ÓZBEKSTAN RESPUBLIKASÍ JOQARÍ HÁM ORTA ARNAWLÍ
BILIMLENDIRIW MINISTRLIGI

ÁJINIYAZ ATÍNDAǴÍ NÓKIS MÁMLEKETLIK PEDAGOGIKALÍQ
INSTITUTÍ
Matematika–informatika fakul`teti

Matematika oqıtıw metodikası kafedrası

«Matematika oqıtıw metodikası» tálim baǵdarınıń 4-kurs talabası

KALXORAZOVA MUXABBAT BAXÍTBAY QÍZÍNIŃ

«EKINSHI TÁRTIPLI DIFFERENCIALLÍQ TEŃLEMELER USHÍN KOSHI MÁSELESI»

temasındaǵı

PITKERIW QÁNIGELIK JUMíSÍ

Kafedra baslıǵı: docent B.B.Prenov

Ilimiy basshı: f-m.i.k A.Xodjaniyazov

Nókis-2019

Mazmunı

KIRISIW

Pitkeriw qánigelik jumıstıń aktuallıǵı. Fizika, ximiya, medicina hám basqa pánlerde ushırasatuǵın kóplegen processler differenciallıq teńlemeler járdeminde xarakterlenedi. Bul teńlemelerdi úyreniw menen tiyisli processler haqqında bazı bir maǵlıwmatqa iye bolamız. Usı differenciallıq teńlemeler úyrenilip atırǵan processtiń matematikalıq modelinen ibarat boladı. Bul model` qansha jetilisken bolsa, differenciallıq teńlemelerdi úyreniw nátiyjesinde alınǵan maǵlıwmatlar processlerdi sonshalıq tolıq xarakterleydi. Tábiyatta ushırasatuǵın túrli processler birdey differenciallıq teńlemeler menen xarakterleniwi múmkin, yaǵnıy eger bazı bir matematikalıq model` tolıq úyrenilse, tiyisli nátiyjeden túrli processlerdi túsindiriwde paydalanıw múmkin. Demek, differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma teoriyası hám ámeliy máselelerdi sheshiwge qollanılıwı úlken áhmiyetke iye.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń maqseti hám wazıypaları. Bul pitkeriw qánigelik jumıstıń maqseti ekinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesin úyreniwden ibarat. Pitkeriw qánigelik jumıstıń maqsetinen kelip shıǵıp, tómendegi wazıypalar belgilep alındı:

- differenciallıq teńlemeler haqqında túsinikke iye bolıw;
- differenciallıq teńlemege alıp keletuǵın máselelerdi úyreniw;
- differenciallıq teńlemeniń sheshimi haqqında túinikke iye bolıw;
- sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqında teoremalardı úyreniw;
- ózgeriwshileri ajıralatuǵın hám bir tekli differenciallıq teńlemelerdi úyreniw;
- ekinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma qásiyetlerin úyreniw;
- ekinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesin úyreniw.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń ob`ekti. Differenciallıq teńlemelerge baylanıslı teoriyalıq hám ámeliy máselelerden ibarat.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń teoriyalıq hám ámeliy áhmiyeti sonıń menen belgilenedi, alınǵan nátiyjeler matematikalıq analiz páni boyınsha bakalavrlarǵa hám magistrlarǵa arnawlı kurslar shólkemlestiriwde ámeliy áhmiyetke iye.

Pitkeriw qánigelik jumıstıń kólemi hám dúzilisi. Pitkeriw qánigelik jumıs kirisiw hám juwmaqlaw bólimlerinen, toǵız paragrafdan, sonday – aq paydalanılǵan ádebiyatlar diziminen ibarat.

Birinshi paragrafta differenciallıq teńlemeler haqqında túsinik berilgen.

Ekinshi paragrafta differenciallıq teńlemege alıp keletuǵın máseleler úyrenilgen.

Úshinshi paragrafta differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi, dara sheshimi, integral sızıq túsinikleri úyrenilgen.

Tórtinshi paragrafta sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqında teoremalar úyrenilgen.

Besinshi paragrafta ózgeriwshileri ajıralatuǵın differenciallıq teńlemeler hám oǵan baylanıslı mısallar úyrenilgen.

Altınshı paragrafta bir tekli differenciallıq teńlemeler hám oǵan keltiriletuǵın teńlemeler, sızıqlı teńlemeler, olardı sheshiw usılları úyrenilip, mısallar keltirilgen.

Jetinshi paragrafta ekinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma qásiyetleri keltirilgen.

Segizinshi paragrafta ekinshi tártipli bir tekli hám bir tekli emes differenciallıq teńlemeler úyrenilgen.

Toǵızınshı paragrafta ekinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesi úyrenilgen.

I-BAP. TIYKARǴÍ MAǴLÍWMATLAR

1-§. Differenciallıq teńlemeler haqqında túsinik

Differenciallıq teńlemeler teoriyası ámeliy matematika, fizika, biologiya, ekonomika hám t.b larda ushırasatuǵın kóplegen máselelerdi izertlewde zárúrli qural bolıp esaplanadı. Tábiyatta ushırasatuǵın túrli processler (avtomobil háreketi, samolyottıń ushıwı, fizikalıq, ximiyalıq hám biologiyalıq processler hám t.b) óziniń háreket nızamlılıǵına iye. Bazı bir processler birdey nızamlılıq boyınsha júz beriwi múmkin, bul jaǵday olardı úyreniwdi jeńillestiredi. Biraq processlerdi xarakterleytuǵın nızamlılıqlardı tuwrıdan-tuwrı tabıw hámme múmkinshiligi hámme waqıtta bola bermeydi. Xarakterli shamalar hám olardıń tuwındıları yamasa differencialları arasındaǵı qatnastı tabıw qıyın emes. Bunda belgisiz funkciyanıń yamasa vektor funkciyanıń tuwındısı yamasa differencialı arasındaǵı qatnas payda boladı. $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ birinshi tártipli ápiwayı differenciallıq teńleme dep ataladı. $F(x,y,y')=0$ -birinshi tártipli tuwındıǵa qarata sheshilmegen ápiwayı differenciallıq teńleme, al $y^{(n)} = f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right), F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$ n-tártipli ápiwayı differenciallıq teńleme dep ataladı. $y^{(n)} = f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ n-tártipli joqarı tərtipli tuwındıǵa qarata sheshilgen ápiwayı differenciallıq teńleme dep ataladı. Eger $y^{(n)} = f\left(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}\right)$ yamasa $F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)$lar $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ həm $y^{(n)}$ argumentlerge qarata sızıqlı funkciyalar bolsa, tiyisli differenciallıq teńleme sızıqlı dep ataladı. Joqarıdaǵı differenciallıq teńlemelerde belgisiz funkciya bir argumentli dep qaraladı. Belgisiz funkciya kóp argumentli bolǵan jaǵdaylar da tez-tez ushırasadı. Bunday jaǵdayda differenciallıq teńleme dara tuwındılı dep ataladı. Mına, $F\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$ teńleme birinshi tártipli dara tuwındılı teńlemelerden,

$$\Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$$

teńleme bolsa ekinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerden ibarat. Tómendegi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{(jıllılıq ótkizgishlik teńlemesi),}$$

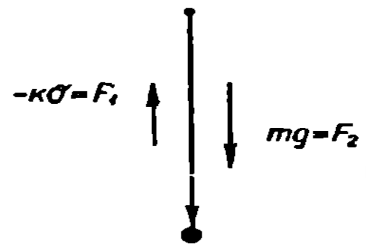
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(Laplas teńlemesi),}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \qquad \text{(Puasson teńlemesi)}$$

teńlemeler ekinshi tártipli dara tuwındılı differenciallıq teńlemelerdiń áhmiyetli dara jaǵdayları bolıp tabıladı, olarda belgisiz funkciya eki argumentli.

2-§ Differenciallıq teńlemelerge alıp keletuǵın bazı bir máseleler

1-másele. Massası m bolǵan dene $v(0) = v_0$ baslanǵısh tezlik penen bazı bir biyiklikten taslap jiberilgen. Dene tezliginiń ózgeriw nızamlılıǵın tabıń (1-súwret).



1-súwret

Nyutonnıń ekinshi nızamına kóre:

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

bul jerde F denege tásir etip atırǵan kúshlerdiń qosındısı (teń tásir etiwshisi). Denege tek ǵana eki kúsh tásir etiwi múmkin dep esaplayıq: hawanıń qarsılıq kúshi $F_1 = -kv, \quad k > 0$ jerdiń tartıw kúshi $F_2 = mg$. Solay etip, matematikalıq kóz qarastan F kúsh

a) F_1 ge; b) F_2 ge; v) $F_1 + F_2$ ge teń bolıwı múmkin.

a) $F = F_2$ bolsın. Onda birinshi tártipli $m\dfrac{dv}{dt} = mg$ differenciallıq teńlemege iye bolamız. Ápiwayı esaplawlar bul teńlemede belgisiz funkciya $v_1(t) = gt + C$ (C qálegen turaqlı san) kóriniste bolıwın kórsetedi. $v(0) = v_0$ bolǵanı ushın $C = v_0$ dep alıw múmkin, onda izlenip atırǵan nızam $v_1(t) = gt + v_0$ ko`riniste boladı.

b) Eger $F = F_1$ bolsa, $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$, bunda $v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}$ ekenligi belgili.

v) $F = F_1 + F_2$ bolsın. Bul jaǵdayda usı $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$ differenciallıq teńlemege kelemiz. Demek, belgisiz funkciya

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}: \quad v(0) = v_0, \quad v_2(t) = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

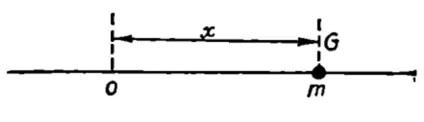
kóriniste bolıwın kórsetiw qıyın emes.

Bizge belgili, $\lim\limits_{k\to 0} v_2(t) = v_1(t)$. Haqıyqatında da,

$$\lim_{k\to 0} v_2(t) = \lim_{k\to 0}\left[\left(v_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}\right] = v_0 + gt = v_1(t)$$

2-másele. Massası m bolǵan materiallıq noqat tuwrı sızılı háreket etpekte. Onıń háreket nızamlılıǵın tabıń.

Hár bir momentte G noqattan koordinata basına shekemgi aralıq x bolsa, (2-súwret) noqattıń tezligi $\dot{x}$ $\left(\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}\right)$ boladı.



2-súwret

Materiallıq noqatqa eki sırtqı kúsh; súykeliw kúshi $-b\dot{x}$, $b>0$ hám keriliw kúshi $-kx$, $k>0$ tásir etedi deyik. Nyutonnıń ekinshi nızamına tiykarlanıp G noqattıń háreketi

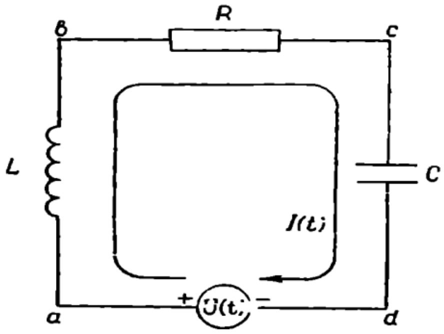
$$m\ddot{x} = -b\dot{x} - kx$$

nızam tiykarında júz beredi. Bul ekinshi tártipli differencial teńleme esaplanadı. Eger materiallıq noqat dvigatel menen támiynlengen bolıp, dvigateldiń G noqatqa tásir kúshi F bolsa, onda G dıń háreket nızamlılığı

$$mx = -bx - kx + F$$

boladı. Kóbinese F muǵdar $|F| \le F_0$ múnásibetke boysınadı.

3-másele. Eki jaqlı polyuslıqlardan dúzilgen tórt jabıq elektr shınjırı berilgen (3-súwret).



3-súwret

Eki polyuslıqlar: ab - induktivlik (L), bc - qarsılıq (R), cd - sıyımlılıq (C) - kernewlilik deregi $(U(t)) - da$. Waqıt ótiwi menen jabıq elektr shınjırında elektr togı $I(t)$ nıń ózgeriw nızamlılıǵın tabıń.

Kirxgoftıń birinshi nızamına kóre

$$I_{ab}(t) + I_{cb}(t) = 0 \quad I_{ab}(t) = I_{bc}(t)$$

Soǵan uqsas

$$I_{bc}(t) = I_{cd}(t) \quad I_{dc}(t) = I_{ab}(t)$$

yaǵnıy

$$I_{ab}(t) = I_{bc}(t) = I_{cd}(t) = I_{da}(t) = I(t)$$

Kirxgoftıń ekinshi nızamına kóre:

$$U_{ab}(t)+U_{bc}(t)+U_{cd}(t)+U_{da}(t)=0$$

Endi

$$U_{ab}(t)=L\frac{dI(t)}{dt},\quad U_{bc}(t)=RI(t)$$

$$U_{cd}(t)=\frac{1}{C}\int I(t)dt,\quad U_{dc}(t)=-U(t)$$

qatnaslardan paydalansaq:

$$L\frac{dI(t)}{dt}+RI(t)+\frac{1}{C}\int I(t)dt-U(t)=0$$

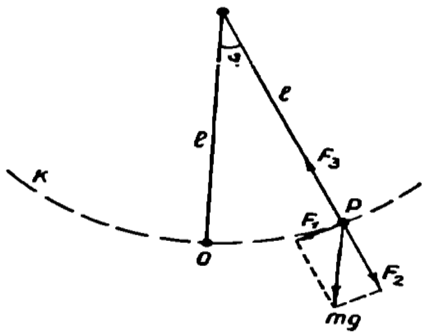
Eger $U(t)\in C^1$ (C^1-bir márte úzliksiz differenciallanıwshı funkciyalar klası) bolsa, onda joqarıdaǵı teńlemeniń hár bir aǵzasın t boyınsha differenciallap, $I(t)$ ózgeriw nızamlılıǵın ańlatıwshı

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\frac{dU(t)}{dt}$$

teńlemege kelemiz. Álbette, bul máselede de túrli dara jaǵdaylardı kóriw múmkin edi.

4-másele. Matematikalıq mayatniktiń háreket teńlemesin keltirip shıǵarıń.

Vertikal tegislikte jatqan l radiuslı K sheńber boylap awırlıq kúshi tásiri astında háreketleniwshi m massaǵa iye bolǵan P noqat matematikalıq mayatnikti súwretleydi (4-súwret).



4-súwret.

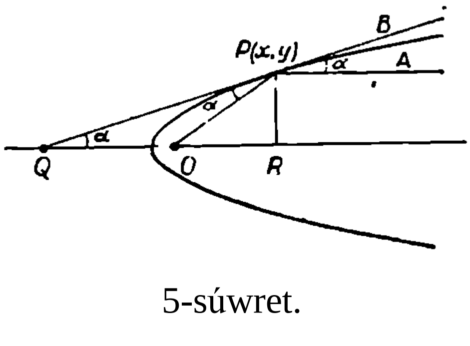
Hár bir momentte P noqattıń ornı $\varphi(t)$ múyesh penen tolıq anıqlanadı. Máseleniń shárti boyınsha P noqat tek ǵana awırlıq kúshi tásiri astında háreketlenedi. Biraq bul hárekette sheńberdiń de ornı bar. Ol P noqattı sheńber boylap háreketleniwge májbúrleydi, yaǵnıy P noqatqa sheńberdiń ishki normalı boyınsha baǵıtlanǵan F kúsh penen tásir etedi. Eger tartıw kúshi mg dı eki qurawshıǵa ajıracaq $F_1 = -mg\sin\varphi,\ \ F_2 = -mg\cos\varphi$ ol jaǵdayda $F_1 + F_2 = 0$ boladı. Solay etip, P ǵa tásir etip atırǵan kúshtiń teń tásir etiwshisi $F = F_1 + F_2 + F_3 = F_t = -mg\sin\varphi$. Demek, P noqattıń háreket teńlemesi Nyutonnıń ekinshi nızamına tiykarlanıp

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi \ \text{ yaki } \ ml\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0$$

kóriniste boladı.

5-másele. Eger jaqtılıq deregi O noqatqa ornatılǵan bolsa, aynanıń forması onnan qaytqan nurlar gorizontal kósherge parallel bolıwı ushın qanday bolıwı kerek?

Gorizontal kósherdi Ox, vertikal kósherdi Oy deymiz. Ayna betiniń xOy tegisligi menen kesilisiwden payda bolǵan iymek sızıqtı ko`remiz. $P(x,y)$- usı sızıqtaǵı qálegen noqat bolıp, onda alınǵan iymek sızıqqa ótkerilgen urınba menen Ox kósheriniń kesilisken noqatı O bolsın (5-súwret).



5-súwret.

Bizge belgili, $\angle OPQ = \angle OQP$ (sebebi nurdıń túsiw hám qaytıw múyeshleri teń boladı, yaǵnıy $\angle APVB = \angle OPQ = \alpha$.

Sol sebepli, $|OQ| = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\ y = RP$. Eger $y > 0$ desek,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{|PR|}{|QP|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x} \quad \text{yaki} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}.$$

Bunnan

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}}=1$$

differenciallıq teńleme kelip shıǵadı. Onda málim funkciya $y(x)$ usı

$$y^2=2C\left(x+\frac{C}{2}\right), \quad C-const. \quad \mathrm{y}>0$$

kóriniske iye ekenligin tekserip kóriw qıyın emes. Bul bolsa $C\neq 0$ bolǵanı ushın paraboladan ibarat.

Máseleniń shártine kóre, usı iymek sızıq Ox kósherine qarata simmetriyalı boladı. Sonıń ushın joqarıdaǵI funkciyada $y<0$ bolıwı da múmkin. Solay etip, qoyılǵan máseleni tegislikte qarasaq, jaqtılıq deregi parabolanıń fokusında boladı.

Eger parabolanı Ox kósheri átirapında aylandırsaq, aylanba paraboloid payda boladı. Demek, ayna forması aylanba paraboloidtan ibarat bolıp, O noqat onıń fokusında jatadı.

6-másele. Haywanlardıń bazı bir túri ózgermes ortalıqta bólek jasaydı deyik. Urshıw hám óliwlerdiń periodlılıǵın esapqa almastan qurılıp atırǵan túr individiumları sanınıń ózgeriw nızamlılıǵIn tabıń.

Máseleniń shártine kóre waqıttıń berilgen kishi intervalında urshıw hám óliwshilikler sanı berilgen momentte individiumlar sanına proporcional boladı. N individiumlar sanınıń ósiwi qaralıp atırǵan intervalda N sanına proporcional bolıp, bul ósiw interval kishi bolǵanda onıń uzınlıǵIna da proporcional boladı. Solay etip, N sanı t nıń funkciyası hám onıń ósiwi (yaǵnıy $\frac{dN}{dt}$) $N(t)$ ǵa proporcional . $N(t)$ funkciyanı úzliksiz hám úzliksiz differenciallanıwshı dep qarasaq, usı

$$\frac{dN(t)}{dt} = \varepsilon N(t), \quad N(t_0) = N_0 > 0$$

Differenciallıq teńlemege iye bolamız, bul jerde ε - proporcionallıq koefficienti (“ósiw” koefficienti). Urshıw nızamlılıǵI differenciallıq teńleme menen berilgen funkciyanıń kórinisi $N(t) = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}$ ekenligine isenim payda etiw qıyın emes. Bunnan kelip shıǵadı, waqıt arifmetikalıq progressiya boyınsha ózgerse, individiumlar sanı geometriyalıq progressiya arqalı ózgeredı. Eger $\varepsilon > 0$ bolsa, N ósedi, eger $\varepsilon < 0$ bolsa, N kemeyedi. $\varepsilon = 0$ bolǵanda $N - cons$ bolıp urshıw óliwshilikti tolıq qaplaydı.

Bul máselede ortalıqtı ózgeriwsheń dep esaplaw hám bul ortalıqta haywanlardıń bir neshe túri jasap atır dep qarasaq, túrlerdiń arasındaǵı bazı bir múnásibetlerge qarap hár bir túr individiumları sanınıń ózgeriw nızamlılıǵın tabıw máselesin de qoyıw múmkin.

II-BAP. TUWÍNDÍǴA QARATA SHESHILETUǴÍN BIRINSHI TÁRTIPLI DIFFERENCIALLÍQ TEŃLEMELER

1-§. Sheshim túsinigi

Joqarıda biz

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

teńlemeni birinshi tártipli tuwındıǵa qarata sheshilmegen ápiwayı differenciallıq teńleme dep atadıq, bul jerde x - erikli ózgeriwshi, y - onıń belgisiz funkciyası, $y' = \dfrac{dy}{dx}$ bolsa belgisiz funkciyanıń tuwındısı. (1) niń dara jaǵdayın qaraymız. (1) teńleme úsh x, y hám y' ózgeriwshini baylanıstıradı. Bazı bir jaǵdaylarda bul teńleme y' tı x hám y tiń funkciyası sıpatında anıqlaydı. Bul jaǵdayda (1) teńleme tómendegi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{2}$$

differenciallıq teńlemege teń kúshli boladı. (2) teńleme, ádette, tuwındıǵa qarata sheshilgen dep ataladı. (2) teńlemede $f(x, y)$ funkciya Γ oblastta berilgen bolsın.

(2) teńleme berilgen bolıp, onda $f(x, y)$ funkciya R^2 tegisliktiń Γ oblastında anıqlanǵan bolsın. Eger I (ashıq, tuyıq yamasa yarım ashıq) intervalda anıqlanǵan $\varphi(x)$ funkciya ushın tómendegi úsh shárt:

1^0. $(x, \varphi(x)) \in \Gamma, \quad \Gamma \subset R^2, x \in I$,

2^0. $\varphi(x) \in C^1(I)$,

3^0. $\dfrac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)), x \in I$

orınlansa, onda bul funkciya I intervalda (2) differenciallıq teńlemeniń sheshimi dep ataladı.

Eger $\varphi(x), x \in I$ funkciya (2) teńlemeniń sheshimi bolsa, ol (2) teńlemeni qanaaatlandıradı, dep te aytıladı.

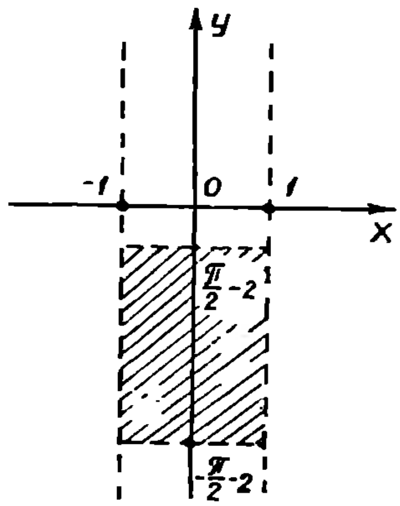
(2) differenciallıq teńlemeniń hár bir $y=\varphi(x)$ sheshimine sáykes kelgen iymek sızıq (yaǵnıy $y=\varphi(x)$ funkciyanıń grafigi) usı teńlemeniń integral iymek sızıǵı (yamasa integral sızıǵı) dep ataladı.

Usı $\dfrac{dy}{dx}=2x$ teńleme ushın $\Gamma=R^2$ bolıp, $\varphi(x)=x^2+1$ funkciya R^1 kóplikte (yaǵnıy $(-\infty<x<+\infty)$ intervalda) sheshim boladı.

Haqıyqatında da, anıqlamaǵa kóre:

1^0. $(x,x^2+1)\in R^2,\ x\in R^1$; 2^0. $x^2+1\in C^1(\mathrm{R}^1)$; 3^0. $\dfrac{d(x^2+1)}{dx}=2x$.

Usıǵan uqsas, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ teńleme ushın $I=(-1,1)$ bolıp, $\varphi(x)=\arcsin x-2$ funkciya usı $(-1,1)$ intervalda sheshim boladı. Bul jaǵdayda $\Gamma=\left\{(x,y):-1<x<1,-\dfrac{\pi}{2}-2<y<\dfrac{\pi}{2}-2\right\}$ (6-súwret).



6-súwret

(2) teńlemeniń sheshimi ayırım jaǵdaylarda ayqın emes $\Phi(x,y)=0$ kóriniste bolsa, ayırım jaǵdaylarda parametrlik $x=x(t),\ y=y(t),\ t_0<t<t_1,\ x'(t)\neq 0$ kóriniste bolıwı múmkin. Juwmaqlap aytqanda, teńlemeniń beriliwine qarap onıń sheshimi tómendegi

$$y=\varphi(x);\quad \Phi(x,y)=0;$$
$$x=x(t),\quad y=y(t)$$

kórinislerden birewi arqalı jazıladı.

Koshi máselesiniń qoyılıwı: (2) teńleme berilgen bolıp, onda $f(x,y)$ funkciya R^2 tegisliktiń Γ oblastında anıqlanǵan, úzliksiz hám I interval x kósherdegi interval bolsın, x_0 dı óz ishine alatuǵın I intervaldı hám usı I intervalda anıqlanǵan úzliksiz dfferenciallanıwshı hám de tómendegi

1^0. $(x,\varphi(x))\in\Gamma$ $(x\in I)$,

2^0. $\varphi'(x)\equiv f(x,\varphi(x))\quad (x\in I)$,

3^0. $\varphi(x_0)=y_0$, $(x_0,y_0)\in\Gamma$

shártlerdi qanaatlandırıwshı $y=\varphi(x)$ funkciyanı tabıw talap etiledi. Bul másele qısqasha

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

kóriniste jazıladı hám (2) teńleme ushın Koshi máselesi (yamasa baslanǵısh másele) dep ataladı. Joqarıdaǵı 1^0, 2^0 hám 3^0 shártlerdi qanaatlandıratuǵın funkciya I intervalda (K) Koshi máselesiniń sheshimi deyiledi. Jáne (K) máseleniń sheshimi $\varphi(x)$ x_0, y_0 baslanǵısh mánislerge iye yamasa $\varphi(x_0)=y_0$ baslanǵısh shártti qanaatlandıradı, dep júritiledi.

Endi Γ oblasttıń (K) másele tek ǵana bir sheshimge iye bolatuǵın (x,y) noqatlardan dúzilgen bólegin $D_2^*\subset\Gamma\quad (D_2\equiv\Gamma)$ dep belgileymiz. Usıǵan kóre D_2^* kópliktiń hár bir (x,y) noqatınan (2) teńlemeniń tek ǵana bir integral sızıǵı ótedi.

Anıqlama. (2) differenciallıq teńleme hám x,C ózgeriwshilerdiń bazı bir ózgeriw oblastında anıqlanǵan hám de x boyınsha úzliksiz differenciallanıwshı

$$y=\varphi(x,C)\tag{3}$$

funkciya berilgen bolsın. Eger qálegen $(x,y)\in D_2^*$ noqat ushın (3) qatnas C nıń

$$C = \psi(x, y) \qquad (3')$$

mánisin bir mánisli anıqlasa hám bul mánisti mına

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_x^{'}(x, C) \qquad (3'')$$

teńlikke qoyıw nátiyjesinde (2) teńleme payda bolsa, onda (3) funkciya (2) teńlemeniń D_2^* kóplikte anıqlanǵan ulıwma sheshimi deyiledi.

(3) funkciya qálegen turaqlı C ǵa baylanıslı hám demek, (3) ge sızıqlar oramasınıń teńlemesi dep qaraw múmkin. Ayırım waqıtlarda C nı parametr dep te júritiledi.

Anıklama. (2) teńleme hám (3) sızıqlar oraması berilgen bolsın. Eger: 1) $\varphi(x, C)$ funkciya I intervalda x boyınsha úzliksiz tuwındı iye bolsa; 2) hár bir $(x, y) \in D_2^*$ noqat ushın (3) qatnas C nıń (3') mánisin bir mánisli anıqlasa; 3) $y = \varphi(x, \psi(x, y))$ funkciya (2) teńlemeniń sheshimi bolsa, onda (3) funkciya (2) teńlemeniń ulıwma sheshimi dep ataladı.

Hár bir noqatında Koshi máselesi tek ǵana bir sheshimge iye bolatuǵın sheshim dara sheshim dep ataladı. Anıqlamadan D_2^* kópliktiń hár bir noqatınan dara sheshimge sáykes kelgen integral sızıq ótiwi kórinedi.

Differenciallıq teńlemeler teoriyasında (2) teńlemeniń barlıq sheshimlerdi tabıw tiykarǵı másele bolıp tabıladı. Barlıq sheshimlerdi tabıw processi differenciallıq teńlemeni integrallaw (sheshiw) deyiledi. Eger (2) teńlemeniń sheshimin elementar funkciyalar hám olardıń integralları járdeminde jazıw múmkin bolsa, onda differenciallıq teńleme kvadraturalarda integrallanadı deyiledi.

Joqarıdaǵı belgilewlerden $D = D_2 / D_2^*$ kópliktiń hár bir noqatınan ótetuǵın integral sızıqlar tek ǵana birew emes ekenligi kelip shıǵadı. Hár bir noqatında sheshimniń birden birligi buzılatuǵın sheshimler ayrıqsha sheshimler dep ataladı. Ulıwma sheshim formulası (3) ayrıqsha sheshimlerdi óz ishine almaydı.

Eger

$$\Phi\left(x,y,C\right)=0 \qquad (3''')$$

katnas D_2^* kóplikte $y=\varphi\left(x,C\right)$ ulıwma sheshimdi anıqlasa, onda (3’’’) funkciya (2) differenciallıq teńlemeniń ulıwma integralı dep ataladı. Solay etip, birinshi tártipli differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi $y=\varphi\left(x,C\right)$ bir qálegen turaqlı sandı óz ishine aladı.Bir parametrli sıypaq sızıqlar oramasınıń differenciallıq teńlemesi birinshi tártipli differenciallıq teńlemeden ibarat.

Haqıyqatında da, (3) sıypaq sızıqlar oraması berilgen, yaǵnıy $\varphi\left(x,C\right)$ funkciyanıń anıklanıw oblastında úzliksiz $\varphi_x^{'}\left(x,C\right)$ hám $\varphi_C^{'}\left(x,C\right)$ tuwındılar bar bolsın. (3) ti x boyınsha differenciallap tómendegini payda etemiz:

$$y'=\varphi_x^{'}\left(x,C\right) \qquad (3'')$$

Eger (3’’) tiń oń tárepi C ǵa ǵárezli bolmasa, biz C nı shıǵarıp tasladıq esaplap,

$$y'=\varphi_x^{'}\left(x\right)$$

differenciallıq teńlemeni payda etemiz. Eger (3’’) tiń oń tárepi C ǵa ǵárezli bolsa, (3) niń oń tárepi de C ǵa ǵárezli boladı, yaǵnıy $\varphi_C^{'}\left(x,C\right)\neq 0$.

Sonlıqtan $\left(x_0,C_0\right)$ noqattıń bazı bir dógereginde C nı x hám y tiń funkciyası $C=\psi\left(x,y\right)$ sıpatında anıqlaw múmkin. Bizge belgili, x hám C lar boyınsha $\psi\left(x,\varphi\left(x,C\right)\right)=C$ birdeylik orınlı. C ushın tabılǵan mánisti (3’’) ke qoyıp,

$$y'=\varphi_x^{'}\left(x,\psi\left(x,y\right)\right)$$

birinshi tártipli differenciallıq teńlemege iye bolamız. (3) funkciya qálegen C ushın usı differenciallıq teńlemeniń sheshimi ekenligin kórsetiw múmkin.

Joqarıdaǵı pikirlewler berilgen sıypaq sızıqlar oramasınıń differenciallıq teńlemesin tabıw jolın kórsetedi.

Máselen, $y=Ce^x$ sızıqlar oraması berilgen bolsın. Onda $y'=Ce^x=y$. İzlenip atırǵan differenciallıq teńleme $y'=y$ boladı. Bizge belgili, bul teńlemeniń ulıwma sheshimi: $y=Ce^x$.

Mısallar. 1. $y=\sin\left(x+C\right), -\infty<x<+\infty, -\infty<C<+\infty$ sızıqlar oramasınıń differenciallıq teńlemesi tabılsın.

Tómendegi

$$\begin{cases} y' = \cos\left(x+C\right), \\ y=\sin\left(x+C\right) \end{cases}$$

qatnaslardan $y'=\sqrt{1-y^2},\ |y|<1,\ -\infty<x$ differenciallıq teńleme kelip shıǵadı.

2. $y'=yctgx,\ 0<x<\pi,\ -\infty<y<+\infty$ differenciallıq teńlemeniń $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$ shártti qanaatlandıratuǵın sheshimi tabılsın.

Berilgen teńlemeniń ulıwma sheshimi $y=C\sin x$ bolıp, onnan shártke kóre $2=C\sin\frac{\pi}{6}$ yamasa $C=4$ boladı. Demek, $\varphi\left(x\right)=4\sin x$ funkciya izlengen sheshim boladı.

2-§. Bar bolıwlıq hám birden-birlik teoremaları

Hár bir (2) kórinistegi differenciallıq teńleme ushın Koshi máselesiniń sheshimi bar ma yamasa joq pa? Eger bunday sheshim bar bolsa, olar neshew? Qashan Koshi máselesi shesheimge iye emes? – degen sorawlar qoyıladı. Bul sorawlarǵa juwap beretuǵın teoremalar sheshimniń bar bolıwı hám birden-birlik teoremaları dep júritiledi. Biz olardan tiykarǵıların keltiremiz.

1-teorema (Koshi teoreması). Eger $f\left(x,y\right)$ funkciya Γ oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz bolıp, onıń y boyınsha dara tuwındısı $\frac{\partial f\left(x,\mathrm{y}\right)}{\partial y}$ bazı bir $Q\,(Q\subset\Gamma)$ oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz bolsa, onda:

1^0. (2) teńlemeniń x_0 di óz ishine alatuǵın bazı bir intervalda anıqlanǵan hám hár bir berilgen $\left(x_0,y_0\right)\in Q$ noqat ushın $y\left(x_0\right)=y_0$ baslanǵısh shártti qanaatlandırıwshı sheshimi bar.

2^0. Eger (2) teńlemeniń eki $y=\varphi(x)$ hám $y=\psi(x)$ sheshimleri x_0 da ústpe-úst tússe, yaǵnıy $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$ bolsa, onda bul $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ sheshimler anıqlanıw oblastlarınıń ulıwma bóleginde ústpe-úst túsedi.

Anıqlama. Eger $f(x,y)$ funkciya Γ oblastta anıqlanǵan bolıp, bul funkciya ushın sonday oń L san tabılıp, qálegen $(x,y_1)\in\Gamma$, $(x,y_2)\in\Gamma$ noqatlar ushın tómendegi

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L|y_1-y_2| \qquad (L)$$

teńsizlik orınlansa, onda $f(x,y)$ funkciya Γ oblastta y boyınsha Lipshic shártin qanaatlandıradı deyiledi, L sanı Lipshic turaqlısı dep ataladı.

2-teorema (Koshi-Pikar-Lindelef teoreması). Eger $f(x,y)$ funkciya Γ oblastta x hám y boyınsha anıqlanǵan hám úzliksiz bolıp, Γ oblastta y boyınsha Lipshic shártin qanaatlandırsa, onda sonday turaqlı $h>0$ san tabıladı, nátiyjede (2) teńlemeniń $(x_0,y_0)\in\Gamma$ bolǵanda 1^0-3^0 baslanǵısh shártti qanaaatlandıratuǵın hám $I=\{x:|x-x_0|\le h\}$ tuyıq intervalda anıklanǵan birden-bir sheshimi bar boladı.

3-teorema (Peano teoreması). Eger $f(x,y)$ funkciya Γ oblastta anıqlanǵan hám úzliksiz bolsa, onda Γ oblasttıń berilgen $(x_0,y_0)\in\Gamma$ noqatınan (2) teńlemeniń keminde bir integral sızıǵı ótedi.

Joqarıdagı teoremalardıń qollanılıwına baylanıslı mısal keltiremiz.

Tómendegi

$$\begin{cases} y'=y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-2)=1 \end{cases}$$

Koshi máselesinde $\Gamma=R^2$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}$ ke kóre

$$Q=Q_1\cup Q_2,\ Q_1=R^1\times R^1,\ Q_2=R^1\times R^1,\ Q\subset\Gamma$$

ekenligi kelip shıǵadı. Bizge belgili, $\Gamma = Q \cup \{(x,y): y=0\}$ hám $(-2,1) \in Q_2 \subset Q \subset \Gamma$. $y' = y^{\frac{2}{3}}$ teńlemeniń ulıwma sheshimi $y = \left(\dfrac{x+C}{3}\right)^3$ kubik parabolalardan ibarat. Bunnan $x=-2,\ y=1$ bolǵanda $C=5$ kelip shıǵadı. Demek, Koshi máselesiniń sheshimi $y = \left(\dfrac{x+5}{3}\right)^3$ bolıp, bul sheshim Q_2 de tek ǵana birew boladı. Bunıń haqıyqatında da durıs ekenligin biliw ushın, máselen, Koshi teoremasınıń shártleri $(-2,1)$ noqatta berilgen differenciallıq teńleme ushın orınlı ekenligin tekserip kóriw jetkilikli.

Tómendegi

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{2}{3}}, \\ y(-2) = 0 \end{cases}$$

Koshi máselesin kórsek, onda $\Gamma = R^2$ hám $(-2,0) \in \Gamma$. Biraq $(-2,0)$ noqatta $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$ funkciya úzliksiz emes. Demek, Koshi teoremasınıń shárti orınlanbaydı. Sonlıqtan birden-birlikti tastıyıqlap bolmaydı. Tiykarında $(-2,0)$ noqattan ótetuǵın integral sızıqlar sanı sanaqsız (kontinuum) kóplikti dúzedi. Haqıyqatında da, $(-2,0)$ noqattan $y = \left(\dfrac{x+2}{3}\right)^3$ kubik parabola ótedi hám ol integral sızıqtan ibarat. Usı $(-2,0)$ noqattan $y=0$ integral sızıq ta ótedi. Sonıń ushın, máselen, tómendegi

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x+2}{3}\right)^3, & eger\ \ x \le -2\, bolsa, \\ 0, \quad eger \quad -2 \le x \le -k, & k > -2\, bolsa \\ \left(\dfrac{x+k}{3}\right)^3, & eger\ \ x \ge -k\ bolsa \end{cases}$$

funkciya berilgen teńlemeniń R^2 da anıqlanǵan sheshimi boladı. Bunnan k nıń hár bir mánisinde oǵan sáykes sheshim payda etiw múmkin. k nıń $k>-2$ teńsizlikti qanaatlandıratuǵın mánisleri sanaqsız kóplikti payda etkeni ushın joqarıdaǵı tastıyıqtıń durıs ekenligi kelip shıǵadı.

Kórilgen máselede $f(x,y)=y^{\frac{2}{3}}$ funkciya R^2 da úzliksiz. Peano teoreması boyınsha R^2 tıń qálegen tayınlanǵan noqatınan berilgen differenciallıq teńlemeniń keminde bir integral sızıǵı ótiwi kerek. Joqarıdaǵı pikirlewlerge kóre R^2 tıń qálegen tayınlanǵan noqatınan sanaqsız integral sızıqlar ótedi. Q_1 yamasa Q_2 kóplikte qaralǵan $y'=y^{\frac{2}{3}}$ differenciallıq teńlemeniń bul kópliktiń (Q_1 diń yamasa Q_2 niń) hár bir tayınlanǵan noqatınan tek ǵana bir integral sızıǵı ótedi.

Tómendegi

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \Gamma=\{(x,y):-1<x<1,-\infty<y<+\infty\}$$

differenciallıq teńleme ushın $y(-2)=0$ shártti qanaatlandıratuǵın sheshim bar bolmaydı, sebebi $(-2,0)\notin\Gamma$.

Sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi teoremalarında $\varphi(x)$ hám $\psi(x)$ sheshimler ózleri anıqlanǵan intervallardıń ulıwma bóleginde birdey bolıwı haqqında aytıladı. Eger $\varphi(x)$ funciya $I_r=\{x:r_1<x<r_2\}$ de, $\psi(x)$ funkciya $I_s=\{x:s_1<x<s_2\}$ de anıqlanǵan bolıp, $x_0\in I_r\cap I_s$ ushın $\varphi(x_0)=\psi(x_0)$ bolsa, onda

$$\varphi(x)\equiv\psi(x),\ x\in I_r\cap I_s$$

boladı.

Biraq bul tastıyıqtan $I_r=I_s$ ekenligi kelip shıqpaydı. Eger $I_r\supset I_s$ bolsa, I_s da anıqlanǵan $y=\psi(x)$ sheshim $y=\varphi(x)$ sheshimniń dawamı dep ataladı. Dawam ettiriw múmkin bolmaǵan sheshimler dawamsız sheshimler dep júritiledi.

Eger $y=\varphi(x)$ funkciya (2) teńlemeniń I intervalda anıklanǵan sheshimi bolıp, usı sheshimnniń dawamınan ibarat bolǵan hesh qanday sheshim bar bolmasa, onda $y=\varphi(x)$ sheshim dawamsız sheshim deyiledi. Dawamsız sheshimlerdiń anıqlanıw intervalı I usı sheshimler anıqlanıwınıń maksimal intervalı deyiledi.

3-§. Ózgeriwshileri ajıralatuǵın differenciallıq teńlemeler

Tómendegi

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \qquad (1)$$

kórinistegi teńlemeler ózgeriwshileri ajıralatuǵın differenciallıq teńlemeler dep ataladı. (1) differenciallıq teńlemelerdi integrallawdı keltiremiz.

4-teorema. Eger $f(x)$ funkciya I_x intervalda, $g(y)$ funkciya I_y intervalda úzliksiz bolıp, $g(y)\neq 0$, $y\in I_y$ bolsa, $Q=\{(x,y): x\in I_x, y\in I_y\}$ tuwrımúyeshliktiń qálegen berilgen ishki noqatınan (5) differenciallıq teńlemeniń tek ǵana bir integral sızıǵı ótedi.

Dálillew. Teoremanı dálillew ushın (1) differenciallıq teńlemeniń $(x_0,y_0)\in Q$ noqattan ótetuǵın integral sızıqtıń bar ekenligin hám onıń tek ǵana birew ekenligin kórsetiw jetkilikli. (1) teńlemeniń $\varphi(x_0)=y_0$ shártti qanaatlandıratuǵın $y=\varphi(x)$ sheshimi bar dep boljaymız. Onda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f(x)g(\varphi(x)), \quad (x,\varphi(x))\in Q$$

boladı. Bunnan

$$\frac{d\varphi(x)}{g(\varphi(x))}=f(x)dx, \quad (x,\varphi(x))\in Q$$

kelip shıǵadı, sebebi $g(y)\neq 0$, $y\in I_y$. Sońǵı teńliktiń eki tárepin x_0 den x qa shekem integrallaymız:

4-§. Bir tekli hám oǵan keltiriletuǵın differenciallıq teńlemeler, sızıqlı teńlemeler

Anıqlama. Usı

$$\frac{dy}{dx}=h\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (1)$$

kórinisinde jazılatuǵın teńlemeler bir tekli differenciallıq teńlemeler delinedi.

(1) teńlemede $h\left(\frac{y}{x}\right)$ funkciya tek $\frac{y}{x}$ qatnasınıń funkciyası bolıp, ol nolinshi tártipli bir tekli funkciya.

$h(u)$ funkciya $a<u<b$ intervalda anıqlanǵan deyik.

$x>0$ bolǵanda $h\left(\frac{y}{x}\right)$ funkciya $ax<y<bx$ teńsizlikler menen anıqlanǵan oblastta $x<0$ bolǵanda $bx<y<ax$ teńsizlikler menen anıqlanǵan oblastta berilgen boladı. Eki jaǵdayda da bul oblasttı Γ deymiz.

Teorema. Eger $h(u)$ funkciya $a<u<b$ intervalda úzliksiz bolıp usı intervaldıń barlıq noqatlarında $h(u)\neq u$ bolsa, hár bir $(x_0,y_0)\in\Gamma$ noqatttan (1) differencial teńlemeniń tek bir integral sızıǵı ótedi.

Dálillew. $y=ux$ desek, (1) teńleme

$$xu'+u=h(u)$$

kórinisinde jazıladı. Onnan tómendegi

$$\frac{du}{dx}=\frac{h(u)-u}{x}$$

ózgeriwshileri ajıratılǵan differenciallıq teńlemege kelemiz.

Joqarıdaǵı belgilewlerge kóre, $f(x)=\frac{1}{x},\ g(u)=h(u)-u$ hám $g(u)\neq 0, a<u<b$. Demek, Γ oblastınıń qálegen berilgen (x_0,y_0) noqatınan bir

integrallıq sızıq ótedi. Ulıwma sheshim bolsa formulaǵa kóre tabıladı. Anıq emes integral kórinisindegi tómendegi

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{h(u)-u}$$

qatnastan ulıwma sheshim formulası

$$\ln|x| = \Phi(u) + C \text{ yamasa } \ln|x| = \Phi\left(\frac{y}{x}\right) + C$$

kelip shıǵadı. Bul jerde, $\Phi(u)$ funkciya $\frac{1}{h(u)-u}$ funkciyanıń dáslepkisi. Eger $h\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$ bolsa, $g(y) = y$ həm $g(y) = 0, y = 0$ boladı. Eger $h(u) = u,\ u = u_1, \ldots, u_n$ bolsa, $\int\limits_{u_s}^{u} \frac{d\xi}{h(\xi)-\xi}$ integraldıń $u \to u_s\ (s = 1, 2, \ldots, n)$ de jıynaqlı yamasa tarqalıwshı bolıwına qarap $u = u_s$ (yaǵnıy $y = u_s x, s = 1, 2, \ldots, n$) sızıqlardıń hár bir noqatınan sheksiz kóp yamasa jalǵIz integral sızıq ótedi. Bunda hár bir $y = u_s x, (s = 1, 2, \ldots, n)$ sızıq (1) differenciallıq teńlemeniń integral sızıǵı ekenligin esapqa alıw kerek.

Bir tekli teńlemege keltiriletuǵın máseleler

Tómendegi

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{2}$$

differenciallıq teńlemede $f(u)$ funkciya bazı bir $a < u < b$ intervalda úzliksiz bolsın. Ol jaǵdayda (2) teńlemeni ózgeriwshileri ajıralatuǵın differenciallıq teńlemege keltiriw múmkin bolǵan jaǵdaylardı úyrenemiz.

I. $c_1 = c_2 = 0$ bolǵan jaǵday.

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\right)$ differenciallıq teńlemege iyemiz. Eger $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ bolsa, bul teńleme (2) kóriniske keledi, sebebi

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}}\right)=f*\left(\frac{y}{x}\right)$$

Eger $\Delta=0$ bolsa, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$ yamasa $a_1=a_2k, b_1=b_2k$ deymiz. Bunda $\frac{dy}{dx}=f(k)$ ǵa kelemiz. Bul differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi $y=f(k)x+C$ bolıp, múyeshlik koefficienti $f(k)$ ǵa teń bolǵan tuwrı sızıqlar klasınan ibarat.

II. $c_1^2+c_2^2\neq 0$ (yaǵnıy c_1 hám c_2 lerden keminde birewi nolden ózgeshe) bolǵan jaǵday.

Eger $\Delta=0$ bolsa, onda $a_1=a_2k, b_1=b_2k$ ǵa kóre:

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{k(\mathrm{a}_1\mathrm{x}+\mathrm{b}_1\mathrm{y})+\mathrm{c}_1}{\mathrm{a}_2\mathrm{x}+\mathrm{b}_2\mathrm{y})+\mathrm{c}_2}\right)$$

Usı

$$z=a_2x+b_2y \tag{3}$$

túrlendiriwdi orınlaymız, onda z jańa belgisiz funkciya, (3) den $\frac{dz}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$ kórilip atırǵan jaǵdayda $b_2=0$ shárt joqarıda kórilgen jaǵdayǵa alıp keledi. Endi $b_2\neq 0$ bolsın. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx}-\frac{a_2}{b_2}$ ni aqırg'ı differenciallıq teńlemege qoysaq,

$$\frac{1}{b_2}\frac{dz}{dx}-\frac{a_2}{b_2}=f\left(\frac{kx+c_1}{x+c_2}\right)$$

yamasa

$$\frac{dz}{dx}=a_2+b_2f\left(\frac{kx+c_1}{x+c_2}\right)$$

differenciallıq teńlemege kelesiz.

Endi $\Delta\neq 0$ bolsın. Usı

$$x = \xi + x_0,$$
$$y = \eta + y_0$$

túrlendiriwdi orınlaymız.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1x_0 + b_1y_0 + c_1}{a_2\xi + b_2\eta + a_2x_0 + b_2y_0 + c_2}\right) \qquad (4)$$

(3) túrlendiriwde x_0 hám y_0 sıpatında

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

sistemanıń sheshimin alamız. Bul sistema jajǵız sheshimge iye, sebebi $\Delta \neq 0$. Solay etip, (4) tómendegishe kóriniske keledi:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_2\xi + b_2\eta}\right)\eta$$

Ulıwma alǵanda (2) kórinistegi differenciallıq teńleme Δ nıń mánisine qarap, máselen, $\Delta = 0$ bolǵanda, yamasa (3) túrlendiriw járdeminde ózgeriwshileri ajıralatuǵın differenciallıq teńlemege alıp kelinedi

Birinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemeler

Egerde birinshi tártipli differenciallıq teńleme belgisiz funkciyaǵa hám onıń tuwındısına qarata sızıqlı bolsa, yaǵnıy belgisiz funkciya hám onıń tuwındısı birinshi dárejede qatnassa, onda bunday teńleme sızıqlı differenciallıq teńleme dep ataladı.

Birinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemeniń normal túri tómendegidey bolıp jazıladı

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (5)$$

bunda $P(x), Q(x)$ - berilgen úzliksiz funkciyalar.

Bundaǵı $P(x)$ - sızıqlı teńlemeniń koefficienti, al $Q(x)$ - onıń saltań aǵzasıdelinedi. Eger (1) teńlemede $Q(x)\equiv 0$ bolsa, yaǵnıy bul

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \qquad (6)$$

túrine iye bolsa, onda ol birtekli sızıqlı teńleme dep ataladı. Usıǵan baylanıslı, egerde $Q(x)\neq 0$ bolsa, (1) teńleme birtekli emes sızıqlı teńleme delinedi.

(5) teńlemege sáykes keliwshi (6) túrindegi birtekli sızıqlı teńlemeni qarayıq hám onı tómendegi túrde jazayıq`

$$dy+P(x)ydx=0$$

bunnan ózgeriwshilerdi ajıracaq, onda

$$\frac{dy}{dx}+P(x)dx=0$$

teńlemesine iye bolamız. Bul ózgeriwshileri ajıralǵan teńleme. Onı integrallasaq $\ln|y|+\int P(x)dx=\ln C$ boladı, bunnan

$$y=Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (7)$$

bunda C erikli turaqlı. Bul (7) formula (6) birtekli sızıqlı teńlemeniń ulıwma sheshimin beredi.

Birtekli emes sızıqlı teńlemeni sheshiwdiń klassikalıq usıllarınıń biri bolǵan erikli turaqlını variaciyalaw usılın (Lagranj usılın) qarayıq.

Bul usıldı qollanǵanda dáslep (5) teńlemege sáykes keliwshi (6) birtekli teńlemesi integrallanadı. Onıń ulıwma sheshimi, joqarıda kórsetilgendey-aq, (7) formulası menen beriledi. Sol sebepli (7) funkciyası C erikli turaqlı bolǵanda (5) birtekli emes teńlemeniń sheshimi bola almaydı. Degen menen birtekli emes teńlemeniń sheshimin de usı túrde izleymiz, biraqta C tı erikli turaqlı emes, al x tıń bazı bir funkciyası dep esaplaymız, yaǵnıy erikli turaqlını variaciyalaymız (onı ózgeredi dep esaplaymız). Solay etip, (5) birtekli emes teńlemeniń sheshimin

$$y=C(x)e^{-\int P(x)dx} \qquad (8)$$

túrinde izleymiz, bunda C(x) -x tıń jańa belgisiz funkciyası. Sonda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{9}$$

tuwındısın esaplap (5) teńlemesine (8) hám (9) ańlatpaların qoyıp,

$$\frac{dC(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

qatnasına, yamasa

$$\frac{dC(x)}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx} \tag{10}$$

qatnacına iye bolamız. Bunı integrallap,

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C \tag{11}$$

funkciyasın tabıwǵa boladı. Endi bul tabılǵan (11) ańlatpasın izlengen (8) sheshimge aparıp qoyamız. Sonda

$$y = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \tag{12}$$

boladı, bunda S erikli turaqlı. Bul (12) formula (5) birtekli emes sızıqlı teńlemeniń ulıwma sheshimin beredi.

III-BAP.EKINSHI TÁRTIPLI DIFFERENCIALLÍQ TEŃLEMELER

1-§. Ekinshi tártipli sızıqlı teńlemelerdiń ulıwma qásiyetleri

Sızıqlı differenciallıq teńleme túsinigi.

Belgisiz funkciya $y = y(x)$ hám onıń y', y'' tuwındıları birinshi dárejede qatnasqan

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x) \qquad (1)$$

teńleme ekinshi tártipli sızıqlı teńleme deyiledi. Bul jerde $p_1(x), p_2(x)$ teńlemeniń koefficientleri $q(x)$ bolsa saltań aǵza deyilib, olar bazı bir (a, b) aralıqta anıqlanǵan funkciyalar.

(1) teńleme ekinshi tártipli sızıqlı bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńleme dep te júritiledi.

Eger (1) shi teńlemede $q(x) \equiv 0$ bolsa, yaǵnıy teńleme

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \qquad (2)$$

kóriniske iye bolsa, onı ekinshi tártipli sızıqlı bir tekli differenciallıq teńleme deyiledi.

Mısal ushın

$$y'' + xy' + (x^2 + 1)y = \cos x,$$
$$y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = -3e^{x^2}$$

teńlemeler bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńlemeler.

$$y'' - \frac{1}{x}y' - xy = 0,$$
$$y'' - \frac{1}{\sqrt{x}}y' + (x + \sqrt{x}) \cdot y = 0$$

teńlemeler bolsa bir tekli differenciallıq teńlemeler boladı.

Endi sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń qásiyetlerin qeltiremiz.

1. (1) teńlemede

$$x = \varphi(t)$$

($\varphi(t)$ eki mártebe differenciallanıwshı funkciya) túrlendiriw orınlansa ol jáne sızıqlı teńlemege aylanadı.

Dálillew. (1) teńlemede $x=\varphi(t)$ túrlendiriw jasaymız. Bizge belgili

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)},\quad \varphi'(t)\neq 0$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy^2}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi'^2(t)}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{\varphi'''(t)}{\varphi'^2(t)}.$$

Nátiyjede (1) teńlemede

$$\frac{1}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{dy^2}{dt^2}-\frac{\varphi'''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{dy}{dt}+p_1(\varphi(t))\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}+p_2(\varphi(t))\cdot y=q(\varphi(t))$$

yaǵnıy

$$z''+\frac{1}{u}\left(2u'+p_1(x)\cdot u\right)\cdot z'+\frac{1}{u}\left(u''+p_1(x)\cdot u'+p_2(x)\cdot u\right)\cdot z=$$

$$=\frac{1}{u}\left(q(x)-v''-p_1(x)\cdot v'-p_2(x)\cdot v\right)$$

$$y''=\left(\frac{\varphi'''(t)}{\varphi'(t)}-p(\varphi(t)\varphi'(t))\right)y'+p_2(\varphi(t))\cdot y=q(\varphi(t))$$

Bul ekinshi tártipli sızıqlı teńleme.

2. (1) teńlemede belgisiz funkciya

$$y=u(x)\cdot z+v(x)\quad (z=z(x))$$

sızıqlı túrlendiriw nátiyjesinde ($u(x)$, $v(x)$ eki mártebe differenciallanıwshı funkciya) jáne sızıqlı teńlemege aylanadı.

Dálillew. (1) shi teńlemede $y=u(x)\cdot z+v(x)$ túrlendiriw jasaymız. Bizge belgili

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot z+v(x)\right]=u(x)\cdot z'+u'(x)\cdot z+v'(x),$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[u(x)\cdot z'+u'(x)\cdot z+v'(x)\right]=$$
$$u\cdot z''+2u'\cdot z'+u''\cdot z+v''$$

Nátiyjede (1) teńleme tómendegi

$$u\cdot z''+2u'\cdot z'+u''\cdot z+v''+p_1(x)\left[u\cdot z'+u'\cdot z+v'\right]+$$
$$+p_2(x)\left[u\cdot z+v\right]=q(x)$$

yaǵnıy

$$z''+\frac{1}{u}\left(2u'+p_1(x)\cdot u\right)\cdot z'+\frac{1}{u}\left(u''+p_1(x)\cdot u'+p_2(x)\cdot u\right)\cdot z=$$
$$=\frac{1}{u}\left(q(x)-v''-p_1(x)\cdot v'-p_2(x)\cdot v\right)$$

teńlemege keledi. Bul ekinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńleme.

Eskertiw. (2) ekinshi tártipli sızıqlı bir tekli differenciallıq teńlemede $y=u(x)\cdot z$ túrlendiriw orınlansa, teńleme jáne bir tekli teńlemege aylanadı.

Endi (1) differenciallıq teńleme sheshiminiń bar bolıwı hámde birden birligi haqqındaǵı teoremanı keltiremiz.

Teorema. Eger

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=q(x) \qquad (1)$$

teńlemede $p_1(x)$, $p_2(x)$ hámde $q(x)$ funkciyalar X kóplikte $(X\subset R)$ úzliksiz bolsa, onda X kóplikte (1) teńlemeniń

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad y'\big|_{x=x_0}=y'_0$$

baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimi bar hám ol birden bir boladı.

2-§. Ekinshi tártipli sızıqlı bir tekli hám bir tekli emes differenciallıq teńlemeler

1. Bul paragrafta

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \qquad (2)$$

bir tekli sızıqlı differenciallıq teńleme hám onıń ulıwma sheshimin tabıw menen shuǵıllanamız.

Dáslep ayırım tastıyıqlardı hám túsiniklerdi keltiremiz.

Teorema. Eger $y_1=y_1(x)$ funkciya (2) teńlemeniń sheshimi bolsa, $C\cdot y_1$ de ($C-$qálegen turaqlı san) usı teńlemeniń sheshimi boladı.

Dálillew. Shártke kóre $y_1 = y_1(x)$ funkciya (2) teńlemeniń sheshimi. Demek,

$$y_1'' + p_1(x)\cdot y_1' + p_2(x)\cdot y_1 \equiv 0 \qquad (3)$$

Endi $(C\cdot y_1)'' + p_1(x)\cdot(C\cdot y_1)' + p_2(x)\cdot(C\cdot y_1)$ ańlatpanı qaraymız. Bizge belgili

$$(C\cdot y_1)'' = C\cdot y_1'',$$
$$(C\cdot y_1)' = C\cdot y_1'$$

Bul teńliklerdi hám (3) qatnastı esapqa alıp, tabamız:

$$\begin{aligned}&(C\cdot y_1)'' + p_1(x)\cdot(C\cdot y_1)' + p_2(x)\cdot(C\cdot y_1) = C\cdot y_1'' + p_1(x)\cdot C\cdot y_1' + \\ &+ p_2(x)\cdot C\cdot y_1 = C\Big(y_1'' + p_1(x)\cdot y_1' + p_2(x)\cdot y_1\Big) = C\cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Bul bolsa $C\cdot y_1$ berilgen (2) differenciallıq teńlemeniń sheshimi ekenligin bildiredi. Teorema dálillendi.

Teorema. Eger $y_1 = y_1(x)$ hámde $y_2 = y_2(x)$ funkciyalardıń hár biri (2) teńlemeniń sheshimleri bolsa, $y_1 + y_2$ funkciya da usı teńlemeniń sheshimi boladı.

Dálillew. Shártke kóre $y_1 = y_1(x)$ hámde $y_2 = y_2(x)$ funkciyalardıń hár biri (2) teńlemeniń sheshimleri. Demek,

$$\left.\begin{aligned}&y_1'' + p_1(x)\cdot y_1' + p_2(x)\cdot y_1 \equiv 0,\\ &y_2'' + p_1(x)\cdot y_2' + p_2(x)\cdot y_2 \equiv 0.\end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Endi

$$(y_1+y_2)'' + p_1(x)\cdot(y_1+y_2)' + p_2(x)\cdot(y_1+y_2)$$

ańlatpanı qaraymız. Bizge belgili

$$(y_1+y_2)'' = y_1'' + y_2'',$$
$$(y_1+y_2)' = y_1' + y_2'$$

Bul teńliklerdi hám (4) qatnastı esapqa alıp, tabamız:

$$(y_1+y_2)''+p_1(x)(y_1+y_2)'+p_2(x)(y_1+y_2)=$$
$$=y_1''+y_2''+p_1(x)y_1'+p_1(x)y_2'+p_2(x)y_1+p_2(x)y_2=$$
$$=\left(y_1''+p_1(x)y_1'+p_2(x)y_1\right)+\left(y_2''+p_1(x)y_2'+p_2(x)y_2\right)=0$$

Bul bolsa y_1+y_2 funkciya berilgen (2) differenciallıq teńlemeniń sheshimi ekenligin bildiredi. Teorema dálillendi.

Nátiyje. Eger y_1 hámde y_2 funkciyalar (2) teńlemeniń sheshimleri bolsa, onda $C_1y_1+C_2y_2$ funkciya da ($C_1,\ C_2$ - qálegen turaqlı sanlar) usı teńlemeniń sheshimi boladı.

Bul nátiyjeniń dálilleniwi joqarıda keltirilgen teoremadan kelip shıǵadı.

2. Solay etip $y_1=y_1(x)$ hámde $y_2=y_2(x)$ funkciyalar (2) teńlemeniń sheshimleri bolsa, onda

$$y=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2$$

funkciya da (2) teńlemeniń sheshimi boladı eken.

Tábiyiy túrde bul sheshim berilgen (2) differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi bola ma degen soraw tuwıladı. Bul sorawǵa juwap beriw ushın funkciyalardıń sızıqlı erikli hám sızıqlı baylanıslı bolıwı haqqındaǵı túsiniklerdi kiritiwdi talap etedi.

Meyli (a,b) aralıqta $\varphi_1(x)$ hám $\varphi_2(x)$ funkciyalar berilgen bolsın.

Anıqlama. Eger sonday α_1 hámde α_2 sanlar tabılıp hám olardıń keminde birewi nol`den ózgeshe bolıp tómendegi

$$\alpha_1\cdot\varphi_1(x)+\alpha_2\cdot\varphi_2(x)=0$$

teńlik orınlansa $\varphi_1(x)$ hám $\varphi_2(x)$ funkciyalar (a,b) da sızıqlı baylanıslı dep ataladı.

Anıqlama. Eger $\varphi_1(x)$ hámde $\varphi_2(x)$ funkciyalar ushın

$$\alpha_1\cdot\varphi_1(x)+\alpha_2\cdot\varphi_2(x)=0$$

teńlik tek $\alpha_1 = 0$ hám $\alpha_2 = 0$ bolǵanda orınlansa $\varphi_1(x)$ hám $\varphi_2(x)$ funkciyalar (a,b) da sızıqlı erikli funkciyalar dep ataladı.

3. Meyli $\varphi_1(x)$ hám $\varphi_2(x)$ funkciyalar

$$y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y \equiv 0$$

differencial teńlemeniń sheshimleri bolsın.

Tómendegi

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

funkcional determinant Vronskiy determinantı dep ataladı.

Teorema. Eger (2) teńlemeniń $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimleri (a,b) da sızıqlı baylanıslı bolsa, onda qálegen $\forall x \in (a,b)$ da $W(x) = 0$ boladı.

Dálillew. $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimler (a,b) da sızıqlı baylanıslı bolsın. Onda

$$\alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0$$

bolıp α_1 hám de α_2 sanlardıń keminde birewi nólden o`zgeshe. Keyingi teńliktiń hár eki tárepin differenciallap, α_1 hám de α_2 lerge qarata tómendegi

$$\begin{cases} \alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x) = 0 \\ \alpha_1 \cdot y_1'(x) + \alpha_2 \cdot y_2'(x) = 0 \end{cases}$$

sistemanı payda etemiz. $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimler (a,b) da sızıqlı baylanıslı bolǵanlıǵı sebepli bul sistema trivial bolmaǵan sheshimge iye. Sonlıqtan sistemanıń determinantı

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad (\forall x \in (a,b))$$

boladı. Demek (a,b) da

$$W(x) = 0$$

Teorema dálillendi.

4. Endi $W(x)=0$ bolıwınan $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimlerdiń sızıqlı baylanıslı bolatuǵınlıǵın ańlatatuǵın sonday aq Vronskiy determinantın teńlemeniń koefficienti arqalı jazılıwın kórsetetuǵın teoremanı keltiremiz.

Teorema. Eger bazı bir $x_0 \in (a,b)$ noqatta $W(x_0)=0$ bolsa onda $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimler sızıqlı baylanıslı boladı.

Teorema. Tómendegi

$$W(x)=W(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)dt}$$

formula orınlı, bunda $x_0 \in (a,b)$

Ádette bul formula Liuvill (Ostrogradskiy-Liuvill) formulası dep ataladı.

Joqarıda keltirilgen teoremadan tómendegi nátiyjeler kelip shıǵadı.

1) Liuvill formulası $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimlerdiń Vronskiy determinantı (a,b) da nol`ge teń yamasa $(a,b)$ bazı bir noqatında nol`ge aylanbawın kórsetedi.

2) Eger Vronskiy determinantı $W(x)=0$ bolsa onda $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimler sızıqlı baylanıslı boladı hám kerisinshe.

3) Eger Vronskiy determinantı $W(x)\neq 0$ bolsa onda $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimler sızıqlı erikli boladı.

5. Anıqlama. Ekinshi tártipli sızıqlı bir tekli differenciallıq teńlemeniń $y_1(x)$ hám de $y_2(x)$ sheshimleri sızıqlı erikli bolsa, olar teńlemeniń fundamental sheshimler sisteması dep ataladı.

Teorema. Ekinshi tártipli sızıqlı bir tekli differenciallıq teńleme fundamental sheshimler sistemasıńa iye.

Dálillew. Bizge belgili,

$$y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y \equiv 0$$

teńleme (bunda $p_1(x)$ hám $p_2(x)$ lar (a,b) da úzliksiz funkciyalar) baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın birden bir sheshimge iye.

Eki túrli baslanǵısh shártlerdi qaraymız

$$y_1\big|_{x=x_0}=1,\quad y_1'\big|_{x=x_0}=0,$$
$$y_2\big|_{x=x_0}=0,\quad y_2'\big|_{x=x_0}=1.$$

Bul shártlerdi qanaatlandırıwshı $y_1=y_1(x),\quad y_2=y_2(x)$ sheshimler bar boladı. Differenciallıq teńleme sheshimleriniń x_0 noqattaǵı Vronskiy determinantı

$$W(x_0)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

boladı. Sonlıqtan $y_1(x)$ hám $y_2(x)$ ler berilgen teńlemeniń sızıqlı erikli sheshimleri, birden bir fundamental sheshimler sisteması boladı. Teorema dálillendi.

Teorema. Eger $y_1(x)$ hám $y_2(x)$ ler (a,b) da

$$y''+p_1(x)\cdot y'+p_2(x)\cdot y=0 \qquad (2)$$

teńlemeniń fundamental sheshimler sisteması bolsa, bul teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$$

kóriniste boladı, bunda $C_1,\ C_2$ - qálegen turaqlı sanlar.

Dálillew. $y_1(x)$ hám $y_2(x)$ ler (a,b) da (2) teńlemeniń fundamental sheshimler sisteması bolsın. Onda joqarıdaǵı teoremaǵa kóre

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_1(x) & y_1'(x)\\ y_2(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0,\quad (\forall x\in(a,b))$$

boladı. 1-nátiyjege kóre $y=C_1\cdot y_1(x)+C_2\cdot y_2(x)$ da (2) teńlemeniń sheshimi boladı.

(a,b) da qálegen x_0 noqat alıp baslanǵısh shártlerdi tómendegishe

$$y_1\big|_{x=x_0}=y_1(x_0),\quad y_1'\big|_{x=x_0}=y_1'(x_0),$$
$$y_2\big|_{x=x_0}=y_2(x_0),\quad y_2'\big|_{x=x_0}=y_2'(x_0).$$

anıqlaymız. Bizge belgili,

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1(x_0) + C_2 \cdot y_2(x_0) = y_0 \\ C_1 \cdot y_1'(x_0) + C_2 \cdot y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

sistema $W(x_0) \neq 0$ bolǵanlıǵı sebepli birden bir $\overline{C_1}, \overline{C_2}$ - sheshimge iye. Demek $\overline{C_1} y_1(x) + \overline{C_2} y_2(x)$ sheshim qálegen baslanǵısh shártti qanaatlandıratuǵın sheshim bolǵanlıǵınan

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

tiń berilgen (2) teńlemeniń ulıwma sheshimi ekenligi kelip shıǵadı. Teorema dálillendi.

6. Eger

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0 \qquad (2)$$

teńlemeniń bir sheshimi málim bolsa onda (2) teńlemeni birinshi tártipli differenciallıq teńlemege keltiriw, sonday aq bul sheshim menen sızıqlı baylanıslı bolmaǵan ekinshi sheshimdi de tabıw múmkinligi haqqındaǵı teoremalardı keltiremiz.

Teorema. Eger $y_2(x)$ funkciya (2) differenciallıq teńlemeniń bir sheshimi bolsa, onda (2) teńlemeni sheshiw birinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemeni sheshiwge keledi.

Dálillew. Shártke kóre $y_1(x)$ funkciya (2) teńlemeniń sheshimi. Sonlıqtan,

$$y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1 \equiv 0$$

Tómendegi

$$y = y_1 \cdot z \qquad (z = z(x))$$

túrlendiriwdi orınlaymız. Onda

$$y' = y_1' \cdot z + y_1 \cdot z',$$

$$y'' = y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z''$$

boladı. Bul y, y', y'' lardıń mánislerin (2) teńlemedegi y, y', y'' lar ornına qoyıp, $y_1(x)$ funkciya (2) teńlemeniń sheshimi ekenligin esapqa alıp tabamız:

$$y_1'' \cdot z + 2y_1' \cdot z' + y_1 \cdot z'' + p_1(x) \cdot \left(y_1' \cdot z + y_1 \cdot z'\right) + p_2(x) \cdot y_1 \cdot z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(y_1'' + p_1(x) \cdot y_1' + p_2(x) \cdot y_1\right) \cdot z + \left(2y_1' + p_1(x) \cdot y_1\right) \cdot z' + y_1 \cdot z'' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 \cdot z'' + \left(2y_1' + p_1(x) \cdot y_1\right) \cdot z' = 0$$

keyingi teńlemede $z' = u \quad \left(u = u(x)\right)$ dep alınsa nátiyjede tómendegi

$$y_1 \cdot u' + \left(2y_1' + p_1(x) \cdot y_1\right) \cdot u = 0$$

birinshi tártipli differenciallıq teńleme payda boladı. Solay etip (2) teńlemeni sheshiw birinshi tártipli differenciallıq teńlemeni sheshiwge keledi. Teorema dálillendi.

7. Eger

$$y = y_1 \cdot z, \qquad z' = u \quad \left(u = u(x)\right)$$

qatnaslardan

$$y = y_1 \cdot \int u(x)dx$$

bolıwın itibarǵa alıp onı (2) tńlemege qollansaq (2) teńleme birinshi tártipli differenciallıq teńlemege keletuǵınlıǵın kóremiz.

Teorema. Eger $y_1(x)$ funkciya (2) differenciallıq teńlemeniń sheshimi bolsa, onda usı sheshim menen sızıqlı erikli bolǵan ekinshi sheshim tómendegi

$$y_2 = y_2(x) = y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p_1(x)dx}}{y_1^2} dx$$

formula menen tabıladı.

8. Endi ekinshi tártipli bir tekli bolmaǵan sızıqlı

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x) \qquad (1)$$

differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimin tabıwdı qaraymız. Bunda (1) teńlemege sáykes bolǵan

$$y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = 0$$

bir tekli sızıqlı teńlemeler haqqındaǵı maǵlıwmatlardan paydalanamız.

Bizge málim (1) teńlemedegi $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ funkciyalardıń hár biri (a,b) da úziliksiz bolsa onda (1) teńlemeniń

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0'$$

baslanǵısh shártlerdi qanaatlandıratuǵın sheshimi bar boladı hám bul sheshim birden bir boladı.

Teorema. Bir tekli bolmaǵan sızıqlı differenciallıq teńleme

$$y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = q(x)$$

niń ulıwma sheshimi usı teńlemeniń bazı bir dara sheshimi hám bir tekli sızıqlı teńleme

$$y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = 0 \qquad (2)$$

niń ulıwma sheshimi qosındısınan ibarat boladı.

Dálillew. Meyli $\varphi(x)$ funkciya (a,b) da (1) teńlemeniń dara sheshimi $u(x)$ funkciya bolsa (2) teńlemeniń ulıwma sheshimi bolsın.

Onda

$$\varphi''(x) + p_1(x)\cdot\varphi'(x) + p_2(x)\cdot\varphi(x) \equiv q(x),$$
$$u''(x) + p_1(x)\cdot u'(x) + p_2(x)\cdot u(x) \equiv 0$$

boladı. Bul teńliklerdi aǵzama aǵza qosıp tabamız:

$$u''(x) + \varphi''(x) + p_1(x)\cdot u'(x) + p_1(x)\cdot\varphi'(x) + p_2(x)\cdot u(x) +$$
$$+ p_2(x)\cdot\varphi(x) \equiv q(x) \quad \Rightarrow$$
$$\big(u(x)+\varphi(x)\big)'' + p_1(x)\big(u(x)+\varphi(x)\big)' + p_2(x)\big(u(x)+\varphi(x)\big) \equiv q(x)$$

Demek

$$y = u(x) + \varphi(x)$$

funkciya (1) teńlemeniń sheshimi boladı eken.

Bizge belgili bir tekli (2) differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$u(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)$$

kóriniste bolıp, bunda $y_1(x)$ hám $y_2(x)$ ler fundamental sheshimler sisteması, C_1 hám C_2 qálegen turaqlı sanlar boladı. Demek

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \varphi(x).$$

Endi bul teńliktiń hár eki tárepin differenciallap tabamız:

$$y' = C_1 \cdot y_1'(x) + C_2 \cdot y_2'(x) + \varphi'(x).$$

Nátiyjede tómendegi

$$\begin{cases} C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 = y - \varphi(x) \\ C_1 \cdot y_1' + C_2 \cdot y_2' = y' - \varphi'(x) \end{cases} \qquad (5)$$

sistema payda boladı. Bul sistemada $y_1(x)$ hám $y_2(x)$ (2) teńlemeniń fundamental sheshimler sisteması. Sonlıqtan $x \in (a, b)$ da

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demek $x_0 \in (a, b)$ noqatta hámde $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ hám $\varphi(x_0) = \varphi_0$ lardıń hár qanday mánislerinde joqarıdaǵı sistema C_1 hám C_2 lerge qarata sheshimge iye. Bul jaǵdayda

$$y = u(x) + \varphi(x) = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) + \varphi(x)$$

tıń (1) bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi ekenligin bildiredi. Teorema dálillendi.

9. Endi ekinshi tártipli bir tekli bolmaǵan sızıqlı (1) differenciallıq teńlemeniń dara sheshimin tabıw usıllarınan birewin keltiremiz.

Meyli

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = q(x) \qquad (1)$$

bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńleme berilgen bolsın. Bul teńlemede $p_1(x)$, $p_2(x)$, $q(x)$ lardıń hár biri (a, b) da berilgen úziliksiz funkciyalar.

Teńlemege sáykes bir tekli

$$y'' + p_1(x)\cdot y' + p_2(x)\cdot y = 0$$

teńlemeni qaraymız. Meyli $y_1 = y_1(x)$ hám $y_2 = y_2(x)$ bul teńlemeniń fundamental sheshimler sisteması bolsın. Onda (2) teńlemeniń ulıwma sheshimi

$$y = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2$$

boladı. Bunda C_1 hám C_2 qálegen turaqlı sanlar. A`lbette $y = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y$ funkciya bir tekli bolmaǵan (1) teńlemeniń sheshimi bolmaydı.

$y = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2$ degi C_1 hám C_2 lerdi x ózgeriwshiniń sonday funkciyası bolsın dep qaraymız

$$y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2$$

funkciya (1) bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńlemeniń sheshimi bolsın. Másele sonday $C_1(x)$ hám $C_2(x)$ lardı tabıwdan ibarat. Sol maqsetti gózlep sońǵı teńliktiń hár eki tárepin differenciallaymız:

$$y' = C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2' + C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2$$

Qaralıp atırǵan $C_1(x)$ hám $C_2(x)$ lar ushın

$$C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0$$

bolsın dep qaraymız. Nátiyjede

$$y' = C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2'$$

boladı. Bul teńliktiń hár eki jaǵın differenciallaymız:

$$y'' = C_1(x)\cdot y_1'' + C_2(x)\cdot y_2'' + C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2'$$

Endi bul tabılǵan y, y', y'' lardıń mánislerin (1) teńlemedegi y, y', y'' lar ornına qoyıp, tabamız:

$$C_1(x)\cdot y_1'' + C_2(x)\cdot y_2'' + C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' +$$
$$+p_1(x)\cdot\left(C_1(x)\cdot y_1' + C_2(x)\cdot y_2'\right) + p_2(x)\cdot\left(C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2\right) = q(x) \Rightarrow$$
$$C_1(x)\cdot\left(y_1'' + p_1(x)\cdot y_1' + p_2(x)\cdot y_1\right) + C_2(x)\cdot\left(y_2'' + p_1(x)\cdot y_2' + p_2(x)\cdot y_2\right) +$$
$$+C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = q(x).$$

Eger

$$y_1'' + p_1(x)\cdot y_1' + p_2(x)\cdot y_1 = 0$$
$$y_2'' + p_1(x)\cdot y_2' + p_2(x)\cdot y_2 = 0$$

bolıwın itibarǵa alsaq, onda keyingi teńleme

$$C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = q(x)$$

kóriniske keledi.

Nátiyjede $C_1'(x)$ hám $C_2'(x)$ lardı tabıw ushın tómendegi

$$\begin{cases} C_1'(x)\cdot y_1 + C_2'(x)\cdot y_2 = 0 \\ C_1'(x)\cdot y_1' + C_2'(x)\cdot y_2' = q(x) \end{cases}$$

sistemaǵa kelemiz.Bul sistema koefficientlerinen dúzilgen Vronskiy determinantı

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

$\forall x \in (a,b)$ da nol`den ózgeshe. Demek sistema birden bir sheshimge iye.

Solay etip $C_1\ (x)$ hám $C_2(x)$ lardı tabıw ushın tómendegi

$$C_1'(x) = -\frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)},\quad C_2'(x) = \frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}$$

o`zgeriwshileri ajıralatuǵın differenciallıq teńleme payda boladı. Olardı sheship tabamız:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)}dx + \overline{C_1},\quad C_2(x) = \int \frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}dx + \overline{C_2}$$

Tabılǵan $C_1\ (x)$ hám $C_2(x)$ lardıń mánislerin (5) sistemasındaǵı $C_1\ (x)$ hám $C_2(x)$ lar ornına qoyamız:

$$y = \left[-\int \frac{y_2\cdot q(x)}{W(x)}dx + \overline{C_1}\right]y_1 + \left(\int \frac{y_1\cdot q(x)}{W(x)}dx + \overline{C_2}\right)y_2$$

$$y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = x^2 - 1$$

Bul (1) bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńlemeniń ulıwma sheshimi boladı. Keyingi teńlikten (1) bir tekli bolmaǵan differenciallıq teńlemeniń dara sheshimi

$$\varphi(x) = y_2 \int \frac{y_1 \cdot q(x)}{W(x)} dx - y_1 \int \frac{y_2 \cdot q(x)}{W(x)} dx$$

boladı. Dara sheshimdi tabıwdaǵı bul usul Lagranj usulı dep ataladı.

3-§. Ekinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesiniń qoyılıwı

Ekinshi tártipli differenciallıq teńleme tómendegi kóriniste boladı

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

bul jerde $y(x)$ - belgisiz funkciya. Ekinshi tártipli differenciallıq teńlemelerge mexanikanıń túrli máseleleri alıp keledi. Máselen, massası m ge teń bolǵan materiallıq noqat x kósher boylap háreket etpekte. Bul noqatqa tásir etiwshi kúsh waqıttıń funkciyası sıpatında berilgen: $F = F(t)$. Qálegen t waqıt momentinde kósherdegi noqattıń jaǵdayın anıqlaytuǵın háreket nızamı $x = x(t)$ funkciya járdeminde beriledi. N`yutonnıń ekinshi nızamı boyınsha $ma = F$ teńlikke iye bolamız, bul jerde a - noqattıń tezleniwi, yaǵnıy $a = \frac{d^2x}{dt^2}$. Solay etip, $x(t)$ funkciya tómendegi differenciallıq teńlemeni qanaatlandırıwı kerek

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} F(t) \qquad (2)$$

Ulıwmaraq jaǵdayda F kúsh tek ǵana t waqıt momentine emes, al t momenttegi noqattıń jaǵdayına da ǵárezli boladı (máselen, tartıw kúshi yamasa serppelilik kúshi). Onda $F = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$ boladı hám (2) teńlemeniń ornına ulıwmaraq kóriniste bolǵan tómendegi teńlemege iye bolamız:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \qquad (3)$$

Differenciallıq teńlemeler ushın onıń anıq bir sheshimin payda etetuǵın qosımsha shártlerdi tabıw máselesi úlken áhmiyetke iye. (3) teńleme ushın bunday shártler qanday kóriniske iye boladı? Eger bazı bir t_0 waqıt momentindegi noqattıń jaǵdayı, sonday-aq onıń t_0 momenttegi tezligi berilgen bolsa, onda noqattıń bunnan keyingi háreketi usı shártler arqalı bir mánisli anıqlanadı. Sonlıqtan bul shártlerdi tómendegi kóriniste jazamız:

$$x\Big|_{t=t_0}=x_0\,,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=t_0}=x_0^{'}$$

bul jerde $t_0, x_0, x_0^{'}$ - berilgen sanlar. Geometriyalıq tárepten bul mınanı bildiredi: berilgen $\left(t_0, x_0\right)$ noqattan ótiwshi hám usı noqatta berilgen $x_0^{'}$ múyeshlik koefficienti menen xarakterlenetuǵın baǵıtqa iye bolǵan (3) teńlemeniń integral sızıǵın tabıw kerek. Bunday məsele (1) teńleme ushın Koshi məselesi dep ataladı.

Ádette (1) teńleme y'' qa qarata sheshiledi, yaǵnıy to`mendegi ko`riniske keltiriledi

$$y''=f\left(x,y,y'\right) \tag{4}$$

(4) teńleme ushın Koshi məselesi sheshiminiń bar bolıwı həm birden-birligi haqqındaǵı teoremanı keltiremiz.

1-teorema. Eger $x_0, y_0, y_0^{'}$ mənislerdiń bazı bir do`gereginde $f\left(x,y,y'\right)$ funkciya anıqlanǵan, úzliksiz həm úzliksiz $\frac{\partial f}{\partial y}$ həm $\frac{\partial f}{\partial y'}$ dara tuwındılarǵa iye bolsa, onda $(x_0, y_0, y_0^{'})$ noqattıń sonday do`geregi tabıladı, (4) teńleme ushın $y\Big|_{x=x_0}=y_0\,,\quad y'\Big|_{x=x_0}=y_0^{'}$ baslanǵısh shərtlerge iye bolǵan Koshi məselesi tek ǵana bir sheshimge iye boladı.

Joqarıda aytıp o`tilgenindey, ekinshi tərtipli teńlemeniń sheshimi eki qəlegen turaqlıǵa ǵərezli boladı, yaǵnıy $y=\varphi\left(x,C_1,C_2\right)$ ko`riniske iye boladı. Bul Koshi məselesi sheshiminiń bar bolıwı həm birden-birligi menen ústpe-úst túsedi:

$\varphi(x_0, C_1, C_2) = y_0$, $\varphi'(x_0, C_1, C_2) = y_0'$ teńliklerden, C_1 həm C_2 mənisler bir mənisli anıqlanadı, demek (1) teńlemeniń de dara sheshimi anıqlanadı.

Mısal. $y'' + y = 0$ teńlemeni qaraymız. Bul teńleme $y_1 = \cos x$ həm $y_2 = \sin x$ dara sheshimlerge iye boladı. To`mendegi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

funkciya da C_1 həm C_2 turaqlılardıń qəlegen mənislerinde sheshim boladı. Haqıyqatında da,

$$(C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + (C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1(y_1'' + y_1) + C_2(y_2'' + y_2) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0$$

Bul sheshim eki qəlegen C_1 həm C_2 turaqlılarǵa ǵərezli boladı. x_0, y_0, y_0' sanlar qanday bolsa da (Koshi məselesiniń baslanǵısh shərtleri) $y\big|_{x=x_0} = y_0$, $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ shərtlerdi qanaatlandırıwshı $C_1 \cos x + C_2 \sin x$ ko`rinistegi tek ǵana bir funkciya bar boladı. Məselen, eger $x_0 = 0, y_0 = 1, y_0' = 1$ bolsa, onda $C_1$ həm $C_2$ turaqlılardı tabıw ushın to`mendegi shərtlerge iye bolamız

$$y\big|_{x=x_0} = C_1 cos 0 + C_2 \sin 0 = 1, y'\big|_{x=x_0} = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 1$$

bunnan C_1=1, C_2=1, yaǵnıy $y = \cos x + \sin x$ kelip shıǵadı.

JUWMAQLAW

Fizika, ximiya, medicina hám basqa pánlerde ushırasatuǵın kóplegen processler differenciallıq teńlemeler járdeminde xarakterlenedi. Bul teńlemelerdi úyreniw menen tiyisli processler haqqında bazı bir maǵlıwmatqa iye bolamız. Usı differenciallıq teńlemeler úyrenilip atırǵan processtiń matematikalıq modelinen ibarat boladı. Bul model` qansha jetilisken bolsa, differenciallıq teńlemelerdi úyreniw nátiyjesinde alınǵan maǵlıwmatlar processlerdi sonshalıq tolıq xarakterleydi. Tábiyatta ushırasatuǵın túrli processler birdey differenciallıq teńlemeler menen xarakterleniwi múmkin, yaǵnıy eger bazı bir matematikalıq model` tolıq úyrenilse, tiyisli nátiyjeden túrli processlerdi túsindiriwde paydalanıw múmkin. Demek, differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma teoriyası hám ámeliy máselelerdi sheshiwge qollanılıwı úlken áhmiyetke iye.

Bul pitkeriw qánigelik jumısta ekinshi tártipli differenciallıq teńlemeler hám olar ushın Koshi máselesi úyrenildi. Pitkeriw qánigelik jumısta differenciallıq teńlemeler haqqında túsinik, differenciallıq teńlemege alıp keletuǵın máseleler, differenciallıq teńlemeniń sheshimi, sheshimniń bar bolıwı hám birden-birligi haqqında teoremalar, ózgeriwshileri ajıralatuǵın hám bir tekli differenciallıq teńlemeler, sızıqlı teńlemeler, ekinshi tártipli sızıqlı differenciallıq teńlemelerdiń ulıwma qásiyetleri, ekinshi tártipli differenciallıq teńlemeler ushın Koshi máselesi úyrenildi.

Ádebiyatlar

1.M. S. Salohitdinov, G`.N.Nasritdinov. Oddiy differencial tenglamalar, T.O`qituvchi, 1982.

2. Jo‘raev T. hám boshqalar. Oliy matematika asoslari. 2-tom. T.: «O‘zbekiston». 1999.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2 том. СПб.: «Мифрил». 1996. 426с.

4.T.N.Qori-Niyoziy. Asosiy matematik analiz kursi, 3-qism.T.1969.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.:Интеграл-Пресс, 1998,-208с.

6. G. M. Fixtengol`c. Matematik analiz asoslari. II-qism, T. O`qituvchi, 1985.

7. А.Г. Мордкович, А.С. Солодников. Математический анализ. М. Высшая школа, 1990.

8. www.tdpu.uz

9. www.pedagog.uz

10. www.edu.uz

11. www.nadlib.uz (A.Navoiy nomidagi O’z.MK)