{jk} x_1^j x_2^k$ k- bosh qismi formal darajali qator sifatida qaraymiz, agar f haqiqiy analitik funksiya bo'lganda u ham analitik bo'ladi. Faraz qilaylik, $\nabla P(0,0) = 0$ $P \in R[x_1, x_2]$ shartni qanoatlantiruvchi ko'phad kvazibirjinsli bo'lsin. Ushbu $m(p) := ord_{s^1} P$ orqali

P funksiyaning markazi koordinata boshida bo'lgan S' birlik aylanadagi nollarning maksimal tartibini belgilaymiz [16].

Agar $m_1, m_2, \ldots, m_n$ natural sonlar bo'lsa, u holda $(m_1, m_1, \ldots, m_n)$ orqali ularning eng katta umumiy bo'luvchisi belgilanadi.

Quyidagi mulohaza keyingi bayonimizda foydali bo'ladi.

1.6. Mulohaza. R birinchi darajali (κ_1, κ_2) birjinsli ko'phad bo'lib, P ushbu $P(x_1, x_2) = cx_1^{v_1} x_2^{v_2}$ ko'rinishga ega bo'lmasin. U holda κ_1 va κ_2 lar P bo'yicha yagona ravishda aniqlanadi va $\kappa_1, \kappa_2 \in Q$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $\kappa_1 \le \kappa_2$ va $\kappa_1 = \frac{q}{m}$, $\kappa_2 = \frac{p}{m}$, $(p, q, m) = 1$ bo'lsin, xususan $p \ge q$ bo'ladi. U holda $(p, q) = 1$ bo'ladi va shunday nomanfiy α_1, α_2 butun sonlar va $(1,1)$ birjinsli Q ko'phad mavjud bo'lib P ko'phad quyidagi

$$P(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} q(x_1^p, x_2^q) \tag{1.4}$$

ko'rinishda yoziladi. Aniqrog'i P

$$P(x_1, x_2) = cx_1^{v_1} x_2^{v_2} \prod_{l=1}^{M} (x_2^q - \lambda_l x_1^p) n_l \tag{1.5}$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $M \ge 1$ va $\lambda_l \in C \setminus \{0\}$ esa har xil $n_l \in N \setminus \{0\}$ karrali ildizlar, hamda $v_1, v_2 \in N$ (bu sonlar (1.4) dagi $\alpha_1 \alpha_2$ dan farqli bo'lishi mumkin).

Faraz qilaylik, $h := \sum_{l=1}^{M} n_l$ bo'lsin. P ko'phad uchun $d(p)$ masofa quyidagicha aniqlanadi: Agar $N(p)$ ning bosh yog'i kompakt bo'lsa, u $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqda yotadi va bu masofa ushbu

$$d(p) = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{v_1 q + v_2 p + pqn}{q + p} \tag{1.6}$$

tenglikdan aniqlanadi, aks holda $d(p)=\max\{v_1,v_2\}$ ga ega bo'lamiz.

Xususan, umumiy holda esa

$$d(p)=\max\left\{v_1,v_2,\frac{1}{\kappa_1+\kappa_2}\right\}$$

ega bo'lamiz.

Isbot: 1.6. mulohazaning isboti elementar sonlar nazariyasiga asoslanadi.

$$\alpha\kappa_1+\beta\kappa_2=1 \tag{1.7}$$

Chiziqli tenglamaning barcha $(\alpha,\beta)\in N^2$ yechimlari to'plamini A bilan belgilaymiz. U holda P ko'phadni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$P(x_1,x_2)=\sum_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}x_1^{\alpha}x_2^{\beta} \tag{1.8}$$

bu yerda $c_{\alpha,\beta}$ o'zgarmas.

Agar P ushbu $P(x_1,x_2)=cx_1^{v_1}x_2^{v_2}$ ko'rinishga ega bo'lmasa, u holda (1.7) tenglama hech bo'lmaganda ikkita $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)\in N^2$ yechimlarga ega bo'ladi va (1.8) dagi mos $c_{a,\beta}$ koordinatalar noldan farqli. Demak, ushbu $\alpha_1\kappa_1+p_1\kappa_2=1$ va $\alpha_2\kappa_1+\beta_2\kappa_2=1$ tenglamalar mos ravishda κ_1,κ_2 sonlarni yagona ravishda aniqlaydi va ular rasionaldir.

Faraz qilamizki, $\kappa_1\le\kappa_2$ bo'lib, ushbu ko'rinishda bo'lsin.

$$\kappa_1=\frac{q}{m},\quad \kappa_2=\frac{p}{m},\quad (p,q,m)=1$$

$(\alpha_0,\beta_0)\in A$ ni shunday tanlaymizki, natijada α_0 maksimal bo'lsin. (1.7) ga ko'ra

$$pZ+qZ+mZ=Z$$

bo'ladi. Endi unga teng kuchli bo'lgan

$$\alpha q+\beta p=m$$

tenglikni olamiz.

Demak, $pZ+qZ=Z$ va shuning uchun

$$(p,q)=1 \tag{1.9}$$

chunki $A\neq\phi$.

$(\alpha,\beta)\in A \Leftrightarrow (\alpha-\alpha_0)q+(\beta-\beta_0)p=0$. U holda (1.9) tenglikdan biror $s\in Z$ son uchun $\alpha-\alpha_0=-sp, \quad \beta-\beta_0=sq$ yoki $\alpha=\alpha_0-sp, \quad \beta=\beta_0+sq$ kelib chiqadi.

α_0 A uchun "maksimal" element bo'lgani uchun, $s\geq 0$ bo'ladi. $\alpha_1;=\alpha_0-s_1p\geq 0$ shartga ega $s_1\in Z$ maksimal sonni tayinlaymiz. U holda ixtiyoriy $(\alpha,\beta)\in A$ uchun

$$\alpha=\alpha_1+(s_1-s)p, \quad \beta=\beta_0+sq$$

munosabatga ega bo'lamiz. Ta'kidlaymizki, $s, s-s_1\in N$. Shunday qilib, har bir $x_1^{\alpha}x_2^{\beta}, \quad (\alpha,\beta)\in A$ polinom

$$x_1^{\alpha}x_2^{\beta}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\beta_0}(x_1^{p})^{s_1-s}(x_2^{q})^{s}$$

ko'rinishda yozilish mumkin. (1.8) ni hisobga olib (1.4) ni olamiz. (1.5) ni isbotlash uchun

$$Q(y_1,y_2)=cy_2^{n}+c_1y_2^{n-1}y_1+\ldots+c_ny_1^{n}$$

ni yozamiz, bu yerda n q ko'phadning darajasi. Faraz qilaylik, $c\neq 0$ bo'lsin. Aks holda, (1.4) dagi q dan birorta $y_1=x_1^{p}$ darajani qavsdan tashqariga chiqarishimiz mumkin edi. Umumiyllika ziyon keltirmasdan $c=1$ deb olamiz va

$$Q(y_1,y_2)=y_1^{n}Q\left(1,\frac{y_2}{y_1}\right)=y_1^{n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{y_2}{y_1}-\lambda_j\right)=\prod_{j=1}^{n}\left(y_2-\lambda_j j_1\right)$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda $\lambda_1,..,\lambda_n\in c$ ularning karraliligini hisobga olgan holda $Q(1,y_2)$ ko'phadning ildizlaridir bu esa (1.5) ni isbotlaydi.

d(P) ni hisoblash uchun, ta'kidlaymizki, P Nyuton ko'pyoqlikning uchlari

$$x_1 := (v_1, v_2 + nq) \text{ va } x_2 := (v_1 + np, v_2)$$

tengliklar bilan aniqlanadi, ular bizning farazga ko'ra $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqdagi turli nuqtalardir. Oson ko'rsatish mumkinki,

$$\kappa_1 = \frac{q}{v_1 q + v_2 p + pqn}, \quad \kappa_2 = \frac{q}{v_1 q + v_2 p + pqn}$$

bo'ladi.

Shunday qilib, agar bosh yoq $N(P)$ kompakt bo'lsa, u holda, u bu ikki nuqtani tutashtiruvchi kesma bo'ladi va shuning uchun $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqda yotadi va (1.6) ni olamiz. Boshqacha aytganda, agar $v_1 \le v_2$ bo'lsa, bosh yoq bu x_1 dan chiquvchi garizontal nur, shunday qilib, $d(P) = v_2$ shunga o'xshash, agar $v_1 \ge v_2$ bo'lsa, $d(P) = v_1$ bo'ladi.

$N(P)$ geometriyadan ravshanki,

$$d(P) = \max\left\{v_1, v_2 \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2}\right\}$$

ayniyatga egamiz. Mulohaza to'liq isbotlandi.

Bu mulohaza P ko'phadning koordinata o'qlarida yotmagan (x_1, x_2) ildizlari $x_2 = \lambda_l^{1/q} x_1^{p/q}$ ko'rinishga ega ekanligini ko'rsatadi.

$$d_n(P) = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2}$$

kattalik R kvazibirjinsli ko'phadning birjinsli masofasi deyiladi. Eslatib o'tamizki, $\left(d_n(P), d_n(P)\right)$ nuqta bissektrisa va $N_d(P)$ Nyuton diagrammasi yotgan $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasidir.

Bundan tashqari $d_n(P) \le d(P)$ bo'ladi.

1.7. Natija: (κ_1,κ_2) – bir jinsli P ko'phad berilgan bo'lsin va P ko'phadning (1.5) ifodasini qaraymiz. $n:=\sum_{l=1}^{M} n_l$ deb olamiz.

(a). Agar $\kappa_2/\kappa_1 \notin N$ bo'lsa, ya'ni $q \geq 2$ bo'lsa, u holda $n < d_h(P)$ bo'ladi. Xususan, P ko'phadning har bir haqiqiy noli $x_2 = \lambda_e^{1/q} x_1^{p/q}$ karraliligi $d_h(P)$ dan oshmaydi.

(v). Agar $\kappa_2/\kappa_1 \in N$ bo'lsa, ya'ni agar $q \geq 1$ bo'lsa, $n_0 := v_2$ deb olamiz va $l_0 \in \{0,...,M\}$ ni shunday tanlaymizki, $n_{l_0} = \max\limits_{l=0,...,M} n_l$ bo'lsin. U holda har bir $l \neq l_0$ uchun $n_0 \leq d_h(P)$ bo'ladi.

Isbot: 1.6. mulohazaning isbotiga ko'ra

$$d_n(P) = \frac{v_1 q + v_2 p + pqn}{q+p}$$

bo'ladi.

Endi, agar $q \geq 2$ bo'lsa, u holda $p > q \geq 2$ bo'lib $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ bo'lgan uchun ushbu

$$d_n(P) \geq \frac{pqn}{q+p} > n$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Nihoyat $q = 1$ deb faraz qilaylik.

Agar $l \neq l_0$ bo'lsa, u holda

$$d_n(P) \geq \frac{p(n+n_0)}{p+1} \geq \frac{p(n_{l_0}+n_l)}{p+1} \geq \frac{2pn_l}{p+1} \geq n_l$$

bo'ladi. Natija 1.7 to'liq isbot bo'ldi.

Natija shuni ko'rsatadiki, P ning koordinata yoqlarida yotmaydigan har bir haqiqiy ildizi karraligi ($q = 1$ dan tashqari) $d(P)$ masafa bilan baholanadi, oxirgi holda $d(P)$ dan oshmaydigan karralikka ega bittadan ortiq bo'lmagan $x_2 = \lambda_{l_0} x_1^p$ ildiz mavjud. Agar bunday ildiz mavjud bo'lsa, uning P ning bosh ildizi deb ataymiz.

§1.3. Nyuton diagrammasini o'zgaruvchilarni almashtirish ta'sirida almashtirilishi.

Berilgan koordinatalar sistemasining muvofiqlashganligining yetarli shartlari [4] ishda, A.N.Varchenko berilgan koordinatalar sistemasining muvofiqlashganligining turli yetarli shartlarini keltirgan (hech bo'lmaganda aynimaganlikning ma'lum shartlarida) Ushbu paragrafda umumiy holda uning yangi elementar usulini keltiramiz. Bizning usulimiz silliq funksiyalar toifasiga qo'llanilishi mumkin.

Bu bo'limda biz o'zgaruvchilarni almashtirishning Nyuton diagrammasiga ta'sirini tushunishga harakat qilamiz. Dastlab, quyidagi yordamchi tasdiqni isbotlaymiz.

1.8.Lemma: $m \in N_1$, $m \geq 1$ tayinlangan natural son bo'lsin, μ orqali $\mu := (1, m)$ vaznni belgilaymiz. Bundan tashqari P ko'phad μ – birjinsli. U holda $N_d(P)$ Nyuton diagrammasi $(A_0, B_0), (A_1, B_1)$ uchlarini tutashtiruvchi $[(A_0, B_0).(A_1, B_1)]$ kompakt oraliq bo'ladi (ular ustma – ust tushishi ham mumkin), biz hamma vaqt $A_0 \leq A_1$ deb olishmiz mumkin.

Faraz qilaylik $x = \varphi(y)$, agar $m \geq 1$ bo'lsa, $x_1 = y_1$ va $x_2 = y_2 + a_2 y_1^m (a_2 \neq 0)$ ko'rinishdagi, agar $m = 1$ $(a_j \neq 0)$ bo'lsa, $x_1 = y_1 + a_1 y_2$ va $x_2 = y_2 + a_2 y_1$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilarni almashtirish bo'lsin. P orqali $P \circ \varphi$ ko'phadni belgilaymiz. U holda $\widetilde{P}$ ko'phad P ning darajasi bilan ustma- ust tushuvchi μ – birjinsli ko'phad bo'ladi va uning $N_d(\widetilde{P})$ Nyuton diagrammasi $\widetilde{A}_0 \leq \widetilde{A}$ xossaga ega bo'lgan $[(\widetilde{A}_0, \widetilde{B}_0), (\widetilde{A}_1, \widetilde{B}_1)]$ ko'rinishdagi oraliqdan iborat bo'ladi.

Quyidagi shartlardan biri bajarilsin deb, faraz qilamiz:

(i) $N_d(P)$ oraliq bissektrisadan yuqori yopiq yarimtekislikda yotsin, ya'ni ixtiyoriy $(j,k)\in N_d(P)$ uchun $j\le k$ bo'lsin.

(ii) yoki (A_0,B_0) nuqta bissektrisadan pastda yotsin, ya'ni $A_0\le B_0$ va $m(P)\le d(P)$ bo'lsin, bu yerda $m(P)$ P ning S^1 birlik aylanadagi nollari karraliligi maksimumi va $d(P)$ koordinata boshi va Nyuton ko'pyoqligi orasidagi masofa.

U holda $(\tilde{A}_0,\tilde{B}_0)$ nuqta bissektrisadan yuqori yarimtekislikda yotadi va $(\tilde{A}_1,\tilde{B}_1)$ nuqta bissektrisadan pastdagi yarimtekslikda yotadi – xususan $N_d(\tilde{P})$ Nyuton diagrammasi bissektrisa bilan kesishadi.

Isbot: (i) yoki (ii) shartdan

$$\tilde{A}_0\le\tilde{B}_0 \qquad va \qquad \tilde{A}_1\ge\tilde{B}_1 \tag{1.10}$$

kelib chiqishni ko'rsatishimiz lozim

Endi 1.6 mulohazaga ko'ra P ni

$$P(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}\prod_l(x_2-c_lx_1^m)^{n_l} \tag{1.11}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

Bu yerda c_l $P(1,x_2)$ polinomning turli nol bo'lmagan ildizlari va n_i ularning karraliligi. (1.11) tenglikdan P Nyuton ko'pyoqligining (A_0,B_0) va (A_1,B_1) uchlari uchun

$$A_0;=\alpha,\quad B_0;=\beta+N,\quad A_1;=\alpha+mN,\quad B_1;=\beta \tag{1.12}$$

lar orqali ifodalangan va

$$d_x=\frac{A_1+mB_1}{1+m}=\frac{\alpha+m(\beta+N)}{1+m}$$

son kelib chiqadi; bu yerda biz $N:=\sum_l n_l$ deb oldik.

Dastlab $m \geq 1$ va $x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2 + a_2 y_1^m$ bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda (3.3) ga ko'ra

$$P(y_1, y_2) = y_1^{\alpha}(y_2 + a_2 y_1^m)^{\beta} \prod_l (y_2 - (c_l - a_2) y_1^m)^{n_l} \tag{1.13}$$

ga ega bo'lamiz

(1.13) da y_1 bo'yicha eng kichik darajali hadlarni aniqlab quyidagiga ega bo'lamiz: $\widetilde{A}_0 = a, \ \widetilde{B}_0 = \beta + N$, ya'ni $(A_0, B_0), (A_1, B_1)$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\widetilde{A}_0 < \widetilde{B}_0$

$(\widetilde{A}_1, \widetilde{B}_1)$ ni esa (1.13) dan u1 bo'yicha eng katta darajalar orqali aniqlaymiz.

Agar har bir *l* uchun $a_2 \neq c_l$ bo'lsa, u holda

$$\widetilde{A}_1 = \alpha + m\beta + mN, \ \widetilde{B}_1 = 0$$

bo'ladi. Shuning uchun $(\widetilde{A}_1 > \widetilde{B}_1)$ bo'ladi.

Faraz qilaylik, $a_2 = c_{l_0}$ trivial bo'lmagan ildiz bilan ustma–ust tushsin. U holda

$$\widetilde{A}_1 = \alpha + m\beta + m(n - n_{l_0}), \ \widetilde{B}_1 = n_{l_0}$$

ni olamiz. Endi, agar (i) shart bajarilsa, u holda (1.11) ga ko'ra

$$\alpha + mN \leq \beta \tag{1.14}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz, undan $n_{l_0} \leq \alpha + m(\beta + N - n_{l_o})$ kelib chiqadi va agar (ii) bajarilsa, u holda

$$n_{l_0} \leq m(P) \leq d_x = \frac{\alpha + m(\beta + N)}{1 + m}$$

bo'ladi. Bu esa

$$n_{l_0} \leq \alpha + m(\beta + N - n_{l_o})$$

teng kuchli.

Shunday qilib, ikkala shartdan

$$\widetilde{A}_1 \geq \widetilde{B}_1 \tag{1.15}$$

kelib chiqadi.

Demak, (3.1) tenglik bajariladi. $m=1$ holni qarash qoldi. Bu holda

$$P(y_1 y_2) = (y_1 + a_1 y_2)^{\alpha} (y_2 + a_2 y_1)^{\beta} \prod ((1 - c_{l_0} a_1) y_2 + (a_2 - c_l) y_1)^{n_l} \tag{1.16}$$

bu yerda $a_1, a_2 \neq 0$ bizning farazlarga ko'ra yo (1.12) shart bajariladi, yoki har bir haqiqiy c_l ga ega bo'lgan l uchun

$$n_l \leq d_x = \frac{\alpha + \beta + N}{2} \tag{1.17}$$

ga ega bo'lamiz.

Bizga ma'lumi quyidagilardan biri bo'lishi mumkin. $c_{l_1} a_1 = 1$ yoki $c_{l_0} = a_2$ Lekin φ almashtirishning Yakobianni noldan farqli bo'lgani uchun hech bo'lmaganda bitta l_0 va l_1 indikes uchun bu tengliklardan biri bajarilmaydi.

Endi, agar har bir l uchun $c_{l_1} a_1 \neq 1$ bo'lsa, u holda

$$\widetilde{A}_0 = 0,\ \widetilde{B}_0 = \alpha + \beta + N,$$

va agar $c_l a_1 = 1$ bo'lsa, u holda,

$$\widetilde{A}_0 = n_l,\ \widetilde{B}_0 = \alpha + \beta + N - n_l$$

bo'ladi.

Bundan tashqari, agar har bir l uchun $c_l \neq a_1$ bo'lsa, u holda

$$\widetilde{A}_1 = \alpha + \beta + N,\ \widetilde{B}_1 = 0$$

va agar $c_{l_0} \neq a_2$ bo'lsa, u holda

$$\widetilde{A}_1 = \alpha + \beta + N - n_l,\ \widetilde{B}_1 = n_l$$

bo'ladi va (3.8) lardan mos ravishda foydalanib, ixtiyoriy hol uchun mos ravishda $\widetilde{A}_0 \le \widetilde{B}_0$ va $\widetilde{A}_1 \ge \widetilde{B}_1$ munosabatlarni hosil qilish mumkin.

Shuni isbotlash talab qilingan edi. 1.8 lemma to'liq isbot bo'ladi.

Nol yaqinida aniqlangan $f(0,0)=0$ va $\nabla f(0,0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi f silliq funksiya tayinlangan bo'lsin. $\kappa := (\kappa_1, \kappa_2)$, $\kappa_j \ge 0$ ni shunday tanlaymizki, Nyuton ko'pyoqlikning $\pi(f)$ bosh yog'i $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqda yotsin. Ta'kidlaymizki, κ soni $\pi(f)$ uch bo'lgan holdan tashqari yagona ravishda aniqlanadi. Biz $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ deb faraz qilamiz. Umumiylikka ziyon yetkazmadan $\kappa_1 \le \kappa_2$ deb faraz qilamiz, aks holda x_1 va x_2 koordinatalarning o'rinlarini almashtiramiz. Ta'kidki, $\kappa_1 = 0$ faqat va faqat bosh yoq nokompakt to'plam bo'lganda o'rinli: bu holda u $t_2 = 1/\kappa_2$ bilan aniqlangan L_κ nurda yotadi. Agar $\kappa_1 > 0$ bo'lsa, u holda bosh yoq kompakt bo'lib, f funksiyaning bosh qismi $f_p = f_\kappa$ birinchi darajali k–birjinsli ko'phad bo'ladi.

$x = \varphi(y)$ ko'rinishda koordinatalar boshidagi lokal silliq koordinatalar sistemasini qaraymiz va

$$f(y_1, y_2) ;= f(\varphi(y_1, y_2))$$

deb olamiz. Umumiylikka ziyon yetkazmasdan, biz $(x_1, x_2) = (\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2))$ va $j = 1, 2$ uchun

$$\frac{\partial_{\varphi_j}(0,0)}{\partial y_j} \ne 0$$

shartlarni qanoatlantiradi deb faraz qilishimiz mumkin. Shuning uchun biz φ_1, φ_2 funksiyalarni

$$\begin{aligned} \varphi_1(y_1, y_2) &= y_1 \psi_1(y_1, y_2) + \eta_1(y_2) \\ \varphi_2(y_1, y_2) &= y_2 \psi_2(y_1, y_2) + \eta_2(y_1) \end{aligned}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin, bu yerda $\psi_1, \psi_2, \eta_1, \eta_2$

$$\psi_1(0,0)\neq 0,\quad \psi_2(0,0)\neq 0,\quad \eta_1(0)=\eta_2(0)=0$$

shartlarni qanoatlantiruvchi silliq funksiyalardir. x_1 va x_2 koordinatalarni songa ko'paytirish Nyuton ko'pyoqligini o'zgartirmagani uchun biz $\psi_1(0,0)=\psi_2(0,0)=1$ deb faraz qilishimiz mumkin.

κ_j orqali η_j ning noldagi ildizining $(j=1,2)$ tartibini belgilaymiz. U holda ravshanki, $\kappa_j\geq 1$ bo'ladi. Ma'lumki, agar $\kappa_2=\infty$ bo'lsa, ya'ni η_2 dagi yassi funksiya bo'lsa, u holda masofa koordinatalarni almashtirish bilan o'zgarmaydi, ya'ni $d_x=d_y$.

Ikkinchi tomondan, agar κ_r chekli son bo'lsa, (1.12) ga ko'ra φ_2 bosh had $y_2+a_2y_1^{k_2}, a_2\neq 0$ ko'rinishida bo'ladi. Shuning uchun, biz ikkinchi $\mu:=(1,k_2)$ vaznni kiritamiz. U holda $\varphi_2(y_1,y_2)$ ning μ –bosh qismi $y_2+a_2y_2^{k_1}$ ifoda bilan aniqlanadi va u k_2 darajali μ –birjinsli bo'ladi. Eslatamizki,

$$L_\mu;=\left\{(t_1,t_2)\in R^2 : t_1+k_2t_2=d\right\}$$

$N(f)$ Nyuton ko'pyoqlikka tayanch to'g'ri chiziq. L_κ to'g'ri chiziq $\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\leq 1$ burchak koeffisentga va L_μ esa $\frac{1}{\kappa_2}\leq 1$ koeffisentga ega. O'zgaruvchilarni almashtirish bilan Nyuton diagrammasini almashtirish bu ikkita κ va μ birjinsliklar bilan bog'liq, xususan, tayanch to'g'ri chiziqlar burchak koeffisiyentlari orasidagi munosabatga bog'liq. Faraz qilaylik $\kappa_1>0$ da $\frac{\kappa_2}{\kappa_1}:=\infty$ deb olmaz.

1.9. Lemma: Quyidagilar o'rinli:

a) Faraz qilaylik yo

$(i)\ \kappa_2 > \kappa_1$ yoki $k_2 = \infty$ yoki $\infty > k_2 > \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}$ (ya'ni L_μ to'g'ri chiziq L_κ to'g'ri chiziqdan kichik burchak koeffisiyentiga ega yoki

(ii) $\kappa_1 = \kappa_2$ va $k_1, k_2 > 1$ bo'lsa. U holda bo'ladi $d_x = d_y$.

b) Agar $k_2 < \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}$ L_μ to'g'ri chiziq L_κ to'g'ri chiziqqa nisbatan katta og'ish burchagiga ega bo'lsa, u holda $d_y \le d_x$ bo'ladi. Xususan, agar $\kappa_1 = 0$ bo'lsa, ya'ni bosh yoq komrakt bo'lmasa, u holda (x_1, x_2) koordinatalar f ga muvofiqlashgan bo'ladi.

Isbot: a) $\kappa_1 = 0$ va $k_2 = \infty$ bo'lgan hollar. Bu holda $n := \dfrac{1}{\kappa_2} \in N, \quad n \ge 1$, bosh yoq $t_2 = n$ ko'rinishda bo'lgan gorizontal L_κ to'g'ri chiziqda yotadi, shuning uchun $d_x = n$ bo'ladi. Bundan tashqari, η_2 koordinatalar boshida yagona funksiya, ya'ni har bir $j \in N$ uchun

$$\partial_y^j, \eta_2(0) = 0 \tag{1.18}$$

bo'ladi.

Nyuton ko'pyoqligi tuzilishidan f funksiyani

$$f(x_1, x_2) = x_2^n x_1^{n_1} g(x_1) + x_2^{n+1} h(x_1, x_2) + \text{ yassi funksiya}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin, bu yerda g va h siliq funksiyalar va $g(0) \ne 0$. Bundan tashqari, $n_1 < n$ bo'lgan uchun bundan

$$f(y_1, y_2) = \varphi_2(y_1, y_2)^n \varphi_1(y_1, y_2)^{n_1} G(y_1, y_2) + Q_2(y_1, y_2)^{n+1} H(y_1, y_2)$$

kelib chiqadi. Bu yerda G, H biror silliq funksiyalar bo'lib, $G(0,0) \ne 0$.

Endi $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial y_k}(0,0) = 1$ bo'lgani uchun murakkab funksiya xosilasini hisoblash formulasi va (3.9) ga ko'ra, agar $j \in n$ bo'lsa, $\partial_{y_1}^{n_1} \partial_{y_2}^{n} f(0,0) \ne 0$ ni va agar

$j = n, \quad l < n_1$ bo’lsa, $\partial^l_{y_1} \partial^j_{y_2} f(0,0) = 0$ ni olamiz, shuning uchun $(n_1, n) \in N(f)$ bo’ladi, lekin butun koordinatali nuqta bu nuqtadan pastda yoki chapda yotmaydi. Bu $d_y = d_x = n$ ekanligini ko’rsatadi.

b) $k_2 > \frac{\kappa_2}{\kappa_1}, \quad \kappa_1 > 0$ yoki $\kappa_2 > \kappa_1$ yoki $\kappa_1 = \kappa_2$ va $k_1 > 1$ bo’lgan hollarda lemma isboti.

Umumiy mulohazalardan boshlaymiz.

Agar φ_κ deb φ ning κ- bosh qismi belgilansa, u holda 1.8. Lemmaga asosan

$$f(y_1, y_2) = f_\kappa \circ \varphi_\kappa(y_1, y_2) + \ \kappa\text{-tartibdan yuqori hadlar}$$

ekanligini ko’rish ason. Shunday qilib, $f_\kappa = f_\kappa \circ \varphi_\kappa$. Bundan tashqari $f_\kappa \circ \varphi_\kappa$ κ-birjinsli polinom bo’ladi, shuning uchun $N_d(f_\kappa)$ Nyuton diagrammasi kompant oraliq bo’ladi. (Ba’zan bitta nuqta bo’lishi ham mumkin.)

Agar bu interval, bissektrisa bilan kesishgan hol bo’lsa, bu $N(f)$ Nyuton ko’pyoqlikning bosh yog’i bo’ladi. Bundan tashqari, agar φ_κ κ-darajali bo’lsa, u holda $N_d(f_n) - L_\kappa$ to’g’ri chiziqda yotadi va demak, $d_x = d_y$ ga ega bo’lamiz.

Shuni ma’lum qilamizki, agar x_1, x_2 δ darajali κ–birjinsli va agar φ_κ - κ - δ darajaga ega bo’lsa ham yuqoridagi tenglik o’rinli bo’ladi.

Endi agar $k_2 > \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ bo’lsa, u holda $k_2 \kappa_1 > \kappa_2$ bo’ladi va shunday qilib (1.12) ga ko’ra κ–darajadan yuqori hadlar aniqligida $x_2 = y_2$ bo’ladi. Shuningdek, agar $\kappa_2 > \kappa_1$ yoki $\kappa_1 > 1$ bo’lsa, u holda κ–darajadan yuqori hadlargacha aniqlikda $x_1 = y_1$ bo'ladi. Shuning uchun $\varphi_\kappa(y_1, y_2) = (y_1, y_2)$. Shunday qilib, $d_x = d_y$ ekanligini ko'ramiz.

b) $k_2 < \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ va $\kappa_1 \geq 0$ bo'lgan hollar. Bu holda $Q_2(y_1, y_2)$ ning μ–bosh qismi $y_1 + a_1 y_2^{k_2}$ ifoda bilan beriladi va $\varphi_1(y_1, y_2)$ ning μ–bosh qismi y_2 bilan ustma–ust tushadi. Agar $\kappa_2 > 1$ bo'lsa va agar $\kappa_2 = 1$ bo'lganda $y_1 + a_1 y_2$ va agar faqat va faqat $\kappa_1 = 1$ bo'lsa, $a_1 \neq 0$ bo'ladi.

$d > 0$ ni shunday tanlaymizki, natijada

$$L_\mu := \left\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : t_1 + k_2 t_2 = d\right\}$$

to'g'ri chiziq $N(f)$ Nyuton ko'pyoqligiga tayanch bo'lsin va f_μ ko'phad f – ning μ–bosh qismi bo'lsin.

U holda $d \in N$ bo'ladi. L_μ to'g'ri chiziqning burchak koeffisiyenti $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqning mos koeffisiyentidan kichik bo'lgani uchun, geometrik mulohazalardan kelib chiqadiki, $L_\mu \cap N(f)$ bissektrisaning yuqori yarim tekislikda yotuvchi I_μ kompakt oraliq (bitta nuqta ham bo'lishi mumkin) bo'ladi, ya'ni $j \leq \kappa$ bo'lgan har qanday $(j,k) \in I_\mu$ uchun

$$f_\mu(x) = \sum_{(j,k)\in I_\mu} c_{jk} x_1^j x_2^k$$

bo'ladi.

Endi μ–birjinsli f_μ ko'phadga 1.8. Lemmani qo'llab, $f_\mu = f_\mu \circ \varphi_\mu$ ning Nyuton diagrammasi bissektrisa bilan kesishishini ko'ramiz $N(f)$ ning bosh yog'i L_μ to'g'ri chiziqda yotadi va $N(f)$ bosh yoqni o'z ichiga olgan burchak koeffisiyenti L_κ to'g'ri chiziqdan kichik bo'lmagani uchun, $d_y \leq d_x$ bo'ladi.

Nihoyat $\kappa_1 = 0$ bo'lsin deb faraz qilamiz. U holda yoki $k_2 = \infty$ yoki $k_2 < \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$ va biz hamma vaqt $d_y \le d_x$ ga ega bo'lamiz. Shuning uchun (x_1, x_2) koordinatalar f ga muvofiqlashgan bo'ladi. Shuni isbotlash talab qilingan edi. 1.9.Lemma to'liq isbot bo'ldi.

1.10.Teorema: Bizga koordinata boshi atrofida $f(0,0) = 0$ va $\nabla f(0,0) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy analitik mos ravishida silliq f funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik berilgan koordinatalar sistemasi f ga muvofiqlashgan bo'lmasin. U holda quyidagi tasdiqlar o'rinli:

(a) Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'i $\pi(f)$ kompakt bo'ladi.

U $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ shartlarga ega yagona aniqlangan $\kappa_1 t_1 + \kappa_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqda yotadi. x_1, x_2 koordinatalarni almashtirib, agar zarur bo'lsa umumiylikka zarar keltirmasdan, biz $\kappa_1 \le \kappa_2$ deb faraz qilishimiz mumkin.

(b) $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \in N$

(d) f_p ko'phadning S^1 aylanadagi har qanday ildizining maksimal karraligi $m(f_p)$ ushbu $m(f_p) > d(f)$ shartni qanoatlantiradi. Xususan $f_p(1, x_2)$ polinomini yagona nol bo'lmagan shunday a ildizi mavjud bo'lib, $n_a = m(f_p) > d(f)$ bo'ladi. Shuningdek, bu holda agar $m := \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \in N$ bo'lsa, u holda f funksiyaning f_p bosh qismining muvofiqlashgan koordinatalar sistemasi $y_1 := x_1,\ \ y_2 := x_2 - a x_1^m$ formulalar bilan aniqlanadi. f_p funksiyalar balandligi uchun $n(f_p) = m(f_p)$ ga ega bo'lamiz. Aksincha, agar teoremadagi barcha (a)-(d) shartlar bajarilsa, u holda berilgan koordinatalar sistemasi f funksiyaning f_p bosh qismiga muvofiqlashmagan bo'ladi.

Yuqoridagi teoremada $f = f_p$ polinom koordinatalar sistemasining muvafiqlashishining zarur va yetarli shartlarini aniqlaydi. Keyinchalik, shunga o'xshash shartlar ixtiyoriy silliq f funksiyalar uchun ham o'rinli bo'lishini ko'ramiz.

(d) dagi $n_a > d(f)$ karralilik ildizi f_p ko'phadning bosh ildizi bo'ladi.

1.10. Teoremaning isboti: Faraz qilaylik, (x_1, x_2) kordinatalar f funksiyaga muvofiqlashmagan bo'lsin. U holda koordinatalar boshi atrofida shunday $x = \varphi(y)$ ko'rinishdagi o'zgaruvchilarni almashtirish mavjudki, u uchun

$$d_y > d_x \tag{1.19}$$

tengsizlik bajariladi.

1.9. Lemma isbotidagi kabi φ akslantirish (1.12) ko'rinishga ega, bunda

$$\psi_1(0,0) = \psi_2(0,0) = 1,$$
$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = 0$$

Yana k_j orqali η_j funksiyaning noldagi, $j = 1,2$ noli tartibini belgilab, biz $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2)$ vaznni yuqoridagi holdagi kabi shunday tanlashimiz mumkinki, natijada $N(f)$ ning bosh yog'i L_κ to'g'ri chiziqda yotadi. Shuningdek, $\kappa_1 \le \kappa_2$ deb faraz qilamiz. (1.15) va (1.9) lemmaga ko'ra, agar $\kappa_2 > \kappa_1$ bo'lsa, u holda $\frac{\kappa_2}{\kappa_1} = \kappa_2 \in N$ va agar $\kappa_1 = \kappa_2$ bo'lsa, u holda $\kappa_2 = 1$ ekanligini olamiz. Xususan, $\pi(f)$ bosh yoq kompakt. Shuning uchun u yoki qirra yoki uch bo'ladi. Demak, u $(A_0, B_0), (A_1, B_1)$ ikkita uchni birlashtiruvchi (ular ustma–ust tushishi ham mumkin) $\left[(A_0, B_0), (A_1, B_1)\right]$ oraliq bo'ladi, ya'ni

$$\pi(f) = \left[(A_0, B_0), (A_1, B_1)\right]$$

Biz $A_0 \le A_1$ deb faraz qilamiz. Bu oraliq $t_1 = t_2$ bissektrisa bilan kesishgani uchun

$$A_0 \le B_0, \; A_1 \ge B_1 \tag{1.20}$$

ga ega bo'lamiz.

Yana, biz $m := k_2$ deb yozib olamiz va $f_p = f_\kappa$ κ–birjinsli ko'phadni qaraymiz. Bundan tashqari Nyuton diagrammasi ushbu

$$\left[(A_0, B_0),(A_1, B_1)\right]$$

kesma bilan ustma –ust tushadi.

Endi $m(f_\kappa) > d_x$ ekanligini isbotlaymiz. Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni $m(f_\kappa) \le d_x$ bo'lsin. U holda f_κ 1.8.Lemmaning (ii) shartnini qanoatlantiradi. Ta'kidlaymizki, $\varphi_2(y_{1,}y_2)$ akslantirishning κ –bosh qismi $y_2 + a_2 y_1^m$ – munosabatdan aniqlanadi, bu yerda $a_2 \ne 0$ va $\varphi_1(y_1, y_2)$ ning κ –bosh qismini $\kappa_1 = \kappa_2$ holdan tashqari (va shuning uchun $m = 1$) y_1 beradi, bu holda u $y_1 + a_1 y_2, \;\; a_1 \ne 0$ ifoda bilan beriladi. Shuning uchun $\tilde{f}$ funksiyaning $\tilde{f}_{\hat{e}}$ κ – bosh qismi

$$f_\kappa(y_1, y_2) = f_\kappa(y_1 + a_1 y_2, y_2 + a_2 y_1^m)$$

munosabatdan aniqlanadi, bu yerda $a_2 \ne 0$ va $a_1 \ne 0$ faqat va faqat $m = \kappa_1 = 1$ bo'lmaganda o'rinli. 1.8.Lemma $\tilde{f}_{\hat{e}}$ funksiyaning Nyuton diagrammasi bessektrisa bilan kesishishini va $N(f)$ funksiyaning bosh yog'i L_κ to'g'ri chiziqda yotishishini ko'rsatadi, demak, $d_y = d_x$. Bu esa (1.10) shartga ziddir.

Shunday qilib, f funksiyaga quyilgan shartlardan $\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} \in N$ va $m(f_p) > d(f)$ kelib chiqadi. Endi 1.6.Mulohazaga asosan, f funksiyaning bosh qismini, ya'ni $f_p = f_\kappa$ ni

$$f_\kappa(x_1,x_2)=x_1^\alpha x_2^\beta\prod_l (x_2-c_l x_1^m)^{n_l} \tag{1.21}$$

ko'rinishda yozamiz, bu yerda $c_l - f_\kappa(1,x_2)$ ko'phadning nolmas kompleks ilizlari va n_l bu ildizning karraliklari tartibi.

Ta'kidlaymizki, $N(f_\kappa)-\{t_1\geq a\}$ yarim tengsizlikka tegishli, shuning uchun $d_x=d(f_\kappa)\geq\alpha$ Xuddi shunga o'xshash $d_x\geq\beta$ ekanligini ko'ramiz. Demak, shunday l_0 mavjudki, c_{l_0} haqiqiy va $n_{l_0}=m(f_p)$

1.7.Natijaga ko'ra bunday ildiz yagona. Shuni ta'kidlash joizki, agar f funksiyaning bosh yog'i bitta nuqtadan iborat bo'lsa, bu holda $f_p(x)-cx_1^\alpha x_2^\beta$ ko'rinishga ega va shuning uchun $f_p(1,x_2)$ nolmas ildizlarga ega emas. Demak, $\pi(f)$ nuqta emas, balki kompakt qirra bo'ladi.

Demak $x_1:=y_1,\quad x_2:=y_2+a_{l_0}y_1^m$ o'zgaruvchilarni almashtirish muvofiqlashgan koordinatalar sistemalariga olib kelishini ko'ryapmiz. Haqiqatdan ham, 1.8.Lemma belgilashlariga va natijalariga murojaat qilish va $P:=f_p$ uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini olish yetarli f_p dan yangi (y_1,y_2) koordinatalar sistemasida olingan f_p yana k–birjinsli ko'phad bo'ladi. Shunday qilib, uning Nyuton diagrammasi

$$\left[(\tilde{A}_0,\tilde{B}_0),(\tilde{A}_1,\tilde{B}_1)\right]$$

kompakt oraliq bo'ladi, uning uchlari $(A_0,B_0)=(A_0,B_0)$ va (1.19) ifodalar bilan beriladi. Endi $n_{l_0}>d_x$ bo'lganligi uchun, u holda (1.20) dagi $\geq$ belgini $<$ ga almashtirishmiz mumkin, ya'ni

$$A_1<B_1$$

Bundan, $\left[(\tilde{A}_0, \tilde{B}_0), (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)\right]$ kesma $t_2 > t_1$ yuqori yarim tekislikda yotishi kelib chiqadi. Demak, $N(f_p)$ ning bosh yog'i $t_2 = B_1$ gorizontal to'g'ri chiziqda yotadi va shuning uchun

$$d_y = B_1 = m(f_p)$$

bo'ladi. 1.9 Lemmaga ko'ra (y_1, y_2) koordinatalar muvofiqlashgan, chunki bosh yoq kompakt emas.

Umuman olganda, olingan koordinatalar sistemalari f funksiyaning o'ziga muvofiqlashmagan. Muvofiqlashgan koordinatalar sistemalarini olish uchun $a_{l_0} y_1^m$ ga nisbatan yuqori darajali hadlar talab qilinishi mumkin.

Nihoyat, teskaridan faraz qilamiz, (a)-(d) shartlar bajarilsin. U holda (x_1, x_2) koordinatalar f_p ga muvofiqlashgan, ammo f_p uchun koordinatalar almashtirishini shunday almashtirish mumkinki, yangi (y_1, y_2) koordinatalar sistemasida masofa

$$d_y = m(f_p) > d_x$$

bo'ladi.

Bu bilan 1.10 teoremaning isboti tugallandi. 1.10 teorema to'liq isbot bo'ladi.

II.BOB. Faza funksiyalar uchun muvofiqlashgan koordinatlar sistemasining mavjudligi.

§2.1. Haqiqiy analitik hol

Biz bu paragrafda agar f haqiqiy funksiya bo’lsa, u holda unga muvofiqlashgan koordinatalar sistemasi mavjudligini ko’rsatamiz. Bu koordinatalar $f(x_1, x_2) = 0$ tenglama ildizlarning Pyuzio qatori atamalarida ifodalanadi.

§2.2. Nyuton ko’pyoqligini ildizlar yordamida tavsiflash.

Faraz qilaylik, f haqiqiy analitik funksiya bo’lsin, Veyershtrassning tayyorlov teoremasiga ko’ra biz koordinata boshi atrofida funksiyani ushbu ko’rinishda

$$f(x_1, x_2) = U(x_1, x_2) x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} F(x_1, x_2)$$

yozishimiz mumkin, bu yerda $F(x_1, x_2)$

$$F(x_1, x_2) = x_2^m + g_1(x_1) x_2^{m-1} + \dots + g_m(x_1)$$

ko’rinishdagi psevdopolinom va $U, g_1, \dots, g_m$ lar $U(0,0) \neq 0,\ g_j(0) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi haqiqiy analitik funksiyalardir.

Shuni ta’kidlaymizki, f funksiyaning Nyuton ko’pyoqligi $x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} P(x_1, x_2)$ Nyuton ko’pyoqligi bilan ustma–ust tushadi. Umumiylikka ziyon yetkazmaslik uchun g_m nol bo’lmagan funksiyalar deb hisoblaymiz, shunday qilib, $F(x_1, x_2) = 0$ tenglamaning x_2 ga nisbatan barcha nolmas $r(x_1)$ ildizlari o’zaro teng emas.

Ma’lumki, bu ildizlar nol yaqinida Pyuzio qatori ko’rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$r(x_1)=c_{l_1}^{\alpha_1}x_1^{\alpha_l}+c_{l_1l_2}^{\alpha_1\alpha_2}x_1^{a_{l_1l_2}^{\alpha_1}}+....+c_{l_1l_p}^{\alpha_1..\alpha_p}x_1^{a_{l_1..l_p}^{\alpha_1..\alpha_2+}}+....$$

bu yerda $\beta\neq\gamma$ uchun $c_{l_1...l_p}^{\alpha_1...\alpha_{p-1}\beta}\neq c_{l_1...l_p}^{\alpha_1...\alpha_{p-1}\gamma}$ lar qatiy $a_{l_1...l_{p-1}}^{\alpha_1...\alpha_{p-1}}>0$ musbat darajalarga va nol bo’lmagan $c_{l_1...l_p}^{\alpha_1...\alpha_p}\neq 0$ kompleks koeffisentlarga ega va F ning barcha nol bo’lmagan ildizlarni farqlash uchun biz qatorning yetarlicha hadlarini saqlab qolamiz.

$\begin{bmatrix}\alpha_1\,.\,.\,.\,\alpha_p\\ l_1\,.\,.\,.\,\,l_p\end{bmatrix}$ klaster deb, biror $b>a_{l_1....l_p}^{a_1.....a_{p-}`}$ daraja uchun

$$z(x_1)-c_{l_1}^{\alpha_1}x_1^{\alpha_{l_1}}+c_{l_1l_2}^{\alpha_1\alpha_2}x_1^{a_{l_1l_2}^{\alpha_1}}+....+c_{l_1l_p}^{\alpha_1..\alpha_p}x_1^{a_{l_1..lp}^{\alpha_1..\alpha_2+}}=0 \qquad (2.1)$$

shartni qanoatlantiruvchi ularning karraliligi hisobiga olingan barcha $r(\varphi_1)$f ildizlarni belgilaymiz. Ushbu

$$\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_{p-1} & \square\\ l_1.....l_{p-1} & l_1\end{bmatrix}:=\bigcup_{a_p}\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_p\\ l_1.....l_p\end{bmatrix}$$

munosabat bo’yicha $\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_{p-1} & \square\\ l_1.....l_{p-1} & l_1\end{bmatrix}$ klasterni kiritamiz. Har bir a_p yoki l_p indeks biror chekli to’plamda o’zgaradi va nihoyat

$$N\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_p\\ l_1.....l_p\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_p\\ l_1.....l_p\end{bmatrix}\text{ dagi ildizlar soni}$$

$$N\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_{p-1} & \square\\ l_1.....l_{p-1} & l_p\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}\alpha_1.....\alpha_{p-1} & \square\\ l_1.....l_{p-1} & l_p\end{bmatrix}\text{ dagi ildizlar soni}$$

deb olamiz.

Faraz qilaylik $a_1<..<a_l<..<a_n$ F funksiyaning barcha ildizlarining turlicha bosh darajalari bo’lsin. Har bir α_l ko’rsatkichga $\begin{bmatrix}\square\\ l\end{bmatrix}$ klaster mos keladi,

shuning uchun F ning barcha ildizlar to'plami $\bigcup_{l=1}^{n}\begin{bmatrix} \square \\ l \end{bmatrix}$ ko'rinishda yoziladi. U holda biz

$$f(x_1,x_2)=V(x_1,x_2)x_1^{v_1}x_2^{v_2}\prod_{e=1}^{n}\Phi\begin{bmatrix} \square \\ l \end{bmatrix}(x_1,x_2)$$

deb yozishimiz mumkin, bu yerda $\Phi[l](x_1,x_2):=\prod_{r\in[l]}(x_2-r(x))$.

Quyidagi kattaliklarni kiritamiz:

$$A_l=A\begin{bmatrix} \square \\ l \end{bmatrix}:=v_1+\sum_{\mu\le e}a_\mu N\begin{bmatrix} \square \\ \mu \end{bmatrix}, B_e=B\begin{bmatrix} \square \\ l \end{bmatrix}:=v_2+\sum_{\mu\ge e+1}N[\mu] \qquad (2.2)$$

Ta'kidlaymizki, bosh darajadagi ildizlar soni B_e a_e dan katta (bu yerda trivial ildizlar $(x_2-0)^{v_2}$ bizning tasavvurda $f(x_1,x_1)+\infty$ ko'rsatkichga mos keladi).

Agar N_α orqali $x_1=0$ o'qdan tashqaridagi f funksiyaning karraligi hisobga olingan barcha ildizlar to'plami belgilansa, u holda

$$B_l=N_\alpha-\sum_{\mu\le l}N[\mu] \qquad (2.3)$$

ni yozishimiz mumkin. [4] da keltirilgan Nyuton diagrammasiga o'xshash f funksiyaning $N_\alpha(f)$ Nyuton diagrammasi uchlari bo'lib $(A_l,B_l),\quad l=0,...n,$ nuqtalar hisoblanadi va $N(f)$ Nyuton ko'pyoqligi $\bigcup_l((A_l,B_l)+R_+^2)$ ko'pyoqlikning qavariq qobig'i bo'ladi.

Shuningdek

$$A_l+a_lB_l=A_{l-1}+a_lB_{l-1}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik,

$$L_l:=\left\{(t_1,t_2)\in N^2:\kappa_1^l t_1+\kappa_1^l t_2=1\right\}$$

ushbu (A_{l-1}, B_{l-1}) va (A_l, B_l) nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'lsin. U holda u

$$\begin{aligned}\kappa_1^l &= \frac{\Delta B_l}{A_l \Delta B_l - B_l \Delta A_l} = \frac{1}{A_l + a_l B_l} \\ \kappa_2^l &= \frac{\Delta A_l}{A_l \Delta B_l - B_l \Delta A_l} = \frac{a_l}{A_l + a_l B_l}\end{aligned} \tag{2.4}$$

tenglama bilan berilishini oson ko'rish mumkin, bu yerda $\Delta A_l := A_l - A_{l-1}, \quad \Delta B_l := B_l - B_{l-1}$. Bundan esa

$$\frac{\kappa_2^l}{\kappa_1^l} = a_l \tag{2.5}$$

kelib chiqadi va u yL_e to'g'ri chiziq burchak koeffisiyentga teskari bo'ladi. L_l to'g'ri chiziq bissektrisa bilan (d_l, d_l) nuqtada kesishadi, bu yerda

$$d_l := \frac{A_l + a_l B_l}{1 + a_l}$$

bundan tashqari Nyuton ko'pyoqlikning vertikal yog'i $(A_0, B_0) = (v_1, v_2 + m)$ nuqtadan o'tib, bissektrisa bilan (v_1, v_1) nuqtada kesishadi va $(A_n, B_n) = (A_n, v_2)$ nuqtadan o'tuvchi garizontal qirra bissektrisa bilan (v_2, v_2) nuqtada kesishadi. $d(f)$ masofa esa

$$d(f) = \max\left\{v_1, v_2, \max_{l=1,...,n} d_l\right\}$$

munosabatdan aniqlanadi.

Nihoyat, l ni tayinlaymiz va κ^l – bo'yicha L_l to'g'ri chiziqqa mos keluvchi f funksiyaning f_{κ^l} bosh qismini aniqlaymiz. f funksiyaning κ^l – bosh qismi

$$U(0,0) x_1^{v_1} x_2^{v_2} \prod_{\alpha\mu} (x_2 - c_\mu^\alpha x_1^{a_\mu})^{N[\alpha\mu]}$$

funksiyaning κ^l – bosh qismi bilan ustma–ust tushadi. Shuningdek, $x_2 - c_\mu^\alpha x_1^{a_\mu}$ ning κ^l - bosh qismi $c_\mu^\alpha x_1^{a_\mu}$ ga teng bo'ladi, agar $\mu < l$ bo'lsa, hamda agar $\mu > l$ bo'lsa, x_2 ga teng.

Bundan

$$f_{\kappa^l}(x_1, x_2) = c_l x_1^{A_{l-1}} x_2^{B_l} \prod_l (x_2 - c_l^\alpha x_1^{a_l}) N_\alpha \tag{2.6}$$

kelib chiqadi. Bu ayniyatlarni hisobga olib, biz $[(A_{l-1}, B_{l-1}), (A_l, B_l)]$ ildizlar klasteriga mos qirra bo'ladi deb ayta olishimiz mumkin. Biz quyidagi lemmaga kelamiz.

2.1. Lemma: f ning $N(f)$ Nyuton ko'pyoqligi uchlari bo'lib, bu (4.2) dan aniqlangan A_j, B_j larga ega (A_l, B_l), $l = 0, ..., n$ nuqtalar bo'ladi va uning qirralari esa $[(A_{l-1}, B_{l-1}), (A_l, B_l)]$, $l = 1, .., n$ kesmalar hisoblanadi. Shuningdek, Nyuton ko'pyoqligi va koordinatalar boshi orasidagi masofa

$$d(f) = \max\left\{A_0, B_n, \max_{l=1,..n} \frac{A_l + a_l B_l}{1 + a_l}\right\} \tag{2.7}$$

munosabatdan aniqlanadi va $[(A_{l-1}, B_{l-1}), (A_l, B_l)]$ qirradan o'tuvchi L_l tayanch to'g'ri chiziqqa mos keluvchi f funksiyaning κ^l –bosh qismi (2.6) tenglikdan aniqlanadi.

§2.3. Analitik funksiyalar uchun muvofiqlashgan koordinatalar sistemalarining mavjudligi.

2.2. Teorema: Bizga $f(0,0)=0, \quad \nabla f(0,0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $\mathbb{R}^2$ koordinata boshida aniqlangan nol bo'lmagan haqiqiy f analitik funksiya berilgan bo'lsin. $\kappa_1,\kappa_2>0$ larni shunday tanlaymizki, f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligining $\pi(f)$ bosh yog'i $\kappa_1 t_1+\kappa_2 t_2=1$ to'g'ri chiziqda yotadi. Umumiylikka ziyon yetkazmasdan, $\kappa_2\geq\kappa_1$ deb faraz qilishimiz mumkin. U holda x_1 ga bog'liq koordinata boshi yaqinida haqiqiy analitik va $\psi(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $\psi(x_1)$ funksiya mavjudki,

$$y_1:=x_1, \quad y_2:=x_2-\psi(x_1)$$

munosabat bilan aniqlangan (y_1,y_2) koordinatalar sestemasi nol nuqta atrofida f funksiyaga muvofiqlashgan bo'ladi.

Haqiqatda ψ funksiya x_2 o'zgaruvchiga nisbatan $f(x_1,x_2)=0$ tenglama ildizlaridan biri bilan yoki ildizlarining Pyuzio qatori bosh haqiqiy qismi bilan ustma–ust tushadi 2.2. teorema A.N.Varchenko tomonidan $\{f(x_1,x_2)=0\}$ analitik to'plam karrali kompanentlarga ega bo'lmagan holda isbotlangan. Bundan tashqari, uning isboti maxsusliklarni yechish haqidagi. X.Xironaki teoremasiga asoslanadi. Biz teoremaning funksiya ildizlari Pyuzio qatori yoyilmasiga asoslangan elementar isbotini beramiz, u muvofiqlashgan koordinatalar sistemalari uchun ildizlari orqali oshkora ifodasini beradi.

Isbot: Agar koordinatalar sistemasi muvofiqlashgan bo'lsa, u holda almashtirishda $\psi=0$ deb olamiz.

1.10. Teoremaga ko'ra biz quyidagi uch holni qarashimiz mumkin.

(a) bosh yoq chegaralanmagan bo'lsin 2.1. Lemmaga asosan biz $\kappa_2\geq\kappa_1$ deb faraz qilgan edik, biz $A_n<B_n$ ekanligini, ya'ni

$$v_1 + \sum_{l=1}^{n} a_l N_l < v_2 \tag{2.8}$$

o'rinli ekanini bildiradi.

(v) $\pi(f)$ bitta nuqtadan iborat bo'lsin. U holda $0 \le \lambda \le n$ ni shunday tanlaymizki $\pi(f) = \{(A_\lambda, A_\lambda)\}$ bo'ladi. Bu faqat va faqat

$$v_1 + \sum_{l \le \lambda} a_l N_l = v_2 + \sum_{l \ge \lambda+1} a_l N_l \tag{2.9}$$

bo'lganda o'rinli.

(s) $\pi(f)$ kompakt $[(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), (A_\lambda, B_\lambda)]$ qirra, lekin

$$a_\lambda = \frac{\kappa_2^\lambda}{\kappa_1^\lambda} \notin N \tag{2.10}$$

yoki $c_\lambda^\alpha \in R$ bo'lganda

$$a_\lambda \in N \qquad N[\alpha\lambda] \le d(f) \tag{2.11}$$

o'rinli bo'ladi.

Bizga $\pi(f)$ bosh yoqning

$$\pi(f) = [(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), (A_\lambda, B_\lambda)](1 \le \lambda \le n), \quad a_\lambda \in N$$

kompakt qirra va β indeks

$$m(f_p) = N_\lambda > d(f) = \frac{A_\lambda + a_\lambda B_\lambda}{\lambda + a_\lambda} \quad \text{va} \quad c_\lambda^\beta \in \square \tag{2.12}$$

shartni qanoatlantiradigan holni qarash yetarli.

1.7.Natijaga ko'ra β indeks yagona va $c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda}$ f_p ning bosh ildizi bo'ladi. U holda biz A.N.Varchenko algoritmini qo'llashimiz mumkin.

1–qadam: $y_1 ;= x_1, \quad y_2 ;= x_2 - c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda}$ munosabat bo'yicha aniqlangan $x = \varphi(y)$ o'zgaruvchilarni almashtirishni qo'llaymiz va yana $\tilde{f} := f \circ \varphi$ deb olamiz. Nyuton ko'pyoqligiga o'zgaruvchilarni almashtirish tasirini tasvirlash uchun $\tilde{f}$ ga mos keluvchi barcha kattaliklarni orqali belgilaymiz. $\tilde{f}$ funksiyaning $\tilde{r}$ ildizlari.

$$\tilde{r}(y_1)=c_l^{\alpha_1}y_1^{a_l}-c_\lambda^{\beta}y_1^{a_\lambda}+c_{ll_2}^{\alpha_1,\alpha_2}y_1^{a_{ll_2}^{\alpha_1}}+.... \tag{2.13}$$

ko'rinishga ega, mos ravishda $\tilde{r}(y_1)=-c_\lambda^{\beta}y_1^{a_\lambda}$ (nol ildizlarga mos keluvchi f funksiyaning ildizlari). Bu esa

$$a_1<a_2<.....<a_l<....$$

bosh ko'rsatkichlar, bu ildizlar $l<\lambda$ da o'sha karralilikka $N\tilde{l}=N_l$ va $\tilde{a}_l=a_l$ dan aniqlanadi. (bu yerda $\tilde{l}$ indeksga mos keluvchi $\tilde{r}$ ildizlar klasterini bildiradi).

(2.3), (2.4) Nyuton ko'pyoqligining $\tilde{A}_l,\tilde{B}_l$ uchlari uchun $l<\lambda$ da

$$\left[A_l,B_l\right]=(A_l,B_l) \tag{2.14}$$

o'rinli. Shuningdek, $l>\lambda$ li $[.,e]$ klasterga tegishli ixtiyoriy r ildiz a_λ bosh ko'rsatkichli $\tilde{r}$ ildizga almashinadi. Nihoyat, agar $r-\left[.,\lambda\right]$ ga tegishli bo'lsa, u holda $\tilde{r}$ bosh ko'rsatkich a_λ bo'ladi (agar $a_1\neq\beta$ bo'lsa) yoki u $a_{ll_2}^{\beta}>a_\lambda$ ko'rinishga ega. Biz ikkita holni alohida qaraymiz.

1–hol. a_λ bosh ko'rsatkichli $v_2+B_\lambda+(N[.,\lambda]-N_\lambda)>0$ bo'lsin. Shunday hech bo'lmaganda bitta $\tilde{r}$ ildiz mavjudki, u uchun $a_\lambda=a_\lambda$ o'rinli bo'ladi. Shuningdek, bosh ko'rsatkich a_λ dan katta yoki teng bo'lgan $\tilde{r}$ ildizlar soni B_λ bo'lgani uchun, $B_\lambda=N[\beta_\lambda]$ ekanligini ko'ramiz. Shunga o'xshash $N[.,\lambda]$ son bosh ko'rsatkichi a_λ katta yoki a_λ ga teng, lekin $a_1\neq\beta$ indeksli r ildizlar sonidir, demak, $N[.\lambda]=B_{\lambda-1}-N[\beta\lambda]$ bo'ladi. Bundan

$$A_\lambda=A_{\lambda-1}+a_\lambda N[.\lambda]=A_{\lambda-1}+a_\lambda(B_{\lambda-1}-N[\beta\lambda])=A_\lambda+a_\lambda B_\lambda-a_\lambda N[\beta\lambda]$$

kelib chiqadi. Bularni birlashtirib

$$(A_\lambda, B_\lambda) = (A_\lambda + a_\lambda B_\lambda - a_\lambda N[\beta\lambda], N[\beta\lambda]) \qquad (2.15)$$

ga ega bo'lamiz. Lekin 2.12 baho $A_\lambda < B_\lambda$ ga teng kuchli, shuning uchun $\left[(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), (A_\lambda, B_\lambda)\right]$ qirra

$$\pi(f) = \left[(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), (A_\lambda, B_\lambda)\right],$$

yoq bilan bir to'g'ri chiziqda yotadi va f Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'i bo'lmasada eng chap uchga ega. Nihoyat,

(4.13) tenglikdan, ravshanki, bu holda agar $k > 0$ bo'lsa, $a_{\lambda+k} = a^{\beta}_{\lambda k}$ bo'ladi ($l > \lambda$ bo'lgan $[.\,l]$ klasterdan tashqari).

Shuning uchun bu holda $N(f)$ bilan yoq $\tilde{r}$ ildizlar klasteriga mos keladi, ya'ni koordinatalar sistemasi boshidagi $\begin{bmatrix} \beta\,. \\ \lambda\,\lambda_2 \end{bmatrix}$ ildizlar klasteriga, yoki u gorizontal, u holda yangi koordinatalar sistemasi muvofiqlashgandir.

2-hol. $v_2 + B_\lambda + (N[.,\lambda] - N[\beta\lambda]) = 0$ bo'lsin. U holda a_λ ko'rsatkichli $\tilde{r}$ ildiz mavjud emas va yana oldingi hol ohiridagi xulosani qo'llash mumkin.

Ikkala holda $N(f)$ yangi Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'i burchak koeffisenti $n(f)$ bosh yog'i burchak koeffisiyentidan katta, shuning uchun

$$d(f) > d(f).$$

Yakunlovchi qadamlar. Endi yoki yangi u koordinatalar sistemasi muvofiqlashgan, bu holda jararyonni to'xtatamiz. Yoki biz f ga o'sha jararyonni qo'llaymiz. Birinchi qadam bilan o'zgaruvchilarni almashtirish kompozisiyasini qarab ikkinchi qadamda biz $a^{\beta}_{\lambda\lambda_2} \in N$ ga $c^{\beta\beta_2}_{\lambda\lambda_2} \in R$ ega

$$x_1 := y_1, \quad x_2 := y_2 - (c^{\beta}_{\lambda} x_1^{a_\lambda} + c^{\beta\beta_2}_{\lambda\lambda_2} y_1^{a^{\beta}_{\lambda\lambda_2}})$$

ko'rinishdagi $x=\varphi_{(2)}(y)$ o'zgaruvchilarni almashtirishni topamiz, shunday qilib, quyidagi tasdiqlar o'rinli. Agar $f_{(2)}=f\circ\varphi_0$ funksiya yangi koordinatalar sistemasida f funksiyaning ifodasi bo'lsa, u holda $f_{(2)}$ funksiyaning Nyuton ko'pyoqligining bosh yog'i yoki yangi koordinatalar sistemasidagi

$$\begin{bmatrix} \beta & \beta_2 & \\ \lambda & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

ildizlari klasteriga yoki gorzontal chegaralanmagan qirraga mos keladi (shuning uchun yangi koordinatalar sistemasi muvofiqlashgan) Endi agar biz bu jarayonni takrorlaversak u holda yo chekli sondagi qadamlardan so'ng to'xtaydi, yoki cheksiz qadam davom etadi. Agar jararyon chekli sondagi qadamlardan so'ng to'xtasa, u holda ravshanki biz

$$x_1;=y_1,\, x_2;=y_2-(c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda}+c_{\lambda\lambda_2....\lambda_p}^{\beta\beta_2.....\beta_p}y_1^{a_{\lambda\lambda_2....\lambda_{p-1}}^{\beta\beta_2.....\beta_{p-1}}})$$

ko'rinishdagi yangi muvofiqlashgan koordinatalar sistemasiga kelamiz va teoremaning tasdig'i $\psi(y\ )$ funksiya bilan o'rinli bo'ladi.

Yakunlovchi bosqich: Faraz qilaylik, prosedura to'xtamasin. U holda har bir qadamda oldingi ildizlar "Qism klaster" $\begin{bmatrix} \beta & \beta_2..... \\ \lambda & \lambda_2......\lambda_k \end{bmatrix}$ bo'lgan ildizlar klasteri $\begin{bmatrix} \beta & \beta_2..... \\ \lambda & \lambda_2......\lambda_{k+1} \end{bmatrix}$ (eski koordinatalar sistemasida) ga mos keluvchi bosh yoqqa ega yana Nyuton diagrammasiga kelamiz. Xususan, mos $N_k:=N\begin{bmatrix} \beta..... \\ \lambda....\lambda_{k+1} \end{bmatrix}$ karraliklar o'smaydigan ketma–ketlikni tashkil etadi. Shunday qilib, chekli qadamlardan so'ng u o'zgarmas bo'ladi. Har bir $n\geq k$ uchun $N,k_0\in N$ ni shunday tanlaymizki, $N_k=N$ bo'lsin. Boshlang'ich koordinatalar sistemasini k_0 – qadamda olingan yangisi bilan almashtirib, umumiylikni chegaralamasdan, biz $k_0=0$ deb faraz qilishimiz mumkin, ya'ni

$$N = N[.\lambda] = N\begin{bmatrix} \beta & \\ \lambda & \lambda_2 \end{bmatrix} = \ldots = N\begin{bmatrix} \beta & \beta_2 \ldots\ldots \\ \lambda \ldots \lambda_k & _{\ldots\ldots}\lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \ldots \qquad (2.16)$$

Bundan har bir k uchun

$$N = \begin{bmatrix} \beta & \beta_2 \ldots \\ \lambda & \lambda_2 \ldots \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} \beta & \beta_2 \ldots\ldots \beta_{k+1} \\ \lambda \ldots \lambda_k & _{\ldots\ldots}\lambda_{k+1} \end{bmatrix}$$

kelib chiqadi va har bir $\begin{bmatrix} \beta & \beta_2 \ldots\ldots \\ \lambda \ldots \lambda_k & _{\ldots\ldots}\lambda_{k+1} \end{bmatrix}$ klastar aniq bitta ildizni (N karralilikka ega) o'z ichiga oladi, ya'ni

$$p(x_1) := c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda} + \ldots + c_{\lambda\lambda_2 \ldots \lambda_{k+1}}^{\beta\beta_2 \ldots \beta_{k+1}} x_1^{a_{\lambda\lambda_2 \ldots \lambda_{k+1}}^{\beta\beta_2 \ldots \beta_k}} \qquad (2.17)$$

(shuning uchun har bir $k \geq 2$ uchun $\lambda_k = \beta_k = 1$) Shuningdek, bizning prosedura barcha koeffisentlar haqiqiy bo'lishi va daraja ko'rsatkichlari natural bo'lishi lozimligini ko'rsatadi. Shunday qilib $p(x_1)$ x_1 ga bog'liq haqiqiy analitik funksiyalardir. Agar biz

$$y_1 := x_1, \quad y_2 := x_2 - c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda}$$

koordinatalar almashtirishini bu holatda qo'llasak, u holda yangi $\tilde{r}$ ildizlarning bosh ko'satkichlari 1- holda $a_1 = a_1, \ldots a_\lambda = a_\lambda$ va $\tilde{a}_{\lambda+1} = a_{\lambda\lambda_2}^\beta$ dan, 2- holda $a_1 = a_1, \ldots a_{\lambda-1} = a_{\lambda-1}$ va $a_\lambda = a_{\lambda\lambda_2}^\beta$ dan aniqlanadi. Shuningdek, ravshanki $a_{\lambda\lambda_2}^\beta$ bosh ko'rsatkichlarga ega ildizlar klasteriga mos keluvchi ohirgi yoq bosh yoqlar bo'lishi lozim. Yangi *u* koordinatalar sistemasida f funksiya nol ildizga ega emas, chunki bunday ildiz $c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda}$ klasterga mos kelgan bo'lar edi, u esa (2.17) ga ko'ra $[.\ \lambda]$ klasterda mavjud emas. Yangi koordinatalar sistemasiga o'tib, biz (2.16) dagi $[.\lambda]$ klaster f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligini bosh yog'iga mos keluvchi klaster bo'lishini va $v_2 = 0$ ya'ni

$$f_p(x_1, x_2) = c x_1^{v_1} (x_2 - c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda})^N \qquad (2.18)$$

o'rinli ekanligini faraz qilishimiz mumkin. f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligi $(A_0, B_0), ...(A_\lambda, B_\lambda)$ uchlarga ega va bosh yoq $\left[(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1})(A_\lambda, B_\lambda)\right]$ hisoblanadi, bu yerda (2.2), (2.15) ko'ra

$$A_{\lambda-1} < B_{\lambda-1} = N \quad B_\lambda \tag{2.19}$$

bo'ladi.

Nihoyat, koordinatalar sistemasida

$$y_1 := x_1, \quad y_2 := x_2 - \rho(x_1)$$

almashtirishni bajaramiz. f funksiyaning nol bo'lmagan $\tilde{r}$ ildizlari biror $l < \lambda$ da $\tilde{r} = r - p, r \in [. \ \ l]$ dan aniqlanadi va ular r kabi karralikka ega. (2.2) ga ko'ra $N(f)$ Nyuton diagrammasi uchlari

$$(A_0, B_0), ...(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1})$$

nuqtalardan iborat, ya'ni Nyuton diagrammasiga o'zgaruvchilarni almashtirish ta'sirida ohirgi $(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1})$ uchni yo'qotamiz. (2.18) ga ko'ra $(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1})$ uch bissekirisaning yuqori qismida yotadi, $N(f)$ bosh yog'i $t_2 = N$ to'g'ri chiziqda yotuvchi $(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1})$ nuqtadan chiquvchi nurdan iboratligini ko'ramiz. 1.10 teoremaga ko'ra *u* koordinatalar f funksiyaga muvofiqlashgan va $h(f)$ balandilk

$$h(f) = N \tag{2.20}$$

ga teng. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Agar ushbu

$$r(x_1) = c_{e_1}^{a_1} x_1^{a_e} + ... + c_{e_1...e_p}^{a_1....a_p} x_1^{a_{e_1....e_1}^{a_1...a_p}} + ...$$

f funksiyaning ildizi bo'lsa, (aniqrog'i F funksiyaning) u holda $1 \le k \le \infty$ da bosh qism

$$\sum_{p=1}^{k} c_{e_1}^{a_1} x_1^{a_e} + c_{e_1 e_2}^{a_1 a_2} x_1^{a_{e_1 e_2}^{a_1 a_2}} + \ldots\ldots c_{e_1 \ldots e_p}^{a_1 \ldots a_p} x_1^{a_{e_1 \ldots e_1}^{a_1 \ldots a_{p-1}}}$$

dan iborat, u haqiqiy analitik funksiya, boshqacha aytganda qatorning barcha ko'rsatkichlari natural sonlar va u analitik ildiz deb ataladi.

A.N.Varchenko algoritmi bo'yicha tuzilgan ψ funksiya yagona (agar ixtiyoriy chekli algoritm muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini bermasa) va analitik ildiz bo'ladi. Biz uni bosh ildiz deb ataymiz.

Shunday qilib, 1.10.teoremaning (a)-(d) shartlari ixtiyoriy analitik f funksiyalar uchun koordinatalar sistemalarining muvofiqlashishi uchun zarur va yetarli bo'ladi. Quyidagi natijalar tasdiqlarida biz hammavaqt farazlarning bajarilganligini e'tiborga olamiz.

Umumiy faraz.

Bizga $f(0,0)=0,\quad \nabla f(0,0)=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi R^2 koordinatalar boshining biror atrofida aniqlangan haqiqiy $f(x_1,x_2)$ analitik funksiya berilgan bo'lsin $k_1,k_2>0$ larni shunday tanlaymizki, f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligining $\pi(f)$ bosh yog'i $k_1t_1+k_2t_2=1$ to'g'ri chiziqda yotadi va faraz qilamizki, $k_2 \geq k_1$.

2.3. Natija: (x_1,x_2) koordinatalar f funksiyaga muvofiqlashgan bo'ladi, faqat va faqat shundaki, qachonki 1.10 teoremaning (a)-(d) shartlari bajarilgan bo'lsa. Xususan berilgan koordinatalar sistemasi f funksiyaga muvofiqlashmagan bo'ladi faqat va faqat u f funksiyaning f_p bosh qismiga muvofiqlashmagan bo'lsa.

Shuningdek biz $h(f) \leq h(f_p)$ ga ega bo'lamiz.

Isbot: Bu shartlarning zarurligi teoremada isbotlangan edi. Faraz qilaylik, (a)-(d) shartlar o'rinli bo'lsin. Bu holda 2.2.–teorema isbotida ko'rgan edikki, o'suvchi masofali o'zgaruvchilarni almashtirish (cheksiz qadam) mavjud.

Shuning uchun berilgan koordinatalar sistemasi muvofiqlashmagan bo'ladi (a)-(d) shartlar haqiqatda faqatgina f_p ga bog'liq bo'lgani uchun, xususan, berilgan koordinatalar sestemasi f funksiyaga muvofiqlashmagan bo'ladi faqat va faqat u f funksiyaning f_p bosh qismiga muvofiqlashmagan bo'lsa.

Nihoyat (x_1, x_2) koordinatalar sistemasi f ga muvofiqlashgan bo'lsa, (demak, f_p ga ham) u holda biz quyidagi tengsizlikga

$$h(f) \leq h(f_p)$$

ega bo'lamiz. Aks holda 2.2.teorema isboti dastlab biz qaragan

$$y_1 := x_1, y_2 := x_2 - c_\lambda^\beta x_1^{a_\lambda}$$

o'zgaruvchilarni almashtirish

$$\pi(f) = \left[(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), (A_\lambda, B_\lambda)\right]$$

bosh yoqqa ya'ni kichik uzunlikdagi (mumkin nuqtaga) o'sha to'g'ri qiziqda yotuvchi $\left[(A_{\lambda-1}, B_{\lambda-1}), (A_\lambda, B_\lambda)\right]$ oraliqqa olib keladi. Hosil bo'lgan yangi (y_1, y_2) koordinatalar sistemasi f_p bosh qismga muvofiqlashgan va (2.14), (2.12) ga va 1.10. teoremaga ko'ra quyidagiga

$$B_\lambda = N(\beta\lambda) = m(f_p) = h(f_p)$$

ega bo'lamiz.

Ikkinchi tomondan (A_λ, B_λ) nuqta keyingi koordinatalar sistemasiga mos keluvchi f Nyuton diagrammasiga tegishli bo'ladi, demak, u koordinatalarga qullanilgan bizning algaritm bo'yicha muvofiqlashgan koordinatalar sistemasida f funksiyaning bosh yog'i ohirgi holda $t_2 \leq h(f_p)$ to'g'ri chiziqdan yuqoridagi yarim tekislikda yotadi. Shuning uchun tengsizlik o'rinli

$$h(f) \leq h(f_p).$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. 2.3 natija to'liq isbot bo'ldi.

2.4.Natija:

a) Biz nolda $y_1 := x_1, y_2 := x_2 - \psi(x_1)$ ko'rinishdagi shunday $x = \varphi(y)$ koordinatalar sistemalarini topishimiz mumkinki, (y_1, y_2) koordinatalar $f := fo\varphi$ ga muvofiqlashgan bo'ladi va quyidagi tasdiqlar o'rinli.

Agar $\pi(f)$ bosh yoq kompakt bo'lsa va $k_1t_1 + k_2t_2 = 1,\ k_1 \le k_2$ to'g'ri chiziqa yotsa, u holda ψ darajasi $k_2 \setminus k_k$ dan qatiy kichik ko'phad bo'ladi. Xususan, agar f funksiyaning $h(f)$ balandligi butun bo'lmagan rasional son bo'lsa, u holda polinomial funksiyali o'zgaruvchilarni almashtirish mavjud

v) $h(y_1)$ polinomial funksiyali koordinata boshida $y_2 := x_1, y_2 := x_2 - \eta(x_1)$ ko'rinishdagi shunday $x = \varphi(y)$ o'zgaruvchilarni almashtirish mavjudki, yangi *u* koordinatalar sistemasida

$$h(f) = h(f) = h(f_p)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bu yerda biz yana $f := f \circ \varphi$ deb olamiz.

Isbot: Haqiqiatdan, 2.2- teorema isbotida qurilgan algaritm ko'rsatadiki, yoki biz ψ polinomial funksiyali muvofiqlashgan koordinatalar sistemasiga kelamiz, faqat ψ Pyuzio qatoridagi cheksiz sondagi nol bo'lmagan hadlarga ega r ildizlardan birortasi bo'lgan holda tashqari. Oxirgi holda muvofiqlashgan koordinatalar sistemasida bosh yoq kompakt emas va balandlik butun son bo'ladi.

Shunday qilib, agar muvofiqlashgan koordinatalar sistemasida bosh yoq kompakt bo'lsa, u holda algoritm chekli qadamlardan so'ng to'xtaydi.

Teorema isboti shuni ko'rsatadiki bosh yoq yotgan to'g'ri chiziq og'ish bo'rchagi ketma–ket o'zgaruvchilarni almashtirishda qatiy kamayadi. Oxirgi qadamda muvofiqlashgan koordinatalar sistemasiga kelganimizgacha ψ funksiya $m < k_2 / k_1$ darajali ko'phad bo'ladi. Shuningdek chekli qadamlardan so'ng algoritm to'xtamagan holda,(unda almashtirish polinomiol o’zgaruvchilarni almashtirishdan iborat) biz Nyuton diagrammasining bosh yog’iga mos keluvchi f_p ko’phad $N = h(f)$ karrallikka ega yagona ildizga ega deb faraz qilishimiz mumkin ((2.16),(2.17) va (2.18) larni taqqoslang). Agar biz oxirga qadamda olinganlarni *u* koordinatalar deb tanlasak,

$$h(f_p) = m(f_p) = N - h(f) = h(f_p)$$

ga ega bo’lamiz. Shu bilan v) isbotlandi. Natija isbotlandi.

§2.4. Silliq bo'lgan hol

Nihoyat 2.2 teoremani silliq funksiyalar uchun umumlashtiramiz.

2.5. Teorema: Bizga R^2 koordinata boshida chekli tipdagi haqiqiy qiymatli f silliq funksiya berilgan bo'lib, $f(0,0)=0,$ $\nabla f(0,0)=0$ shartlarni qanoatlantirsin. $k_1,k_2 \geq 0$ larni shunday tanlaymizki, f funksiya Nyuton ko'pyoqligining $\pi(f)$ bosh yog'i $k_1t_1+k_2t_2=1$ to'g'ri chiziqda yotadi. Umumiylikga ziyon yetkazmaslik uchun, biz $k_2 \geq k_1$ deb faraz qilamiz. U holda koordinata boshi yaqinida x_1 ga bog'liq $\psi(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi shunday $\psi(x_1)$ silliq funksiya va f uchun nolda $y_1 := x_1,\quad y_2 := x_2 - \psi(x_1)$ bo'yicha aniqlangan muvofiqlashgan (y_1, y_2) koordinatalar sistemasi mavjud.

Isbot: Biz isbotni analitik funksiyalar holidagi kabi olib boramiz, bunda mos belgilashlardan foydalanamiz. Agar koordinatalar f funksiyaga muvofiqlashgan bo'lsa, u holda $\psi := 0$ deb olamiz va isbot tugaydi.

Aks holda, 1.10.teoremaga ko'ra $\pi(f)$ bosh yoq kompakt qirra bo'ladi. Shuningdek, $k_2/k_1 =: m_1 \in N$ hamda $m(f_p)=m(f_k)>d(t)$ ga ega bo'lamiz. Faraz qilaylik, biz f funksiya f_p bosh qismining $N_0 := m(f_p)$ maksimal karralikka ega $x \to b_1x_1^{m_1}$ haqiqiy ildizini, ya'ni bosh ildizini tanladik.

U holda 1.10. teoremaga ko'ra $b_1 \neq 0$.

1-qadam: Biz $y_1 := x_1,\quad y_2 := x_2 - b_1x_1^{m_l}$ bo'yicha aniqlangan $x=\varphi(y)$ o'zgaruvchilarni almashtirishni qo'llaymiz va $f = f \circ \varphi$ deb olamiz. Yana f funksiyaga mos keluvchi yangi kattaliklarni orqali belgilaymiz. Endi, agar u koordinatalar f ga muvofiqlashgan bo'lsa, u holda $\psi(x_1) := b_1x_1^{m_1}$ ga ega bo'lamiz va algoritm to'xtaydi.

Aks holda bosh yoq $\pi(f)$ kompakt qirra bo'lsa, $k_2/k_1 =: m_2 \in N$ va $N_1 := m(f_p) > d(f)$ ga ega bo'lamiz. Eslatib o'tamiz, f funksiyaning f_p bosh qismi birinchi darajali *k*–birjinsli ko'phad.

$$m_2 > m_1 \text{ va } N_1 \le N_0 \tag{2.21}$$

ekanligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan, φ o'zgaruvchilarni almashtirish bilan Nyuton ko'pyoqligidagi $k_1t_1 + k_2t_2 = c$ to'g'ri chiziqlar saqlanadi. $m \in N$ ni shunday tanlaymizki, Nyuton diagrammasining har bir (j,k) nuqtasi $j+k \le m$ shartni qanoatlantiradi. F orqali f funksiyaning m–tartibli Teylor polinomini belgilaymiz f va F funksiyalarning Nyuton diagrammalari ustma–ust tushadi.

Shunga o'xshash mulohazalarni f va $F = F \circ \varphi$ funksiyalarga ham qo'llash mumkin. Shunday qilib, $f_p = F_p$ va $f_p = F_p$ ga ega bo'lamiz. Shuning uchun biz analitik funksiyalarga taalluqli barcha natijalarni F polinomga qo'llashimiz mumkin va (2.21) ni olamiz.

Bizning mulohazalarimiz shuni ko'rsatadiki, o'zgaruvchilarni almashtirishda mos masofalar o'sadi, ya'ni $d(f) > d(f)$.

Yakunlovchi qadamlar. Endi yo yangi *u* koordinatalar sistemasi muvofiqlashgan bo'lsin, u holda biz jararyonni to'xtatamiz, yoki biz algoritmi yana f funksiyaga qo'llashimiz mumkin va hakoza Shunday qilib, $f_{(o)} := f$ va $f_{(k+1)} := f_{(k)}$ shartga ega bo'lgan $f_{(k)} = f \circ \varphi(k)$ funksiyalar ketma–ketligini olamiz, ular boshlang'ich koordinatalar sistemasidan $m_1 < m_2 < .... < m_k < m_{k+1} < ....$ natural sonli va $b_l \ne 0$ haqiqiy koeffisentli

$$y_1 := x_1, \quad y_2 := x_2 - \sum_{l=1}^{k} b_l x_1^{m_l}$$

ko’rinishdagi $x=\varphi_{(k)}(y)$ o’zgaruvchilarni almashtirish bilan olinadi. Shuningdek, agar $N_k : m((f_{(k)})_p) \quad S'$ birlik aylanadagi $f_{(k)}$ bosh qismining maksimal karrali ildizi belgilansa, u holda

$$N_0 \geq N_1 \geq ... \geq N_k \geq N_{k+1} \geq ....$$

ga ega bo’lamiz.

Yo bizning algoritm chekli sondagi qadamlardan so’ng to’xtaydi yoki u cheksiz ko’p sondagi qadamlar bilan davom etadi. Agar u k -qadamda to’xtasa, u holda ravshanki, biz

$$\psi(x_1) = \sum_{l=1}^{k} b_l x_1^{m_l}$$

polinomial funksiyaga ega $x=\varphi_{(k)}(y)$ muvofiqlashgan koordinatalar sistemalariga kelamiz.

Yakunlovchi qadam: Faraz qilaylikki bizning alagoritm to’xtamaydi. U holda $f_{(k)}$ bosh qism ildizlari N_k maksimal karraligi kamayuvchi ketma–ketlik tashkil etgani uchun biz shunday biror $k_0 N \in N$ natural songa ega bo’lamizki har bir $k \geq k_0$ uchun $N_k \geq N$ bo’ladi. Har bir $k \geq k_0$ qadamda o’zgaruvchilarni almashtirishning Teylor polinomiga ta’sirini taqqoslab (2.18) analitik holga muvofiq biz yetarlicha yuqori darajada $f_{(n)}$ bosh qism

$$(f_{(k)})(x) = C_k x_1^{v_1}(x_2 - b_{k+1}x^{mk+1}(k+1))N$$

ko’rinishga ega ekanligini ko’ramiz, bu yerda $k < N$ u

$$k_1^{(k)} := \frac{1}{v_1 + Nm_{k+1}}, \quad k_2^{(k)} := \frac{m_{k+1}}{v_1 + Nm_{k+1}}$$

munosabatdan aniqlangan $k^{(k)}$ vaznga nisbatan kvazibirjinsli ko’phad bo’ladi, shuning uchun $k \geq k_0$ uchun

$$(f_{(k)})(x) = C_k x_1^{\nu_1}(x_2 - b_{k+1}x^{mk+1}(k+1))N + k^{(k)} \text{ dan yuqori darajalar} \tag{2.22}$$

Endi Borelning klassik lemmasiga asosan biz nol yaqinida shunday $\rho(x_1)$ funksiyani topamizki, uning Teylor qatori $\sum_{l=1}^{\infty} b_l x_1^{m_l}$ formal qatordan iborat. $y_1 := x_1,\quad y_2 := x_2 - \rho(x_1)$ bo'yicha berilgan $x := \varphi(y)$ o'zgaruvchilar almashtirishni qaraymiz va $f = f \circ \varphi$ deb olamiz. Uning koordinatalari f ga muvofiqlashganligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan

$$f(y) = f_{(\hat{e})} \circ (\varphi_{(\hat{e})}^{-1} \circ \varphi)(y) = f_{(\hat{e})}(y_1, y_2 + (\rho(y_1) - \sum_{l=1}^{k} b_l y_1^{m_l}))$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda $\rho(y_1) - \sum_{l=1}^{k} b_l y_1^{m_l}$ Teylor qatoriga ega. (2.22) ga ko'ra bu

$$f(y) = C_k y_1^{\nu_1} y_2^N + R(y) \tag{2.23}$$

ekanligini ko'rsatadi, bu yerda *R*–har bir $k \ge k_o$ uchun birdan qatiy katta $k^{(k)}$ darajali hadlardan iborat silliq funksiya hadi, ya'ni $(j_1, j_2) \in M(R)$ uchun

$$\frac{1}{\nu_1 + N\, m_{k+1}} j_1 + \frac{m_{k+1}}{\nu_1 + N\, m_{k+1}} j_2 > 1 \tag{2.24}$$

bo'ladi. $k \to \infty$ da $m_k \to \infty$ bo'lgani uchun, u holda $j_2 = N$ bo'lsa, u holda (2.24) ning chap qismi 1 bilan chegaralangan, $j_1 \le \nu_1$ bo'lganda, shuning uchun $j_1 > \nu_1$ ga ega bo'lishimiz lozim. (2.21) va (2.24) larni birlashtirib ko'ramizki, f –funksiyaning $N(f)$ Nyuton ko'pyoqligi (ν_1, N) nuqtani o'z ichiga oladi, Lekin $t_2 = N$ to'g'ri chiziqda bu nuqtadan chapda hech qanday nuqtalarga ega emas. Bundan tashqari, $N(f)$ ning barcha nuqtalari bu to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yuqori yarim tekislikda yotadi. $j_1 > v_1$ bo'lgani uchun bu $N(f)$ bosh yog'i chegaralanmagan $t_1 = v,\ \ t_2 = N$ gorizontal nur bo'lishini ko'rsatadi. Demak, koordinatalar sistemasi f funksiyaga muvofiqlashmagan.

2.5. Teorema isbotlandi. Quyidagi tasdiq 2.5. teoremadan oson kelib chiqadi va silliq funksiyalarga taaluqli 2.3. va 2.4. natijalar isbotlariga o'xshash isbotlanadi.

2.6. Natija: $f - f(0,0) = 0,\quad \nabla f(0,0) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\mathbb{R}^2$ koordinata boshida chekli tipdagi haqiqiy qiymatli silliq funksiya bo'lsin. U holda $h(f)$ balandlik rasional bo'ladi. Shuningdek, agar $k_1, k_2 \geq 0$ larni shunday tanlaymizki, f funksiyaning Nyuton ko'pyoqligining $\pi(f)$ bosh yog'i $k_1 t_1 + k_2 t_2 = 1$ to'g'ri chiziqda yotadi va umumiylikni chegaralamasdan $k_2 \geq k_1$ deb faraz qilishimiz mumkin. U holda 2.3 va 2.4. natijalar tasdiqlari silliq funksiyalar uchun o'rinli.

XULOSA

Shunday qilib, dissertatsiyaning asosiy natijalaridan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) Har qanday chekli tartibli silliq funksiya uchun balandlik chekli bo'ladi;
2) Har qanday silliq funksiyaning balandligi ratsional son bo'ladi;
3) Agar cheksiz silliq funksiya balandligi ratsional son bo'lsa, muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini topish uchun chekli algoritm mavjud bo'ladi;
4) Fazasi cheksiz silliq funksiya bo'lgan tebranuvchan integrallarning tebranish ko'rsatkichi faza funksiyasi balandligiga teskari son bo'ladi;
5) Balandlik tushunchasi bilan birgalikda balandlikning karraligi tushunchasi kiritilishi mumkin;
6) Balandlikning karraliligi nol yoki bir bo'lishi mumkin;
7) Agar balandlikning karraliligi birga teng bo'lsa, muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini topish uchun chekli algoritm mavjud;
8) Agar balandlik butun son bo'lsa va uning karraliligi nolga teng bo'lsa muvofiqlashgan koordinatalar sistemasini topishning chekli algoritmi mavjud bo'lmasligi mumkin.

ADABIYOTLAR RO'YXATI:

1. Арнольд В.И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера. УМН, 28(5)(1973) 17-44.
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений, ч. 1. Классификация критических точек каустику и волновых фронтов. М.: Наука, 1982.
3. Архипов Г.И., Карацуба А.А., Чубариков В.Н. Тригонометрические интегралы // Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1979. Т 43. 5. С. 971-1003.
4. Варченко А.Н. Многогранник Ньютона и оценки осциллирующих интегралов.// Функц. анал. и его прил. 1976, т. 10, вып. 5, стр. 13-38.
5. Карпушкин В.Н. Теорема о равномерной оценке осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных. Труды сем. Им. И.Г. Петровского // 1984 Т.10. С. 150-169.
6. Сидоров Ю.В., М.В.Федорюк., М.И.Шабунин. «Лекция по теории функции комплексного переменного» Изд. М.: Наука 1982
7. Федорюк М.В. Метод перевала. М.:Наука, 1977
8. Хасанов Г.А. О существовании приспособленной системы координат. ДАН. Респ. Уз. № 4, 1999, стр. 10-12.
9. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. т.1. М.: Мир, 1986.
10. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Из.Наука, Москва. 1969.

11. Duistermat J. Oscillatjry integrals? Lagrange immersions and unfolding of singularities // Comm. Pure and Appl. Math. 1974. V. 27. No. 2. P. 109-326.
12. Hironaka H. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I. II // Ann. of Math. 1964. V. 79. No. 2. P. 207-281.
13. Ikromov I.A. Damped Oscillatpry Integrals and Boundedness Problem for maximal operators // Preprint ICTP Trieste(Italy). 2003. IC./2003/43.P.24.
14. Malgrange B. Ideals of differentiale functions. Oxford Univ. press/ 1966.
15. Van der Corput. Zahlentheoretische Abschatzungen // Math. Ann. 1921. V. 84. P. 53-79.
16. Sogge C.D. and Stein E.M.: Averages of functions over hypersurface in *Rn*. Invent.Math. 82.(1985) 543-556) 1.
17. Stein E.M.: Maximal functions: spherical means. Proc. Natl.Acad. Sci. USA 73(1976) 2174-2175. 2.