

ÓZBEKISTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

ÁJINIYAZ ATÍNDAGÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK
PEDAGOGIKALÍQ INSTITUTÍ

MATEMATIKA OQÍTÍW METODIKASÍ KAFEDRASÍ

Defektalogiya tálim baǵdarınıń 1-kursı ushın

M A T E M A T I K A

páninen

LEKTSIYALAR TEKSTI

1-LEKTSIYA

Tema: Matematika pániniń predmeti. Matematikanıń rawajlanıwınıń tiykargı basqışları. Algebra pániniń payda bolıwı hám rawajlanıwı. Kóplikler hám olardıń elementleri, kóplikler ústinde ámeller hám olardıń qásiyetleri. Sanlı kóplikler, haqıyqiy sanlar kóplikgi, haqıyqiy sannıń moduli, qásiyetleri hám geometriyalıq ańlatılıwı. Eyler-Venn diagrammaları.

Reje:

1. Ko`plik tu`sinigi.
2. Ko`plikler u`stinde a`meller ha`m olardıń qa`siyetleri
3. Sanlı ko`plikler
4. Haqıyqiy sanlar ko`pligi.
5. Haqıyqiy sannıń moduli, qa`siyetleri ha`m geometriyalıq ma`nisi

Ko`plik tu`sinigi matematikanıń tiykargı tu`siniklerinen biri bolıp esaplanadı. Birdey qa`siyetke iye bolg`an bazi bir ob`ektlerdin` jıynag`ı *ko`plik* dep ataladı.

Matematikada ha`r tu`rdegi ko`plikler ushırasadı. Misal ushin tegisliktegi barlıq noqatlar ko`pligi, barlıq ratsional` sanlar ko`pligi, barlıq jup sanlar ko`pligi ha`m t.b

Ko`plikti payda etip turg`an ob`ektler ko`pliktin` *elementleri* dep ataladı. !dette ko`pliklerdi latin alfavitinin` bas ha`rpleri A, V, S, ... menen, al ko`pliktin` elementlerin kishi *a, b, c, . . .* ha`rpleri menen belgilew qabil etilgen.

Eger M bazi bir ko`plik, al  $x$  onin` elementi bolsa, onda $x \in M$ ko`rinisinde jaziladı, eger  $x \notin M$  ko`pliginin` elementi bolmasa, onda  $x \notin M$  ko`rinisinde jaziladı. Hesh bir elementke iye bolmag`an ko`plik bos ko`plik dep ataladı ha`m ol $\emptyset$ ko`rinisinde jaziladı.

Eger A ko`pliginin` ha`r bir elementi  $V$  ko`pliginin` de elementi bolsa, onda  $A$  ko`pligi V ko`pliginin` *u`les ko`pligi* delinedi ha`m  $A \subset B$  ko`riniste belgilenedi. A ha`m  $\emptyset$  ko`plikler A ko`pliginin` *o`zlik emes u`les ko`plikleri* delinip,  $A$  ko`pliginin` basqa u`les ko`plikleri onin` *o`zlik u`les ko`plikleri* dep ataladı.

Misallar.1. $A=\{2,3,4,5\}$ ha`m  $B=\{-1,0,2,3,4,5,6,7\}$  bolsa, onda  $A$  ko`pligi V ko`pliginin` *o`zlik u`les ko`pligi* boladı.

2. $A=\{1,3,6,9\}$ ha`m  $B=\{3,4,5,6,7,8,9,10\}$  ko`pliklerdin` hesh biri ekinshisinin` *u`les ko`pligi* emes.

Eger $A \subset B$ ha`m  $V \subset A$  qatnaslar orinli bolsa, onda  $A$  ha`m V ko`plikleri *o`z-ara ten` delinedi* ha`m $A=V$ ko`riniste belgilenedi. A

ha'm V ko'pliklarining o'z-ara ten' emesligi $A \neq B$ ko'rinishida belgilaymiz.

A ha'm V ko'pliklaridan hesh bolmag'anda birewine tiyisli bolgan barliq elementlardan ibarat ko'plik A ha'm V ko'pliklaridan birlespesi dep ataladi ha'm $A \cup B$ ko'rinishida belgilenedi.

Misali. $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ ha'm $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ bolsin. Onda $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ boladi.

A ha'm V ko'pliklaridan ekewinede tiyisli barliq elementlardan ibarat ko'plikke bul ko'pliklaridan kesilispesi delinedi ha'm bul ko'plik $A \cap B$ ko'rinishida belgilenedi.

Misallar.1. $A = \{6, 8, 10, 12, 14\}$ ha'm $B = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ bolsa, onda $A \cap B = \{12, 14\}$.

2. A ko'pligi 3 ke eseli sanlardan, V ko'pligi bolsa 4 ke eseli sanlardan ibarat bolsa, onda $A \cap B$ ko'pligi 3 ha'm 4 sanlarina uliwma eseli sanlardan ibarat boladi.

Eger $A \cap B = \emptyset$ bolsa, onda A ha'm V ko'pliklari o'z-ara kesilispetyug'in ko'pliklar dep ataladi. Misal ushin, barliq ratsional sanlar ko'pligi menen barliq irratsional sanlar ko'pligi o'z-ara kesilispetyug'in ko'pliklar boladi.

A ko'pligining V ko'pligine tiyisli bolmag'an barliq elementlaridan ibarat ko'plik A ha'm V ko'pliklaridan ayirmasi dep ataladi ha'm $A \setminus V$ ko'rinishida belgilenedi.

Misallar. 1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ha'm $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ bolsa, onda $A \setminus B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$A \setminus V$ ha'm $V \setminus A$ ko'pliklaridan birlespesine A ha'm V ko'pliklarining simmetriyalik ayirmasi delinedi ha'm bul ayirma $A \Delta B$ ko'rinishida belgilenedi:

$$A \Delta B = (A \setminus V) \cup (V \setminus A).$$

Misallar.1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ha'm $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ bolsa, onda

$$A \Delta B = \{1, 2, 3, 4, 10, 11, 12\}.$$

Birinshi elementi A ko'pligine ha'm ekinshi elementi V ko'pligine tiyisli bolgan barliq (a, b) juftliklar ko'pligi A ha'm V ko'pliklarining dekart (tuwri) ko'beymesi dep ataladi ha'm bul ko'beyme $A \times V$ ko'rinishida belgilenedi.

$X \setminus E$ ayirma (bul jerde $E \subset X$) E ko'pliginin X ko'pligine salistirg'anda toliqtirishisi dep ataladi ha'm SE ko'riniste belgilenedi.

Misal. $X = [-1, 2]$ ha'm $E = (0, 1)$ bolsa, onda $SE = [-1, 0] \cup [1, 2]$.
Ko'plikler u'stinde a'mellerdin' qa'siyetleri

1. Qa'legen M ko'pligi ushin $M \subset M$ qatnasi orinli.
2. Qa'legen M ko'pligi ushin $\emptyset \subset M$ qatnasi orinli.
3. Eger u'sh ko'plik ushin $M \subset N$, $N \subset S$, bolsa, onda $M \subset S$ orinli boladi.
4. Qa'legen u'sh ko'plik ushin $(M \cup N) \cup S = M \cup (N \cup S)$ assotsiativlik qa'siyeti orinli. Bul qa'siyet ko'pliklerdin' kesilispesi ushinda orinli.
5. Ko'pliklerdin' birlespesi ha'm kesilispesinin' kommutativlik qa'siyeti:

$$M \cup N = N \cup M, \quad M \cap N = N \cap M.$$

6. Ko'pliklerdin' birlespesi ha'm kesilispesinin' distributivlik qa'siyeti:

$$M \cap (N \cup S) = (M \cap N) \cup (M \cap S), \quad M \cup (N \cap S) = (M \cup N) \cap (M \cup S)$$

San matematikanin' tiykarg'i tu'siniklerinin' biri. Ol da'slepki tu'sinik bolip, uzaq tariyxiy rawajlaniv jolin basip o'tti. Zatlardin' sanaw za'ru'rliginen natural sanlar toplami payda boldi: $N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$.

Natural sanlar toplanima olarg'a qarama-qarsi sanlardi ha'm nol' sanin qosqannan keyin pu'kin sanlar ko'pligi alindi:

$$Z = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Matematikanin' odan a'ri rawajlaniv barisinda ratsional sanlar $Q = \{p/q\}$, $p, q \in Z, q \neq 0$ ha'm irratsional (yag'niy ratsional bolmag'an) sanlar tu'sinigi kiritiledi. Ha'rqanday ratsional san shekli yamasa sheksiz periodli onliq bo'lshek tu'rinde, al irratsional sanlardi sheksiz periodli emes onliq bo'lshek tu'rinde jaziliwi mu'mkin.

Ratsional sanlar ha'm irratsional sanlar ko'pliklerinin' birikpesi haqiqiy sanlar dep ataladi ha'm ol ko'binese R ha'ribi menen belgilenedi.

Bekkemlew ushin sorawlar.

1. Bos ko'plikke aniqlama berin'.
2. Ules ko'pliktin' aniqlamasin ha'm misallar keltirin'.
3. Ko'pliklerdin' birlespesinin' ha'm ayirmasinin' aniqlamasin aytin'.

4. Ko`pliklerdin` kesilispesinin` aniqlamasin aytin`.

2-LEKTSIYA.

Matematikalıq logikanın tiykargı túsinikleri. Logikalıq ámeler hám formulalar. Aytımlar esabı. Predikatlar hám kvantorlar. Paradokslar hám sofizmler. Graflar teoriyası tiykarları: graflar túrleri; ushları, qırraları.

Reje:

1. Matematikalıq logika elementleri.
2. Aytımlar hám olar u`stinde logikalıq ámeler.
3. Graflar.

Aytımlar matematikalıq logikanın tiykargı túsiniklerinin biri bolıp, ol shın yamasa jalg'anlıgı bir ma'nisli anıqlanatuǵın ga'p bolıp esaplanadı. «Ma'selen, kvadrat tuwrı to'rtmu'yeshlik», « $2 > 5$ » sıyaqlı tastıyıqlawlar aytımlar bolıp, birinshi aytım shın, al ekinshi aytım jalg'an aytım bolıp esaplanadı.

Berilgen A aytım shın bolg'anda jalg'an, A aytım jalg'an bolg'anda shın bolatuǵın aytım A **aytımın tiykargı** dep ataladı hám $\neg A$ yamasa $\bar{A}$ arqalı belgilenedi.

A hám $\hat{A}$ aytımlar shın bolıp, qalg'an jag'daylarda jalg'an bolatuǵın aytım A hám $\hat{A}$ **aytımlardıń konyuntsiyası** dep ataladı hám $\hat{A} \wedge \hat{A}$ yamasa $\hat{A} \& \hat{A}$ ko'rinishinde belgilenedi.

A hám $\hat{A}$ **aytımlar dizyuntsiyası** dep, A hám $\hat{A}$ aytımlardıń ekewi de jalg'an bolg'anda g'ana jalg'an bolıp, qalg'an jag'daylarda shın bolatuǵın aytımǵa aytıladı hám ol $\hat{A} \vee \hat{A}$ ko'rinishinde belgilenedi.

A hám $\hat{A}$ aytımlar implikatsiyası dep, A aytım shın hám $\hat{A}$ aytım jalg'an bolg'anda g'ana jalg'an, qalg'an jag'daylarda shın bolatuǵın aytımǵa aytıladı hám ol $\hat{A} \Rightarrow \hat{A}$ ko'rinishinde belgilenedi.

A hám $\hat{A}$ **aytımlar ekvivalentsiyası** dep, A hám $\hat{A}$ aytımlardıń ekewi de jalg'an yamasa ekewi de shın bolg'anda shın, qalg'an jag'daylarda jalg'an bolatuǵın $\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A}$ aytımǵa aytıladı.

Bul ámelerdin shınlıq tablitsası to'mendegishe:

A	$\hat{A}$	$\neg A$	$\hat{A} \wedge \hat{A}$	$\hat{A} \vee \hat{A}$	$\hat{A} \Rightarrow \hat{A}$	$\hat{A} \Leftrightarrow \hat{A}$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0

0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

(Bul jerde 1-shın, al 0-jalg'an degen mag'ananı bildiredi).

$\tilde{O} = \{3; 2; 0; -1; -3\}$ ko'plikte $\tilde{A}(x): "(x-1)(x-2)(x-3)=0"$ predikat berilgen bolsa,

a) $\tilde{A}(3), \tilde{A}(2), \tilde{A}(0), \tilde{A}(-1), \tilde{A}(-3)$ pikirlerdin' shınlıq ma'nisin tabın'.

b) aling'an juwaplarg'a tiykarlanıp $(\forall \tilde{o} \in \tilde{O}) \tilde{A}(\tilde{o})$ predikat shın boladı dep tastıyıqlaw mu'mkin be?

Sheshiliwi:

a) $\tilde{A}(3): (3-1)(3-2)(3-3)=0 \Rightarrow 0=0$ shın

$\tilde{A}(2): (2-1)(2-2)(2-3)=0 \Rightarrow 0=0$ shın

$\tilde{A}(0): (0-1)(0-2)(0-3)=-6 \Rightarrow -6=0$ jalg'an

$\tilde{A}(-1): (-1-1)(-1-2)(-1-3)=-24 \Rightarrow -24=0$ jalg'an

$\tilde{A}(-3): (-3-1)(-3-2)(-3-3)=-120 \Rightarrow -120=0$ jalg'an boladı.

b) Joqarıdag'ılardan, X ko'plikten aling'an ayırım elementler ushın g'ana $\tilde{A}(\tilde{o})$ predikat shın bolatug'inlıg'ı ko'rinip tur. Sonın' ushın $(\forall \tilde{o} \in \tilde{O}) \tilde{A}(\tilde{o})$ predikat barlıq waqıt shın bolmaydı.

3-LEKCIYA

Tegislikdegi hám keńisliktegi tuwrı múyeshli koordinatar sistemaları. Tegislikde, keńislikte eki noqat arasındag'ı aralıq. Tuwrı sızıq hám onın teńlemeleri. Eki tuwrı sızıq parallelligi hám perpendikulyarlıq shárti.

Reje:

1. Tuwrı mu'yeshli Dekart koordinatar sistemasi.

2. Eki tochka arasındag'i aralıq.

3. Kesindini berilgen qatnasta bo'liw.

4. Tuwrı sızıq ha'm onın ten'lemeleri.

5. Eki tuwrı sızıqtın parallellik ha'm perpendikulyarlıq sha'rtleri.

Matematikanin` geometriyalıq ma`selelerdi algebralıq usıllardı paydalanıp sheshetug`ın bo`limi analitikalıq geometriya dep ataladı. Analitikalıq geometriyanın` tiykarında koordinatalar usili bolıp, onı XVII a`sırde frantsuz matematigi ha`m filosofi Rene DEKART kirgizdi ha`m bul usildi ko`plegen ma`selelerge qollandı. Koordinatalar usili noqatınin` halin koordinatalar sistemasin payda etiwshi bazibir sızıqlarg`a salıstırmalı qarawg`a tiykarlang`an.

Tuwrıdag`ı Dekart koordinatalar sisteması ( $n=1$  o`lshemli ken`islik  $E^1$ ). Qa`legen tuwrı sızıqta baslang`ısh  $O$  naqatı, « $\rightarrow$ » belgisi menen on` bag`ıt ha`m uzınlıq birligi (masshtab) tan`lap alınadı. Payda etilgen bir o`lshemli koordinatalar sisteması menen haqıyqiy sanlar ko`pligi arasında bir ma`nisli sa`ykeslik ornatiw mu`mkın. Qa`legen bir  $M$  noqatsınin` tuwrıdag`ı orınına sa`ykes keliwshi x sani (1-su`wret) onin` koordinatasi dep ataladı ha`m  $M(x)$  tu`rinde belgilenedi.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & M & & & x \\ & & & \hline O & 1 & x \end{array}$$

1-su`wret.

Eki $A(x_1)$ ha`m  $B(x_2)$  noqatlari arasındag`ı d aralıq

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Ko`o`sherdegı (algebralıq) bag`ıtlang`an kesindinin` shaması  $AB = x_2 - x_1$ , bunda  $A(x_1)$  ha`m $B(x_2)$.

Tegisliktegi Dekart koordinatalar sisteması ($n=2$ o`lshemli ken`islik E^2). Tegisliktegi qa`legen  $O$  noqatı (bul noqat koordinata basi dep ataladı) arqalı o`z-ara perpendikulyar eki ko`sher  $Ox$  (abstsissa) ha`m Oy (ordinata) o`tkiziledi ha`m bul ko`sherlerde ten`dey masshtab birligi tan`lap alınadı.  $Ox$  ha`m Oy ko`sherleri jaylasqan tegislik  $Oxu$  koordinatalar tegisligi dep ataladı. Tegisliktegi noqatınin` koordinatalari dep noqatınin` usı tegisliktegi orınin` anıqlaytug`ın sanlar jubına. Noqatınin` shereklerdegi koordinatalarınin` belgileri:

	I	II	III	IV
X	+	-	-	+
U	+	+	-	-

Tegisliktegi eki $A(x_1; y_1)$ ha`m  $B(x_2; y_2)$  noqatlarınin` arasındag`ı d aralıq

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ushlari $A(x_1, y_1)$ ha'm $B(x_2, y_2)$ noqatlarida bolg'an kesindini berilgen λ qatnasta bo'liw, yag'niy $AN:NB=\lambda$ ten'ligin qanaatlandiratug'in AV kesindisinin $N(x, y)$ noqatsi koordinatalarin

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

formulasi boyinsha tabiw mu'mkin. Dara jag'dayda, AV kesindisinin ortasinin koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

To'beleri $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n)$ noqatlarida bolg'an du'n'ki ko'pmu'yeshliktin maydani $S = \frac{1}{2} \left[\left| \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} \right| + \left| \begin{matrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{matrix} \right| + \dots + \left| \begin{matrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{matrix} \right| \right]$.

To'beleri $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$ noqatlarida bolg'an u'shmu'yeshliktin maydani $S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ formulasi boyinsha tabiladi.

Ush $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3)$ noqatlarinin bir tuwrig'a tiyisli boliw sha'rti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ken'isliktegi Dekart koordinatalar sistemasi ($n=3$ o'lsheimli ken'islik E^3). Bir O noqatsinda kesilisetug'in ha'm birdey masshtab birligine iye bolg'an u'sh o'z-ara perpendikulyar Ox, Oy ha'm Oz ko'sherleri ken'islikte tuwri mu'yeshli Oxuz Dekart koordinatalar sistemasin aniqlaydi. Bunda Ox - abstsissa, Oy - ordinata ha'm Oz - applikata ko'sheri dep ataladi. Koordinatalari menen ken'isliktegi noqat $M(x, y, z)$ tu'rinde jaziladi. Ken'islikti Oxu, Oxy, Oyz koordinata tegislikleri segiz oktantqa bo'ledi. Noqatinin oktantlardagi koordinatalarinin belgileri:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	-	-	+	+	-	-	+

U	+	+	-	-	+	+	-	-
Z	+	+	+	+	-	-	-	-

n -o'lishemli Dekart koordinatalar sistemasi (E^n). Qa'legen M noqatsin koordinatalari menen $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tu'rinde jaziw mu'mkin. Eki $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ha'm $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ noqatlarinin' arasindag'i d araliq

$$d = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

formulasi boyinsha esaplanadi.

Tegislikte Oxu tuwri mu'yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang'an bolsin. Tegisliktegi figuralardi uliwma $F(x, y) = 0$ tu'rindegi ten'leme menen analitikaliq an'latiw mu'mkin, bunda G -berilgen funktsiya.

Tuwri tu'sinigi aniqlanbaytug'in matematikanin' da'slepki tu'siniklerinin' biri, sonliqtan og'an aniqlama joq.

1. Tuwrinin' uliwma ten'lemesi birinshi ta'rtpili eki o'zgeriwshili siziqli ten'leme:

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

bunda A, V, S - turaqlilar. Dara jag'daylari:

a) $A = 0, B \neq 0; By + C = 0, y = -C/B$ - bul Ox ko'sherine parallel tuwri ten'lemesi;

b) $A = 0, B \neq 0; C = 0; By = 0, y = 0$ - bul Ox ko'sherinin' ten'lemesi;

v) $A \neq 0, B = 0; Ax + C = 0, x = -C/A$ - bul Ou ko'sherine parallel tuwri ten'lemesi;

g) $A \neq 0, B = 0; C = 0; Ax = 0, x = 0$ - bul Ou ko'sherinin' ten'lemesi;

d) $C = 0; Ax + By = 0, y = -Ax/B$ - bul koordinata basi $O(0,0)$ noqatisi arqali o'tetug'in tuwri ten'lemesi.

2. Tuwrinin' mu'yeshlik koefitsientli ten'lemesi. $u = kx + b$, bunda $k = tg\alpha$ - tuwrinin' mu'yeshlik koefitsienti, α - tuwrinin' Ox ko'sherinin' on' bag'iti menen payda etetug'in mu'yeshi, b - parametri da'slepki ordinata dep ataladi.

3. Tuwrinin` kesindilerdegi ten`lemesi. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, bunda a ha`m  $b$  parametrleri tuwrinin` sa`ykes  $Ox$  ha`m Oy ko`sherlerinen kesip etetug`in kesindilerinin` uzunliqlari

4. Tuwrinin` normal` ten`lemesi.  $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$ , bunda  $r$ -koordinata basinan tuwrig`a tu`sirilgen perpendikulyar (normaldin`) uzunlig`i,  $\beta$ -usi perpendikulyardin` Ox ko`sheri menen payda etetug`in mu`yeshi.

$Ax + By + C = 0$ tu`rindegi ten`lemenin normal tu`rdegi tuwri ten`lemesine alip keliw ushin ol ten`lemenin` eki jag`in da normallastiriwshi ko`beytiwshi $M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ shamasina ko`beytiw za`ru`r, bunda  $\pm$  belgisinen  $S$  saltan` ag`za bbelgisine qarama qarsi tan`lap alinadi.

5. Tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi.

$A_1(x_1, y_1)$ noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi:

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrinin` kesilisiw noqati arqali o`tetug`in tuwrilar da`stesinin` ten`lemesi: $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$.

Eger $\alpha = 1$ bolsa, onda da`stede ekinshi tuwri bolmaydi.

6. Berilgen noqatlar arqali o`tetug`in tuwrilar.

$A_1(x_1, y_1)$ noqati arqili o`tetug`in tuwrilar da`stesin  $y - y_1 = k(x - x_1)$  ten`lemesi menen an`latiladi, bunda  $k$  - qa`legen parametr.

$A_1(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noqatlari arqali tek bir g`ana tuwri o`tkeriw mu`mkin:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Berilgen $A_1(x_1, y_1)$ noqatidan tuwrig`a shekemgi d araliq:

$$d = |x_1 \cos \beta + y_1 \sin \beta - p| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

7. Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrinin` o`z-ara jaylasiwi.

7.1. Eger $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ bolsa, onda bul tuwrilar parallel boladi ha`m

a) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ - betlesedi,

b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ - kesilispeydi.

7.2. Eger $\Delta \neq 0$ bolsa, onda bul tuwrilar bir (x, u) noqatda kesilisedi

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

8. Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (yamasa $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$) tuwrilarinin` arasindag`i mu`yesh

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Bul formuladan eki tuwrinin`:

8.1. $A_1 / A_2 = B_1 / B_2$; $k_1 = k_2$ -parallellik sha`rtin,

8.2. $A_1A_2 = B_1B_2$; $k_1 = -1/k_2$ -perpendikulyarlıq sha`rtin alamiz.

8.3. Eki $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tuwrilarinin` arasindag`i mu`yesh bissektrisasinin` ten`lemesi

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

4-LEKCIYA

Ekinshi tártipli iymek sızıqtıń anıqlaması. Shen`ber. Ellips. Giperbola. Parabola. Tegislik hám onıń teńlemeleri. Tegislikler arasındagı múyesh. Eki tegisliktiń parallelligi hám perpendikulyarlıq shártleri. Noqatan tegislikke shekem bolğan aralıq.

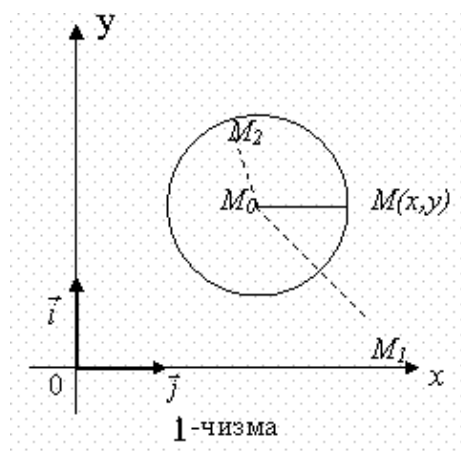
Tegisliktegi ekinshi ta`rtipli siziqlar ha`m olardin` kanonikalıq tu`rleri: Shen`ber. Ellips. Giperbola. Parabola. Olardin` ten`lemesi, qa`siyetleri, elementleri, direktrisalari, diametrleri ha`m urinbalari. U`shinshi ha`m joqari ta`rtipli algebralıq, transtsent iymeklikler.

Ekinshi ta`rtipli iymek si`zi`qlar

SHEN`BER

Ta'rif: Tekislikda markaz deb ataluvchi berilgan M_0 nuqtadan bir xil $r > 0$ masofada turuvchi nuqtalar to'plamini aylana deb ataladi.

P tekislik berilgan bo'lib, unda $B = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ dekart reper o'rnatilgan bo'lsin. M_0 nuqta B reperda $M_0(a, b)$ koordinatalarga ega bo'lsin. $M(x, y)$ nuqta aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $d(M_0, M) = r$, bunda d – masofa. Kesma uzunligi formulasidan



$$d(M_0, M) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

kelib chiqadi. Bundan

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (1)$$

ELLIPS

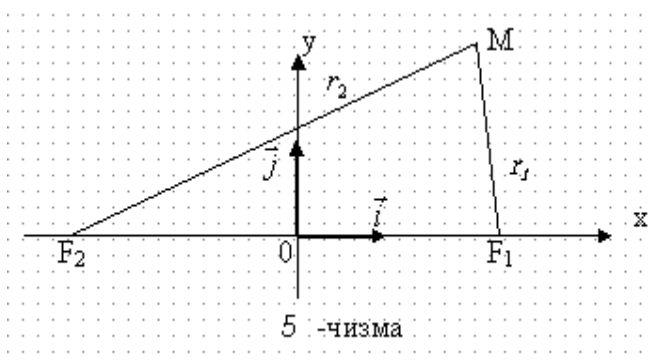
Ta'rif: Xar bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar yig'indisi berilgan $[PQ]$ kesma uzunligiga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plami ellips deb ataladi.

Berilgan kesma uzunligi $d(P, Q) = 2a$ va fokuslar orasidagi masofa $d(F_1, F_2) = 2c$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra, $d(P, Q) > d(F_1, F_2) \Rightarrow a > c$. M – izlangan nuqtalar to'plamining biror nuqtasi bo'lsin. $d(M, F_1) = r_1$, $d(M, F_2) = r_2$ belgilash kiritamiz. r_1 va r_2 ni ellipsning fokal radiuslari deyiladi. Ellips ta'rifiga ko'ra,

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (1)$$

GIPERBOLA

Ta'rif: Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan $[PQ]$ kesma uzunligi $d(P, Q) = 2a$ gat teng bo'lgan nuqtalar to'plami giperbola deb ataladi.



Fokuslar orasidagi masofani $d(F_1, F_2) = 2c$ deb belgilasak, uchburchakning ixtiyoriy tomoni qolgan ikki tomonining ayirmasi dan katta bo'lgani uchun $d(P, Q) < d(F_1, F_2) \Rightarrow a < c$.

Giperboladagi M nuqtaning F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari uning fokal

radiuslari deyiladi va r_1 va r_2 bilan belgilanadi, ya'ni

$$r_1 = d(F_1, M), \quad r_2 = d(F_2, M).$$

Ta'rifga ko'ra, $|r_1 - r_2| = 2a$ (1)

PARABOLA

Ta'rif: Har bir nuqtasidan fokus deb ataluvchi berilgan nuqtagacha va direktrisa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa o'zaro teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga parabola deb ataladi.

Parabola fokusini F va direktrisasini s orqali belgi laylik. F fokus s direktrisa tegishli emas. $d(F, S) = p$ bo'lsin. F nuqtadan s to'g'ri chiziqqacha perpendikulyar o'tkazamiz va uni absissa o'qi OX uchun olamiz. $d(F, N) = p$ bo'lib, $N \in S$. FN kesmaning o'rtasi O nuqtadan OX ga perpendikulyar ordinata o'qi OU o'tkazamiz. OXU -dekart reper tashkil etadi. O'rnatilgan dekart reperda $F\left(\frac{P}{2}, 0\right), N\left(-\frac{P}{2}, 0\right)$ koordinatalarga ega. Direktrisaning tenglamasi $x = -\frac{P}{2}$.

Fokus $F\left(\frac{P}{2}, 0\right)$ koordinatalarga ega. Parabola ta'rifiga ko'ra

$$d(F, M) = d(L, M) \quad (1)$$

Tegislik ha'm onin' ten'lemeleri. Tegisliklar arasindag'i mu'yesh. Eki tegisliktin' parallellik ha'm perpendikulyarhq sha'rtleri.

Ken'islikte $Oxuz$ tuwri mu'yeshli Dekart koordinatalar sistemasi aniqlang'an bolsin. Ken'isliktegi figuralardi uliwma $F(x, y, z) = 0$ tu'rindagi ten'leme menen analitikaliq an'latiw mu'mkin, bunda F berilgen funktsiya.

Birinshi ta'rtpili u'sh o'zgeriwshili siziqli algebralik ten'leme u'sh o'lshemli ken'islikte tegislikti an'latpaydi. Tegisliktin' uliwma ten'lemesi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

bunda A, B, C, D koefitsientlerdin' keminde birewi nolden o'zgeshe qa'legen sanlar dep uyg'ariladi.

$M(x_0; y_0; z_0)$ noqatsi orqali o'tetug'in ha'm $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ vektorina perpendikulyar tegislikti $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ten'lemesi menen aniqlaw mu'mkin.

Kesindilerdeg'i tegisliktin' ten'lemesi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

bunda a, b, c - tegisliktin` sa`ykes Ox, Oy, Oz ko`sherlerinen kesip alg`an kesindilerinin` uzunliqlari.

Meyli α_1 ha`m  $\alpha_2$  tegisliklari  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  ten`lemeleri menen berilgen bolsin. Bul tegisliklerdin` arasindag`i φ mu`yesh olarg`a normal $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ ha`m  $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$  vektorlarinin` arasindag`i mu`yesh retinde aniqlanadi, yag`niy

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Eger normal vektorlari kollinear bolsa, onda olarg`a sa`ykes keliwshi tegislikler parallel boladi $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ ha`m eger normal vektorlari perpendikulyar bolsa, onda sa`ykes tegislikler de perpendikulyar boladi $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$.

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ noqatsinan $Ax + By + Cz + D = 0$ tegisligine shekemgi qashqliq

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Berilgen eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i arqili o`tetug`in barliq tegislikler da`stesinin` ten`lemesi:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0$$

bunda $\alpha = 1$ dep alip da`steden ekinshi tegislikni shig`arip taslaw mu`mkin.

Ken`isliktegi tuwrini birinshi ta`rtipli u`sh o`zgeriwshili siziqli algebralik ten`lemelerdin` sistemasi menen, yag`niy eki tegisliktin` kesilisiw sizig`i sipatinda an`latiw mu`mkin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Bul tuwrinin` bag`itlawshi vektorin (yag`niy tuwrig`a yamasa og`an parallel tuwrig`a tiyisli vektor) tegisliklerdin` normal vektorlarinin` vektorliq ko`beymesi tu`rinde aniqlanadi.

Meyli tuwri $M_0(x_0, y_0, z_0)$ noqatsi ha`m  $\vec{s} = (l; m; p)$  bag`itlawshi vektori menen berilgen bolsin. $M(x; y; z)$ - usi tuwrinin` qa`legen bir noqatsi dep uyg`aramiz. Onda, tuwrinin`

vektorliq ten`lemesi $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$;

parametrlilik ten`lemesi $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + pt$;

kanonikaliq ten`lemesi $\frac{x-x_0}{n} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$.

Eki tuwrinin` bir tegislikte jaylasiw sha`rti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ n & m & p \\ n_1 & m_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh:

$$\sin \varphi = \frac{|An + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{n^2 + m^2 + p^2}},$$

parallellik sha`rti: $An + Bm + Cp = 0$;

perpendikulyarliq sha`rti: $\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$.

Bekkemlew ushın sorawlar.

1. Tuwri ha`m tegislik arasindag`i mu`yesh.
2. U`sh tegisliktin` kesilisiwi jag`daylari: bir tuwrıda, bir noqatta.
3. Analitikaliq tu`rde berilgen tuwri ha`m tegisliktin` kesilisiw noqatsin tabiw.

5-LEKCIYA

Funkciya hám onıń beriliw usılları, tiykarǵı elementar funkciyalar, funksiyalardıń jup-taqlıǵı, periodlılıǵı, grafıǵı.

Funkciya tu`sinigi

Turaqlı shama dep tek bir ma`nisti qabıl etetug`ın shamag`a aytamız. Turaqlı shamalardı latin alfavitinin` da`slepki jazba ha`ripleri menen belgileymiz yag`nıy a,b,c,d.... Eger shama bazı bir waqıtlarda(jag`daylarda) g`ana turaqlı bolıp qalsa, onı **parametr** dep ataymız. Ha`r qıylı san ma`nislerdi qabıl etetug`ın shamanı **o`zgeriwshishamalar** dep ataymız ha`m olardı latin alfavitinin` aqırǵı jazba ha`ripleri menen belgileymiz yag`nıy x, y, z....

Eki X ha`m Y ko`plikleri berilgen bolsın, $x \in X$ ha`m $y \in Y$.

Anıqlama. X ko`pliginin` ha`r bir  $x(x \in X)$  elementine bazı bir qag`ıyda yamasa nızam boyınsha Y ko`pliginin` anıq bir $y(y \in Y)$ elementi sa`ykes qoyılǵ`an bolsa, X ko`pliginde funkciya berilgen dep ataladı ha`m ol

$$y = f(x)$$

sıyaqlıbelgilenedi.

Bunda X ko'pligifunkciyanin **aniqlanıwoblastı** depataladı
ha'm $D(y)=X$ belgilenedi, al Y ko'pligifunkciyanin
ma'nislerko'pligi depataladı ha'm $E(y)=Y$ depbelgilenedi, xg'a rezsiz o'zgeriwshiyam
asa **funkciyaargumenti**, yg'a rezlio'zgeriwshiyamasaxo'zgeriwshisinin
funkciyası depataladı, fsa'ykeslikqag'ıydanı, nızamınko'rsetiwshibelgi.

Mısal: $X=(-\infty;+\infty)$ ha'r-birhaqıyqıysang'aonın
kvadratın sa'ykesqoyayıqyag'ınıy $y = x^2$. Bulmısalda $D(y)=(-\infty;+\infty)$, $E(y)=[0;+\infty)$.

Funkciyalardıń beriliwusılları

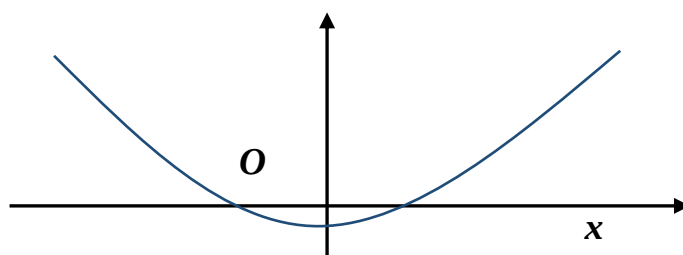
Funkciya birneshe usılda beriliwı mu'mkin:

1. Analitikalıq usıl. xo'zgeriwshinin ha'rbir ma'nisinesa'ykes keliwshiy-tin
ma'nislerixo'zgeriwshisiustinde analitikalıq a'mellerdiorınlawna'tiyjesiko'rinisidey
ag'ınıy formulaja'rdeminde beriliwine analitikalıq usıldıymız.
Bul usıl matematikada a'meliy esaplarda islewdeko'pushıraydı.

Mısalı: $y = \frac{x^2 - 2}{x}, \quad y = \sqrt{2x + 8}$

2. Grafikalıq usıl. Bunda $y = f(x)$ funkciyası tegisliktegi (x,y)
noqatlarko'pligi grafigiarqalı beriledi, x argumentlerdin ma'nisleri hoqattın
abscissası, y funkciyanın ma'nislerisa'ykes noqat ordinatası.

Mısalı: y



3. Tablicalıq usıl. Bunda x argumentinin ma'nislerine sa'ykes y
funkciyanın ma'nisleri tablitsa tu'rinde beriledi.

Mısalı: Qon'ırat-Tashkent jolawshı poezdinin basıp o'tken jolının waqıtqa
qarata o'zgeriw kestesi:

t(waqıt,s)	1	3	6	9	12	15	18
------------	---	---	---	---	----	----	----

S(jol,km)	60	180	360	540	720	900	1080
-----------	----	-----	-----	-----	-----	-----	------

4. Soʻz benen beriliw usılı.

Mısalı: Jol haqı 600 sum: $f(x) = \begin{cases} 600 \text{ sum, eger } a \neq b \text{ bolsa;} \\ 0 \text{ sum, eger } a = b \text{ bolsa.} \end{cases}$

Funkciyanın tiykarg'ı qa' siyetleri

1. Jup ha'm taqlıg'ı.

Anıqlama: Eger $\forall x \in X$ ushın

$$f(-x) = f(x)$$

ten'likorınlı bolsaf(x)- funkciya **jupfunkciya** depataladı.

Mısalı: $y = x^2$, $y = |x|$, $y = \cos x$ funkciyaları jupfunkciyalar, sebebi $(-x)^2 = x^2$, $|-x| = |x|$, $\cos(-x) = \cos x$

Jupfunkciyalardıń grafiki ordinate ko'sherine qarata simmetriyalı jaylasqan boladı (1-su'wret).

Anıqlama: Eger $\forall x \in X$ ushın

$$f(-x) = -f(x)$$

ten'likorınlı bolsaf(x)- funkciya **taqfunkciya** depataladı.

Mısalı: $y = x^3$, $y = 2x$, $y = \tan x$ funkciyaları taqfunkciyalar, sebebi $(-x)^3 = -x^3$, $2(-x) = -2x$, $\tan(-x) = -\tan x$

Taqfunkciyanıń grafiki koordinata basına qarata simmetriyalı jaylasqan boladı (2-su'wret).

Joqarıdag'ı ekianıqlamanın' daten'likleriorınlanbay tug'ın funkciyalar **juptaemes, taqtaemes** funkciyalar depataladı yag'niy $y = f(x)$ funkciyası **juptaemes, taqtaemes** egerde

$$f(-x) \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases} \text{ bolsa.}$$

2. **Monoton funkciylar.** Meyli $y = f(x)$ funkciya berilgen bolsın.

Anıqlama: Anıqlanıw oblastınan alıng`an  $x_1 \in X, x_2 \in X$  ushın  $x_1 < x_2$  bolıwınan  $f(x_1) \leq f(x_2)$  ten`sizligi kelip shıqsa, $y = f(x)$ funkciyası X aralıqta **o`siwshi** funkciya dep ataladı.

Anıqlama: Anıqlanıw oblastınan alıng`an  $x_1 \in X, x_2 \in X$  ushın  $x_1 < x_2$  bolıwınan  $f(x_1) \geq f(x_2)$  ten`sizligi kelip shıqsa, $y = f(x)$ funkciyası X aralıqta **kemeyiwshi** funkciya dep ataladı.

O`siwshi ha`m kemeyiwshi funkciyalar **monoton funkciyalar** dep ataladı.

3. **Shegaralang`anlıg`ı.** Bazı bir X aralıg`ında qandayda bir  $M > 0$  sanı bar bolıp,  $\forall x \in X$  ushın  $f(x) \leq M, (f(x) \geq M)$  ten`sizligi orınlansa, $y = f(x)$ funkciyası X aralıqta joqarıdan **shegaralang`an** (to`mennan shegaralang`an) dep ataladı. Qarama-qarsı jag`dayda, yag`nıy onday  $M$  sanı bar bolmasa shegaralanbag`an dep ataladı.

4. **Periodlılıg`ı.** Egerde bazı bir  $T \neq 0$  ushın  $x \in X, (x+T) \in X$  bolg`anda $f(x+T) = f(x)$ ten`ligi orınlı bolsa, $y = f(x)$ funkciyası T periodqa iye **periodlı** funkciya dep ataladı.

Funkciyalardıń klassifikatsiyası

Egerde funkciya on` jag`ında g`a`rezli o`zgeriwshi bolmag`an formula ja`rdeminde berilse onda ol anıq funkciya dep ataladı.

Keri funkciya. Meyli $y = f(x)$, ma`nisler ko`pligi Y bolg`an ha`m X ko`pliginde anıqlang`an, x g`a`rezsiz o`zgeriwshinin` funkciyası bolsın. $f(x) = y$ bolg`anda, ha`rbir $y \in Y$ ke birden bir $x \in X$ tı sa`ykeslendiremiz. Onda payda bolg`an $x = \phi(y)$, ma`nisler ko`pligi X bolg`an,  $Y$  ko`pliginde anıqlang`an keri funkciya dep ataladı, ha`m onı $x = f^{-1}(y)$ ko`rinisinde belgileymiz.

Qa`legen qatan` monoton funkciya ushın keri funkciya bar bolatug`ınlıg`ın da`lillewge boladı.

O`zara keri funkciyalardıń grafikleri birinshi ha`m u`shinshi koordinata mu`yeshlerinin` bissektrisasına simmetriyalı boladı.

Quramalı funkciya. Meyli $y = f(u)$ ma`nisler oblastı  $Y$  bolg`an U ko`pliginde anıqlang`an u o`zgeriwshinin` funkciyası bolıp, al o`zgeriwshi  $u$  o`z gezeginde, ma`nisler oblastı  $U$  bolg`an X ko`pliginde anıqlang`an x

o'zgeriwshisinin $u = \varphi(x)$ funkciyası bolsın. Onda X ko'pliginde berilgen $y = f[\varphi(x)]$ funkciyası quramalı funkciya dep ataladı.

Elementar funkciyalar.

Elementar funkciyalar algebralıq ha'm transtsendentlik bolıp bo'linedi.

Algebralıq dep argument u'stinen shekli sandag'ı algebralıq a'meller orınlanatug'in funkciyalarg'a aytamız. Algebralıq funkciyalarg'a:

- pu'tin ratsional funkciya (ko'pag'zanın' yamasa polinom):

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n;$$

- bo'lshek ratsional funkciya-eki ko'p ag'zalıqtın' qatnası;

- irrotsianal funkciya (eger a'meller ishinde argumentten koren shig'arıw a'meli bar bolsa) funkciyalar jatadı.

Basqa qa'legen algebralıq emes funkciya transtsendentlik boladı, olarg'a: ko'rsetkishli, logarifmlik, trigonometriyalıq, kerı trigonometriyalıq funkciyalar jatadı.

Mektep kursınan belgili tiykarg'ı elementar funkciyalardı keltirip o'temiz.

1. Sızıqlı funkciyalar.

$$y = kx + b$$

en' ko'p taralg'an funkciya bolıp esaplanadı. Bul sızıqlı programmalastırıwda ko'plep qollanıladı.

2. Da'rejeli funkciya.

$$y = x^n, \quad n \neq 0,$$

n nin' natural ma'nislerinde yag'nıy $n \in N$ bolg'anda bul funkciya barlıq sanlar ko'sherinde anıqlang'an.

3. Ko'rsetkishli funkciya.

$$y = a^x, \quad \forall a > 0, a \neq 0$$

Anıqlanıw oblastı $x \in (-\infty; +\infty)$, al ma'nisler ko'pligi $y \in (0; +\infty)$. Eger $a > 1$ bolsa, funkciya monoton o'sedi, eger $0 < a < 1$ bolsa, monoton kemiydi.

4. Logarifmlik funkciya.

$$y = \log_a x, \quad \forall a > 0, a \neq 1.$$

Bulfunkciyakorsetkishlifunkciyag`aqaratakerifunkciya. Sonliqtanda  $x \in (0; +\infty)$ ,  $y \in (-\infty; +\infty)$ . Bunin` grafigi $y = a^x$ funkciyasinin` grafimeneny=xtuwrısınaaqaratasimmetriyalı boladı. Sonin` menenbirgeqa`legen  $a$  tiykarı ushin  $\log_a 1 = 0$  sha`rtiorınlanadı, sonliqtandaqa`legenlogarifmlikfunktsiyanin` grafigi $(1;0)$ noqatınano`tedi.

5. *Trigonometriyalıq funkciyalar.*

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x.$$

$y = \sin x$ ha`m  $y = \cos x$  funkciyaları barlıq sanlı tuwrıda anıqlang`an ha`m ma`nisleri ko`pligi  $[-1;1]$  aralıg`ı boladı. $y = \operatorname{tg} x$ funkciyası x tın`  $x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{N}$  ma`nislerinen basqa barlıq ma`nislerinde anıqlang`an ha`m anıqlanıw oblastının` ha`r bir intervalında monoton o`seddi. Tangens ha`m kotangenslerdin` ma`nisler ko`pligi $(-\infty; +\infty)$ boladı.

$y = \sin x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$ funkciyalarıtaqha`molardın` grafiklerikoordinatabasınasimmetriya (8, 10, 11-su`wretler). Al  $y = \cos x$  funkciyası jup, sonliqtandaonin` grafigiOyko`sherinesimmetriyalı (9-su`wret).

$y = \sin x$ ha`m  $y = \cos x$  funkciyalarınin`, periodı 2π , al $y = \operatorname{tg} x$ ha`m  $y = \operatorname{ctg} x$  funkciyalarınin` periodı π ge ten`.

6-LEKCIYA

Funkciyanın limiti, limitler haqqında teoremlar. Funkciyanın úzliksizligi.

Funkciya tuwındısının anıqlaması, onın geometriyalıq hám mexanikalıq mánisi, differensiallaw. Joqarı tártipli tuwındı.

Anıqlama 1. (Funktsiyanin` noqattag`i shegi). Eger $y = f(x)$ funktsiya $x=a$ noqatinin` bazi bir do`gereginde anıqlang`an bolip ( $x=a$  noqatinin` o`zinde anıqlanbag`an boliwi mu`mkin) qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip, $|x-a| < \delta$ ten`sizligin qanaatlandiratug`in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x)-A| < \varepsilon$ ten`sizligi orinlansa, onda shekli  $A$  sani  $y = f(x)$  funktsiyanin` $x=a$ noqatındag`i (yamasa  $x \rightarrow a$  dag`i) shegi dep ataladı.

Eger A sani $y = f(x)$ funktsiyanin`  $x=a$  noqatındag`i shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ yamasa } x \rightarrow a \text{ da } f(x) \rightarrow A$$

tu`rinde belgilenedi.

Aniqlama 2. (Funksiyanin` sheksizliktegi shegi). Eger  $y = f(x)$  funksiya  $x$  tin` jetkilikli u`lken ma`nislerinde aniqlang`an bolip, qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $N > 0$ sani bar bolip, $|x| > N$ ten`sizliin qanaatlandiratug`in barliq x lar ushin $|f(x) - A| < \varepsilon$ ten`sizligi orinlansa, onda turaqli  $A$  sani  $y = f(x)$  funksiyanin` $x \rightarrow \infty$ dag`i shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funksiyanin`  $x \rightarrow \infty$  dag`i shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ yamasa } x \rightarrow a \text{ da } f(x) \rightarrow A$$

tu`rinde belgilenedi.

Teorema (Shekke iye funksiyanin` shegaralang`anlig`i). Eger  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  - shekli san bolsa, onda  $y = f(x)$  funksiya  $x=a$  noqattin` bazi-bir do`gereginde shegaralang`an.

Aniqlama 3. (Bir ta`repleme shekler).

1) Eger $y = f(x)$ funksiya $x=a$ noqattin` bazi-bir  $x < a$  sha`rtin qanaatlandiratug`in bazi bir do`gereginde aniqlang`an bolip ( $x=a$  noqatinin` o`zinde aniqlanbag`an boliwi mu`mkin) qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip, $|x - a| < \delta$ ten`sizligin qanaatlandiratug`in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ ten`sizligi orinlansa, onda  $A_1$  sani  $y = f(x)$  funksiyanin` $x=a$ noqatindag`i (yamasa  $x \rightarrow a - 0$  dag`i) shep ta`repleme shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funksiyanin`  $x=a$  noqatindag`i shep ta`repleme shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = A_1 \text{ yamasa } \lim_{x \rightarrow a - 0} f(x) = A_1 \text{ yamasa } f(a - 0) = A_1$$

tu`rinde belgilenedi. Eger $a=0$ bolsa, onda

$$A_1 = f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x).$$

2) Eger $y = f(x)$ funksiya $x=a$ noqatinin` bazibir  $x > a$  sha`rtin qanaatlandiratug`in bazibir do`gereginde aniqlang`an bolip ( $x=a$  noqatinin` o`zinde aniqlanbag`an boliwi mu`mkin) qa`legen $\varepsilon > 0$ sani ushin sonday $\delta > 0$ sani bar bolip, $|x - a| < \delta$ ten`sizligin qanaatlandiratug`in barliq $x \neq a$ noqatlar ushin $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ ten`sizligi orinlansa, onda shekli  $A_1$  sani  $y = f(x)$  funksiyanin` $x=a$ noqatindag`i (yamasa  $x \rightarrow a + 0$  dag`i) on` ta`repleme shegi dep ataladi.

Eger A sani $y = f(x)$ funksiyanin`  $x=a$  noqatindag`i on` ta`repleme shegi bolsa, onda ol

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = A_2 \text{ yamasa } \lim_{x \rightarrow a + 0} f(x) = A_2 \text{ yamasa } f(a + 0) = A_2$$

tu`rinde belgilenedi. Eger $a=0$ bolsa, onda

$$A_2 = f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x).$$

$f(x)$ funksiyanin` shep ha`m on` ta`repleme shekleri bir ta`repleme shekleri dep ataladi.

Eger $A_1 = A_2$ bolsa, onda $f(x)$ funktsiyasi $x=a$ noqatinda shekke iye. Bug`an keriy`arim da orinli. Demek, $f(x)$ funksiyanin` a noqatindag`i bir ta`repleme shekleri bar ha`m olar o`z-ara ten` bolsa, yag`niy  $f(a-0) = f(a+0)$  bolg`anda ha`m tek sonda g`ana bul funktsiya a noqatinda shekke iye boladi.

Shekler haqqindag`i tiykarg`i teoremlar:

1. Shekli sandag`i funktsiyalardin` algebraliq qosindisinin` shegi qosiliwshi funktsiyalar sheklerinin` algebraliq qosindisine ten`.

2. Shekli sandag`i funktsiyalardin` ko`beymesinin` shegi sol funktsiyalardin` sheklerinin` ko`beymesine ten`.

2.1. (Saldari). Turaqli ko`beyiwshini shek belgisinin` aldina shig`ariw mu`mkin.

3. Eki funksiyanin` bo`lindisinin` shegi, eger bo`limindegi funksiyanin` shegi nolden o`zgeshe bolsa, onda sol funktsiyalardin` sheklerinin` bo`lindisine ten`.

4. Eger a noqatinin` bazibir do`geregine tiyisli barliq x lar ushin $y = f(x) \geq 0$ ha`m $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ (A-shekli san) bolsa, onda $A \geq 0$ boladi.

5. Eger a noqatinin` bazibir do`geregine tiyisli barliq x lar ushin $f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x)$ ten`sizligi orinlansa, onda $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ boladi.

Sanlı izbe-izlikler.

O`zgeriwshi

$$x, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (39)$$

ma`nislerin izbe-iz qabil etsin. Bunday nomerlengen sanlar ko`pligi izbe-izlik dep ataladi. (39) izbe-izliktin` du`ziliwi n-ag`za formulası menen beriledi.

Ma`selen: $x_n = n + (-1)^n$ bolsın; $n = 1, 2, 3, \dots$ dep alsaq,

$$0, 3, 2, 5, 4, 7, \dots \quad (40)$$

izbe-izlik payda boladi.

Sheksiz kishi o`zgeriwshi.

Eger ha`r qanday on` e san o`zegriwshinin` sonday α_0 ma`nisi bar bolsa,  $\alpha$  nın` onnan son`gı ha`r bir ma`nisinin` absolyut sha`m ası e den kishi bolsa,  $\alpha$  o`zgeriwshi sheksiz kishi dep ataladi.

Eger α sheksiz kishi bolsa, ol nolge umtiladi dep ataladi ha`m  $\alpha \rightarrow 0$  ko`rinisinde jaziladi.

Sheksiz u`lken o`zgeriwshi.

Eger ha'r qanday on' s sanı ushın o'zgeriwshinin' sonday x_0 ma'nisi bar bolsa, x tın' onnan son'g'ı ha'r bir ma'nisinin' absolyut sha'm ası S dan u'lken bolsa, onda x o'zgeriwshi sheksiz u'lken dep ataladı. Bul $x \rightarrow \infty$ ko'rinishinde jazıladı.

Sonın' menen birge, eger x tın' x_0 dan keyingi ma'nisleri o'z belgilerin saqlasa, onda $x \rightarrow +\infty$ (yamasa $x \rightarrow -\infty$) dep jazıladı.

O'zgeriwshinn' limiti.

Eger A ha'm o'zgeriwshi x arasındag'ı ayırma sheksiz kishi sha'm a , yag'nıy eger $x = a + \alpha$ bolsa, turaqlı a o'zgeriwshi x tın' limiti dep ataladı ha'm $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ tu'rinde jazıladı.

Funktsiyanın' limiti.

Eger x tın' a g'a ten' bolmastan og'an umtılıwınan ha'r dayım $f(x)$ tın' b g'a umtılıwı kelip shıqsa, b san $f(x)$ funksiyanın' x tın' a g'a umtılg'andag'ı limiti dep ataladı.

Bunı $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ko'rinishinde jazadı.

Limitlerdin' qa'siyetleri:

1) Turaqlı sha'm anın' limiti o'zine ten'.

$$2) \lim (u + v) = \lim u + \lim v$$

$$3) \lim (u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$$

$$4) \text{ Eger } \lim u \text{ ha'm } \lim v \text{ bar bolıp, } \lim v \neq 0 \text{ bolsa, onda } \lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}$$

5) Eger a tochkanın' qandayda bir a'tirapındag'ı x tın', balki tek $x = a$ dan basqa barlıq ma'nislerinde $f(x)$ ha'm $\varphi(x)$ funksiya bir-birine ten' bolsa ha'm olardıń birewi $\delta \rightarrow a$ da limitke iye bolsa, ekinshiside usı limitke iye boladı.

A'jayıp limitler.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

$$2.. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

9. e sanı irratsional san bolıp, $e \approx 2,71828..$ Tiykarı e ge ten' bolg'an logarifmler natural logarifmler dep ataladı ha'm $\log_e x = \ln x$ ko'rinishinde belgilenedi.

Onlıq logarifm $\lg x = M \ln x$, bunda $M = 0,43429..$

Funktsiyanin` u`zliksizligi. Kesindide u`zliksiz funktsiyanin` qa`siyetleri. Quramali ha`m keri funktsiyalardin` u`zliksizligi

Bir argument funktsiyanin` u`zliksizligi: aniqlamalari, bir ta`repleme u`zliksizlik, funktsiyalardin` noqatdag`i ha`m kesindidegi u`zliksizligi. U`zliksiz funktsiyalardin` qa`siyetleri. Tiykarg`i elementar funktsiyalardin` u`zliksizligi. U`zilis noqatlari ha`m olardin` qa`siyetleri.

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; b)$ intervalinda aniqlang`an bolsin. Qa`legen $x_0 \in (a; b)$ noqatsin alamiz, $y_0 = f(x_0)$. Qa`legen  $x \in (a; b)$  noqatin alamiz.  $\Delta x = x - x_0$  ma`nisi argumenttin`  $x_0$  noqatdag`i o`simi dep,  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ma`nisi funktsiyanin`  $x_0$  noqatdag`i o`simi dep ataladi.  $\Delta x$  ha`m Δy o`simleri iymek siziqtı boylap ha`reketleniwshi noqat koordinatalarinin` o`zgeriwi dep ataladi.

U`zliksiz funktsiyanin` aniqlamalari:

1. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an ha`m  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ten`ligi orinlansa, onda $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatta u`zliksiz dep ataladi.

2. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an bolip, qa`legen  $\varepsilon > 0$  ushin sonday  $\delta > 0$  bar bolip,  $|x - x_0| < \delta$  sha`rtin qanaatlandiratug`in qa`legen x ushin

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ten`sizligi orinlansa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`zliksiz dep ataladi.

3. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an ha`m argumenttin` sheksiz kishi o`simine funktsiyanin` sheksiz kishi o`simi sa`ykes kelse, yag`niy  $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`zliksiz dep ataladi.

3. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta ha`m onin` do`gereginde aniqlang`an ha`m argumenttin` sheksiz kishi o`simine funktsiyanin` sheksiz kishi o`simi sa`ykes kelse, yag`niy  $\lim_{x \rightarrow 0} \Delta y = 0$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`zliksiz dep ataladi.

4. Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta shep ha`m on` jaq shekleri bar ja`ne olar o`z-ara ten` bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta u`zliksiz dep ataladi.

5. (Bir ta`repleme u`zliksizlik).

a) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; x_0]$ aralig`inda aniqlang`an ha`m  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0)$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta shepten u`ziliksiz dep ataladi.

b) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $[x_0; b)$ aralig`inda aniqlang`an ha`m  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0)$  bolsa, onda  $y = f(x)$  funktsiya  $x_0$  noqatta on`nan u`ziliksiz dep ataladi.

6. (Kesindide u`ziliksizlik).

a) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; b)$ araliqtin` ha`r bir noqatta u`zliksiz bolsa, onda ol usi araliqta u`ziliksiz funktsiya dep ataladi.

b) Eger $y = f(x)$ funktsiyasi $[a; b]$ kesindisinin` barliq ishki noqatlarinda u`zliksiz ha`m onin` shetki noqatlarinda bir ta`repleme u`ziliksiz bolsa, onda ol usi kesindide u`ziliksiz funktsiya dep ataladi.

Noqatta u`ziliksiz funktsiyalardin` tiykarg`i qa`siyetleri:

1. Eger $y = f(x)$ ha`m  $y = \varphi(x)$  funktsiyalari  $x_0$  noqatsinda u`ziliksiz bolsa, onda $f(x) \pm \varphi(x)$; $f(x) \cdot \varphi(x)$; $\varphi(x_0) \neq 0$ bolg`anda  $f(x)/\varphi(x)$  funktsiyalari da  $x_0$  noqatinda u`ziliksiz boladi.

2. $y = \varphi(x)$ funktsiyalari x_0 noqatsinda u`ziliksiz,  $y_0 = \varphi(x_0)$  ha`m $f(y)$ funktsiyasi y_0 noqatinda u`ziliksiz bolsa, onda  $f[\varphi(x)]$  quramali funktsiyasi  $x_0$  noqatinda u`ziliksiz boladi.

3. A`piwayi elementar funktsiyalar o`zleri aniqlang`an noqatlarda u`zliksiz boladi.

4. Elementar funktsiyalar o`zleri aniqlang`an noqatlarda u`zliksiz boladi.

5. (Belginin` turaqlilig`i).

Eger $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatta u`ziliksiz bolsa, onda usi noqattin` sonday $\delta > 0$ do`geregi bar bolip, onda funktsiya  $x_0$  noqattag`i belgisin saqlaydi.

Kesindide u`zliksiz funktsiyalardin` tiykarg`i qa`siyetleri:

1. (Funktsiya shegaralang`anlig`i) Eger $y = f(x)$ funktsiyalari $[a; b]$ kesindisinde u`zliksiz bolsa, onda ol usi kesindide shegaralang`an funktsiya boladi, yag`niy sonday turaqli  $m, M$  sanlari bar bolip, barliq  $x \in [a; b]$  ma`nisleri ushin $m \leq f(x) \leq M$ ten`sizliklari orinlanadi.

2. (Funktsiyanin` en` kishi ha`m en` u`lken ma`nisinin` bar boliwi). Eger  $y = f(x)$  funktsiyalari  $[a; b]$  kesindisinde u`zliksiz bolsa, onda ol usi kesindide o`zinin` en` kishi ha`m en` u`lken ma`nisine erisedi, yag`niy sonday $x_1, x_2 \in [a; b]$

noqatlari bar bolip, barliq $x \in [a; b]$ ma`nisleri ushin  $f(x_1) \leq f(x)$  ha`m $f(x) \leq f(x_2)$ ten`sizlikleri orinlanadi.

Bir o`zgeriwshili funktsiyanin` differentsial esabi. Tuwindi tu`sinigine alip keletug`in ma`seleler. Tuwindi aniqlaması. Onin` geometriyalıq ha`m mexanikalıq ma`nisi. Tiykarg`ı elementar funktsiyalardın` tuwindıları

Meyli $y = f(x)$ funktsiyasi $(a; b)$ intervalında aniqlang`an bolsin. Qa`legen $x_0, x_0 + \Delta x \in (a; b)$ noqatların alamiz. $y = f(x)$ funktsiyasınin`  $f(x_0)$  ha`m $f(x_0 + \Delta x)$ o`simlerin du`zemiz, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ qatnasi argument Δx qa o`zgergendegi funktsiyanin` ortasha o`zgeriwi dep ataladi.

Aniqlama. Funktsiya o`simi  $\Delta y$  tin` Δx qa qatnasinin`  $\Delta x$  nolge umtilg`andag`i shegi  $y = f(x)$  funktsiyanin` x_0 noqatdag`i tuwindisi dep ataladi ha`m $y', f'(x_0), \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, y'|_{x=x_0}$ belgilerinin` biri menen jaziladi.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Aniqlama. Eger $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda sheksiz tuwindig`a iye dep ataladi.

Aniqlama. Eger $f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shegi bar bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda on` jaq tuwindig`a iye dep ataladi.

Aniqlama. Eger $f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shegi bar bolsa, onda $y = f(x)$ funktsiyasi x_0 noqatda shep jaq tuwindig`a iye dep ataladi.

Tuwindinin` geometriyalıq mag`inasi: $y = f(x)$ funktsiyasınin`  $x_0$  noqatdag`i tuwindisi iymek siziqqa x_0 abstsissali noqatta ju`rgizilgen urinbanin` Ox ko`sherinin` on` bag`iti menen payda etken mu`yeshinin` tangensine ten`.

Tuwindinin` mexanikalıq mag`inasi. Materialliq noqattin` tezligi onin` qozg`alis nizaminan (joldan) aling`an tuwindig`a ten`.

Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatında shekli tuwindig`a iye, yag`niy $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ shekli san bolsa, onda bul funktsiya usi noqatta tuwindig`a iye delinedi.

Eger $y = f(x)$ funktsiya (a, b) intervaldin` ha`r bir noqatinda tuwindig`a iye bolsa, onda bul funktsiya usi intervalda tuwindig`a iye delinedi.

Eger $y = f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesindinin` ha`r bir ishki noqatinda differentsiallaniwshi ha`m shekli bir ta`repleme $f'_+(a)$ ha`m  $f'_-(b)$  tuwindilari bar bolsa, onda bul funktsiya usi kesindide tuwindig`a iye delinedi.

Tuwindig`a iye bolg`an funktsiyalardin` qa`siyetleri:

1. Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqatinda differentsiallaniwshi bolsa, onda ol usi noqatta u`zliksiz dep ataladi.

Keri uyg`arim uliwma alg`anda duris emes: bazi bir noqatta u`zliksiz biraq sol noqatta tuwindig`a iye bolmag`an funktsiyalar bar.

Misali, $|\sin x|$ funktsiyasi $x = k\pi$, $k \in Z$ noqatlarinda; $|x|$ funktsiyasi $x=0$ noqatinda u`zliksiz, biraq tuwindig`a iye emes. Haqiqatinda da,

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

funktsiyasi $x=0$ noqatinda u`zliksiz, al  $x=0$  noqatindag`i shep jaq ha`m on` jaq tuwindilari ten` emes:  $f'_-(0) = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$ ,  $f'_+(0) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ ,  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ , yag`niy bul funktsiya $x=0$ noqatinda tuwindig`a iye emes.

2. Turaqlinin` tuwindisi nolge ten`: $C' = 0$.

3. Eger $u = u(x)$ ha`m  $v = v(x)$  funktsiyalari  $x_0$  noqatinda differentsiallaniwshi bolsa, onda olardin` algebraliq qosindisi, ko`beymesi ha`m bo`lindisi (bo`limi nolge ten` bolmag`an jag`dayda) usi noqatta differentsiallaniwshi boladi:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'; (u \cdot v)' = u'v + uv'; \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

3.1. (Saldari). Turaqli ko`beytiwshini tuwindi belgisinin` aldina shig`ariw mu`mkin.

4. (Quramali funktsiya tuwindisi). Eger $y = f(u)$ ha`m  $u = \varphi(x)$  differentsiallaniwshi funktsiyalar bolsin. Quramali  $y = f(u)$  funktsiyanin` g`a`rezsiz o`zgeriwshi  $x$  boyinsha tuwindisi usi funktsiyanin` araliq argument boyinsha tuwindisinin` araliq argumenttin` g`a`rezsiz o`zgeriwshi  $x$  boyinsha tuwindisina ko`beymesine ten`, yag`niy $y'_x = y'_u(u)u'_x(x)$.

5. (Keri funktsiya tuwindisi). Eger $y = f(x)$ funktsiya x_0 noqattin` bazi bir do`gereginde monotonli, u`zliksiz, differentsiallaniwshi ha`m $f(x_0) \neq 0$ bolsa,

onda og'an keri $x = \varphi(y)$ funktsiya $y_0 = f(x_0)$ noqatta differentsiallaniwshi, yag'niy $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ tuwindig'a iye boladi.

6. (Parametrik ko'riniste berilgen funktsiya tuwindisi). Eger funktsiya $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ parametrik ko'rinisinde berilgen bolsa, onda onin' tuwindisi $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ formulasi menen tabiladi.

Tuwindilar tablitsasi. Meyli $u = u(x)$ ha'm $v = v(x)$ funktsiyalari differentsiallaniwshi funktsiyalar bolsin.

$$1. C' = 0, C = \text{const}$$

$$2. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u', \alpha = \text{const}$$

$$2.1. x' = 1, x\text{-argument}$$

$$2.2. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} u'$$

$$2.3. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} u'$$

$$3. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u', a = \text{const}, a > 0, a \neq 0 \quad 3.1. (e^u)' = e^u \cdot u', (e^x)' = e^x$$

$$4. (u^v)' = v u^{v-1} u' + u^v \ln u \cdot v'$$

$$5. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u', a = \text{const}, a > 0 (a \neq 0) \quad 5.1. (\ln u)' = \frac{1}{u} u'$$

$$6. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$8. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$9. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$$

$$12. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$$

$$13. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$$

$$14. (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'; \operatorname{sh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$$

$$15. (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'; \operatorname{ch} u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$$

7-LEKCIYA

Dáslepki funkciya. Aniq emes integral anıqlaması, qásiyetleri. Integrallaw kestesı. Aniq integral, onıń geometriyalıq mánisi, qásiyetleri. Nyuton-Leybnic formulası. Aniq integraldı esaplaw usılları. Aniq integraldıń qollanıwları

Reje:

1. Da'slepki funktsiya.
2. Aniq emes integral, onın' qasıyetleri

3. O`zgeriwshilerdi almasterıw
4. Bo`leklep integrallaw

Differentsial esaplawdın' tiykarg'ı ma'selesi berilgen funksiyanın' differentsialın yaqi onın' tuwındısın tabıwdan ibarat edi. Sonın' menen bir qatarda usı ma'selege keri — tuwındısı boyınsha funksiyanın' o'zin tabıw ma'selesi de qarastırıladı. Tuwındısı boyınsha funksiyanın' o'zin tabıw a'meli integrallaw, al matematikanın' usı ma'sele menen shug'ıllanatug'ın bo'limi integral esaplawı dep ataladı. Integrallaw berilgen tuwındısı boyınsha funksiyanın' o'zin tabıw a'meli bolıp, bunda $F^1(x)=f(x)$ bolatug'ın $F(x)$ funksiyanı tabıw tiyis boladı.

Da'slepki funksiya integral esaplawdın' tiykarg'ı tu'siniklerinen biri esaplanadı.

Anıqlama. Bazı bir aralıqta berilgen $F(x)$ funksiya ushın, eger $F^1(x)=f(x)$ orınlı bolsa, onda ol usı aralıqta berilgen $f(x)$ funksiyanın' *da'slepki funksiya* delinedi.

Mısalı, $F(x)=x^3$ funksiya ushın $f(x)=x^4/4$, al $F(x)=\sin x$ funksiya ushın $f(x)=\cos x$ funksiya da'slepki funksiya boladı. Sebebi $(\cos x)^1=\sin x$.

Da'slepki funksiya bul funksiya ushın tek birew emesligin ko'riwge boladı: $(\cos x+5)^1=\sin x$, $(\cos x+7)^1=\sin x$, yag'nıy ha'r qanday san qosılǵ'anda da olar da'slepki funksiya boladı eken. Sonda da'slepki funksiya sanı sheksiz ko'p sanda bolatug'ının ko'riwge boladı. $F(x)=\sin x$ funksiya ushın $f(x)=\cos x+C$ da'slepki funksiya ko'pligi boladı, C — turaqlı san.

Anıqlama. Eger $F(x)$ $f(x)$ funksiya ushın da'slepki funksiya bolsa, onda barlıq da'slepki funksiya ko'pligi $f(x)$ funksiyanın' *anıq emes integralı* delinedi ha'm $\int f(x)dx=F(x)+C$ dep belgilenedi.

Bunda $\int$ — integral belgisi, $f(x)$ — integral astındag'ı funksiya, $f(x)dx$ — integral astındag'ı an'latpa, C — integrallaw turaqlısı delinedi.

Anıq emes integral qa'siyetleri

Teorema. Anıq emes integraldan alıng'an differentsial integral astındag'ı an'latpag'a, al tuwındısı integral astındag'ı funksiya a ten'

$$d(\int f(x)dx)=f(x)dx, (\int f(x)dx)^1=f(x)$$

bolatug'ının ko'rsetiw kerek.

Anıqlaması boyınsha

$$\int f(x)dx=F(x)+C, F^1(x)=f(x).$$

Onda

$$(\int f(x)dx)^1=(F(x)+C)^1=F^1(x)+0=f(x).$$

$$d(\int f(x)dx)=(\int f(x)dx)^1dx=f(x)dx.$$

Turaqlı sandı integral belgisinen shıǵ'arıp jazıwǵ'a boladı:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Shekli sandag'ı anıq emes integrallardın' qosındısı qosılıwshılardın' anıq emes integrallarının' qosındısına ten':

$$\int (f(x) + g(x) - h(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx.$$

İntegral astındag'ı funksiyaalar ushın $F(x)$, $G(x)$ ha'm $H(x)$ lar sa'ykes halda da'slepki funksiyaalar bolsa, onda $F^1(x) = f(x)$, $G^1(x) = g(x)$ ha'm $H^1(x) = h(x)$ orınlı boladı. Onda

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx = (F(x) + C) + (G(x) + C) - (H(x) + C) = F(x) + G(x) - H(x) + C.$$

Al $F(x) + G(x) - H(x)$ funksiya $f(x) + g(x) - h(x)$ funksiyaası ushın da'slepki funksiya bolıp tabıladı. Demek $\int (f(x) + g(x) - h(x)) dx = F(x) + G(x) - H(x) + C$. Bunnan da'llilew kerek bolg'an ten'lik kelip shıg'adı.

Anıq emes integral kestesı

$$\begin{array}{ll} 1) \int dx = x + c; & 11) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c \\ 2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1); & 12) \int tgx dx = -\ln|\cos x| + c \\ 3) \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c; & 13) \int ctgx dx = \ln|\sin x| + c \\ 4) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c & 14) \int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + c \\ 5) \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + c & 15) \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + c \\ 6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c & 16) \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c \\ 7) \int e^x dx = e^x + c & 17) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \\ 8) \int \sin x dx = -\cos x + c & 18) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c \\ 9) \int \cos x dx = \sin x + c & 19) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c \\ 10) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c & \end{array}$$

İntegrallaw usılları

Ha'r qanday integraldı esaplaw ushın belgili bir usıllardı qollanıp, onı kestege keltiriw za'ru'r boladı. Sonlıqtan integrallawdın' ayırım usılları haqqında aytıp o'temiz.

Tarqatıw usılı

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

Bunda integral astındag'ı an'latpanı kestege tikkeley sa'ykes keletug'ınday etip bo'leklep alıwg'a ayırıqsha itibar beriliwi tiyis.

O'zgeriwshilerdi almastırıw usılı

Bul usıldı mısaldı ko'rip o'temiz.

Mısal. $\int x\sqrt{x-5}dx$. $\sqrt{x-5} = z$ dep belgilep alıw menen korennen qutılıw mu'mkin. $x-5=z^2$, $x=z^2+5$. $dx=2zdz$. Bul tabılǵ'an ma'nislerin ornına qoyıp jazıp, tarqatıw usılınan da paydalanıp integraldı esaplaymız.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-5}dx &= \int (z^2+5)z2zdz = \int (2z^4+10z^2)dz = 2\int z^4dz + 10\int z^2dz = 2z^5/5 + 10z^3/3 + C = \\ &= 2/5(x-5)^{5/2} + 10/3(x-5)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

Bo'leklep integrallaw

Ko'beymenin' differentsialın jazamız.

$$d(zv) = zdv + vdz \text{ bunnan } zdv = d(zv) - vdz.$$

An'latpanı integrallap $\int zdv = \int d(zv) - \int vdz$, $\int zdv = (zv) - \int vdz$ ekenligin jaza alamız.

Bul son'g'ı formula bo'leklep integrallaw formulası delinedi.

Bul usıl arqalı $\int zdv$ nın' ornına onnan a'dewir an'sat bolg'an $\int vdz$ integralın esaplawg'a keltiriledi.

$$\text{Mısal. } \int x \cos x dx$$

$z=x$, $dv=\cos x dx$ dep bo'leklep alamız. $dz=dx$, $v=\int \cos x dx = \sin x$ ekenligin tabamız. Sonda berilgen integral

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \cos x dx = x \sin x - \sin x + C.$$

Integrallaw esaplawında berilgen integraldın' ko'rinisi, quramalılıǵ'ı ha'm ma'selenin'

mazmunına qarap integrallawdın' basqa usılları da qollanılatus'ının esletip o'temiz

Tema: Anıq integral tu'sinigine keltiriletug'ın ma'seleler. Anıq integral anıqlaması, qa'siyetleri. Integrallanıwshı funktsiyalar klassı. N'yuton-Leybnits formulası

Reje:

1. Anıq integral tu'sinigine keltiriletug'ın ma'seleler.
2. Anıq integral anıqlaması, qa'siyetleri.
3. Integrallanıwshı funktsiyalar klassı.
4. N'yuton-Leybnits formulası

$[a, b]$ ni $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ tochkalar ja'rdeminde n bo'lekke bo'lemiz ha'm ha'r bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentte qa'legen ξ_k tochka alamiz ($k=0, 1, \dots, n-1$).

Eger ha'r bir $[x_k, x_{k+1}]$ segmentte $f(x)$ funktsiyani turaqli dep esaplasaq, onda aABb figuranin` maydani juwıq tu`rde

$$S \approx f(\xi_0)(x_1 - x_0) + f(\xi_1)(x_2 - x_1) + \dots + f(\xi_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \quad (g')$$

shamasi menen aniqlanadi.

Endi $[a, b]$ segmenttin` bo`lekler sanin ha'r bir segment uzunlig`i  $\Delta x_k$  - nol`ge umtilatug`in etip arttirayiq. Onda (g`) an`latpa izlengen maydandi anig`iraq beredi.

Bul keltirilgen eki misalda da, du`zilgen qosindinin` ma`nisleri sa`ykes turde o`tilgen jol yamasa iymek sızıqli trapetsiyanin` maydanin anig`iraq tu`rde беретug`inin ko`rdik. Bunday qosindilardin` shegi aniq integral tu`sinigine alıp keledi.

2. Aniq interaldin` aniqlaması.

Aniqlama 1. Egerde

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b \quad (n \in \infty)$$

bolatug`in-  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tochkalar berilgen bolsa, onda  $[a, b]$  segmenttin` bo`liniwi berilgen delinedi.  $[a, b]$  segmenttin` bo`liniwin $\{x_k\}$ arqali belgileyemiz.

Aniqlama 2. Egerde $\{x_k\}$ - bo`liniwinin` ha`rbir  $x_p$  tochkasi  $x'_k$  bo`liniwinin` tochkalarinn` biri x'_q penen ustpe - ust tusse, onda $[a, b]$ segmenttin`-  $\{x'_k\}$  bo`liniwi usi segmenttin`-  $\{x_k\}$  bo`liniwinin` maydalaniwi delinedi.

Aniqlama 3. Egerde $[a, b]$ segmenttin`-  $\{x'_k\}$  ha`m- $\{x''_k\}$ bo`liniwinin` barliq tochkalari usi segmenttin`-  $\{x_k\}$  bo`liniwinin` de tochkalari bolsa ha`m $\{x_k\}$ - bo`liniwi basqa tochkalarg`a iye bolmasa, onda $\{x_k\}$ - bo`liniwi  $\{x'_k\}$  ha`m $\{x''_k\}$ - bo`liniwlerinin` qosindisi delinedi.

$[a, b]$ segmenttin` berilgen  $\{x_k\}$ - bo`liniwi boyinsha «integral qosindi» dep atalatug`in sandi duzemiz:

$\sigma(x_k; \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, bunda ξ_k - $[x_{k-1}, x_k]$ segmenttin` bazibir tochkasi.

Integral qosindi $\{x_k\}$ bo`liniwge ha`m $[x_{k-1}, x_k]$ segmentlerdegi ξ_k tochkalarinin` saylap aliniwina baylanisli boladi.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ dep belgilesek, onda integral qosindi to`mendegishe jaziladi

$$\sigma(x_k; \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

A`dette, $[x_{k-1}, x_k]$ - dara segment, ξ_k araliq tochkalar dep ataladi.

$d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ sanin (yag`niy en` u`lken dara segment uzunlig`in) $\{x_k\}$ bo`liniwdin` diametri dep ataymiz.

Aniqlama n`. Egerde  $\forall \varepsilon > 0$  ushin  $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$  tabilip,  $\xi_k$  araliq tochkalardin` saylap aliniwina g`a`rezsiz tu`rde  $d < \delta$  sha`rtinen

$$|I - \delta| < \varepsilon$$

ten'sizlik kelip shiqsa, onda I sani $\sigma(x_k, \xi_k)$ integral qosindilardin` d nol`ge umtilg`andag`i shegi dep ataladi:

$$I = \lim \sigma(x_k, \xi_k)$$

Aniqlama o`. Egerde d nol`ge umtilg`anda  $\sigma$  integral qosindilardin` shegi I bar bolsa, onda $f(x)$ funktsiyasi $[a,b]$ segmentte integrallaniwshi (Riman ma`nisinde) dep ataladi.

I sani $f(x)$ funktsiyadan $[a,b]$ segment boyinsha aling`an aniq integral delinedi ha`m

$$\int_a^b f(x) dx$$

dep belgilenedi.

a) Meyli $f(x)$ ha`m  $g(x)$  funktsiyalar  $[a,b]$  segmentte integrallaniwshi bolsin. Onda  $f(x) \pm g(x)$  funktsiyalari da usi segmentte integrallaniwshi, ja`ne de

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

b) Eger $f(x)$ - funktsiyasi $[a,b]$ segmentte integrallaniwshi bolsa, onda $c \cdot f(x)$ funktsiyasi da ($c \in \mathbb{R}$)- usi segmentte integrallaniwshi boladi, ja`ne de

$$\int_a^b [c \cdot f(x)] dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

v) Meyli $f(x)$ ha`m $g(x)$ funktsiyalari $[a,b]$ segmentte integrallaniwshi bolsin. Onda $f(x) \cdot g(x)$ - funktsiyasi da usi segmentte integrallaniwshi boladi.

g) Meyli $f(x)$ funktsiyasi $[a,b]$ segmentte integrallaniwshi bolsin. Onda bul funktsiya $[a,b]$ segmentinde jaylasqan qa`legen $[c,d]$ segmentte integrallaniwshi boladi.

Aniqlama boyinsha $\int_a^a f(x) dx = 0$ sonday-aq- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ dep qabil etemiz.

d) Eger $f(x)$ funktsiya $[a,c]$ ha`m  $[c,b]$  segmentlerde integrallaniwshi bolsa, onda  $f(x)$  funktsiya  $[a,b]$  segmentte integrallaniwshi boladi, ja`ne de

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Aniq integraldi esaplaw usillari

1. O`zgeriwshini almastiriw.

Meyli $x=g(t)$ funktsiya $[m,M]$ segmentte u`zliksiz tuwindig`a iye ha`m  $\min_{t \in [m,M]} g(t) = a$ , ja`ne de $g(m)=a$, $g(M)=b$ bolsin. Eger $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ segmentte u`zliksiz bolsa, onda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_m^M f[g(t)] g'(x) dt$$

formula orinli boladi. Bul formula aniq integral belgisi astinda o`zgeriwshini almastiriw formulasi delinedi.

Misallar.

a`)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$  integralin esaplan`.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x} dx$$

$5=5gx$ dep alamiz. Sonda - $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$, $x \rightarrow 0$ de $5 \rightarrow 0$, al $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ de $5 \rightarrow a$.

Demek

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^4 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

2. Bo`lekkep integrallaw.

Meyli $u(x)$ ha`m  $v(x)$  funktsiyalari  $[a, b]$  segmentte u`zliksiz tuwindilarg`i iye bolsin. Onda

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x) dx$$

formulasi orinli. Bul formula a`dette

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

ko`rinishinde jaziladi.

Misallar.

a`)  $\int_1^2 \ln x dx$  integralin esaplan`.

Eger $u(x) = \ln x$, $dv = dx$ dep alinsa, onda $du = \frac{1}{x} dx$ $v = x$ bolip joqardag`i formula boyinsha

$$\int_1^2 \ln x dx = x \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 x \cdot \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \int_1^2 dx = 2 \ln 2 - 1$$

Bekkemlew ushın sorawlar.

1. Da`slepki funktsiya aniqlaması.
2. Anıq emes integral aniqlaması.
3. Anıq integraldın geometriyalıq ma`nisi.
4. N`yuton-Leybnits formulası

8-LEKCIYA

Kombinatorikanın tiykargı qaqıydaları hám formulaları: qosıw hám kóbeytiw qaqıydaları, orın almasıwlar, ornalamasıwlar, birikpeler. Tosınanlı waqıya. Itimallıq túsini. Itimallıqlardı esaplaw usılları. Tosınanlı shama. Bólistriw funkciyasi hám nızamı túsini.

Reje:

1. Kombinatorika elementleri
2. Itimallıqlar teoriyasının tiykargı tu`sinikleri
3. Itimallıqtın anıqlaması.
4. Bayes formulası
5. Tosınanlıq shamalar.

Kombinatorika elementleri

Itimallıqlardı tuwrıdan-tuwrı esaplawda ko`binese kombinatorika formulalarınan paydalanıladı.

1-Anıqlama: *Orın almastırıw* dep n tu`rli elementlerdin` bir-birinen rek g`ana jaylasıwı menen parıqlanıwshı kombinatsiyalarg`a aytıladı. n tu`rli elementlerdin` orın almastırıwlar sanı $P_n = n!$ ge ten` ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

2-Anıqlama: *Ornalamasıwlar* n tu`rli elementten  $m$  nen du`zilgen kombinatsiyalar bolıp, olar bir-birinen elementlerdin` quramı, yamasa olardıń ta`rtibi menen parıqlanadı. Olardıń sanı $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ yaki

$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)$ formula menen tabıladı.

3-Anıqlama: *Gruppalaw* bir-birinen hesh bolmag`anda, bir elementi menen parıqlanıwshı  $n$  elementten  $m$  nen du`zilgen kombinatsiyalar. Olardıń sanı

$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ ge ten`.

3-mısal. Akademiyalıq litsey talabalarınń bir gruppasınan 3 oqıtıwshıdan ibarat komissiya inglis tili pa`ninen imtihan alıwı kerek. Akademiyalıq litseyde 5 ingilis tili o`qıtıwshısı bolsa, komissiyanı neshe usıl menen du`ziw mu`mkin.

Sheshimi: bunda 5 elementten 3 elementli gruppalaw sanın tabamız, bul C_5^3 ke ten`. Bunın` ushın $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ formuladan paydalanamız

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Kombinatorikag`a tiyisli mısallar keltiremiz.

4-mısal. Toparda 14 talaba bolıp, olardıń segizi ag'la talabalar. Dizim boyınsha ta'wekelge 10 talaba tan'lap alındı. Tan'lap alıng'anlar ishinde 6 talaba ag'la talaba bolıw itimallıg'ın tabıń.

Sheshimi. Ta'jiriybenin' barlıq mu'mkin bolg'an ten' imkaniyatlı elementar ha'diyseler sanı C_{14}^{10} ke ten'. Bulardıń ishinen $C_8^6 \cdot C_6^4$ tan'lap alıng'an talabalar ishinen altawı ag'la talabalar ha'diysesi (A) ushın qolaylıq tuwdıradı. Sonın' ushın

$$P(A) = \frac{C_8^6 \cdot C_6^4}{C_{14}^{10}} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2}}{\frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 13 \cdot 11} = \frac{60}{143}$$

5-Mısal. Kiril a'lippesinin' 9 ha'ribinen "filologiya" so'zi du'zilgen. Bul ha'ripler tosattan shashılıp ketken ha'm qayta ıqtıyary ta'rtipte jıynalg'an. Ja'ne "filologiya" so'zi payda bolıw itimallıg'ın tabıń.

Sheshimi: A-"filologiya" so'zi payda boldı ha'diysesi. Ten' imkaniyatlı mu'mkin bolg'an elementar ha'diyseler sanı $n=10!$ bolıp, A ha'diysese qolaylıq jaratıwshılar $m=2!2!2!$ boladı. Bul jerde filologiya so'zinde "i" 2 ma'rte, "o" 2 ma'rte, "l" 2 ma'rte ta'kirarlanıwı esapqa alınadı.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2!2!2!}{10!} = \frac{1}{453600};$$

6-Mısal. Telefonda nomer terip atırg'an abonent aqırg'ı u'sh tsifrın esten shıg'arıb qoyadı ha'm tek g'ana bul tsifrlar ha'r tu'rli ekenin eslep qalg'an halda olardı ta'wekelge terdi. Kerekli tsifrlar terilgenligi itimallıg'ın tabıń.

Sheshimi: A – u'sh kerekli tsifr terilgenlik ha'diysesi bolsın. Hammesi bolıp, 10 tsifrdan 3 den neshe ornalastırıwlar du'ziw mu'mkin bolsa, sonsha, yag'nıy $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ ret tu'rli tsifrlardı teriw mu'mkin. Sonın' ushın klassikalıq itimallıqqa ko're

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^3} = \frac{1}{720}$$

5. Itimallıqlardı qosıw teoreması.

Anıqlama. A ha'm B ha'diyseler qosındısı dep bul ha'diyselerden keminde birewinin' ju'z beriwinn ibarat bolg'an C ha'diysese aytiladı. Biz birgelikte bolmag'an A ha'm B ha'diyseler qosındısının' itimallıg'ın qaraymız. $P(A)$ ha'm $P(B)$ sa'ykes tu'rde olardıń itimallıqları bolsın.

1-Teorema. Eki birgelikte bolmag'an A ha'm B ha'diyseler qosındısının' itimallıg'ı sol ha'diyseler itimallıqlarının' qosındısına ten':

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Da`lilleniwi: Ha`diyse itimallıg`ının` klassikalıq anıqlamasına ko`re, aytayıq, ta`jiriybeler na`tiyjesi  $n$  elementar ha`diyseler bolıp, bulardan m_1 i A ha`diysege,  $m_2$  si bolsa  $B$  ha`diyseni ju`z beriwine qolaylıq tuwdırsın. Onda

$$P(A) = \frac{m_1}{n}; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} \quad (2)$$

boladı.

Teorema sha`rtine ko`ra A ha`m  $B$  ha`diyseler birgelikte emes. Sog`an ko`re ya A ha`diyse, yamasa  $B$  ha`diyse ju`z beriwine qolaylıq tuwdırıwshı ha`diyseler sanı $m_1 + m_2$ ge ten`.

Demek $A+B$ ha`diysenin` itimallıg`ı $P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n}$ boladı.

Eger $P(A+B) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n}$ bolsa, onda (2) ge tiykarlanıp to`mendegige iye bolamız.

$$P(A+B) = P(A) + P(B);$$

Na`tiyje.  $A$  ha`diysege qarama-qarsı $\bar{A}$ ha`diysenin` itimallıg`ı

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (3)$$

ge ten`.

7-mısal. Qutıda 25 shar bar. Olardan 8 i qızıl, 6 wı aq, 11 i sarı. Ta`wekeline aling`an shardın` ren`li shar bolıw itimallıg`ın tabın`. (Ren`li shar shıqıwı degende ya qızıl shar yamasa sarı shar shıg`ıwı tu`siniledi).

Sheshimi. Qızıl shar shıg`ıw ha`diysesin A , sarı shar shıg`ıw ha`diysesin B menen belgileyik. Onda itimallıqtın` klassikalıq anıqlamasına tiykarlanıp $P(A) = \frac{8}{25}$

; $P(B) = \frac{11}{25}$ boladı. $A+B$ ha`diyse ren`li shar shıg`ıw ha`diyesi A ha`m  $B$  ha`diyseler birgelikte emes. Sonın` ushın 1-teoremag`a ko`re $P(A+B) = P(A) + P(B)$;

Demek, izlengen itimallıq: $P(A+B) = \frac{8}{25} + \frac{11}{25} = \frac{19}{25}$;

2-Teorema. Jup-jubı menen birgalikte bolmag`an  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ha`diyselar ushın $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ qatnas orınlı.

Eger $A_1, A_2, \dots, A_n$ ha`diyseler, ha`diyselerdin` tolıq gruppasın payda etse, onda $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$ boladı.

Endi birgelikte bolg`an ha`diyseler ushın qo`sıw teoremasın qaraymız (eki ha`diysenin` birewinin` ju`z beriwı einshisinin` ju`z beriwın inkar etpeytug`ın ha`diyseler).

3-Teorema. Eki birgelike bolg`an  $A$  ha`m B ha`diyseden hesh bolmag`anda birewinin` ju`z beriw itimallıg`ı ha`diyseler itimallıqları qosındısınan olardıń birgelikte ju`z beriw ha`diyesi itimallıg`ının` ayırmasına ten` boladı.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

Bul teorema ekewden artıq ha'diyseler ushın da orınlı. (Teoremani da'lillew talabalarg'a o'z betinshe jumıs sıpatında tapsırıladı).

8-mısal. Eki mergen birewden oq atadı. Birinshi mergennin` nıshang'a tiygiziw (A ha'diyse) itimallıg'ı 0,8 ge, ekinshisiniki (B ha'diyse) 0,9 g'a ten` bolsa, mergenlerdin` hesh bolmag`anda birewinin` nıshang'a tiygizgenlik itimallıg'ı tabılsın.

Sheshimi. Ma`sele sha`rtine tiykarlanıp $P(A)=0,8$, $P(B)=0,9$. Birgelikte bolg`an ha'diyseler ushın itimallıqlardı qosıw teoremasına tiykarlanıp

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 1,7 - 0,72 = 0,98$$

İtimallıqlar teoriyasi tosinnanli qubislardag'i (ha'diyselerdegi) nizamlıqlardı izertlewshi matematikaliq ilim bolip tabiladi.

İtimallıqlar teoriyasinin` tiykarg'i tu`siniklerinen biri tosinnanli waqiya tu`sinigi bolip tabiladi.

Tosinnanli ha'diyse (waqiya) degende sinaw yamasa ta`jiriybe na'tiyjesinde ju`zege asiwi yaki aspawı mu`mkin bolg`an ha`r qanday waqiyani tu`sinemiz.

Sinaw yamasa ta`jiriybe dep anıq bir sha`rtler kompleksinin` orinlaniwin tu`sinemiz.

Waqiyanin` en` a`piwayi misali sipatında monetani taslawdin` na'tiyjesin qarawg'a boladi. Bul misalda monetani taslaw sinaw, al onin` na'tiyjesi waqiya bolip tabiladi. Bul berilgen sinawda eki waqiya qarastiriladi: «gerb» jag`inin` shig`iwi ha`m «tsifr» jag`inin` shig`iwi.

Ha`r qiyli fizikaliq ha`m texnikaliq ma`selelerdi ilimiy jaqtan izertlegende tosinnanli qubilislar dep ataliwshi ayriqsha tu`rdegi qubilislar menen ushirasiwg'a tuwra keledi.

Tosinnanli qubilis-bir sinawdi (ta`jiriybeni, eksperimentti) bir neshe ma`rte ta`kirarlag`anda ha`r eet ha`r qiyli o`tetug`in qubilis bolip tabiladi.

Misallar:

1. Bir deneni bir neshe ma`rte analitikaliq ta`rezide o`lshew.
2. Samolettin` berilgen biyiklikte ushiwi ha`m t.b.

İtimallıqlar teoriyasi ha`m matematikaliq statistika basqa matematikaliq ilimler siyaqli praktikanin` talabınan kelip shiqqan ha`m rawajlanbaqta.

Sinawg'a qoyilatug`in tiykarg'i sha`rt onin` mu`mkin bolatug`in na'tiyjesin ko`rsete biliwimizden ibarat. Biz sinawdin` na'tiyjesin waqiya dep tu`sinemiz.

Sinaw ju`rgizilgende mu`mkin bolatug`in na'tiyjelerdin` tek birewi g`ana ju`zege asiwin *elementar waqiya* deymiz ha`m oni  $\omega_i$  arqali belgileymiz. Elementar waqiyalar- jiklenbeytug`in waqiyalar, al sinaw na'tiyjesi tek bir g`ana elementar waqiya menen ko`rsetiledi.

Waqiyalardi latin alfavitinin` bas ha`ripleri A,B,,C,... ha`m t.b. menen belgideymiz.

Sinawdin` mu`mkin bolatug`in na`tiyjelerinin` ko`pligin, yag`niy barliq elementar waqiyalar ko`pligin *elementar waqiyalar ken`isligi* dep ataymiz.

Oni $\Omega=\{\omega\}=\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ arqali belgileymiz.

MA`selen, kubikti bir ma`rte taslag`anda jup nomerli ochkolar $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ waqiyasin quraydi.

Biz baqlaytug`in waqiyalardi minaday u`sh tu`rge bo`liw mu`mkin: Isenimli waqiyalar, mu`mkin emes waqiyalar ha`m tosinnanli waqiyalar.

Isenimli waqiya dep aniq bir S sha`rtler kompleksi (jiynag`i) orinlang`anda so`zsiz ju`zege asatug`in waqiyag`a aytiladi.

Ma`selen  $+20^0$  temperturada «idistag`i suw suyiq jag`dayinda boladi» degen isenimli waqiya. Bul jerde normal` atmosfera basimi ha`m suwdin` temperaturasi S sha`rtler kompleksin quraydi.

*Mu`mkin emes waqiya* dep S sha`rtler kompleksi orinlang`anda hesh waqitta ju`zege aspaytug`in waqiyag`a aytiladi.

Ma`selen, joqaridag`i misaldag`i sha`rtlerde «idistag`i suw muz jag`dayinda boladi» degen waqiya mu`mkin emes waqiya.

Tosinnanli waqiya dep S sha`rtler kompleksi (jiynag`i) orinlang`anda ju`zege asiwi da ju`zege aspawi da mu`mkin bolg`an waqiyag`a aytiladi.

Ma`selen monetani taslag`anda «gerb» jag`inin` shig`iwi-tosinnanli waqiya.

Ha`r bir tosinnanli waqiya, dara jag`dayda gerb jag`inin` shig`iwi ko`p g`ana tosinnanli sebeplerge baylanisli (ma`selen, monetanin` qanday ku`sh penen taslang`anina, monetanin` formasina ha`m t.b.)

Endi waqiyalarg`a baylanisli bazi bir tu`siniklerdi kiriteyik.

Bir neshe waqiyalar berilgen sinawda waqiyalardin` toliq gruppasin hasil etedi dep aytiladi, eger de sinaw na`tiyjesinde bul waqiyalardan en` bolmag`anda birewi so`zsiz ju`zege assa.

Bir neshshe waqiyalar berilgen sinawda birgeliksiz delinedi, eger de olardin` qa`legen ekewi bir waqitta ju`zege aspasa.

Bir neshshe waqiyalar berilgen sinawda ten`dey imkaniyatli delinedi, eger de bul waqiyalardin` hesh biri qalg`an basqalarina salistirg`anda ju`zege asiwi artiqmash dep qarawg`a tiykar bolmasa.

Misallar:

1.Monetani taslag`anda «gerb» yaki «tsifr» kelip shig`iwi.

2.Kubikti taslag`anda 1,2,3,4,5,6 ochkolarinin` kelip shig`iwi h.t.b.

Waqiyalar u`stinde a`meller

Waqiyalar u`stinde a`meller ko`plikler u`stindegi a`meller siyaqli aniqlanadi.

1) A ha'm V waqiyalarinin` qosindisi dep, bul waqiyalardin` en` keminde birewine derek bolg`an elementar waqiyalardan du`zilgen waqiyalarg`a aytiladi. Oni $A+V$ yamasa $A\cup V$ arqali belgileydi.

Solay etip, waqiyalardin` qosindisi degende yaki A waqiyasi yaki V waqiyasi, yaki A ha'm V ekewi de ju`zege asatug`in waqiyani tu`sinemiz.

Ma`selen, nishanag`a eki ma`rte oq atilg`an bolip, A waqiyasi birinshi ma`rte atqanda tiyiwdi, B waqiyasi ekinshi ma`rte atqanda tiyiwdi an`latsin. Onda  $A+B$  waqiyasi yaki birinshi ma`rte atqanda, yaki ekinshi ma`rte atqanda, yaki ekewinde de tiyiwdi an`latadi.

Bir neshe waqiyalardin` qosindisi dep, bul waqiyalardin` en` keminde birewi ju`zege asatug`in waqiyag`a aytiladi.

2) A ha'm V waqiyalarinin` ko`beymesi dep, bir waqittin` o`zinde ha'm A ha'm V g`a derek bolg`an elementar waqiyalardan du`zilgen waqiyag`a aytiladi. Oni $A\cdot V$ yamasa $A\cap V$ arqali belgileydi.

Demek, waqiyalardin` ko`beymesi degende ha'm A waqiyasi ha'm B waqiyasi ekewinin` de bir waqitta ju`zege asiwin tu`sinemiz.

Ma`selen, yashikte №1 ha'm №2 zavodlarda tayarlang`an detallar bolip, A waqiyasi standart detaldin` shig`iwin, B waqiyasi detaldin` №1 zavodta tayarlang`anin bildirse, onda $A\cdot V$ waqiyasi №1 zavodtin` standart detalinin` shig`iwin bildiredi.

Bir neshe waqiyalardin` ko`beymesi dep, bul waqiyalardin` barlig`inin` birgelikte ju`zege asiwin bildiretug`in waqiyag`a aytiladi.

3) A ha'm V waqiyalarinin` ayirmasi dep, A g`a derek, al V g`a derek bolmag`an elementar waqiyalardan du`zilgen waqiyag`a aytiladi. Oni $A-V$ yamasa $A\setminus V$ arqali belgileydi.

Demek $A-V$ waqiyasi A waqiyasinin` ju`zege asip, B waqiyasinin` ju`zege aspawin bildiredi.

Barliq elementar waqiyalar ko`pligi yag`niy Ω waqiyasi *isenimli waqiya*, al bir de elementke iye bolmag`an  $\emptyset$  bos ko`pligi *mu`mkin emes waqiya* dep ataladi.

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ waqiyasi A waqiyasina qarama-qarsi waqiya dep ataladi. $\bar{A}$ waqiyasi waqiyasinin` ju`zege aspawin bildiredi.

MA`selen, eger de A waqiyasi nishanag`a tiyiwdi bildirse, onda $\bar{A}$ waqiyasi nishanag`a tiymewdi bildiredi.

Qarama-qarsi waqiyalardin` qosindisi isenimli waqiya, al ko`beymesi mu`mkin emes waqiya boladi:

$$A + \bar{A} = \Omega, \quad A \cdot \bar{A} = \emptyset.$$

Eger de $A \cdot V = \emptyset$ bolsa, onda A ha'm V waqiyalari birgeliksiz dep ataladi.

Eger de A waqiyasi ju'zege asqanda V waqiyasi da so'zsiz ju'zege assa, onda A nin' ju'zege asiwi V nin' ju'zege asiwin ta'miynleydi yamasa V waqisi A waqiyasinin' saldari dep ataladi ha'm oni $V \subset A$ arqali belgileydi.

Eger de $A \subset V$ ha'm $V \subset A$ bolsa, onda A ha'm V waqiyalari ten' ku'shli yamasa ekvivalent waqiyalar dep ataladi. Oni $A=V$ dep belgileydi.

Waqiyalardin' qosindisi ha'm ko'beymesinin' aniqlamalarinan tikkeley to'mendegi ten'liklerdin' durislig'i kelip shig'adi:

$$A+A=A$$

$$A \cdot A=A$$

Eger ha'm $V \subset A$ bolsa, onda

$$A+V=A$$

$$A \cdot V=V$$

Aniqlama. A waqiyasinin' itimallig'i dep, A g'a derek elementar waqiyalar saninin' sinawdag'i uliwma elementar waqiyalar sanina qatnasina aytiladi.

Tosinnanli shama dep sinaw na'tiyjesinde a'welden belgisiz anaw yamasa minaw ma'nisti qabil etiw mu'mkin bolg'an shamag'a aytiladi.

Misallar:

1. U'sh ma'rtebe nishanag'a atqandag'i tiyiwler sani;
2. Jan'adan tuwilg'an 100 na'restenin' ishinde er balalar sani;
3. Bir sutka dawaminda telefon stantsiyasina kelip tu'sken shaqiriqlar sani.

Bul keltirilgen misallardin' u'shewinde de tosinnanli shamalarimiz sanap shig'iwg'a bolatug'in bo'lek-bo'lek ma'nislerdi qabil etedi. Bunday tosinnanli shamalarg'a *diskret* yamasa *u'zilikli* tosinnanli shamalar delinedi.

Basqa tu'rdegi tosinnanli shamalar da ushirasadi, ma'selen: 1.Deneni analitikaliq ta'rezide o'lshegendegi qa'telik;2.ushiw apparatinin' berilgen biyiklikke ko'terilgen momenttegi tezligi.

Bunday tosinnanli shamalardin' qabil etiw mu'mkin bolg'an ma'nisleri bazi-bir araliqti toltiradi. Bunday tosinnanli shamalarg'a u'zliksiz tosinnanli shamalar delinedi. Solay etip:

Diskret tosinnanli shama dep, onin' qabil etiw mu'mkin bolg'an ma'nislerin sanap shig'iw yamasa nomerlep shig'iw mu'mkin bolg'an shamag'a aytiladi.

U'zliksiz tosinnanli shama dep, onin' qabil etiw mu'mkin bolg'an ma'nisleri bazi bir shekli yamasa sheksiz araliqti u'zliksiz toltiratug'in sh aytiladi.

Tosinnanli shamalardi $\eta, \dots$ ha'ripleri menen, mu'mkin bolg'an ma'nislerin $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$ ha'ripleri menen belgileymiz. Ma'selen, eger de - u'sh ma'rte atqandag'i tiyiwler sanin an'latsa, onda onin' mu'mkin bolg'an ma'nisleri:

$$x_1=0; x_2=1; x_3=2; x_4=3$$

boladi.

Meyli diskret tosinnanli shaması berilgen bolip, ol $x_1, x_2, \dots, x_n$ ma`nislerden birewin qabillasın, yag`niy jup-juptan birgeliksiz waqiyalardin` toliq gruppasin jasaytug`in: (9.1)

waqiyalarinan birewi ju`zege assın. Bul waqiyalardin` itimalliqlarin sa`ykes indeksli p lar menen belgileyik: $P\{=x_1\}=p_1, P\{=x_2\}=p_2, \dots, P\{=x_n\}=p_n$.

Biregliksiz (9.1) waqiyalari, waqiyalardin` toliq gruppasin jasag`anliqtan

Bul qosindi itimalliq tosinnanli shamanin` ayrim  $x_i$  ma`nisleri boyınsha qanday da bir jollar mnen bo`listirilip, taratılıp turadi.

Tosinnanli shamanin` bo`listiriw nızami dep tosinnanli shamanin` ma`nisleri menen olarg`a sa`ykes itimallıqlardi baylanistiriwshi qa`dege aytiladi.

Tosinnanli shamag`a usi nızamg`a boysinadi dep ataymız. Bul nızam tablitsalıq, grafikalıq ha`m analitikalıq usıllarda beriliwi mu`mkin. Tablitsa usilinda berilgen jag`dayda tablitsanın` birinshi qatarına mu`mkin bolg`an ma`nisleri, al ekinshi qatarına olardin` sa`ykes itimallıqları jaziladi:

	x_1	x_2	x_3		x_n
P	p_1	p_2	p_3		p_n

Bunday tablitsag`a tosinnanli shamasinin` bo`listiriw qatarı delinedi.

Bo`listiriw qatarın anig`iraq ko`z aldimizg`a keltiriw ushin onin` grafigin sizg`an qolaylı boladi: Onin` ushin abstsissa ko`sheri boylap mu`mkin bolg`an ma`nislerin, ordinata ko`sheri boylap sa`ykes itimallıqlarin qoyip, kelip shıqqan noqatlardi siniq siziq penen tutastiriw kerek.

12-su`wret.

Bunday figurag`a bo`listiriliw ko`pmu`yeshligi dep ataladi.

Eger bo`listiriliw nızami formula menen berilse, og`an bo`listiriliw nızaminin` analitikalıq usılda beriliwi delinedi.

Binomliq bo`listiriliw. Bernulli formulasi

Praktikada sinawlar qaytalanıp, ta`kirarlanıp turadi.

Meyli bir neshshe sinawlar ju`rgizilgen bolip, ha`r bir sinawda A waqiyasinin` ju`zege asiw itimallig`in  $P(A)=p$ , ju`zege aspawinin` itimallig`in $P(\bar{A})=1-p=q$ dep belgileyik.

İzbe-iz o`tkerilgen eki g`a`rezsiz sinawdin` mu`mkin bolg`an na`tiyjelerin ko`reyik (1-tablitsa).

Sinawdin` na`tiyjeleri	AA	A $\bar{A}$	$\bar{A}A$	$\bar{A} \bar{A}$
İtimallıqlar	p^2	pq	Qp	q^2

1-tablitsa

$$p^2+2pq+q^2=(p+q)^2=1$$

Sinawlar sani, ma`selen u`shew bolg`anda da tap usilayinsha pikir ju`ritip, joqaridag`ig`a uqsas

$$p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=(p+q)^3=1$$

ekenligine iye bolamiz.

Endi ma`seleni uliwma tu`rde aniqlawg`a boladi.

Eger ha`r bir sinawda waqiyanın` ju`zege asig`i turaqli ha`m ol p g`a ten` bolsa, onda g`a`rezsiz n sinawlar ju`rgizgende usi waqiyanın` m ma`rte ju`zege asiw itimallig`i

formulasi menen esaplanadi.

Bul formulag`a Bernulli formulasi delinedi.

Ma`selen eger sinawimiz nishanag`a atiwdan ibarat bolip, A waqisi-nishanag`a tiyiwdi, -nishanag`a tiymewdi an`latsa, onda tosinnanli  $\xi$  shaması n ma`rte atqandag`i tiyiwlerdin` sanin bildirip, ol $0,1,2,\dots,n$ ma`nislerdi joqaridag`i itimalliqlar menen qabil etedi degen so`z.

Bernulli formulasin keltirip shig`ariw ushin n ret g`a`rezsiz sinawlar ju`rgizgende A waqiyasinin` da`l m ret ju`zege asiwinin` ha`m n-m ret aspawinin` barliq mu`mkin bolg`an izbe-izligin du`zeyik:

Bul izbe-izlik ag`zalarinin` bir-birinen ayirmashilig`i tek ornalasiw ta`rtibinde g`ana bolip tur, sonliqtan oni A waqiyasi m ret,  $\bar{A}$  waqiyasi n-m ret ta`kirarlanip almasadi dep qarawg`a boladi. Olardin` sani ge ten` bolg`anliqtan

Bundag`i  $P_n(0), P_n(1), \dots, P_n(n)$  itimalliqlarinin` izbe-izligi *binomliq bo`listiriliw* dep ataladi.

9-LEKCIYA

Matematiklıq modeller hám olardı qurıw prinsipleri. Kasiplik faoliyat tarawında matematikalıq usıllar

ALGORİTM TÚSINIGI

Algoritm túsinigi fundamental matematikalıq túsiniklerdiń biri bolıp, matematikanıń «Algoritm teoriiyası» dep atalıwshı bóliminiń obekti bolıp esaplanadı.

Algoritm – bul bazı bir protsessti anıq súwretlew hám onı orınlaw ushın kórsetpe bolıp esaplanadı.

«**Algoritm**» sózi IX ásirde jasağan Orta Aziyalı matematik Ál-Xorezmiydiń atın Evropa tillerine awdarma etiw nátiyjesinde kelip shıqqan. Ál-Xorezmiy arifmetikalıq ámellerdi orınlaw qádesin (algoritmin) kórsetip bergen.

Bul algoritmler házirgi waqıtta da mektep pratikasında isletilip kelinbekte. Algoritmlestiriwdiń wazıypası algoritmlerdi dúziwge (jazıwǵa) úyretiwden ibarat bolıp, orınlawshı (adam, robot, EEM) algoritmlerdi orınlaw qádesine súyengen halda bir ǵana nátiyjege erisiwi lazım. Bul bolsa algoritmlerdi jazıw qádesine bazı bir talaplar qoyadı. Bular tómendegi qásiyetler kórinisinde ańlatıladı.

1° *Anıqlıq qásiyeti.*

Algoritm kórsetpeleri bir mánili bolıwı zárúr. Algoritm orınlanatuǵın ámellerdiń zárúr izbe-izligin anıq belgilep beredi. Algoritmniń ámelge asıw protsesi konkret esapshıǵa baylanıslı bolmaydı.

2° *Ulıwmalıq qásiyeti.*

Algoritmniń baslanǵısh maǵlıwmatlardıń ruxsat etilgen qálegen mánislerinde jaramlı bolıwı zárúr.

3° *Nátiyelilik qásiyeti.*

İzlenip atırǵan nátiyjeni dáslepki maǵlıwmatlardıń ruxsat etilgen mánisleri ushın shekli sandaǵı jeterli túrde ápiwayı adımlardan soń alıwı múmkin bolıwı kerek.

Bir neshe ámeller keltirip óteyik:

1. $y = \frac{7x - 4}{5x + 3}$ ańlatpasınıń mánisin tabıń.

№	Ámellerdi orınlaw tártibi
1.	x ti 7 ge kóbeytiw
2.	(1) niń nátiyjesinen 4 ti alıw
3.	x ti 5 ke kóbeytiw
4.	(3) niń nátiyjesine 3 ti qosıw
5.	(2) niń nátiyjesin (4) tiń nátiyjesine bóliw

yamasa

№	Ámellerdi orınlaw tártibi
1.	$a := x * 7$
2.	$b := a - 4$
3.	$c := x * 5$
4.	$d := c + 3$
5.	$y := b : d$

2. Kesindini teń ekige bóliw (tsirkul' hám sızıǵısh járdeminde) algoritmi.

№	Háreketlerdi orınlaw tártibi
1.	Tsirkul'diń ushın A tochkaǵa qoyıw
2.	Tsirkul'diń ayaqların AB ǵa teń etip ashıw
3.	Sheńber júrgiziw
4.	Tsirkul'diń ushın B tochkaǵa qoyıw
5.	Sheńber júrgiziw
6.	Sheńberdiń kesilisiw tochkalarınan tuwrı sızıq júrgiziw
7.	Tuwrı sızıq hám kesindiniń kesilisiw tochkası belgilenedi.

3. $y = 5^n$, $n \in \mathbb{Z}$

№	Ámellerdi orınlaw tártibi
1.	Eger $n > 1$ bolsa (4) ke ótedi, keri jaǵdayda (2) ge.
2.	Eger $n = 1$ bolsa (5) ke ótedi, keri jaǵdayda (3) ge.
3.	Eger $n = 0$ bolsa (6) ǵa ótedi, keri jaǵdayda (7) ge.
4.	$y = \underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_n$ (8) ge ótedi
5.	$y = 5$, (8) ge ótedi
6.	$y = 1$, (8) ge ótedi
7.	$y = \frac{1}{\underbrace{5 \cdot 5 \dots 5}_n}$
8.	Tamam

4. Baslawısh klass matematika sabaqlarında tómendegi sıyaqlı ápiwayı algoritmler qollanamız: Qosıw algoritmi (onlıq sanaq sistemasında).

1) Ekinshi qosılıwshını qana birlikleri sáykes keletuǵın halda birinshi qosılıwshınıń astına jazamız.

2) Birliklerdi qosamız: Eger qosındı 10 nan kishi bolsa, juwaptı birlikler qanasına jazamız hám keyingi onlıq qanaǵa ótemiz.

3) Eger qosındı 10 nan úlken yamasa teń bolsa, $10 + \tilde{N}_0$ sıyaqlı oylap ($\tilde{N}_0$ – bir qanalı san) $\tilde{N}_0$ dı birlikler qanasına jazamız hám birinshi qosılıwshınıń onlıqlarına 1 di qosamız, soń onlıqlar qanasına qosıwǵa ótemiz.

4) Joqarıdaǵını onlıqlar menen, soń júzlikler menen hám t.b. tákirarlaymız. Barlıq qana birlikleri qosılǵannan soń tawsamız.

Tap sol sıyaqlı alıw, kóbeytiw hám bóliw algoritmlerin dúzip shıǵıwımız múmkin.

Tapsırmalar:

y tiń mánisin tabıw algoritmin dúziń.

$$1. \quad y = \frac{x^2 - 4x + 6}{7x + 6}$$

$$2. \quad y = \frac{x^2 - 4x + 6}{2x - 1}$$

$$3. \quad y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$$

$$4. \quad y = \frac{7x^3 + 3}{2x - 1}$$

$$5. \quad y = \frac{5x^4 + 3}{x - 2}$$

6. Onlıq sanaq sistemasında alıw algoritmin dúziń.

7. Onlıq sanaq sistemasında kóbeytiw algoritmin dúziń.

8. Onlıq sanaq sistemasında bóliw algoritmin dúziń.

9. 10 qosılıwshınıń qosındısın tabıw algoritmin dúziń.

10. Kóp qanalı sanlardı salıstırıw algoritmin dúziń.

11 – 15. Ańlatpanıń mánisin tabıw algoritmin dúziń.

$$11. \quad ((36:2-14)(42:2-14)+20):2$$

$$12. \quad ((27:3-21)(102:3-33)+140):100$$

$$13. \quad (44:2+8)(77:11+3):(227+73)$$

$$14. \quad (19:2+12):((65-55):2):(27-17)$$

$$15. \quad (21:3+23):((42+18):6):(42:14)$$

16 – 20. Bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw algoritmin dúziń.

$$16. \quad \frac{121}{846} \text{ hám } \frac{71}{246}$$

$$17. \quad \frac{1}{33} \text{ hám } \frac{1}{44}$$

$$18. \quad \frac{8}{81} \text{ hám } \frac{21}{486}$$

$$19. \quad \frac{101}{744} \text{ hám } \frac{203}{845}$$

$$20. \quad \frac{5}{77} \text{ hám } \frac{3}{44}$$

21 – 25. Teńlemelerdi sheshiw algoritmin dúziń.

$$21. \quad (6-3x) \cdot 4 + 2x - 1 = 3(x-5)$$

$$22. \quad (5x-12) \cdot 8 - 76 = 32(x+2)$$

$$23. \quad (18-2x):2 + 10x = 9(3x-2)$$

$$24. (64x + 24):8 + 7 = 2(x - 4)$$

$$25. (105 + 5x):5 - 7x = 10x(2x - 21)$$

26 – 30. Teńsizliklerdi sheshiw algoritmin dúziń.

$$26. (x + 3)(x - 5)(2 - x)(4 - x) > 0$$

$$27. (7 - x)(15 + x)(x - 9)(x + 8) > 0$$

$$28. (x + 12)(x - 12)(x + 19) > 0$$

$$29. (2x - 14)(3x - 15)(7x - 77) < 0$$

$$30. (6x - 18)(9x - 27)(11x + 33) \cdot (x + 13) < 0$$

ÁMELIY SABAQ

1-Amaliy mashg'ulot

To'plamlar ustida amallar. Eyler-Venn diagrammalari

To'plamlar ustida quyidagi amallarni bajarish mumkin:

1. To'plamlar birlashmasi.

1-ta'rif. A va B ikkitaa ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. Agar C to'plam faqatgina A va B to'plamlarning elementlaridan tashkil topgan bo'lsa, bunday to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi deyiladi.

To'plamlar birlashmasi U belgi bilan belgilanadi.

Masalan, $A = \{2, 4, 6\}$ va $B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to'plamlarning birlashmasi to'plamlar kesishmasi $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to'pladan iborat.

To'plamlar kesishmasi

A va B to'plamlar berilgan. Shu ikki to'plam elementlaridan tuzilgan C to'plamga ularni birlashmasi deyiladi, ya'ni bilan belgilanadi. Shu ikki to'plam umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plamga ularni kesishmasi deyiladi, ya'ni $A \cap B = C$ bilan belgilanadi.

To'plamlar ayirmasi

Shu ikki to'plamda A to'plamning B to'plamda yo'q elementlaridan tuzilgan C to'plamga A to'plamdan B to'plamni ayirmasi deyiladi. $C = A/B$ bilan belgilanadi.

Misol: A – 3 ga bo'linadigan ikki xonali natural sonlar to'plami

B – 5 ga bo'linadigan ikki xonali natural sonlar to'plami

1. Bu to'plamlar birlashmasini topamiz $A \cup B = ?$

Yechish: $A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \dots 90, 93, 96, 99\}$

$B = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots 90, 95\}$

$A \cup B = \{10, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 25, \dots 95, 96, 99\}$

2. **Yechish:** Bu to'plamlar kesishmasini topamiz $A \cap B = ?$

$A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \dots 90, 93, 96, 99\}$

$B = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40 \dots 90, 95\}$

$A \cap B = \{15, 30, 45, 60 \dots 90\}$

3. Bu to'plamlar ayirmasini topamiz $A/B = ?$

Yechish: $A = \{12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \dots 90, 93, 96, 99\}$

$B = \{10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, \dots 90, 95\}$

$A/B = \{12, 18, 21, 24, 27, 33, \dots 93, 96, 99\}$

Ikki to'plamning to'g'ri ko'paytmasi quyidagi A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi deb elementlari bo'yicha tartiblangan (x,y) juftlaridan iborat to'plamga aytiladi. Bunda birinchi komponenti A to'plamga, ikkinchi komponenti esa B to'plamdagi elementi A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi $A \times B$ kabi yoziladi.

Ta'rifga ko'ra $A \times B = \{x; y/ x \in A, y \in B\}$

Masalan A –butun musbat sonlar to'plami, B –natural sonlar to'plami bo'lsin, ya'ni $A = \{0,1,2,3,\dots\}$, $B = \{1,2,3,\dots\}$

$A \times B$ to'plamning elementlari quyidagilardir:

(0;1), (0;2), (1;2), (1;3), (2;1), (2;2), (2;3) va hokazo

Misol: ruchka fabrikasi quyidagi rangli to'plamni, B orqali esa ruchka qopq'og'i rangli to'plamni belgilaymiz.

U holda $A = B$ (oq, qizil, yashil, sariq) ruchka uchun turli ranglar kaloriti ruyhatini tuzish mumkin. Korpus ranggi va qopqoq ranggi A dagi rangni B dagi rang bilan barcha mumkin bo'lgan usullar buyicha birlashtirib, to'g'ri ko'paytma xosil qilamiz, u to'g'ri kvadrat yoki Dekart kvadrati deb ataladi va $A \times B = A^2$ bilan belgilanadi.

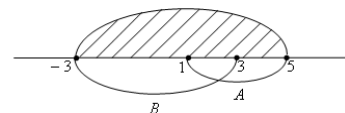
Misollardan ko'rinadiki, bu to'g'ri ko'paytma har bir juftni tartiblangan, qizil korpusli va oq qopqoqli ruchka oq korpusli va qizil qopqoqli ruchkadan farq qiladi.

Misol: $A = \{2,3,5\}$ $B = \{2,4,7\}$

$A \times B = \{(2,2), (2,4), (2,7), (3,2), (3,4), (3,7), (5,2), (5,4), (5,7)\}$

Misali-3 $A = \{a/1 \leq a \leq 5, a \in R\}$, $B = \{b/|b| < 3, b \in R\} = \{b/-3 < b < 3, b \in R\}$

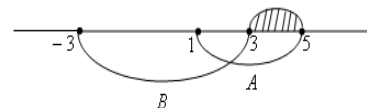
bolsa, onda 1) $A \cup B = \{x/-3 < x \leq 5, x \in R\}$



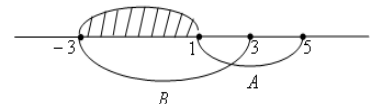
2) $A \cap B = \{x/1 \leq x < 3, x \in R\}$



3) $A \setminus B = \{x/3 \leq x \leq 5, x \in R\}$, $3 \notin B$, onda $3 \in A \setminus B$



4) $B \setminus A = \{x, -3 < x < 1\}$, $1 \in A$, demek $1 \notin B \setminus A$



4-Misol: $A = \{x/ -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$, $B = \{x/ -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$ ko'pliklerinin' kesispesi, birikpesi

ha'm ayirmasin tabamiz. Bunin' ushin, sanlar ko'sherinde $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{7}{4}$, 2 noqatlarin belgileymiz

$$A \cap B = \{x/ -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\}, A \cup B = \{x/ -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\}, A \setminus B = \{x/ -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{4}\}.$$

5-Misol. $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$ Ko'pliklari berilgan.

$A \cup B, A \cap B, A/B, B/A, A \Delta B$ Ko'pliklarini aniqlang.

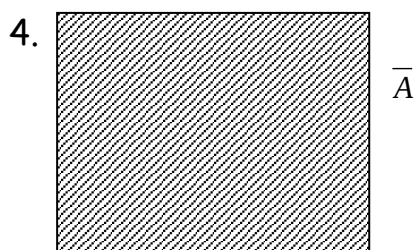
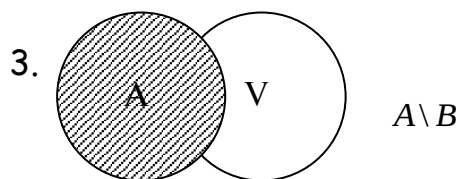
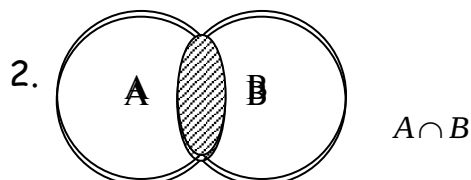
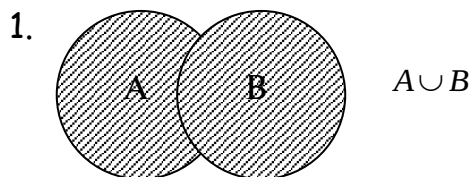
Yechish. $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{-1, 1, 3\}$, $A/B = \{0, 2\}$, $B/A = \emptyset$,

$$A \Delta B = \{0, 2\} \cup \emptyset = \{0, 2\}$$

6-misal. $A = \{4, 5, 7\}$ ham $B = \{-1, 2, 3, 4\}$ ko'plikler. Dekart ko'beymesin tabiri $A \times B = ?$

$$A * B = \{(4;-1), (4;2), (4;3), (4;4), (5;-1), (5;2), (5;3), (5;4), (7;-1), (7;2), (7;3), (7;4)\}$$

(Diagramma Eyler, Venn)



Nazorat savollari:

1. To'plam deb nimaga aytiladi?
2. To'plamlar ustida qanday amallar bajariladi?
3. To'plamlarning birlashmasi va keshishmasi
4. To'plamlarning ayirmasi

Topshiriqlar

1. Quyidagi to'plamning bo'sh to'plam ekanligini isbotlang $\{x/x > 7, x < 5\}$
2. $A = \{x / 5 \leq x \leq 10\}$, $B = \{x / x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 15\}$, elementlarni toping
3. Agar $A = \{1,2,3,5,7\}$, $B = \{1,2,6,8\}$ bo'lsa, u holda $A \cap B = ?$
4. Agar $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,4,5,7\}$ bo'lsa u holda $A/B = ?$
5. 5 dan kichik natural sonlar to'plami

2. Sanli kóplikler berilgen. $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ lardi tabiń, A hám B kópliklerdiń Dekart kóbeymesin koordinata tegisliginde súwretleń.

2. 1. $A = \{a / -3 \leq a < 5, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{b / 3 \leq b < 6, b \in \mathbb{R}\}$

2. 2. $A = \{a / -2 < a \leq 3, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{b / 1 < b < 5, b \in \mathbb{R}\}$

2. 3. $A = \{a / -5a < -2, a \in \mathbb{R}\}$, $B = \{b / -3b < -1, b \in \mathbb{R}\}$

2. 4. $A = \{a / -3 \leq a \leq 1, a \in R\}, B = \{b / -1 < b \leq 2, b \in R\}$
2. 5. $A = \{a / 2 \leq a < 5, a \in R\}, B = \{b / -4 < b < 3, b \in R\}$
2. 6. $A = \{a / |a| < 3, a \in R\}, B = \{b / 0 \leq b < 4, b \in R\}$
2. 7. $A = \{a / 1 \leq a \leq 4, a \in R\}, B = \{b / |b| \leq 2, b \in R\}$
2. 8. $A = \{a / -5 < a < -3, a \in R\}, B = \{b / -4 < b < 1, b \in R\}$
2. 9. $A = \{a / 1 < a < 5, a \in R\}, B = \{b / 4 \leq b \leq 6, b \in R\}$
2. 10. $A = \{a / 3 \leq a \leq 7, a \in R\}, B = \{b / 1 \leq b \leq 5, b \in R\}$
2. 11. $A = \{a / 0 \leq a \leq 7, a \in R\}, B = \{b / -3 < b < 2, b \in R\}$
2. 12. $A = \{a / -2 < a \leq 3, a \in R\}, B = \{b / 1 \leq b < 5, b \in R\}$
2. 13. $A = R, B = \{2, 4, 6\}$
2. 14. $A = \{-2, 2, 4\}, B = R$
2. 15. $A = \{a / -3 < a < 4, a \in R\}, B = \{-2, 0, 2, 4\}$
2. 16. $A = \{5, 6, 7\}, B = \{b / 4 > 2b, b \in R\}$
2. 17. $A = [1; 5], B = [-3; 3]$
2. 18. $A = \{a / |a| < 2, a \in R\}, B = R$
2. 19. $A = \{a / |a| < 3, a \in R\}, B = R$
2. 20. $A = R, B = \{b / |b| < 3, b \in R\}$
2. 21. $A = [-2; 2], B = \{2, 3, 4\}$
2. 22. $A = [-2; 2], B = [2; 4]$
2. 23. $A = R, B = [2; 4]$
2. 24. $A = \{0, 2, 4, 6\}, B = \{1, 3, 5\}$
2. 25. $A = \{a / a < 3, a \in R\}, B = R$
2. 26. $A = \{a / a < 2, a \in R\}, B = \{b / |b| = 3, a \in R\}$
2. 27. $A = [4; 6], B = [3; 5]$
2. 28. $A = [0; \infty), B = [4; 21]$
2. 29. $A = [-100; 10), B = (10; 33]$
2. 30. $A =]0; \infty[, B =]-2; 2]$

1. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ kóplikler berilgen. $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.

2. $A = \{-1, 5, 6, 10\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ kóplikler berilgen. $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.

3. $A = \{1, 5, 9\}, B = \{2, 4, 6\}$ kóplikler berilgen. $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.

4. $A = \{1,5,9,10\}, B = \{12,4,16,8\}$ kóplikler berilgen. $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ tabiń.
5. $A = \{2,3,4,5\}$ hám $B = \{-1,0,2,3,4,5,6,7\}$ $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.
6. $A = \{2,4,6,8,10,12,14\}$ hám $B = \{10,11,12,13,14,15,16\}$
 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.
7. $A = \{6,8,10,12,14\}$ hám $B = \{11,12,13,14,15,16,17\}$
 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.
8. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ hám $B = \{2,4,6,8,10,12,14\}$
 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.
9. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,20,30,40\}$ hám $B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,8\}$
 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.
10. $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ hám $B = \{5,6,7,8,9,10,11,12\}$
 $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A \times B$ kópliklerdi tabiń.

Test savollari

1. Quyidagi to'plamlardan tenglarini toping:

- 1) $A = \{2,4,6\}$ va $B = \{6,4,2\}$ 2) $A = \{1,2,3\}$ va $B = \{1,11,4\}$
 3) $A = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ va $B = \{1,2,3\}$ 4) $A = \{\sqrt{256}, \sqrt{81}, \sqrt{16}\}$ va $b = \{2^2, 3^2, 4^2\}$
 A) 1,4 B) 1,3 C) 2,4

2. 1 dan 100 gacha bo'lgan sonlar orasida 2 ga ham, 5 ga ham bo'linmaydiganlari nechta?

- A) 35 B) 40 C) 32

3. A - 18 ning hamma natural bo'luvchilari to'plami, B - 24 ning hamma bo'luvchilari to'plami. A va B to'plamlar elementlari kesishmasini toping.

- A) $\{1,2,3,6\}$ B) $\{1,2,3\}$ C) $\{1,2\}$

4. 30 ta talabadan 20 tasi ingliz tilini, 15 tasi fransuz tilini bilishadi. Shu talabalardan nechtasi ikkala tilni ham bilishadi?

- A) 5 B) 10 C) 15

2-Amaliy mashg'ulot

Mantiqiy amallar va formulalar. Mulohazalar hisobi. Predikatlar va kvantorlar. Graflar nazariyasiga oid misollar

“Mulohaza”lar va ularning ustida mantiqiy amallarni o'rgatadigan matematikaning bo'limi matematik mantiq deyiladi. Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar maxsus belgilar yordamida ifodalanadi.

Bu belgilardan asosiylarini keltiramiz.

1. $\Rightarrow$ - agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi. $E \Rightarrow F$ – agar E bo'lsa, F bo'ladi (E dan F kelib chiqadi).

2. $\Leftrightarrow$ - teng kuchlilik. $E \Leftrightarrow F$ – E va F teng kuchli (E dan F kelib chiqadi va aksincha).

3. $\vee$ - dizyunksiya (“yoki” amali): E – “ $6 \times 4 = 24$ ”. F – “ $6 \times 4 = 25$ ” bo'lsa $E \vee F$ mulohaza “ 6×4 ko'paytma 24 yoki 25 ga teng”.

4. $\wedge$ - konyunksiya (“va” amali): G – “13 soni toq va tubdir” mulo-hazasi quyidagi ikkita mulohazaning konyunksiyasidir, E – “13 soni toq”, F – “13 doni tub”. Demak $G = E \wedge F$.

5. $\forall$ - ixtiyoriy, barcha, har qanday degan ma'noni anglatadi: Masa-lan, F to'plam 3 ga karrali natural sonlar to'plami, E – barcha natural sonlar to'plami degan mulohaza qilsa, u holda F ning barcha elementlari E ning elementlaridir, degan ma'noni beradi. Bu tasdiqni $F \subset E \Leftrightarrow (\forall a \in F \Rightarrow a \in E)$.

6. $\exists$ - “shunday”, “mavjud” degan ma'noni anglatadi. “ E va F to'plamlarning umumiy elementi mavjud emas” degan tasdiqni $F \not\subset E \Leftrightarrow (\exists a \in F \Rightarrow a \notin E)$ ko'rinishida yozish mumkin.

$\forall$ va $\exists$ belgilar kvantorlar deyiladi. Bu belgilar matematikaga mansub bo'lib, mantiqqa aloqador emas.

7. $\nexists$ - mavjud emas ma'nosini anglatadi (inkor etish amalidir). $a < 0$ bo'lsa, $a \Rightarrow \{n \notin \mathbb{R}, \Rightarrow n^2 = a\}$.

Biror E mulohazaning inkori deb E chin bo'lganda yolg'on, E yolg'on bo'lganda chin bo'ladigan yangi mulohazaga aytiladi va $\bar{E}$ bilan belgilanadi. E – “5 – murakkab son”, u holda $\bar{E}$ - “5 – tub son”. Bu yerda E yolg'on, $\bar{E}$ chin mulohazadir.

Har qanday matematik nazariya u yoki bu matematik jumlaning rost yoki yolg'onligini o'rganadi.

Ta'rif: Rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlangan darak gapga jumla (mulohaza) deyiladi.

Ta'rifga ko'ra “ $0 < 1$ ”, “ $2 \times 5 = 10$ ”, “7 – juft son”, “1 – tub son” gaplar mulohaza bo'lib, ulardan birinchisi va ikkinchisi rost, uchinchisi va to'rtinchisi yolg'on mulohazalardir.

Mulohazalar ustida bajariladigan inkor, kon'yunksiya, dizyunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya amallari mavjud.

1. Inkor amali.

Ta’rif: p mulohazaning inkori deb p rost bo’lganda yolg’on, p yolg’on bo’lganda rost bo’ladigan mulohazaga aytiladi.

Inkor amaliga quyidagi rostlik jadvali mos keladi:

P	$\neg p$
1	0
0	1

2. Konyuksiya amali.

Ta’rif: p va q mulohazalarning konyuksiyasi deb p va q mulohazalar rost bo’lganda rost, boshqa hollarda yolg’on bo’lgan yangi mulohazaga aytiladi va uni $p \wedge q$ yoki $p \& q$ ko’rinishlarda belgilanadi.

Konyuksiya amaliga “va” bog’lovchisi mos keladi.

Masalan, p : “5-tub son”,

q : “5-toq son”,

$p \wedge q$: “5-tub va toq son”.

Konyuksiya amaliga quyidagi rostlik jadvali mos keladi:

P	Q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. Dizyunksiya amali.

Ta’rif: p va q mulohazalarning dizyunksiyasi deb p va q mulohazalarning kamida bittasi rost bo’lganda rost, boshqa hollarda yolg’on bo’lgan yangi mulohazaga aytiladi va u $p \vee q$ orqali belgilanadi.

Dizyunksiya amaliga “yoki” bog’lovchisi mos keladi.

Masalan, p : “ $3 < 4$ ” - rost,

q : “ $3 = 4$ ” - yolg’on,

$p \vee q$: “ $3 \leq 4$ ” - rost.

Dizyunksiya amaliga quyidagi rostlik jadvali mos keladi:

P	Q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4. Implikatsiya amali.

Ta'rif: p va q mulohazalarning implikatsiyasi deb p rost, q yolg'on bo'lganda yolg'on, boshqa hollarda rost bo'lgan yangi mulohazaga aytiladi va uni $p \Rightarrow q$ ko'rinishda belgilanadi.

Implikatsiya amaliga "agar ..., bo'lsa, u holda, ... bo'ladi" kabi bog'lovchi so'zlar mos keladi.

Masalan, p : " $5 \cdot 5 = 25$ " – rost, q : " $6 \cdot 6 = 36$ " – rost, $p \Rightarrow q$: "Agar $5 \cdot 5 = 25$ bo'lsa, u holda $6 \cdot 6 = 36$ " bo'ladi – rost.

$p \Rightarrow q$ implikatsiya quyidagicha o'qiladi: " p dan q kelib chiqadi", " p bo'lishi uchun q ning bo'lishi zarur", " p mulohaza q mulohaza uchun etarli".

Implikatsiya amaliga quyidagi rostlik jadvali mos keladi:

P	Q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5. Ekvivalensiya amali.

Ta'rif: p va q mulohazalarning ekvivalensiyasi deb p va q larning bir xil qiymatlarida rost, turli qiymatlarida yolg'on bo'lgan yangi mulohazaga aytiladi va uni $p \Leftrightarrow q$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan, p : "berilgan natural son 3 ga bo'linadi", q : "berilgan sonning raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linadi".

$p \Leftrightarrow q$: "Berilgan sonning 3 ga bo'linishi uchun uning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linishi zarur va yetarli".

Ekvivalensiya amaliga quyidagi rostlik jadvali mos keladi:

P	Q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

1-misol. $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$ formula orqali berilgan mantiqiy mulohazaning rostlik jadvalini tuzing.

Yechish: $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$ mulohazaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\overline{A \Rightarrow B}$	$C \vee A$	$\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$
1	1	1	0	1	1	0

1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1

2-misol. $x \wedge y \vee \overline{x \vee y} \vee x$ formula orqali berilgan mantiqiy mulohazaning rostlik jadvalini tuzing.

Yechish: Quyidagicha ketma-ketlik hosil qilamiz.

O'zgaruvchi		Oraliq mantiqiy formulalar					Yechim
X	Y	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge y \vee \overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

3-misol. $\overline{x \vee y \vee \bar{x} \wedge z}$ formula orqali berilgan mantiqiy mulohazaning rostlik jadvalini tuzing.

Yechish: Quyidagicha ketma-ketlik hosil bo'ladi.

O'zgaruvchi			Oraliq mantiqiy formulalar					Yechim
X	Y	Z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee \bar{y}}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge z$	$\overline{x \vee y \vee \bar{x} \wedge z}$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

4-misol. Masalan: «129 soni 3 ga bo'linadi, faqat uning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsa.»

Yechish: a mulohaza – «129 soni 3 ga bo'linadi».

b mulohaza – «129 sonini raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linadi».

Ikki mulohaza ham chin bo'lganligi uchun ekvivalensiya ham chin. Ikkala mulohaza yolg'on bo'lsa, u holda ham ekvivalensiya chin bo'ladi. Masalan: «127 soni 3 ga bo'linadi, faqat 127 sonining raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linsa» - bu holda a va b lar ikkalasi ham yolg'on.

5-Misol Masalan: $X = \{6;10;15;20;24\}$ to'plamda $A(x)$: « x juft son», $B(x)$: « x soni 3 ga karrali» predikatlari berilgan bo'lsin.

Yechish: U holda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon'yunksiyasi predikati $A(x) \wedge B(x)$ « x soni juft va 3 ga karrali». $A(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{6; 10; 20; 24\}$

$B(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{6; 15; 24\}$ bo'ladi.

$A(x) \wedge B(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{6; 24\}$ bo'ladi.

$\{6; 24\}$ – to'plam esa $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar chinlik kesishmasidan iborat bo'ladi.

6-misol . a) $\neg A \vee \neg B$, b) $\neg A \wedge B$ logikalik aytimga sáykes shunliq kestesin duziń.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

A	B	$\neg A$	$\neg A \wedge B$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

7-misol. Eger $A = "5 \cdot 2 = 5^2"$, $B = "12\text{-jup san}"$ bolsa, a) $A \wedge B$, b) $A \vee B \vee \neg A$ c) $\neg A \vee B$, d) $\neg A \vee B \wedge A$, e) $(\neg A \vee B) \wedge \neg A$ ámellerin orinlań.

Sheshiliwi. Másele shártine muwapıq: $A=0$, $B=1$ mániske iye. Bunnan $\neg A=1$ hám

a) $A \wedge B = 0 \cdot 1 = 0$, b) $A \vee B \vee \neg A = 0 + 1 + 1 = 1 + 1 = 1$, c) $\neg A \vee B = 1 + 1 = 1$,

d) $\neg A \vee B \wedge A = 1 + 1 \cdot 0 = 1 + 0 = 1$, e) $(\neg A \vee B) \wedge \neg A = (1 + 1) \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$

boladı.

8-misol. Eger $A \vee B \wedge C = \text{ras}$ bolsa, neshe jaǵdayda orınlı boladı?

Sheshiliwi. Másele shártine muwapıq ózgeriwshiler úshew bolǵanlıqtan $2^3 = 8$ kombinaciya boladı:

A	B	C	$B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

9-misol. $(A \vee \bar{B}) \wedge C \Rightarrow A \wedge C$ formulani'n' barli'q naborlardag'i' ma'nislerin shi'nli'q kestesini ja'rdeminde esaplan'.

Sheshiliwi. Bul formulani'n' u'les formulalari' to'mendegishe boladı:

$$A, B, C, \bar{B}, A \vee \bar{B}, A \wedge C, (A \vee \bar{B}) \wedge C, (A \vee \bar{B}) \wedge C \Rightarrow A \wedge C$$

A	B	C	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$A \wedge C$	$(A \vee \bar{B}) \wedge C$	$(A \vee \bar{B}) \wedge C \Rightarrow A \wedge C$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1

10-misol. $A \wedge (\overline{A \vee \bar{B}})$ formulasi' BJ formula ekenligin ko'rsetemiz:

Sheshiliwi.

A	B	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$\overline{(A \vee \bar{B})}$	$A \wedge (\overline{A \vee \bar{B}})$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0

11-misol. $(A \vee \bar{B}) \wedge C \Rightarrow A \wedge C$ formulani'n' barli'q naborlardag'i' ma'nislerin shi'nli'q kestesi ja'rdeminde esaplan'.

Sheshiliwi. Bul formulani'n' u'les formulalari' to'mendegishe boladi':

$$A, B, C, \bar{B}, A \vee \bar{B}, A \wedge C, (A \vee \bar{B}) \wedge C, (A \vee \bar{B}) \wedge C \Rightarrow A \wedge C$$

A	B	C	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$A \wedge C$	$(A \vee \bar{B}) \wedge C$	$(A \vee \bar{B}) \wedge C \Rightarrow A \wedge C$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1

12-misol. $A \wedge (\overline{A \vee \bar{B}})$ formulasi' BJ formula ekenligin ko'rsetemiz:

Sheshiliwi.

A	B	$\bar{B}$	$A \vee \bar{B}$	$\overline{(A \vee \bar{B})}$	$A \wedge \overline{(A \vee \bar{B})}$
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0

13-misol. $x \wedge y \vee \overline{x \vee y} \vee x$ formula orqali berilgan mantiqiy mulohazaning rostlik jadvalini tuzing.

Yechish: Quyidagicha ketma-ketlik hosil qilamiz.

O'zgaruvchi		Oraliq mantiqiy formulalar					Yechim
X	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge y$	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge y \vee \overline{x \vee y}$	$\bar{x} \wedge y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

14-misol. $\overline{x \vee y \vee \bar{x} \wedge z}$ formula orqali berilgan mantiqiy mulohazaning rostlik jadvalini tuzing.

Yechish: Quyidagicha ketma-ketlik hosil bo'ladi.

O'zgaruvchi			Oraliq mantiqiy formulalar					Yechim
X	Y	Z	$\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$	$\overline{x \vee \bar{y}}$	$\bar{x}$	$\bar{x} \wedge z$	$\overline{x \vee y \vee \bar{x} \wedge z}$
0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	0	0

3-Amaliy mashg'ulot

Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamalari. Ellips. Giperbola. Parabola

Aylana.

Markazi (a, b) nuqtada va radiusi R bo'lgan aylana tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1)$$

1-misol. Markazi $S(-1;1)$ nuqtada, radiusi 3 birlik bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.

Echish. SHartga ko'ra aylana markazining koordinatlari $a = -1$; $b = 1$ va $R = 3$. Berilganlarni (1) formulaga qo'yib, aylana tenglamasini tuzamiz.

$$\begin{aligned}(x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= 3^2 \\(x + 1)^2 + (y - 1)^2 &= 9.\end{aligned}$$

2-misol. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ aylananing markazi va radiusi topilsin.

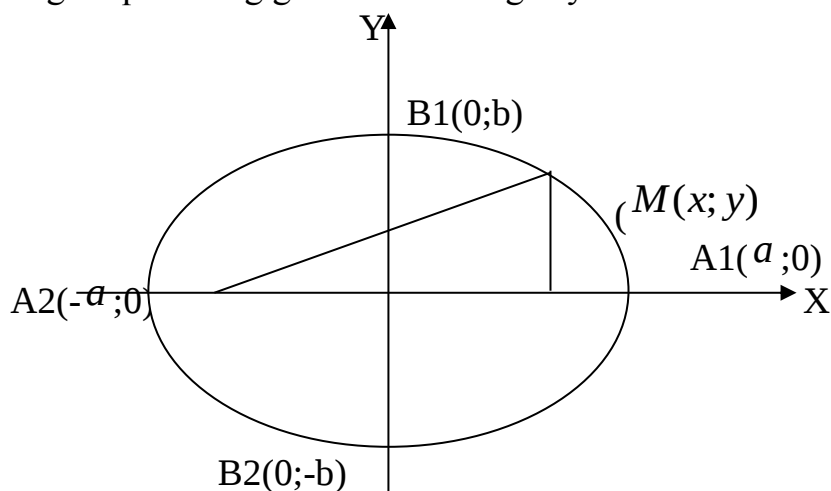
Echish. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0$ berilgan tenglamaning chap tomonini to'la kvadratdan iborat ifodalarga ajratamiz.

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 13 - 23 &= 0 \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 36 &= 0 \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 6^2\end{aligned}$$

bu tenglamani (1) tenglama bilan solishtirsak, $(3; -2)$ nuqta aylana markazi, radiusi $R = 6$ bo'ladi.

Ellips

Ta'rif. Ellips deb, xar bir nuqtasidan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha (fokuslargacha) masofalarining yig'indisi $F_1 F_2$ dan katta o'zgarmas $2a$ mikdorga teng nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.



1 – chizma.

Ellipsning kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

ko'rinishda bo'lib, ellips koordinat o'qlariga nisbatan simmetrikdir. a va b parametrlar mos ravishda katta va kichik ellipsning yarim o'qlari deyiladi.

$a > b$ bo'lsin, u holda F_1 va F_2 fokuslar Ox o'qda bo'lib, koordinatlar boshidan

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ masofada bo'ladi. $\frac{c}{a} = \varepsilon < 1$ nisbat ellipsning eksentrisiteti deyiladi.

Ellipsning $M(x, y)$ nuqtasidan fokuslargacha bo'lgan masofalar (fokal radius - vektorlar)

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x \quad (2)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Agar $a < b$ bo'lsa, fokuslar Oy o'qda bo'lib,

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad \varepsilon = \frac{c}{b}, \quad r = b \pm \varepsilon y \text{ bo'ladi.}$$

1- misol. Katta yarim o'qi $a = 5$ va eksentrisiteti $\varepsilon = 0,6$ bo'lgan holda ellipsning kanonik tenglamasini toping.

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,6$$

Echish. Shartga ko'ra .

Demak, fokuslar orasidagi masofaning yarmi $c = a \cdot 0,6 = 5 \cdot 0,6 = 3$ bo'ladi.

Ellips kichik yarim o'qining kvadrati $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ bo'lib, ellipsning izlanayotgan kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

2- misol. $M(2; 3)$ nuqtadan o'tuvchi, katta yarim o'qi $a = 4$ bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Echish. $a = 4$ bo'lganda ellipsning kanonik tenglamasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

bo'ladi. $M(2; 3)$ nuqtaning koordinatlari bu tenglamani qanoatlantirishi kerak.

$$\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$$

Demak, $\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$. Bundan $b^2 = 12$ ni bo'lib va uni yuqoridagi tenglamaga qo'ysak, ellipsning izlangan kanonik tenglamasini xosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

Giperbola

Ta'rif. Giperbola deb shunday nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladiki, ularning xar biridan berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha (fokuslargacha) bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas $2a$ ($0 < 2a < F_1F_2$) miqdordan iboratdir. Giperbolaning kanonik tenglamasi:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

1) bo'lib, giperbola koordinat o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Giperbola Ox o'qni uchlar deb ataluvchi $A_1(a,0)$, $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi, Oy o'qi bilan esa kesishmaydi. a parametr xaqiqiy yarim o'q, b esa mABxum yarim o'q deyiladi.

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ parametr koordinatlar boshidan fokusgacha bo'lgan masofani

bildiradi. $\frac{c}{a} = \varepsilon > 1$ nisbat giperbolaning eksuentrisiteti deyiladi.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari deyiladi. $M(x;y)$ nuqtalardan fokuslargacha bo'lgan masofalar (fokal radius - vektorlar):

$$r_1 = |\varepsilon x - a|, \quad r_2 = |\varepsilon x + a| \quad (2)$$

formulalar orqali aniqlanadi.

Agar $a=b$ bo'lsa, giperbola teng tomonli giperbola deb ataladi. Uning tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$, asimptotalarining tenglamalari esa $y = \pm x$ bo'ladi.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ va $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ giperbolalar qo'shma giperbolalar deyiladi.

1-misol. Fokuslari orasidagi masofa 26 ga, eksuentrisiteti esa $\frac{13}{12}$ ga tengligini bilgan xolda giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Echish. SHartga ko'ra $2c = 26$ va $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$. Demak, giperbolaning katta yarim

o'qi $a = 12$, $c = \frac{26}{2} = 13$; $c^2 = a^2 + b^2$ formulaga ko'ra giperbolaning kichik yarim o'qi

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$$

bo'ladi. Giperbola tenglamasining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

2 – misol. O'qlari koordinat o'qlari bilan ustma–ust tushadigan giperbola $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4; -2)$ nuqtalar orqali o'tadi. Uning kanonik tenglamasini toping.

Echish. Giperbolaning kanonik tenglamasini yozamiz: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu

tenglamani $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ va $M_2(4; -2)$ nuqtalarning koordinatlari qanoatlantiradi. Demak,

$$\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{b^2} = 1 \quad \text{va} \quad \frac{4^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{yoki} \quad \frac{9}{a^2} - \frac{\frac{1}{2}}{b^2} = 1 \quad \text{va} \quad \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$$

Bundan $a^2 = 8$ va $b^2 = 4$ ni topamiz va uni giperbolaning kanonik tenglamasiga qo'yamiz xamda quyidagini xosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Parabola

Ta'rif. Berilgan nuqtadan (fokusdan) va berilgan to'g'ri chiziqdan (direktrisadan) bir xil uzoqliqda bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni parabola deyiladi.

Parabolaning kanonik tenglamasi quyidagi ikki ko'rinishga ega:

1) $y^2 = 2px$ Ox o'qqa nisbatan simmetrik parabola.

2) $x^2 = 2py$ Oy o'qqa nisbatan simmetrik parabola.

Xar ikki xolda xam parabolaning uchi, ya'ni simmetriya o'qida yotuvchi nuqtasi,

koordinatlar boshida bo'ladi. Parabola $F(\frac{p}{2}; 0)$ fokus va $x = -\frac{p}{2}$ direktrisaga ega;

uning $M(x, y)$ nuqtasining fokal radius – vektori $r = x + \frac{p}{2}$. $x^2 = 2py$ parabola

$F(0; \frac{p}{2})$ fokus va $y = -\frac{p}{2}$ direktrisaga ega; uning $M(x, y)$ nuqtasining fokal radius-

vektori $r = y + \frac{p}{2}$ bo'ladi.

1-misol. $y^2 = 6x$ parabola berilgan. Uning direktrisasi tenglamasini tuzing va fokusini toping.

Echish. Berilgan tenglamani parabolaning kanonik tenglamasi $y^2 = 2px$ bilan taqqoslab ko'ramizki, $2p = 6$, $p = 3$. Parabola direktrisasining tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ va fokusi $\frac{p}{2}$ va 0 koordinatlarga ega bo'lganidan, ko'rilyotgan xol uchun direktrisa tenglamasi $x = -\frac{3}{2}$ va fokus $F(\frac{3}{2}; 0)$ bo'ladi.

Tapsirmalar

1. $x^2 + 4y^2 = 16$ ellips yasalsin, uning fokuslari va eksuentrisiteti topilsin.
2. Agar ellipsning fokuslari orasidagi masofa 8 ga teng bo'lib, kichik yarim o'qi $b = 3$ bo'lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.
3. Agar ellipsning katta yarim o'qi $a = 6$, eksuentrisiteti $\varepsilon = 0,5$ bo'lsa, uning kanonik tenglamasi yozilsin.
4. Ellipsning katta yarim o'qi $a = 5$ va c parametri 4,8 ga teng bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b va eksuentrisiteti ε topilsin.
5. Ellipsning katta yarim o'qi $a = 5$ va c parametri 4 ga teng bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b va eksuentrisiteti ε topilsin.
6. Ellipsning katta yarim o'qi $a = 5$ va c parametri 3 ga teng bo'lsa, uning kichik yarim o'qi b va eksuentrisiteti ε topilsin.
7. Fokuslari Ox o'qda yotuvchi ellips koordinat o'qlariga nisbatan simmetrik bo'lib, $M(-4; \sqrt{21})$ nuqtadan o'tadi va $\varepsilon = \frac{3}{4}$ eksuentrisitetga ega. Ellips tenglamasi yozilsin va M nuqtaning fokal radiuslari topilsin.
8. $x^2 + 2y^2 = 18$ ellipsning o'qlari orasidagi burchakni teng ikkiga bo'luvchi vatar uzunligi topilsin.
9. $9x^2 + 16y^2 = 114$ ellipsning eksuentrisitetini toping.
10. Giperbolaning haqiqiy o'qi 18 ga, fokuslari orasidagi masofa 24 ga teng bo'lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing.
11. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbola tenglamasi berilgan. Giperbolaning haqiqiy va mavxum yarim o'qlarini, fokuslarini, eksuentrisitetini aniqlang.
12. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ giperbola asimptotalarining tenglamalarini tuzing.

13. $y^2 = 12x$ parabola fokusining koordinatalarini toping va direktrisasining tenglamasini tuzing.

14. Direktrisasining tenglamasini $x = -3$ va $F(1;0)$ bo'lgan parabolaning tenglamasini tuzing.

4-Amaliy mashg'ulot

Fazoda koordinatalar metodi. Fazoda tekislik tenglamalari

Fazoda asosiy masalalar va tekislik tenglamalari.

1. Fazoda ikki nuqta orasidagi masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish. Fazoda ikki A va V nuqta berilgan bo'lib, ularning koordinatlari mos ravishda $(x_1; y_1; z_1)$ va $(x_2; y_2; z_2)$ bo'lsin. Bu $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani topish formulasi:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1)$$

bo'ladi.

Fazoda $A(x_1; y_1; z_1)$ va $B(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ularni tutashtirish natijasida AB kesmani berilgan $\lambda = \frac{AC}{CB}$ nisbatda bo'luvchi nuqtaning koordinatalari quyidagi

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad (2)$$

formulalar bilan topiladi. Xususan, $C(x; y; z)$ nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'lsa ($AC = CB$), u xolda $\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$ bo'lib, izlanayotgan $C(x; y; z)$ nuqtaning x, y, z koordinatlari

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (3)$$

bo'ladi.

2. Fazoda tekislik tenglamalari.

1) $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{N}\{A; B; C\}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi.

$M(x; y; z)$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U xolda $M_1M \perp \vec{N}$ va ikki vektorning perpendikulyarlik shartiga ko'ra

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (4)$$

2) Tekislikning umumiy tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (5)$$

$\vec{n}\{A;B;C\}$ vektor (4) yoki (5) tekislikka normal vektor deyiladi.

$Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamaning xususiy xollari:

I. $D = 0$ bo'lganda, $Ax + By + Cz = 0$ - tekislik koordinatlar boshidan o'tadi.

II. $C = 0$ bo'lganda, $Ax + By + D = 0$ - tekislik Oz o'qqa parallel.

III. $C = D = 0$ bo'lganda, $Ax + By = 0$ - tekislik Oz o'qdan o'tadi.

IV. $B = C = 0$ bo'lganda, $Ax + D = 0$ - tekislik yOz tekislikka parallel.

V. Koordinat tekisliklarining tenglamalari: $x = 0, y = 0$ va $z = 0$.

4) Tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalar bo'yicha tenglamasi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (6)$$

1-misol. $A(2;5;0), B(5;1;12)$ nuqtalar orasidagi masofa topilsin.

Echish. Bu nuqtalar orasidagi masofani (1) formuladan foydalanib topamiz:

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (1-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

2-misol. $M(2;-3;4)$ nukta orkali o'tuvchi va $\vec{n} = \{1;-1;4\}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzing.

Echish. Ma'lumki, berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuktadan o'tib, berilgan $\vec{n} = \{A, B, C\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikning tenglamasi

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ ko'rinishga ega. Masala shartidan

$$x_1 = 2; y_1 = -3; z_1 = 4;$$

$$A = 1; B = -1; C = 4$$

bularni yuqoridagi tenglamaga qo'yib, izlangan tekislik tenglamasini xosil kilamiz:

$$1(x - 2) - 1 \cdot (y + 3) + 4(z - 4) = 0 \Rightarrow x - 2 - y - 3 + 4z - 16 = 0 \Rightarrow x - y + 4z - 21 = 0$$

3-misol. $2x + 3y - 5z - 30 = 0$ tekislik berilgan. Bu tekislikning koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarining koordinatlarini toping.

Echish. Tekislikning berilgan tenglamasini uning koordinat o'qlaridan kesgan kesmalari bo'yicha tenglamasi ko'rinishiga keltiramiz:

$$\frac{2x}{30} + \frac{3y}{30} - \frac{5z}{30} = 1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{15} + \frac{y}{10} - \frac{z}{6} = 1.$$

Demak, tekislik Ox o'qini $(15;0;0)$, Oy o'qini $(0;10;0)$, Oz o'qini $(0;0;-6)$ nuqtalarda kesadi.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Berilgan tekisliklar yasalsin:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 5x - 2y + 3z - 10 = 0; \quad 2) \quad 3x + 2y - z = 0; \\ 3) \quad & 3x + 2z = 6; \quad 4) \quad 2z - 7 = 0 \end{aligned}$$

2. $M_1(0;-1;3)$ va $M_2(1;3;5)$ nuqtalar berilgan. M_1 nuqtadan o'tuvchi va $N = \overrightarrow{M_1M_2}$ vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasi yozilsin.

3. $M_1(0;1;3)$ va $M_2(2;4;5)$ nuqtalardan o'tuvchi va Ox o'qqa parallel tekislik tenglamasi yozilsin va tekislik yasalsin.

4. 1) $2x + y - z + 6 = 0$; 2) $x - y - z = 0$; 3) $y - 2z + 8 = 0$;

4) $2x - 5 = 0$; 5) $x + z = 0$

tekisliklar yasalsin.

Tekislikka doir asosiy masalalar

Ikki tekislik orasidagi burchak

$$\cos \varphi = \pm \frac{\vec{N}\vec{N}_1}{NN_1} = \pm \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{NN_1} \quad (1)$$

formuladan topiladi, bunda $\vec{N}$ va $\vec{N}_1$ mos ravishda $Ax + By + Cz + D = 0$ va $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ tekisliklarga normal vektorlar.

Parallellik sharti:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} \quad (2)$$

Perpendikulyarlik sharti:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0 \quad (3)$$

2. $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{N} \quad (4)$$

3. Berilgan ikki tekislikning kesishgan chizig'idan o'tuvchi barcha tekisliklar dastasining tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\alpha(Ax + By + Cz + D) + \beta(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0 \quad (5)$$

$\alpha = 1$ deb olish mumkin, u holda (5) dastadan berilgan tekisliklardan ikkinchisini chiqarib tashlagan bo'lamiz.

1-misol. $2x + y = 5$, $x + 3z = 16$ va $5y - z = 10$ tekisliklarning o'zaro joylashishini aniqlang.

Echish. Bu tekisliklarining kesishishi- kesishishmasligini aniqlash uchun quyidagi sistemaning echimini topamiz:

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ x + 3z = 16, \\ 5y - z = 10. \end{cases}$$

Sistemani echish uchun quyidagi determinantlarni tuzamiz va ularni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -30 + 1 = -29$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix} = -87, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = -145$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-145}{-29} = 5$$

Demak, tekisliklar (1;3;5) nuqtada kesishadi.

2-misol. Berilgan $2x + 3y - z + 2 = 0$ va $x + y + 5z - 1 = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Echish. Ikki tekislik orasidagi burchak formulasi

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

dan foydalanamiz. Berilishga ko'ra:

$$A_1 = 2, B_1 = 3, C_1 = -1 \quad \text{va} \quad A_2 = 1, B_2 = 1, C_2 = 5$$

bularni yuqoridagi formulaga qo'yamiz:

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 5}{\sqrt{4 + 9 + 1} \sqrt{1 + 1 + 25}} = \frac{0}{\sqrt{14} \sqrt{27}} = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0: \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Demak, berilgan ikki tekislik o'zaro perpendikulyar ekan.

3-misol. M(3;-2;1) nuqtadan $3x + 6y - 5z + 2 = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Echish. Berilishiga ko'ra:

$$x_0 = 3, y_0 = -2, z_0 = 1;$$

$$A = 3; B = 6; C = -5; D = 2.$$

Bularni (4) formulaga qo'yamiz, u holda

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|9 - 12 - 5 + 2|}{\sqrt{70}} = \frac{6}{\sqrt{70}}.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

$$1) x - 2y + 2z - 8 = 0; \text{ va } x + z - 6 = 0$$

$$2) x + 2z - 6 = 0; \text{ va } x + 2y - 4 = 0.$$

2. $(2; 2; -2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x - 2y - 3z = 0$ tekislikka parallel tekislik tenglamasi topilsin.

3. $(-1; -1; 2)$ nuqtadan o'tuvchi va $x - 2y - 3z = 0$ xamda $x + 2y - 2z + 4 = 0$ tekisliklarga perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

4. $M_1(-1; -2; 0)$ va $M_2(1; 1; 2)$ nuqtalardan o'tuvchi xamda $x + 2y + 2z - 4 = 0$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.

5. $A(4; 3; 0)$ nuqtadan $M_1(1; 3; 0)$, $M_2(4; -1; 2)$ va $M_3(3; 0; 1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin.

6. $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ va $4x + 3y - 5z + 12 = 0$ parallel tekisliklar orasidagi masofa topilsin.

Ko'rsatma. Birinchi tekislikda ixtiyoriy, masalan $(2; 0; 0)$ nuqta olib, undan ikkinchi tekislikkacha bo'lgan masofa topilsin.

Fazoda to'g'ri chiziqli tenglamalari

1. $A(a; b; c)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{P}\{m; n; p\}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamalari. $N(x; y; z)$ - to'g'ri chiziqli tenglamalarning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U xolda $\overrightarrow{AN} \parallel \vec{P}$ va ikki vektorning parallellik shartiga ko'ra:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \quad (1)$$

(1) tenglamalar to'g'ri chiziqli tenglamalari deyiladi. $\vec{P}\{m; n; p\}$ vektor to'g'ri chiziqli tenglamalarning yo'naltiruvchi vektori deyiladi.

2. (1) tenglamadagi xar bir nisbatni t parametr ga tenglab, to'g'ri chiziqli tenglamalarning

$$\left. \begin{aligned} x &= mt + a, \\ y &= nt + b, \\ z &= pt + c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ko'rinishdagi parametrik tenglamalariga ega bo'lamiz.

3. Ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalari:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (3)$$

4. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi:

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

5. (4) tenglamalardan bir marta y ni, ikkinchi marta x ni yo'qotib, to'g'ri chiziqning proektsiyalari bo'yicha yozilgan tenglamalariga ega bo'lamiz:

$$\left. \begin{aligned} x &= mz + a, \\ y &= nz + b. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(5) tenglamalarni Berilgen

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-0}{1}$$

kanonik ko'rinishida yozish mumkin.

1-misol. (1;4;3) nuqtadan o'tgan va yo'naltiruvchi vektori $\vec{P}\{2;3;1\}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish. (1) tenglamadan foydalanamiz. Masala shartiga ko'ra:

$a=1; b=4; c=3; m=2; n=3; p=1.$

U holda izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{1}.$$

2-misol. $A(-3;1;2)$ va $B(8;-2;5)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamalarini tuzing.

Echish. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi (3) ko'rinishda bo'lib, unga A, B nuqtalarning koordinatlarini qo'ysak,

$$\frac{x+3}{8+3} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-2}{5-2} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+3}{11} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{3}$$

to'g'ri chiziq tenglamalariga ega bo'lamiz.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. 1) $\begin{cases} x = z + 5 \\ y = 4 - 2z \end{cases}$ va 2) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ to'g'ri chiziqlarning xOy va xOz topilsin va to'g'ri chiziqlar yasalsin.

Ko'rsatma: To'g'ri chiziqning tenglamalarida 1) $z=0$; 2) $y=0$; deb faraz qilish kerak.

$$2. \quad \left. \begin{aligned} x + 2y + 3z - 3 &= 0 \\ 3x + y + 4z - 14 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ to'g'ri chiziq tenglamalarini:}$$

1) proektsiyalari bo'yicha;

2) kanonik ko'rinishda yozilsin.

To'g'ri chiziqning koordinat tekisliklaridagi izlari topilsin xamda to'g'ri chiziq va uning proektsiyalari yasalsin.

$$3. \quad \begin{aligned} 1) \quad &\begin{cases} y = 3 \\ z = 2, \end{cases} & 2) \quad &\begin{cases} y = 2 \\ z = x + 1, \end{cases} & 3) \quad &\begin{cases} x = 4 \\ z = y \end{cases} \end{aligned}$$

to'g'ri chiziqlar yasalsin va ularning yo'lantiruvchi vektorlari aniqlansin.

4. $A(3;-1;4)$ va $B(1;1;2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning tenglamalari yozilsin.

$$5. \quad \begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} 3x - 2y + 8 = 0 \\ z = 3x \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

4-§. To'g'ri chiziq va tekislikka doir aralash masalalar

1. $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$ to'g'ri chiziq bilan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik orasidagi burchak:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{P}|}{NP} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{NP} \quad (6)$$

Ularining parallellik sharti $(\vec{N} \parallel \vec{P})$:

$$Am + Bn + Cp = 0. \quad (7)$$

Perpendikulyarlik sharti:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \quad (8)$$

2. Tekislik bilan to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasi. To'g'ri chiziq tenglamalarini $x = mt + a, y = nt + b, z = pt + c$ parametrik ko'rinishda yozib, tekislikning $Ax + By + Cz + D = 0$ tenglamasidagi $x; y; z$ larning o'rniga ularning t ga nisbatan yozilgan qiymatlarini qo'yamiz. Xosil bo'lgan tenglamadan t_0 ni, so'ngra kesishgan nuqta koordinatlari x_0, y_0, z_0 ni topamiz.

3. Ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti:

$$\begin{vmatrix} a-a_1 & b-b_1 & c-c_1 \\ m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

1-misol. Berilgan $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$ to'g'ri chiziq va $2x + y - 2z - 6 = 0$

tekislik orasidagi burchakni va ularning kesishish nuqtasini toping.

Echish. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak (6) formula yordamida aniqlanadi. Shuning uchun berilgan $A=2; B=1; C=-2; m=1; n=2; p=-2$ larni bu formulaga qo'yib topamiz:

$$\sin \theta = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}.$$

Demak, $\theta = \arcsin \frac{8}{9}$.

Endi ularning kesishish nuqtasini topamiz, uning uchun to'g'ri chiziq tenglamasini parametrik ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2} = t, \quad \frac{x-1}{1} = t; \quad \frac{y-1}{2} = t; \quad \frac{z-1}{-2} = t, \\ \left. \begin{aligned} x &= t+1, \\ y &= 2t+1, \\ z &= -2t+1 \end{aligned} \right\} (*) \end{aligned}$$

Buni tekislik tenglamasiga qo'yamiz:

$$2(t+1) + 2(t+1) - 2(-2t+1) - 6 = 0;$$

$$2t + 2 + 2t + 1 + 4t - 2 - 6 = 0;$$

$$8t + 3 - 8 = 0;$$

$$8t = 5; \quad t = \frac{5}{8}.$$

t ning bu qiymatini (*) ga qo'ymiz:

$$x = \frac{5}{8} + 1 = \frac{13}{8}; \quad y = \frac{10}{8} + 1 = \frac{9}{4}; \quad z = -\frac{10}{8} + 1 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi $\left(\frac{13}{8}; \frac{9}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

dan iborat.

2-misol. $M(-1; 3; 0)$ nuqtadan o'tib, $2x - y - 2z - 4 = 0$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish. $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tib, $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C}$$

formula yordamida aniqlanadi.

Demak,

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-2}.$$

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y=3x-1$, $2z=-3x+2$ to'g'ri chiziq bilan $2x+y+z-4=0$ tekislik orasidagi burchak topilsin.
2. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{3}$ to'g'ri chiziq $2x+y-z=0$ tekislikka paralel ekanligi, $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{3}$ to'g'ri chiziq esa shu tekislik ustida yotishi ko'rsatilsin.
3. $(-1;2;-3)$ nuqtadan o'tuvchi va $x=2$, $y-z=1$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.
4. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$ to'g'ri chiziqdan va $(3;4;0)$ nuqtadan o'tuvchi tekislikning tenglamasi yozilsin.
5. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $2x+3y-z=4$ tekislikka perpendikulyar tekislikning tenglamasi yozilsin.
6. $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{2}$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi va $x+2y+3z-29=0$ tekislik bilan kesishgan nuqtasi topilsin.
7. $(3;1;-1)$ nuqtaning $x+2y+3z-30=0$ tekislikdagi proektsiyasi topilsin.

5-Amaliy mashg'ulot

Funksiya va uning berilish usullari. Elementar funksiyalar va ularning grafiklari

Asosiy elementar funksiyalar

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ ko'rinishdagi funksiya butun ratsional funksiya deyiladi. Bu yerda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – o'zgarmas sonlar, n esa natural son. Bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan.

$y = ax + b$ ($a \neq 0$) ko'rinishdagi funksiya chiziqli funksiya deyiladi. Bu yerda a, b – o'zgarmas sonlar. Bu funksiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. Funksiyaning grafigi to'g'ri chiziqdan iborat.

$y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ga kvadratik funksiya deyiladi. Bu yerda a, b, c – o'zgarmas sonlar. Funksiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. Funksiyaning grafigi paraboladan iborat.

$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \dots + b_{m-1}x + a_m}$ ko'rinishdagi funksiyaga kasr ratsional funksiya deyiladi. Bunda $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ va $b_0, b_1, b_2, \dots, b_m$ lar o'zgarmas sonlar, n, m – natural sonlar. Bu funksiya $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{x: b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m = 0\}$ da aniqlangan.

$y = \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$) teskari proporsional bog'lanishni ifodalovchi funksiya. Bunda a – o'zgarmas son. Bu funksiya $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ da aniqlangan. Funksiya toq.

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ko'rinishdagi funksiyaga kasr-chiziqli funksiya deyiladi. Bunda a, b, c, d – o'zgarmas sonlar. Funksiya $D = (-\infty; +\infty) \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ to'plamda aniqlangan. Uni grafigi giperboladan iborat.

$y = x^\alpha$ ($x \geq 0$) ko'rinishdagi funksiyaga darajali funksiya deyiladi. Uni aniqlanish sohasi α ga bog'liq. Agar $\alpha > 0$ bo'lsa, $y = x^\alpha$ funksiya $(0; +\infty)$ da o'suvchi, $\alpha < 0$ da kamayuvchi bo'ladi.

$y = a^x$ ko'rinishdagi funksiyaga ko'rsatkichli funksiya deyiladi. Bunda x haqiqiy son, $a > 0$ va $a \neq 1$. Funksiya $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan. U $a > 1$ da o'suvchi, $0 < a < 1$ da kamayuvchi.

$y = \log_a x$ ko'rinishdagi funksiyaga logarifmik funksiya deyiladi. Bunda $a > 0$ va $a \neq 1$. Funksiya $(0; +\infty)$ da aniqlangan. U $a > 1$ da o'suvchi va $0 < a < 1$ da kamayuvchi bo'ladi.

$y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x$ lar trigonometrik funksiyalar deb ataladi.

$y = \sin x$ hamda $y = \cos x$ funksiyalar $(-\infty; +\infty)$ da aniqlangan 2π davrli davriy funksiyalar bo'lib, ixtiyoriy x da $-1 \leq \sin x \leq 1, \quad -1 \leq \cos x \leq 1$ tengsizliklar o'rinlidir.

$\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sec x, \operatorname{cosec} x$ funksiyalar $\sin x, \cos x$ funksiyalar orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyalar teskari trigonometrik funksiyalar deb ataladi.

Masalan: $y = \arcsin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1; 1]$ kesmadan, qiymatlar sohasi esa $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ dan iborat.

Mavzuga doir yechimlari bilan berilgan topshiriqlardan namunalar

1. $y = \frac{x}{x^2-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Agar maxraj nolga teng bo'lsa, funksiya aniqlanmagan bo'ladi. Demak, funksiyaning aniqlanish sohasida $x^2 - 1 \neq 0$ bo'lishi kerak. Undan $x^2 \neq 1$ yoki $x \neq \pm 1$. Shunday qilib, funksiyaning aniqlanish sohasi quyidagi uchta oraliqdan iborat: $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; +\infty)$. Ularni umumlashtirib

$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ ni hosil qilamiz.

2. $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi quyidagi sistemadan aniqlanadi:

$$\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \\ \sqrt{x+1} \neq \sqrt{x-1}, \end{cases} \begin{cases} x \geq -1, \\ x \geq 1, \\ x+1 \neq x-1, \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} x \geq -1, \\ x \geq 1, \\ 1 \neq -1, \end{cases}$$

dan iborat. Bu yerda $1 \neq -1$ doimo to'g'ridir. Shuning uchun oxirgi sistemaning yechimi $x \geq 1$.

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[1; +\infty)$ dan iborat.

3. $y = \lg(-x^2 + 5x - 6)$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: Logarifmik funksiyaning aniqlanish sohasi haqidagi xossaga asosan $-x^2 + 5x - 6 > 0$ bo'lishi kerak. Uni yechamiz: $-x^2 + 5x - 6 > 0$, $x^2 - 5x + 6 < 0$, $2 < x < 3$. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $(2; 3)$ oraliqdan iborat.

4. $y = \sqrt{3^{2x-2} + 9^x - 10}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: Bu funksiya x ning $3^{2x-2} + 9^x - 10 \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlarida aniqlangan. Uni yechamiz:

$$3^{2x-2} + 9^x - 10 \geq 0, 3^{2x} \cdot 3^{-2} + 3^{2x} \geq 10, 3^{2x} \cdot (3^{-2} + 1) \geq 10, 3^{2x} \cdot \frac{10}{9} \geq 10, 3^{2x} \geq 9, 3^{2x} \geq 3^2, 2x \geq 2, x \geq 1.$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[1; +\infty)$ dan iborat.

5. $y = \sqrt{\sin x + \cos x}$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: Funksiya aniqlangan bo'lishi uchun ildiz ostidagi ifoda manfiymas bo'lishi kerak. Ya'ni $\sin x + \cos x \geq 0$. Uni yechamiz:

$$\sin x + \cos x \geq 0, \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos x \geq 0, \sqrt{2} \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - x) \geq 0, \cos(\frac{\pi}{4} - x) \geq 0.$$

Bu $\cos x \geq a$ ko'rinishdagi eng sodda trigonometrik tengsizlikdir. Uning yechimi:

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ dan iborat. Bundan}$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

ni hosil qilamiz. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k]$ kesmadan iborat.

6. $y = \arcsin(x - 3)$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: $y = \arcsin x$ funksiyaning aniqlanish sohasidan foydalanamiz. Berilgan funksiya x o'rnida $x - 3$ ifoda turibdi. Demak, $-1 \leq x - 3 \leq 1$, $2 \leq x \leq 4$.

Shunday qilib, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[2; 4]$ kesmadan iborat.

7. $y = \arccos(x^2 - 6x + 8)$ funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

Yechish: Berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $-1 \leq x^2 - 6x + 8 \leq 1$ qo'sh tengsizlikning yechimidan iborat. Dastlab $x^2 - 6x + 8 \geq -1$ tengsizlikni yechamiz:

a) $x^2 - 6x + 8 \geq -1$, $x^2 - 6x + 9 \geq 0$, $(x - 3)^2 \geq 0$. Bu tengsizlik x ning har qanday qiymatlarida o'rinli.

$$b) x^2 - 6x + 8 \leq 1, x^2 - 6x + 7 \leq 0, 3 - \sqrt{2} \leq x \leq 3 + \sqrt{2}.$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}]$ kesmadan iborat.

8. $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1}$, $a > 1$ funksiyaning juft yoki toqligi aniqlansin.

Yechish:

$$y(-x) = \frac{a^{-x} + 1}{a^{-x} - 1} = \frac{\frac{1}{a^x} + 1}{\frac{1}{a^x} - 1} = \frac{\frac{1 + a^x}{a^x}}{\frac{1 - a^x}{a^x}} = \frac{1 + a^x}{1 - a^x} = \frac{1 + a^x}{-(a^x - 1)} = -\frac{1 + a^x}{a^x - 1} = -y(x) \text{ x).$$

Demak, berilgan funksiya toq.

9. $y = \cos \frac{x}{3} + \operatorname{tg} \frac{x}{5}$ funksiya davri topilsin.

Yechish: a) $\cos \frac{x}{3} = \cos \frac{1}{3}(x + 6\pi) = \cos(\frac{1}{3}x + 2\pi) = \cos \frac{1}{3}x$; Demak, $T_1 = 6\pi$.

$$b) \operatorname{tg} \frac{x}{5} = \operatorname{tg} \frac{1}{5}(x + 5\pi) = \operatorname{tg}(\frac{x}{5} + \pi) = \operatorname{tg} \frac{x}{5} \text{ bo'lganligi uchun } T_2 = 5\pi.$$

Berilgan funksiyaning davri T_1 va T_2 larning, ya'ni 6π va 5π larning eng kichik umumiy karralisidan iborat. Ya'ni: $EKUK(5\pi; 6\pi) = 30\pi$.

10. Berilgan $y = \log_{x^2}(4 - x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: $\log_a b$ son $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$ da aniqlangani uchun

$$\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \end{cases} \text{ sistemani hosil qilamiz. Uni yechamiz.}$$

$$\begin{cases} x < 4 \\ x \neq -1, 0, 1 \end{cases} \text{ Demak, berilgan funksiya}$$

$(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 4)$ to'plamda ekan.

11. M i s o l. $y = \sqrt{9 - x^2}$ funksiyaning aniqlanish va o'zgarish (qiymatlar) sohalarini toping.

Y e c h i s h . Berilgan funksiya $9 - x^2 \geq 0$ bo'lganda ma'noga ega.

Bundan $x^2 \leq 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$. Demak, $D(y) = [-3; 3]$.

O'zgarish sohasi. $0 \leq 9 - x^2 \leq 9$ ga ko'ra $[0; 3]$, ya'ni $E(y) = [0; 3]$.

Asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish va o'zgarish (qiymatlari) sohalari.

Darajali, ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar asosiy elementar funksiyalar deyiladi.

<i>N^o</i>	<i>Funksiya</i>	<i>Funksiyaning aniqlanish sohasi</i>	<i>Funksiyaning o'zgarish sohasi</i>
1.	$y = kx + b$	$D(y) = R = (-\infty; \infty)$	$E(y) = \begin{cases} R, \text{ agar } k \neq 0 \\ \{0\}, \text{ agar } k = 0 \end{cases}$
2.	$y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
3.	$y = x $	$D(y) = R$	$E(y) = [0; \infty)$
4.	$y = ax^n (n \in N)$	$D(y) = R$	$E(y) = \begin{cases} R, n - \text{toq} \\ a > 0, n - \text{juft} & [0; \infty) \\ [0; \infty); a < 0 & (-\infty; 0] \end{cases}$
5.	$y = \sqrt[n]{x}$	$D(y) = [0; \infty)$	$E(y) = [0; \infty)$
6.	$y = \sqrt[n+1]{x}$	$D(y) = R$	$E(y) = R$
7.	$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ $x_0 = -\frac{b}{2a}; a \neq 0$ $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$ bunda $(x_0; y_0)$ parabola uchi	$D(y) = R$	$E(y) = \begin{cases} [y_0; \infty); a > 0 \\ (-\infty; y_0]; a < 0 \end{cases}$
8.	$y = \{x\}$	$D(y) = R$	$E(y) = [0; 1)$

9.	$y = [x]$	$D(y) = R$	$E(y) = Z$
10.	$y = a^x$	$D(y) = R$	$E(y) = (0; \infty)$
11.	$y = \log_a x (0 < a \neq 1)$	$D(y) = (0; \infty)$	$E(y) = R$
12.	$y = \sin x$	$D(y) = R$	$E(y) = [-1; 1]$
13.	$y = \cos x$	$D(y) = R$	$E(y) = [-1; 1]$
14.	$y = \operatorname{tg} x$	$D(y): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $n \in Z$	$E(y) = R$
15.	$y = \operatorname{ctg} x$	$D(y): x \neq \pi n;$ $n \in Z$	$E(y) = R$
16.	$y = \arcsin x$	$D(y) = [-1; 1]$	$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
17.	$y = \arccos x$	$D(y) = [-1; 1]$	$E(y) = [0; \pi]$
18.	$y = \operatorname{arctg} x$	$D(y) = R$	$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
19.	$y = \operatorname{arcctg} x$	$D(y) = R$	$E(y) = [0; \pi]$

Mustaqil yechish uchun topshiriqlar

1. Berilgan $f(x) = \frac{x-2}{x^2-1}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
2. Berilgan $F(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
3. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$
4. Funksiyaning aniqlanish sohasini toping. $y = \frac{2x-3}{x(x+2)}$
5. Agar $f(x) = x^2 - 8x + 7$ bo'lsa, $f(4 - \sqrt{11}) = ?$
- 6.

x	-2	-1	0	1	2	4	5
$3 \cdot x - 1$							
$-3 \cdot x + 1$							

7.

y	-3	-1	0	2	3	4	6
$10 - 2 \cdot y$							
$10 + 2 \cdot y$							

8. Berilgan $y = \log_x(3-x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.
9. Berilgan $y = \log_x(6-x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

10. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

1. a) $y = \frac{2x-3}{x(x+2)}$ J: $(-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; \infty)$ b) $y = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{2}{\sqrt{-x}}$ J: $(-\infty; -3]$

2. a) $y = \frac{3x-2}{4x^2-16}$ J: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$ b) $y = \sqrt{\frac{x^2}{|x|-3}}$ J: $(-\infty; -3) \cup \{0\} \cup (3; \infty)$

3. a) $y = \frac{x-3}{x^2-4}$ J: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$ b) $y = \sqrt{\frac{(x-2)(5-x)}{(x-3)(x-4)}}$ J: $[2; 3) \cup (4; 5]$

4. a) $y = \frac{3x+2}{4x^2-4}$ J: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ b) $y = \sqrt{|x|-3} + \frac{1}{\sqrt{10-x}}$ J: $(-\infty; -3) \cup (3; 10)$

5. a) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$ J: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ b) $y = \sqrt{7-|x-2|} + \frac{1}{\sqrt{3-2x}}$ J: $[-5; 1.5)$

6. a) $y = \frac{2x-3}{3x^2-3}$ J: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ b) $y = \sqrt{\frac{(x-2)(4-x)}{x(x+1)}}$ J: $(-1; 0) \cup [2; 4]$

7. a) $y = \frac{x-2}{x^2-1}$ J: $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ b) $y = \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{1-x^2}}$ J: $(-1; 1) \cup \{2\}$

8. a) $y = \frac{\sqrt{8+x}}{x+2}$ J: $(-8; -2) \cup (-2; \infty)$ b) $y = \frac{\sqrt{x^2-x-30}}{\sqrt{|x^2-x-42|}}$
J: $(-\infty; -6) \cup (-6; -5) \cup [6; 7) \cup (7; \infty)$

9. a) $y = \sqrt{\frac{(x-1)(3-x)}{x(4-x)}}$ J: $(-\infty; 0) \cup [1; 3] \cup (4; \infty)$ b) $y = \frac{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x}}{\sqrt{3-x}}$
J: $[0; 1] \cup [2; 3)$

10. a) $y = \sqrt{\frac{x(x+1)}{(x-2)(4-x)}}$ J: $[-1; 0) \cup (2; 4)$ b) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}} + \frac{2}{x^2-49}$
J: $(-\infty; -7) \cup (-7; -2] \cup (1; 7) \cup (7; 8] \cup (11; \infty)$

№ 11. Fuksiyalarning qiymatlar sohasini toping.

1. $y = \frac{3}{x-4}$ J: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ 2. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ J: $[-1; 1]$

3. $y = 3 - \frac{x^2}{x^4+3x^2+1}$ J: $[2; 8; 3]$ 4. $y = \frac{x^2-4x+8}{x^2-4x+5}$ J: $(1; 4]$

$$\begin{array}{ll}
5. y = \frac{x^2 - 4x + 9}{x^2 - 4x + 5} & \text{J: } (1; 5] \\
6. y = |x - 1| + |x - 3| & \text{J: } [2; \infty) \\
7. y = |x + 2| + |x + 8| & \text{J: } [6; \infty) \\
8. y = \sqrt{x^2 - 2x + 10} & \text{J: } [3; \infty) \\
9. y = \sqrt{3x^2 - 4x + 5} & \text{J: } \left[\sqrt{\frac{11}{3}}; \infty \right) \\
10. y = \sqrt{x - x^2} & \text{J: } \left[0; \frac{1}{2} \right]
\end{array}$$

№ 12. Agar $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsa:

$$\begin{array}{ll}
1). f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(7 + 4x), f\left(-\frac{1}{2}\right) = ? & \text{J: } -5 \\
2). f(x) = \left(3 + \frac{1}{x}\right)(11 + 4x), f\left(-\frac{1}{2}\right) = ? & \text{J: } 9 \\
3). f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(2x + \frac{1}{4}\right), f(1) = ? & \text{J: } 1,5 \\
4). f(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)\left(4x + \frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{2}\right) = ? & \text{J: } 1,5 \\
5). f(x) = (2x + 1)\left(\frac{3}{x} - 3\right), f(-1) = ? & \text{J: } 6 \\
6). f\left(\frac{3x - 2}{2}\right) = x^2 - x - 1, f(1) = ? & \text{J: } -\frac{5}{9} \\
7). f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{f(x)} = ? & \text{J: } \frac{4x}{1 - x^2} \\
8). f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 1}, f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{x}{9}\right) = ? & \text{J: } -\frac{1}{3} \\
9). f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}, g(x) = \frac{1}{x^2}, f(g(2)) = ? & \text{J: } -15 \\
10). f\left(\frac{3x - 2}{2}\right) = x^2 - x - 1, f(0) = ? & \text{J: } -\frac{11}{9}
\end{array}$$

13. Quyidagi funksiyalar juft yoki toq bo'la oladimi?

$$\begin{array}{l}
1) y = x^3 - x^3; \quad 2) y = x^2 \cos x; \quad 3) y = x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}; \\
4) = \log_2 \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}; \quad 5) y = x + \frac{1}{x}, x \in [2; 4]; \\
6) = \frac{1}{x + \frac{1}{x}}; \quad 7) y = \sin(\cos x); \quad 8) y = |\cos^3 x|; \\
9) y = x - \frac{1}{x}; \quad 10) y = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}.
\end{array}$$

Javob: 1) toq; 2) juft; 3) toq; 4) toq; 5) juft ham emas, toq ham emas;

6) toq; 7) juft; 8) juft; 9) toq; 10) toq.

6-Amaliy mashg'ulot

Funksiya limiti. Funksiya uzluksizligi

$f(x)$ funksiya X to'plamda berilgan bo'lib, a nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin (umuman aytganda a nuqta X to'plamga tegishli bo'lishi shart emas).

1-ta'rif. Agar b nuqtaning har qanday ε atrofida doimo a nuqtaning shunday δ atrofi topilsaki, unda x argumentning ana shu atrofga tegishli istagan qiymati uchun $f(x)$ funksiyaning qiymati b nuqtaning ε atrofiga tegishli bo'lsa, x o'zgaruvchi a ga intilganda b son $f(x)$ funksiyaning limiti deyiladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ kabi belgilanadi.

Funksiya limitini topishda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, 1^∞ , 0^∞ kabi aniqmasliklarni «*ochib*» limitlarni hisoblash limitlar nazariyasining asosiy vazifasidir.

Misolalar.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 5x^2 - x + 2)$ limitni ko'phadning limitini topish qoidasiga ko'ra hisoblanadi.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 5x^2 - x + 2) = 3 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 9$$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2}$ limitning maxraji $x = 2$ da noldan farqli bo'lgani uchun kasr– rasional funksiyaning limitini hisoblash qoidasiga ko'ra topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2} = \frac{2^2 + 2 - 2}{2^2 - 2} = \frac{4}{2} = 2$$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x - 8}$ limitda bo'luvchining limiti nolga teng:

$\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 8) = 0$. Demak, bo'linmaning limiti haqidagi xossani qo'llab bo'lmaydi, chunki $4x - 8$ ifoda $x \rightarrow 2$ da cheksiz kichik miqdordir, unga teskari

miqdor $\frac{1}{4x-8}$ esa cheksiz katta miqdordir. Shuning uchun $x \rightarrow 2$ da $\frac{1}{4x-8} \cdot 5$

ko'paytma cheksiz katta miqdor, ya'ni $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{4x-8} = \infty$.

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{6x}{x^3-8} \right)$ ifoda $x \rightarrow 2$ da ikkita cheksiz katta miqdorning ayirmasidan iboratdir. Kasrlarni ayirib, surat va maxraji $x \rightarrow 2$ da nolga intiladigan kasrni hosil qilamiz. Kasrni $x-2$ ga qisqartirib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{6x}{x^3-8} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2x+4} = \frac{2-2}{4+4+4} = \frac{0}{12} = 0 \end{aligned}$$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-2x^2+3}{2x^4+1}$ limitni hisoblash uchun kasrning surat va maxrajini argumentning eng yuqori darajasiga, ya'ni x^4 bo'lamiz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-2x^2+3}{2x^4+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{2+\frac{1}{x^4}} = \frac{1-\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{2+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}.$$

Limitlarni hisoblash yo'llari.

Funksiyaning limiti uning argumentining intilgan sonida aniqlangan bo'lishiga bog'liq emas. Amalda esa funksiya limitini topishda bu munosabat katta ahamiyatga ega.

I. Agar berilgan $f(x)$ funksiya elementar bo'lib, x intilgan son uning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lsa, u holda funksiyaning limiti $f(x)$ ning x intilgan son qiymatidagi xususiy qiymatiga teng bo'ladi, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

1-misol.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+4}{x-1} = \frac{4-6+4}{1} = 2$, chunki elementar funksiya bo'lib, argument intilgan son uning aniqlanish sohasiga kirganligi uchun uning limiti funksiyaning argumenti intilgan son qiymatidagi xususiy qiymatiga teng.

Agar funksiyada argument ∞ ga yoki uning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lmagan songa intilsa, bu holda funksiya limitini topishda alohida tekshirish olib borish kerak bo'ladi.

Yuqorida bayon qilingan limitlar xossalariga suyanib, quyidagi ko'p uchraydigan limitlar topilgan:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} ax = \infty$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x} = 0$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -0} \frac{a}{x} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{agar } a < 1 \\ +\infty, & \text{agar } a > 1 \\ \infty, & \text{agar } a < -1 \end{cases}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a} = \infty$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{agar } |a| < 1 \\ +\infty, & \text{agar } 0 < a < 1 \\ \infty, & \text{agar } -1 < a < 0 \end{cases}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a}{x} = +\infty$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & \text{agar } a > 1 \\ -\infty, & \text{agar } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & \text{agar } a > 1 \\ +\infty, & \text{agar } 0 < a < 1 \end{cases}$$

Bu oddiy limitlardan formula tariqasida foydalanish mumkin, ularda qatnashgan $a > 0$ o'zgarmas sonidir.

Iz o x. $a < 0$ bo'lganda x faqat butun son qiymatlarini qabul qilishi mumkin, x ning hamma qiymatlari uchun $a < 0$ bo'lganda a^x aniqlanmagan.

Funksiya limitini topishda $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot \infty$, 1^∞ , 0^∞ kabi aniqmasliklarni «ochib» limitlarni hisoblash limitlar nazariyasining asosiy vazifasidir.

Bunda misollarga qarab, ma'lum algebraik va trigonometrik almashtirishlar bajarib, so'ngra limitlarni hisoblaymiz.

II. $x \rightarrow a$ yoki $x \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funksiya ikki cheksiz kichik miqdorning nisbatidan $\left(\frac{0}{0}\right)$ iborat bo'lgan hol.

2-misol. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x + 9} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{3(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{3} = \frac{1}{3}$

$$\underline{\text{3-misol.}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})}{2-x-2-x} =$$

$$= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2} = -\frac{\sqrt{2} + 2}{2}; \quad \text{Bundagi} \quad \text{2-misolda}$$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ dan foydalanildi, x_1, x_2 lar $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tenglamaning ildizlaridir;

3-misolda esa kasrning surat va maxrajini $(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x})$ ga ko'paytirib, maxrajdagi irrasionallikni yo'qotamiz, so'ngra x ga qisqartirdik.

$$\underline{\text{4-misol.}} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{5}}{5 \cdot \frac{x}{5}} = \frac{1}{5};$$

III. $x \rightarrow a$ yoki $x \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funksiya ikki cheksiz katta miqdorning nisbatidan $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ iborat bo'lgan hol.

5-misol.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + x^2}{x^4 + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}} = \frac{2 - \frac{5}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = 2;$$

Bu misolda $\left(\frac{\infty}{\infty} \right)$ ko'rinishdagi aniqmaslikni ochish uchun surat va maxrajini noma'lumning eng katta darajasiga bo'ldik.

IV. $x \rightarrow a$ yoki $x \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funksiya cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar ko'paytmasi $(0 \cdot \infty)$ dan iborat bo'lgan hol.

Bu hol ma'lum almashtirishlar yordamida **II** yoki **III** holga keladi.

$$\underline{\text{6-misol.}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \text{arcctg} x = (\infty \cdot 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha \cdot \text{ctg} \alpha = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} =$$

$\text{arcctg} x = \alpha$ deb belgilasak, $x = \text{ctg} \alpha$ ga ega bo'lamiz, bundan $x \rightarrow \infty$ da $\alpha \rightarrow 0$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \cos \alpha \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = 1 \cdot 1 = 1$$

V. $x \rightarrow a$ yoki $x \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funksiya ikki cheksiz katta miqdorlar ayirmasi ($\infty - \infty$) dan iborat bo'lgan hol.

Bu holda funksiyaning kasr bilan almashtirilsa, II yoki III hollardan biriga keladi.

7-misol.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x^2}{9x^3 + 6x^2 - 12x - 8} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{4}{x}}{9 + \frac{6}{x} - \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}} = \frac{2}{9}$$

VI. $x \rightarrow a$ yoki $x \rightarrow \infty$ da $f(x)$ funksiya asosi 1 ga, ko'rsatkichi ∞ ga intiladigan daraja (1^∞) bo'lgan hol.

Bunday funksiylarning limitini topishda 2 – ajoyib limitdan foydalaniladi.

8-misol.
$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{x}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{4}{2x} \cdot 2} = e^8$$

VII. Ekvivalent cheksiz kichiklardan foydalanib yechiladigan hol.

9-misol.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctg^2 x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar jadvaliga asosan:

$$\sin 2x + \arcsin^2 x - \arctg^2 x \sim \sin 2x \sim 2x$$

Quyidagi limitlarni hisoblang:

1. limitlarni hisoblang:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 4x^2 - x - 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 3}$; c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 2x^2}{x}$

2. limitlarni hisoblang:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x + 9}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 2x}$;

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})$; e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(10\sin^2 x + \cos^2 x + \frac{x-1}{3x+2} \right)$;

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$; m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. Ajoyib limitlardan foydalanib hisoblang:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x$;

Tarqatma materiallar

Berilgan limitlarni hisoblang.

1-variant

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$ 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 2n - 1}}{n + 2}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$ 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2 + 8x + 3} - \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \right)$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^x$

2-variant

- 1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2} - \sqrt[3]{n^2 + 1}}{\sqrt[5]{n^4 + 2} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}}$;

3-variant

- 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n^3 + 3n^2}{0,001n^3 - 100n^2 + 1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$; 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x - 2}{3x^2 - x - 4}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{3}}{x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$;

4-variant

- 1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 9x}$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$; 3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}$; 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+3x} - 1}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{x^2}$; 7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{3x-7}$;

5-variant

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 7x - 6}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 6x^2 + 5x - 1);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 1}{3x - 9}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-7};$$

6-variant

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3 + 8} \right); \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x});$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2};$$

7-variant

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{4x^2 + 6x - 64}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 5}{3x^2 + 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{x \sin x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{2-5x};$$

8-variant

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 8x + 5}{5x^3 + 4};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right); \quad 5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x};$$

9-variant

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \cdot \frac{3}{1-x^3}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2};$$

10-variant

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{3x^2 + x - 10}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{x^4 + 3x^2 + 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3};$$

7-Amaliy mashg'ulot

Differensial hisobning asosiy masalalari va metodlari

Funksiyaning hosilasi

1°. Funksiya hosilasining ta'rifi. Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a, b) da berilgan bo'lib, $a \in (a, b)$, $a + \Delta x \in (a, b)$ bo'lsin. Ma'lumki, bu funksiyaning a nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Δx ga bog'liq bo'ladi.

1-ta'rif. Agar Berilgan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi hosilasi deyiladi

va $f'(a)$, yoki $\frac{df(a)}{dx}$, yoki $y'|_{x=a}$ kabi belgilanadi.

Demak,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Masalan, $f(x) = x^2$ funksiyaning $a = 2$ nuqtadagi hosilasi

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4$$

bo'ladi.

2°. Hosila hisoblashning sodda qoidalari. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalari (a, b) da $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$f(x) + g(x), \quad f(x) - g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham hosilalarga ega va

$$1) [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$

$$2) [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x),$$

$$3) [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

$$4) \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

bo'ldi.

Misollar. 1. Berilgen

$$y = x^3 + \sin x$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◁ Yig'indining hosilasini topamiz qoidasidan foydalanamiz:

$$y' = (x^3 + \sin x)' = (x^3)' + (\sin x)' = 3x^2 + \cos x. \triangleright$$

2. Berilgen

$$y = \sqrt{x} \cdot e^x$$

funksiyaning hosilasi topilsin.

◁ Ko'paytmaning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x} \cdot e^x)' = \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} \right)' \cdot e^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot (e^x)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^x + x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x = \\ &= x^{\frac{1}{2}} \cdot e^x \cdot \left(\frac{1}{2} x^{-1} + 1 \right) = \sqrt{x} \cdot e^x \left(1 + \frac{1}{2x} \right). \triangleright \end{aligned}$$

3. Berilgen

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

◁ Nisbatning hosilasini topish qoidasidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \triangleright \end{aligned}$$

Yuqorida, elementar funksiyalar hosilalari uchun topilgan formulalarni jamlab, quyida jadval sifatida keltiramiz:

$$1. (c)' = 0;$$

$$2. (x)' = 1;$$

$$3. (x^n)' = nx^{n-1};$$

4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$
5. $(\sin x)' = \cos x;$
6. $(\cos x)' = -\sin x;$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
9. $(a^x)' = a^x \ln a;$
10. $(e^x)' = e^x;$
11. $(\ln x)' = \frac{1}{x};$
12. $(\log_x x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a};$
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
16. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

Topshiriqlar

1. $\sin(2x^2 + 3)$ tuwindisin tabin.
2. $y = \sin(4x - 1)$ tuwindisin tabin.
3. $f(x) = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}$ tuwindisin tabin.
4. $f(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$ tuwindisin tabin.
5. $y = 3\sin x + \cos x - x$ tuwindisin tabin.
6. $y = \cos(x^2 - 3)$ tuwindisin tabin.
7. $f(x) = \cos x(1 + \sin x)$ tuwindisin tabin.
8. $y = (1 + \sin 2x)\cos 2x$ tuwindisin tabin.
9. $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$ tuwindisin tabin.
10. $y = \ln(2x^2 - 3)$ tuwindisin tabin.
11. $y = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$ tuwindisin tabin.
12. $y = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{5x^3} + 4$ tuwindisin tabin.

13. $y = 4x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{2}{3}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 3x$ tuwindisin tabiń.
14. $y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + 8$ tuwindisin tabiń.
15. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ tuwindisin tabiń.
16. $y = (x^2 - 5x + 8)^6$ tuwindisin tabiń.
17. $y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}$ tuwindisin tabiń.
18. $y = x^2 \sin 2x$ tuwindisin tabiń.
19. $y = x^2 \sqrt{1 - x^2}$ tuwindisin tabiń.
20. $y = 2^{tg x}$ tuwindisin tabiń.
21. $y = \ln tg x$ tuwindisin tabiń.
22. $y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)}$ tuwindisin tabiń.
23. $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ tuwindisin esaplań.
24. $y = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}$ tuwindisin esaplan'.
25. $y = x^2 \cos x$ tuwindisin esaplan'.
26. $y = x^2 \sin x$ tuwindisin esaplan'.
27. $y = \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{4x^4}$ tuwindisin esaplan'.
28. $y = x - \frac{2}{x} - \frac{1}{3x^3}$ tuwindisin esaplan'.
29. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^2$ tuwindisin esaplan'.
30. $y = x \ln x$ tuwindisin esaplan'.
31. $y = \ln(x^2 + 2x)$ tuwindisin esaplan'.
32. $y = \frac{1 + \ln x}{x}$ tuwindisin esaplan'.
33. $y = \ln x - \frac{2}{x} - \frac{1}{2x^2}$ tuwindisin esaplan'.
34. $y = x^2 e^x$ tuwindisin esaplan'.

Tuwindisin tabiń.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1. $y = x^2(x - 4)^2$ | 15. $y = 6x^2 - x^3 - 16$ |
| 2. $y = 12x^2 - 8x^3 - 2$ | 16. $y = x(12 - x^2)$ |
| 3. $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$ | 17. $y = x^2(x - 1)^2$ |

$$4. y = x^3 + 6x^2 - 16$$

$$5. y = 16x^3 + 12x^2 - 5$$

$$6. y = (2x+1)^2(2x-1)^2$$

$$7. y = 2x^3 - 3x^2 - 4$$

$$8. y = 2 - 3x^2 - x^3$$

$$9. y = x^2(x-2)^2$$

$$10. y = 3x - x^3$$

$$11. y = (x+1)^2(x-1)^2$$

$$12. y = 23x^2 - x^3$$

$$13. y = 2 - 12x^2 - 8x^3$$

$$14. y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$$

$$18. y = x^3 + 3x^2$$

$$19. y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

$$20. y = x^2(2-x)^2 = x^2(2-x)^2$$

$$21. y = \frac{x^3}{3} + x^2$$

$$22. y = x^3 + 6x^2 + 9x$$

$$23. y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$$

$$24. y = x^2 - \frac{x^3}{3}$$

$$25. y = \frac{x^3}{3} + 2x$$

$$26. y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x$$

$$27. y = x^2(x+2)^2$$

$$28. y = x^3 - 12x$$

8-Amaliy mashg`ulot

Integral hisobning asosiy masalalari va metodlari

Aniqmas integral tushunchasi

1-Ta'rif. Berilgen $F(x) + C$ ifoda $f(x)$ funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi va $\int f(x)dx$ kabi belgilanadi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Bunda $\int$ integral belgisi, $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ esa **integral ostidagi ifoda** deyiladi.

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \text{ bo'ladi, chunki } n \neq -1 \text{ bo'lganda}$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

yoziqib, u yig'indining integrali integrallar yig'indisiga teng bo'lishi qoidasini ifodalaydi.

3. Agar $\int f(x)dx = F(x)$ bo'lsa, u holda $\int kf(x)dx = k \cdot F(x)$ bo'ladi, bunda k – o'zgarmas son ($k \neq 0$).

Misollar. 1. Berilgen $\int x^6 dx$ integral topilsin.

$F(x) = \frac{x^7}{7}$ deyilsa, unda $F'(x) = \left(\frac{x^7}{7}\right)' = \frac{1}{7} \cdot 7x^6 = x^6$ bo'ladi. Demak,

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C . \triangleright$$

Asosiy formulalar

Quyidagi eng sodda funksiyaning integrallarini keltiramiz:

1. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$, bunda C – o'zgarmas, chunki, $(x + C)' = 1$ bo'ladi.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$) bo'ladi, chunki $n \neq -1$ bo'lganda

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$$

bo'ladi. Agar $n = -1$ bo'lib, $x > 0$ bo'lganda

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C ,$$

chunki

$$(\ln x + C)' = \frac{1}{x} ;$$

$x < 0$ bo'lganda

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C ,$$

chunki $(\ln(-x) + C)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ bo'ladi. Umuman,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$$

3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ ($a > 0, a \neq 1$), chunki $\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{a^x \cdot \ln a}{\ln a} = a^x$

bo'ladi.

4. $\int e^x dx = e^x + C$, chunki $(e^x + C)' = e^x$.

5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$, chunki $(-\cos x + C)' = -(-\sin x) = \sin x$.

6. $\int \cos x dx = \sin x + C$, chunki $(\sin x + C)' = \cos x$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$, chunki $(\arcsin x + C)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$, chunki $(\operatorname{arctg} x + C)' = \frac{1}{1+x^2}$.
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$,
10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$,
11. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$,
12. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$,
13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$,
14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ bo'ladi.

Misollar.1. Berilgen $\int (10x^7 + 2x^5 - 7) dx$ integral esaplansin

◁ Asosiy formulalar hamda integralning xossalaridan foydalanib berilgan integralni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int (10x^7 + 2x^5 - 7) dx &= \int 10x^7 dx + \int 2x^5 dx - \int 7 dx = 10 \int x^7 dx + 2 \int x^5 dx - 7 \int dx = \\ &= 10 \cdot \frac{x^8}{8} + 2 \cdot \frac{x^6}{6} - 7x + C = \frac{5}{4} x^8 + \frac{1}{3} x^6 - 7x + C. \triangleright \end{aligned}$$

2. Berilgen $\int \frac{x^4 - x^3 + x + 1}{x^5} dx$ integral esaplansin.

◁ Bu integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 + x + 1}{x^5} dx &= \int \left(\frac{x^4}{x^5} - \frac{x^3}{x^5} + \frac{x}{x^5} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx + \int x^{-4} dx + \int x^{-5} dx = \\ &= \ln|x| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} + C. \triangleright \end{aligned}$$

3. Berilgen $\int x^n \sqrt[n]{x} dx$ integral esaplansin.

◁ Bu integral quyidagisha hisoblanadi:

$$\int x^n \sqrt[n]{x} dx = \int x \cdot x^{\frac{1}{n}} dx = \int x^{\frac{1}{n}+1} dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1+1}}{\frac{1}{n}+1+1} + C = \frac{n}{2n+1} x^2 \sqrt[n]{x} + C. \triangleright$$

Bo'laklab integrallash usuli

Aytaylik, $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar uzluksiz u' va v' hosilalarga ega bo'lsin.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (*)$$

(*) formula **bo'laklab integrallash formulasi** deyiladi.

1-misal. $\int x^2 \sin x dx$ integralintabın.

Sheshiliwi. $u = x^2$, $\sin x dx = d\vartheta$ dep belgileymiz, sonda

$$du = 2x dx, \quad \vartheta = \int \sin x dx = -\cos x. \text{ Bunnan}$$

$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx$, ekinshi qosılıwshı ushın bo'leklep integrallaw formulasın paydalanamız:

$$u = x, \quad \cos x dx = d\vartheta, \quad du = dx, \quad \vartheta = \sin x. \text{ Demek}$$

$$\int x^2 \sin x du = -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

Misollar. 1. Berilgen $\int x e^x dx$ integral esaplansın.

◁ Bu integralda $u = x$, $dv = e^x dx$ deb, $du = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$ bo'lishni topamiz. Bo'laklab integrallash formulasi ga ko'ra

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

bo'ladi. Demak,

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C. \triangleright$$

2. Berilgen $\int \ln x dx$ integral esaplansın.

◁ Bu integralda $u = \ln x$, $dv = dx$ deyilsa, unda $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$

bo'ladi. (1') formuladan foydalanib topamiz:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C. \triangleright$$

3. Berilgen $\int x \sin x dx$ integral esaplansın.

◁ Bu integralda $u = x$, $dv = \sin x dx$ deyilsa, unda $du = dx$, $v = \int \sin x dx = -\cos x$ bo'ladi. (*) formuladan foydalanib topamiz:

$$\int x \sin x dx = x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \cdot dx = -x \cos x + \sin x + C. \triangleright$$

4. Berilgen $\int \arctg x dx$ integral esaplansin.

◁ Bu integralda $u = \arctg x$, $dv = dx$ deb olamiz. Unda $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = x$ bo'lib,

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= x \cdot \arctg x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

bo'ladi. $\triangleright$

5-misal. $\int x e^{-2x} dx$ integralni tabiiy kerek.

Sheshiliwi: $u = x$, $d\mathcal{G} = e^{-2x} dx$ dep belgileymiz ha'm $du = dx$ ha'm

$$\int d\mathcal{G} = \int e^{-2x} dx, \mathcal{G} = -\frac{1}{2} e^{-2x} + C \text{ tabamiz.}$$

Endi (*) formulani qollanamiz.

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + C \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-2x} + Cx + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-2x} - Cx + C_1 = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} + C_1 \end{aligned}$$

Aniq integralni hisoblash

1°. Nyuton–Leybnits formulasi

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (1)$$

(1) formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

(1) tenglikning o'ng tomonidagi $\Phi(b) - \Phi(a)$ ayirma

$$\Phi(x) \Big|_a^b$$

kabi yoziladi:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) \Big|_a^b$$

Demak,

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Misollar. Quyida keltirilgan aniq integrallar N'yuton-Leybnits formulasi yordamida hisoblangan:

$$1) \int_1^2 x^9 dx = \frac{x^{10}}{10} \Big|_1^2 = \frac{2^{10}}{10} - \frac{1^{10}}{10} = \frac{1}{10}(1024 - 1) = 102,3;$$

$$2) \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} \Big|_0^1 = -e^{-1} - (-e^0) = -\frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{1}{e};$$

$$3) \int_a^b \cos x dx = \sin x \Big|_a^b = \sin b - \sin a;$$

$$4) \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}.$$

5-topshiriq. $\int_2^3 (x^3 + 2x) dx$. integral esaplansin.

◀ **Yechilishi:** Aniq integralning integralni ikki qismga ajratamiz va Nyuton – Leybnis formulasidan foydalanib, hisoblaymiz:

$$\int_2^3 (x^3 + 2x) dx = \int_2^3 x^3 dx + \int_2^3 2x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_2^3 + \frac{2x^2}{2} \Big|_2^3 = \frac{81}{4} - 4 + 9 - 4 = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4}. \blacktriangleright$$

6-topshiriq. $\int_2^3 (x^3 + 2x) dx$. integral esaplansin.

◀ **Yechilishi:** Aniq integralning integralni ikki qismga ajratamiz va Nyuton –Leybnis formulasidan foydalanib, hisoblaymiz:

$$\int_2^3 (x^3 + 2x) dx = \int_2^3 x^3 dx + \int_2^3 2x dx = \frac{x^4}{4} \Big|_2^3 + \frac{2x^2}{2} \Big|_2^3 = \frac{81}{4} - 4 + 9 - 4 = \frac{85}{4} = 21\frac{1}{4}.$$

bo‘ladi. $\blacktriangleright$

2°. Bo‘laklab integrallash usuli bilan aniq integrallarni hisoblash.

$$\int_a^b u dv = (uv) \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (2)$$

ham yozish mumkin.

Misollar. 1. Berilgen $\int_1^2 x e^x dx$ **integral esaplansin.**

◁ Bu integralda $u = x$, $dv = e^x dx$ deb olamiz. Unda $dv = dx$, $v = \int e^x dx = e^x$ bo‘lib, (2) formulaga ko‘ra

$$\int_1^2 x e^x dx = x \cdot e^x \Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = x \cdot e^x \Big|_1^2 - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2$$

boʻladi. ▷

2. Berilgan $\int_0^1 \arctg x dx$ **integral esaplansin.**

◁ Bu integralda $u = \arctg x$, $dv = dx$ deb olib, $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = x$

boʻlishini topamiz. Unda (2) formulaga koʻra

$$\int_0^1 \arctg x dx = x \cdot \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$$

boʻladi. ▷

3-topshiriq. $\int_a^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ integralni hisoblang.

◀ **Yechilishi:** Berilgan aniq integralni boʻlaklab integrallash usulida yechish uchun

$$x = u \text{ va } \cos x dx = dv$$

deb belgilaymiz. U holda,

$$dx = du \text{ va } v = \sin x$$

boʻladi. Bularni (6)ga qoʻyamiz:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \end{array} \middle| \begin{array}{l} \cos x dx = dv, \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1. \blacktriangleright \end{aligned}$$

4-topshiriq. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 3x dx$ integral esaplansin.

◀ **Yechilishi:**

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \end{array} \middle| \begin{array}{l} \cos 3x dx = dv, \\ v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} = \left[\frac{x}{3} \cdot \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx = \frac{1}{9} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \blacktriangleright$$

5-topshiriq. $\int_0^1 x e^x dx$ integralni hisoblang.

◀ **Yechilishi:** $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ formulani qoʻllaymiz:

$$\int_0^1 x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} x = u \\ dx = du \end{array} \right| \begin{array}{l} e^x dx = dv, \\ v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - \int_0^1 e^x dx =$$

$$= e - e^x \Big|_0^1 = e - e - e^0 = 1. \blacktriangleright$$

9-Amaliy mashg'ulot

Kombinatorikaning asosiy qoidalari va formulalariga oid misollar. Tasodifiy hodisa. Ehtimollik tushunchasi. Ehtimolliklarni hisoblash usullari. Tasodifiy miqdor. Taqsimot funksiyasi va qonuni tushunchasi

O'rinlashtirishlar. Teorema 1. o'rinlashtirishlar miqdori n elementdan to m gacha tuzilganlar uchun quyidagiga teng:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots[n-(m-1)] \quad (1)$$

O'rinalmashtirishlar. Teorema 2. m elementlardan tashkil topgan o'rinalmashtirishlar soni

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m! \quad (2)$$

ga teng. Bu yerda $!$ "faktorial" deb o'qiladi.

Gruppashlar Endi n ta elementdan m tadan tuzilgan gruppash (guruxlash) lar

$$\text{soni } C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\dots[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \quad (3)$$

formula bilan xisoblanadi.

Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar. m elimintli X to'plam elementlaridan to'zilgan k o'zunlikdagi kortejlar soni m^k ga teng ekan. Kombinatorikda bo'nday kortejlarni m elementdan k tadan takhohlanadigan o'rinlashtirishlar deyiladi va $\overline{A}_m^k = m^k$ deb belgilanadi

Misol. 4 elimintli $X = \{a, b, s, d\}$ to'plamdan nechta uzunligi 2 ga teng kortejlar to'zish mumkin.

Echish. $\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16$. Demak, 16 ta kortejlar to'zish mumkin. Bu kortejlar qo'yidagilardan iborat:

(a;a), (a;b), (a;c), (a;d)
 (b;a), (b;b), (b;c), (b;d)
 (c;a), (c;b), (c;c), (c;d)
 (d;a), (d;b), (d;c), (d;d)

Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar. Masala. m elimintli X to'plamni nechta xil usul bilan tartiblash mumkin?

m elementli X to'plamni $P_m = m!$ usul bilan tartiblash mumkin ekan. P_m - ni m elementdan takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar soni deb ataladi.

Misol. 12 ta mexmoni 12 ta stulga nechta xil usul bilan o'tirg'izish mumkin.

Yechish. Bu 12 elementdan takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar sonini topish masalasi bolib

$$P_{12}=12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \text{ ga teng.}$$

Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar. Masala. m elementli X to'plamdan nechta tartiblangan k elementli to'plamlar to'zish mumkin?

U A_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar soni deb ataladi:

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

$A_m^m = P_m = m!$, $0! = 1$ deb qabul qilinadi.

Misol. Auditoriyadagi 30 talabadan 3ta faol talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = \frac{1 \cdot 2 \dots 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \dots 27} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24360$ usul bilan tanlash mumkin.

Takroelanmaydigan guruhlashlar. Masala. m elementli X to'plamning nechta k elementli qism to'plamlari bor? m elementli X to'plamning k elementli qism

to'plamlari soni $C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ formula bilan hisoblanadi va u m elementdan k

tadan takrorlanmaydigan guruhlashlar soni diyladi.

Misol. Guruhdagi 30 talabani ko'rikda ishtirok etish uchun 5 talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Echish. Ko'rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 30 elementli to'plamning 5 elementli qism to'plamlar soni nechtaligini topamiz:

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{5!25!} = \frac{1 \cdot 2 \dots 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 25} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 6}{1} = 144306$$

Demak, 5 talabani 144306. usul bilan tanlash mumkin.

1. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plam elementlaridan uzunligi k gat eng bo'lgan m^k kortejlar tuzish mumkin: $\bar{A}_m^k = m^k$

Buni m elementdan k tadan takrorlanadigan o'rinlashtirishlar diyiladi.

1 - misol. 3 elementli $x = \{1, 2, 3\}$ to'plam elementlaridan uzunligi ikkiga teng bo'lgan nechta kortish tuzish mumkin.

Yechish. $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$ ta kortij tuzish mumkin. Mana ular.

(1;1) (1;2), (1;3)

(2;1) (2;2), (2;3)

(3;1) (3;2); (3;3)

2 - misol. 6 raqamli barcha telefon nomerlar sonini toping.

Yechish. Telefon nomerlar 0 dan 9 gacha bo'lgan o'nta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartiblangan uzunligi 6 ga teng bo'gan kortijlar sonini topamiz: $\bar{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$

2. Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar. Malumki m elementli X to'plam elementlarini to'rli usullar bilan tartiblashlarning umumiy soni

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot m = m! \text{ ga teng}$$

1 - misol. 5 ta talabani 5 stulga necha xil usul bilan o'tqazish mumkin?

Yechish. Masala 5 elementdan 5 tadan takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar sonini topishga keltiradi. $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Demak, ularni 120 xil usul bilan o'tirg'izish mumkin

3. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar. m elementli X to'plamdan tuziladigan barcha tartiblangan n elementli to'plamlar soni

$$A_m^n = m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!} \text{ ga teng.}$$

1 - misol. Guruhdagi 25 talabadan tanlovga qatnashish uchun 2 talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $A_{25}^2 = \frac{25!}{23!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 23} = 24 \cdot 25 = 600$ usul bilan tanlash mumkin.

2- misol. 8 kishidan sardor, oshpaz, choyxonachi va navbachilardan iborat. 4 kishini tanlash kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Yechish. Bu masala 8 keshidan 4 tadan takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar sonini topishga keltiriladi. Demak, $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ usul bilan 4 kishini tanlash mumkin.

4. Takrorlanmaydigan guruhlashlar. M elementli X to'plamning k elementli qism to'plamlari soni

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_m} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

formula bo'yicha topiladi.

1 - misol. Kursdagi 20 talabadan ko'pirida ishtirok etish uchun 5 talabani necha xil usulda tanlash mumkin.

Yechish. Ko'rik ishtirikchilarning tartibga ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 20 elementli to'plamning 5 elementli qism to'plamlari soni nechtaligini topamiz:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 4 = 10704$$

Demak, 5 talabani 10704 usul bilan tanlash mumkin ekan.

2 - misol. 6 ta har xil rangli qalamdan 4 xil rangli qalamni necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 = 15$ xil usul bilan tanlash mumkin.

1-masala. Fo'tbol bo'yicha musaboqaga 18 ta komanda qatnashmoqda. Musobaqa g'oliblari oltin, kumush va bronza medali bilan mukofatlanadi. Komandalarga medallar necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin?

Yechish. Masala yechimi (1) formula bilan hisoblanadi.

$$A_{18}^3 = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$$

2-masala. Mashg'ulotda 12 ta basketbolchi qatnashmoqda. Trener har xil beshlik o'yinchilarni nechta usul bilan tuzish mumkin?

Yechish. Masala yechimi (3) formula bilan hisoblanadi

$$C_{12}^5 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 792$$

3-masala. Shaxmat taxtasida 8 ta to`ra (rux)ni bir-birini olmaydigan qilib nechta usul bilan tuzish mumkin?

Yechish. Bunday xilda shaxmat taxtasida gorizontal va vertikal yʻmalishda faqat bittadan to`ra (rux) joylashtirish mumkin. Mumkin bo`lgan joylashtirishlar (vaziyatlar) 8 elementdan tuzilgan o`rinalmashtirishlardan iborat bo`ladi, ya`ni

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

4-Misol. Xorijiy tillar fakulteti ingliz tili yo`nalishining birinchi kursida 10 ta fan o`qitiladi va har kuni 4 xil dars o`tiladi. Kunlik dars necha usul bilan taqsimlab qo`yilishi mumkin?

Yechish: Darslarning barcha mumkin bo`lgan kunlik taqsimoti o`n elementdan to`rttadan olib tuzish mumkin bo`lgan barcha o`rinlashtirishlardan iborat. Uni

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

formuladan foydalanib topamiz. Bizda $n = 10$, $k = 4$ bo`lgani uchun

$$A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$$

5-Misol. Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqamlar bilan ifoda qilinadigan bo`lsa, qancha butun son tuzish mumkin?

Yechish: Izlangan son 9 ta qiymatli raqamdan 3 tadan olib tuzilgan o`rinlashtirishlardan iborat. Ya`ni,

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504.$$

Buni $A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots [n-(k-1)]$ formuladan ham topish mumkin. Unga asosan $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

6 - misol. 3 elementli $x = \{1, 2, 3\}$ to`plam elementlaridan uzunligi ikkiga teng bo`lgan nechta kortish tuzish mumkin.

Yechish. $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$ ta kortij tuzish mumkin. Mana ular.

(1;1) (1;2), (1;3)

(2;1) (2;2), (2;3)

(3;1) (3;2);(3;3)

7 - misol. 6 raqamli barcha telefon nomerlar sonini toping.

Yechish. Telefon nomerlar 0 dan 9 gacha bo`lgan o`nta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartiblangan uzunligi 6 ga teng bo`gan kortijlar sonini topamiz: $\bar{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$

8 - misol. Guruhdagi 25 talabadan tanlovga qatnashish uchun 2 talabani nechta xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $A_{25}^2 = \frac{25!}{23!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdots 23} = 24 \cdot 25 = 600$ usul bilan tanlash mumkin.

9- misol. 8 kishidan sardor, oshpaz, choyxonachi va navbachilardan iborat. 4 kishini tanlash kerak. Buni nechta xil usulda amalga oshirish mumkin?

Yechish. Bu masala 8 keshidan 4 tadan takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar sonini topishga keltiriladi. Demak, $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ usul bilan 4 kishini tanlash mumkin.

10 - misol. Kursdagi 20 talabadan ko'pirida ishtirok etish uchun 5 talabani necha xil usulda tanlash mumkin.

Yechish. Ko'rik ishtirokchilarning tartibga ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 20 elementli to'planning 5 elementli qism to'plamlari soni nechtaligini topamiz:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 4 = 10704$$

Demak, 5 talabani 10704 usul bilan tanlash mumkin ekan.

11- misol. 6 ta har xil rangli qalamdan 4 xil rangli qalamni necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 = 15$ xil usul bilan tanlash mumkin.

12-Misol. Auditoriyadagi 30 talabadan 3ta faol talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin.

Yechish. $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdots 27} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24360$ usul bilan tanlash mumkin.

13-Misol. Guruhdagi 30 talabani ko'rikda ishtirok etish uchun 5 talabani necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish. Ko'rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 30 elementli to'planning 5 elementli qism to'plamlar soni nechtaligini topamiz:

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{5!25!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 25} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 6}{1} = 144306$$

Demak, 5 talabani 144306. usul bilan tanlash mumkin.

14-Misol: Sinfdagi 26 o'quvchidan guruh sardori va proforgini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$$\text{Yechish: } A_m^k = m * (m-1) * \dots * (m-n+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

$$A_{26}^2 = \frac{26!}{24!} = 25 \cdot 26 = 650 \text{ (usul bilan)}$$

15-Misol: 20 kishilik guruhdan, 4 kishilik nomzodni necha usul bilan saylash mumkin.

$$\text{Yechish: } C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

$$C_{20}^4 = \frac{20!}{16!4!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845 \text{ ta usul}$$

16-mısal. 4 elementli $X=\{a,b,s,d\}$ kòplikten neshe uzınlıǵı 2 ge teń kortejler dúziw múmkin.

Sheshiliwi: $\bar{A}_4^2 = 4^2 = 16$. Demek, 16 kortejler dúziw múmkin. Bul kortejler tòmendegilerden ibarat:

(a;a), (a;b), (a;c), (a;d)

(b;a), (b;b), (b;c), (b;d)

(c;a), (c;b), (c;c), (c;d)

(d;a), (d;b), (d;c), (d;d)

17 - mısal. 3 elementli $x=\{1,2,3\}$ kòplik elementlerinen uzınlıǵı ekige teń bolǵan neshe kortej dúziw múmkin.

Sheshiliwi: $\bar{A}_3^2 = 3^2 = 9$ ta kortej dúziw múmkin. Olar.

(1;1) (1;2), (1;3)

(2;1) (2;2), (2;3)

(3;1) (3;2);(3;3)

18 - mısal. 6 xanalı barlıq telefon nomerler sanın tabıń.

Sheshiliwi: Telefon nomerler 0 den 9 ǵa shekem bolǵan on sanlardan dúzilgeni ushın 10 elementten dúzilgen barlıq tårtiplengen uzınlıǵı 6 ǵa teń bolǵan kortejlar sanın tabamız: $\bar{A}_{10}^6 = 10^6 = 1000000$

19-mısal. 12 miymandı 12 stolǵa neshe túrli usıl menen otırǵızıw múmkin.

Sheshiliwi: Bul 12 elementten tákırarlanbaytuǵın orın almasırwlar sanın tabıw maselesi bolıp

$$P_{12}=12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \text{ ge teń.}$$

Demek, 12! Usıl menen miymanlardı otırǵızıw múmkin.

20 - mısal. 5 talabanı 5 stolǵa neshe túrli usıl menen otırǵızıw múmkin?

Sheshiliwi: Masele 5 elementten 5 ewden tákırarlanbaytuǵın orın almasırwlar sanın tabıwǵa keltiriledi. $P_5=5!= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$

Demek, olardı 120 túrli usıl menen otırǵızıw múmkin

21-mısal. Auditoriyadaǵı 30 talabadan 3 wi aktiv talabanı neshe túrli usıl menen tańlaw múmkin.

Sheshiliwi: $A_{30}^3 = \frac{30!}{27!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdots 27} = 28 \cdot 29 \cdot 30 = 24360$ usıl menen tańlaw múmkin.

22- mısál. Topardaǵı 25 talabadan tańlawǵa qatnasıw ushın 2 talabanı neshe túrli usıl menen tańlaw múmkin.

Sheshiliwi: $A_{25}^2 = \frac{25!}{23!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdots 23} = 24 \cdot 25 = 600$ usıl menen tańlaw múmkin.

23- mısál. 8 adamnan sardar, aspaz, chayxanashı hám nàwbechilerden ibarat. 4 adamdı tańlaw kerek. Bunı neshe túrli usılda àmelge asırıw múmkin?

Sheshiliwi: Bul màsele 8 adamnan 4 ewden tàkirarlanbaytuǵın orınlastırıwlar sanın tabıwǵa keltiriledi. Demek, $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ usıl menen 4 adamdı tańlaw múmkin.

24-mısál. Topardaǵı 30 talabanı kòrikten òtkeriw ushın 5 talabanı neshe túrli usıl menen tańlaw múmkin?

Sheshiliwi: Kòrik qatnasıwshılarınıń tàrtibi àhmiyetke iye bolmaǵanı ushın 30 elementli kòpliktiń 5 elementli úles kòplikler sanı neshew ekenin tabamız:

$$C_{30}^5 = \frac{30!}{5!25!} = \frac{1 \cdot 2 \cdots 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 25} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 6}{1} = 144306$$

Demek, 5 talabanı 144306. usıl menen tańlaw múmkin.

25 - mısál. Kursdaǵı 20 talabadan konkursǵa qatnasıw ushın 5 talabanı neshe túrli usılda tańlaw múmkin?

Sheshiliwi: Konkurs qatnasıwshılarınıń tartibi àhmiyetke iye bolmaǵanı ushın 20 elementli kòpliktiń 5 elementli úles kòplikleri sanı neshew ekenligin tabamız:

$$C_{20}^5 = \frac{20!}{15!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 15 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 16 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 19 = 15504$$

Demek, 5 talabanı 15504 usıl menen tańlaw múmkin eken.

26 - mısál. 6 hàr túrli reńli qàlemnen 4 túrli reńli qàlemdi neshe túrli usıl menen tańlaw múmkin.

Sheshiliwi: $C_6^4 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 3 = 15$ túrli usıl menen tańlaw múmkin.

Tasodifiy hodisa tushunchasi

1-ta'rif. Tayin biror tajribani o'tkazish natijasida yuz berishi ham, yuz bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa shu tajribaga nisbatan **tasodifiy hodisa** deyiladi.

Tanga tashlaganda gerbli tomonning tushishi, o'q uzilganda nishonga tegish, lotereya biletiga yutuq chiqishi, soqqa tashlaganda 6 ochkoning tushishi va hokazolar tasodifiy hodisalarga misol bo'ladi. Tasodifiy hodisalar A, B, S va hokazolar bilan belgilanadi.

Tajriba natijasida albatta yuz beradigan hodisalar **muqarrar hodisalar** deyiladi.

Xuddi shunga o'xshash tajriba natijasida mutloqo yuz bermaydigan hodisa, **mumkin bo'lmagan** hodisa deyiladi.

1-misol. Tanga tashlash tajribasini qaraymiz. A hodisa gerbli tomonning tushishi bo'lsin. $P(A)$ ni aniqlang.

Yechish. Tanga bir jinsli va deformatsiyalanmagan bo'lsa tanga tashlashning ko'p seriyasida gerbli va raqamli tomonlarning tushishi o'rtacha bir xil takrorlanadi. Bundan ko'rinadiki, A hodisa yuz berishining nisbiy chastotasi μ ning qiymatlari $\frac{1}{2}$ son atrofida tebranadi. Demak, $P(A) = \frac{1}{2}$ bo'ladi.

2-misol. Yashikda 20 ta shar yotibdi: 8 ta oq, 12 ta qora. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar bo'lishi ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Tajriba juda ko'p marta takrorlansa sharlarning teng imkoniyatli yekanligini nazarga olsak qora sharning chiqish nisbiy chastotasi taqriban yashikdagi sharlar ichida qora sharlar tashkil qiladigan ulushga teng deb hisoblasa bo'ladi, ya'ni $\mu = \frac{12}{20}$. Demak, $P(A) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6$.

3-misol. Kub formasidagi o'yin soqqasi yoqlari 1 dan 6 gacha nomerlangan. O'yin soqqasi tashlanganda 5 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Agar soqqa bir jinsli materialdan tayyorlangan bo'lsa, uning yoqlarining tushishi teng imkoniyatli bo'ladi va $P(A) = \frac{1}{6}$ deb hisoblash mumkin.

4-misol. 36 dastali kartadan bitta karta tortib olindi. Chillik turdagi kartaning kelib chiqish ehtimoli qanday?

Yechish. Bunda hammasi bo'lib 36 mavjud hol bo'lib, ulardan 9 tasida A hodisa (chillik chiqishi) ro'y beradi. Demak, nisbiy chastota $\mu = 9/36$, ya'ni $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

5-misol. Berilgan obektga qarab to'pdan bir xil sharoitda 5 ta o'q uzildi va 2 tasi mo'ljalga tegdi. A hodisa o'qning nishonga tegishi. O'qning nishonga tegishining nisbiy chastotasi qanday bo'ladi?

Yechish. $\mu = \frac{2}{5}$ bo'ladi. Chunki bunda 5 ta hol mavjud hol bo'lib, ulardan 2 tasida A hodisa ro'y bergan. Demak, $P(A) = \frac{2}{5}$ bo'lishi ravshan.

Klassik ta'rifda A hodisaning ehtimoli

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

tenglik bilan aniqlanadi, bu erda **m** – tajribaning A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni, **n** – sinovning muhim bo'lgan elementar natijalari jami soni.

1-misol. Yashikda 20 ta shar bo'lib, ular 1 dan 20 gacha nomerlangan. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Bu sharining nomeri 20 dan katta bo'lmaslik (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Yashikdagi sharlarning istalganining nomeri 20 dan oshmaydi. Shuning uchun bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar soni va barcha mumkin bo'lgan hollar soni o'zaro teng: $m=n=20$ va $P(A) = \frac{m}{n} = 1$. Bu holda A hodisa muqarrar hodisadir.

2-misol. Yashikda 10 ta shar yotibdi: 4 ta oq, 6 ta qora. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qizil shar bo'lish (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Yashikda qizil shar yo'q, ya'ni $m=0$, lekin, $n=10$. Demak, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{0}{10} = 0$. Bu holda A hodisa mutlaqo yuz bermaydigan hodisadan iborat.

3-misol. Tanga tashlash tajribasini qaraymiz. A hodisa gerbli tomonning tushishi. Tanga deformatsiyalanmagan va bir jinsli materialdan tayyorlangan. Tanga tashlashning ko'p seriyada gerbli va raqamli tomonlarining tushishi o'rtacha bir xil takrorlanadi deb kutish mumkin. Buni tanganing ikkala tomoni «Teng huquqli» (teng imkoniyatli) deb ifodalash mumkin. A hodisa yuz berishining μ nisbiy chastotasi $\frac{1}{2}$ son atrofida tebranadi. Shunday qilib, $\mu = \frac{N_A}{N}$ va demak,

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ bo'ladi.}$$

4-misol. Yashikda 15 ta shar bor: 10 ta oq, 5 ta qora. Ushlab ko'rish bilan ularni farqlab bo'lmaydi. Yashikdan tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Tajriba juda ko'p marta takrorlansa sharlarning «teng huquqli»ligidan qora sharning chiqish (ehtimoli) chastotasi taqriban yashikdagi sharlar ichida qora sharlar tashkil qiladigan «ulush» ga teng bo'ladi deb hisoblash mumkin, ya'ni $\frac{5}{15}$. Demak, $P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

5-misol. 36 ta kartali dastadan bitta karta tortib olindi. Chillik turdagi kartaning kelib chiqish ehtimoli qanday?

Yechish. Bunda hammasi bo'lib 36 ta mavjud hol bo'lib, ulardan 9 tasida A hodisa (chillik chiqishi) ro'y beradi. Demak, nisbiy chastota $\mu = \frac{9}{36}$ bo'lib,

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

6-misol. Berilgan ob'ektga qarab miltiqdan bir sharoitda 5 ta o'q uzildi va 2 tasi mo'ljalga tegdi. A hodisa o'qning nishonga tegishi. O'qning nishonga tegishining nisbiy chastotasi qanday bo'ladi?

Yechish. Nisbiy chastota $\mu = \frac{2}{5}$ bo'ladi. Chunki, bunda 5 ta hol mavjud bo'lib, ulardan 2 tasida A hodisa ro'y bergan. Bu holda $P(A) = \frac{2}{5}$ bo'lishi ravshan.

7-misol. Kub formasidagi o'yin soqqasi yoqlari 1 dan 6 gacha nomerlangan. O'yin soqqasi tashlanganda 5 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Soqqa bir jinsli materialdan tayyorlangan deb faraz qilsak, uning yoqlarining tushishi «teng huquqli» bo'ladi va $P(A) = \frac{1}{6}$ deb hisoblash mumkin.

8-misol. 21 ta standart va 10 ta nostandart detal solingan Yashikni tashish vaqtida bitta detal yo'qolgan, biroq qanday detal yo'qolgani ma'lum emas. Yashikni tashishdan keyin tavakkaliga olingan detal standart detal bo'lib chiqdi. Standart detal yo'qolgan bo'lishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Olingan standart detal yo'qolmaganligi ravshan. Qolgan $21+10-1=30$ ta detalning istalgan biri yo'qolgan bo'lishi mumkin, shu bilan birga ularning orasida $21-1=20$ ta detal standartdir. Standart detal yo'qolgan bo'lish ehtimoli $P(A) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ ga teng.

9-misol. Raqamlari har xil ikki xonali son o'ylangan. O'ylangan son tasodifan aytilgan raqamlari har xil ikki xonali son bo'lishi ehtimolini toping.

Yechish. 10 dan 99 gacha sonlar ikki xonali. Raqamlari bir xil ikki xonali sonlar 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 lar bo'lib, ular 9 ta. 10 dan 99 gacha 90 ta son bor. Raqamlari har xil ikki xonali sonlar $90-9=81$ ta. Demak, $P(A) = \frac{1}{81}$ bo'ladi.

10-misol. Texnik nazorat bo'limi tasodifan ajratib olingan 100 ta kitobdan iborat partiyada 5 ta yaroqsiz kitob topdi. Yaroqsiz kitoblar chiqishi nisbiy chastotasini toping.

Yechish. Yaroqsiz kitoblar chiqishi A hodisa bo'lsin. A hodisa nisbiy chastotasi A hodisa ro'y bergan sinovlar sonining o'tkazilgan sinovlar jami soniga nisbatiga teng: $\mu(A) = \frac{5}{100} = 0,05$.

11-misol. Ikkita o'yin soqqasi tashlangan. Soqqalarning yoqlarida tushgan ochkolar yig'indisi 7 ga teng bo'lish ehtimolini toping.

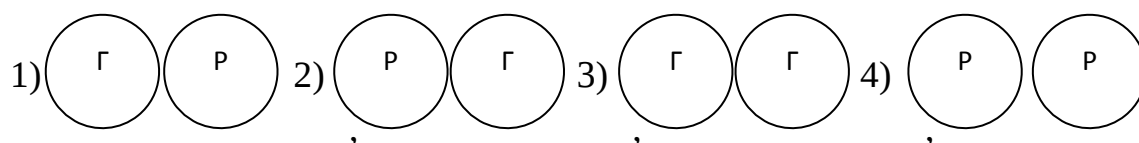
Yechish. A- hodisa ochkolar soni yig'indisi 7 ga teng hollar soni 6 ta bo'ladi:

1	6,	6	1,	2	5,	5	2,	3	4,	4	3
---	----	---	----	---	----	---	----	---	----	---	---

$$\text{Demak, } P(A) = \frac{1}{6}.$$

12-misol. Tanga ikki marta tashlangan. Hech bo'lmaganda bir marta «gerbli» tomon tushishining ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi tashlaganda «gerb» tushish ehtimoli A_1 bo'lsin. Bunda quyidagi hollar kuzatiladi:



Ko'rinib turibdiki, to'rtta tajribada «gerb» ning hech bo'lmaganda tushishi uchta holatda kuzatiladi. Demak, hech bo'lmaganda bir marta «gerbli» tomon tushish (A hodisa) ehtimoli $P(A) = \frac{3}{4}$.

13-misol. Yashikda 12 ta shar yotibdi: 3 ta oq, 4 ta qora va 5 ta qizil sharlar. Tavakkaliga bitta shar olindi. Uning qora shar chiqishi (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Bu yerda $m=4$, $n=12$, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

14-misol. Yashikda 10 ta shar bor: 6 ta oq va 4 ta qora. Tavakkaliga 2 ta shar olindi. Ikkala shar ham oq bo'lishi (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. Bu masalada mumkin bo'lgan barcha hollar soni $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$ ta. A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hollar soni esa $m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Demak, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

15-misol. Karton kartochkalarda A, O, L, M harflar yozilgan. Kartochkalar aralashtirilib, qator qilib terildi. OLMA so'zining kelib chiqishi (A hodisa) ehtimoli qanday?

Yechish. To'rtta kartochkani har xil joylashtirish bir-biridan ularning tartibi bilan farq qiladi. Mumkin bo'lgan barcha hollar soni $n = 4!$ elementdan o'rin almashtirishlar soniga teng: $n = p_4 = 4! = 24$. Bu hollar «teng huquqli», birgalikda bo'lmagan va bir xil imkoniyatli. OLMA so'zining kelib chiqishiga qulaylik tug'diruvchi hollar soni m birga teng. Demak, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{24}$.

16-misol. 2000 loteriya bileti sotilgan. Bunda 1 ta biletga 100000 so'm, 4 ta biletga 50000 so'm, 10 ta biletga 20000 so'm, 20 ta biletga 10000 so'm, 165 ta biletga 5000 so'm, 400 ta biletga 1000 so'mdan yutuq chiqishi belgilangan qolgan biletlar yutuqsiz. Bitta biletga 10000 so'mdan kam bo'lmagan yutuq chiqish ehtimoli qanday?

Yechish. Bu yerda $m = 1 + 4 + 10 + 20 = 35$, $n = 2000$ chunki, 35 ta biletga 10000 so'mdan yuqori yutuqlar belgilangan.

$$\text{Shuning uchun, } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{35}{2000} = 0,0175.$$

17-misol. Yashikda 6 ta oq va 4 ta qora shar yotibdi. A hodisa yashikdan tavakkaliga olingan 5 ta sharning 3 tasi oq va 2 tasi qora shar bo'lishidan iborat. Bu hodisaning ehtimoli nimaga teng?

Yechish. Sharlarning umumiy soni 10 ga teng. Shuning uchun barcha mumkin bo'lgan hollar soni $n = C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$; 3 ta oq sharni

$$m_1 = C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20 \text{ usul bilan; } 2 \text{ ta qora sharni } m_2 = C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6 \text{ usul bilan}$$

olish mumkin. Sharlarni tanlashning bu ikkala usulini birlashtirib 3 ta oq va 2 ta qora shar tanlash uchun qulaylik tug'diruvchi hollar soni $m = m_1 \cdot m_2 = 120$ tengligini topamiz. Demak, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{120}{252} = \frac{10}{21}$.

18-misol. O'yin soqqasi ikki marta tashlandi. Ikkala tashlanganda ham tushgan ochkolar yig'indisi 8 teng bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Birinchi tashlanganda i ochkoning, ikkinchi tashlanganda esa j ochkoning tushishini A_{ij} orqali belgilaymiz. U holda

$$A_{11} A_{12} \dots A_{16}$$

$$A_{21} A_{22} \dots A_{26}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_{61} A_{62} \dots A_{66}$$

Ko'rinishdagi 36 ta hodisani o'yin soqqasini ikki marta tashlashdan iborat tajribaning elementar natijalari sifatida qarash mumkin. Tushgan ochkolar yig'indisi 8 ga teng (A hodisa) bo'lishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar $A_{17}, A_{26}, A_{35}, A_{44}$ dan iborat. Demak, $m=4, n=36$ bo'lib, $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ bo'ladi.

Ehtimollar nazariyasining aksiomalari va ulardan foydalanib ehtimollarni hisoblash

1. Agar A va B lar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ular yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig'indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Buni oddiy qo'shish aksiomasi deyiladi.

2. Ikkita birgalikda bo'lgan A va B hodisalardan kamida bittasining ro'y berish ehtimoli bu hodisalarning ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolini ayirish natijasiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

3. Ikkita erkli hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli bu hodisalar ehtimollarining ko'paytmasiga teng:

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B)$$

4. Ikkita bog'liq hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli ulardan birining ehtimolini ikkinchisining shartli ehtimoliga ko'paytirilganiga teng:

$$P(AB)=P(A)P(B/A)$$

$$P(AB)=P(B)P(A/B)$$

5. A hodisaning ro'y bermasligidan iborat hodisa $\bar{A}$ ga qarama-qarshi hodisa deyiladi va $\bar{A}$ bilan belgilanadi. Bunda:

$$P(A)+P(\bar{A})=1, \quad P(\bar{A})=1-P(A)$$

6. Biror tajribada $A_1, A_2 \dots, A_n$ birgalikda bo'lmagan hodisalardan bittasi ro'y berishi mumkin bo'lsa, $A_1, A_2 \dots, A_n$ lar hodisalarning to'liq guruhini tashkil etadi deyiladi.

1-masala. Yashikda 10 ta oq, 15 ta qora, 20 ta ko'k va 25 ta yashil sharlar bor. Tavakkaliga bitta shar olindi. Olingan sharning 1) oq, 2) qora, 3) ko'k, 4) yashil, 5) oq yoki qora, 6) ko'k yoki yashil, 7) oq, qora yoki yashil bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Barcha sharlarning soni $n=10+15+20+25=70$.

1) Olingan sharning oq bo'lish ehtimoli $P(O)=\frac{10}{70}=\frac{1}{7}$;

$$2) P(Q) = \frac{15}{70} = \frac{3}{14};$$

$$3) P(K) = \frac{20}{70} = \frac{2}{7};$$

$$4) P(Ya) = \frac{25}{70} = \frac{5}{14};$$

$$5) P(O+Q) = P(O) + P(Q) = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14};$$

$$6) P(K+Ya) = P(K) + P(Ya) = \frac{2}{7} + \frac{5}{14} = \frac{9}{14};$$

$$7) P(O+Q+K) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}.$$

2-masala. A hodisa o'yin soqqasini tashlash tajribasida 2 ga karrali sonning tushishi, B hodisa 3 ga karrali sonning tushishi. A+B hodisa nimani anglatadi. AB hodisa-chi?

Yechish. A+B (hodisa) yig'indisi A va B hodisalaridan hech bo'lmaganda birining yuz berishidan iborat bo'lgani uchun A+B hodisa 2, 3, 4, 6 sonlardan birortasining tushishidan iborat bo'ladi.

AB hodisa deb A va B hodislarning birgalikda yuz berishidan iborat hodisa bo'lgani uchun bizning holda AB hodisa 6 ochko tushishini anglatadi.

3-masala. O'yin soqqasi tashlandi. Bunda juft sondagi ochko tushish ehtimoli nimaga teng?

Yechish. A_i bilan i-ochkoning tushishini belgilaymiz ($i=1, \dots, 6$). A hodisa A_2, A_4, A_6 hodisalaridan hech bo'lmaganda birining yuz berishidan iborat: $A = A_2 + A_4 + A_6$.

A_2, A_4, A_6 hodisalar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalaridir, u holda qo'shish aksiomasiga ko'ra

$$P(A) = P(A_2 + A_4 + A_6) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

4-masala. Yashikda 15 ta shar bo'lib, ulardan 5 tasi qizil. Yashikdan tavakkaliga 3 ta shar olindi. Olingan sharlardan hech bo'lmaganda bittasi qizil bo'lishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Olingan uchta sharlardan hech bo'lmaganda bittasi qizil bo'lish talabi quyidagi uchta birgalikda bo'lmagan hodisadan istalgan biri ro'y berganda bajariladi: B – bitta shar qizil, ikkitasi boshqa rangda, C – ikkita shar qizil, bittasi boshqa rangda, D – uchala shar ham qizil. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa bu hodisalarning yig'indisi ko'rinishida yozilishi mumkin:

$$A = B + C + D$$

Qo'shish aksiomasiga ko'ra:

$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D) \quad (1)$$

B, C, D hodisalarning ehtimollarini topamiz:

1) 15 ta shardan 5 tasi qizil. Tavakkaliga 3 ta shar olingan. Olingan sharlar ichida ikkitasi qizil bo'lish ehtimolini topamiz. Sinovning mumkin bo'lgan elementar natijalari 15 shardan 3 ta sharni ajratib olish usullari soniga, ya'ni 15 ta elementdan 3 tadan tuzish mumkin bo'lgan guruhlashlar soni C_{15}^3 ga teng.

Bizni qiziqtirayotgan hodisaga (3 ta shar orasida 1 ta qizil shar bor) qulaylik tug'diruvchi natijalar sonini hisoblaymiz: 5 ta qizil shar orasida 1 ta qizil sharni C_5^1 usul bilan olish mumkin; bunda qolgan $5-3=2$ shar boshqa rangda bo'lishi lozim: 2 ta boshqa rangli sharni esa $15-5=10$ ta boshqa rangli sharlar orasidan C_{10}^2 usul bilan olish mumkin. Demak, B hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar soni $C_5^1 \cdot C_{10}^2$ bo'ladi.

Izlanayotgan ehtimol hodisaga qulaylik tug'diruvchi natijalar sonining barcha elementar natijalar soniga nisbatiga teng:

$$P(B)=\frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} : \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 15} = \frac{45}{91}$$

2) Xuddi yuqoridagidek $P(C)$ ni topamiz:

$$P(C)=\frac{C_5^2 C_{10}^1}{C_{15}^3} = \frac{20}{91}$$

3) $P(D)$ ham xuddi shunday topiladi:

$$P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3} = \frac{2}{91}$$

Bularni (1) ga qo'yib topamiz:

$$P(A)=\frac{45}{91} + \frac{20}{91} + \frac{2}{91} = \frac{67}{91}$$

5-masala. Ikkita birgalikda bo'lmagan A_1 va A_2 hodisalarning har birining ro'y berish ehtimoli R_1 va R_2 ga teng.

Bu hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini toping:

Yechish. Hodisalarni quyidagicha belgilaymiz: B_1 – faqat A_1 hodisa ro'y berdi; B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berdi.

B_1 hodisaning ro'y berishi $A_1 \bar{A}_2$ hodisaning ro'y berishiga teng kuchli (birinchi hodisa ro'y berdi va ikkinchi hodisa ro'y bermadi), ya'ni $B_1 = A_1 \bar{A}_2$ B_2 hodisaning ro'y berishi $\bar{A}_1 A_2$ hodisaning ro'y berishiga teng kuchli (ikkinchi hodisa ro'y berdi va birinchi hodisa ro'y bermadi), ya'ni $B_2 = \bar{A}_1 A_2$. Shunday qilib, A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolini topish uchun B_1 va B_2 hodisalardan qaysi biri bo'lsa ham birining ro'y berish ehtimolini topish kifoya. B_1 va B_2 hodisalar birgalikda emas, shuning uchun qo'shish aksiomalarini qo'llash mumkin:

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2) \quad (2)$$

Endi B_1 va B_2 hodisalarning har birining ehtimolini topish kerak. A_1 va A_2 hodisalar erkli, demak, A_1 va A_2 hodisalar, shuningdek, $\bar{A}_1$ va A_2 hodisalar ham erkli, shu sababli qo'shish (teoremasini) aksiomasini qo'llash mumkin:

$$P(B_1)=P(A_1 \bar{A}_2)=P(A_1)P(\bar{A}_2)=p_1q_1$$

$$P(B_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=q_1p_2$$

(2) formulaga ko'ra A_1 va A_2 hodisalardan faqat birining ro'y berish ehtimoli $P(B_1+B_2)=p_1q_1+q_1p_2$

6-masala. Birinchi yashikda 2 ta oq va 10 ta qora shar bor. Ikkinchi yashikda 8 ta oq va 4 ta qora shar bor. Har bir yashikdan bittadan shar olindi. Bu ikkala shar ham oq bo'lish ehtimoli qanday?

Yechish. A bilan oq sharning birinchi yashikdan, B bilan oq sharning ikkinchi yashikdan chiqish hodisalarini belgilaymiz. Bunda A va B lar birgalikda bo'lmagan, ya'ni erkli hodisalar. Bu yerda A va B hodisalarning birgalikda yuz berish hodisasi AB ning ehtimolini topishimiz kerak.

Shartga ko'ra $P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $P(B)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$. Ko'paytirish aksiomasiga ko'ra:

$$P(AB)=P(A) \cdot P(B)=\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$

7-masala. O'yin soqqasi 4 marta tashlandi. Har safar 1 raqami tushishi (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Masalaning ehtimollarini ko'paytirish aksiomasiga asosan Yechish qulay. 1 raqamining har safar tushish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng. Bu hodisalar o'zaro erkli bo'lgani uchun

$$P(A)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)=\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}=\frac{1}{1296}$$

8-masala. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda. Bitta o'q uzganda nishonga tegish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7, ikkinchi mergan uchun 0,8 ga teng. Bir yo'la o'q uzishda merganlardan faqat bittasining nishonga tekizish ehtimolini toping.

Yechish. B_1 – faqat A_1 hodisa ro'y berdi, B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berdi deb belgilab olamiz. Bunda $B_1=A_1 \bar{A}_2$, $B_2=\bar{A}_1A_2$ bo'lib, $A_1 \bar{A}_2$ – birinchi mergan o'qi nishonga tegdi, ikkinchisiniki tegmadi, $\bar{A}_1A_2$ – birinchi merganning o'qi nishonga tegmadi, ikkinchisiniki tegdi demakdir. B_1 va B_2 hodisalarning har birining ehtimolini topish kerak. A_1 va A_2 hodisalar erkli, demak, A_1 va $\bar{A}_2$, shuningdek $\bar{A}_1$ va A_2 hodisalar ham erkli. Shu sababli qo'shish aksiomasini qo'llash mumkin:

$$P(B_1)=P(A_1 \bar{A}_2)=P(A_1)P(\bar{A}_2)=0,7 \cdot (1-0,8)=0,14$$

$$P(B_2)=P(\bar{A}_1A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=(1-0,7) \cdot 0,8=0,24$$

Demak, A_1 va A_2 hodisalarning faqat bittasining ro'y berish ehtimoli

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=0,14+0,24=0,38$$

ga teng.

9-masala. Avariya ro'y berganligi haqida signal berish uchun ikkita erkli ishlaydigan signalizator o'rnatilgan. Avariya yuz berganda signalizatorlar ishlay boshlash ehtimoli birinchisi uchun 0,95 ga, ikkinchisi uchun 0,9 ga teng. Avariya yuz berganda faqat bitta signalizator ishlay boshlash ehtimolini toping.

Yechish. Avariya yuz berganda birinchi signalizator ishlay boshlash ehtimoli A_1 , ikkinchi signalizator ishlay boshlashi A_2 hodisa bo'lsin.

B_1 – faqat A_1 hodisa ro'y berdi, B_2 – faqat A_2 hodisa ro'y berdi deb belgilab olamiz. Bunda $B_1=A_1 \bar{A}_2$, $B_2=\bar{A}_1 A_2$ bo'lib, $A_1 \bar{A}_2$ – birinchi signalizator ishladi, $\bar{A}_1 A_2$ – ikkinchi signalizator ishladi demakdir. $P(B_1)$ va $P(B_2)$ larni topishimiz kerak. A_1 va A_2 hodisalar erkli, shuningdek, $\bar{A}_1$ va A_2 hamda A_1 va $\bar{A}_2$ hodisalar ham erkli.

$$P(B_1)=P(A_1 \bar{A}_2)=P(A_1)P(\bar{A}_2)=0,95 \cdot (1-0,9)=0,95 \cdot 0,1=0,095$$

$$P(B_2)=P(\bar{A}_1 A_2)=P(\bar{A}_1)P(A_2)=(1-0,95) \cdot 0,9=0,05 \cdot 0,9=0,045$$

$$P(B_1+B_2)=P(B_1)+P(B_2)=0,095+0,045=0,14$$

Bu esa A_1 va A_2 hodisalardan faqat bittasining ro'y berish ehtimolidir.

10-masala. O'yin soqqasi 4 marta tashlandi. Har safar 1 raqami tushish ehtimolini toping.

Yechish. Masalani ehtimolining klassik ta'rifi bo'yicha yechish mumkin. Biz bu yerda ehtimolarni ko'paytirish aksiomasidan foydalanamiz.

1 raqamining har safar tushish ehtimoli 1 ga teng. 4 ta erkli hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimolini topishimiz kerak. Soqqani 4 marta tashlaganda 1 raqami tushish hodisalari $A_1 A_2 A_3 A_4$ bo'lsin.

U holda

$$P(A)=P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4)=P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4)=\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1296}$$

11-masala. A va B lar qandaydir hodisalar bo'lsin. $\overline{AB}$ hodisasini soddaroq yozing.

Yechish. $\overline{AB}$ hodisa $\bar{A}$ va $\bar{B}$ hodisalarning birgalikda ro'y berishidan iborat, ya'ni A hodisa ham B hodisa ham ro'y bermasligini anglatadi. $\bar{A} \bar{B}$ hodisaga qarama-qarshi hodisa $\overline{\bar{A} \bar{B}}$ esa A va B hodisalarinng hech bo'lmaganda birining ro'y berishidan iborat. Shuning uchun $\overline{\bar{A} \bar{B}}$ ni $A+B$ ko'rinishda yozish mumkin.

12-masala. Uchta mergan nishonga bittadan o'q uzdi. Birinchi merganning nishonga urishi A_1 , ikkinchi merganning nishonga urishi A_2 va uchinchi merganning nishonga urishi A_3 bo'lsin. Uchala mergan nishonga urdi hodisasini formula ko'rinishida yozing.

Yechishi. Shartga ko'ra A_1 hodisa ham, A_2 hodisa ham, A_3 hodisa ham ro'y bergan. Demak, bu hodisalar o'zaro erkli va birgalikda ro'y bergan. Shuning uchun $A_1A_2A_3$ hodisa ro'y bergan.

13-masala. Kutubxona stelajida tasodifiy tartibda 15 ta darslik terib qo'yilgan bo'lib, ulardan 5 tasi muqovalangan. Kutubxonachi ayol tavakkaliga uchta darslik oldi. Olingan darsliklarning hech bo'lmaganda bittasi muqovali bo'lish (A hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. A hodisa (olingan uchta darslikdan hech bo'lmaganda bittasi muqovali) va $\bar{A}$ hodisa (olingan uchta darslikdan hech bo'lmaganda bittasi muqovali emas) qarama-qarshi hodisalardir. Shuning uchun:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

(qarama-qarshi hodisalarning ehtimolari yig'indisi 1 ga teng). Bundan:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$\bar{A}$ hodisaning ro'y berish ehtimoli

$$P(\bar{A}) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} : \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{24}{91}$$

Endi $P(A)$ ni hisoblaymiz:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

10-Amaliy mashg'ulot

Matematik modellar va ularni qurish prinsiplari. Algoritmilar nazariyasi.

Kasbiy faoliyat sohasida matematik usullar

ALGORITM TÚSINIĞI

Algoritm túsiniğı fundamental matematikalıq túsiniqlerdiń biri bolıp, matematikanıń «Algoritm teoriiyası» dep atalıwshı bóliminiń obekti bolıp esaplanadı.

Algoritm – bul bazı bir protsessti anıq súwretlew hám onı orınlaw ushın kórsetpe bolıp esaplanadı.

«**Algoritm**» sózi IX ásirde jasağan Orta Aziyalı matematik Ál-Xorezmiydiń atın Evropa tillerine awdarma etiw nátiyjesinde kelip shıqqan. Ál-Xorezmiy arifmetikalıq ámellerdi orınlaw qádesin (algoritmin) kórsetip bergen.

Bul algoritmler házirgi waqıtta da mektep pratikasında isletilip kelinbekte. Algoritmlestiriwdiń wazıypası algoritmlerdi dúziwge (jazıwğa) úyretiwden ibarat bolıp, orınlawshı (adam, robot, EEM) algoritmlerdi orınlaw qádesine súyengen halda bir ǵana nátiyjege erisiwi lazım. Bul bolsa

algoritmterdi jazıw qádesine bazı bir talaplar qoyadı. Bular tómendegi qásiyetler kórinisinde ańlatıladı.

1° *Anıqlıq qásiyeti.*

Algoritm kórsetpeleri bir mánili bolıwı zárúr. Algoritm orınlanatuǵın ámellerdiń zárúr izbe-izligin anıq belgilep beredi. Algoritmniń ámelge asıw protsesi konkret esapshıǵa baylanıslı bolmaydı.

2° *Ulıwmalıq qásiyeti.*

Algoritmniń baslanǵısh maǵlıwmatlardıń ruxsat etilgen qálegen mánislerinde jaramlı bolıwı zárúr.

3° *Nátiyjelilik qásiyeti.*

İzlenip atırǵan nátiyjeni dáslepki maǵlıwmatlardıń ruxsat etilgen mánisleri ushın shekli sandaǵı jeterli túrde ápiwayı adımlardan soń alıwı múmkin bolıwı kerek.

Bir neshe ámeller keltirip óteyik:

1. $y = \frac{7x-4}{5x+3}$ ańlatpasınıń mánisin tabıń.

№	Ámellerdi orınlaw tártibi
1.	x ti 7 ge kóbeytiw
2.	(1) niń nátiyjesinen 4 ti alıw
3.	x ti 5 ke kóbeytiw
4.	(3) niń nátiyjesine 3 ti qosıw
5.	(2) niń nátiyjesin (4) tiń nátiyjesine bóliw

yamasa

№	Ámellerdi orınlaw tártibi
1.	$a := x * 7$
2.	$b := a - 4$
3.	$c := x * 5$
4.	$d := c + 3$
5.	$y := b : d$

2. Kesindini teń ekige bóliw (tsirkul' hám sıızıǵısh járdeminde) algoritmi.

№	Háreketlerdi orınlaw tártibi
1.	Tsirkul'diń ushın A tochkaǵa qoyıw
2.	Tsirkul'diń ayaqların AB ǵa teń etip ashıw

3.	Sheńber júrgiziw
4.	Tsirkul'diń ushın B tochkaǵa qoyıw
5.	Sheńber júrgiziw
6.	Sheńberdiń kesilisiw tochkalarınan tuwrı sıızıq júrgiziw
7.	Tuwrı sıızıq hám kesindiniń kesilisiw tochkası belgilenedi.

3. $y = 5^n$, $n \in \mathbb{Z}$

№	Ámellerdi orınlaw tártibi
1.	Eger $n > 1$ bolsa (4) ke ótedi, keri jaǵdayda (2) ge.
2.	Eger $n = 1$ bolsa (5) ke ótedi, keri jaǵdayda (3) ge.
3.	Eger $n = 0$ bolsa (6) ǵa ótedi, keri jaǵdayda (7) ge.
4.	$y = \underbrace{5 * 5 * \dots * 5}_{n \text{ ret}}$ (8) ge ótedi
5.	$y = 5$, (8) ge ótedi
6.	$y = 1$, (8) ge ótedi
7.	$y = \frac{1}{\underbrace{5 \cdot 5 \dots 5}_{n \text{ ret}}}$
8.	Tamam

4. Baslawısh klass matematika sabaqlarında tómendegi sıyaqlı ápiwayı algoritmler qollanamız: Qosıw algoritmi (onlıq sanaq sistemasında).

1) Ekinshi qosılıwshını qana birlikleri sáykes keletuǵın halda birinshi qosılıwshınıń astına jazamız.

2) Birliklerdi qosamız: Eger qosındı 10 nan kishi bolsa, juwaptı birlikler qanasına jazamız hám keyingi onlıq qanaǵa ótemiz.

3) Eger qosındı 10 nan úlken yamasa teń bolsa, $10 + \tilde{N}_0$ sıyaqlı oylap ($\tilde{N}_0$ – bir qanalı san) $\tilde{N}_0$ dı birlikler qanasına jazamız hám birinshi qosılıwshınıń onlıqlarına 1 di qosamız, soń onlıqlar qanasına qosıwǵa ótemiz.

4) Joqarıdaǵını onlıqlar menen, soń júzlikler menen hám t.b. tákirarlaymız. Barlıq qana birlikleri qosılǵannan soń tawsamız.

Tap sol sıyaqlı alıw, kóbeytiw hám bóliw algoritmlerin dúzip shıǵıwımız múmkin.

Tapsırmalar:

y tiń mánisin tabıw algoritmin dúziń.

$$1. y = \frac{x^2 - 4x + 6}{7x + 6} \quad 2. y = \frac{x^2 - 4x + 6}{2x - 1}$$

$$3. y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1} \quad 4. y = \frac{7x^3 + 3}{2x - 1} \quad 5. y = \frac{5x^4 + 3}{x - 2}$$

6. Onlıq санақ sistemasında alıw algoritmin dúziń.

7. Onlıq санақ sistemasında kóbeytiw algoritmin dúziń.

8. Onlıq санақ sistemasında bóliw algoritmin dúziń.

9. 10 qosılıwshınıń qosındısıń tabıw algoritmin dúziń.

10. Kóp qanalı sanlardı salıstırıw algoritmin dúziń.

11 – 15. Ańlatpanıń mánisin tabıw algoritmin dúziń.

$$11. ((36:2-14)(42:2-14)+20):2$$

$$12. ((27:3-21)(102:3-33)+140):100$$

$$13. (44:2+8)(77:11+3):(227+73)$$

$$14. (19:2+12):((65-55):2):(27-17)$$

$$15. (21:3+23):((42+18):6):(42:14)$$

16 – 20. Bólsheklerdi ulıwma bólimge keltiriw algoritmin dúziń.

$$16. \frac{121}{846} \text{ hám } \frac{71}{246} \quad 17. \frac{1}{33} \text{ hám } \frac{1}{44} \quad 18. \frac{8}{81} \text{ hám } \frac{21}{486}$$

$$19. \frac{101}{744} \text{ hám } \frac{203}{845} \quad 20. \frac{5}{77} \text{ hám } \frac{3}{44}$$

21 – 25. Teńlemelerdi sheshiw algoritmin dúziń.

$$21. (6-3x) \cdot 4 + 2x - 1 = 3(x-5) \quad 22. (5x-12) \cdot 8 - 76 = 32(x+2)$$

$$23. (18-2x):2 + 10x = 9(3x-2) \quad 24. (64x+24):8 + 7 = 2(x-4)$$

$$25. (105+5x):5 - 7x = 10x(2x-21)$$

Ózbekinshe jumis

№	Ózbekinshe jumis temalari
II-semestr	
1	Matematika pániniń predmeti. Matematikaniń pán hám oqıw predmeti sıpatındaǵı rawajlanıw basqıshları, hár bir basqıshqa sáykes maqseti hám wazıypaları.
2	Matematika pániniń dúnya mádeniyatı hám tarixındaǵı tutqan ornı.
3	Aksiomatik metod haqqında túsinik. Evklid geometriyası, Evklidtiń “Negizlar” asari.
4	Kompleks sanlardıń geometriyalıq hám trigonometriyalıq kórinisi.
5	Kvantorlar haqqında túsinik.
6	Ekinshi tártipli iymek sıızıq teńlemesin ápiwayılastırıw.
7	Ekinshi tártipli sırttıń anıqlaması. Sfera. Ellipsoid. Giperboloid. Paraboloid.
8	Tiykargı elementar funkciyalar, olardıń qásiyetleri. Funkciyalardıń jup-taqlıǵı, periodlıǵı, grafigi.
9	Tuwındı járdeminde funkciyanı tekseriw hám grafigin jasaw.
10	Anıq integraldıń qollanılıwı.
11	Mashhur qadimiy máseleler
12	Fibonachchi sanları.
13	Tórt boyaw mashqalası.
14	Pifagor sanları. Fermanıń ullı teoreması hám onıń dılilleniwi
	Jami:

GLOSSARIY

3. GLOSSARIY

English	Qaraqalpaqsha	Русский	Izoh
A set	Kóplik	множество	To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalark bo'lib, u ta'rifsiz qabul qilinadi.
An element of a set	Kóplik elementi	Элементы множества	To'plamni tashkil qiluvchi obyektlar uning elementlari deyiladi.
The operations on sets	Kóplikler ústinde ámeller	Операция над множеством	birlashma, kesishma, ayirma amallari mavjud.
To contain	Óz ishine alńw.	принадлежить	A to'plam a ni o'z ichiga oladi $\Leftrightarrow a \in A$
A subset	Úles kóplik	подмножество	Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning <u>to'plamostisi</u> deyiladi va $A \subset B$ yoki $A \subseteq B$ orqali belgilanadi.
The union	Birikpe	объединение	A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan $A \cup B$ to'plam A va B to'plamlarning birlashmasi yoki yig'indisi deyiladi.
The difference	Ayirma..	разность	A va B to'plamlarning <u>ayirmasi</u> deb, A to'plamning B to'plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A \setminus B$ yoki $A-B$ ko'rinishlarda belgilanadi
An empty set	Bos kóplik	Пустое множество	Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plamga aytiladi va u $\emptyset$ orqali belgilanadi.
Intersection	Kesispe	Пересечение	A va B to'plamlarning <u>kesishmasi</u> yoki ko'paytmasi deb, A va B to'plamlarning barcha umumiy, ya'ni A ga ham, B ga ham tegishli elementlardan tashkil topgan $A \cap B$ to'plamga aytiladi.

To belong	Tiyisli bolıq	Принадлежит	$\Leftrightarrow$ To contain e.g. $a \in A$
Reflexive relation	Refleksivlik qatnası	Отношении рефлексивности	Agar $\forall x \in A$ uchun xRx bo'lsa, R – binar munosabat <u>refleksiv</u> munosabat deyiladi
Symmetric relation	Simmetriklik qatnası	Отношение симметричности	Agar xRy bo'lishidan yRx bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R^{-1} = R$ shart bajarilsa, R - <u>simmetrik</u> munosabat deyiladi
Linear ordered set	qisman tartiblangan to'plam	Частично упорядоченный	Agar R - qisman tartib munosabati bo'lsa, (A, R) <u>qisman tartiblangan to'plam</u> , R chiziqli tartib munosabati bo'lsa, (A, R) <u>chiziqli tartiblangan to'plam</u> deyiladi.
Completely ordered set	Toliq tartiplengen kóplik	Упорядоченное множество	Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plamostisi minimal elementga ega chiziqli tartiblangan to'plam <u>to'liq tartiblangan to'plam</u> deyiladi.
Equivalence relation	ekvivalentlik qatnası	Отношение эквивалентности	Refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lgan binar munosabat <u>ekvivalentlik</u> munosabati deyiladi
Binary relation	Binarlıq qatnası	Бинарное отношение	$A \times B$ ning ixtiyoriy qism to'plamiga binary munosabat deyiladi
Inverse of Binary Relation	Keri qatnası	Обратное отношение	Agar R – ikki o'rinli, ya'ni binar munosabat bo'lsa, u holda $\{(a, b) / \forall (b, a) \in R^1\}$ munosabat R^1 -munosabatga teskari munosabat deyiladi va R^{-1} orqali belgilanadi. R^{-1} munosabat R ning <u>inversiyasi</u> deyiladi.
Factorizing a set	Kóplikti faktorlaw	Факторизация множества	A to'plamning bo'sh bo'lmagan to'plamostilaridan tuzilgan $B = \{A_\alpha / \alpha \in \Omega\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar B ixtiyoriy ikkita elementining kesishmasi bo'sh to'plmadan iborat bo'lib, B ning

			barcha elementlarining yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning <u>bo'laklangani</u> deyiladi.
An ordered set	tartiblangan to'plam	Упорядоченное множество	A to'plamda R - tartib munosabat berilgan bo'lsin, (A, R) juftlik <u>tartiblangan to'plam</u> deyiladi.
Composition of binary relations	Binar munosabatlarning kompozitsiyasi	Композиция бинарных отношений	P va Q binar munosabatlar bo'sh bo'lmagan A to'plamda berilgan bo'lsin. U holda $P \circ Q = \{(a,c) \mid \exists b \in A, (a,b) \in Q \wedge (b,c) \in P\}$ to'plam P va Q binar munosabatlarning <u>kompozitsiyasi</u> deyiladi.
Unary relation	Unar munosabat	Унарное отношение	Bir o'rinli munosabat esa A ning ixtiyoriy to'plamostisi bo'lar ekan. Bir o'rinli munosabat <u>unar munosabat</u> deyiladi.
Transitivity relation	Tranzitivlik munosabat	Отношение транзитивности	Agar xRy va yRx bo'lishidan xRz bo'lishi kelib chiqsa, ya'ni $R \circ R \subset R$ shart bajarilsa, R - <u>tranzitiv</u> munosabat deyiladi;
Equivalent class	Ekvivalentlik sinfi		A to'plamda aniqlangan R -ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin. $\forall a \in A$ uchun $\bar{a}$ orqali A to'plamning a ga ekvivalent bo'lgan barcha elementlarini belgilaymiz va to'plamni a element yaratgan ekvivalentlik sinfi deb ataymiz.
A subset	Qism to'plam	Подмножество	Agar B to'plamning har bir elementi
Conjunction of propositions	Mulohazalarning kon'yunksiyasi.	Конъюнкция высказываний	A va V mulohazalar rost bo'lgandagina rost bo'lib, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan mulohaza A va V mulohazalarning <u>kon'yunksiyasi</u> deyiladi va $A \wedge V$ yoki $A \& V$ ko'rinishda belgilanadi
Disjunction	Mulohazalar	Дизъюнкция	A va V mulohazalar <u>diz'yunksiyasi</u>

of propositions	<u>diz'yunksiyasi.</u>	высказивании	deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \vee V$ mulohazaga aytiladi.
Implication of propositions	Aytımlar <u>implikasiyasi</u>	Импликация высказивании	A va V mulohazalar <u>implikasiyasi</u> deb, A mulohaza rost va V mulohaza yolg'on bo'lgandagina yolg'on, qolgan hollarda rost bo'ladigan $A \rightarrow V$ mulohazaga aytiladi.
Equivalence of propositions	Aytımlar <u>ekvivalensiyasi.</u>	Эквиваленция высказивании	A va V mulohazalar <u>ekvivalensiyasi</u> deb, A va V mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow V$ mulohazaga aytiladi
A proposition	Aytım	Высказивание	matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir.
The converse of a proposition	Aytımın biykarı	Отрицание высказивании	Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning <u>inkori</u> deyiladi va $\neg A$ yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.
Propositions algebras	Aytımlar algebrasi	Алгебра высказиваний	Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda <u>mulohazalar algebrasi</u> deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.
A predicate	Predikat.		Agar biror M to'plamning a elementi haqida aytilgan tasdiq a ning o'rniga M ning aniq bitta elementini qo'ysak mulohaza aylansa, u holda bunday tasdiqlarni <u>bir o'zgaruvchili mulohazaviy formula</u> yoki <u>bir o'zgaruvchili</u>

			<u>predikat</u> deb ataymiz.
A null predicate	Nol predikat.	Нулевой предикат	Har qanday mulohazaga noll predikat deb ataladi.
Predicates with n variables	n o'zgaruvchili predikat.	Предикат с n неизвестной	Agar $P(x_1, \dots, x_n)$ tasdiq $x_1, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning yo'l qo'yilishi mumkin bo'lgan har qanday qiymatlarida mulohazaga aylansa, n – <u>o'zgaruvchili predikat</u> yoki n o'zgaruvchili mulohazaviy formula deyiladi. Bu erda n - 0, 1, 2 va hokazo manfiy bo'lmagan butun qiymatlar qabul qiladi
The converse of a predicate	predikattin inkori	Отрицание предикатов	$M \neq \emptyset$ to'plamda aniqlangan bir o'rinli $P(x)$ - predikat berilgan bo'lsin. U holda $P(x)$ - <u>predikatning inkori</u> deb har qanday $x \in M$ element uchun $P(x)$ - predikat rost bo'lganda yolg'on bo'ladigan; $P(x)$ yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan $\neg P(x)$ predikatga aytiladi.
graph	Graf	граф	Graf deb, shunday $G_1(X, E)$ ikki to'plam juftligiga aytiladiki, bunda X-bo'sh bo'lmagan uchlar to'plami $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bo'lib, E ning elementlari esa Xning ikki elementli to'plam ostilaridir, ya'ni $E = \{(x_1, x_2)\}$.
Definition	ta'rif	Определение	muayyan tushuncha yoki terminning unga xos muhim belgilarini aks ettiruvchi qisqacha ifodasi; biron predmet yoki voqeahodisaning mazmunmohiyatini ochib, tushuntirib berish
Set	Kóplik	множества	To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchasidir.
Scheme	sxema	схема	(yun. schema — qiyofa, tashqi ko'rinish) — 1) muayyan qurilma, inshoot, mashina va boshqalarning umumiy muhim tomonlari shartli belgilar bilan masshtabsiz ifodalangan chizma; 2) biror narsaning umumiy tasviri, bayoni,

			ifodasi.
line	Sızıq	линия	geom.ning asosiy tushunchalaridan biri. To'g'ri chiziq geometriyada boshlang'ich (ta'riflanmaydigan) tushuncha deb olinadi.
design	Konstruksiya	Конструкция	(lot. constructs -tuzilish, qurilish) — 1) mashina, inshoot yoki o'zel va detallarning tuzilish sxemasi, shuningdek, mashina, inshoot, o'zellar hamda ularning detallari. K. da kerakli qism va elementlarining shakli hamda o'zaro joylashishi, ularni birlashtirish usullari, o'zaro ta'siri va kanday materiallardan yasalishi hisobga olinadi
intsendent	insindent	инцидент	Agar x_1 va x_2 lar qandaydir qirraga (x_i, x_j) ga tegishli bo'lsa, u holda Berilgan qirra x_i va x_j "insindent" deyiladi, x_i va x_j lar esa qo'shni nuqtalar deyiladi.
Simple graph	Ápiwayı graf	простой обыкновенный	Agar graf sirtmoqsiz yoki qirralari karrali bo'lmasa, bunda graf oddiy graf deyiladi.
Matrix of graph	Graf matritsasi	Матрица графа	Matritsa ustunlari va qatorlari graf uchlarini nomerlariga mos keladi, uning elementi c_n x_1 va x_j birlashtiruvchi qirralar sonidir
Isomorphism graphof	Izomorf graflar	Изоморфизм графов	graflar faqat nomerlash bilan farqlanadigan bo'lsa, ular chizilishda farqlanib, bu holda matritsa grafni izomorfizmga bo'lgan aniqlikda belgilaydi deymiz. Bunday graflar izomorf graflar deyiladi.
Grafs	Graf yoylari	Дуга графов	Orientirli D graf deb, bir juft $D=(X,A)$ ga aytamiz. Bu yerda X uchlarning ixtiyoriy to'plami va A – uchlarning tartiblangan juftligini to'plamidir, uchlarning tartiblangan juftligini "yoylar" deymiz.
partial graph	Qisman graf	частичный граф	Graf $G_0(x_0, E_0)$ $G(x, E)$ ning qisman grafi deb ataladi, agarda u berilgan grafning barcha uchlariga ega bo'lib, ammo barcha qirralariga

			ega bo'lmasa, balki qisman qirralariga ega bo'lsa, ya'ni $x_0 = x, E_0 \in E$
Planar graph	Planar graf	Планарный граф	Graf (tekis) planar deyiladi, agarda Berilgen grafga izomorf bo'lgan grafni tekislikda qirralari kesishmagan holda tasvirlash mumkin bo'lsa.
Line graph	Graf yo'li	Маршрут	m uzunlikdagi marshrut deb grafning qirralarini shunday ketma ketligiga aytiladiki yonma-yon bo'lgan qirralarini uchlari uchma-uch tushishlari kerak.
Connected graph	Bog'langan graf	Связанный граф	Grafning ikki uchi bog'langan deyiladi, agar shu uchlarni birlashtiruvchi yo'l bo'lsa. Agar grafning har qanday uchini birlashtiruvchi marshrut mavjud bo'lsa, bunday graf bog'langan graf deyiladi
chain	zanjir	цепь	Barcha qirralari turli bo'lgan (yo'l) marshrut zanjir deb ataladi. Agar zanjir turli uchlardan o'tsa, u oddiy zanjir deb ataladi.
cycle	Sikl	цикл	Yopiq zanjir "sikl" deb ataladi, turli uchlardan o'tuvchi "sikl", oddiy "sikl"dir.
tree	Daraxt	дерево	Siklga ega bo'lmagan bog'langan graf daraxt deb ataladi, uning qirralari esa shoxlaridir.
forest	O'rmon	лес	Siklsiz bog'lanmagan graf o'rmon deb ataladi.
net	To'r	сеть	$S=(G, C)$ juftlik to'r deb ataladi, Bu yerda $G=(X,A)$ ixtiyoriy orientirlangan (yo'naltirilgan)dir.
A permutation	O`rin almashtirish	<u>перестановка</u>	O`rin almashtirish deb, n ta turli elementlarning bir-biridan faqat joylashishi bilan farq qiluvchi

of objects			kombinasiyalarga aytiladi. Ularning soni $P_n = n!$ formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$
Repeatings	O`rinlashtirish	<u>размещения</u>	O`rinlashtirish</b> deb, $n$ ta turli elementdan $m$ tadan tuzilgan kombinasiyalar bo`lib, ular bir-biridan yo elementlarning tarkibi, yo ularning tartibi bilan farq qilishiga aytiladi.
Combinations	Gruppashlar	<u>группирования</u>	Gruppashlar deb, bir-biridan hech bo`lmaganda bitta elementi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m tadan tuzilgan kombinasiyalarga aytiladi. Ularning soni $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ formula bilan aniqlanadi.
Combinatory	Kombinatorika	<u>комбинаторика</u>	Kombinatorika – bu diskret matematikaning diskret to`plam elementlarini berilgan qoidalar asosida tanlash va joylashtirish bilan bog`liq bo`lgan masalalarni yechish usullarini o`rganuvchi bo`limidir.
The elements	Elementlar	Элементы	Birikmalarni tashkil etgan predmetlar <i>elementlar</i> deyiladi.
A vector	Vektor.	<u>Вектор</u>	Uzunliklari teng yo`nalishi bir xil bo`lgan barcha yo`nalgan kesmalar to`plamini ozod vektor yoki qisqacha vektor deb ataladi
A unit vector	Birlik vektor.	<u>Ед.вектор</u>	Uzunligi birga teng bo`lgan vektor birlik vektor yoki ort deyiladi.
Zero vector	Nol vektor.	Нуловой вектор	Boshi bilan oxiri ustma – ust tushgan vektor nol vektor deyiladi.
Ellipse	Ellips	Эллипс	Ellips deb tekislikdagi shunday nuqtalarning geometrik o`rniga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi F_1 va F_2

			nuqtalargacha bo'lgan masofalari yig'indisi berilgan PQ kesma uzunligiga teng bo'ladi. Bu yerda $PQ > F_1F_2$.
Eccentricity of ellipse	Ekstsentrismet.	Эксцентриситет	Ellipsning fokuslari orasidagi masofaning ellipsning katta o'qi uzunligiga nisbati shu ellipsning deb ataladi. Ekstsentrismet e harfi bilan belgilanadi.
The directrix of ellipse	Direktrisa.	Директриса	Ellips ning berilgan F fokusga mos direktrisasi deb, uning fokal o'qiga perpendikulyar va markazdan shu F fokus yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'q'ri chiziqqa aytiladi.
Hyperbola	Giperbola.	Гипербола	Tekislikda har bir nuqtasidan <i>fokuslar</i> deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalargacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan kesma uzunligiga teng bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga <i>giperbola</i> deb ataladi.

Tiycarđı hám qo'shimcha o'quv adabiyotlar hamda axborot manbaalari

Tiycarđı adabiyotlar:

1. Jo'raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 1-tom. T.: «O'zbekiston». 1995.
2. Jo'raev T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-tom. T.: «O'zbekiston». 1999.
3. Farmonov Sh. va boshq. "Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika". T.: "Turon-Bo'ston", 2012 y.
4. Tojiev Sh.I. Oliy matematika asoslaridan masalalar yechish. T.: «O'zbekiston». 2002 y.
5. Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada, 2011
6. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (High School) SQA Adhámnced Higher Mathematics. Unit 1. This edition published in 2009 by Heriot-Watt University SCHOLAR. Copyright 2009 Heriot-Watt University.
7. Herbert Gintis , Mathematical Literacy for Humanists, Printed in the United States of America, 2010

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажакимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга курамиз. Тошкент, "Ўзбекистон", 2017 йил, 488 бет.
2. Мирзиёев Ш.М. Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Тошкент, "Ўзбекистон", 2016 йил, 56 бет.
3. Мирзиёев Ш.М. Қонун устуворлиги ва инсон манфаатларини таъминлаш-юрт тараққиёти ва халқ фаровонлигининг гарови. Тошкент, "Ўзбекистон", 2017 йил, 48 бет.
4. Мирзиёев Ш.М. Танқидий таҳлил, қатъий тартиб интизом ва шахсий жавобгарлик - ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қондаси бўлиши керак. Тошкент, "Ўзбекистон", 2017 йил, 104 бет.
5. Hamedohám N.A., Sadikohám A.V., Laktaehám I.SH. "Matematika" – Gumanitar yo'nalishlar talabalari uchun o'quv qo'llanma. T.: "Jahon-Print" 2007y.
6. Azlarov T.A., Mansurov X. "Matematik analiz" 1-qism. T.: "O'qituvchi", 1994y.
7. Baxhámlov S.B. va boshq. "Analitik geometriyadan mashqlar to'plami". T.: Universitet, 2006 y.
8. College geometry, Csaba Vincze and Laszlo Kozma, 2014 Oxford University

9. Introduction to Calculus, Volume I,II by J.H. Heinbockel Emeritus Professor of Mathematics Old Dominion University, Copyright 2012, All rights reserved
Paper or electronic copies for noncommercial use may be made freely without explicit.

Internet saytlarii

1. www.tdpu.uz
2. www.pedagog.uz
3. www.edu.uz
5. www.nadlib.uz (A.Navoiy nomidagi O'z.MK)
6. <http://ziyonet.uz> — Ziyonet axborot-tálim resurslari portal