O'ZBEKİSTAN RESPUBLİKASI
XALIQ BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİGİ

A'JİNİYAZ ATINDAG'I
NO'KİS MA'MLEKETLİK PEDAGOGİKA İNSTİTUTI

M.Qasımov, D.Esengeldiev, I.Yuldashev, K.Omirbaeva

Irracional ten'leme ha'm ten'sizliklerdi sheshiwdin' ayırım standart emes usılların u'yretiw jolları

(oqıw-metodikalıq qollanba)

NO'KİS - 2016

Du'ziwshiler: **M.Qasımov, D.Esengeldiev, I.Yuldashev, K. O'mirbaeva**

Usınılıp atırg'an oqıw-metodikalıq qollanbada матematika oqıtıw metodikası pa`ninin` tiykarg`ı bo`liminin` biri bolg`an irracional ten'leme ha'm ten'sizliklerdi sheshiwdin' bazı bir standart emes usılların u'yretiw jolları qaralg'an bolıp, bunda matematika sabag'ında oylaw qa'biletin rawajlandırıwg'a arnalg'an irracional ten'leme ha'm ten'sizliklerdi sheshiwdin' ayırım standart emes usılların u'yretiwdin' mashqalaları keltirilgen.

Bul qollanbadan orta mektep ha'm akademiyalıq liceytlerdin' ha'm ka'sip-o'ner kollejlerinin' oqıwshıları menen bir qatarda universitet, institut talabalarıda, pedagog kadrlardı qayta tayarlaw ha'm qa'nigeligin arrtırıw institutı tın'lawshıları da paydalansa boladı.

JUWAPLI REDAKTOR:

N.Djumabaev - A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq institutı матematika oqıtıw metodikası kafedrası docenti, pedogogika ilimlerinin` kandidatı.

PİKİR BİLDİRİWSHİLER:

A.Abdullaev - A`jiniyaz atındag`ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq institutı Informatika ha`m xabar texnologiyaları kafedrası docenti, ekonomika ilimlerinin` kandidatı

Z.Saparov – A'jiniyaz atindag'ı No`kis ma`mleketlik pedagogikalıq instituti, «Matematika oqıtıw metodikası» kafedrası docenti, fizika-matematika ilimlerinin` kandidatı

Oqıw - metodikalıq qollanba A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı Ilimiy oqıw-metodikalıq ken'esinin' qararı (22-dekabr 2015-jılg'ı №5 -sanlı bayanlama) menen baspadan shıg'arıwg'a usınılg'an.

Kirisiw

Ha’zirgi waqıtta ulıwma bilim beriw mekteplerinin’ oqıwshılarına anıq bir matematikalıq aqılıy, logikalıq oylaw uqıplılıq qa’biletin qa’liplestiriw en’ a’hmiyetli ma’selelerdin’ biri bolıp esaplanadı (mısalı, ulıwmalastırıw, talqılaw, sintez ha’m t.b.). Bul jumıs tiykarınan, ulıwma bilim beriw mekteplerinin’ oqıwshılarına irracional ten’leme ha’m ten’sizliklerdi sheshiwde standart emes usıllardı u’yretiwge arnalg’an bolıp, bunda qaralg’an mısallardın’ sisteması ha’m olardı sheshiw usılları, oqıwshılardın’ matematikalıq bilimlerin, ko’nlikpelerin ha’m uqıplılıqların teren’lestiriwde, o’zlerinin’ na’tiyjelerin tiygizedi dep oylaymız.

Berilgen ma’selelerdi sheshiwde do’retiwshilik ha’m logikalıq oylaw qa’biletleri rawajlanadı. Sonday-aq, o’z betinshe standart emes oylaw qa’bileti, alg’an teoriyalıq bilimlerin a’meliy xarakterdegi ma’selelerdi sheshiwde qollanıw iskerligi payda boladı.

Ulıwma bilim beriw mektebinin’ matematika kursında bilim alıwshı oqıwshılarına, a’meliyatta jiyi ushırasatug’ın, logikalıq oylaw qa’biletin rawajlandırıwg’a arnalg’an irracional ten’leme ha’m ten’sizliklerdi sheshiwdin’ ayırım standart emes usılların u’yretiw ha’m olardı usı bag’dardag’ı ha’r qıylı ma’seleler menen tanıstırıw, en’ za’rurli ma’selelerden biri bolıp tabıladı. Sonın’ ushın da, ulıwma bilim beriw mekteblerinin’ oqıwshılarına matematikalıq tayarlıq da’rejesin ko’teriwde, bul bilimin a’meliyatta ha’m basqa da ilimlerdin’ tiykarında logikalıq oylaw qa’biletin rawajlandırıwg’a arnalg’an irracional ten’leme ha’m ten’sizliklerdi sheshiwdin’ standart emes usılların u’yretiw mashqalası, ha’zirgi waqıtta aktual ma’selelerdin’ biri bolıp esaplanadı.

§1. İrracional an'latpa ha'm olardı a'piwayılastırıw usılları

Bul jerde biz oqıwshılardın har qanday racional sandı sheksiz perpendikulyar onlıq bo`lshek tu`rinde ko`rsetiwge bolatug`ının, al irracional sandı sheksiz periodlı onlıq bo`lshek tu`rinde an`latıp bolmaytug`ının tu`sindiriwimiz kerek.

1-mısal:

$$1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$

Bunnan $\sqrt{2} = 1{,}4142.......$bolatug`ını ha`m onın` sheksiz periodlı onlıq bo`lshek bola almaytug`ının ko`remiz, yag`nıy $\sqrt{2}$ irracional san.

Anıqlama. Sheksiz periodlı onlıq bo`lshek tu`rinde an`latıp bolmaytug`ın sanlar irracional sanlar delinedi.

Bunnan basqa da, bir qatar a'debiyatlarda radikal astında beriletug`ın sanlar irracional sanlar delinedi degen de anıqlama bar. Biraq bul anıqlamanın ulıwmalıq xarakterde ekenligin to`mendegi mısallarda ko`remiz.

2-mısal.

$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{6}$ sanı irracional san emes, al onı esaplag`anda 5-ke ten`.

Tap usınday

$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ sanı o`zinin` quramalı "irracionallıg`ına" qaramay racional san ha`m ol 2-ge ten` (koren astındag`ı an`latpa tolıq kub ekenligi eskertiledi)

Sonlıqtan berilgen sannın` racional yamasa irracional san ekenligin anıqlawda isenimli dalil keltiriw kerek.

3-mısal.

$\log_4 18$ din` irracional san ekenligin da`lillew.

Da`lillewi:

$\log_4 18 = \frac{1}{2} + \log_2 3$ bolg`anlıqtan, $\log_2 3$ tin` irracional san ekenligin ko`rsetsek bolg`anı. Keriden da`lilleymiz. Meyli bul san-racional san bolsın. Demek, $\log_2 3 = p/q$, $\log_2 3 > 0$ bolg`anlıqtan p ha`m q natural sanlar. Logarifmnin` anıqlamasınan paydalanıp $\log_2 3 = p/q$ ten`ligin $2^p = 3^q$ tu`rinde jazamız. Biraq keyingi ten`lik ha`r qanday p ha`m q natural sanları ushın mu`mkin emes, sebebi ten`liktin` shep jag`ında jup, al on` jag`ında taq san tur. Bul qarama qarsılıq berilgen sannın` irracional san ekenligin da`lilleydi.

Bul jerde biz oqıwshılarg`a ha`r qanday racional sandı sheksiz perpendikulyar onlıq bo`lshek tu`rinde ko`rsetiwge bolatug`ının, al irracional sandı sheksiz periodlı onlıq bo`lshek tu`rinde an`latıp bolmaytug`ının tu`sindiriwimiz kerek.

Biz bul jerde oqıwshılar ushın irracional san tu`sinigi haqqında qısqasha mag'liwmat berip o'ttik. Endi irracional algebralıq an`latpalar haqqıdag`ı tu`sinikti baslasaq boladı.

İrracional an'latpa

İrracional algebralıq an`latpalar haqqindag`ı tu`sinikti baslamastan burın, irracional an'latpa ushın qısqasha ko'beytiw formulaların eske tu'siremiz:

$$a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}), \qquad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,$$
$$a-b=(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})(\sqrt{-a}+\sqrt{-b}), \qquad a\leqslant 0, b\leqslant 0,$$
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}), \qquad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,$$
$$\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}=(\sqrt[2n]{a}-\sqrt[2n]{b})(\sqrt[2n]{a}+\sqrt[2n]{b}), \qquad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,$$
$$a-b=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}),$$
$$a+b=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}).$$

İrracional an'latpalardı birdeylikke tu'rlendiriwde, olarg'a kiriwshi ha'riplerdin' mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' oblastı, ayrıqsha orındı iyeleydi.

Oqıwshılarga irracional san tu`sinigin tu`sindirgennen keyin, İrracional algebralıq an`latpalar haqqındag`ı tu`sinikti baslaw kerek. Jazıwında tek g`ana to`rt racionallıq a`meldi paydalanıp qoymastan radikal belgiside (ha`ripli an`latpalardan) qatnasatug`ın algebralıq an`latpanı irracionallı algebralıq an`latpalar deymiz. Bunday an`latpalarg`a mısallar

$$\sqrt{\frac{a}{a+1}}+\sqrt{\frac{a+1}{a}}; \quad \frac{ab(x+y)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}; \quad \sqrt{a+\sqrt{b-2x}}$$

İrracionallı algebralıq an`latpalarda berilgende olardın` anıqlanıw oblastın anıqlaw talap etiledi. Anıqlanıw oblastın anıqlag`anda jup da`rejeli radikal belgisi astındag`ı an`latpanın` belgisi teris bolıwı kerek. İrracionallı algebralıq an`latpalardın` anıqlanıw oblastların tabıwg`a mısallar keltiremiz.

1-mısal.

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}$$

an'latpanı, mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' oblastında, a'piwaylastırın'.

Sheshimi. Berilgen algebralıq an'latpanı qanaatlandırıwshı, barlıq a ha'm v lardın' ma'nislerinen ibarat, mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' oblastı

$$ab \geqslant 0,\ \frac{a}{b} \geqslant 0 \Leftrightarrow ab \geqslant 0,\ b \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant 0,\ b > 0 \\ a \leqslant 0,\ b < 0. \end{cases}$$

ten'sizlikti qanaatlandıradı.

Birinshi jag'daydı qaraymız: $a \geq 0,\ b > 0.$

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}-(\sqrt{b})^2}{b}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-1.$$

Ekinshi jag'daydı qaraymız: $a \leqslant 0,\ b < 0.$

$$\frac{\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}-(\sqrt{-b})^2}{-(\sqrt{-b})^2}-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}{-\sqrt{-b}}-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\frac{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}+\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=1-2\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=1-2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Juwabı: $a \geq 0,\ b > 0.$ bolg'anda -1; $a \leq 0,\ b < 0.$ bolg'anda $1-2\sqrt{\frac{a}{b}}$.

2-mısal.

$$A=\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}$$

an'latpanı, mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' oblastında, a'piwaylastırın'.

Sheshimi. Bul algebralıq an'latpanı qanaatlandırıwshı, mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' oblastı, x tın' barlıq ma'nislerinen ibarat bolıp ha'm ol

$$\begin{cases} (x+2)^2-8x \geqslant 0, \\ x > 0, \\ \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;2) \cup (2;\infty).$$

sistemanı qanaatlandıradı. A an'latpanı

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}=\frac{|x-2|\sqrt{x}}{x-2}.$$

ko'riniske tu'rlendiremiz.

Egerde $x \in (0;2)$ bolsa, onda $|x-2| = -(x-2)$ ha'm $A = -\frac{(x-2)}{(x-2)}\sqrt{x} = -\sqrt{x}$.

Egerde $x \in (2;\infty)$ bolsa, onda $|x-2| = x-2$ ha'm $= \sqrt{x}$.

Juwabı: $x \in (0;2)$ ushın $-\sqrt{x}$ ha'm $x \in (2;\infty)$ ushın $\sqrt{x}$.

3-mısal.

$$\frac{1-a^2}{1-\sqrt{a}}$$

bo'lshektin' bo'limindegi, irracionallıqtan qutılın'.

Sheshimi. Bul algebralıq an'latpanı qanaatlandırıwshı, mu'mkin bolg'an ma'nislerinin' oblastı,

$$\begin{cases} 1-\sqrt{a} \neq 0, \\ a \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \neq 1, \\ a \geqslant 0. \end{cases}$$

sistemadan tabıladı.

Sebebi, bo'limindegi $1+\sqrt{a}$ an'latpanın' tu'yinlesi nolge aylanbaydı, onda bo'lshektin' bo'limin ha'm alımın $1+\sqrt{a}$ tu'yinlesine ko'beytemiz. Onda

$$\frac{(1-a^2)(1+\sqrt{a})}{1-a} = (1+a)(1+\sqrt{a})$$

an'latpasına iye bolamız.

Juwabı: $(1+a)(1+\sqrt{a})$.

4-mısal.

$$\frac{a^{3/2}-4a^{1/2}}{\sqrt{\left(\frac{a+4}{2\sqrt{a}}\right)^2-4}} - 2a$$

an'latpanı $a < 4$ bolg'andag'ı ma'nisin tabın'.

Sheshimi.

$$\frac{a^{3/2}-4a^{1/2}}{\sqrt{\left(\frac{a+4}{2\sqrt{a}}\right)^2-4}} - 2a = \frac{\sqrt{a}(a-4)}{\sqrt{\frac{a^2+8a+16}{4a}-4}} - 2a =$$

$$= \frac{\sqrt{a}(a-4)}{\sqrt{\frac{a^2+8a+16-16a}{4a}}} - 2a = \frac{\sqrt{a}(a-4)2\sqrt{a}}{\sqrt{a^2-8a+16}} - 2a = 2a\frac{a-4}{\sqrt{(a-4)^2}} - 2a.$$

Ko'rinip turıptı, egerde $a < 4$ bolsa, onda

$$\sqrt{(a-4)^2}=|a-4|=4-a.$$

Demek,

$$2a\frac{a-4}{\sqrt{(a-4)^2}}-2a=2a\left(\frac{a-4}{4-a}-1\right)=2a(-2)=-4a.$$

Juwabı: $-4a$

5-mısal.

$$A=\frac{\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^2-12}}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}$$

an'latpanı $x=0{,}625$ bolg'andag'ı ma'nisin esaplan'.

Sheshimi. Bo'lshektin' alımın

$$\sqrt{\left(\frac{x^2+3}{x}\right)^2-12}=\sqrt{\frac{x^4+6x^2+9}{x^2}-12}=\sqrt{\frac{x^4-6x^2+9}{x^2}}=\sqrt{\left(\frac{x^2-3}{x}\right)^2}=\left|\frac{x^2-3}{x}\right|$$

ko'riniske tu'rlendiremiz. Sebebi, $x=0{,}625<\sqrt{3}$ bolg'andag'ı, esaplaw talap etiledi, onda $A=-\frac{x^2-3}{x(x^2-3)}=-\frac{1}{x}$

$x=0{,}625$ bolg'anda, $A=-1{,}6$

Juwabı: $-1{,}6$

İrracional ten'sizlik

İrracional ten'sizlik dep koren belgisi astındag'ı, ishinde o'zgeriwshi shama qatnasqan an'latpag'a iye bolg'an ten'sizlikke aytamız.

Bizge ma'lim, irracional ten'sizliklerdi sheshiw, og'an ten' ku'shli racional ten'sizlikler sistemasına sheshiwge alıp kelinedi.

Bul jerde sonı yadta tutıw kerek:

1) egerde ten'sizliktin' eki ta'repinde jup da'rejege ko'tersek, onda berilgen ten'sizlikke ten' ku'shli ten'sizlik alamız.

2) ten'sizliktin' eki ta'repinde taq da'rejege ko'teriw mu'mkin, tek sol jag'dayda, qay waqıtta olar teris emes. Bul jag'dayda, mu'mkin bolg'an ma'nisleri oblastında berilgen ten'sizlikke ten' ku'shli ten'sizlik alınadı.

A'piwayı irracional ten'sizliklerdi qarayıq:

$$1)\ \sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n}, \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$2)\ \sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n}. \end{cases}$$

Bizge ma'lim, irracional ten'sizliklerdi sheshiw en' qıyın, ha'm quramalı ma'selelerden biri. Sonın' ushın biz, bul processti (sheshiw izbe-izligin) to'mendegi basqıshta alıp barıwdı, maqsetke muwapıq dep esaplaymız.

Jaqın ma'selelerdi izlew. Egerde berilgen ma'sele quramalı bolsa, onda usı ma'selege jaqın bolg'an a'piwayı ma'selelerdi izlew ha'm onı sheshiw. Bul bo'lim, sheshiletug'ın ma'selenin' giltin beredi. Demek, to'mendegi izbe-izlikte alıp barsaq, onda ol bizge ja'rdem beredi:

- bul ma'selenin' dara (a'piwayı) jag'dayın qaraymız, al keyin, sheshiw ideyasın ulıwmalastıramız:
- berilgen ma'seleni u'les ma'selelerge bo'lemiz (mısalı, za'rurligin ha'm jetkilikligin);
- ma'seleni ulıwmalastıramız (mısalı, anıq sandag'ı o'zgeriwshiler menen almastıramız);
- na'tiyjede qu'ramalı bolg'an ma'seleni a'piwayı bolg'an ma'selege alıp kelemiz.

§2. İrracional ten'leme ha'm ten'sizliklerdi sheshiw usılları

Ulıwma bilim beretug'ın mekteplerde irracional ten'leme ha'm ten'sizliklerdi sheshiw usılların u'yreniwge bolg'an dıqqat ku'shli bolıwı kerek. Bul tema oqıwshılardın' bilimin ha'm pikirlewin ku'sheytiwge u'lken ja'rdem etedi, sebebi ten'lemeni sheship o'zgeriwshilerdin' mu'mkin bolg'an ma'nislerin esapqa almay ketetug'ın oqıwshılarımız az emes. Sonlıqtan biz bul tema boyınsha bir qansha mısallar qarap o'temiz. Ma'selen,

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = a(a > 0)$$

tu'rindegi ten'lemelerdi sheshiw ushın ten'liktin' eki jag'ın kvadratqa ko'teremiz.

$$\left(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)}\right)^2 = a^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)^2 = \left(a - \sqrt{g(x)}\right)^2$$

keyin ja'ne koren payda bolsa, ja'ne kvadratqa ko'terip irracionallıqtan qutqaramız ha'm ten'lemeni sheship, $f(x) \geq 0$; $g(x) \geq 0$ ten'sizliklerinin' orınlanıwın tekseremiz yamasa tabılg'an korenlerdin' ishinde jat korenler payda bolsa, onda olardı sheshimler ko'pliginen shıg'arıp taslaymız.

Ja'ne bir usılı bul ten'lemeni

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=a\\ \left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)=a\left(\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}\right)\end{cases}$$

tu'rindegi ten'lemeler sisteması menen almastıramız. Na'tiyjede

$$\begin{cases}\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=a\\ \dfrac{f(x)-g(x)}{\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}}=a\end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Bazı bir jag'dayda bul sistema aldın'g'ı usılg'a qarag'anda an'sat sheshiliwi mu'mkin. Sonlıqtan ta'jiriybeli oqıtıwshılar qaysı usıl qolaylı bolatug'ınlıg'ın tez saylap aladı.

Mısallar:

1. $\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}=1.$

Sheshiliwi: $\sqrt{3x-5}=1+\sqrt{x-2}$, $\quad x\geq 2\Rightarrow 3x-5=1+x-2+2\sqrt{x-2}\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x-4=2\sqrt{x-2}\Rightarrow x-2=\sqrt{x-2}\Rightarrow x^2-4x+4=x-2\Rightarrow x^2-5x+6=0\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-2)(x-3)=0;\quad x_1=2;\quad x_2=3;\qquad$ j: (2; 3).

Bul ten'lemeni shep jag'ının' tu'yinlesine ko'beytsek

$3x-5-(x-2)=\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}\Rightarrow 2x-3=\sqrt{3x-5}+\sqrt{x-2}$. Bul usıl aldın'g'ı usılg'a qarag'anda quramalıraq boladı eken.

2. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$

Bul ten'lemeni sheshiw ushın tu'yinleslik usılı qolaylı boladı. Ten'lemeni tu'yinlesine ko'beytsek.

$3x^2-2x+15-(3x^2-2x+8)=7\left(\sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8}\right)\Rightarrow 7\left(\sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8}\right)=7$

na'tiyjede to'mendegi ten'lemeler sistemasına iye bolamız:

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7\\ \sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3x^2-2x+15}=4\\ \sqrt{3x^2-2x+8}=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x^2-2x+15=16\\ 3x^2-2x+8=9\end{cases}$$

$$3x^2-2x-1=0;\quad x_1=-\frac{1}{3};\quad x_2=1$$

$3x^2-2x+15=16\Leftrightarrow 3x^2-2x+8=9$ ten' ku'shli ten'lemeler payda boldı.

Juwabı: $\left(-\dfrac{1}{3};1\right)$. Tekserip ko'rin'.

3. $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$ Bul ten′lemeni sheshiw ushın joqarıda ko′rsetlgen jasalma usıldı qollanamız:

$$\left(\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}\right)\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)=$$
$$=2x^2+3x+5-\left(2x^2-3x+5\right)=6x$$

$\sqrt{2x^2+3x+5}=t$; $\sqrt{2x^2-3x+5}=z$ dep belgilep alsaq $\begin{cases} t+z=3x \\ (t-z)\cdot 3x=6x \end{cases}$ sistemasına iye bolamız. $x=0$ sanı ten′likti qanaatlandırmaydı. Sonlıqtan

$$\begin{cases} t+z=3x \\ t-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t=3x+2 \\ 2z=3x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=\dfrac{3x+2}{2} \\ z=\dfrac{3x-2}{2} \end{cases}$$

Ornına qoysaq: $\sqrt{2x^2+3x+5}=\dfrac{3x+2}{2} \Rightarrow 8x^2+12x+20=9x^2+12x+4 \Rightarrow x^2-16=0$; $x=\pm 4$;

$$\sqrt{2x^2-3x+5}=\frac{3x-2}{2} \Rightarrow 8x^2-12x+20=9x^2-12x+4 \Rightarrow x^2-16=0; \quad x=\pm 4.$$

Solay etip, tu′yinleslik usılın paydalang′anda bir-birine ten′ ku′shli bolg′an eki ten′leme payda boladı eken.

İrracional ten′lemelerdi sheshiw olardın′ du′zilisine ju′da′ baylanıslı. Meyli to′mendegi mısaldı qarayıq.

4. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=3.$

$u=\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}$; $\sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=\vartheta$ dep belgilep, ekewin ko′beytsek, $u\cdot\vartheta=28$ boladı ha′m to′mendegi sistemanı du′zemiz:

$$\begin{cases} u-\vartheta=3 \\ u\cdot\vartheta=28 \end{cases}$$

Bul sistemanın′ sheshimleri (7; 4) ha′m (-4; -7) bolg′anlıqtan

$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}=7 \\ \sqrt{x\sqrt{x^2+28^2}-x^2}=4 \end{cases}$ ha′m $x=\dfrac{2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\dfrac{2\pm 4}{6}$; $x_1=-\dfrac{1}{3}$; $x_2=1$

$$\sqrt{3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+15}+\sqrt{3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}+8}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+15}+\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+8}=4+3=7=\sqrt{15-\frac{1}{3}}+\sqrt{8-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{44}{3}}+\sqrt{\frac{23}{3}}$$

Endi irracional ten'sizliklerdi sheshiw usılların qarayıq ($n \in N$):

1. $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) < (g(x))^{2n} \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

4. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} > 1 \Rightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > (g(x))^{2n} \end{cases}$

2. $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geq 0,\ f(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^{2n} \end{cases} \end{array} \right.$

5. $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

3. $\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{g(x)} < 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < (g(x))^{2n} \end{cases} \end{array} \right.$

Bazı bir oqıwshılar ten'sizliklerdi sheshkende olardın' eki jag'ın birdey da'rejege ko'terip, irracionallıqtan qutqaradı. Bul tek ayırım jag'daylarda bolmasa, tuwrı sheshimge alıp kelmeydi.

Mısallar:

1.

$$x-1 < \sqrt{4-x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1<0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \geq 0, 4-x > 0 \\ x^2-2x+1 < 4-x \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<1 \\ x \leq 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 1, x<4 \\ x^2-x-3<0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha < 1 \\ \begin{cases} 1 \leq x < 4 \\ (x-(\sqrt{3,25}+0,5))(x+(\sqrt{3,25}-0,5)) < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ 1 \leq x \leq \sqrt{3,25}+0,5 \end{array} \right. \Rightarrow x \in (-\infty; \sqrt{3,25+0,5})$$

Eger bul jerde sha'rtlerge itibar bermey birden kvadratqa ko'terip sheshsek qa'telikke jol qoyamız.

2. $\sqrt{x-20} + \sqrt{2x+4} > \sqrt{3x-16}$.

Jup da'rejeli koren barlıq waqıtta on' san bolg'anlıqtan bunı kvadratqa ko'teremiz.

$$\begin{cases} 3x-16\ge 0 \to x\ge -16/3 \\ x-20\ge 0 \to x\ge 20 \\ 2x+4\ge 0 \to x\ge -2 \\ x-20+2x+4+2\sqrt{(x-20)(2x+4)} > 3x-16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 20 \\ \sqrt{(x-20)(2x+4)} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 20 \\ (x-20)(x+2) > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 20$$

Juwabı: $x\in(20;\infty)$.

§3. İrracional ten′lemelerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılları

İrracional ten′lemelerdi sheshiwdin′ standart emes usıllarιn qarawdan aldın, standart ma′seleler (ten′lemeler) standart emes ma′seleler (ten′lemeler) ha′m olardı sheshiwdin′ standart emes usılları degenimiz ne degen sorawg′a juwap beriwimiz kerek.

1) Standart ma′seleler (ten′lemeler) degenimiz ne? Bizge mektep kursı matematikasınan belgili, ma′selelerdin′ tikkeley sheshimleri adımlardın′ (ha′rekettin′, a′mellerdin′) izbe-izliginen turadı. Sonlıqtan usı izbe-izlikti izlew (adımlardı izlew) ma′seleni sheshiw ushın ne islew kerek degen sorawg′a juwap beredi.

2) Matematika ko′plegen tu′rdegi ma′seleler ushın qag′ıydalar du′ziw (ornatıw) menen shug′ıllanadı. Bul qag′ıydalar menen berilgen tu′rdegi qa′legen ma′seleni sheshiw ushın ko′rsetilgen izbe-iz adımdı tabıw mu′mkin. Ko′pshilik ma′seleler ushın bunday qag′ıydalar burınnan belgili ha′m olar mektep kurs matematikasında u′yrenilmekte.

3) Mektep kurs matematikasında matematikalıq ma′selelerdi sheshiw ushın tayar qag′ıydalar (qa′legen orında formulalar, birdeyliklerdi h.t.b) bar bolg′an yamasa bul qag′ıydalar tikkeley qandayda bir anıqlamadan yamasa teoremadan kelip shıg′atug′ın, izbe-iz adım tu′rinde bul ma′selelerdi sheshiw programmasın anıqlaytug′ın matematikalıq ma′selelerdi standart ma′seleler deymiz.

1-mısal.

$\sqrt{x+y}+\sqrt{x+20}=8$ ten′lemesi sheshilsin.

Bul ten′lemeni sheshpesten bul qanday ten′leme ekenligin bilip alayıq. Bunın′ ushın mına anıqlamadan paydalanamız.

Anıqlama. Belgisizleri koren astında bolg′an ten′lemeler irracional ten′lemeler delinedi.

Demek, berilgen ten′leme irracional ten′leme eken.

Sheshimi: Berilgen ten′lemenin′ anıqlanıw oblastın tabamız. Olar mına ten′sizlik sisteması boyınsha tabıladı.

$$\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ x+20 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \geq -20 \end{cases} \Rightarrow x \geq 4$$

Demek, bul irracional ten′lemenin′ anıqlanıw oblastı $[-4;\infty)$ eken.

Endi berilgen ten′lemenin′ eki jag′ın kvadratqa ko′teremiz. Bul qag′ıyda boyınsha berilgen irracional ten′leme, racional ten′lemege aylanıwı kerek.

$$\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)^2 = 8^2$$

Bunı kvadratqa ko′terip tu′rlendirgennen keyin mına ten′lemege iye bolamız.

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20} = 20-x$$

İrracionallıqtan qutılıw ushın ja′ne kvadratqa ko′teremiz ha′m bir qansha tu′rlendiriwden keyin 64x=320 racional ten′lemesine iye bolamız. Onın′ sheshimi x=5.

Bul ten′lemeni basqa usıl menen de sheshiw mu′mkin:

$$\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)^2 = 8^2$$

$$\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)^2 - 8^2 = 0$$

qısqasha ko′beytiw formulalarınan paydalanıp,

$$\left[\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)-8\right]\left[\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}\right)+8\right] = 0$$

Egerde bir neshe ko′beymeler 0-ge ten′ bolsa, onda en′ keminde olardın′ birewi 0 ge ten′ degen anıqlamadan paydalanıp,

1) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-8=0$

2) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}+8=0$

ten′lemelerine iye bolamız. Bunda ekinshi ten′leme sheshimge iye emes, sebebi eki (irracional) kvadrat koren astındag′ı sannın′ qosındısı teris san bolmaydı, al birinshi ten′lemenin′ sheshimi bizge belgili x=5.

2-mısal.

$\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}=2$ ten′lemesin sheshin′

Bul radikal belgisi astında kvadrat u′sh ag′zalısı bar irracional ten′leme. Bul ten′lemeni sheshiwdin′ eki usılın qarap o′temiz:

1-usıl. Bunı biz biletug′ın eki jag′ın kvadratqa ko′terip berilgen ten′lemege ten′ ku′shli ten′leme hasıl etiw jolı menen sheshemiz. Onın′ ushın birinshi radikaldı shep jag′ında qaldırıp, ekinshi radikal ten′lemenin′ ekinshi jag′ına shıg′arıp

$$\sqrt{x^2+3x-3} = 2-\sqrt{x^2-2x+2}$$

ten′lemesine iye bolamız.

$x^2+3x-3 \geq 0$ ha′m $x^2-2x+2 \geq 0$ dep esaplap ten’liktin’ eki jag’ın kvadratqa ko’teremiz.

$$x^2+3x-3=4-4\sqrt{x^2-2x+2}+x^2-2x+2$$

Ten’liktin’ shep jag’ına radikal an’latpanı, al on’ jag’ına qalg’an ag’zaların jıynaymız.

$$4\sqrt{x^2-2x+2}=-\underline{x^2}-3x+3+\underline{x^2}-2x+6$$

Bunnan $4\sqrt{x^2-2x+2}=9-5x$ qaladı. Bul ten’liktin’ eki jag’ın da kvadratqa ko’terip mınag’an iye bolamız.

$$16\left(x^2-2x+2\right)=81-90x+25x^2$$

Bunnan qawsırmanı ashıp ha’m uqsas ag’zaların jıynag’annan keyin

$$9x^2-58x+49=0$$

ten’lemesine iye bolamız.

Bul ten’lemeni sheshkennen keyin $x_q=1$, $x_w=49/9$ sheshimlerin tabamız. Bul tabılg’an sheshimlerdi berilgen ten’lemege qoyıp teksergenimizde, berilgen ten’lemenin’ sheshimi $x_1=1$ ekenligi anıqlanadı, al $x_w=49/9$ sheshimi kvadratqa ko’teriw na’tiyjecinde payda bolg’an jat sheshim bolıp esaplanadı.

2-usıl.

Berilgen ten’lemeni onın’ shep jag’ının’ tu’yinlesi menen ko’beytemiz.

$$\left(\sqrt{x^2+3x-3}+\sqrt{x^2-2x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)=2\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

Bunnan

$$x^2+3x-3-x^2+2x-2=2\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

$$5x-5=2\left(\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

$$\sqrt{x^2+3x-3}-\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{5x-5}{2}$$

iye bolamız.

Keyingi ten’lemeni berilgen ten’lemeden alamız.

Sonda,

$$2\sqrt{x^2-2x+2}=2-\frac{5x-5}{2}$$ boladı.

Bunnan,

$$2\sqrt{x^2-2x+2}=\frac{9-5x}{2}$$

yamasa

$$4\sqrt{x^2-2x+2}=9-5x$$

iye bolamız.

Bunı kvadratqa ko’terip sheshkenimizde aldın’g’ı usıldag’ıday x=1 sheshimine iye bolamız.

Joqarıda aytılg′anlardan standart emes ma′seleler dep olardı sheshiwdin′ anıq programmasın anıqlaytug′ın matematika kursında ulıwmalıq qag′ıyda ha′m jag′daylar bolmaytug′ın ma′selelerge aytamız.

Qa′legen standart emes ma′seleni (ten′lemeni) sheshiw processin tiykarg′ı eki operaciyanı izbe-iz orınlawdan turadı:

1) Standart emes ma′seleni basqa og′an ekvivalent biraq, endi standart tu′rge engen ma′selege alıp keliw (tu′rlendiriw yamasa qayta formulirovkalaw jolı menen)

2) Standart emes ma′seleni bir neshe standart ma′selelerge bo′liw.

Standart emes ma′selenin′ xarakterine baylanıslı biz bul operyaciyalardın′ birewin yamasa ekewinde paydalanamız. Quramalıraq ma′selelerdi sheshkende bul operaciyalardı qayta-qayta paydalanıwg′a tuwra keledi.

Matematikada standart emes ma′selelerdi sheshiw ushın ko′rsetilgen eki operaciyanı paydalanıw boyınsha qanday da bir ulıwma qag′ıyda joq. Matematika bunday qag′ıydalardı islep shıg′ıw menen shug′ıllanbaydı, biraq mektep kursı matematiksında ju′da′ ko′p mısallardı bul operaciyalardın′ paydalanılatug′ının baqlawın′ız mu′mkin.

Standart emes ma′selelerdi sheshiw ushın ulıwma qag′ıyda bolmasa da (sonın′ ushın da bul ma′selelerdi standart emes ma′sele deydi) ha′m standart emes ma′selelerdi sheshiwdi standart ma′selelerdi sheshiwge keltiriw boyınsha operaciyalardı paydalanıwdın′ qandayda bir qag′ıydası bolmasada, lekin ko′pshilik ko′rnekli matematikler ha′m pedagoglar qatar ulıwmalıq ko′rsetpe rekomendaciyalar taptı. Standart emes ma′selelerdi sheshkende olardı basshılıqqa alıw kerek.

Bul ko′rsetpeler a′dette-evristikalıq qosındılar yamasa qısqasha evristikler delinedi (evristika-grek so′zi "shınlıqtı tabıw iskusstvosı" degendi bildiredi).

3-mısal.

$$\sqrt{x^2-8x+7}+2\sqrt{x^2-18x+17}=2\sqrt{x^2-32x+31}$$

ten′lemeni sheshin′.

Sheshimi:

Bul ten′lemeni sheshiw ushın koren astındag′ı an′latpalardı ko′beytiwshilerge jikleymiz. Onın′ ushın ha′r bir ko′ren astındag′ı an′latpanı o′z aldına 0-ge ten′ep olardı 0-ge aynaldıratug′ın sheshimlerin tabamız.

1) $x^2-8x+7=0$

$x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm 3$

$x_1=7;\quad x_2=1$

$x^2-8x+7=(x-7)(x-1)$

2) $x^2-18x+17=0$

$x_{1,2}=9\pm\sqrt{81-17}=9\pm 8$

$x_1=17;\quad x_2=1$

$x^2-18x+17=(x-17)(x-1)$

3) $x^2-32x+31=0$

$x_{1,2}=16\pm\sqrt{256-31}=16\pm\sqrt{225}=16\pm15$

$x_1=31;\quad x_2=1$

$x^2-32x+31=(x-31)(x-1)$

Orınlarına aparıp qoysaq $\sqrt{(x-1)(x-7)}+2\sqrt{(x-1)(x-17)}=2\sqrt{(x-1)(x-31)}$ iye bolamız.

Anıqlanıw oblastın tabamız, ol

$$\begin{cases}(x-1)(x-7)\ge 0\\(x-1)(x-17)\ge 0\\(x-1)(x-31)\ge 0\end{cases}$$

sistemasınan ibarat. Bunda sheshim $x\le 1$ ha'm $x\ge 31$ ekenligin tabamız.

Demek, berilgen ten'lemenin' anıqlanıw oblastı.
Ten'lemeni mına tu'rde jazıp alamız

$$\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-17|}=2\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|x-31|}$$

ten'lemenin' on' jag'ındag'ı an'latpanı, onın' sol jag'ına o'tkerip ha'm ulıwma ko'beytiwshini skobka sırtına shıg'arsaq.

$$\sqrt{|x-1|}\left(\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}\right)=0$$

$$\begin{cases}x_1=1\\\sqrt{|x-7|}+2\sqrt{|x-17|}-2\sqrt{|x-31|}=0\end{cases}$$

sistemasına iye bolamız. Eger $x\le 1$ bolsa, onda

$$\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}-2\sqrt{x-31}=0$$

Bunnan $\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}=2\sqrt{x-31}$ dep alıp onın' eki jag'ın kvadratqa ko'teremiz.

$$7-x+4\sqrt{(7-x)(17-x)}+4(17-x)=4(31-x)$$

$$7-x+4\sqrt{(7-x)(17-x)}+68-4x=124-4x$$

$$\left(4\sqrt{(7-x)(17-x)}\right)^2=(x+49)^2$$

$$16\left(119-34x+x^2\right)=x^2+98x+2401$$

$$15x^2-482x-497=0.$$

iye bolamız.

Bunı sheship $x_1=-1$ ha'm $x_2=\dfrac{497}{15}$ iye bolamız. Biraq $x_2=\dfrac{497}{15}$ jat sheshim boladı. Sebebi ol $x\le 1$ anıqlanıw oblastınan tısqarı. Solay etip berilgen ten'lemenin' sheshimi x=-1 boladı.

Eger $x\ge 31$ bolsa, onda ten'leme mına tu'rde boladı.

$$\sqrt{x-7}+2\sqrt{x-17}-2\sqrt{x-31}=0$$

Bunday ten′lemeni sheshiwdi bilemiz.

4-mısal.

$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x}=5$ ten′lemenin′ haqıyqıy korenlerin tabın′.

Bir belgisizli irracionallıq ten′lemeni sheshiwdin′ tiykarg′ı eki usılı bar.

1) Berilgen ten′leme bir belgisizli racional ten′lemege tu′rlendiriledi.

2) Berilgen ten′leme eki belgisizli yamasa ko′birek belgisizli racional ten′lemeler sistemasına tu′rlendiriledi.

Berilgen ten′lemeni birinshi usıl menen sheshiw ha′reketi ju′da′ awır tu′rlendiriwler menen alıp barıladı ha′m o′sip baratırg′an qıyınshılıqqa alıp keledi. Sonlıqtan bul jerde ekinshi usıl menen is alıp barıw jaqsıraq, bunda radikallardı jan′a o′zgeriwshiler dep qabıl etemiz.

Sheshiw:

$\sqrt[4]{97-x}=u$ ha′m

$\sqrt[4]{x}=v$ dep belgilep

$\begin{cases} u+v=5 \\ u^2+v^2=97 \end{cases}$ sistemasına iye bolamız.

Bul sistemanın′ ekinshi ten′lemesin izbe-iz mınanday etip tu′rlendiremiz.

$$\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=97$$
$$\left(u^2+2uv+v^2-2uv\right)^2-2u^2v^2=97$$
$$\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2=97$$

Bizde $u+v=5$ bolg′anlıqtan

$(25-2uv)^2-2u^2v^2=97$ boladı.

Endi $uv=z$ dep belgilep alsaq ten′lememiz $(25-z)^2-27^2=97$ tu′rine keledi. Bul kvadrat ten′lemeni sa′ykes tu′rlendirgennen keyin ol mına tu′rge keledi.

$$z^2-50z+264=0.$$

Bul kvadrat ten′lemeni sheshsek

$z_1=44$ ha′m $z_2=6$

juwaplarına iye bolamız. Demek, uv ko′beymesi eki ma′niske iye, yag′nıy 44 ha′m 6.

Endi ma′sele to′mengi eki sistemanı sheshiwge alıp keledi:

1) $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=44 \end{cases}$ ha′m 2) $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$

Bul sistemanın′ birinshisi haqıyqıy korenge iye emes, sonlıqtan ol ma′selenin′ sha′rtin qanaatlandırmaydı.

Ekinshi sistemanı v g′a tu′rlendirsek $v^2-5v+6=0$

kvadrat ten'lemesine iye bolamız, ol $v_1 = 3$ ha'm $v_2 = 2$ korenlerin beredi usıg'an sa'ykes $u_1 = 2$ ha'm $u_2 = 3$ ma'nislerin aladı. Yag'nıy

1) $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$ ha'm 2) $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$

$v = \sqrt[4]{x}$ ten'lemesinen $3 = \sqrt[4]{x}$ bunı r da'rejege ko'tersek $x_1 = 3^4 = 81$ yag'nıy $x_1 = 81,$ al $2 = \sqrt[4]{x}$ tan $x_2 = 2^4 = 16$ yag'nıy $x_2 = 16$ iye bolamız. Demek, berilgen irracional ten'leme eki haqıyqıy korenge iye eken.

Joqarıdag'ı tu'rine qarag'anda standar emes ma'selelerdi sheshkende paydalang'an usıllar, a'piwayı sheshimlerge jol qoyatug'ın, a'piwayı ma'selelerdin' sheshimleri ushında tabıslı paydalanıladı. Haqıyqatında bul usılllar, qag'ıyda boyınsha, ju'da' qısqa, ju'da' sulıw (na'zik) sheshimlerdi beredi. Ju'da' a'piwayı standart tu'rge iye, biraqta is ju'zinde a'piwayı usıllarg'a boysınatug'ın ma'seleler {jawız} ma'seleler bolıp esaplanadı. Bunday tu'rdegi ma'selelerdi sheshkende, qa'te joldı saylag'anda, shınında da standart emes pikirlewdi ju'rgiziw kerekpe ekenligi anıq emes.

Mısallar keltiremiz.

5-mısal.

$\sqrt[4]{629 - x} + \sqrt[4]{77 + x} = 8$ ten'lemesinin' haqıyqıy ko'renlerin tabın'.

Sheshimi.

Bul ten'lemeni a'dettegidey eki jag'ın r-da'rejege ko'terip (bul process bir neshe ma'rtebe qaytalanıwı mu'mkin). Bul irracional ten'lemeni standart tu'rge keltirip alıp sheshiw usılı ju'da' u'lken (awır) tu'rlendiriwlerdi keltirip shıg'aradı ha'm o'sip baratırg'an qıyınshılıqqa alıp keledi. Sonlıqtan biz bul ten'lemedegi radikallardı jan'a o'zgeriwshi menen almastıramız.

$$\sqrt[4]{629 - x} = u \qquad \text{ha'm} \qquad \sqrt[4]{77 + x} = u$$

Sonda $u^4 = 629 - x, \quad v^4 = 77 + x$ boladı. Bulardı paydalanıp berilgen ten'lemeni sheshiw ushın sistema du'zemiz.

$$\begin{cases} u + v = 8 \\ u^5 + v^5 = 706 \end{cases}$$

Sistemanın' ekinshi ten'lemesin izbe-iz tu'rde to'mendegishe tu'rlendiremiz:

$$u^4 + v^4 + 2u^2v^2 - 2u^2v^2 = 706$$
$$\left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 = 706$$
$$\left[\left(u^2 + v^2\right)^2 - 2uv\right]^2 - 2u^2v^2 = 706$$

$u+v=8$ ekenligin eske alsaq

$$(8-2uv)^2-2u^2v^2=706$$

ten′lemesine iye bolamız. Bunda $uv=t$ dep belgilep ha′m sa′ykes tu′rlendiriwler islep jan′a o′zgeriwshi t g′a qarata kvadrat ten′lemege iye bolamız.

$$t^2-128t+3390=0$$

Bul kvadrat ten′lemeni sheship

$t_1=113$ ha′m $t_2=15$

ma′nislerine iye bolamız.

Endigi ma′sele to′mendegi eki sistemanın′ ha′r birinin′ sheshiliwine alıp keledi.

1) $\begin{cases} u+v=8 \\ uv=113 \end{cases}$ ha′m 2) $\begin{cases} u+v=8 \\ uv=15 \end{cases}$

Birinshi sistema jorımal korenge iye, ol berilgen ma′selenin′ sha′rtine juwap bermeydi.

Ekinshi sistemanı sheshkende to′mendegi sheshimlerge iye bolamız.

1) $\begin{cases} u=3 \\ v=5 \end{cases}$ ha′m 2) $\begin{cases} u=5 \\ v=3 \end{cases}$

$v=\sqrt[4]{77+x}$ ten′lemesinen

$77+x=v^4$ ke iye bolamız. Demek, berilgen irracional ten′leme

$\begin{matrix} 77+x=625 & 77+x=81 \\ x_1=548 & x=4 \end{matrix}$ tu′rindegi

haqıyqıy korenlerge iye boladı. Shınında berilgen irracional ten′lemenin′ anıqlanıw oblastı.

$$629-x\ge 0,\quad x\le 629.$$
$$77+x\ge 0,\quad x\ge -77.$$
$$-77\le x\le 629.$$

6-mısal.

$$y^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6.$$

ten′lemesin sheshin′.

Sheshimi.

Bul ten′lemenin′ a′dettegidey tiykarları ha′m da′reje ko′rsetkishlerin birdey etip alıwg′a tırısamız.

$$2^{2\left(x+\sqrt{x^2-2}\right)}-5\cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}}\big/2=6.$$

$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t$ dep belgilep

$t^2-5\cdot\dfrac{t}{2}=6$ ten′lemesine iye bolamız.

Bunnan

$$2t^2 - 5t - 6 = 0$$

kvadrat ten′leme hasıl boladı. Bul kvadrat ten′lemeni sheshin′.

$$t_1 = 4 \qquad \text{ha′m} \qquad t_2 = -\frac{3}{2}$$

korenlerine iye bolamız.

$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$ ten′lemesinen

$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4$ bunnan

$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$ ten′lemesine iye bolamız.

$\sqrt{x^2 - 2} = 2 - x$ dep alıp ten′liktin′ eki jag′ın kvadratqa ko′terip birqansha tu′rlendiriwden keyin.

$x = \frac{3}{2}$ sheshimine iye bolamız.

7-mısal.

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

ten′lemesin sheshin′.

Bul ten′lemenin′ tu′ri qorqınıshlı bolg′anı menen standart emes usıllardı qollang′anımızda sheshimi an′sat ha′m sulıw bolıp shıg′adı.

Sheshimi:

Berilgen ten′lemenin′ bir qosılıwshısı, aytayıq ekinshisin, onın′ tu′yinlesine ko′beytemiz.

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\right)^x = 4.$$

Sonda berilgen ten′leme

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x} = 4.$$

tu′rine keledi.

$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t.$ dep belgilep alsaq

$t^2 - 4t + 1 = 0$ tu′rindegi

kvadrat ten′lemege iye bolamız. Bul ten′lemeni sheship

$$t_1 = 2 + \sqrt{3} \text{ ha′m } t_2 = 2 - \sqrt{3} \text{ te}$$

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$$

Bunda tiykarlar birdey emes, sonın′ ushın ten′liktin′ ekinshi jag′ına ja′ne tu′yinlesine ko′beytemiz, sonda bul ten′leme mına tu′rge keledi.

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{x}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}$$

bunnan x=2.

Bul eki korende berilgen ten′lemeni qanaatlandıradı

8-mısal.

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+4\sqrt{x-2}+\sqrt{y-1}-28=0$$

ten′lemesin qanaatlandıratug′ın x ha′m u juplıg′ın tabın′.

Bul ten′leme basqa ten′lemelerge qarag′anda neda′wir basqasha, sebebi bunda 2 o′zgeriwshi qatnasqan. Bizler eki belgisizli ten′lemeler menen ushırassaqta, lekin olar sızıqlı ten′lemeler edi ha′m olardı sheshiw ushın birin ekinshisi arqalı an′latar edik. Bul jag′dayda a′lbette onı qollanıp bolmaydı. Berilgen ma′selede x tı u arqalı yamasa kerisinshe an′latıw emes, al x ha′m u dın′ usı ten′lemeni qanaatlandıratug′ın san ma′nislerin tabıw talap etiledi.

Ten′lemege ko′z jibere otırıp, og′an $\sqrt{x-2}$ ha′m $\sqrt{y-1}$ korenleri kiretug′ın bayqamız. Bunnan $x>2$ ha′m $x>1$ (1) kelip shıg′adı. Bunın′ menen biz bir ideyanı taptıq biraq sheshimge jaqınlasa qoyg′anımız joq. Bul ko′renlerdi ten′lemenin′ bir ag′zalarında bo′lshektin′ bo′liminde, al bir ag′zalarında ko′beyiwshi retinde qatnasqanı neda′wir a′hmiyetli.

Bul ag′zalardı biriktirip:

$$\left(\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\sqrt{x-2}\right)+\left(\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}\right)-28=0$$

Yamasa

$$4\left(\sqrt{x-2}+\frac{9}{\sqrt{x-2}}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}\right)=28$$

Skobka ishindegi barlıq ag′zalar on′ ha′m olardın′ qosındısı 28 ge ten′. Onda ten′lemenin′ shep jag′ın bahalaw mu′mkin shıg′ar. A′ne bul ten′lemeni sheshiwdin′ ideyası boladı.

Solay etip, bizge skobka ishindegi turg′an an′latpalardı bahalaw kerek. Birinshi skobkag′a ser salıp qarag′an ha′m $\sqrt{x-2}=t,\ 9=a$ dep belgilep alsaq, onda

$$t+\frac{a}{t}\geq 2\sqrt{a}$$

ten′sizliktin′ orınlı bolatug′ını ko′rinedi, yag′nıy

$$\sqrt{x-2}+\frac{9}{\sqrt{x-2}}\geq 2\sqrt{9}=6.$$

Ekinshi skobkada $t=\sqrt{y-1}$ ha′m $a=4$ dep alsaq

$$\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=2\sqrt{4}=2$$

dep esaplawg′a boladı.

Solay etip, ten′lemenin′ shep jag′ı

$$4\left(\sqrt{x-2}+\frac{9}{\sqrt{x-2}}\right)+\left(\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}\right)\geq 4\cdot 6+4=28$$

al ol anıq 28-ge ten′ bolıwı kerek. Ol tek, egerde skobkanın′ ishindegi ha′r bir an′latpa en′ kishi ma′niske iye bolg′anda g′ana boladı. Ol ma′nisten $t=\sqrt{a}$ bolg′an jag′dayda iske asadı, yag′nıy

$$\sqrt{x-2}=3 \text{ ha′m } \sqrt{y-1}=2$$

ten′ boladı.

Bunnan $x=4,\ \ y=5$ ekenin tabamız. Bul ma′nisler (1) sha′rtti qanaatlandıratug′ının eskertemiz. Sonlıqtan olar berilgen irracional ten′lemenin′ juwabı bolıp xızmet ete aladı.

Sheshimnin′ basqasha usılı da bolıwı mu′mkin. Berilgen ten′lemenin′ shep jag′ın mınanday tu′rde jazıw mu′mkin`

$$\left(2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^2=0.$$

kvadratlardın′ qosındısı tek sol jag′dayda nolge ten′ bolıwı mu′mkin, egerde ha′r bir qosılıwshı nolge ten′ bolsa, onday bolsa mınaday ten′lemeler sisteması hasıl boladı:

$$2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}=0 \qquad \text{ha′m} \qquad \sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}=0.$$

Bul ten′lemelerdin′ ha′r qaysısın sheship joqarıdag′ıday juwaptı alamız.

§4. İrracional ten′sizliklerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılları

Egerde qa′legen irracional ten′lemelerde ten′lik belgisin ten′sizliktin′ mına belgilerinin′ birewi menen: >, ≥, <, ≤ almastırsaq, onda irracional ten′sizlikti alamız.

İrracional ten′sizliklerdi sheshiw a′dette, olardı qandayda bir tu′rlendiriwler ja′rdemi menen olarg′a ten′ ku′shli bolg′an ten′sizlikler yamasa ten′sizlikler sistemaları menen almastırıladı (ko′pshilik jag′daylarda aralas sistemalar menen, yag′nıy olarda ten′leme ha′m ten′sizlikler qatnasadı). Bul tu′rlendiriwlerge o′zgeriwshilerdi almastırıw (jan′a o′zgriwshi kiritiw), ko′beytiwshilerge jiklew ha′m ten′sizliktin′ eki jag′ın birdey da′rejege ko′teriw. Bul waqıtta a′lbette jat korenlerdin′ bolmawına ser salıwımız tiyis. Sonın′ ushın mu′mkin bolg′an jag′day ten′sizliklerdin′ anıqlanıw oblastın ha′mde sheshimnin′ mu′mkin bolg′an ma′nislerinin′ oblastın tabıw paydalı boladı.

Mısallar keltiremiz.

1-mısal. $\sqrt{x^2 - x - 12} > x$ ten′sizligin sheshkende, a′dep ten′sizliktin′ anıqlanıw oblastın tabamız. Ol mına sha′rtten tabıladı.

$$x^2 - x - 12 \geq 0$$

Bul ten′sizliktin′ shep jag′ın ko′beytiwshilerge jikleymiz.

$$(x-4)(x+3) \geq 0$$

bunnan

$$x \geq 4 \qquad \text{yamasa} \qquad x \leq -3 \tag{1}$$

iye bolamız.

Anıqlanıw oblastı boyınsha ten′sizliktin′ shep jag′ı on′ sonlıqtan egerde onın′ on′ jag′ı $x<0$ bolsa, onda berilgen ten′lik durıs, biraq (1) sha′rtti eskertip mınaday sheshim alamız.

$$x \leq -3 \tag{2}$$

Egerde ten′sizliktin′ on′ jag′ıda on′ bolsa, yag′nıy

$$x \geq 0 \tag{3}$$

onda ten′sizliktin′ eki jag′ında kvadratqa ko′teremiz ha′m mınag′an iye bolamız` $x^2 - x - 12 > x^2$ yamasa $x < -12$.

Tabılg′an ten′sizlik (3) sha′rtke qarama-qarsı keledi, demek bul sha′rtte ten′sizlik sheshimge iye emes. Juwap $x \leq -3$.

2-mısal.

$\sqrt{2x+1} < \dfrac{2(x+1)}{2-x}$ ten′sizligin sheshin′.

Ten′sizliktin′ sheshimi mına sha′rtlerdi qanaatlandırıwı anıq.

$2x+1 \geq 0$ ha′m $\dfrac{2(x+1)}{2-x} > 0$ (egerde $\dfrac{2(x+1)}{2-x} \leq 0$ bolsa, onda ten′sizlik orınlanbaydı). Bul sha′rtlerde berilgen ten′sizlik

$$2x+1 < \frac{4(x+1)^2}{(2-x)}$$

ten′sizligine ten′ ku′shli ha′m bir qansha tu′rlendiriwlerden keyin

$$x\left(2x^2 - 11x - 4\right) < 0$$

ten′sizligine alıp keledi.

Solay etip berilgen ten′sizlik mına sistemag′a

$$\begin{cases} 2x+1\geq 0 \\ \dfrac{x+1}{2-x}>0 \\ x\left(2x^2-11x-4\right)<0 \end{cases}$$

ten′ ku′shli. Bul sistemanı sheship onın′ mına sheshimin alamız:

$$\left[-\frac{1}{2},\frac{11-\sqrt{153}}{4}\right],\quad (0{,}2).$$

İrracional ten′sizliklerdi sheshkende irracional ten′lemelerdi sheshkendegidey, geyde jan′a qosımsha belgisizlerdi kiritiw paydalı.

3-mısal.

$x^2+\sqrt{x^2-3x+5}>3x+7$ ten′sizligin sheshin′ $\sqrt{x^2-3x+5=}y>0$ dep alıp ha′m bunnan $x^2-3x=y^2-5$ ekenligin eske alsaq, onda $y^2+y-12>0$ ten′sizligine iye bolamız. Onın′ sheshimi $y>3$ ($y<-4$ bolmaydı, sebebi $y\geq 0$ sha′rtine qarsı keledi).

Demek, berilgen ten′sizlik

$$x^2-3x+5>9$$

ten′sizligine ten′ ku′shli. Bunın′ sheshimi eki x<-1 ha′m x>4 aralıqlarınan turadı.

İrracionallıq ha′m basqada ten′sizliklerdi sheshkende to′mendegi usıldı na′zerde tutqan paydalı. Bunı biz mına mısalda ko′remiz.

4-mısal.

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}<1$$

ten′sizligin sheshin′.

Sheshimi: $y=\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}-1$ funkciyasın qarayıq. Sonda qoyılg′an ma′seleni to′mendegishe formulirovkalawg′a boladı: u funkciyası teris ma′nis alatug′ın *x* tın′ ma′nislerin tabın′.

Bul funkciya o′zgeriw oblastı yamasa berilgen ten′sizliktin′ mu′mkin bolg′an ma′nislerinin′ ko′pligi

$$1-8x^2\geq 0 \text{ ha′m } x\neq 0 \text{ yag′nıy}$$

$$0<x<\frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ha′m } -\frac{1}{2\sqrt{2}}\leq x<0$$

orınlanatug′ın barlıq *x* tan turadı.

Endi biz *u* funkciyası nolge aylanatug′ın barlıq *x* lardın′ ma′nisin tabamız. Onın′ ushın $\dfrac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}=1$ ten′lemesin sheshiw kerek. Onı sheship birden bir koren

$x = \frac{1}{3}$ di tabamız. Bul koren $y = \frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} - 1$ funkciyasının′ o′zgeriw oblastın u′sh aralıqqa bo′ledi:

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \le x < 0 \text{ (I)}, \qquad 0 \le x < \frac{1}{3} \text{ (II)}, \qquad \frac{1}{3} \le x < \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ (III)}$$

(I) aralıqtan x-tın′ qandayda bir ma′nisin alıp, mısalg′a $x = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, tabamız:

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2} - 1 < 0$$

Bul aralıqta bizin′ funkciyamız no′lge aylanbaydı eken, onda usı aralıqtag′ı barlıq x larda, ol teris ma′niske iye.

Endi $x = \frac{1}{4}$ dep alsaq, (II) aralıqtan, u tin′ teris ekenligin ko′remiz.

(II) aralıqtag′ı $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ma′nisi ushın $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 > 0$ yag′nıy funkciya usı aralıqtag′ı barlıq x lar ushın tek on′ ma′nislerdi g′ana aladı.

Solay etip, berilgen ten′sizliktin′ sheshimi bolıp

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \le x < 0, \quad 0 < x < \frac{1}{3}$$

aralıqtag′ı x-tın′ barlıq ma′nisleri bolıp esaplanadı.

Biz joqarıda ko′rgen mısallarımız a′dettegi «mekteplik» tu′rge iye bolıp, mektep shegarasındag′ı a′dettegi pikirlerdin′ ja′rdeminde mekteptegi standart metodlar menen sheshiletug′ın edi. Biraq bul mektep matematikası kursındag′ı standart metodlar menen sheshiw qıyın bolatug′ın irracional ten′sizlikler bar. Olardı "standart emes" ma′seleler dep ataydı. Bul "standart emes" ma′seleler ha′r qıylı tu′rde boladı. Olardın′ bir qanshası sırttan qarag′anda ju′da′ basqashalaw ko′riniske iye bolıp ha′m onı qanday jol menen sheshiw a′dep ju′da′ belgisiz boladı. Basqaları jasırın tu′rde beriledi. Ko′rinisinen mısalı, bul a′dettegi irracional ten′sizlik bolıp ko′riniwi mu′mkin, biraq onı standart jollar menen sheshiw qıyın boladı. sheshimlerin sheshiw ushın ju′da′ na′zik ha′m anıq logikalıq oylaw kerek boladı.

A′lbette "standart emes" ma′selelerdi sheshiwdin′ barlıq metodların ko′rsetiw mu′mkin emes. Bunda grafiklerdi funkciyalardın′ ha′r qıylı qa′siyetlerin ha′m aqırg′ı orında turatug′ın, biraq a′hmiyeti boyınsha birinshi orında turatug′ın logikanı qollanıwg′a tuwra keledi.

"Standart emes" irracional ten′sizliklerdi sheshiwge mısallar keltiremiz:

5-mısal.

$$-|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \ge 1$$

ten′sizligin sheshin′.

Aldı menen x ha'm u eki belgisizli ten'sizlik sheshiw degenimiz bul berilgen ten'sizlikke aparıp qoyg'anda durıs sanlı ten'sizlik kelip shıg'atug'ın barlıq x ha'm juwabın ko'rsetiw kerek ekenin aytıp o'temiz.

Barlıq bunday juwaplardı ya tikkeley ko'rsetiw mu'mkin.

Mısalg'a olar a'dettegi ten'lemeler sistemasın sheshkende ko'rsetiledi yamasa geometriyanın' tegisliktin' sa'ykes tochkalarınan du'zilgen oblasttı su'wretlep ko'r-setiledi. Sonlıqtan, berilgen ten'sizlikiti, onın' sheshimleri ten'sizlikte jen'il su'wret-lenetug'ın tu'rge keltiriw kerek.

Berilgen ten'sizlikti to'mendegishe jazamız:

$$x-|y|\geq\sqrt{x^2+y^2-1}+1$$

Endi haqıyqıy sheshim $x-|y|\geq 0$ sha'rtin qanaatlandırıwı kerek ekenligi ko'rinedi, al bul sha'rttin' orınalanıwında ten'sizliktin' eki bo'legi de on' (anıqlanıw oblastında) ha'm biz olardı kvadratqa ko'tere alamız, bunda anıqlanıw oblastında ten' ku'shli ten'sizlikke iye bolamız.

$$-x|y|\geq\sqrt{x^2+y^2-1}$$

Lekin qaralıp atırg'an oblastta $x\geq|y|\geq 0$. Sonlıqtan alıng'an ten'sizliktin' shep jag'ı teris, al on' jag'ı on'. Sonlıqtan ol tek sol jag'dayda g'ana orınlanadı (qanaat-lanadı) qashan eki jag'ı da nolge ten' bolsa:

$$x|y|=0 \qquad \text{ha'm} \qquad x^2+y^2-1=0$$

Bul ten'lemelerdin' birinshisinen *x* yamasa *u* 0-ge ten' ekenligin bildiredi. Egerde *x*=0 bolsa, onda $x\geq|y|$ sha'rtinen u=0 kelip shıg'adı, al *x*=0, *u*=0 jubı berilgen ten'sizliktin' anıqlanıw oblastına kirmeydi. Demek, *u*=0 ha'm ekinshi ten'lemeden ($x\geq 0$ esapqa alıp) *x*=1 kelip shıg'adı.

Berilgen ten'sizlikke aparıp qoyg'anımızda alıng'an x=1, u=0 jubı onı qanaatlandıradı.

Joqarıda keltirilgen tu'rine qarag'anda "standart emes" ma'selelerdi sheshiw ushın qollang'an usıllar, a'piwayı sheshimlerge jol qoyatug'ın ju'da' a'piwayı ma'selelerdi sheshiw ushında tabıslı qollanıladı. Shınlıg'ında bul usıllar, qag'ıyda boyınsha ju'da' qısqa ha'm ju'da' na'zik (sulıw) sheshimlerdi beredi. Bunı to'mendegi mısalda ko'reyik.

6-mısal.

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}>1.$$

ten'sizligin sheshin'.

Bul ten′sizliktin′ anıqlanıw oblastı $\sin x \geq 0$ ha′m $\cos x \geq 0$ bolatug′ın x tın′ ma′nislerinen turadı. Bunnan basqa da $\sin x \leq 1$ ha′m $\cos x \leq 1$ ha′m da′rejelerdin′ qa′siyeti boyınsha

$$\sqrt{\sin x} \geq \sin^2 x$$

$$\sqrt{\cos x} \geq \cos^2 x$$

Bul ten′sizliklerdi ag′zama-ag′za qosıp $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq 1$ iye bolamız, ten′lik sol jag′dayda a′melge asadı, qashan bir waqıtta

$$\sqrt{\sin x} = \sin^2 x \qquad \text{ha′m} \qquad \sqrt{\cos x} = \cos^2 x$$

Bul ten′lemeler tek $x = 2k\pi$ ha′m $x = \left(\pi/2\right) + 2k\pi$ bolg′anda g′ana orınlanadı ha′m solay etip, berilgen ten′sizlik anıqlanıw oblastındag′ı barlıq x-lar ushın orınlanadı.

Bul eki ten′sizliktin′ ulıwma sheshimi demek berilgen ten′sizliktin′ de sheshimi

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Salıstırıw ushın berilgen ten′sizliktin′ a′dettegi standart sheshimin keltiremiz. Onın′ anıqlanıw oblastı $\sin x \geq 0$ ha′m $\cos x \geq 0$ ten′sizlikleri menen beriledi. Berilgen ten′sizlikltin′ eki jag′ı da on′ ha′m sonlıqtan onı kvadratqa ko′tergennen keyin anıqlanıw oblastı boyınsha berilgenge ten′ ku′shli ten′sizlik alamız:

$$\sin x + \cos x + 2\sqrt{\sin x \cos x} > 1$$

$2\sin x \cos x = (\sin x \cos x)^2 - 1$ bolg′anlıqtan $\sin x + \cos x = u$ dep belgilep alıp $\sqrt{2u^2 - 2} > 1 - u$ ten′sizligine iye bolamız.

Keyingi ten′sizliktin′ shep jag′ı on′ bolg′anlıqtan $u > 1$ de ol orınlanadı, yag′nıy barlıq $u > 1$ ma′nisleri onın′ sheshimi bolıp esaplanadı.

$u \leq 1$ ma′nislerin qaray otırıp ja′ne de eki jag′ıda on′ bolatug′ın ten′sizlikke iye bolamız. Onı kvadratqa ko′tere otırıp, tu′rlendiriwden keyin og′an ten′ ku′shli bolg′an

$$u^2 + 2u - 3 > 0$$

ten′sizligine iye bolamız. Onın′ sheshimi` $u < -3$ ha′m $u > 1$.

Biz $u \leq 1$ jag′dayın qarap atırg′anımız sebepli tek $u < -3$ ten′sizligin qaldıramız.

Solay etip,

$$\sqrt{2u^2 - 2} > 1 - u$$

ten′sizligi $u > 1$ (birinshi jag′day ushın) ha′m $u < -3$ (ekinshi jag′day ushın) sheshimlerine iye boladı. Biraqta $u = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \pi/4\right)$

-3 tek kishi bolıwı mu′mkin emes, sonlıqtan

$$\sin x + \cos x > 1$$

ten′sizligin sheshiw g′ana qaladı.

Berilgen ten′sizliktin′ anıqlanıw oblastında

$$\sin x + \cos x \geq 0;$$

sonlıqtan ten′sizliktin′ eki jag′ın kvadratqa ko′tergennen keyin og′an ten′ ku′shli $\sin x \cos x > 0$ ten′sizligine iye bolamız, ol

$$\sin x \cos x = 0$$

bolatug′ın x-tın′ ma′nislerinen basqa yag′nıy

$$2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

intervalındag′ı x-tın′ ma′nislerinen basqa anıqlanıw oblastında ko′rsetilgen x-tın′ barlıq ma′nislerinde orınlanadı.

Bunnan birinshi sheshim bir qansha qısqa ha′m bunnan basqa ol universal mısalg′a ten′sizlikte eki ko′rennin′ kvadrat bolıwı sha′rt emes, olar ha′r qıylı da′rejede bolıwları mu′mkin. Bul jag′dayda "standart" sheshim o′te almaytug′ın qıyınshılıqlarg′a dus keliwi mu′mkin.

Ko′rsetilgen mısalda standart emes usıllardan paydalanıwdan tu′setug′ın payda, tek sheshimnin′ qısqarıg′ı sonın′ ushın onı paydalanbay-aq ten′sizlikti sheshiwge bolar edi.

İrracional ten′sizliklerdi sheshiw usıllarına bul ten′sizliklerdin′ orınlı yamasa orınsız ekenligin da′lillew usılları da kiredi. Mısallar keltiremiz.

Egerde $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, qa′legen on′ san bolsa onda

$$\frac{a_1, a_2, a_3, ..., a_n,}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 ... a_n} \qquad \text{(A)}$$

Bunda ten′lik ten′ $a_1 = a_2 = ... = a_n$ bolg′an jag′dayında orınlanadı. $\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n}\right.$ an′latpası $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sanlarının′ aifmetikalıq ortası, al $\sqrt{a_1 a_2 ... a_n}$ – geometriyalıq ortası delinedi)

Da′lillewdin′ jolların izlew (A) ten′sizligin da′lillewdin′ birqansha usılları bar. Biraq olardın′ hesh qaysısı da jen′il emes. Biz bunda (1779-1857) jıllarda jasag′an francuz matematigi Koshige tiyisli bolg′an da′lillewdi keltiremiz. Ten′sizligi de orınlı.

(A) ten′sizligi $n = 1$ de orınlı.

A′dep to′mendegi qosımsha usınıstı (ga′pti) da′lilleymiz` (A) egerde ten′sizligi $n = k$ da orınlı bolsa, onda ol $n = 2k$ da orınlı.

Shınında da

$$\frac{x_1+x_2+...+x_{2k-1}+x_{2k}}{2k}=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+...+\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}}{k}\geq\sqrt[k]{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}...\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2}}\geq$$
$$\sqrt[k]{\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}...\sqrt{x_{2k-1}+x_{2k}}}=\sqrt[2k]{x_1x_2x_3...x_{2k}}$$

Solay etip (A) ten'sizligi $n=k$ da durıs dep onın' $n=2k$ da durıslıg'ın da'lilleyik.

Endi (A) ten'sizliginin' qa'legen natural sanı ushın da'lillewge o'temiz. Meyli n qa'legen natural san bolsın. Egerde n,2 sanının' pu'tin da'rejeleri bolsa, onda joqarıdag'ı da'lillew boyınsha (A) ten'sizligi orınlı.

Egerde n,2 nin' pu'tin da'rejelerinen turmasa, onda n ge sonday bir q sanın qossaq, onda $n+q$,2 sanının' pu'tin da'rejelerine keledi. Solay etip, $n+q=2$ joqarıdag'ı da'lillengen qosımsha usınıs boyınsha to'mendegi ten'sizlik orınlı boladı:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}+...a_{n+q}}{n+q}\geq\sqrt[n+q]{a_1a_2...a_na_{n+1}...a_{n+q}} \qquad (1)$$

Bunda $a_1,a_2,....,a_{n+q}$ qa'legen on' san

$a_{n+1},a_{n+2},....,a_{n+q}$ sanların tan'law erikli bolg'anlıqtan, $a_{n+1}=a_{n+2}=....=a_{n+q}$ dep alamız.

$a_{n+1},a_{n+2},....,a_{n+q}$ sanların bunday etip saylap barg'anda (1) ten'sizlik mınanday tu'rge iye boladı:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+\frac{a_1+a_2,...+a_n}{n}\cdot q}{n+q}\geq\sqrt[n+q]{a_1a_2...a_n\left(\frac{a_1+a_2+...a_n}{n}\right)^q}$$

Bunnan

$$\frac{(a_1+a_2+...+a_n)n+(a_1+a_2+...+a_n)q}{n(n+q)}\geq\sqrt[n+q]{a_1a_2\cdot...a_n\cdot\left(\frac{a_1+a_2+...a_n}{n}\right)^q}$$

yamasa $\dfrac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n}\geq\sqrt[n+q]{a_1a_2\cdot...a_n\cdot\left(\frac{a_1+a_2+...a_n}{n}\right)^q}$

Bul ten'sizliktin' eki jag'ın da $(n+q)$ da'rejesine ko'tersek,

$$\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^{n+q}\geq a_1a_2\cdot...a_n\cdot\left(\frac{a_1+a_2+...a_n}{n}\right)^q$$

iye bolamız.

Bunnan $\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n\geq a_1a_2\cdot...a_n$ kelip shıg'adı ha'm aqırında $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot...a_n}$ iye bolamız.

Solay etip, (A) ten'sizligi qa'legen natural n ushın da'lillenedi.

Endi (A) ten'sizliginin' = belgisi qashan orınlanatug'ının anıqlaw qaldı. $a_1 = a_2 = ... = a_n$ bolg'anda (A) ten'sizligindegi tek = belgisi qalatug'ının an'sat tekserip ko'riwge boladı.

Endi (A) formulasında ten'lik belgisi tek $a_1, a_2, ..., a_n$ ler o'z-ara ten' bolg'anda g'ana da'lillewimiz qaldı.

Meyli $a_1, a_2, ..., a_n$ lerdin' ishinen ekewi aytayıq a_1 ha'm a_2 o'z-ara ten' emes.

Bul jag'dayda (A) formulasında > (u'lken) belgisi orın alatug'ının da'lilleymiz, yag'nıy $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} > \sqrt{a_1 a_2 \cdot .... \cdot a_n}$ boladı.

Da'lillewi: $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} > \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 + ... + a_n}{n}$ bolatug'ını anıq

(A) formulasına bul eki an'latpanı qollanıp

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \cdot .... \cdot a_n} \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} + a_3 .... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, ..., a_n} \qquad (3)$$

iye bolamız.

Egerde $a_1 \neq a_2$ bolsa, onda $\frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$ ha'm $\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 + a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_1 a_2}$

Demek, $a_1 \neq a_2$ de (3) ten'sizliktin' on' jag'ı (2) ten'sizliktiin' on' jag'ınan u'lken, al olardın' shep jaqları o'z ara ten'. Sonlıqtan (2) ten'sizlikte ten'lik belgisi bolıwı mu'mkin emes. Yag'nıy $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \cdot .... \cdot a_n}$ boladı. Bul ten'sizlik $a_1, a_2, ..., a_n$ lerdin' en' keminde ekewi bir-birine ten' bolmag'anda alınadı.

Solay etip, arifmetikalıq ha'm geometriyalıq ortasha haqqındag'ı teorema tolıg'ı menen da'lillendi.

Bul teoremanı yadta saqlag'an paydalı, onın' ko'megi menen ko'plegen qızıqlı ma'seleler jen'il tu'rde sheshiledi. Bunı bir qansha mısallarda ko'remiz.

1) Qa'legen $n > 1$ natural sanlarda $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$ ekenligi da'lillengen'.

Da'lilleniwi: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, ... a_n = n$ dep alıp, arifmetikalıq ortasha ha'm geometriyalıq ortasha haqqındag'ı teoremanı qollanamız.

$$\frac{1 + 2 + 3 + ... + n}{n} > \sqrt[4]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot .... \cdot n}$$

(bunda = belgisi alıp taslang'anba, sebebi $1,2,3,....,n$ sanları ha'r qıylı) (1)

ten'sizlikten $\dfrac{\dfrac{(1+n)n}{2}}{n} > \sqrt[n]{n!}$ kelip shıg'adı ha'm keyninde $\sqrt[n]{n!} < \dfrac{n+2}{2}$ iye bolamız ha'm da'lillew keregi de sol edi.

2) Qa'legen natural n de $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$ ekenligin da'lillengen'.

Da'lillew: $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ha'm $a_{n+1} = 1$ dep alıp $(n+1)$ sanına arifmetikalıq ortasha ha'm geometriyalıq ortasha haqqındag'ı teoremanı qollanamız.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n}\right)+....+\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot 1} \qquad (2)$$

(bunda ten'lik belgisi tu'sip qalg'an, sebebi eki ha'r qıylı $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ha'm 1 sanları bar) bul ten'sizliktin' shep jag'ı mınaday bolıp tu'rlendiriledi.

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}$$

Sonlıqtan

$$1+\frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

İye bolamız keyingi ten'sizliktin' eki jag'ın $(n+1)$ da'rejege ko'teremiz.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

iye bolamız.

Da'lillew kerek bolg'an usı edi.

3) On' S sanın n on' qosılıwshılarg'a, olardın' ko'beymeleri en' u'lken ma'niske iye bolatug'ın etip, bo'liw talap etilsin.

Sheshimi: Meyli izlenip atırg'an on' qosılıwshılar sanları bolsın. Ma'selenin' sha'rti boyınsha $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = C$ (A) ten'sizligin alamız. Yamasa $\dfrac{C}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n}$ ha'm aqırında $x_1 \cdot x_2 \cdot .... \cdot x_n \leq \left(\dfrac{C}{n}\right)^{n}$ iye bolamız. Ten'lik tek $x_1 = x_2 = ... = x_n$ bolg'anda g'ana a'melge asadı. Keyingi ten'sizliktin' $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot .... \cdot x_n$ ko'beymesinin' en' u'lken ma'nisi $\left(\dfrac{C}{n}\right)^{n}$-ge ten'. Bul en' u'lken ma'nis tek $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ sha'rti orınlag'anda g′ana alınadı. Yag′nıy tek sonda g′ana, qashan ha′r bir qosılıwshı $\frac{C}{n}$ ge ten′ bolg′an jag′dayda alınadı.

§5. İrracional ten`lemeler sistemasın sheshiw

Bul ten`lemeler sistemasın sheshiwge mısallar keltiremiz.

1-mısal.

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2 \\ 4y^2-1=3y(x-1) \end{cases}$$

Ten`lemeler sistemasın sheshin:

Sheshiliwi: $U=\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}$ belgilep alsaq, onda berilgen sistemanın` birinshi ten`lemesi $U+\dfrac{1}{u}=2$ tu`rge keledi.

Bunnan $U=1$

Solay etip, berilgen ten`lemeler sistemasın

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}=1 \\ 4y^2-1=3y(x-1) \end{cases} \qquad (9)$$

tu`rge alıp kelemiz. Bul sistemanın` birinshi ten`lemesinin` eki ta`repinde kvadratqa ko`tersek ha`m bo`lshekten qutılsaq, onda,

$$\begin{cases} 3x-2y=2x \\ 4y^2-1=3y(x-1) \end{cases} \qquad (10)$$

Bunnan $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Tekseriw. $x\neq 0$ ha`m $3x\neq 2y$ sha`rtinde (10) sistema (9) sistemasına ten` ku`shli. O`z gezeginde (9) sistema (10) sistemag`a ten` ku`shli. Solay etip, (10) sistemanın` sheshimi berilgen sistemanın` sheshimi bola aladı ha`m onın` sheshimi $(2;1)$, $(1;\ \frac{1}{2})$.

2-mısal.

$$\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}=14$$
$$\sqrt{\frac{x+y}{8}}-\sqrt{\frac{x-y}{12}}=3$$

Ten`lemeler sistemasın sheshin`.

Sheshiliwi: Bul sistemanı sheshiw ushın belgilep alıw usılın qollanamız. $\sqrt{\frac{x+y}{2}}=t\geq 0$ ha`m $\sqrt{\frac{x-y}{3}}=U\geq 0$ dep belgileymiz.

Berilgen sistemanı $\begin{cases}\sqrt{\frac{x+y}{2}}+\sqrt{\frac{x-y}{3}}=14\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+y}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-y}{3}}=3\end{cases}$ ko`rinisinde jazamız. Onda, kiritilgen belgilewlerdi qollansaq

$$\begin{cases}t+u=14\\ \frac{t}{2}-\frac{t}{2}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t+u=14\\ t-u=6\end{cases}$$

Bunnan, sistemanın` ten`lemelerin qossaq, onda $t=10;\quad U=4$ sheshimlerine iye bolamız. Bul tabılg`an sheshimnen

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{x+y}{2}}=10\\ \sqrt{\frac{x-y}{3}}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x+y}{2}=100\\ \frac{x-y}{3}=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=200\\ x-y=48\end{cases}$$

Bul sistemanın` ten`lemelerin biri-birine qossaq x=124, al bul sheshim arqalı U dı tabamız.

Tekseriw. $\sqrt{\frac{124+76}{2}}+\sqrt{\frac{124-76}{3}}=10+4=14;\ \sqrt{\frac{124+76}{8}}-\sqrt{\frac{124-76}{12}}=5-2=3$

Solay etip, berilgen sistemanın` sheshimi (100; 76)

3-mısal.

$$\left(x+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geqslant 4\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$$

ten’sizlikti sheshin’.

Sheshimi. Berilgen ten’sizlikti qanaatlandırıwshı, mu’mkin bolg’an ma’nis-lerinin’ oblastın tabamız:

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ \sqrt{5-x}-1\neq 0,\\ 5-x\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(0;4)\cup(4;5].$$

Sebebi

$$\left(\frac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2\geqslant 0$$

bolsa, onda berilgen ten’sizlik mu’mkin bolg’an ma’nislerinin’ oblastında

$$\left[\begin{array}{l}x+\frac{3}{x}\geqslant 4,\\ \sqrt{x^2-6x+9}-1=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-4x+3}{x}\geqslant 0,\\ x^2-6x+8=0.\end{array}\right.$$

ten’sizlikke ten’ ku’shli.

Kvadrat ten’lemenin’ sheshimi $x_1 = 2$ ha’m $x_2 = 4$ boladı. Keyingi korni, berilgen ten’sizliktin’ mu’mkin bolg’an ma’nislerinin’ oblastına kirmeydi. Demek, $x_1 = 2$ berilgen ten’sizliktin’ sheshimler ko’pligine kiredi.

1-Su’wret. Mısaldın’ geometriyalıq interpretaciyası.

$$\frac{x^2-4x+3}{x} \geqslant 0$$

Ten’sizliktin’ sheshimi, $x \in (0;1] \cup [3;\infty)$ ma’nisler ko’pligi boladı. Berilgen ten’sizliktin’ mu’mkin bolg’an ma’nislerinin’ oblastın esapqa alsaq, onda ten’sizliktin’ sheshimi

$$x \in (0;\ 1] \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$$

(1-su’wretti qaran’). Sheshimlerdi biriktirsek, onda

$$x \in (0;\ 1] \cup \{2\} \cup [3;\ 4) \cup (4;\ 5]$$

Juwabı: $x \in (0;1] \cup \{2\} \cup [3;4) \cup (4;5]$.

4-mısal.

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$$

ten’sizlikti sheshin’.

Sheshimi. Berilgen ten’sizlikti qanaatlandırıwshı, mu’mkin bolg’an ma’nislerinin’ oblastın tabamız. Onı

$$\begin{cases} 5-x \geqslant 0, \\ x-1>0, \\ x^3-7x^2+14x-5 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x \leqslant 5, \\ x^3-7x^2+14x-5 \geqslant 0 \end{cases}$$

ten’sizlikten tabamız. Ten’sizliktin’ eki ta’repin $\sqrt{x-1} \neq 0$ ko’beytemiz ha’m kvadratqa ko’teremiz.

Na’tiyjede,

$$x^3-6x^2+8x>0 \Leftrightarrow x(x-2)(x-4)>0.$$

racional ten’sizlikke iye bolamız.

Bul ten’sizliktin’ (1;5] ko’pliktegi sheshimin tabamız (1-su’wretti qaran’).

1-Su’wret. Mısaldın’ geometriyalıq interpretaciyası.

Bunday sheshim $(1;2) \cup (4;5]$ ko'pligi boladı. $x = 1$ $P_3(1) > 1$ tochkada, $x_2 = \frac{7-\sqrt{7}}{3}$ maksimum tochkasına shekem o'sedi. Keyin, $P_3(x)$ kemiydi. Biraq, x=2 bolg'anda o'zinin' on' belgisin saqlaydı. Bunnan kelip shıg'adı, (1;2) intervalda berilgen ten'sizliktin' sheshimler ko'pligine kiredi.

(4;5] intervalda $P_3(x)$ o'siwshi funkciya. Sebebi $P_3(4) > 0$, onda $\tilde{o} \in (4;5]$ bolg'anda $P_3(x)$ on' ma'nisti qabıl etedi. Onda (4;5] ko'plikte, berilgen ten'sizliktin' sheshimi boladı. $P_3(x)$ belgisin to'mendegishe izertlew mu'mkin. $P_3(x)$ to'mendegi ko'riniste jazamız:

$$P_3(x) = x^3 - 7(x^2 - 2x + 1) + 2 = (x^3 - 1) - 7(x - 1)^2 + 3 =$$
$$= (x - 1)(x - 2)(x - 4) + 3.$$

To'mendegi belgilewdi kiritemiz

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$$

ha'm onın' belgisin, intervallar metodı ja'rdeminde izertleymiz. Ko'rinip turıptı, $(1;2) \cup (4;\infty)$ ko'pliginde $f(x) > 0$. Bunnan kelip shıg'adı, $(1;2) \cup (4;5]$ ko'pliginde $P_3(x) = f(x) + 3$ on' ma'nisin saqlaydı.

Juwabı: $(1;2) \cup (4;5]$.

Juwmaqlaw

Bul jumıstın′ tiykarg′ı maqseti ulıwma bilim beriw mektepleri matematika sabag′ında oylaw qa′biletin rawajlandırıwg′a arnalg′an, irracional ten′leme ha′m ten′sizliklerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılların u′retiwdin′ metodikasın islep shıg′ıwdan ibarat. Sonı aytıp o′tiwimiz kerek, bul jumısınta alıng′an na′tiyjeler, akademiyalıq licey ha′m ulıwma bilim beriw mektepleri matematika sabag′ında oylaw qa′biletin rawajlandırıwg′a arnalg′an irracional ten′leme ha′m ten′sizliklerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılların u′yretiw ja′rdeminde, oqıwshılarda qızıg′ıwshılıq qa′biletin payda etiw, oylaw qa′biletin rawawajlandırıw ha′m alg′an bilimlerin a′meliy ma′selelerdi sheshiw arqalı bekkemlewde, o′zinin′ u′lken ja′rdemin tiygizedi. Usı qoyılg′an maqsetke baylanıslı to′mendegi jumıslar islendi:

- irracional an′latpa ha′m olardı a′piwayılastırıw usılları ma′selesi qaralg′an bolıp, bunda irracional san tu′sinigi ha′m irracional an′latpalardı a′piwayılastırıw usılları, mısallar ja′rdeminde belgili bir izbe-izlik ta′rtibinde berilgen;

- irracional ten′leme ha′m ten′sizliklerdi sheshiw usılları ma′selesi qaralıp, bunda ulıwma bilim beretug′ın mekteplerde irracional ten′leme ha′m ten′sizliklerdi sheshiw usılların u′yreniwge bolg′an dıqqat ku′shli ekenligi. Bul oqıwshılardın′ bilimin ha′m pikirlewin ku′sheytiwge u′lken ja′rdem etetug′ınlıg′ı, mısallar ja′rdeminde ko′rsetilgen;

- irracional ten′lemelerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılları ma′selesi qaralıp, bunda da′slep standart ma′seleler (ten′lemeler) ha′m olardı sheshiwdin′ standart emes usılları degenimiz ne degen sorawg′a juwap berilgen. Keyin, irracional ten′lemelerdi sheshiwdin′ standart emes usılların, ha′r tu′rli qıyınshılıqtag′ı mısalar arqalı, u′yretiw metodikası keltirilgen.

- irracional ten′sizliklerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılları ma′selesi qaralıp, bunda irracional ten′sizliklerdi sheshiw a′dette, olardı qanday da bir tu′rlendiriwler ja′rdemi menen olarg′a ten′ ku′shli bolg′an ten′sizlikler yamasa ten′sizlikler sistemaları menen almastırıw usıllardın′ ja′rdeminde, ten′sizlikti sheshiw usılları mısallar ja′rdeminde tu′sindirilgen.

Ulıwmalastırıp aytqanda, bul jumısta akedemiyalıq licey ha′m ulıwma bilim beriw mektepleri matematikası sabag′ında oylaw qa′biletin rawajlandırıwg′a arnalg′an, irracional ten′leme ha′m ten′sizliklerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılların u′retiwdin′ metodikası islengen bolıp, onı usı tarawda islewshiler ushın metodikalıq qural retinde paydalanıwına boladı.

A`debiyatlar

1. В.М.Говоров, П.Т.Дыбов, Н.В.Мирошин, С.Ф.Смирнова Сборник конкурсных задач по математике М-1983.
2. Дорофеев Г.В., и др. Пособие по математике для поступающих в вузы- М., 1968.
3. Николский С.М., Потапов М.К. Алгебра- М., 1990
4. Умирбеков Д.У., Шоабзалов Ш.Ш. Математикани такрорланг- Тошкент 1989
5. Болтянский В.Г., Сидоров Д.В., Шубин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике- М., 1971
6. Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави В. И. Элементарная математика- М. 1964.
7. http:// referat. ru/folder/61
8. http: // WWW. bank referatov.ru/books
9. http: //WWW. Mathmat.narod.ru/

M a z m u n ı

Kirisiw ………………………………………………………………............. 3

§1. İrracianal an′latpa ha′m olardı a′piwayılastırıw usılları ………………. 4

§2. İrracional ten′leme ha′m ten′sizliklerdi sheshiw usılları ……...........

§3. İrracional ten′lemelerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılları ….

§4. İrracional ten′sizliklerdi sheshiwdin′ ayırım standart emes usılları….

§5. İrracional ten`lemeler sistemasın sheshiw ………………………………

Juwmaqlaw …………………………………………………………………

A′debiyatlar ……………………………………………………………....

Du'ziwshiler:

Qasımov Maxametkerim – A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı docenti

Esengeldiev Dawran Niyetbaevich - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı assistent oqıtıwshısı

Yuldashev Inomjon G'ulomboy o'g'li - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı assistent oqıtıwshısı

O'mirbaeva Qamar Asqar qızı - A'jiniyaz atındag'ı No'kis ma'mleketlik pedagogikalıq institutı matematika oqıtıw metodikası qa'nigeligi talabası

Irracional ten'leme ha'm ten'sizliklerdi sheshiwdin' ayırım standart emes usılların u'yretiw jolları

(oqıw-metodikalıq qollanba)

Bas redaktor:	*K.M.Koshanov*
Tex. redaktor:	*E.K.İskenderova*
Korrektor:	*A.M.Sarıbaeva*
Operator:	*N.Nısanbaev*

A'jiniyaz atındag'ı NMPİ redakciya – baspa bo'limi

A'jiniyaz atındag'ı NMPİ baspaxanasında basılg'an 2016-j.

Buyırtpa №0204 . Nusqası 50 dana. Forması 60x84. Ko'lemi 2,5 b.t.

230105, No'kis qalası, A.Dosnazarov ko'shesi-104. Reestr № 11-3084